Заболотний Ярослав Володимирович (Київ, Україна)

Деякі оцінки максимуму добутку внутрішніх радіусів взаємно неперетинних областей

Серед напрямків розвитку геометричної теорії функцій комплексної змінної важливе місце займає розв'язування екстремальних задач на класах областей, що не перетинаються. Першим важливим результатом даної тематики була теорема Лаврентьєва [1].

Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{C}$ – множини натуральних і комплексних чисел відповідно.

Зокрема, в роботі [3] було сформульовано наступну екстремальну задачу:

Задача 1. Довести, що максимум функціонала

$$I_\gamma = r^\gamma(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \tag{1}$$

де B_0, B_1, B_2,...,B_n, $(n \geq 2)$ - попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$, $r(B_j, a_j)$ - внутрішній радіус області B_j в точці a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0, n}$ і $\gamma \leq n$ (див, напр. [2-3], досягається для деякої конфігурації областей, які мають n - кратну симетрію.

Встановлено наступні результати:

Теорема 1. *Для $n = 2$ і $\gamma \in (0; 1.4]$ виконується нерівність*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{2} r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, a_0^0) \cdot \prod_{k=1}^{2} r(D_k, a_k^0)$$

де B_0, B_1, B_2 - попарно неперетині області в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_1| = |a_2| = 1$, причому знак рівності досягається, зокрема, за умов $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0, 2}$, де a_k^0, D_k, - відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(4-\gamma)w^2 + \gamma}{w^2(w^2-1)^2} dw^2.$$

Theorem 2. *Для довільного $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$ існує натуральне n_0, таке, що для $n \geq n_0$ і $0 \leq \gamma \leq n^\alpha$ виконується нерівність:*

$$r^\gamma(B_0, a_0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq r^\gamma(D_0, a_0^0) \cdot \prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k^0)$$

де B_0, B_1, B_2,...,B_n, *- попано неперетинні області в* $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $a_1 = 1$, $k = \overline{1,n}$, $r(B_j, a_j)$ *- внутрішній радіус області* B_j *в точці* a_j $(a_j \in B_j)$, $j = \overline{0,n}$, *причому знак рівності досягається, наприклад, для* $a_k = a_k^0$, $B_k = D_k$, $k = \overline{0,n}$, *де* a_k^0, D_k, *- відповідно полюси і кругові області квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\tfrac{(n^2-\gamma)w^n+\gamma}{w^2(w^n-1)^2}dw^2$$

Причому $n_0 \leq e^{\frac{1}{(\frac{2}{3}-\alpha)^2}}$

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений// *Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934.– 5.– С. 159 – 245.*
2. *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Тополого-алгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе. // *Праці ін-ту мат-ки НАН Укр. – 2008. – 308 с.*
3. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменною// *Успехи мат. наук. – 1994. – 49, № 1(295). – С. 3 – 76.*