Національна Академія Наук України

Інститут математики

Міжнародна конференція

ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

м. Київ

16–18 травня 2012 р.

Тези доповідей

Київ – 2012

Міжнародна конференція

"Динамічні системи та їх застосування"

м. Київ

16–18 травня 2012 р.

Теорія динамічних систем є основним математичним інструментом сучасної нелінійної динаміки. Поєднання внутрішнього багатства і краси результатів з винятковим прикладним значенням сприяє залученню все більшого числа фахівців з різних областей до дослідження динамічних систем.

В Україні традиційно приділяється значна увага різним аспектам нелінійної динаміки і, в тому числі, розвитку теорії динамічних систем. Важливою складовою є численні конференції та математичні школи, що регулярно проводяться українськими математиками.

Продовжуючи ці традиції, Інститут математики НАН України 16-18 травня 2012 року проводить конференцію «Динамічні системи та їх застосування». Основними напрямками роботи конференції є топологічна динаміка, теорія атракторів, комбінаторна та символьна динаміка, теорія фракталів, теорія біфуркацій та теорія стійкості.

Важливим завданням конференції є популяризація сучасних досягнень теорії динамічних систем, особливо в галузі освіти. З цією метою в програму конференції включені як доповіді про результати оригінальних досліджень, так і оглядові доповіді, які можуть бути цікаві широкій аудиторії.

Програмний комітет

Шарковський О. М. — Інститут математики НАН України,

Чуєшов І. Д. — Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна,

Шарко В. В. — Інститут математики НАН України,

Працьовитий М. В. — Національний пед. університет ім. М. Драгоманова.

Організаційний комітет

Барановський О. М.,

Лужевська К. С.,

Максименко С. І.,

Матвійчук М. Ю.,

Сівак А. Г.,

Федоренко В. В.

ПРО ОДИН КЛАС ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНИХ З РЯДАМИ ОСТРОГРАДСЬКОГО

С. Альбеверіо[1], О. Барановський[2,4], Ю. Кондратьєв[3,4], М. Працьовитий[4,2]

[1]*Інститут прикладної математики Боннського університету, Бонн, Німеччина,*
e-mail: albeverio@uni-bonn.de
[2]*Інститут математики НАН України, Київ, Україна,*
e-mail: baranovskyi@imath.kiev.ua
[3]*Факультет математики Білефельдського університету, Білефельд, Німеччина,*
e-mail: kondrat@mathematik.uni-bielefeld.de
[4]*Фізико-математичний інститут Національного педагогічного університету імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна,*
e-mail: prats4@yandex.ru

Нехай (p_i) — послідовність дійсних чисел, що має властивості: 1) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, 2) $|p_i| < 1$ для всіх $i \in \mathbb{N}$, 3) $\beta_{k+1} = 1 - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i > 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $\beta_1 = 1$.

Система функціональних рівнянь

$$\begin{cases} f(\bar{\mathrm{O}}^1(i)) = \beta_i, \qquad i \in \mathbb{N}, \\ f(\bar{\mathrm{O}}^1(i, g_1, g_2, \ldots, g_n)) = \beta_i - p_i f(\bar{\mathrm{O}}^1(g_1, g_2, \ldots, g_n)), \\ f(\bar{\mathrm{O}}^1(i, g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots)) = \beta_i - p_i f(\bar{\mathrm{O}}^1(g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots)). \end{cases} \tag{1}$$

у класі обмежених визначених на $(0, 1]$ функцій має єдиний розв'язок

$$F(x) = \beta_{g_1} + \sum_{k \geq 2} (-1)^{k-1} \beta_{g_k} \prod_{i=1}^{k-1} p_{g_i}, \tag{2}$$

де $g_k = g_k(x)$ є k-м $\bar{\mathrm{O}}^1$-символом [1] числа x, і вираз (2) є нескінченним, якщо x є ірраціональним числом, і скінченним — у протилежному випадку.

Теорема 1 *Якщо $p_k \neq 0$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ і серед членів послідовності (p_n) існують числа p_k і p_j такі, що $p_k p_j < 0$, то функція F не має жодного як завгодно малого інтервалу монотонності.*

Теорема 2 *Якщо $p_k \geq 0$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, то функція F є сингулярною функцією розподілу випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими $\bar{\mathrm{O}}^1$-символами η_k, що набувають значень $1, 2, \ldots, i, \ldots$ з ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ відповідно.*

[1] S. Albeverio, O. Baranovskyi, M. Pratsiovytyi, and G. Torbin, The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets, *Acta Arith.*, **130**, no. 3 (2007), p. 215–230.

ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ, ПОВ'ЯЗАНІ З ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ РЯДАМИ ЕНГЕЛЯ ТА СІЛЬВЕСТЕРА

О. М. Барановський[1], Б. І. Гетьман[2], М. В. Задніпряний[2]

[1]*Інститут математики НАН України, Київ, Україна,*
[2]*Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна,*
e-mail: zadnipryanyi.maksim@gmail.com

Теорема 1 *(Сільвестер, 1880 р). Для довільного дійсного числа $x \in (0,1]$ існує єдина послідовність (q_k) натуральних чисел, така, що $q_1 \geq 2$, $q_{n+1} \geq q_n(q_n-1)+1$ і*

$$x = q_1^{-1} + q_2^{-1} + \ldots + q_n^{-1} + \ldots . \tag{1}$$

Рівность (1) можна записати в зручнішій формі $x = \overline{\Delta}^S_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots}$, де $g_1 = q_1 - 1$, $g_{k+1} = q_{k+1} - q_k(q_k - 1)$, яка називається *$S$-зображенням* числа x.

Теорема 2 *(Енгель-Гетьман-Працьовитий). Для довільного дійсного числа $x \in (0,1]$ існує єдина послідовність $(d_k) \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, така, що*

$$x = \frac{1}{2+d_1} + \frac{1}{(2+d_1)(2+d_1+d_2)} + \frac{1}{(2+d_1)(2+d_1+d_2)(2+d_1+d_2+d_3)} + \ldots . \tag{2}$$

Рівність (2) символічно зображатимемо у вигляді $x = \overline{\Delta}^E_{d_1 d_2 \ldots d_n \ldots}$, який називатимемо *$E$-зображенням* числа x.

Теорема 3 *Функція: $\overline{\Delta}^S_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots} = x \xrightarrow{F} y = \overline{\Delta}^E_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ є неперервною, строго зростаючою сингулярною функцією розподілу на $[0,1]$.*

Теорема 4 *Рівняння $F(x) = x$ має зліченну множину раціональних коренів і жодного ірраціонального.*

Знайдено ряд функціональних співвідношень, які задовольняє дана функція; описано її диференціальні, інтегральні, квазісамоафінні та фрактальні властивості, також знайдено її еквівалентне означення в термінах функціональних рівнянь.

Зазначимо, що аналогічні властивості має функція, яка переводить формальне різницеве зображення рядом Остроградського 1-го виду у таке ж зображення рядом Остроградського 2-го виду (див. [2]).

[1] Працьовитий М. В., Гетьман Б. І. Ряди Енгеля та їх застосування, *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2006, №7, с. 105-116.

[2] Барановський О. М., Працьовита І. М., Працьовитий М. В. Про одну функцію, пов'язану з рядами Остроградського 1-го та 2-го видів *Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* Київ: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009, №10, с. 40-48.

МОДЕЛЮВАННЯ БІЛКОВИХ ВЗАЄМОДІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ АКТИВНИХ ЧАСТИНОК

Б. О. Білецький

Інститут кібернетики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: borys.biletskyy@gmail.com

В докладі запропоновано метод моделювання білкових взаємодій за допомогою активних частинок[1]. Кожній частинці ставиться у відповідність випадкове поле з локальною взаємодією; передбачено можливість композиції частинок для отримання складених частинок, які є носіями полів з більш складними характеристиками. Запропоновано механізм кодування структури частинок (а також пов'язаних з нею випадкових полів) за допомогою лінійної послідовності символів із деякого скінченного алфавіту.

Динаміка досліджуваних систем моделюється за допомогою стохастичної процедури, в якій використовується метод Метрополіса-Гастінгса[2] для побудови марківського процесу за наперед заданим інваріантним розподілом.

Розроблений метод було застосовано для дослідження низки модельних процесів, зокрема процесу мембранного транспорту речовин у клітині та автоколивальної реакції типу Білоусова-Жаботинського. Симуляції досліджуваних процесів реалізовані у вигляді Java/Scala-аплетів і доступні онлайн (http://b-squared.org.ua/exampleBz.html, http://b-squared.org.ua/exampleMembraneTransport.html).

[1] B. A. Biletskiy, Modeling of Multicomponent Systems, *Journal of Automation and Information Sciences*, **1** (2011), p. 72–84.

[2] G. O. Roberts, A. Gelman, W. R. Gilks, Weak convergence and optimal scaling of random walk Metropolis algorithm, *Ann. Appl. Probab.*, **1** (1997), p. 110–120.

ДИНАМИКА ТРЕХ ОДНОНАПРАВЛЕННО СВЯЗАННЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. С. Бобок[1], С. Д. Глызин[2]

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
e-mail: [1]*albonemo@gmail.com,* [2]*glyzin@uniyar.ac.ru*

Рассматривается динамика системы трех однонаправленно связанных сингулярно возмущенных осцилляторов с двумя запаздываниями

$$\varepsilon\dot{u}_j = [(a+1)f(u_j(t-\varepsilon h)) - a - bg(u_j(t-1)) - du_{j-1}]u_j,\ j=1,2,3,\ u_0=u_3 \tag{1}$$

возникающей в нейродинамике. Здесь $u_j(t)>0$ — мембранные потенциалы взаимодействующих нервных клеток; параметр $1/\varepsilon>0$, характеризующий скорость протекания процессов в системе, велик; положительные параметры h,a,b имеют порядок единицы; параметр связи $d>0$ мал; достаточно гладкие функции $f(u)$ и $g(u)$ таковы, что $f(0)=1$, $g(0)=0$, $f(u)\to 0$, $g(u)\to 1$ при $u\to+\infty$, и удовлетворяют некоторым условиям (типа общности положения), из которых вытекает наличие у каждого отдельного осциллятора системы (1) единственного состояния равновесия. В окрестности этого состояния система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot{v}_j = -\Big[\Big(\frac{1}{2}-\mu\Big)v_j(t-\varepsilon h) + \Big(\frac{1}{2}+\mu\Big)v_j(t-1) + \Delta_1(v_j(t-\varepsilon h),\mu) + {}\\ + \Delta_2(v_j(t-1),\mu) - \nu v_{j-1}\Big](1+v_j),\ j=1,2,3,\ v_0=v_3,\end{aligned} \tag{2}$$

где $\Delta_k(v,\mu)\,(k=1,2)$ — нелинейные по v функции порядка выше первого. В задаче об устойчивости нулевого решения для системы (2) при $\varepsilon=\mu=\nu=0$ реализуется ситуация бесконечномерного вырождения (см. [1]). Для локального анализа полученной системы при условии, что $\mu=\mu_0\varepsilon^4$, $h=1+h_0\varepsilon^2$, $\nu=\nu_0\varepsilon^4$ строится квазинормальная форма, представляющая собой счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Экспоненциально устойчивым состояниям равновесия полученной системы соответствуют циклы системы (2) той же устойчивости. Оказалось, что при подходящем выборе параметров μ_0, ν_0, h_0 эта система может иметь любое наперед заданное конечное число устойчивых состояний равновесия, что гарантирует существование при достаточно малом ε такого же числа устойчивых циклов системы (2), а значит и системы (1).

Накапливание устойчивых режимов вполне естественно для нейронных систем; на их основе, по всей вероятности, реализуется ассоциативная память. Весьма интересно, что добиться наличия такого свойства удалось в относительно простой системе из трех связанных осцилляторов с двумя запаздываниями.

[1] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Явление буферности в нейродинамике, *ДАН,* **443,** № 2 (2012), с. 168–172.

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ — ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

М. Б. Верейкина

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: vereik@imath.kiev.ua

Исследуется динамика решений нелинейных краевых задач [1], редуцируемых к косому произведению отображений интервалов. Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_i \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$x \in G = [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}^+$, $a_1, a_2 > 0$, с нелинейными граничными условиями

$$H_i(u_1, u_2)|_{x \in \partial G} = 0, \quad \text{при } t \in \mathbb{R}^+, \ i = 1, 2, \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad x \in [0, 1], \ i = 1, 2, \tag{3}$$

где $H_i \in C^1(I, I_i)$, $\varphi_i \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ — некоторые заданные функции, причем хотя бы одна из H_i нелинейна; $u_i \in C^1([0, 1] \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ — неизвестные функции; $I_i \subset \mathbb{R}$ — замкнутые интервалы, $I = I_1 \times I_2$, $i = 1, 2$.

Для исследования различных типов асимптотического поведения решений задачи (1)-(3) предложены некоторые характеристики, использующие возможности компьютерной графики. Основным объектом визуализации является векторное поле, образуемое решениями задач (1)-(3).

Методика исследования может быть представлена с помощью схемы:

$$\boxed{\text{Нелинейная краевая задача}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Начальная задача для разностного уравнения}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Траектория дискретной динамической системы}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Свойства решений}}$$
$$\downarrow$$
$$\boxed{\text{Визуализация свойств решений}}$$

[1] М. В. Верейкина, Нелинейные краевые задачи: теория и компьютерная графика, *Вісник КНУ ім. Т.Шевченка*, **5** (2001), с. 17–31.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЦИКЛЫ ЦЕПОЧЕК ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. Д. Глызин

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия
e-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Рассматривается система дифференциально-разностных уравнений вида

$$\dot{u}_j = d\,(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \lambda[f(u_j(t-h)) - g(u_j(t-1))]u_j,\;\; j = 1,\dots,m, \tag{1}$$

моделирующая электрическую активность цепочки ($u_0 = u_1$, $u_{m+1} = u_m$) нервных клеток [1]. Здесь $u(t)$ – мембранный потенциал, функции $f(u)$ и $g(u)$ отвечают за проводимости калиевых и натриевых ионных каналов, единицей измерения времени выбрано запаздывание в калиевом канале, $0 < h < 1$ – запаздывание в натриевом канале, параметр λ, пропорциональный скорости протекания процессов в клетке, велик. Относительно функций $f(u)$, $g(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\}$ будем предполагать, что $f(0) = 1$, $g(0) = 0$; $f(u) = -a_0 + O(u^{-1})$, $g(u) = b_0 + O(u^{-1})$, $uf'(u)$, $ug'(u)$, $u^2 f''(u)$, $u^2 g''(u) = O(1/u)$ при $u \to +\infty$.

В процессе применения метода большого параметра основной проблемой является выбор подходящего предельного объекта, достаточно сложного для того, чтобы иметь относительно богатую динамику и, вместе с тем, относительно простого и доступного для анализа. Перейдем в системе (1) к новым переменным $x, y_1, \dots, y_{N-1}$, где $u_1 = \exp(x/\varepsilon)$, $u_j = \exp\Big(x/\varepsilon + \sum\limits_{k=1}^{j-1} y_k\Big)$, $j = \overline{2,m}$, что позволяет при $\varepsilon \to 0$ получить в качестве предельного объекта следующую задачу с импульсным воздействием:

$$\begin{gathered}\dot{y}_j = d\,[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})],\; j = 1,\dots,m-1,\; y_0 = y_m = 0;\\ y_j(h + kT_0 + 0) = y_j(h + kT_0 - 0) - (1 + a_0)y_j(kT_0),\; y_j(t_0 + h + kT_0 + 0) =\\ = y_j(t_0 + h + kT_0 - 0) - (1 + 1/a_0)y_j(t_0 + kT_0),\; y_j(1 + kT_0 + 0) = y_j(1 + kT_0 - 0) -\\ - b_0 y_j(kT_0),\; y_j(1 + t_0 + kT_0 + 0) = y_j(1 + t_0 + kT_0 - 0) - (b_0/a_0)y_j(t_0 + kT_0),\\ k = 0,1,\dots,n,\quad j = 1,\dots,m-1,\; (y_1,\dots,y_{m-1})\big|_{t=-\sigma_0} = (z_1,\dots,z_{m-1});\end{gathered}$$

где T_0 – длина всплеска, n – число всплесков на периоде, T_* – период цикла одиночного осциллятора. Для отображения $z \to \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t,z),\dots,y_{m-1}^0(t,z))\big|_{t=T_*-\sigma_0}$, действующего из $\mathbb{R}^{m-1}$ в $\mathbb{R}^{m-1}$, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 *Любой неподвижной точке отображения* $\Phi(z)$, *экспоненциально устойчивой или дихотомичной, при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *соответствует релаксационный цикл системы* (1) *с теми же свойствами устойчивости.*

[1] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Дискретные автоволны в нейронных системах // *Журнал вычислительной математики и математической физики,* **52**, №5 (2012), с. 840–858.

ON MAIN SCENARIOS FOR APPEARANCE OF STRANGE HOMOCLINIC ATTRACTORS IN THREE-DIMENSIONAL MAPS

S. V. Gonchenko

Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod, Russia,
e-mail: gonchenko@pochta.ru

We study questions of chaotic dynamics in three-dimensional dissipative, smooth and orientable maps (diffeomorphisms). We show that there exist two main scenarios of chaos developing from a stable fixed point to strange homoclinic attractors of the following types: a Shilnikov (spiral) attractor, a Lorenz-like attractor and a "figure-8" attractor. Note that after some (local) bifurcations the stable fixed point becomes saddle and we say that an appearing strange attractor is *homoclinic* if it contains this saddle fixed point.

We show that the scenario type depends on the first bifurcation of the fixed point. If this bifurcation is an *Andronov-Hopf* one, then the homoclinic attractor is spiral, in general: it contains the fixed point that is a saddle-focus with the two-dimensional unstable manifold. If the bifurcation is a *period doubling* one, then the homoclinic attractor is either a Lorenz-like or "figure-8" strange attractor: it contains the fixed point which has one (negative) unstable multiplier and two real stable multipliers of opposite sings. If the negative (resp., positive) stable multiplier is strong stable, then the homoclinic attractor mimics a Lorenz-like one (resp., a "figure-8" one). We give a qualitative description of these attractors and define certain conditions when they can be *genuine* ones (pseudo-hyperbolic strange attractors). We also give the corresponding results of numerical analysis of attractors for three-dimensional quadratic (Hénon) maps.

ВЛАСТИВОСТІ ДВОХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ПОВ'ЯЗАНИХ З ПРЕДСТАВЛЕННЯМ ЧИСЕЛ РЯДАМИ СІЛЬВЕСТЕРА

М. В. Задніпряний[1], І. М. Лисенко[2]

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна,
e-mail: [1]*zadnipryanyi.maksim@gmail.com*, [2]*ira72005@yandex.ru*

Теорема 1 (Сільвестер, 1880 р.) *Для будь-якого дійсного числа* $x \in (0,1]$ *існує єдина послідовність* (q_k) *натуральних чисел, така, що* $q_1 \geq 2$, $q_{n+1} \geq q_n(q_n-1)+1$ *і*

$$x = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}. \tag{1}$$

Рівність (1) скорочено (символічно) позначатимемо через $x = \Delta_{q_1 q_2 \ldots q_n \ldots}$ і називатимемо *зображенням числа x рядом Сільвестера.* Їй можна дати інший, більш зручний в багатьох питаннях, формальний вираз (інше зображення) $x = \overline{\Delta}^S_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots}$, де $g_1 = q_1 - 1$, $g_{k+1} = q_{k+1} - q_k(q_k - 1)$, $k \in N$, який називатимемо його *S-зображенням.* При цьому число $g_k = g_k(x)$ називається k-тим S-символом числа x. У S-зображенні числа $x \in (0,1]$ символи (числа) g_k можуть набувати, незалежно одне від одного, всіх натуральних значень. Отже, алфавітом для такого зображення є множина всіх натуральних чисел, а S-зображення є кодуванням числа x за допомогою символів нескінченного алфавіту.

Розглядаються дві динамічні системи з фазовим простором $X \equiv (0,1]$, але різними відображеннями:

1) $f(\overline{\Delta}^S_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}) = \overline{\Delta}^S_{(a_1+a_2) a_3 \ldots a_n \ldots}$;

2) $\phi(\overline{\Delta}^S_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}) = \overline{\Delta}^S_{(a_1 \cdot a_2) a_3 \ldots a_n \ldots}$.

Коректність означень динамічних систем (X, f, B, λ) і (X, ϕ, B, λ), де B — σ-алгебра борелевських множин з $(0,1]$, а $\lambda(\cdot)$ — міра Лебега, випливає з єдиності представлення числа рядом Сільвестера.

Динаміки, породжені відображеннями f і ϕ, мають принципові відмінності. Перше відображення не має інваріантних точок, а атрактором динамічної системи є точка $x = 0$. Відображення ϕ має безліч інваріантних точок, а атрактор динамічної системи має значно складнішу структуру.

Для обох динамічних систем нас цікавить поведінка (поточкова, майже скрізь у розумінні міри Лебега) відношення $u_n v_n^{-1}$, де $u_n = \gamma^n(u_0)$, $v_n = \gamma^n(v_0)$, де $\gamma \in \{f, \phi\}$.

При розв'язанні задач метричної теорії чисел та ергодичної теорії динамічних систем, пов'язаних з зображенням чисел рядами Сільвестера, важливими є наступні поняття. *Циліндром рангу m з основою $a_1 a_2 \ldots a_m$* називається множина $\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_m}$ всіх $x \in (0,1]$, які у розкладі в ряд Сільвестера мають $q_i(x) = a_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Відношення діаметрів вкладених циліндрів називається *основним метричним відношенням.*

ДИФФУЗИОННЫЙ ХАОС В ВОЗБУДИМЫХ СРЕДАХ

Т. В. Карамышева

Институт Системного Анализа РАН, Москва, Россия,
e-mail: taisia.karamysheva@gmail.com

Рассмотрена реакция каталитического окисления молекул CO на поверхности платины Pt(1 1 0), для которой эксперименты выявили большое разнообразие пространственно-временных структур на поверхности катализатора, таких как импульсы, спирали и химическая турбулентность (диффузионный хаос). Модель для такой реакции в одномерном случае описывается двухкомпонентной системой уравнений реакция-диффузия [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\varepsilon}u(u-1)(u-\dfrac{b+v}{a}) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = f(u) - v, \end{cases} \tag{1}$$

где $f(u)$ – экспериментальная зависимость скорости изменения структуры поверхности:

$$f(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant u < 1/3, \\ 1 - 6.75u(u-1)^2, & 1/3 \leqslant u \leqslant 1, \\ 1, & 1 < u, \end{cases}$$

а u – покрытие (поверхностная концентрация) адсорбированного CO, v – величина, характеризующая состояние поверхности. Параметры модели удовлетворяют условиям $0 < a < 1$, $b > 0$ и $\varepsilon > 0$ и характеризуют соответственно парциальные давления O и CO и температуру. Анализ решений системы (1) может быть проведен заменой переменной $\xi = x - ct$ и переходом к трехмерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работе показано, что система уравнений (1) с фиксированными значениями параметров имеет семейство автоволновых решений, бегущих вдоль пространственной оси с различными скоростями. Эти решения описываются некоторыми сингулярными аттракторами и предельными циклами соответствующего периода исследуемой трехмерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (в зависимости от бифуркационного параметра c).

[1] M. G. Zimmermann, S. O. Firle, M. A. Natiello, M. Hildebrand, M. Eiswirth, M. Bär, A. Bangia und I. G. Kevrekidis, Pulse bifurcation and transition to spatiotemporal chaos in an excitable reaction-diffusion model, *Physica D*, **110** (1997), p. 92–104.

[2] Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров, *Новые методы хаотической динамики*, М.: Едиториал УРСС, 2004, 320 с.

Існування циклічних траекторій у $2n$-вимірної динамічної системи конфлікту

Т.В. Каратаева[1], В.Д. Кошманенко[2]

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: [1]*karat@imath.kiev.ua,* [2]*koshman63@googlemail.com*

У просторі пар стохастичних векторів $p, r \in \mathbb{R}^n_+, n \geq 2$, розглядається нелінійне відображення ($p^0 = p, r^0 = r$):

$$\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \ni \{p^N, r^N\} \xrightarrow{\circledast} \{p^{N+1}, r^{N+1}\} \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+, N = 0, 1, ... \tag{1}$$

яке визначається в термінах координат наступними формулами:

$$p_i^{N+1} = \frac{\tilde{p}_i^N(1 - r_i^N)}{c_p^N}, \quad r_i^{N+1} = \frac{\tilde{r}_i^N(1 - p_i^N)}{c_r^N}, \ i = 1, ..., n, \tag{2}$$

де c_p^N, c_r^N — нормуючі знаменники, які забезпечують стохастичність векторів p^{N+1}, r^{N+1}, а

$$\tilde{p}_i^N = p_i^N + s_i^{N+1}, \quad \tilde{r}_i^N = r_i^N + h_i, \tag{3}$$

де $s_i^{N+1} = s_{i+1}^N$ при $1 \leq i < n$, $s_n^{N+1} = s_1^N$, а $s^{N=0} = (s_1, ..., s_n), h = (h_1, ..., h_n)$ – фіксовані вектори з $\mathbb{R}^n_+$. Відображення $\circledast$ згідно формул (2) має інтерпретацію альтернативної конфліктної взаємодіїї між парою фізичних систем, які знаходяться в станах p^N, r^N в моменти дискретного часу $N = 1, 2, ...$ При цьому кожна з систем отримує систематичне зовнішнє "підживлення", задане формулами (3).

В роботі досліджується асимптотична поведінка траєкторій динамічної системи (1). Зокрема, при певних умовах на вектори s, h та p, r встановлено існування ω-граничних періодичних траекторій, які є атракторами. Цей результат є багатовимірним аналогом відомої теореми Пуанкаре-Бендіксона (див., наприклад, [1]) і є наслідком двох фактів: існування (див. [2]) нерухомої точки у динамічної системи, заданої формулами (2) з $\tilde{p}_i^N = p_i^N, \tilde{r}_i^N = r_i^N$, та коливальним характером рівномірно обмеженого зовнішнього "підживлення". При цьому припускається, що всі координати векторів p, r та s, h задані раціональними числами.

[1] J.M. Epstein, *Nonlinear dynamics, mathematical biology, and social science*, Addison-Wisley Publ.Com., 1997.

[2] V. Koshmanenko, The Theorem of Conflict for Probability Measures, *Math. Methods of Operations Research*, **59**:2 (2004), p. 303–313.

HOMEOMORPHIC MEASURES ON CANTOR SETS

O. M. Karpel

Institute for Low Temperature Physics, Kharkiv, Ukraine,
e-mail: helen.karpel@gmail.com

Two (finite or infinite) measures μ and ν defined on Borel subsets of a topological space X are called *homeomorphic* if there exists a self-homeomorphism h of X such that $\mu = \nu \circ h$, i.e. $\mu(E) = \nu(h(E))$ for every Borel subset E of X. The problem of classification of Borel measures with respect to a homeomorphism has a long history. For instance, Oxtoby and Ulam [4] gave a criterion when the Borel probability measure on the finite-dimensional cube is homeomorphic to the Lebesgue measure.

For Cantor sets the situation is much more difficult than for connected spaces. It is possible to construct uncountably many full (the measure of every non-empty open set is positive) non-atomic measures on the Cantor set X which are pairwise non-homeomorphic. The *clopen values set* $S(\mu)$ is the set of finite values of a measure μ on all clopen subsets of X. This set provides an invariant for homeomorphic measures, although it is not a complete invariant. For the class of the so called *good* probability measures, $S(\mu)$ *is* a complete invariant (see [1]). A full non-atomic probability measure μ is good if whenever U, V are clopen sets with $\mu(U) < \mu(V)$, there exists a clopen subset W of V such that $\mu(W) = \mu(U)$. In [2], infinite Borel measures on Cantor sets were considered. In [3], the notions and results concerning good measures are extended to the case when X is a non-compact locally compact Cantor set. For an infinite Borel measure μ on a (either compact or non-compact) Cantor set X, we denote by $\mathfrak{M}_\mu$ the set of all points in X whose compact open neighbourhoods have only infinite measures. The full non-atomic measures μ such that $\mu(\mathfrak{M}_\mu) = 0$ are called *non-defective*.

Theorem 1 *Let X, Y be locally compact Cantor sets; μ and ν be good non-defective measures on X and Y, respectively; $S(\mu) = S(\nu)$, and $\mathfrak{M}$ be the defective set for μ and $\mathfrak{N}$ be the defective set for ν. Assume that there is a homeomorphism $h \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ where the sets $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are endowed with the induced topologies. Then there exists a homeomorphism $\widetilde{h} \colon X \to Y$ which extends h such that $\mu = \nu \circ \widetilde{h}$.*

Conversely, if μ and ν are good homeomorphic measures then $S(\mu) = S(\nu)$ and there is a homeomorphism $h \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$.

[1] E. Akin, Good measures on Cantor space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357** (2005), p. 2681–2722.

[2] O. Karpel, Infinite measures on Cantor spaces, *J Difference Equ. Appl.*, **18** (2012), p. 703–720.

[3] O. Karpel, Good measures on locally compact Cantor sets, arXiv:1204.0027v1.

[4] J. C. Oxtoby, S. M. Ulam, Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity, *Ann. Math.*, **42** (1941), p. 874–920.

ABSTRACT PLATE MODELS WITH A DISPLACEMENT-DEPENDENT DAMPING

S. A. Kolbasin

Kharkiv National University of V.N. Karazin, Kharkiv, Ukraine,
e-mail: StasKolbasin@gmail.com

The talk is devoted to the asymptotical behaviour of the dynamical systems generated by variations on the following problem in an abstract Hilbert space H:

$$u_{tt} + \mathcal{D}(u, u_t) + \mathcal{A}u + F(u) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \tag{1}$$

Here $\mathcal{A}$, F, and $\mathcal{D}(u, u_t)$ (for each $u \in H$) are operators densely defined on H, $\mathcal{A}$ is self-adjoint and positive. The situations being studied are described below. In each case the existence of a finite-dimensional compact global attractor is established.

(i) Abstract plate equation with a subcritical damping coefficient $K(u)$:

$$u_{tt} + K(u)u_t + \mathcal{A}u + F(u) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u_t(0) = u_1. \tag{2}$$

For example, with $\mathcal{A} = \Delta^2$ the generalized equation (2) covers different plate models in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \leq 3)$:

$$u_{tt} + \sigma(u)u_t + \Delta^2 u + F(u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

$\sigma(u)$ being a real-valued function. Depending on the structure of $F(u)$, this may be the Kirchhoff, Berger or von Karman model.

(ii) Plate model with a strong damping. Let $\mathcal{D}(u, u_t)$ in (1) map $D(\mathcal{A}^{1/2}) \times D(\mathcal{A}^{\theta})$ into $D(\mathcal{A}^{-\theta})$ (with $0 < \theta < 1/2$). E.g., for the plate models a damping of this type may look like $-\Delta u_t + \sigma(u)u_t$.

(iii) The quasi-static limit of plate models. Suppose we add a mass density coefficient into the plate equation (2) (that is, replace u_{tt} with μu_{tt}, $\mu > 0$). After (formally) passing to the limit with $\mu \to 0$, we get a parabolic-like equation

$$K(u)u_t + \mathcal{A}u + F(u) = 0. \tag{3}$$

It appears that the dynamical systems (and their attractors) generated by (2) (with the coefficient μ) converge in the certain sense to the ones of (3) as $\mu \to 0$.

The talk is partially based on the results of joint articles [2] and [3] with I.D. Chueshov.

[1] Kolbasin S., Attractors for Kirchhoff's equation with a nonlinear damping coefficient, *Nonlinear Analysis*, **71**, p. 2361–2371.

[2] Chueshov I. and Kolbasin S., Plate models with state-dependent damping coefficient and their quasi-static limits, *Nonlinear Analysis*, **73**, p. 1626–1644.

[3] Chueshov I. and Kolbasin S., Long-time dynamics in plate models with strong nonlinear damping, *Communications on Pure and Applied Analysis*, **11**, p. 659–674.

ЕНТРОПІЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ОБОЛОНОК

С. Ф. Коляда[1], Ю. С. Семікіна[2]

[1]*Інститут математики НАН України, Київ, Україна,*
e-mail: skolyada@imath.kiev.ua
[2]*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,*
e-mail: julia.semikina@gmail.com

Нехай (X, f) – динамічна система, де X – метричний простір з метрикою d, а $f : X \to X$ – неперервне відображення. Надалі вважатимемо, що простір X компактний. Нехай $S(X) = C(X, X)$ це множина усіх неперервних відображень простору X в себе. Ми будемо розглядати на множині $S(X)$ рівномірну та гаусдорфову метрики (відповідні метричні простори позначатимемо $S_U(X)$ та $S_H(X)$).

Функціональною оболонкою динамічної системи (X, f) ми будемо називати динамічну систему $(S(X), F_f)$, де відображення $F_f : S(X) \to S(X)$ визначено співвідношенням $F_f(\varphi) = f \circ \varphi,\ \varphi \in S(X)$.

Природне запитання, що виникає при вивченні функціональних оболонок: який зв'язок між динамічними властивостями відображень f та F_f, зокрема між топологічними ентропіями $h(f)$ та $h(F_f)$.

Теорема 1 *Нехай $I = [0, 1]$ з евклідовою метрикою, $f : I \to I$ – неперервне відображення. Тоді єдиними можливими значеннями для $h(F_f)$ є $\{0, \infty\}$.*

Теорема 2 *Нехай K – канторова множина з евклідовою метрикою, $f : K \to K$ – неперервне відображення. Тоді єдиними можливими значеннями для $h(F_f)$ є $\{0, \infty\}$.*

Також ми дамо своє означення ентропії дії групи відображень на метричному просторі та доведемо діхотомію такої дії для деяких груп.

Нехай $H(X) \subset S(X)$ це простір всіх гомеоморфізмів простору X.

Теорема 3 *Якщо $G < H(X)$, то єдиними можливими значеннями для $h_{act}(G)$ є $\{0, \infty\}$*

Теорема 4 *Нехай X компактний метричний простір. Розглянемо $Y = H(X)$ як метричний простір з рівномірною метрикою та $G = H(X)$ як групу, що діє на Y. Тоді якщо $Y = H(X)$ компактний, то $h_{act}(G) = 0$.*

[1] J. Auslander, S. Kolyada and L. Snoha, Functional envelope of a dynamical system, *Nonlinearity*, **20**, no. 9 (2007), p. 2245–2269.

[2] R. Bowen, *Topological entropy for noncompact sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **184** (1973), p. 125-136.

[3] С. Коляда, *Топологічна динаміка. Мінімальність, ентропія та хаос*, Монографія, Праці інституту математики НАН України, том 89.

[4] M. Matviichuk, *Entropy of induced maps for one-dimensional dynamics*, Iteration theory (ECIT '08), Grazer Math. Ber., **354** (2009), p. 180–185.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДОПУСТИМОГО И ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА

В. И. Коробов

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина
e-mail: vkorobov@univer.kharkov.ua

Одной из центральных задач математической теории управления является задача оптимального синтеза.

Эта задача для управляемой системы $\dot{x} = f(x,u)$, $x \in R^n$, $u \in R$, $f(0,0) = 0$ с ограничениями на управление $u \in \Omega \subset R$ состоит в построении управления в виде $u = u(x)$, удовлетворяющего заданному ограничению, такого что траектория системы $\dot{x} = f(x, u(x))$, начинающаяся в произвольной точке x_0 из окрестности начала координат, оканчивается в нуле в конечный момент времени $T(x_0)$. Решение этой задачи основано на методе функции управляемости [1], являющегося дальнейшим развитием метода функции А. М. Ляпунова.

Решение задачи оптимального синтеза основано на min-проблеме моментов А. А. Маркова [2] .

Рассматривается класс нелинейных управляемых систем [3], которые можно отобразить на системы более простого вида. Также рассматривается решение задачи допустимого синтеза для класса нелинейных систем с разрывной правой частью [4].

[1] В.И. Коробов. *Метод функции управляемости*, Ижевск: РХД, 2007, 576 с.

[2] В. И. Коробов, Г. М. Скляр, Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов, *Математический сборник*, **134**, № 2 (1987).

[3] В. І. Коробов, Скляр К. В., Скорик В. О., Відображуваність нелінійних систем на системи спеціального вигляду та їх керованість, *Доповіді НАН України*, **8** (2010), с. 14–19.

[4] V.I. Korobov, Y. V. Korotyayeva. Feedback Control Design for Systems with x-Discontinuous Right-Hand Side, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **149**, No 3 (2011), p. 494–512.

OSCILLATION OF PERIODIC NETWORKS AND LATTICES

A. S. Krylova, G. V. Sandrakov

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine,
e-mail: sandrako@mail.ru

Oscillation of periodic networks and lattices will be discussed. The corresponding oscillation problems are reduced to spectral problems. Thus, homogenization of the spectral problems on small-periodic networks and lattices with periodic boundary conditions will be also discussed. This problem for a network has the following form

$$-\varepsilon^2 \frac{d^2 u_\varepsilon(x)}{dx^2} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon(x), \quad x \in G_\varepsilon \cap \Omega, \tag{1}$$

$$u_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x + l_i), \quad u'_\varepsilon(x) = u'_\varepsilon(x + l_i), \quad x \in G_\varepsilon \cap \partial\Omega,$$

where G_ε is a small-periodic network, $\Omega = [0,1] \times [0,l]$ is a rectangle with the boundary $\partial\Omega$, $l_1 = 1$, $l_2 = l$ and ε is a small parameter. The similar networks were considered in [1]. This problem for lattices has the form that is similar to (1).

According to homogenization principles [2], we construct asymptotic expansions that are homogenized solutions of problem (1). For an eigenfunction u_ε and an eigenvalue λ_ε one has corresponding asymptotic expansions

$$u_a(x, \frac{x}{\varepsilon}) = u_0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon u_1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \frac{x}{\varepsilon}), \qquad \lambda_a = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_2,$$

where λ_0 is a eigenvalue of a mesh problem, which has been solved in [3], and λ_2 is a eigenvalue of a homogenization problem. The constructed asymptotic is justified for a eigenvalue λ_ε^s of the problem (1) in the following theorem.

Theorem. *For fixed λ_0 and λ_2 there are an eigenvalue λ_ε^s of the problem (1) and a constant C independent on ε, such that the inequality is satisfied*

$$|\lambda_\varepsilon^s - \lambda_0 - \varepsilon^2 \lambda_2| \le C\varepsilon^3.$$

The forms and justification of asymptotic expansions for other eigenvalues and eigenfunctions will be also presented.

[1] V.G. Maz'ya, A.S. Slutskii, Homogenization of a differential operator on a fine periodic curvilinear mesh, *Math. Nachr.*, **133** (1986), p. 107–133.

[2] G. V. Sandrakov, Homogenization principles for eguations with rapidly oscillatory coefficients, *Sbornik: Math.*, **180** (1989), p. 1634–1679.

[3] A.S. Krylova, G. V. Sandrakov, Study of eigenvalues and eigenfunctions for arbitrary fragments of networks, *J. Comp. and Applied Math.*, **101** (2010), p. 81–96. (in Ukrainian)

NONLINEAR ANALYSIS OF ANALOG PHASE-LOCKED LOOP

N. V. Kuznetsov[1,2], G. A. Leonov[1], M. V. Yuldashev[1,2], R. V. Yuldashev[1,2]

[1]*St.Petersburg State University, St.Petersburg, Russia,*
e-mail: leonov@math.spbu.ru
[2]*University of Jyväskylä, Jyväskylä, Finland,*
e-mail: nkuznetsov239@gmail.com

Phase-locked loop (PLL) systems were invented in the 1930s-1940s and were used in radio and television (demodulation and recovery, synchronization and frequency synthesis). Nowadays PLL can be produced in the form of single integrated circuit. There are several types of PLL (classical PLL, ADPLL, DPLL, and others) and its various modifications (Costas loop, PLL with square, and others) which are used in a great amount of modern electronic applications (radio, telecommunications, computers and others).

Various methods for analysis of phase-locked loops are well developed by engineers, but the problems of construction of adequate nonlinear models and nonlinear analysis of such models are still far from being resolved [1] and require using special methods of qualitative theory of differential, difference, integral, and integro-differential equations [2-13].

In this survey, it is described the general approach to nonlinear analysis and design of analog phase synchronization system, which are based on the construction of nonlinear mathematical models in signal and phase space and applying the methods of nonlinear analysis of high-frequency oscillations.

[1] D. Abramovitch, Phase-locked loops: A control centric tutorial, In *Proceedings of the American Control Conference*, **1** (2002), p. 1–15 (plenary lecture)

[2] G. A. Leonov, N.V. Kuznetsov, M. V. Yuldashev, R. V. Yuldashev, Nonlinear models of Costas loop, *Doklady Mathematics*, 2012 (in print)

[3] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, M. V. Yuldashev, and R. V. Yuldashev, Computation of phase detector characteristics in synchronization systems, *Doklady Mathematics*, **84**(1), 2011, p. 586–590

[4] N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, M. V. Yuldashev, R. V. Yuldashev, Analytical methods for computation of phase-detector characteristics and pll design. In: *IEEE ISSCS 2011 – International Symposium on Signals, Circuits and Systems, Proceedings*, 2011, p. 7–10 (doi: 10.1109/ISSCS.2011.5978639)

[5] N. V. Kuznetsov, P. Neittaanmäki, G. A. Leonov, M. V. Yuldashev, R. V. Yuldashev, High-frequency analysis of phase-locked loop and phase detector characteristic computation. In: *ICINCO 2011 – Proceedings of the 8th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, **1**, p. 272–278 (doi: 10.5220/ 0003522502720278)

[6] G. A. Leonov, S. M. Seledzhi, N. V. Kuznetsov, P. Neittaanmaki, Asymptotic analysis of phase control system for clocks in multiprocessor arrays, In: *ICINCO 2010 – Proceedings of the 7th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*, **3** (2010), p. 99–102 (doi: 10.5220/0002938200990102)

[7] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, S. M. Seledzhi, Nonlinear Analysis and Design of Phase-Locked Loops. p. 89–114. In: *Automation control – Theory and Practice*, A. D. Rodic (ed.), In-Tech, 2009.

[8] N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, S. M. Seledzhi, Nonlinear analysis of the Costas loop and phase-locked loop with squarer. In: *Proceedings of the IASTED International Conference on Signal and Image Processing, SIP 2009*, 2009, p. 1–7.

[9] N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, S. M. Seledzhi, P. Neittaanmäki, Analysis and design of computer architecture circuits with controllable delay line. In: *ICINCO 2009 – 6th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, Proceedings*, **3 SPSMC** (2009), p. 221–224 (doi:10.5220/0002205002210224).

[10] N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, S. M. Seledzhi, Phase locked loops design and analysis. In: *ICINCO 2008 – 5th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, Proceedings*, **SPSMC** (2008), p. 114–118 (doi:10.5220/0001485401140118)

[11] G. Leonov, Computation of phase detector characteristics in phase-locked loops for clock synchronization, *Doklady Mathematics*, **78**(1), (2008), p. 643–645

[12] N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, S. M. Seledzhi, Analysis of phase-locked systems with discontinuous characteristics of the phase detectors, *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*, **1 (PART 1)** (2006), p. 107–112 (doi:10.3182/20060628-3-FR-3903.00021)

[13] G. A. Leonov, Phase-Locked Loops. Theory and Application. *Automation and remote control*, **10** (2006), p. 47–55

МОДЕЛЮВАННЯ СИЛЬНИХ АНТИСИПАЦІЙНИХ СИСТЕМ ЗА ДОПОМОГОЮ КЛАСТЕРНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

С. В. Лазаренко

Національний технічний університет України "КПІ", ННК "ІПСА", Київ, Україна,
e-mail: LazarenkoSerg7@mail.ru

Робота присвячена досить новому розділу математичного моделювання — обчислювальним антисипаційних системам. Даний напрям походить від визначення антисипаційної системи Роберта Розена [1]. Значний вклад у дослідження такого роду обчислювальних систем останні роки внесли також Марк Бюрк, Д. Дюбуа [2, 3] та ін. Зокрема, розглядається антисипаційна система з сильною антисипацією, тобто така, що рекурсивно залежить не від своєї прогнозної моделі (оцінки майбутніх станів), а напряму включає майбутні стани. Досліджуються нерухомі точки такого відображення та просторі параметрів такої системи — будуються карти динамічних режимів та показника Ляпунова (одновимірний випадок). Особлива увага приділялася областям з гіперінкурсією. Дослідження проводилися за допомогою розробленого програмного забезпечення на основі кластерної архітектури. Такого роду обчислювальні системи знайшли широке застосування при моделювання соціальних [4, 5], економічних та політичних систем, у побудові автономних агентів тощо.

[1] Rosen Robert, *Anticipatory Systems - Philosophical, Mathematical and Methodological Foundations*, Pergamon Press, 1985.

[2] Burke M. E, Properties of Derived Scalar Anticipatory Systems, *Computing Anticipatory Systems: CASYS'01 – Fifth International Conference.* Edited by Daniel M. Dubois, 2001.

[3] Dubois Daniel M., Computing Anticipatory Systems with Incursion and Hyperincursion, *Computing Anticipatory Systems: CASYS'97 – First International Conference.* Edited by Daniel M. Dubois, The American Institute of Physics, AlP Conference Proceedings, **437** (1998), p. 3–29.

[4] Loet Leydesdorff, Anticipatory Systems and the Processing of Meaning: A Simulation Study Inspired by Luhmann's Theory of Social Systems, *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, **8(2)**, Paper 7 (2005).

[5] Loet Leydesdorff and Dubois D. M., Anticipation in Social Systems, *Internation Journal of Computing Anticipatory Systems*, **14** (2004), p. 203–216.

HIDDEN ATTRACTORS IN DYNAMICAL SYSTEMS

G. A. Leonov[1], N. V. Kuznetsov[1,2]

[1] *St.Petersburg State University, St.Petersburg, Russia,*
e-mail: leonov@math.spbu.ru
[2] *University of Jyväskylä, Jyväskylä, Finland,*
e-mail: nkuznetsov239@gmail.com

Plenary lecture is devoted to analytical-numerical methods for *hidden attractors* localization and its application to well-known problems and models.

From computation point of view, in nonlinear dynamical systems the attractors can be regarded as *self-exciting* and *hidden attractors*. Self-exciting attractors can be localized numerically by the following *standard computational procedure: after transient process a trajectory, started from a point of unstable manifold in a small neighborhood of unstable equilibrium, reaches an attractor and computes it.*

In contrast, *hidden attractor is an attractor, a basin of attraction of which does not contain neighborhoods of equilibria.* Numerical localization, computation and analytical investigation of such attractors are much more difficult problems since such attractors cannot be computed with the help of the above standard computational procedure.

In well-known Van der Pol, Beluosov-Zhabotinsky, Lorenz, Chua, and many others dynamical systems classical attractors are self-exiting attractors and can be obtained numerically by the standard computational procedure. In contrast, for localization of hidden attractors it is necessary to develop special analytical-numerical methods, in which at the first step the initial data are chosen analytically in basin of attraction and then the numerical localization (visualization) of attractor can be performed.

The simplest examples of hidden attractors are nested limit cycles in two-dimensional systems (see, e.g., the results concerning the second part of 16th Hilbert's problem). Other examples of hidden oscillations are counterexamples to Aizerman's conjecture and Kalman's conjecture on absolute stability in the automatic control theory.

In 2010, for the first time, a *chaotic hidden attractor* was computed first by the authors in generalized Chua's circuit and then one chaotic hidden attractor was discovered in classical Chua's circuit.

In this survey an attempt is made here to reflect the current trends in the synthesis of analytical and numerical methods [1-12]. Efficient analytical-numerical methods for searching hidden oscillations, based on harmonic linearization, applied bifurcation theory and numerical methods, are considered.

[1] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, Hidden oscillations in dynamical systems: 16 Hilbert's problem, Aizerman's and Kalman's conjectures, hidden attractors in Chua's circuits, *Journal of Mathematical Sciences*, 2012 (in print)

[2] N. V. Kuznetsov, O. A. Kuznetsova, G. A. Leonov, Visualization of four normal size limit cycles in two-dimensional polynomial quadratic system, *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2012 (in print)

[3] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, Vagaitsev V.I., Localization of hidden Chua's attractors, *Physics Letters, Section A*, **375**(23), 2011, p. 2230–2233 (doi:10.1016/j.physleta.2011.04.037)

[4] V. O. Bragin, V. I. Vagaitsev, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, Algorithms for Finding Hidden Oscillations in Nonlinear Systems. The Aizerman and Kalman Conjectures and Chua's Circuits, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, **50**(4), 2011, p. 511–543 (doi:10.1134/S106423071104006X)

[5] G. A. Leonov, Four normal size limit cycle in two-dimensional quadratic system, *International journal of Bifurcation and Chaos*, **21**(2), 2011, p. 425–429

[6] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, Algorithms for Searching for Hidden Oscillations in the Aizerman and Kalman Problems, *Doklady Mathematics*, **8**(1), 2011, p. 475–481 (doi:10.1134/S1064562411040120)

[7] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, and E. V. Kudryashova, A Direct Method for Calculating Lyapunov Quantities of Two-Dimensional Dynamical Systems, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **272**(Supplement 1), 2011, p. S119–S127 (doi:10.1134/S008154381102009X)

[8] G. A. Leonov, O. A. Kuznetsova, Lyapunov quantities and limit cycles of two-dimensional dynamical systems. Analytical methods and symbolic computation, *Regular and chaotic dynamics*, **15**(2-3), 2010, p. 354–377

[9] G. A. Leonov, V. I. Vagaitsev, N. V. Kuznetsov, Algorithm for localizing Chua attractors based on the harmonic linearization method, *Doklady Mathematics*, **82**(1), 2010, p. 663–666 (doi:10.1134/S1064562410040411)

[10] G. A. Leonov, V. O. Bragin, N. V. Kuznetsov, Algorithm for Constructing Counterexamples to the Kalman Problem, *Doklady Mathematics*, **82**(1), 2010, p. 540–542 (doi:10.1134/S1064562410040101)

[11] G. A. Leonov, N. V. Kuznetsov, Limit Cycles of Quadratic Systems with a Perturbed Weak Focus of Order 3 and a Saddle Equilibrium at Infinity, *Doklady Mathematics*, **82**(2), 2010, p. 693–696 (doi:10.1134/S1064562410050042)

[12] G. A. Leonov, Efficient methods in the search for periodic oscillations in dynamical systems. *Applied mathematics and mechanics*, **1** (2010), p. 24–50

О ФШМ СЦЕНАРИИ ПЕРЕХОДА К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В РАЗЛИЧНЫХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И МГД ТЕЧЕНИЯХ

Н. А. Магницкий[1], Н. М. Евстигнеев[2], О. И. Рябков[3]

Институт системного анализа РАН, Москва, Россия,
e-mail: [1]nmag@isa.ru, [2]evstigneevnm@yandex.ru, [3]oleg.ryabkov.87@gmail.com

Вопрос о том, что представляет собой турбулентное течение жидкости, и как происходит ламинарно-турбулентный переход, был поставлен еще до появления мощных ЭВМ. Различные варианты (сценарии) были предложены физиками еще в середине XX века. Например, сценарий Ландау-Хопфа [1]. Насколько известно авторам, прямое численное моделирование для разрешения данной задачи не применялось до работы [2]. Поводом для проведения подобного численного эксперимента послужила серия работ [3], выявившая некий универсальный сценарий перехода к хаосу в различных малоразмерных динамических системах, и предположение о том, что в задаче ламинарно-турбулентного перехода может реализовываться аналогичный сценарий.

В работе исследован ряд начально-краевых задач (НКЗ) для уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости (а также несжимаемой МГД):

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 v_i}{\partial {x_j}^2}, \text{ для } i = 1..3,\ \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

В работе построен численный метод решения указанных уравнений высокого порядка аппроксимации, позволяющий разрешать нестационарные аттракторы, возникающие в системе при изменении числа Рейнольдса. Обнаруженный сценарий существенно зависит от начально-краевых условий задачи. Как правило, начальные стадии совпадают с начальными стадиями сценария Ландау (серия бифуркаций Андронова-Хопфа с образованием квазипериодических решений возрастающей размерности). Тем не менее, во всех задачах на определенной стадии усложнение начинает происходить в соответствии с каскадом удвоений Фейгенбаума, а для некоторых задач получены периодические и квазипериодические решения нечетных относительных периодов, укладывающиеся в порядок Шарковского.

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Том VI. Гидродинамика*, М.: Наука, 1982.

[2] N. M. Evstigneev, N. A. Magnitskii, S. V. Sidorov, On the nature of turbulence in a problem on the motion of a fluid behind a ledge, *Differential Equations*, **45**, No 1 (2009).

[3] Н. А. Магницкий , С. В. Сидоров *Новые методы хаотической динамики*, М.: Едиториал УРСС, 2004.

EMERGENT DYNAMICS OF COUPLED OSCILLATORS

Yuri Maistrenko

Institute of Mathematics and Centre for Medical and Biotechnical Research,
National Academy of Sciences of Ukraine,
e-mail: y.maistrenko@biomed.kiev.ua

Coupled oscillators serve as paradigmatic models of dynamical networks in physics, biology, many other fields. Even if the oscillators are identical and the coupling scheme is symmetric, they can demonstrate surprising variety of complex collective behavior — from phase and frequency clustering to developed space-temporal chaos. A characteristic example is given by chimera states for non-globally coupled Kuramoto-type model. We report two examples of this type emergent behavior in coupled oscillator systems, obtained when varying the coupling topology and its shape.

First, we analyze a two-group network of globally coupled phase oscillators including attractive and repelling interactions as prototypes of excitatory and inhibitory connections in neuronal networks of the brain. If the excitation is stronger, the network dynamics tend to ensure complete synchronization. In the opposite case when the inhibition is predominant, highly asymmetric phase clusters arise in which one or more oscillators split up from the others synchronized. A special interest is offered by a solitary state with the only one splitting oscillator staying in anti-phase to the major cluster. We find analytically parameter regions for stability of the states and show that phenomenon is typical for more general networks of coupled oscillators.

Our second example is given by a network of non-locally coupled logistic maps. In the parameter space, we find regions of coherence and show how they demonstrate period adding cascade in space and period-doubling cascade in time. We discuss loss of spatial coherence in the coupled system and uncover a dynamical bifurcation scenario for the coherence-incoherence transition occurring when coupling strength or coupling radius decreases. The transition starts with the appearance of narrow layers of incoherence occupying eventually the whole space as a sign of "dry turbulence" [1]. Our findings for coupled logistic maps as well as for time-continuous Rossler and Lorentz systems reveal that intermediate, partially coherent states represent characteristic spatiotemporal patterns at the transition from coherence to incoherence [2,3].

[1] А.Н.Шарковский, Ю.Л.Майстренко, Е.Ю.Романенко, *Разностные уравнения и их применение*, Наукова Думка, Киев, 1986, 280 с.

[2] I. Omelchenko, Yu. Maistrenko, P. Hoevel, and E. Schoell, *Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states*, Phys.Rev.Lett., **106**, 234102 (2011).

[3] I. Omelchenko, B. Riemenschneider, P. Hoevel, Yu. Maistrenko, and E. Schoell, *Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems*, Phys. Rev. E., **85**, 026212 (2012).

STRONG ANTICIPATORY SYSTEMS AS A SOURCE OF MATHEMATICAL PROBLEMS

A. S. Makarenko

Institute for Applied System Analysis, NAS of Ukraine and NTUU 'KPI', Kyiv, Ukraine,
e-mail: makalex@i.com.ua

Dynamical systems and their properties (bifurcations, deterministic chaos, stability, etc.) are usually considered for discrete systems of recursive type and for ordinary differential equations.

A number of recent studies have shown that systems with delay treated as dynamical systems have very interesting properties. Moreover, some present-day applications require the investigation of such advanced models just as mathematical objects. The first results in this direction proved to be very intriguing.

The talk is devoted to a particular subclass of advanced systems, namely, strong anticipatory systems (by D.Dubois).

First we give the examples of different kind of such systems: Incursive discrete equations, neural networks, cellular automata. Thereupon we present our results (in collaboration with S.Lazarenko) on an advanced analog of the logistic equation. We consider also some distributed systems with strong anticipation.

Finally some further new mathematical problems are proposed, in particular:
— the limiting behavior and properties of sequences of multi-valued functions;
— the chaotic properties of advanced equations with continuous argument;
— the non-homogeneous behavior and structure formation in branching multi-valued functions;
— the development of approximate methods, etc.

ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ, ПОВ'ЯЗАНІ З ДВІЙКОВО-ЧЕТВІРКОВИМ ЗОБРАЖЕННЯМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

О. П. Макарчук

Національний педагогічний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна,
e-mail: makolpet@gmail.com

Зв'язок ергодичної теорії і метричної теорії чисел відомий давно, одним з форм такого зв'язку є арифметичний розклад, який виникає зі спеціальної символічної реалізації динамічних систем. Для довільного числа $x \in [0;1]$ розглянемо послідовність $\alpha_n \in \{0,1,2,3\}$ $\forall n \in N$ таку, що

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2^j} = \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Останню рівність назвемо двійково-четвірковим представленням числа x.

Нехай ξ_k — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0, 1, 2, 3 з ймовірностями p_0, p_1, p_2, p_3 відповідно. Випадкова величина $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}$ називається випадковою величиною, зображеною двійковим дробом з двома надлишковими цифрами 2 і 3, які мають однаковий розподіл.

Випадкова величина ξ є природним узагальненням нескінченних згорток Бернуллі, які вивчалися з чисто ймовірнісної точки зору, а також з погляду фрактального аналізу і теорії динамічних систем [3].

Теорема 1 ([2]). *Випадкова величина ξ має чистий розподіл, причому*

1) дискретний $\quad\Leftrightarrow\quad p_{\max} = \max\limits_{0\le i\le 3} p_i = 1;$

2) $\begin{cases} p_0 - p_1 + p_2 - p_3 \neq 0, \\ (p_0-p_2)^2 + (p_1-p_3)^2 \neq 0, \\ p_{\max} = \max\limits_{0\le i\le 3} p_i \neq 1 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad$ *сингулярний;*

3) $(p_0-p_2)^2 + (p_1-p_3)^2 = 0 \quad\Rightarrow\quad$ *абсолютно неперервний.*

Розв'язана проблема типу розподілу випадкової величини ξ для випадку $p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 0$, яка тривалий час залишалась нерозв'язаною. Аналізуються властивості функції розподілу ξ у випадку, коли остання є абсолютно неперервною.

[1] М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ, 1998.

[2] М. В. Працьовитий, Розподіли сум випадкових степеневих рядів, *Доп. НАН України*, 1996, № 5, с. 32–37.

[3] Y. Peres, W. Schlag, B. Solomyak, Sixty years of Bernoulli convolutions, *Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability*, **46** (2000), p. 39–65.

ЦЕНТР ІНДУКОВАНИХ СИСТЕМ ТА ЙОГО ГЛИБИНА

М. Ю. Матвійчук[1,2]

[1]*Інститут математики НАН України, Київ, Україна,*
[2]*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,*
e-mail: mykola.matviichuk@gmail.com

Нехай $f : I \to I$ – неперервне відображення відрізку $I = [0, 1]$ в себе. Ми вивчаємо індуковану систему на множині всіх відрізків $\{[a, b] \subseteq I\}$. Ми доводимо, що центр Біркгофа такої динамічної системи збігається з замиканням усіх періодичних відрізків, і що глибина центру не перевищує 2. Таким чином, ситуація для індукованої системи аналогічна до звичайного одновимірного випадку [1].

Також, розглядається індукована система на множині усіх неперервних функцій $\{\varphi : I \to I\}$ з метрикою Гаусдорфа (яка застосовується до графіків функцій) [2]. Для такої системи, за допомогою отриманих раніше результатів, встановлюється аналогічна теорема. Тобто, центр – це замикання усіх періодичних функцій і його глибина ≤ 2.

[1] О.М. Шарковський, Неблукаючі точки і центр неперервного відображення прямої в себе, *Доп. Акад. Наук Української ССР, Серія А*, 1964, № 7, 865–868.

[2] J. Auslander, S. Kolyada and L. Snoha, Functional envelope of a dynamical system, *Nonlinearity*, **20**, No 9 (2007), 2245–2269.

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ПОДКОВЫ У НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЕНДРИТОВ

Е. Н. Махрова

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Н.Новгород, Россия
e-mail: elena_makhrova@inbox.ru

Пусть X – компактное метрическое пространство, $f : X \to X$ – непрерывное отображение. Будем говорить,что $f : X \to X$ имеет подкову, если существуют непересекающиеся подконтинуумы $A, B \subset X$ такие, что

$$f(A) \cap f(B) \supset A \cup B.$$

Данную подкову будем обозначать через (A, B).

Хорошо известно, что если некоторая итерация f^n имеет подкову, то топологическая энтропия отображения f положительна.

Пусть X — дендрит (локально связный континуум, не содержащий подмножеств, гомеоморфных окружности) или граф и непрерывное отображение $f : X \to X$ имеет подкову (A, B).

Если A и B гомеоморфны отрезку $[0, 1]$ на действительной прямой, то будем говорить, что f имеет линейную подкову.

Если континуум X является графом, то положительность топологической энропии отображения $f : X \to X$ эквивалентна существованию линейной подковы для некоторой итерации f^n (см. [1]). В [2] построен пример дендрита X и непрерывного отображения $f : X \to X$ с положительной топологической энтропией, у которого при любом натуральном n f^n не имеет линейной подковы.

Пусть непрерывное отображение $f : X \to X$ дендрита X имеет подкову (A, B). В настоящем докладе изучается структура множеств A, B, относительно которой некоторая итерация f^n имеет линейную подкову.

[1] J. Libre, M. Misiurewicz, Horseshoes, entropy and periods for graph maps, *Topology*, **32** (2003), p. 649–664.

[2] Е.Н. Махрова Гомоклинические точки и топологическая энтропия непрерывного отображения дендрита, *Jornal of math. sciences. N. Y.* **158** (2009), p. 241–248.

БИФУРКАЦИИ В МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ

Г. С. Осипенко

Севастопольский институт банковского дела
e-mail: george.osipenko@mail.ru

Исследуется динамика макроэкономической системы, в которой взаимодействуют национальный доход, ставка процента и уровень цен. Такое взаимодействие моделируется дискретной динамической системой в трехмерном пространстве. Система имеет кривую, заполненную неподвижными точками, которые описывают равновесия на рынке денег, товаров и услуг. Показано, что существует слоение, трансверсальное к данной кривой, каждый слой которого является инвариантным для системы. Существуют слои, на которых состояние равновесия является как устойчивым, так и неустойчивым по первому приближению. От слоя к слою динамика системы меняется. При этом существует два маршрута бифуркаций. Первый путь происходит по схеме: неподвижная точка теряет устойчивость, рождается устойчивый инвариантный эллипс (бифуркация Неймарка-Саккера), на эллипсе появляются периодические гиперболические орбиты, которые порождают хаос через трансверсальное пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий. Другой путь приводит к хаосу через бифуркацию удвоения периода.

Рассмотрены малые случайные возмущения системы, которые естественно моделируют воздействие внешней среды. В этом случае система не сохраняет состояния равновесия и инвариантность слоев, что порождает более сложную динамику.

Численные расчеты проводились согласно алгоритмов, разработанных и обоснованных автором [1, 2].

[1] Осипенко Г. С., Ампилова Н. Б. *Введение в символический анализ динамических систем*, С.-Петербургский университет, 2005, 240 с.

[2] Osipenko G. *Dynamical systems, Graphs, and Algorithms*, Lect. Notes in Math., Vol. 1889, Springer, 2007, 283 pp.

О ПОВЕДЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г. П. Пелюх

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: grygor@imath.kiev.ua

Исследуются вопросы существования и асимптотического поведения непрерывных решений системы нелинейных разностных уравнений вида

$$x(t+1) = Ax(t) + f(t, x(t)), \tag{1}$$

где $t \in \mathbb{R}^+$, A — постоянная вещественная $(n \times n)$-матрица, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. При этом нас прежде всего интересует существование полиномиально-показательного асимптотического равновесия системы уравнений (1), которое играет важную роль при изучении асимптотических свойств ее решений.

Определение. Будем говорить, что система уравнений (1) имеет полиномиально-показательное асимптотическое равновесие, если

а) для каждого непрерывного и ограниченного при $t \geq T > 0$ решения $x(t)$ существует непрерывная и ограниченная при $t \geq T > 0$ вектор функция $\gamma(t)$ такая, что выполняются соотношения

$$x(t) = \gamma(t) + o(1), \quad t \to +\infty, \tag{2}$$

$$\gamma(t+1) = A\gamma(t); \tag{3}$$

б) для каждого непрерывного и ограниченного при $t \geq T > 0$ решения системы уравнений (3) существует непрерывное и ограниченное при $t \geq T > 0$ решение системы уравнений (1), удовлетворяющее условию (2).

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1. $\det A \neq 0, \quad |A| < 1;$

2. *вектор-функция $f(t,x)$ является непрерывной при $t \geq T$, $f(t,0) \equiv 0$ и удовлетворяет соотношению*
$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \varphi(t)|x - y|,$$
где $|f| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |f_i|$, $t \geq T$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная неотрицательная функция, для которой ряд
$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} |A^{-1}|^{i+1} \varphi(t+i)$$
равномерно сходится при всех $t \geq T$ и $\Phi(t) \leq \theta < 1$.

Тогда система уравнений (1) имеет полиномиально-показательное асимптотическое равновесие.

БІФУРКАЦІЯ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

О. О. Покутний

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: lenasas@gmail.com

Доповідь присвячена теорії біфуркацій для крайової задачі

$$\ddot{y}(t) + Ty(t) = 0, \tag{1}$$

$$y(0) - y(w) = \alpha_1, \quad \dot{y}(0) - \dot{y}(w) = \alpha_2, \tag{2}$$

де T — додатньо-визначений самоспряжений оператор, що діє в гільбертовому просторі H ; вектор-функція $y(\cdot) : [0, w] \to H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in H$.

Розглянувши новий гільбертів простір $H_{T^{\frac{1}{2}}} = D(T^{\frac{1}{2}}) \oplus D(T^{\frac{1}{2}})$ з внутрішнім добутком $(< u, v >, < u, v >)_{H_{T^{\frac{1}{2}}}} = (T^{\frac{1}{2}}u, T^{\frac{1}{2}}u) + (T^{\frac{1}{2}}v, T^{\frac{1}{2}}v)$ і вектор $\varphi = (x_1, x_2)^T$ $(\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t))$, задачу (1), (2) на спареному просторі $H_{T^{\frac{1}{2}}}$ перепишемо у вигляді

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \tag{3}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{4}$$

де оператор A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & T^{\frac{1}{2}} \\ -T^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & T^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$. Припустимо, що елемент α такий, що операторна система (3), (4) не розв'язна. В доповіді буде показано, яким чином треба збурити операторну систему (3), (4), щоб збурена система

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t) + \varepsilon A_1(t)\varphi(t), \tag{5}$$

$$\varphi(0) - \varphi(w) = \alpha, \tag{6}$$

мала розв'язки. В системі (5),(6) оператор $A_1(t)$ обмежений при кожному $t \in [0; w]$. Доведення основних тверджень спирається на результати роботи [1].

[1] B. A. Biletskyi, A. A. Boichuk, A. A. Pokutnyi, Periodic Problems of Difference Equations and Ergodic Theory, *Abstract and Applied Analysis* (2011), Article ID 928587, 12 p., http://www.hindawi.com/journals/aaa/2011/928587/.

STABILITY IN THE SENSE OF LYAPUNOV

E. Polulyakh[1], V. Sharko[2], I. Vlasenko[3]

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
e-mail: [1]*polulyah@imath.kiev.ua,* [2]*sharko@imath.kiev.ua,* [3]*vlasenko@imath.kiev.ua,*

Denote by M^n an n-dimentional C^r-smooth manifold.

Definition. Let $x_0 \in M^n$. Let U be an open neighbourhood of x_0 in M^n. A closed connected hypersurface $H^{n-1} \subset U$, i.e. a smooth compact submanifold without boundary of dimension $n-1$ is said to *bound the point* x_0 *in* U if $x_0 \notin H^{n-1}$ and H^{n-1} is the boundary of a compact set $K \subset U$ such that $x_0 \in K$.

Definition. Let $x_0 \in M^n$. Let $H_i^{n-1} \subset M^n$, $i \in \mathbb{N}$, be a sequence of hypersurfaces that bound x_0 in M^n.

A sequence of hypersurfaces H_i^{n-1} is said to be *a sequence of nested hypersurfaces that converge to* x_0 *in* M^n if the following conditions hold:

i) hypersurfaces H_i^{n-1} are mutually disjoint;
ii) each H_i^{n-1} bounds the compact set K_i such that
  a) $K_i \supset K_j \ni x_0$ when $i < j$;
  b) $\bigcap_i K_i = \{x_0\}$.

The theorem below shows how to build sequences of nested hypersurfaces converging to a point using a smooth function on M^n.

Theorem 1 *Suppose $x_0 \in M^n$. Let $f : M^n \to \mathbb{R}$ be a C^n-smooth function such that x_0 be a connected component of the level set $f^{-1}(f(x_0))$.*

Then there exists a sequence $\{H_i^{n-1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ of nested hypersurfaces that converge to x_0 in M^n with the property that for each i there exists a regular value $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$, such that $H_i^{n-1} \subset f^{-1}(a_i)$.

Let us consider an autonomous system of differential equations

$$d\mathbf{x}/dt = \vec{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

defined in a neighbourhood G of the origin and such that $\vec{f}(\mathbf{x})$ is at least C^2–smooth.

By $(\mathbf{H}_i^{n-1})$ denote a sequence of nested hypersurfaces that converge to origin. Let $\vec{N}(\mathbf{x})$ be the vector field of unit length on each $\mathbf{H}_i^{n-1}$ such that vectors of $\vec{N}(\mathbf{x})$ are orthogonal to $\mathbf{H}_i^{n-1}$ and direct into interior of K_i. By $S(\mathbf{x})$ denote the scalar product $< \vec{N}(\mathbf{x}), \vec{f}(\mathbf{x}) >$. $S(\mathbf{x})$ is defined for each hypersurface $\mathbf{H}_i^{n-1}$ and shows how integral trajectories of the system (1) intersect $\mathbf{H}_i^{n-1}$.

Theorem 2 *If there exists $(\mathbf{H}_i^{n-1})$ such that for all $\mathbf{x} \in \mathbf{H}_i^{n-1}$ we have $S(\mathbf{x}) \geq 0$ then the origin is stable in the sense of Lyapunov for the system* (1).

ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, ПОВ'ЯЗАНИХ З ДВОСИМВОЛЬНИМ КОДУВАННЯМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

М. В. Працьовитий

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: prats4@yandex.ru

Нехай $X \subseteq [0,1]$, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра підмножин, μ — ймовірнісна міра, зокрема, міра Лебега λ, f — відображення X в X, H^α — α-мірна міра Хаусдорфа [1]. Розглядається динамічна система $(X, f, \mathcal{F}, \mu, H^\alpha)$.

Нехай $\mathcal{A} = \{0,1\}$ — алфавіт двосимвольної системи зображення дійсного числа, $L = \mathcal{A}^\infty$. Під *двосимвольною системою кодування дійсних чисел з нульовою надлишковістю* ми розуміємо відображення

$$(\alpha_n) \in L \xrightarrow{\varphi} x \in [0,1]: \ x = \Delta^*_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}, \ \alpha_k \in \mathcal{A},$$

таке, що циліндри $\Delta^*_{c_1 \ldots c_m} = \{x : \ x = \Delta^*_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}, \ \alpha_i = c_i, \ i = \overline{1,m}\}$ мають властивості:
1) $\Delta^*_{c_1 \ldots c_m} = \Delta^*_{c_1 \ldots c_m 0} \cup \Delta^*_{c_1 \ldots c_m 1}$;
2) $\sup \Delta^*_{c_1 \ldots c_m 0} = \inf \Delta^*_{c_1 \ldots c_m 1}$;
3) $|\Delta^*_{c_1 \ldots c_m 0}| \to 0$ $(m \to \infty)$ для довільної послідовності $(c_n) \in L$.

Під *фрактальними властивостями динамічної системи* ми розуміємо фрактальні властивості: 1) фазового простору X, 2) відображення f (властивості рівнів, множини інваріантних точок та графіка функції $y = f(x)$), 3) ймовірнісної міри μ (спектра, носія, суттєвого носія щільності, мінімального розмірнісного носія тощо), 4) інваріантних множин, аттрактора, репелера динамічної системи та ін.

У доповіді пропонуються результати дослідження властивостей динамічних систем, індукованих різними відображеннями (операторами в просторі зображень), для принципово різних систем кодування дійсних чисел (метризацій простору послідовностей L). Це — Q_2- та Q_2^*-зображення, медіантне, марковське, циліндричне зображення, зображення чисел ланцюговими дробами Данжуа та A_2-дробами, неповними сумами збіжних рядів, тощо.

Розглядаються динамічні системи, у яких:
1) f є оператором зсуву символів зображення (та його узагальнення);
2) f — фільтруючий оператор або решето;
3) f — унарна операція над зображенням;
4) f — функція розподілу випадкової величини, що відповідає мірі μ тощо.

Аналізуються запропоновані та стандартні динаміки на предмет хаотичності у різних метричних просторах послідовностей нулів та одиниць.

[1] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998, 296 с.

ЕРГОДИЧНА ТЕОРІЯ ЛАНЦЮГОВИХ A_S-ДРОБІВ

М. В. Працьовитий[1], Д. В. Кюрчев[2]

[1] *Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна,*
e-mail: prats4@yandex.ru
[2] *Інститут математики НАН України, Київ, Україна,*
e-mail: d_kyurchev@ukr.net

Нехай $A_s = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ — множина дійсних чисел, де $0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_s$ і $s \geq 2$, причому числа α_1 і α_s задовольняють умову

$$\alpha_1 \alpha_s = \frac{(s-1)^2}{s}. \tag{1}$$

Нехай

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_s^2 + 4\alpha_1\alpha_s} - \alpha_1\alpha_s}{2\alpha_s}, \ \beta_2 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_s^2 + 4\alpha_1\alpha_s} - \alpha_1\alpha_s}{2\alpha_1}, \tag{2}$$

$\alpha_{i+1} = \alpha_i + (\beta_2 - \beta_1)$, $i = \overline{1, s-2}$.

Теорема 1 *Множина L_{A_s} всіх нескінченних ланцюгових дробів виду*

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + ...}} \equiv [a_1, a_2, ..., a_n, ...], \tag{3}$$

елементи a_n яких належать множині A_s, $n = 1, 2, \dots$, є відрізком $[\beta_1, \beta_2]$.

Ланцюгові дроби виду (3) називатимемо *ланцюговими A_s-дробами.*

Теорема 2 *Зліченна множина чисел відрізка $[\beta_1, \beta_2]$ має два зображення ланцюговим A_s-дробом, решта чисел цього відрізка має єдине зображення.*

Ми пропонуємо метричну теорію зображення дійсних чисел ланцюговими A_s-дробами і результати дослідження ергодичних властивостей цього зображення, зокрема перетворення «зсуву символів зображення»:

$$T(x) = [a_2, \dots, a_n, \dots], \ \text{де } x \in [a_1, a_2, \dots, a_n, \dots] \in L_{A_s}. \tag{4}$$

Також вивчається питання існування інваріантної міри, яка була б абсолютно неперервною відносно міри Лебега.

[1] M. Pratsiovytyi and D. Kyurchev, On A_2-continued fraction expansion, *Voronoï's Impact on Modern Science, Book 4, Vol.1*: Proceedings of the Fourth International Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tessellations, Drahomanov National Pedagogical University, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2008, p. 181–190.

[2] M. Pratsiovytyi, D. Kyurchev, Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements, *Random Operators / Stochastic Eqs.* **17** (2009), No. 1, p. 91–101.

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ, ЩО ЗАЛЕЖИТЬ ВІД СТАНУ

О. В. Резуненко

Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, Харків, Україна
e-mail: rezounenko@univer.kharkov.ua

Досліджуються питання коректної розв'язності початково-крайової задачі (ПКЗ) у частинних похідних із запізненням

$$\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) + du(t) = F(u_t),\ t > 0; \qquad u|_{[-r,0]} = \varphi \in C \equiv C([-r,0]; L^2(\Omega)), \quad (1)$$

де A є самоспряжений додатній лінійний оператор з областтю визначення $D(A) \subset L^2(\Omega)$ та компактною резольвентою так, що $A : D(A) \to L^2(\Omega)$ породжує аналітичну півгрупу, Ω є гладка обмежена область у R^n, $d \geq 0$, $u_t \equiv u_t(\theta) \equiv u(t+\theta)$ для $\theta \in [-r, 0]$. Нелінійний член $F : C \to L^2(\Omega)$ має вигляд $F(\varphi) = B(\varphi(-\eta(\varphi)))$, де (нелінійне) відображення $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ є липшицевим. Запізнення η залежить від стану системи, тобто є фунцією $\eta : C \to [0, r]$. Ми вивчаємо слабкі розв'язкі.

Добре відомо, що (зосереджене) запізнення, залежне від стану системи, у загальному випадку призводить до некоректності задачі (1) у просторі неперервних функцій C (навіть у простішому випадку звичайних диференціальних рівнянь [1]). Причина полягає в тому, що за будь-якої гладкості відображень B та η відображення F **не** є навіть локально липшицевим на просторі C.

Пропонуються підходи [2, 3], що дозволяють коректно ставити ПКЗ. Будується відповідна динамічна система та досліджується її асимптотична поведінка (доведено існування глобального атрактора).

[1] F. Hartung, T. Krisztin, H.-O. Walther, J. Wu, Functional differential equations with state-dependent delay: theory and applications. In: *Handbook of Differential Equations, Ordinary Differential Equations*, Canada, A., Drabek, P., Fonda, A., (eds.) , **3**, p. 435–545; Elsevier, Amsterdam, 2006.

[2] A.V. Rezounenko, Non-linear partial differential equations with discrete state-dependent delays in a metric space, *Nonlinear Analysis*, **73** (2010), p. 1707–1714.

[3] A.V. Rezounenko, A condition on delay for differential equations with discrete state-dependent delay, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **385** (2012), p. 506–516.

ON THE ω-LIMIT SETS OF THE INDUCED TRIANGULAR MAPS

Damoon Robatian

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,
e-mail: damoon_math@yahoo.com

Let $f : I \to I$ be a continuous map from a compact interval I into itself. The structure of ω-limit sets of continuous self-maps of the closed interval and also of some other classes of (non-continuous) maps $I \to I$ has been studied in detail. On the other hand, characterization of a closed set which can be an ω-limit set for a continuous map in $\mathbb{R}^k$, where $k \geq 2$, is quite difficult. To this end, a natural approach is to study ω-limit sets in the dimension two and consider only continuous maps of some special forms. Triangular maps of the square I^2 into itself happen to be good examples to begin with. A map $F : I^2 \to I^2$ is called *triangular* if $F(x, y) = (f(x), g(x, y))$, for any $(x, y) \in I^2$ and is continuous if and only if $f : I \to I$ and $g : I^2 \to I$ are continuous. The set of all continuous triangular maps from I^2 into I^2 will be denoted by $S_\Delta(I^2)$. Since the triangular map F splits the square I^2 into one-dimensional fibres ($\{x\} \times I$, where $x \in I$) such that each fibre is mapped by F into a fibre, one may expect that the triangular dynamical system (I^2, F) is close, in its dynamical properties, to one-dimensional dynamical systems. In some aspects it is true. Nevertheless, they prove to have some essential differences if compared with continuous one-dimensional maps (see [1], [2]).

As it was proved in [3], any closed set located on a fixed fibre can be an ω-limit set for some triangular map from I^2 into itself, unless it has got a specific form. We introduce and study the ω-limit sets of a certain class of induced continuous triangular maps (from $I \times C(I)$ into itself, where $C(I)$ is the space of subintervals of I with the Hausdorff metric). In particular, we generalize the above mentioned results from [3] for such maps.

This talk is based on a joint work with S. Kolyada

[1] S.F. Kolyada and A.N. Sharkovsky, On topological dynamics of triangular maps of the plane, *European Conference on Iteration Theory (ECIT 89)* (Ch. Mira, N. Netzer, C. Simo and Gy. Targonski, eds.), World Scientific Publishing Co., Singapore, 1991, p. 177–183.

[2] S.F. Kolyada, On dynamics of triangular maps of the square, *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, **12** (1992), p. 749–768, MR 93m:58036.

[3] S.F. Kolyada and L. Snoha, On ω-limit sets of triangular maps, *Real Analysis Exchange*, **18** (1992–93), p. 115–130, MR 94b:58057.

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Е. Ю. Романенко

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина,
e-mail: eromanenko@bigmir.net

Цель доклада — дать общее представление об асимптотической динамике нелинейных разностных уравнений с непрерывным временем (НРУ) вида

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Эти уравнения более 30-и лет исследуются в Отделе теории динамических систем Института математики НАН Украины. Хотя основные идеи были опубликованы ещё в 1986 г., некоторые принципиальные шаги осуществлены совсем недавно и сейчас можно говорить о завершении определённого этапа в построении качественной теории НРУ.

Анализ уравнения (1) основан на переходе к бесконечномерной динамической системе сдвигов (ДС), порождаемой уравнением на пространстве начальных состояний. Этот метод, суть которого отражает схема

$$\text{НРУ} \to \text{ДС} \to \text{аттрактор ДС} \to \text{асимптотика решений НРУ},$$

относится к традиционным методам современной теории эволюционных задач. В данном случае его применение наталкивается на одно препятствие — в типичных ситуациях ДС не имеет аттрактора в фазовом пространстве. Преодоление этого препятствия позволило выявить ряд специфических особенностей уравнения (1), говорящих о чрезвычайной хаотизации решений. Наиболее "весомыми" являются:

- *Фрактальныя геометрия решений,* когда график решения — регулярная (возможно, даже сколь угодно гладкая) кривая — асимптотически стремится к локально самоподобному фрактальному множеству.
- *Попадание решений за горизонт предсказуемости,* когда числовые значения решения на больших временах невозможно указать достоверно.
- *Явление автостохастичности* — наличие непредсказуемых решений, свойства которых на больших временах описываются случайными процессами.

Для более глубокого ознакомления см. [1]–[3] и приведенные там источники.

[1] А. Н. Шарковский, Ю. Л. Майстренко, Е. Ю. Романенко, *Разностные уравнения и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1986 (Перевод на англ.: A. N. Sharkovsky, Yu. L. Maistrenko, E. Yu. Romanenko, *Difference equations and their applications*, Ser. Math. and Appl., Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993).

[2] Е. Ю. Романенко, А. Н. Шарковский, Разностные уравнения и динамические системы, порождаемые некоторыми классами краевых задач, *Труды Математического ин-та им. В.А.Стеклова*, **244** (2004), с. 281–296.

[3] E. Yu. Romanenko, Randomness in deterministic continuous time difference equations, *Int. J. Difference Equations and Appl.*, **16**, № 2–3 (2010), p. 243–268.

КІЛЬКІСНИЙ ПІДХІД ДО ЧУТЛИВОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

О. В. Рибак

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: semperfi@ukr.net

Розглядаються певні кількісні характеристики чутливості динамічних систем.

Динамічною системою вважається пара (X, f), де X – деякий простір, а f – функція, що відображає даний простір у себе. При цьому основним предметом вивчення є послідовності вигляду $\{x, f(x), f^2(x), ...\}$, де x – деяка точка простору X, а f^n позначає n-ну ітерацію функції f. Додатково припустимо, що у просторі X введена метрика $d(x, y)$, відносно якої f неперервна, а X компактний.

Динамічна система називається *чутливою*, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої відкритої непорожньої підмножини $U \subset X$ знайдеться таке $n \in \mathbb{N}$, що діаметр $f^n(U)$ перевищує ε [2]. З практичної точки це означає наступне. З якою б ненульовою похибкою ми би не визначали початкову точку x, похибка при розрахунку деяких елементів послідовності $\{x, f(x), f^2(x), ...\}$ перевищуватиме ε. На основі цього означення введемо певну кількісну характеристику чутливості. Нехай $\mathcal{O}(X)$ – сім'я всіх непорожніх відкритих підмножин простору X. Тоді нехай

$$\varepsilon_1 = \sup\{\varepsilon| \ \forall U \in \mathcal{O}(X) : \exists x, y \in U, n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon\}.$$

Аналогічно можна ввести декілька інших констант, які, наприклад, показують граничну поведінку похибок у послідовності ітерацій:

$$\varepsilon_2 = \sup\{\varepsilon| \ \forall U \in \mathcal{O}(X) : \exists x, y \in U : \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon\},$$

$$\varepsilon_3 = \sup\{\varepsilon| \ \forall U \in \mathcal{O}(X), x \in U : \exists y \in U, n \in \mathbb{N} : d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon\},$$

$$\varepsilon_4 = \sup\{\varepsilon| \ \forall U \in \mathcal{O}(X), x \in U : \exists y \in U : \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon\}.$$

З результатів роботи [1] слідує, що додатність будь-якого з чотирьох ε_i тягне за собою додатність усіх інших. Автор доповіді отримав точніші результати. Серед них наступні.

Теорема 1 *Для будь-яких $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ вірно $\varepsilon_i \leq 2\varepsilon_j$.*

Теорема 2 *У випадку, коли система є транзитивною, виконується рівність $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Для мінімальних систем також $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$.*

Теорема 3 *Якщо система одночасно є слабко змішуючою та мінімальною, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4$.*

[1] E. Akin, S. Kolyada, Li-Yorke sensitivity, *Nonlinearity*, **16** (2003), p. 1421–1433.

[2] J. Auslander, J. A. Yorke, Interval maps, factors of maps and chaos, *Tohoku Math. J.*, **32** (1980), no. 2, p. 177–188.

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕРІВНОСТІ $f(xy) \leq f(x)f(y)$ З ТОЧКАМИ СПРЯЖЕННЯ

В. Г. Самойленко[1], Т. В. Тищук[2]

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: [1]vsam@univ.kiev.ua, [2]tetyana.tyshchuk@gmail.com

Теорія функціональних рівнянь та нерівностей [1, 2] має важливе значення для розвитку сучасної математики, адже результати про існування та вигляд розв'язків різних функціональних рівнянь і нерівностей знаходять важливе застосування в різноманітних розділах математики, зокрема, в теорії стійкості, наприклад, при доведенні тверджень про існування і єдиність розв'язків та аналізі їх стійкості.

Розглядається питання про неперервні розв'язки функціональної нерівності $f(xy) \leq f(x)f(y)$, де $f(x) \geq 0$, $f(0) = 0$, що виникає при вивченні деяких задач теорії диференціальних рівнянь з імпульсною дією [3]. Отримано достатні умови існування неперервних розв'язків цієї задачі, необхідну умову того, що функція $f(x)$ є розв'язком задачі, та достатню умову, при виконанні якої розв'язок є неперервним. Доведено твердження про загальний вигляд неперервних розв'язків даної функціональної нерівності, зокрема, з декількома точками спряження.

Встановлено достатні умови існування неперервних розв'язків цієї задачі, зокрема, тих, що містять декілька точок спряження та необхідну умову того, що функція є розв'язком задачі. Отримано достатню умову, при виконанні якої розв'язок є неперервним.

Також проаналізовано випадок строгої нерівності та з'ясовано вигляд її неперервних розв'язків і достатні умови їх існування [4, 5].

[1] Pl. Kannappan, *Functional Equations and Inequalities with Applications*, Springer Monographs in Mathematics, 2009.

[2] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality. Second Edition*, Birkhauser Verlag, 2008.

[3] С.Д. Борисенко, А.М. Самойленко, Дж. Матараццо, Р. Тоскано, В.В. Ясінський, *Диференціальні моделі. Стійкість*, К.: Вища школа, 2000.

[4] В. Тищук, Неперервні розв'язки нерівності $f(xy) \leq f(x)f(y)$, *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевечнка. Математика. Механіка*, **22** (2009), с. 6–8.

[5] В. Самойленко, Т. Тищук, Неперервні розв'язки нерівності $f(xy) \leq f(x)f(y)$ з точками спряження, *Математичний вісник Наукового товариства ім. Т. Шевченка*, **7** (2010), с. 215–226.

ASYMPTOTIC SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION

Yu. I. Samoylenko

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine,
e-mail: yusam@univ.kiev.ua

Korteweg-de Vries equation is known one of the most interesting object of modern physics and mathematics because it can be used for simulation of different phenomena and processes in physics, hydrodynamics, plasma, solid body theory and so on.

While studying the equation many different interest phenomena were discovered, in particular it should be mentioned so called solitons describing solitary waves in liquid.

Moreover studying the equation promoted appearing the inverse scattering theory being new field of modern mathematical physics successful development of which was based on achievements in many fields of current mathematics.

The inverse scattering theory can be fruitfully applied for constructing different kinds of exact solutions to many nonlinear partial differential equations such as modified Korteweg-de Vries equation, Shrödinger equation, sin-Gordon equation and so on.

On the other hand while studying processes with small dispersion a problem of considering a partial differential equation with small parameter and variable coefficients arises [1]. For researching the problem asymptotic methods can be successfully used.

We study Korteweg-de Vries equation with small parameter and variable coefficients of the following form

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x \tag{1}$$

where functions $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ can be represented as asymptotic series in small parameters $\varepsilon > 0$ with infinitely differentiable coefficients.

We develop technique for constructing asymptotic one phase soliton type solutions as well as asymptotic many phase soliton type solutions to equation (1) [2]. Asymptotic one phase soliton type solution of Cauchy problem to equation (1) is also obtained [3].

[1] V.P. Maslov, G.A. Omel'yanov, Geometric Asymptotics for Nonlinear PDE. I, *AMS*, **202** (2001).

[2] V.Hr. Samoylenko, Yul.I. Samoylenko, Asymptotic two phase soliton type solution to singurly perturbed Korteweg-de Vries equation with variable coefficients, *Ukrainian math. journal*, **60**, No 3 (2008), p. 378–387.

[3] V.Hr. Samoylenko, Yul.I. Samoylenko, Asymptotic solution to Cauchy problem for Korteweg-de Vries equation with varying coefficients, *Computer Algebra Systems in Teaching and Research*, 2007, p. 272–280.

BIFURCATIONS AND STABILITY OF SOME SOLUTIONS OF STOKES AND NAVIER-STOKES EQUATIONS

G. V. Sandrakov

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine,
e-mail: sandrako@mail.ru

Bifurcations and stability of some solutions of nonstationary Stokes and Navier-Stokes equations with periodic rapidly oscillating data and the vanishing viscosity will be discussed. We give homogenized (limit) equations whose solutions determine approximations (leading terms of the asymptotics) of the solutions of the equations under consideration and estimate the accuracy of the approximations. These approximations and estimates shed light on the following interesting property of the solutions of the equations. When the viscosity is not too small, the approximations contain no rapidly oscillating terms, and the equations under consideration asymptotically smooth the rapid oscillations of the data; thus, the equations are asymptotically parabolic. If the viscosity is very small, the approximations can contain rapidly oscillating terms, and the equations are asymptotically hyperbolic. In a sense, these are examples of stability and bifurcations of the solutions, where the equations are considered as ones for dynamical systems in appropriate infinite-dimensional spaces

Asymptotic and homogenization methods are used to prove of the results. Similar results for cases of nonstationary linearized equations of hydrodynamics and Navier-Stokes equations were presented in [1] and [2]. In particular, the results are applicable to some Kolmogorov flows.

[1] G. V. Sandrakov, The influence of viscosity on oscillations in some linearized problems of hydrodynamics, *Izvestiya: Math.*, **71** (2007), p. 97–148.

[2] G. V. Sandrakov, On some properties of solutions of Navier-Stokes equations with oscillating data, *J. Math. Sciences*, **143** (2007), p. 3377–3385.

ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНІ І ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИН З КЛАСУ, ПОРОДЖЕНОГО ОДНІЄЮ МНОЖИНОЮ З ВИКОРИСТАННЯМ S-КОВОГО ЗОБРАЖЕННЯ

С. О. Сербенюк

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: simon6@ukr.net

Нехай s — фіксоване натуральне число, більше 2, і нехай маємо фіксовану множину $N^1_{s-1} \equiv \{1, 2, ..., s-1\} \subset A \equiv \{0, 1, 2, ..., s-1\}$ та простір послідовностей $L \equiv (N^1_{s-1})^\infty \equiv (N^1_{s-1}) \times (N^1_{s-1}) \times (N^1_{s-1}) \times ....$

Означимо множину S наступним чином:

$$S \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}, \forall (\alpha_n) \in L \right\}.$$

Розглянемо узагальнення такої множини.

Нехай $\{V_n\}$ — фіксована послідовність множин така, що $V_n \subseteq N^1_{s-1} \subset A \quad \forall n \in \mathbb{N}$, тоді множиною $M[S_{V_n}]$, яка належить класу S_{V_n} множини S, назвемо множину виду

$$M[S_{V_n}] \equiv \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{s^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}, \forall (\alpha_n) \in L, \alpha_n \in V_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Очевидно, що якою б не була послідовність $\{V_n\}$, відповідна їй множина $M[S_{V_n}]$ є підмножиною множини S, для якої $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n \equiv N^1_{s-1}$.

Теорема 1 *Для будь-якої послідовності множин $\{V_n\}$ множина $M[S_{V_n}]$ є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

Множина $M[S_{V_n}]$ не для кожної послідовності $\{V_n\}$ є самоподібною фрактальною множиною.

Теорема 2 *Множина $M[S_{V_n}]$ є самоподібним фракталом тоді і тільки тоді, коли*

$$\{d_1, d_2, d_3, ..., d_m\} \equiv V_1 \equiv V_2 \equiv V_3 \equiv ... \equiv V_n \equiv ..., \text{де} \quad d_m \in N^1_{s-1}, 1 < m \leq s-1, m \in \mathbb{N}.$$

Причому, розмірність Хаусдорфа-Безиковича $\alpha_0(M[S_{V_n}])$ множини $M[S_{V_n}]$ задовольняє рівняння:

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{s}\right)^{d_j \alpha_0} = 1.$$

О ДИНАМИКЕ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. Г. Сивак

Институт математики НАН Украини, Киев, Украина,
e-mail: sivak@imath.kiev.ua

Рассматриваются классы топологической сопряженности дробно-линейных разностных уравнений второго порядка:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n + \gamma x_{n-1}}{A + Bx_n + Cx_{n-1}}, \qquad n = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

с действительными коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$ и начальными условиями x_0, x_{-1}, при которых знаменатель (1) никогда не обращается в нуль. Используется метод сведения таких уравнений к отображению плоскости

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ \dfrac{\alpha + \beta y + \gamma x}{A + By + Cx} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

поэтому поведение решений рассматриваемых разностных уравнений зависит от динамики соответствующих отображений. Показано, что исходное число параметров, от которых зависит динамика отображения, можно уменьшить, если рассмотреть классы топологической сопряженности относительно гомеоморфизмов подходящего вида. Для соответствующих отображений плоскости указаны формулы, связывающие параметры исходного и редуцированного семейств. Приводятся также примеры различного поведения решений соответствующей динамической системы в зависимости от значений параметров.

АБСОЛЮТНО СТІЙКІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ З ПІСЛЯДІЄЮ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

В. Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна
e-mail: V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

Для диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{kj} \frac{d^k x(t-\tau_j)}{dt^k} = 0$$

і

$$\frac{dx(t)}{dt} + \sum_{k=1}^{m} A_k \frac{dx(t-\delta_k)}{dt} = B_0 x(t) + \sum_{k=1}^{m} B_k x(t-h_k),$$

де a_k, $k = \overline{1, n-1}$, і b_{kj}, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, – дійсні або комплексні числа, τ_j, $j = \overline{1, m}$, – невід'ємні числа, A_k, $k = \overline{1, m}$, і B_j, $j = \overline{0, m}$, – лінійні неперервні оператори, що діють у банаховому просторі E, і δ_j, h_j, $j = \overline{1, m}$, – невід'ємні числа, а також для аналогічних диференціально-різницевих рівнянь з малими нелінійними збуреннями отримано необхідні та достатні умови асимптотичної стійкості розв'язків при довільних невід'ємних і сталих τ_j, δ_j і h_j, $j = \overline{1, m}$.

Наведено застосування умов абсолютної по відношенню до відхилень аргументу асимптотичної стійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь до дослідження стійкості коливань напруги та струму в лінії довільної довжини з тунельним діодом, стійкості коливань візка шасі літака при русі по грунтовому аеродрому зі сталою швидкістю та стійкості процесу різання при точінні за слідом.

Основні результати досліджень викладено в [1].

[1] В. Ю. Слюсарчук, *Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією*, Український держ. ун-т вод. госп-ва та природокористування, Рівне, 2003.

ON SPECTRAL MULTIPLICITIES FOR ERGODIC ACTIONS

A. V. Solomko

Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NAS of Ukraine, Kharkiv, Ukraine
e-mail: solomko.anton@gmail.com

Let G be a l.c.s.c. Abelian group and let $(T_g)_{g\in G}$ be a measure preserving action of G on a standard probability space (X, μ). The corresponding Koopman unitary representation U_T of G in $L^2_0(X,\mu) := L^2(X,\mu) \ominus \mathbb{C}$ is defined by $U_T(g)f := f \circ T_{-g}$. Let $\mathcal{M}(T)$ stand for the set of essential values of the spectral multiplicity function of U_T. We are interested in the following spectral multiplicity problem:

Which subsets $E \subset \mathbb{N}$ are realizable as $E = \mathcal{M}(T)$ for an ergodic (or weakly mixing) G-action T?

This problem was studied by a number of authors mainly in the case $G = \mathbb{Z}$ (see the recent survey [1] and the references therein).

Theorem 1 ([2]). *Let G be either a discrete countable Abelian group or $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, or the product of such groups. For any $p \in \mathbb{N}$ there exists a weakly mixing probability preserving G-action T with $\mathcal{M}(T) = \{p\}$.*

To establish this result we use the method of auxiliary group actions.

Given $E, F \subset \mathbb{N}$, let $E \diamond F := E \cup F \cup EF$. In this notation, $\{p\} \diamond \{q\} = \{p, q, pq\}$, $\{p\} \diamond \{q\} \diamond \{r\} = \{p, q, r, pq, pr, qr, pqr\}$, etc.

Theorem 2 ([3]). *Let G be either a discrete countable Abelian group or $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, or the product of such groups. Given a (finite or infinite) sequence of positive integers $p_1, p_2, \ldots$, there exists a rigid weakly mixing probability preserving G-action T such that $\mathcal{M}(T) = \{p_1\} \diamond \{p_2\} \diamond \cdots$.*

In particular, any multiplicative (and hence any additive) subsemigroup of $\mathbb{N}$ is realizable as $\mathcal{M}(T)$ for a weakly mixing G-action T.

We obtain the required action as the product $T_1 \times T_2 \times \cdots$, where T_i is a weakly mixing G-action with homogeneous spectrum of multiplicity p_i. To 'control' the spectral multiplicities of Cartesian products of such actions, we furnish T_i with certain asymptotical operator properties in spirit of [4].

[1] A. I. Danilenko, A survey on spectral multiplicities of ergodic actions, *Ergod. Th. & Dyn. Syst.*, to appear.

[2] A. I. Danilenko, A. V. Solomko, Ergodic Abelian actions with homogeneous spectrum, *Contemp. Math.*, AMS, Providence, R.I., Vol. 532 (2010), p. 137–148.

[3] A. V. Solomko, New spectral multiplicities for ergodic actions, *Studia Math.*, **208** (2012), p. 229–247.

[4] V. V. Ryzhikov, Spectral multiplicities and asymptotic operator properties of actions with invariant measure, *Sb. Math.*, **200** (2009), p. 1833–1845.

ОДНОВИМІРНІ ГОМОКЛІНІКИ

В. В. Федоренко

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: vfedor@imath.kiev.ua

Розглянуто питання співіснування циклів та гомоклінічних траєкторій динамічних систем. Траєкторію динамічної системи, відмінну від періодичної, називають гомоклінічною, якщо її α-гранична та ω-гранична множини співпадають і представляють собою цикл. Природно, що класифікація гомоклінічних траєкторій тісно пов'язана з класифікацією циклів, які є їх ω-граничними множинами.

Якщо цикли динамічної системи, що породжена неперервним відображенням інтервалу в себе, характеризувати за періодами, то співіснування гомоклінічних траєкторій до циклів різних періодів описується за допомогою наступного лінійного порядку в множині натуральних чисел [1]:

$$1 \triangleright 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright ... \triangleright 2\cdot 1 \triangleright 2\cdot 3 \triangleright 2\cdot 5 \triangleright ... \triangleright 2^2\cdot 1 \triangleright 2^2\cdot 3 \triangleright 2^2\cdot 5 \triangleright ....$$

Цикли неперервних відображень інтервалу також більш детально класифікуються за типами, тобто циклічними перестановками, що породжуються обмеженням відображення на цикл. Існують відображення, що мають цикл деякого типу, але не мають гомоклінічних траєкторій до циклів цього типу. Це має місце тоді і тільки тоді, коли цикл або є нерухомою точкою, або має тип π довжини $2n$, $n \geq 1$, такий, що $\pi^n(2\,i-1) = 2\,i$, $\pi^n(2\,i) = 2\,i-1$, $i = 1, 2, ..., n$. Отже, будь-яке відображення разом з циклом типу σ, який не має вказаної властивості, має і гомоклінічну траєкторію до деякого циклу σ. Крім того, гомоклінічні траєкторії до циклу розрізняються ще й тим, чи всі точки траєкторії лежать між мінімальною та максимальною точками цього циклу чи ні, що дає можливість отримати додаткові цікаві властивості відображення [2].

Розглянуто також властивості гомоклінічних траєкторій для деяких класів багатовимірних динамічних систем, дослідження яких редукуються до дослідження неперервних відображень інтервалу [3].

[1] В.В. Федоренко, А.Н. Шарковский, Устойчивость свойства динамической системы иметь гомоклиническую траекторию, *в кн: Осцилляция и устойчивость решений дифференциально-функциональных уравнений, Шарковский А. Н. (ред.)*, Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 111–113.

[2] В. В. Федоренко, А. Н. Шарковский, О сосуществовании гомоклинических и периодических траекторий, *Нелинейная динамика*, **6** (2010), с. 207–217.

[3] V. V. Fedorenko, A. N. Sharkovsky, Homoclinic trajectories in one-dimensional dynamics, *Journal of Difference Equations and Applications*, **18** (2012), p. 579–588.

ПРО СТІЙКІСТЬ НЕЧІТКИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ, ЗАДАНИХ РІВНЯННЯМ З ПРОЦЕСОМ НЕЧІТКОГО БЛУКАННЯ

Д. Я. Хусаїнов[1], О. С. Бичков[2]

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: [1]khusainov@unicyb.kiev.ua, [2]bos.knu@gmail.com

Розглянемо нечітку динамічну систему (НДС), задану рівнянням із скалярним процесом нечіткого блукання (ПНБ) $w(t)$ [1, 2]:

$$dy(y_0;t;x) = g(y(y_0;t;x))dt + h(y(y_0;t;x))dw(t,x); y(y_0;0;x) = y_0 \tag{1}$$

Припустимо, що:

1) g, h – неперервні функції, що задовольняють умову Ліпшиця і $g(0) = h(0) = 0$;

2) для всіх $x \in X_+$ і $y_0 \in B(\gamma)$ (де $\gamma > 0$ – деяке число) існує єдина функція – розв'язок $t \mapsto y(y_0;t;x)$ рівняння (1) в сенсі Каратеодорі [3], визначена при всіх $t \geq 0$ і така, що $y(y_0;t;x) \in B(\gamma)$ при $t \geq 0$.

Означення. Розв'язок $y(\bar{y}_0, t, \bar{x})$ нечіткої динамічної системи $y(y_0, t, x)$ називається стійким з рівнем $\alpha(\varepsilon)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, $\alpha(\varepsilon) < 1$ і існує $\delta(\varepsilon) > 0$, таке, що такі, що при $\|y_0 - \bar{y}_0\| < \delta$, $x \in X_\alpha$, виконується $\|y(y_0,t,x) - y(\bar{y}_0,t,\bar{x})\| < \varepsilon$.

Покладемо $\psi(p) = \inf\{\varepsilon \geq 0 | \alpha(\varepsilon) \leq p\}$.

Теорема 1 (Про стійкість нульової траєкторії нечіткої динамічної системи, заданої рівнянням з ПНБ).

Припустимо, що існує диференційоване відображення $V : Y \to R^+$ і неперервне відображення $f : R^+ \to R^+$, такі, що

1) f є монотонно зростаючою функцією, $f(0) = 0$ і $f(\|y\|) \leq V(y)$ для всіх $y \in Y$;

2) $\frac{dV(y)}{dy} g(y) \leq -\sqrt{\varphi^{-1}(p)} \left| \frac{dV(y)}{dy} h(y) \right|$ для всіх $y \in B(\gamma)$ і $p \in (0,1]$, таких, що $\psi(p)$ визначено і $V(y) > f(\psi(p))$.

Тоді нульове положення рівноваги НДС $y(y_0;t;x)$ стійке з рівнем α.

[1] Бичков О.С. Побудова інтегралу за процесом нечіткого блукання // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат.науки, 2005, № 4, с. 125–133

[2] Бєлов Ю.А., Бичков О.С., Меркур'єв М.Г., Чулічков О.І. Про один підхід до моделювання нечіткої динаміки, *Доповіді НАН України*, 2006, № 10, с. 14–19

[3] Бичков О.С., Меркур'єв М.Г. Існування та єдиність розв'язків нечіткого диференціального рівняння, *Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат.науки*, 2006, № 1, с. 131–135

QUASI-STABLE INFINITE DIMENSIONAL SYSTEMS: THEORY AND APPLICATIONS

I. D. Chueshov

Department of Mechanics and Mathematics, Kharkov National University, Ukraine,
e-mail: chueshov@univer.kharkov.ua

We present the recently developed method (see [1, 2] for some preliminary details) of quasi-stability estimates in the study of long-time dynamics of a class infinite dimensional dissipative systems. As examples we consider the systems generated by nonlinear PDEs arising in wave dynamics, plasma physics, thermoelasticity of plates and fluid-structure interaction models.

[1] I. Chueshov, I. Lasiecka, *Long-Time Behavior of Second Order Evolution Equations with Nonlinear Damping*, Memoirs of AMS 912, AMS, Providence, 2008.

[2] I. Chueshov, I. Lasiecka, *Von Karman Evolution Equations*, Springer, New York, 2010.

S^1-INVARIANT VECTOR FIELDS ON MANIFOLDS WITH SEMI-FREE CIRCLE ACTION

V. Sharko

Institute of Mathematics, Kyiv, Ukraine,
e-mail: sharko@imath.kiev.ua

Let W^{2n} be a compact closed manifold of dimension at least 6 with semi-free circle action which has finitely many fixed points. We study the S^1-invariant Morse-Smale vector fields on W^{2n}. The aim of this report is to describe the exact values of minimal numbers of closed orbits of some indices of an S^1-invariant Morse-Smale vector field on W^{2n}.

Definition 1. A smooth S^1-invariant vector field V on W^n is called *S^1-invariant Morse-Smale* if: i) each connected component of the nonwandering set of V is either a non-degenerated fixed point or a non-degenerated circle, and ii) the stable and unstable manifolds of critical elements of V are S^1-transversal.

Definition 2. Let V be an S^1-invariant Morse-Smale vector field on W^{2n} for a smooth semi-free circle action f with isolated fixed points $p_1, \dots, p_{2k}$ on W^{2n}. Let λ_i be the index of the singular point p_i of f. *The state $St_V(\lambda_i)$ of* V is the collection of numbers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}$.

Theorem 1. *For every smooth semi-free circle action on W^{2n} with fixed points $p_1, \dots, p_{2k}$ and any collection numbers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2k}$, such that $0 \le \lambda_i \le 2n$, there exists an S^1-invariant Morse-Smale vector field V on W^{2n} with the state $St_V(\lambda_i)$.*

Definition 3. *The S^1-equivariant Morse number $\mathcal{M}^{\nu}_{S^1}(W^{2n}, St(\lambda_i))$ of index ν for the state $St(\lambda_i)$ of W^{2n}* is the minimum number of circles of index ν taken over all S^1-invariant Morse-Smale vector fields on W^{2n} with the state $St(\lambda_i)$.

Theorem 2. *Let W^{2n} $(2n > 8)$ be a closed smooth manifold that admits a smooth semi-free circle action with isolated fixed points $p_1, \dots, p_{2k}$. Then for W^{2n} with the state* $St(\underbrace{0, \dots, 0}_{r}, \underbrace{2n, \dots, 2n}_{2k-r}) = St(0, r, 2n)$

$$\mathcal{M}^{\lambda}_{S^1}(W^{2n}, St(0, r, 2n)) = \mathbb{D}^{\lambda}(W^{2n}/S^1, p_1, ..., p_r) + \widehat{S}^{\lambda}_{(2)}(W^{2n}/S^1 p_1, ..., p_r) +$$

$$+ \widehat{S}^{\lambda+1}_{(2)}(W^{2n}/S^1, p_1, ..., p_r) + dim_{N(Z[\pi])}(H^{\lambda}_{(2)}(W^{2n}/S^1, p_1, ..., p_r, \mathbb{Z})),$$

for $3 \le \lambda \le 2n - 4$.

К ИСТОРИИ ОДНОМЕРНОЙ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

А. Н. Шарковский

Институт математики НАН Украини, Киев, Украина,
e-mail: asharkov@imath.kiev.ua

В докладе рассматриваются некоторые этапы в развитии одномерной хаотической динамики, в частности, понятия хаоса в “дохаосовую эпоху”. В основном, речь идет о результатах автора 1960-х годов, об аттракторах траекторий, их свойствах, о структуре бассейнов этих аттракторов, а также о сегодняшнем использовании одномерных динамических систем в исследовании некоторых классов бесконечномерных динамических систем.

VARIABILITY AND UNITY OF SCENARIOS OF TRANSITION TO DETERMINISTIC CHAOS

A. Yu. Shvets[1], V. A. Sirenko[2]

NTUU "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine,
e-mail: [1]alex.shvets@bigmir.net, [2]sir_vasiliy@ukr.net

Despite the infinite variety of the dynamic systems, it is possible to divide all scenarios of transitions to deteministic chaos into three basic groups. To the first group belongs Feigenbaum scenario of transition to chaos through an infinite cascade of period-doubling bifurcations of limit cycles. To the second group of scenarios belong transitions to chaos through an intermittency by Pomeau–Manneville of various types. At last, to the third group of scenarios belong transitions to chaos through destruction of quasiperiodic attractors (invariant toruses) [1].

For non-ideal dynamic systems (in sense of Sommerfeld–Kononenko) it is described the new scenarios of transitions "regular regime – chaos" and "chaos – chaos", which are the generalisation of some scenarios of the first and second groups. In particular, new types of intermittency, which are termed the generalised intermittency, are described. Interesting variations of the Feigenbaum scenario, which are characterized by the symmetry of limit cycles arising at bifurcations of a period-doubling and the symmetry of appearing chaotic attractors are described [2].

At last, the scenario of transition to chaos which unites typical features of Feigenbaum scenario and the generalised intermittency is detected. The first phases of scenario is typical for cascade of bifurcations of period-doubling, but the finishing phases remind of generalised intermittency [3].

[1] T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets, *Regular and chaotic dynamics of systems with limited excitation*, R&C Dynamics, Moskow-Izhevsk, 2008.

[2] T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets, Dynamical chaos for a limited power supply oscillations in cylindrical tanks, *Journal of Sound and Vibration*, **322** (2009), p. 532–553.

[3] A. Shvets, V. Sirenko, Variety of scenarios of transition to deterministic chaos in non-ideal hydrodynamic systems, *Dynamical Systems, Analitycal/Numerical Metods, Stability, Bifurcation and Chaos*, Poland, 2011, p. 191–196.

Авторський покажчик

Зміст

Підп. до друку .2012. Формат Папір офсетний № 1.
Гарн. нова, газетна. Офсетний друк. Фіз. друк. арк.
Ум. друк. арк. Зам. №

Оригінал-макет підготовлено в Інституті математики НАН України
01601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.