

**Ю.Б.Зелінський** (Ін-т математики НАН України, Київ)

## **Розвиток комплексного аналізу та теорії потенціалу в Інституті математики НАНУ за 1991 – 2013 рр.**

Для того, щоб історія досліджень з комплексного аналізу в Інституті математики НАНУ була більш зрозумілою, варто зупинитися спочатку на попередніх етапах реорганізацій в інституті, що привели до створення (точніше сказати відновлення) в 1989 році відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу.

1 липня 1939 року в Інституті математики було створено відділ теорії функцій комплексної змінної під керівництвом академіка М. О. Лаврентьєва, який одночасно керував інститутом.

1 березня 1960 року керівником відділу теорії функцій комплексної змінної призначено доктора фіз.-мат. наук П. Ф. Фільчакова.

11 липня 1963 року відділ теорії функцій комплексної змінної зреформовано у відділ прикладної математики і одночасно створено відділ теорії функцій ІМ АН УРСР. Керівником цього відділу призначено доктора фіз.-мат. наук В. К. Дзядика. Починаючи з цього часу почав складатися і зростати колектив дослідників, який продовжив та розвинув засновані М. О. Лаврентьєвим наукові напрямки в комплексному аналізі та теорії потенціалу.

1 серпня 1974 році від відділу теорії функцій відокремився відділ геометричної теорії функцій та топології. Керівником відділу було призначено члена кореспондента АН УРСР Корнєйчука Миколу Павловича, який після обрання переїхав у Київ. До цього він працював у Дніпропетровському університеті. В складі нового відділу було створено дві лабораторії: топологічних методів аналізу (завідувач доктор фіз.-мат.наук Трохимчук Юрій Юрійович) та комплексного аналізу (завідувач доктор фіз.-мат.наук Тамразов Промарз Мелікович).

Після смерті завідувача відділу алгебри члена кореспондента АН УРСР Сергія Миколайовича Чернікова в 1987 р. на базі цього відділу та лабораторії топологічних методів аналізу створено відділ алгебри та топології під керівництвом Ю.Ю.Трохимчука. В 1989 році 1 березня лабораторію комплексного аналізу було реорганізовано у відділ комплексного аналізу та теорії потенціалу під керівництвом П.М.Тамразова. Невисокі зарплати науковців у перші роки незалежності України часто змушували вчених шукати кращих заробітків у інших країнах. Від'їзд Ю.Ю.Трохимчука на тривалу роботу в Польщу, а також утворення відділу алгебри під керівництвом А.В.Ройтера викликало спочатку перетворення відділу алгебри та топології в лабораторію топологічних методів аналізу (завідувач доктор фіз.-мат.наук Анатолій Васильович Бондар) при відділі комплексного аналізу та теорії потенціалу в 1996 р., а пізніше, в зв'язку з закриттям лабораторій в інституті, ліквідації її як окремої адміністративної одиниці в 1999 р. Цим можна пояснити, чому дослідження з комплексного аналізу та теорії потенціалу велися не тільки в однойменному відділі, а і в інших споріднених одиницях інституту.

Основними напрямками досліджень, що проводяться у відділі є геометрична теорія функцій однієї та багатьох комплексних змінних, розробка аналітичних методів для ефективного розв'язання крайових задач в комплексній площині та у просторі, класична теорія потенціалу та теорія потенціалу, пов'язана з еліптичними рівняннями, опуклий аналіз в комплексних просторах та поширення його на більш широкі простори та многовиди.

Коротко зупинимось на наукових досягненнях в царині комплексного аналізу та теорії потенціалу співробітників інституту за роки незалежності.

В роботах П.М.Тамразова розроблена загальна контурно-тілесна теорія для голоморфних функцій в відкритих множинах комплексної площини і в комплексних аналітичних просторах. Деякі з цих результатів поширені на

мероморфні і субгармонійні функції, голоморфні функції і відображення комплексних аналітичних просторів і модулів гладкості порядку  $k > 1$ .

Розв'язано диференціальну проблему для аналітичних функцій у довільній відкритій множині на комплексній площині і в кожній фіксованій точці межі. Це дало кінцевий позитивний розв'язок проблеми, яка обговорювалася на проблемному семінарі в Цюріху, що відбувся в 1994 році між учасниками міжнародного Конгресу математиків.

П.М.Тамразовим розширена теорема Брело - Картана про усунення особливостей для субгармонічних функцій на довільних множинах внутрішньої ємності нуль, які стираються при субгармонійних розширеннях функції багатьох змінних без обмеження на ємність (1993 р.).

Отримано результати для плюрісубгармонійних розширень функцій для комплексно аналітичних і топологічних векторних просторів. Зокрема, розв'язана проблема про стирання збурень обмежених особливостей для плюрісубгармонійних функцій в топологічних комплексних векторних просторах. Цю проблему вивчали в 60-ті роки, але повністю вона була розв'язана П.М.Тамразовим для нескінченновимірних просторів в 1991 році.

Встановлені контурно-тілесні й кластерні теореми для тонко і субгармонічних тонко голоморфних функцій у тонко відкритих множин з постійними та змінними мажорантами. Це заклало основи тонкої теорії потенціалу (2001-2009 рр.).

Розвинено гармонічний аналіз у векторних просторах для комплексно скінченних і розділених різниць та для комплексних скінченних і розділених різниць суперпозиції функцій, яка була відкритою проблемою навіть для простих функцій на дійсному інтервалі і класичних дійсних скінченних різниць. Ці теорії були необхідні для різних застосувань в конструктивній і геометричній теорії функцій. Розв'язана проблема про конформні модулі та екстремальні метрики ріманового листка Мебіуса, поставлена П.П'ю в 1952 році та екстремальна проблема про гармонічні функції, поставлена О.Є.

Єременком в 1995 році. Розв'язано також екстремальну проблему теорії потенціалу, яка є далекосяжним узагальненням проблеми О.Є.Єрьоменка, в одиничній кулі  $n$ -вимірному ( $n \geq 2$ ) евклідового простору, в класі всіх нормованих  $m$ -вимірних ( $m \geq 2$ ) гармонічних полів знайдено мінімакс концентричної кулі позитивності однієї з компонент поля, нормовані в термінах екстремальних гармонічних мажорант і мінорант усіх їхніх компонент. Розв'язано задачі про мінімізацію енергії зарядів на батареях конденсаторів.

В зв'язку з екстремальними задачами, в том числі з проблемою М.Г. Чеботарьова та її узагальненнями та проблемою Г.Гретша П.М.Тамразов дав конструктивний метод побудови усіх екстремалей цих задач через належний клас прямолінійних графів, що дає вичерпну взаємно однозначну параметризацію усіх екстремалей в термінах явно заданих особливостей (2004-2010 рр.).

За роки незалежності під керівництвом П.М.Тамразова захищено 4 докторські (Зорій Н.В., Кудьявін В.С., Плакса С.А., Бахтін О.К.) та 2 кандидатські дисертації (Сарана О.А., Охріменко С.А.).

З початку 1990-их років Н.В. Зорій заснувала та розробляє новий напрямок – суттєво некомпактні екстремальні задачі теорії потенціалу на класах векторних мір Радона зліченної (скінченної чи нескінченної) розмірності у локально компактних (зокрема, евклідових) просторах. Тут нею отримано фундаментальні результати: зокрема, для широкого класу додатно визначених ядер (що містить у собі, наприклад, класичні ядра Ньютона, Гріна чи Рісса) знайдено необхідні та достатні умови розв'язності варіаційної задачі Гауса про мінімізацію енергій при наявності зовнішніх полів, що (навіть у сенсі достатніх умов) складало відкриту проблему протягом кількох десятиліть (див. М. Ohtsuka, 1961). Знайдено варіаційні нерівності для рівноважних потенціалів, виокремлено їх характеристичні властивості, досліджено неперервності екстремалей в сильній та широкій топологіях.

Це стало можливим завдяки розробці принципово нових методів та підходів, що ґрунтуються на впровадженні ефективних метричних структур над належними класами векторних мір та доведенні теореми про повноту відповідних метричних просторів, яка є особливо цікавою у контексті класичного результату Н. Cartan (1945) про сильну неповноту простору всіх скалярних мір зі скінченною ньютонівською енергією.

Спільно з Н. Harbrecht, G. Of та W.L. Wendland у 2010–2013 роках Н.В. Зорій побудовано конструктивний та чисельний розв’язок варіаційної задачі Гауса для ядер Ньютона і Рісса на гладких многовидах, а також отримано еквівалентне формулювання цієї задачі в термінах узагальнених функцій з простору Соболева-Слободецького, що дозволило застосувати для її розв’язання апарат інтегральних операторів.

На стику теорії потенціалу та геометричної теорії функцій Н.В. Зорій розроблено теорію внутрішніх ємностей просторових конденсаторів зі зліченною кількістю пластин довільної топологічної структури. Серед отриманих тут результатів особливе місце займають необхідні та достатні умови існування рівноважних розподілів, описи їх потенціалів та носіїв, точні співвідношення рівностей та нерівностей між теоретико-потенціальними, теоретико-функціональними, екстремально-метричними та дискретними характеристиками, вичерпний аналіз неперервностей екстремалей. Побудована Н.В. Зорій теорія є суто просторовою та містить цілу низку принципово нових ефектів, не властивих ні теорії логарифмічних ємностей плоских конденсаторів, ні теорії внутрішніх ємностей множин (див. відповідно дослідження Т. Bagby, О.О. Гончара, Є.А. Рахманова, П.М. Тамразова та О. Frostman, Н. Cartan, С. Vallee-Poussin, В. Fuglede). Зокрема, нею відкрито несподіваний ефект відсутності рівноважних розподілів на некомпактних просторових конденсаторах, що спостерігається навіть у найбільш природному випадку ядра Кулона. У зв’язку з цим ефектом у 2010–2011 роках Н.В. Зорій знайдено постановки варіаційних задач, дуальних до основної мінімум-проблеми теорії ємностей просторових конденсаторів, але

вже завжди розв'язних. Це привело до природного узагальнення на об'єкти нескінченної розмірності класичного поняття внутрішнього ємнісного розподілу, асоційованого з множиною (див. Н. Cartan, 1945).

Н.В. Зорій розв'язано низку задач, що були відомі у математичній літературі як відкриті проблеми чи гіпотези: варіаційну задачу Гаусса як у її класичній постановці, так і в мажорантній постановці Є.А. Рахманова, задачу F.W. Gehring про опис ньютонівих ємностей конденсаторів через класи пробних функцій та їх інтеграли Діріхле, задачу М. Kishi про існування міри конденсатора, задачу G.D. Anderson і М.К. Vamanamurthy про точну оцінку ємності конденсатора через ємності його пластин. Отримані при цьому результати мають вигляд критеріїв, тобто є остаточною.

Дослідження В.С.Кудьявіна були присвячені гомеоморфним відображенням класів Соболева на площині та в багатовимірному евклідовому просторі. Ці дослідження тісно пов'язані з багатьма областями математики та механіки, особливо варто відмітити задачі та проблеми, які виникають в теорії пружності.

Теорія відображень плоских однозв'язних областей досить добре розвинена і використовує в основному апарат конформних відображень, що . опирається на застосування відомої теореми Рімана. Ситуація з багатозв'язними областями навіть на площині, а тим більше в багатовимірному евклідовому просторі заставляє використовувати більш широкий апарат квазіконформних відображень. В просторі використання конформних відображень обмежене, згідно з відомою теоремою Ліувілля, лише перетвореннями Мебіуса. Але для багатьох питань недосить розглядати класи квазіконформних відображень, які породжують істотне обмеження на дилатації, що повинні бути рівномірно обмеженими майже всюди в області. Більш гнучким та природним розширенням плоских і просторових топологічних відображень є відображення квазіконформні в середньому, для яких рівномірна обмеженість дилатації замінена скінченністю в деякому інтегральному сенсі. Цьому класу відображень присвячені дослідження В. С.

Кудьявіна. Він ввів методи модулів сімей кривих и ємностей конденсаторів довільних порядків, що є істотним розвитком методу екстремальних довжин. Ці методи базуються на вивченні спотворення даних величин, де роль константи в нерівностях відіграють функції множин. Розглянемо також метод спотворення радіусів нормальних околів. Ці методи застосовуються при вивченні диференціальних, метричних та геометричних властивостей відображень. Особлива цінність даних методів в їх успішному застосуванні при розв'язку екстремальних задач, тобто класичних задач знаходження відображень при яких дилатації та їх інтегральні аналоги мінімізуються.

Роботи С.А. Плакси, І.П.Мельниченка і В.Ф. Ковальова зосереджені в комплексному і гіперкомплексному аналізі та їх застосуваннях до розв'язання крайових задач математичної фізики. Розвинуто новий ефективний для застосувань алгебраїчно-аналітичний підхід до основних рівнянь математичної фізики, ідея якого полягає в знаходженні таких комутативних банахових алгебр, що моногенні функції в них утворюють алгебру і мають компоненти, які задовольняють задані рівняння з частинними похідними (бігармонічне рівняння, просторове рівняння Лапласа, рівняння еліптичного типу з виродженням на осі).

Для трьохвимірного рівняння Лапласа встановлено, що не існує асоціативної комутативної алгебри третього рангу з одиницею над дійсним полем такої, щоб моногенні у цій алгебрі функції були його розв'язками. Проте для асоціативних комутативних алгебр третього рангу з одиницею над комплексним полем описано усі базиси в них такі, що компоненти моногенних у цих базисах функцій є розв'язками трьохвимірного рівняння Лапласа (І.П.Мельниченко).

При розробці вказаного підходу до задач просторових потенціальних полів у випадку осьової симетрії побудовано нескінченновимірну комутативну банахову алгебру (І.П.Мельниченко), аналітичні функції на якій, що розглядаються як головні продовження аналітичних функцій комплексної змінної, дають змогу при виділенні спеціальних двовимірних

лінійних многовидів цієї алгебри одержувати потенціали та функції течії Стокса у вигляді ефективних у застосуваннях інтегральних представлень, що є аналогічними представленню плоских гармонічних функцій інтегралами Коші (І.П.Мельниченко, С.А.Плакса). Одержаний результат є розв'язанням проблеми М.О. Лаврентьєва про розробку методів дослідження просторових потенціальних полів, аналогічних до методів теорії аналітичних функцій, здійсненим для випадку осесиметричних полів.

Для застосувань цього результату до прикладних задач теорії течії ідеальної рідини розроблено функціонально-аналітичний метод розв'язання крайових задач в меридіанній площині просторового потенціального поля з осьовою симетрією. При цьому здійснено редукцію задач Діріхле для осесиметричного потенціалу та функції течії Стокса до сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші на дійсній прямій, а у важливому для застосувань випадку гладкої межі, що задовольняє деякі додаткові умови, одержані сингулярні інтегральні рівняння редуковано до інтегральних рівнянь Фредгольма (С.А. Плакса). Встановлено також критерій розв'язуваності задачі обтікання у меридіанній площині методом особливостей різних порядків (І.П.Мельниченко, С.А.Плакса).

Побудовано бігармонічні алгебри, за допомогою яких дано представлення бігармонічних функцій та потенціалів Ейрі. Показано, що аналітичні функції на цих алгебрах можуть бути використані для розв'язання першої крайової задачі плоскої теорії пружності для опуклих в напрямку однієї з осей областей. Побудовані алгебри функцій, що задовольняють  $p$ -бігармонічне рівняння (І.П. Мельниченко, В.Ф Ковальов).

Учні С.А. Плакси (С.В. Грищук, В.С. Шпаківський, Р.П. Пухтаєвич) продовжили дослідження в теорії моногенних функцій, що приймають значення в комутативних банахових алгебрах, асоційованих з основними рівняннями еліптичного типу.

Одержано конструктивний опис моногенних функцій, що приймають значення в двовимірній бігармонічній алгебрі і в тривимірних гармонічних

алгебрах, за допомогою аналітичних функцій комплексної змінної (С.А. Плакса, С.В. Грищук, В.С. Шпаківський, Р.П. Пухтаєвич).

Встановлено основні аналітичні властивості моногенних функцій в бігармонічній площині, аналогічні до властивостей голоморфних функцій комплексної змінної: інтегральна теорема і інтегральна формула Коші, теорема Морера, теорема єдиності, тейлорівські і лоранівські розклади. Доведено, що кожна бігармонічна функція в обмеженій однозв'язній області є компонентою деякої моногенної функції, заданої у відповідній області бігармонічної площини. Розв'язано в явному вигляді за допомогою інтегралів типу Шварца крайові задачі для канонічних областей бігармонічної площини, асоційовані з основною бігармонічною задачею (Плакса С.А., Грищук С. В.).

Доведено аналоги інтегральних теорем Коші для поверхневого і криволінійного інтегралів від моногенних функцій в тривимірній гармонічній алгебрі, а також аналог інтегральної формули Коші для цих функцій. Доведено аналоги теорем Морера, Тейлора і Лорана для вказаних моногенних функцій та здійснено класифікацію їх особливостей. Встановлено достатні умови існування граничних значень гіперкомплексного аналога інтеграла типу Коші і знайдено аналоги формул Сохоцького (С.А. Плакса, В.С. Шпаківський).

Встановлено, що кожна тривимірна гармонічна функція є компонентою моногенної функції, що приймає значення в топологічному векторному просторі, який містить нескінченно вимірну комутативну банахову алгебру, асоційовану з тривимірним рівнянням Лапласа (С.А. Плакса, В.С. Шпаківський).

Встановлено нові інтегральні зображення узагальнених осесиметричних потенціалів через аналітичні функції комплексної змінної, задані у довільній симетричній відносно дійсної осі однозв'язній області. Одержано оцінку локального модуля неперервності їх граничних значень (С.А. Плакса, С.В. Грищук).

Наукові дослідження О.К.Бахтіна зосереджені на вивченні екстремальних проблем геометричної теорії функцій комплексної змінної. Зокрема, ним вивчалися задачі, пов'язані з проблемою коефіцієнтів з екстремально-метричними властивостями функцій. Починаючи з 2004 р. основні дослідження стосуються проблем пов'язаних з екстремізацією нелінійних функціоналів на класах неперетинних областей та їх узагальнень. Ним було показано, що точний розв'язок екстремальних проблем такого виду суттєво залежить від геометрії розташування полюсів відповідних квадратичних диференціалів. Зокрема, було введено поняття  $(n,m)$ -променевої системи точок, завдяки якому вдалося значно узагальнити постановки задач. В зв'язку з  $(n,m)$ -променевими системами введені поняття кутових параметрів цієї системи, коефіцієнтів її зміщення та поняття «керуючого» функціонала, який накладає на системи деякі обмеження метричного характеру. За допомогою цих понять О.К. Бахтіну вдалося отримати точні розв'язки досить загальних задач про екстремальне розбиття комплексної площини. Ним було введено поняття заповнення несуттєвих межових компонент системи неперетинних областей, яке дозволило повністю отримати оцінки зверху добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей відносно точок, що утворюють  $(n,m)$ -променеву систему в термінах логарифмічної ємності несуттєвих межових компонент.

В 1968 році П.М. Тамразов запропонував розглянути екстремальні задачі з «вільними» полюсами. Цей напрям розвинений в роботах Г.П. Бахтіної, В.М. Дубініна, Л.В. Ковальова, Г.В. Кузьміної, Є.Г. Ємельянова. В більшості робіт розглядалися задачі, в яких полюси відповідних квадратичних диференціалів містилися, як правило, на колах і тим самим підпорядковувалися жорстким умовам на геометрію розташування. Належність колу О.К. Бахтіну вдалося замінити на умову, що певний «керуючий» функціонал на даній системі приймає фіксоване значення. Випадок, коли полюси належать фіксованому колу є частинним випадком цієї умови. Легко показати, що системи, для яких певний «керуючий»

функціонал дорівнює деякому числу, мають дуже складну геометричну будову або навіть такі, що жодна пара точок не належить колу. Ця умова дозволяє відійти від рівняння кола. Таким чином, геометрія розташування полюсів може бути майже довільною.

Одержані ним оцінки в задачах про екстремальне розбиття вперше враховують відхилення не екстремальної конфігурації від екстремальної. Зокрема, із одержаних результатів впливає розв'язок узагальненої задачі Є.Г. Ємельянова про екстремальне розбиття, коли полюси розташовані на  $m$  вільних колах,  $m \geq 2$ .

Всі вище згадані результати для неперетинних областей були поширені на класи відкритих множин, які задовольняють певні умови відносно променевої системи точок, в тому числі частково перетинні області. Із цих результатів безпосередньо впливають теореми, які уточнюють відомі результати попередників. Ці результати цінні тим, що мажоранта, яка дає оцінку функціонала для кожної конкретної системи полюсів враховує залежність полюсів від кутових та інших параметрів. Один із результатів знайшов застосування при розв'язку відкритої проблеми В.М. Дубініна про опис екстремальних конфігурацій, що максимізують добуток внутрішніх радіусів  $n$  взаємно неперетинних областей відносно точок одиничного кола на степінь внутрішнього радіуса неперетинної з ними області. О.К. Бахтін дав асимптотичний розв'язок цієї проблеми В.М. Дубініна.

В своїх дослідженнях П.М. Тамразов відзначав, що найбільш цінним є той результат, в якому кількість полюсів необмежена.

О.К. Бахтін розглянув та розв'язав одну задачу про екстремальне розбиття, в якій оцінюється функціонал, який представляє собою добуток різних степенів двох «схрещених диполів» М.О. Лаврентьєва. Ця оцінка є уточненням результату М.О. Лаврентьєва.

В якості наслідків із вище вказаних результатів одержані теореми спотворення для ряду класів однолистих функцій. В 2011 році О.К. Бахтін запропонував один загальний підхід, який дозволяє перенести більшість

результатів геометричної теорії функцій на випадок довільних багатовимірних комплексних просторів. Запропоновано векторне узагальнення основних понять теорії функцій комплексної змінної: поняття модуля й аргументу комплексного числа, голоморфних та частинно-конформних відображень.

В 2008 р. опублікована монографія «Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе» сумісно з Г.П.Бахтіною та Ю.Б.Зелінським в якій підбито підсумки по проблемах пов'язаних з неперетинними областями.

Наукові дослідження Ю.Ю.Трохимчука пов'язані з новими топологічними методами при розв'язанні класичних теоретико-функціональних проблем. Істотний розвиток ним теорії множин моногенності комплексних функцій дозволив одержати нові критерії голоморфності. Одержано повне перенесення відомих теорем Д.Меньшова про конформні відображення з класу однолистих функцій на довільні неперервні функції. Великий цикл робіт пов'язаний з вивченням теорії локального степеня відображення та диференціальних властивостей дійсних та комплексних функцій. Це привело до принципово нових критеріїв усунутості особливостей аналітичних функцій, які базуються на теорії локального степеня довільних нульвимірних неперервних відображень, а також на теоремах про продовження внутрішніх відображень.

Однією з основних тем в останні роки є проблема усунення особливостей гармонічних і аналітичних функцій. Отримана теорема про неявну функцію з особливостями, а також узагальнення теореми В.К.Дзядика про геометричний критерій аналітичності функцій. Ю.Ю.Трохимчуком доведено, що просторовий і контурний модулі неперервності для аналітичних функцій в замкненій компактній області співпадають. Розв'язано (2008 р.) ряд проблем Данжуа столітньої давності відносно аналітичних функцій з досконалими множинами особливих точок (відповідь на них та, яку передбачив Данжуа), а також доведена  $N$ -

властивість таких же функцій при умові, що образ множини їх особливостей ніде не щільний на площині. Показано, що кожне скінченнократне відображення підобластей многовидів фіксованої розмірності має всюди щільну підмножину точок локальної гомеоморфності. Встановлено аналог теореми про середнє для комплекснозначних функцій.

Учні Ю.Ю.Трохимчука Е.О.Алікулов та Д.Д.Ілмурадов досліджували критерії аналітичності функції, множини моногенності та умови існування примітивних функцій.

Е.Алікулов показав, що якщо для функції з класу Ліпшиця на множині не першої категорії множини моногенності ніде не щільні, то на цій множині за винятком множини першої категорії множина моногенності є колом або точкою, а сама функція є диференційовною (1991 р.) . Він встановив, що якщо для неперервної в області функції множина моногенності є підмножиною прямої розширеної комплексної площини зі сферичною топологією на ній яка при цьому не вироджується в нескінченно віддалену точку, то така функція голоморфна в області (1992 р.).

Д.Ілмурадов довів, що якщо для неперервної в області комплексної площини функції множина моногенності є ніде нещільною множиною, яка не співпадає з колом в кожній точці області за винятком не більше ніж зчисленної кількості точок, то функція є аналітичною в області (1993 р.).

Великою заслугою Ю.Ю.Трохимчука є створення топологічного семінару для активних студентів Київського університету, який став зародком розвитку топологічної школи в Україні. В подальшому це привело до створення в інституті математики 2001 року відділу топології. Протягом двадцяти років – починаючи з 1963 р. Ю.Ю.Трохимчук був організатором літніх математичних шкіл, на яких завжди були представлені найповніші досягнення сучасної математики з найрізноманітніших її розділів (особливо – аналіз, диференціальні рівняння, топологія).

Член кореспондент НАНУ Юрій Іванович Самойленко працював у відділі в 2006-2008 рр. Його дослідження носили прикладний характер.

Побудовано моделі припливного гальмування гравітуючих середовищ, що диференціально обертаються у полі тяжіння центральної маси. Ці моделі застосовано для пояснення деяких спостережень, здобутих під час космічної місії «Кассіні» в околі Сатурну. На прикладі лагранжевої моделі керованого ансамблю частинок з внутрішніми ступенями вільності доведено можливість перетворення теплової енергії в когерентну форму без використання різниці температур між нагрівачем та холодильником. Тим самим послаблено обмеження, які обумовлені другим началом термодинаміки. Методами теорії потенціалу побудовано математичні моделі диференціального обертання речовини у рідких ядрах планет та планетних кільцях. Передбачені ефекти знайшли підтвердження у даних магнітометрії планет Сонячної системи та зображеннях тонкої структури кілець Сатурну, а також знайденого на поверхні його супутника Япет екваторіального гірського валу. Запропоновано та досліджено Лагранжеву модель відкритої білінійної системи керування для перетворення теплової енергії в енергію когерентних керуючих полів. Ця модель, на відміну від класичних теплових машин, дозволяє отримати додатний енергетичний вихід від одного температурного джерела без застосування будь-якого охолоджуючого пристрою, крім системи керування. Обґрунтовано фізичну реалізацію можливості прямого перетворення енергії тепла в механічну форму без використання термічного охолодження.

В 2004 році завідувачем відділу призначено доктора фіз.-мат.наук Ю.Б.Зелінського – учня Ю.Ю.Трохимчука. Його наукові дослідження стосуються застосувань геометричних та топологічних методів у комплексному та опуклому аналізі. В теорії відображень вперше ввів і застосував локальний степінь відображення для багатовимірних відображень областей топологічних багатовидів. Завдяки цьому розв'язано проблеми Штейнгауза-Косінського щодо оцінки розмірності підмножин фіксованої кратності для відображень областей на багатовидах, якщо відомі властивості відображень на межі області. Проблеми поставлені в 50-ті роки минулого

століття. Довів, що клас відображень дійсного проективного простору в сферу тієї ж розмірності, з не більш ніж трьома прообразами точок непорожній.

В комплексному аналізі він застосував геометричні методи та метод багатовимірних відображень до аналітичних задач комплексного аналізу. Отримав повну топологічну класифікацію лінійно опуклих та сильно лінійно опуклих множин з гладкими межами, встановив оцінки груп когомологій для таких областей та компактів. При цьому розв'язані відомі проблеми Л. Айзенберга опису узагальнено опуклих множин, які довго не піддавалися математикам, які застосовували аналітичні підходи. Побудував контрприклад до гіпотези про можливу глобальну лінійну опуклість необмежених локально лінійно опуклих областей з усюди гладкою межею.

Створив у комплексному аналізі новий напрямок - аналог класичного дійсного опуклого аналізу. При цьому показав, що комплексні аналоги дійсних результатів мають свою комплексну специфіку, яку не можна було передбачити залишаючись в полі дійсного опуклого аналізу. Ряд результатів дозволяють отримати більш загальні твердження і в класичних теоремах опуклого аналізу (теореми Хеллі, Каратеодорі, Крейна-Мільмана).

Запропонував новий підхід до дослідження узагальнено опуклих множин на грассманових багатовидах. Використання грассманових багатовидів дозволило поширити теореми двоїстості (типу полярної відповідності) на широкий клас підмножин евклідового простору. Узагальнено опуклі множини та багатовимірні відображення пов'язують в один вузол проблеми комплексного аналізу, топології, опуклого аналізу та стереології. Цей цикл досліджень відображений в трьох монографіях автора.

Геометричний та топологічний підхід до задач комплексного та гіперкомплексного аналізу розвивався групою аспірантів та співробітників відділу під керівництвом Ю.Б.Зелінського (В.Л.Мельник, О.І.Герасін, І.В.Момот, М.В.Ткачук, Т.М.Осіпчук, І.Ю.Виговська, Б.А.Кліщук).

Задача топологічної класифікації узагальнено опуклих множин з гладкою межею в дійсному випадку виникла природно після встановлення Ю.Б.Зелінським аналогічного результату в комплексному випадку. Повністю таку класифікацію для дійсних евклідових просторів отримала В.Л. Мельник. Нею також побудовані приклади лінійно опуклих областей з майже всюди гладкою межею та особливостями на межі, що межу не розбивають, які не будуть сильно лінійно опуклими областями.

О.І.Герасіним вивчені підмножини дійсного евклідового простору (в тому числі й не опуклі) для яких справедливий аналог теореми Гана-Банаха. Отримані оцінки міри прямих та гіперплощин, що перетинають (розбивають на частини) узагальнено опуклі множини.

Узагальнено теорему Клі опуклого аналізу на комплексний випадок. Отримано двоїстий варіант комплексної теореми Крейна-Мільмана про визначення сильно лінійно опуклого компакта його екстремальними точками (І.В.Момот).

Наступний результат істотно підсилює результати Безиковича-Данцера-Замфіреску щодо геометричних характеристик кола (проблема Мізеля). Компактна множина, що розбиває площину, і яка разом з будь-якими трьома вершинами прямокутника містить і четверту є колом (М.В.Ткачук). Тут знято обмеження на множину (попередні результати були встановлені при умові, що досліджувана множина є опуклою або Жордановою кривою).

Доведено, що межа пошарово опуклої обмеженої області з гладкою межею є когомологічною сферою, тобто має групи когомологій ізоморфні групам когомологій сфери, і є топологічною сферою в розмірностях вище чотирьох (Ю.Б.Зелінський, М.В.Ткачук).

В термінах невід'ємності і додатності деяких спеціальних диференціальних форм другого порядку знайдено, відповідно, необхідні і достатні умови локальної лінійної опуклості областей з гладкою межею в багатовимірному кватерніонному просторі. (Т.М. Осіпчук) Встановлено

критерій лінійної опуклості обмежених областей Гартогса з гладкою межею в двовимірному кватерніонному просторі. (Т.М. Осіпчук, М.В.Ткачук).

Отримано зовнішні критерії опуклості та сильної лінійної опуклості областей і компактів (Ю.Б. Зелінський, І.Ю. Виговська). Показано, що у випадку апріорі ациклічних компактів для встановлення їх опуклості (сильної лінійної опуклості) досить мати інформацію про перетини цього компактна не всіма площинами, а тільки опорними. І.Ю.Виговською узагальнено класичну теорему Каратеодорі для обмежених і необмежених множин на випадок, коли вихідна множина складається з обмеженої кількості компонент або її перерізи площинами фіксованої розмірності містять обмежену кількість компонент (не більшу від розмірності площини). Встановлено критерій сильної лінійної опуклості декартового добутку компактів у багатовимірному гіперкомплексному просторі.

Б.А.Кліщуком перенесено на гіперкомплексний випадок ряд теорем лінійно опуклого комплексного аналізу.

В 2012 р. розв'язано наступну проблему Т.Замфіреску: доведено, що опукла крива, яка задовольняє інфінітезімальній умові прямокутника буде колом. Отримано теореми існування розв'язків багатозначних включень (в тому числі і для розривних відображень), що опираються на різні варіанти принципу гострого кута та на геометричну теорему Гана-Банаха (Ю.Б.Зелінський, Б.А.Кліщук, М.В.Ткачук).

Наукові дослідження А. В. Бондаря стосуються комплексного аналізу, топології та функціонального аналізу. Він вивчав топологічні властивості внутрішніх по Стоїлову відображень та множини їх особливостей. Ним створено теорію локальних геометричних характеристик голоморфних відображень багатовимірних комплексних просторів. В його роботах систематично досліджуються похідні оператори, оператори розтягу, обертання а також множини моногенності неперервних відображень областей скінченно- та нескінченновимірних комплексних гільбертових просторів. В термінах операторних умов, які узагальнюють плоскі поняття

постійності розтягу та консерватизму кутів, ним доведені критерії голоморфності відображень. Цим перенесено на багатовимірний випадок класичні результати Лумана, Бора, Д.Меньшова, Ю.Ю.Трохимчука. Вивчені усувні та неусувні особливі множини голоморфних функцій.

Учні А.В.Бондаря (Я.М.Димарський, О.С. Грецький, О.О.Романова(Лук'янова)) розробляли теорію локальних геометричних характеристик голоморфних відображень та операторів.

Я.М. Димарський при науковій консультації А.В.Бондаря захистив у 2003 році докторську дисертацію «Власні вектори квазілінійних операторів». Його дослідження присвячені опису множини нормованих власних векторів квазілінійних операторів. По-перше, дано опис топологічних властивостей многовидів дійсних самоспряжених операторів (скінченновимірних, компактних та диференціальних), у яких певні власні значення мають певну кратність, та многовидів пар (оператор, власний вектор). Введено поняття компактного квазілінійного самоспряженого цілком неперервного зображення нелінійного оператора. На квазілінійні оператори поширено поняття номера і кратності власного значення та виділено клас типових квазілінійних зображень. В термінах індексу перетину многовидів дано гомотопічну класифікацію типових зображень та опис множини нормованих власних векторів, що відповідають операторам із цих класів. Також дано застосування одержаної класифікації для дослідження малих власних векторів (функцій), нормованих власних векторів та віток власних векторів.

О.С.Грецький розробив теорію локальних геометричних характеристик голоморфних відображень банахових просторів. Створив поняттєвий апарат для цієї теорії з необхідним обґрунтуванням. Дослідив умови диференційовності відображень нескінченновимірних просторів, зокрема: довів диференційовність майже всюди ліпшицевого відображення у банахів рефлексивний простір. Отримав низку критеріїв голоморфності для неперервних відображень банахових просторів, визначених на областях з певними класами особливих множин.

О.О.Романова(Лук'янова) досліджувала псевдоаналітичність неперервних функцій з властивостями постійного  $\sigma$ -розтягу та  $\sigma$ -постійності кутів. Отримано опис структури множин  $\sigma$ -моногенності неперервних функцій.

Аспіранти П.М.Тамразова Сарана О.А., Охріменко С.А. вивчали задачі зв'язані з контурно-тілесними властивостями функцій та екстремальними метриками.

Основні наукові результати О.А.Сарани стосуються дослідження зв'язку між поведінкою тонко голоморфних та тонко гіпогармонійних функцій на межі тонко відкритої області та у внутрішності цієї області.

С.А.Охріменком розв'язано задачі про обчислення екстремальних метрик та конформних модулів ряду гомотопних сімей дуг, що лежать у багатозв'язних областях на рімановому листку Мебіуса. Досліджено парні добутки конформних модулів сімей кривих, що лежать на рімановому листку Мебіуса, та вивчено їх поведінку в залежності від геометрії ріманових областей. Знайдено також оцінки для цих добутків, у тому числі універсальні оцінки, від яких не залежить від геометрії областей та ріманового листка Мебіуса. Також отримано непокрещувану нижню оцінку парного добутку конформних модулів "спряжених" сімей кривих через абсолютну константу, яка не залежить від відповідної геометрії. Розв'язано задачі про обчислення екстремальних метрик та конформних модулів деяких сімей замкнених, гомотопічно нетривіальних кривих, що лежать на неорієнтовних  $n$ -вимірних ( $n > 3$ ) ріманових многовидах (1997-1999 рр.).

Герус О.Ф. досліджував оцінки модулів гладкості граничних значень інтегралу типу Коші. Вивчав проблему побудови функції аналітичної в області, для якої модуль гладкості в замиканні області співпадає по порядку з заданою нормальною мажорантою. Отримано оцінки модуля неперервності інтегралу типу Коші в області та на її межі. Знайдено нижню та верхню оцінки модуля гладкості інтегралу типу Коші на регулярній кривій. Встановлено необхідні та достатні умови для обмеженості оператора Коші.

Узагальнено теорему М.А.Давидова: знайдено необхідні та достатні умови для того щоб граничні значення інтегралу типу Коші існували рівномірно в класі голоморфних функцій, що відображають комплексну площину в двовимірний комплексний простір і компоненти яких задовольняють рівняння Гельмгольца та не задовольняють рівняння Лапласа. Для таких функцій встановлено формулу типу Сохоцького-Племеля.

С.А.Плаксою встановлено достатні умови стійкості індекса оператора, що діє в довільний векторний простір. На основі методів, що є нейтральними по відношенню до топологічних властивостей просторів та операторів, розвинуто теорію стійкості нетеровості та напівнетеровості операторів в неповних просторах. Побудовано узагальнену теорію Нетера для сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші на замкненій жордановій регулярній кривій в класах кусково-неперервних функцій з розривами типу осциляції.

Розв'язано в явному вигляді кусково-неперервну крайову задачу Рімана для розширених в порівнянні з попередніми результатами класів жорданових (замкнених або розімкнутих) спрямлюваних кривих та заданих на них функцій (С.А. Плакса, Ю.В. Васильєва (Куд'явіна)) .

Учні О.К.Бахтіна (Таргонський А.Л., В'юн В.Є., Подвисоцький Р.В., Денега І.В., Заболотний Я.В.) в своїх дослідженнях використовували метод «керуючих» функціоналів для дослідження екстремальних задач геометричної теорії функції комплексної змінної, що, зокрема, дозволило отримувати оцінки досліджуваних функціоналів з урахуванням відхилення не екстремальних конфігурацій від екстремальних.

А.Л.Таргонський одним з перших почав розв'язувати екстремальні задачі для функціоналів, що складаються з добутків внутрішніх радіусів областей для променевих систем точок, що було досить серйозним проривом у цій тематиці. Для "рівномірно променевих систем точок" розв'язано екстремальну задачу "змішаного типу", тобто таку, що в ній деякі полюси є вільними, а інші – фіксовані. Розв'язано екстремальні задачі: для областей,

які попарно не перетинаються з вільними полюсами на рівномірних променевих системах точок; для областей, які попарно не перетинаються з вільними полюсами, що рухаються по "рівномірно променевих системах точок" у кільці; для добутку внутрішніх радіусів областей, що належать одиничному колу; для областей, які попарно не перетинаються з вільними полюсами на так званих "довільних променевих системах точок". Повністю розв'язано екстремальні задачі з вільними полюсами на одиничному колі у випадку трьох та чотирьох областей, які попарно не перетинаються (2004-2005 рр.).

В термінах квадратичних диференціалів розв'язано нові екстремальні задачі про добуток степенів внутрішніх радіусів зв'язних компонент на деяких класах відкритих множин та систем точок в розширеній комплексній площині (О.К. Бахтін, В.Є. В'юн)

Розроблено новий метод дослідження екстремальних задач геометричної теорії функцій, на базі якого отримано нові результати, що узагальнюють та посилюють раніш відомі твердження, а також дозволив значно просунутись у розв'язку ряду відкритих проблем (О.К. Бахтін, В.Є. В'юн, Р.В. Подвисоцький).

Отримано точні нерівності для функціоналів, залежних від внутрішніх радіусів взаємнонеперетинних областей комплексної площини, що уточнює відомі результати (Бахтін О.К., В'юн В.Є., Подвисоцький Р.В.)

Заболотним Я.В. було одержано частковий розв'язок відомої проблеми В.М. Дубініна про добуток внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей на комплексній площині. Знайдено метод, що дозволив суттєво покращити результати попередників у даній проблемі, а також показано межі застосування даного методу.

Наукові дослідження І.В.Денегі стосуються екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної про оцінку добутку степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей та відкритих множин. Розв'язано задачі про екстремальне розбиття комплексної площини з

вільними полюсами на  $n$ -променевих системах точок як на класах неперетинних областей, так і на більш загальних класах частково перетинних областей. Результати посилюють та узагальнюють досягнення В.М. Дубініна, Г.В. Кузьміної та інших. Доведено посилену нерівність для добутку степенів внутрішніх радіусів неперетинних областей і узагальнено її на випадок частково перетинних областей. Запропоновано узагальнене поняття внутрішнього радіуса для випадку багатовимірного комплексного простору та доведено теореми про точні оцінки зверху для добутку степенів узагальнених внутрішніх радіусів систем попарно неперетинних поліциліндричних областей в багатовимірних комплексних просторах.

Задачі про продовження розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними традиційно знаходяться в полі зору великої кількості дослідників. Центральне місце серед них займають задачі про усунення розв'язків диференціального рівняння в заданому класі функцій. Класичним прикладом такої задачі є знаменита проблем Пенлеве про опис компактів, усувних для обмежених голоморфних функцій, тобто таких компактів на комплексній площині, для яких довільна обмежена голоморфна функція, визначена в доповненні даного компакта до будь-якого його околу, може бути голоморфно продовжена на цей компакт. Проблема Пенлеве приковувала увагу аналітиків на протязі усього XX століття (Д. Помпейю, А. Данжуа, В.В. Голубєв, А. Безикович, А. Берлінг, Л. Альфорс, А.Г. Вітушкін, П. Маттіла, Г. Давід, М.С. Мельников, Ю.Ю.Трохимчук, А.В.Бондар та ін.), але отримала остаточне розв'язання лише у 2001 р. (Х. Толса). Розв'язання цієї проблеми виявилось досить складним і формулюється в термінах, що враховують метричні і геометричні властивості множин.

Іншу постановку задачі про усунення особливостей голоморфних функцій запропонував Є.П. Долженко (1961 р.). Він довів, що для голоморфних функцій, що задовольняють умову Гельдера із заданим показником  $s$ ,  $0 < s < 1$ , усувні компакти характеризуються умовою рівності нулю їх хаусдорфової міри порядку  $1+s$ . Це був перший результат, в якому

усувні особливості розв'язків еліптичного диференціального рівняння з частинними похідними в заданому класі функцій (в даному випадку – розв'язків рівняння Коші-Рімана в класі Гельдера було повністю описано в термінах хаусдорфових мір і в подальшому він отримав розвиток в роботах багатьох авторів (Л. Карлєсон, Р. Харві і Дж. Полкінг, Й. Крал, Н.Х. Уї, Б.Ж. Іщанов, Х. Вердера, Х. Матеу і Х. Орбіч, Д. Ульріх та ін.). У відділі цю тематику розробляє А.В. Покровський. Зокрема, його увагу привернули усувні особливості розв'язків однорідних лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку з обмеженими вимірюваними дійсними коефіцієнтами (взагалі кажучи, розривними) та деяких важливих квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку.

У результатах згаданих авторів суттєвим було те, що коефіцієнти лінійних еліптичних рівнянь були досить гладкими. Але неважко навести приклади, що ці результати втрачають сенс для лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку в дивергентній формі з обмеженими вимірюваними та розривними коефіцієнтами. Тобто задача про усувні особливості розв'язків таких рівнянь потребує нових методів для свого дослідження у порівнянні з рівняннями із гладкими коефіцієнтами. Відправною точкою для методу дослідження цієї задачі, розробленого А.В. Покровським була ідея В.С. Федорова визначати класи локально інтегрованих функцій, в яких розглядається задача про усувні особливості розв'язків еліптичного рівняння, в термінах локальних наближень в середньому розв'язками цього рівняння. На цьому шляху він визначив нові класи неперервних функцій та функцій з квадратично інтегрованими узагальненими першими частинними похідними, в яких усувні особливості узагальнених розв'язків однорідних лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку з обмеженими вимірюваними коефіцієнтами повністю описуються в термінах хаусдорфових мір. Далі А.В. Покровський дослідив зв'язок введених їм класів функцій з відомими класами функцій з обмеженим середнім коливанням та класами Гельдера-Зігмунда. Зокрема з'ясувалось, що

при певних умовах на ступень гладкості коефіцієнтів диференціального рівняння, що розглядається, ці класи співпадають між собою. Це дозволило отримати узагальнення відомих результатів Є.П. Долженка та Л. Карлсона про усунні особливості гармонічних функцій в класах Гельдера.

Ще більш складною задачею виявилось дослідження усунних особливостей розв'язків однорідних лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку в недивергентній формі з обмеженими вимірюваними коефіцієнтами, що задовольняють так звану умову слабкої єдиності. Ця умова полягає у тому що для довільної області з гладкої межею і довільної неперервної функції, визначеній на цій межі, апроксимаційний розв'язок відповідної задачі Діріхле для рівняння, що розглядається, є єдиним. Під апроксимаційним розв'язком ми розуміємо рівномірну границю класичних розв'язків задачі Діріхле для лінійних рівномірно еліптичних рівнянь з гладкими коефіцієнтами, таких, що їх константи еліптичності обмежені знизу константою еліптичності заданого оператора, а коефіцієнти прямують до коефіцієнтів цього оператора майже скрізь. Як показав у 1997 р. М.С. Надірашвілі, на відміну від двовимірного випадку в розмірності більшої трьох існують лінійні рівномірно еліптичні рівняння другого порядку з обмеженими вимірними коефіцієнтами, які не задовольняють умову слабкої єдиності. З іншого боку М.В. Крилов (1992 р.) довів слабку єдність таких рівнянь, якщо замкнення множини точок розриву їх коефіцієнтів є не більш ніж зліченою множиною.

Першим результатом про усунні особливості розв'язків однорідних лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку у недивергентній формі з обмеженими вимірюваними коефіцієнтами був відомий приклад Д. Гілбарга і Дж. Серріна (1955 р.) такого рівняння, коефіцієнти якого аналітичні всюди в евклідовому просторі за винятком початку координат (згідно згаданого результату М.В. Крилова це рівняння задовольняє умову слабкої єдиності), але початок координат не є усунною множиною для розв'язків цього рівняння в деякому класі Гельдера. Відправляючись від

цього прикладу, А.В. Покровський ввів класи неперервних функцій та нові міри типу Хаусдорфа, в термінах яких отримав необхідні і достатні умови для усунення особливостей розв'язків однорідних лінійних рівномірно еліптичних рівнянь другого порядку з обмеженими вимірюваними коефіцієнтами, що задовольняють умову слабкої єдності. Як наслідок, з цього результату А.В. Покровського випливають згадані теореми Є.П. Долженка і Л. Карлсона про усунні особливості гармонічних функцій, а з іншого боку цей результат дозволив пояснити причину виникнення ізольованих особливих точок в класах Гельдера у недивергентному випадку.

А.В. Покровським також досліджувалась задача про усунні особливості розв'язків деяких квазілінійних рівнянь другого порядку – однорідних рівнянь з  $p$ -лапласіаном та рівняння мінімальних поверхонь. Зокрема для рівняння мінімальних поверхонь ним охарактеризовано в термінах хаусдорфових мір усунні множини в класах неперервно диференційованих функцій, перші частинні похідні яких задовольняють умову Гельдера із заданим показником.

Згадані результати А.В. Покровського склали основу докторської дисертації, захищеної у березні 2009 р. на механіко-математичному факультеті Московського державного університету ім. М.В. Ломоносова.

А.В. Покровський розробляє також і теорію наближення функцій – зокрема теорію наближення зі значучливою вагою. У цьому напрямку ним встановлено загальний критерій типу Колмогорова елемента найкращого наближення в несиметричних півнормах, з якого випливає велика кількість конкретних критеріїв, встановлених іншими авторами. А.В. Покровським введено поняття сильно єдиного елемента найкращого наближення зі значучливою вагою і знайдені необхідні і достатні умови для існування такого елемента у кожній неперервної функції на метричному компактi при наближенні чебишовським простором.

Теорію наближення функцій розробляв також учень А.В. Покровського Я.В. Новак. Його коло наукових інтересів – наближення найпростішими

дробами, тобто логарифмічними похідними алгебраїчних многочленів з комплексними коефіцієнтами. У цьому напрямку ним отримано характеристизацію просторів Гельдера-Зігмунда і просторів  $n$  раз неперервно диференційовних функцій в термінах локальних наближень найпростішими дробами. Я.В. Новак також отримав опис найпростіших дробів Паде функції, аналітичної в деякому околі початку координат, як границь найпростіших дробів найкращого рівномірного наближення цієї функції на кулях малого радіуса при прямуванні цих радіусів до нуля. Серед інших результатів Я.В. Новака відмітимо знайдений ним критерій типу Колмогорова для елемента найкращого рівномірного наближення дійсної неперервної функції на відрізка дійсними найпростішими дробами. Згадані результати Я.В. Новака склали основу його кандидатської дисертації, захищеної у лютому 2010 р. в Інституті математики НАН України.

За певних природних арифметичних умов отримано поточкові оцінки типу В.К.Дзядика для наближення аналітичних функцій в областях з кусково-гладкою межею многочленами з цілочисельними коефіцієнтами (І.В. Смаженко).

Відносно короткий час праці у відділі комплексного аналізу (2007) виявився для Анатолія Карольовича Прикарпатського вельми інтенсивним періодом з точки зору розширення сфери його наукових зацікавлень, що сягнули як важливих топологічних проблем нелінійного аналізу неперервних відображень банахових просторів, так і гомологічних проблем класифікації диференціювань в функціональних кільцях за допомогою диференціально-геометричних, диференціально-алгебраїчних та гомологічних методів аналізу, котрі були одними із провідних напрямків дослідження науковців відділу. Зокрема, плідно співпрацюючи із колегами з Інституту математики НАНУ (А.М. Самойленко, Ю.Б. Зелінський), Київського національного університету ім. Т. Шевченка (В. Г. Самойленко) та Львівського національного університету ім. І. Франка (Т.О. Банах, Я.В. Микитюк) Прикарпатський дослідив відому проблему опису диференціально-

геометричних та диференціально-топологічних властивостей узагальнених комплексів де Рама-Ходжа, природнім чином асоційованих з інтегровними багатовимірними диференціальними системами типу М. Громова. Ним була детально проаналізована геометрична структура характеристичних класів типу Черна, побудовані (спільно з М.М. Боголюбовим (мол)) спеціальні диференціальні інваріанти типу Черна. За ініціативи А.М. Самойленка Прикарпатським почали вивчатись деякі проблеми глобального аналізу поведінки траєкторій нелінійних динамічних систем на многовидах. Тут йому вдалось звести їх розв'язок (спільно з А.М. Самойленко) до вивчення властивостей множини розв'язків певних нелінійно-операторних відображень типу Ляпунова-Шмідта в банахових просторах, що володіють властивістю локальної випуклості. При цьому ним було запропоноване узагальнення типу Борсука-Улама відомої теореми Лере-Шаудера про нерухому точку та побудовані (спільно з Т.О. Банахом та А.М. Плічком) достатньо ефективні критерії локальної випуклості широкого класу відображень в гільбертових та банахових просторах. Досліджуючи деякі проблеми нелінійного аналізу для гладких відображень функціональних просторів, Прикарпатський зауважив (спільно з О.Д. Артемовичом та М. Павловим), що широкий їх клас може бути переформульованим в термінах теорії представлень диференціювань в спеціальних диференціально-функціональних кільцях, котрі допускають існування скінченно-породжених інваріантних диференціальних ідеалів. Їх глибокий зв'язок із проблеми класифікації узагальнених інтегрованих рівнянь типу Рімана виявилось як несподіваним, так і цікавим для деяких застосувань в сучасній гідродинаміці. Дослідження такого типу гідродинамічних проблем допомогою сучасних методів симплектичного аналізу привело А.Прикарпатського (спільно із Д. Блекмором, США) до можливості вивчення топологічної структури відповідно породжених дифеоморфізмів, котрі допускають

важливу для застосувань геометричну інтерпретацію в термінах добре знаних гелікоїдних та вихрових структур середовища.

Дослідження з комплексного аналізу велися і в інших відділах інституту.

Частина результатів Зорій Н.В., описаних вище, отримана під час роботи в відділі математичної фізики.

В відділі наближень Щербиною М.В. встановлено необхідні і достатні умови існування інтегральної поверхні для неперервного поля гіперплощин в дійсному евклідовому просторі; доведено, що довільна обмежена область в  $n$ -вимірному комплексному просторі є проекцією деякої обмеженої області голоморфності з комплексного простору розмірності на одиницю більше; знайдені умови існування аналітичної структури на поліноміальній оболонці графіка неперервної функції; розв'язана проблема Бруни та Ортеги про число перешкод при плюрігармонічній інтерполяції з кривих. Ці результати ввійшли в його докторську дисертацію, захищену в 1996 році.

В відділі теорії функцій Шевчуком І.О. побудовано загальну контурно-тілесну теорію аналітичних функцій і теорію комплексних скінченно-різницевої гладкостей, що дало можливість розв'язати певні складні проблеми теорії наближення. Ці роботи мають багато спільних точок дотику з роботами вчених відділу П.М. Тамразова та Ю.Ю.Трохимчука.

В травні 2006 р. П.М.Тамразова та Ю.Ю.Трохимчука обрано членами кореспондентами НАНУ.

Нагороди співробітників відділу за досягнення в розвитку математичної науки: премія імені М.М. Крилова (П.М.Тамразов, 2005 р.); премія імені Погорєлова (Ю.Ю.Трохимчук, 2008 р.); медаль НАНУ Відзнаки "За наукові досягнення" (П.М.Тамразов, 2009 р.); нагорода Міжнародного товариства з аналізу, його застосувань та обчислень ISAAC за досягнення в математиці (С.А.Плакса, 1999 р.), премія Верховної Ради України найталановитішим молодим ученим в галузі фундаментальних і прикладних

досліджень та науково-технічних розробок (С.В.Гришук, М.В.Ткачук, В.С.Шпаківський, 2013 р.).

23 червня 2003 р. в Інституті математики відбулося урочисте відкриття меморіальної дошки фундатору досліджень відділу академіку М. О. Лаврентьєву (скульптор Ю. В. Багаліка).

За роки незалежності співробітниками відділу опубліковано 12 збірників наукових праць та 10 монографій [1-22]. Організовано 16 міжнародних конференцій та математичних шкіл. За цей період співробітниками і аспірантами відділу захищено 6 докторських та 18 кандидатських дисертацій.

Наприкінці 2013 року в відділі комплексного аналізу та теорії потенціалу працює 1 член кореспондент НАН України, 5 докторів наук і 7 кандидатів наук, з яких 6 –науковці до 35 років.

Наведене засвідчує високий рівень наукових досягнень учених відділу, їх плідну роботу з підготовки висококваліфікованих наукових кадрів, та тісні зв'язки зі світовим математичним товариством. Колишні аспіранти відділу працюють в багатьох вузах України а також в Узбекистані, Туркменістані, Єгипті, Туреччині, Чехії.

Автор висловлює щирю подяку співробітникам відділу комплексного аналізу та теорії потенціалу за активне сприяння в написанні цього огляду.

## Література

1. А.В. Бондар. Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений – К.:Наук. думка, 1992. – 224с.
2. Ю.Ю. Трохимчук. Устранимые особенности аналитических функций – К.: Наук. Думка, 1992. – 224с.
3. Ю.Б. Зелинский. Многозначные отображения в анализе – К.: Наук. думка, 1993. – 264с.
4. И.П.Мельниченко. Когда и сколько заплатили Иуде Искарйоту / Автор предисл. П.П. Толочко. — Киев: Парламентское изд-во, 2003. — 312 с.
5. И.П.Мельниченко. Исторический портрет в синежелтом интерьере. — Київ: Юстiніан, 2004. —228 с.
6. Ю.И. Самойленко. Проблемы и методы физической кибернетики, Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2006, 644 с.
7. А.К. Бахтин, Г.П. Бахтина, Ю.Б. Зелинский. Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы комплексного анализа// Праці Інституту математики НАН України.- т.73.— Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008.- 308 с.
8. И.П. Мельниченко, С.А Плакса. Коммутативные алгебры и пространственные потенциальные поля// Праці Інституту математики НАН України.- т.71 .— Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. - 230 с.
9. Ю.Ю. Трохимчук. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности// Праці Інституту математики НАН України.- т. 70.— Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2008. - 539 с.
- 10.Ю.Б. Зелинский. Выпуклость. Избранные главы// Праці Інституту математики НАН України.- т. 92. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2012.- 280 с.
- 11.Комплексний аналіз та теорія потенціалу. Ред.П.М.Тамразов. Акад. наук України, Інститут математики НАН України. – Київ, 1992.- 102 с..
- 12.Generalizations of complex analysis and their applications in physics. II. Extremal problems related to one complex variable, potential theory, direct physical applications. Proceedings of a symposium, Warsaw and Rynia, Poland, May 30--July 1, 1994. Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform. 45(20), 163 p. (1995). Edited by J. Ławrynowicz, P.M. Tamrazov.
- 13.Quasiconformal Geometry and Dynamic I //Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform. 47(24), 171 p. (1997). Edited by J. Ławrynowicz, O.Martio, P.M. Tamrazov.
- 14.Quasiconformal Geometry and Dynamic II //Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, Sér. Rech. Déform. 48(25), 125 p. (1998). Edited by J. Ławrynowicz, O.Martio, P.M. Tamrazov.
- 15.Комплексний аналіз і течії з вільними межами//Збірник праць Інституту математики НАНУ.- Київ. – 2004, т.1, №3.- 329 с. Ред.

- І.О.Луковський, Ю.Б.Зелінський.
- 16.Проблеми аналізу і алгебри//Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ. – 2005. – т.2, № 3.- 292 с. Ред. Ю.Б.Зелінський, М.С.Черніков.
  - 17.Комплексний аналіз// Збірник праць Інституту математики НАН України.- Київ. – 2006. – т.3, №4.- 506 с.- Ред. Ю.Б.Зелінський, О.С.Лимарченко.
  - 18.Complex analysis and Potential Theory. Proceedings of Conference Satellite to ICM 2006. – World Scientific: London.- 2007. – 287 p. Edited by T.Aliyev, P.M. Tamrazov.
  - 19.Теорія операторів, диференціальні рівняння//Збірник праць Інституту математики НАНУ, 2009, т.6, №1. – 358 с. Ред. А.В.Покровський.
  - 20.Комплексний аналіз і течії з вільними границями//Збірник праць Інституту математики НАНУ.- Київ. – 2010, т.7, №2.- 442 с. Ред. Ю.Б.Зелінський, О.С.Лимарченко.
  - 21.Аналіз і застосування//Збірник праць Інституту математики НАНУ, 2012, т.9, №2.- 401 с. Ред. Ю.Б.Зелінський, В.І.Герасименко.
  - 22.Комплексний аналіз, теорія потенціалу і застосування//Збірник праць Інституту математики НАН України. – Київ. – 2013. – т.10, № 4-5.- 574 с. Ред. Ю.Б.Зелінський, С.А.Плакса.