Збірник праць Інституту математики НАН України 2019, т. 16, № 1, 16–21

УДК 517.912:512.816

(1+1)-вимірні нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними ліївськими симетріями

В.М. Бойко, О.В. Локазюк

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: boyko@imath.kiev.ua, sasha.lokazuik@gmail.com

Знайдено явний вигляд перетворень, що пов'язують нелінійні (1+1)-вимірні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними семивимірними алгебрами ліївських симетрій.

We have established the explicit forms of the transformations that connect nonlinear (1+1)-dimensional evolution equations of the second order with maximal seven-dimensional Lie symmetry algebras.

Розглянемо клас (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь порядку n

$$u_t = F(t, x, u, u_1, \dots, u_n), \tag{1}$$

де $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$, $i = 0, \dots, n$, $u_0 \equiv u$, $n \geq 2$, F — довільна гладка функція. Також будемо використовувати позначення $u_x, u_{xx}, \dots$ для похідних за змінною x.

Симетрійним властивостям рівнянь з класу (1) присвячено багато досліджень. Крім того, у багатьох випадків саме еволюційні рівняння з класу (1), як правило, виступають базовими прикладами в симетрійному аналізі диференціальних рівнянь (див., наприклад, монографії [6, 9, 15, 17]).

Відповідно до результатів В.В. Соколова [18, p. 173] та Б.А. Магадєєва [12, p. 346] (див. також статтю Р.З. Жданова [19]) контактні перетворення, які зберігають вигляд еволюційних рівнянь (1), вичерпуються перетвореннями

$$\widetilde{t} = \varkappa(t), \quad \widetilde{x} = \phi(t, x, u, u_x), \quad \widetilde{u} = \psi(t, x, u, u_x),$$

де функції ϕ та ψ задовольняють умову контактності

$$\phi_{u_x}(u_x\psi_u + \psi_x) = \psi_{u_x}(u_x\phi_u + \phi_x).$$

Б.А. Магадєєвим [12, теорема 0.1] доведено, що розмірність алгебри контактних симетрій (Cont) (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь (1) не перевищує $n+5$ або дорівнює ∞. В останньому випадку еволюційні рівняння зводяться до лінійних за допомогою контактних перетворень. У цій же роботі автором отримано повний перелік алгебр скінченновимірних контактних симетрій еволюційних рівнянь та показано, як описати еволюційні рівняння, які допускають задану алгебру контактної симетрії.

Зокрема, згідно з [12, теорема 3.5], будь-яке рівняння з класу (1) з максимальною $(n+5)$-вимірною алгеброю контактних симетрій, еквівалентне рівнянню

$$u_t = u_n^{\frac{1-n}{1+n}}.$$

При цьому відповідна алгебра контактних симетрій має вигляд [12, див. доведення теореми 3.5 та додаток]:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\mathrm{M1}} = \big\langle &1,\, x,\, \dots,\, x^k,\, u_x,\, -\tfrac{n-1}{2}u + xu_x,\, x^2u_x - (n-1)xu,\\ &u_t,\, tu_t + \lambda u\big\rangle,\end{aligned} \tag{2}$$

де $k = 1, \dots, n-1$, $\lambda \neq 0$, $\lambda = -\frac{n+1}{2n}$, $\varphi = \{1, x, \dots, tu_t + \lambda u\}$ — $(n+5)$-компонентна генеруюча функція інфінітезимального оператора

$$\begin{aligned}Q = {}&\tau(t)\partial_t + \xi(t,x,u,u_x)\partial_x + \eta(t,x,u,u_x)\partial_u\\ &+ \zeta(t,x,u,u_x)\partial_{u_t} + \rho(t,x,u,u_x)\partial_{u_x}\end{aligned}$$

з коефіцієнтами τ, ξ, η, ζ, ρ, які визначаються наступним чином [11, 19]:

$$\begin{aligned}&\tau = -\phi_{u_t}, \quad \xi = -\phi_{u_x}, \quad \eta = \phi - u_t\phi_{u_t} - u_x\phi_{u_x},\\ &\zeta = \phi_t + u_t\phi_u, \quad \rho = \phi_x + u_x\phi_u.\end{aligned}$$

Для довільного $n \geq 2$ всі базисні елементи алебри (2) є продовженнями відповідних ліївських симетрій (тобто алебра (2) є тривіальною алгеброю контактних симетрій). Зокрема, для $n = 2$ ця алгебра має вигляд

$$\mathfrak{g}_{n=2} = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, \partial_u,\, 2x\partial_x + u\partial_u + u_t\partial_{u_t} - u_x\partial_{u_x},$$

$$x\partial_u + \partial_{u_x},\ 4t\partial_t + 3u\partial_u - u_t\partial_{u_t} + 3u_x\partial_{u_x},$$
$$x^2\partial_x + xu\partial_u + xu_t\partial_{u_t} - xu_x\partial_{u_x}\rangle$$

і є продовженням алгебри ліївських (точкових) симетрій рівняння $u_t = u_{xx}^{-1/3}$ (див. реалізацію (5) нижче). Умови на функцію F, при яких клас (1) допускає лише тривіальні контактні перетворення, отримано в роботі [13].

У роботі [19] Р.З. Ждановим встановлено зв'язок між потенціальними та контактними симетріями еволюційних рівнянь (1), а також запропоновано підхід до класифікації таких рівнянь.

Свіжий огляд та останні результати щодо некласичних симетрій еволюційних рівнянь можна знайти в роботі [8].

Значне місце в літературі приділяється знаходженню ліївських симетрій еволюційних рівнянь. Крім того, вивчаються симетрійні властивості різноманітних підкласів класу (1) при $n = 2, 3$. У роботі [5], І.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов та Н.Х. Ібрагімов розглянули локальні та нелокальні симетрії для деяких класів еволюційних рівнянь другого порядку, а саме для рівнянь нелінійної теплопровідності, нелінійної фільтрації та газової динаміки. Зокрема, у цій роботі знайдено групу еквівалентності та виконано повну групову класифікацію класу $u_t = H(u_{xx})$. Якщо виключити з розгляду лінійний випадок, то при довільній функції H цей клас допускає п'ятивимірну алгебру ліївських симетрій. Крім того, існує 5 нееквівалентних випадків розширення цієї п'ятивимірної алгебри. У випадку степеневої, логарифмічної та експоненціальної нелінійності, алгебра інваріантності — шестивимірна, а семивимірну алгебру допускають два наступні рівняння [5]:

$$u_t = u_{xx}^{-1/3}, \tag{3}$$
$$u_t = u_{xx}^{1/3}. \tag{4}$$

Згідно з [5], максимальні ліївські алгебри інваріантності рівнянь (3) та (4) наступні:

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\mathrm{AGI1}} = \langle &\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u,\ 4t\partial_t + 3u\partial_u,\\ &x^2\partial_x + xu\partial_u\rangle,\end{aligned} \tag{5}$$
$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\mathrm{AGI2}} = \langle &\partial_t,\ \partial_x,\ \partial_u,\ 2t\partial_t + x\partial_x + 2u\partial_u,\ x\partial_u,\\ &2t\partial_t + 3u\partial_u,\ u\partial_x\rangle.\end{aligned} \tag{6}$$

У роботах [4, 7] вивчено симетрійні властивості класу

$$u_t + uu_x = F(u_n).$$

Зокрема, показано, що рівняння

$$u_t + uu_x = u_{xx}^{1/3} \tag{7}$$

допускає семивимірну алгебру Лі

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_{\mathrm{BF}} = \langle &\partial_t,\, \partial_x,\, t\partial_x + \partial_u,\, 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u,\\ &u\partial_x,\, (2t - x)\partial_x + u\partial_u,\, (tu - x)(t\partial_x + \partial_u)\rangle.\end{aligned} \tag{8}$$

У роботах [1, 2] за допомогою техніки розгалуженого розщеплення виконано повну групову класифікацію ліїських симетрій підкласів $u_t + uu_x = H(u_n)$ та $u_t = H(u_n)$ відповідно, де $n \geq 3$. Див. [16] та список літератури в цій роботі щодо методу розгалуженого розщеплення та інших сучасних алгебраїчних технік симетрійної класифікації диференціальних рівнянь.

Оскільки, згідно з результатом Б.А. Магадєєва [12], існує єдине з точністю до контактних перетворень еквівалентності (1+1)-вимірне еволюційне рівняння другого порядку з семивимірною максимальною алгеброю контактних симетрій, то основна мета цієї роботи полягає в наступному: знайти перетворення, що пов'язують нелінійні (1+1)-вимірні еволюційні рівняння (3), (4) та (7).

Відомо, що рівняння (4) зводиться до рівняння (3) за допомогою контактного перетворення (див. [10, 14])

$$t = -\tilde{t}, \quad x = \tilde{u}_{\tilde{x}}, \quad u = \tilde{x}\tilde{u}_{\tilde{x}} - \tilde{u}, \quad u_t = \tilde{u}_{\tilde{t}}, \quad u_{xx} = \frac{1}{\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}}, \tag{9}$$

де $\tilde{u}$ — нова залежна змінна та $\tilde{t}$, $\tilde{x}$ — нові незалежні змінні.

Зауважимо, що рівняння (4) інваріантне щодо перетворення годографа [3, с. 409]

$$t = \tilde{t}, \quad x = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}), \quad u(t, x) = \tilde{x}, \quad u_t = -\tilde{u}_{\tilde{t}}, \quad u_{xx} = -\frac{1}{\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}}.$$

Таким чином, рівняння нелінійної теплопровідності (4) — ще один приклад годограф-інваріантного еволюційного рівняння другого порядку поряд з рівняннями швидкої дифузії $u_t = u_{xx}u_x^{-1}$ та фільтрації $u_t = u_{xx}\left(1 + u_x^2\right)^{-1}$.

Нами знайдено модифіковане перетворення годографа

$$
\begin{gathered}
t=\widetilde{t}, \quad x=\widetilde{u}(\widetilde{t},\widetilde{x})+\widetilde{x}\widetilde{t}, \quad u(t,x)=\widetilde{x}, \\
u_t=-\frac{\widetilde{u}_{\widetilde{x}}+\widetilde{x}}{\widetilde{u}_{\widetilde{x}}+\widetilde{t}}, \quad u_x=\frac{1}{\widetilde{u}_{\widetilde{x}}+\widetilde{t}}, \quad u_{xx}=-\frac{\widetilde{u}_{\widetilde{x}\widetilde{x}}}{(\widetilde{u}_{\widetilde{x}}+\widetilde{t})^3},
\end{gathered} \tag{10}
$$

яке зводить рівняння (7) до рівняння (4).

Отже, нелінійні рівняння (4) та (7) з семивимірними максимальними алгебрами інваріантності зводяться до нелінійного рівняння теплоровідності (3) з класифікації Б.А. Магадєєва за допомогою контактного перетворення (9) та узагальненого перетворення годографа (10), а відповідні алгебри (6) та (8) ізоморфні з точністю до контактних перетворень алгебрі (5).

[1] Бойко В.М., Попович В.О., Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь, *Праці Ін-ту мат. НАН України* **36** (2001), 45–50.

[2] Ічанська Н.В., Еволюційні рівняння та системи інваріантні відносно конформної алгебри, *Зб. праць Ін-ту мат. НАН України* **3** (2006), no. 2, 159–169.

[3] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. Точные решения, Физматлит, Москва, 2002.

[4] Фущич В.І., Бойко В.М., Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега–де Фріза високого порядку, *Укр. мат. журн.* **48** (1996), 1589–1601.

[5] Akhatov I.Sh., Gazizov R.K., Ibragimov N.Kh., Nonlocal symmetries. A heuristic approach, *J. Soviet Math.* **55** (1991), 1401–1450.

[6] Bluman G.W., Kumei S., Symmetries and differential equations, Springer, New York, 1989.

[7] Boyko V.M., On new generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations, in Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, 1997), Inst. Math. of NAS of Ukraine, Kiev, 1997, Vol. 1, 122–129.

[8] Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, *J. Math. Phys.* **57** (2016), 101503, 34 pp.

[9] Fushchich W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of equation of nonlinear mathematical physics, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 1993.

[10] Gazizov R.K., Potential filtration equation, in CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations, Vol. 1, Boca Raton, Chemical Rubber Company, 1994, 131–132.

[11] Ibragimov N.H., Transformation groups applied to mathematical physics, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1985.

[12] Magadeev B.A., On group classification of nonlinear evolution equations, *St. Petersburg Math. J.* **5** (1994), 345–359.

[13] Momoniat E., Mahomed F.M., The existence of contact transformations for evolution-type equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999), 8721–8730.

[14] Pukhnachov V.V., Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations, in Energy Methods in Continuum Mechanics (Oviedo, 1994), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996, 75–99.

[15] Olver P.J., Applications of Lie groups to differential equations, 2nd ed., *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1993.

[16] Opanasenko S., Boyko V., Popovych R.O., Enhanced group classification of nonlinear diffusion-reaction equations with gradient-dependent diffusion, arXiv:1804.08776.

[17] Ovsyannikov L.V., Group analysis of differential equations, Academic Press, New York, 1982.

[18] Sokolov V.V., On the symmetries of evolution equations, *Russian Math. Surveys* **43** (1988), 165–204.

[19] Zhdanov R., On relation between potential and contact symmetries of evolution equations, *J. Math. Phys.* **50** (2009), 053522, 9 pp.