Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського”

Визначник матриці. Обчислення. Властивості

Баршеніков Максим

1 квітня 2021 р.

Основні поняття

Визначник або детермінант — це число, вираз складений за певним законом з n^2 елементів квадратної матриці. Одна з найважливіших характеристик квадратних матриць.

Основні поняття

Визначник або детермінант — це число, вираз складений за певним законом з n^2 елементів квадратної матриці. Одна з найважливіших характеристик квадратних матриць.

Для квадратної матриці розміру $n \cdot n$ визначник є многочленом степеня n від елементів матриці, і є сумою добутків елементів матриці зі всіма можливими комбінаціями різних номерів рядків і стовпців. Кожному добутку приписується знак плюс чи мінус, в залежності від парності перестановки номерів.

Визначення

Визначник матриці A задається формулою:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\pi \epsilon S_n} \operatorname{sgn}(\pi)(a_{1\pi(1)} \cdot a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}),$$

де π — перестановка множин $(1, \dots, n)$ і $\operatorname{sgn}(\pi)$ це знак (або парність) перестановки, тобто дорівнює 1 чи -1 залежно від парності числа інверсій π.

Означення

Щоб знайти визначник 2×2 матриці, множимо елементи головної діагоналі та віднімаємо добуток елементів побічної діагоналі:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Визначник матриці 3×3

Означення

Щоб знайти визначник 3×3 матриці, будуємо шість добутків таким чином:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{33} -$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для знаходження визначників високого порядку застосовуються принципово інші методи (насамперед, метод Гауса), що вимагають значно меншої кількості арифметичних операцій ($O(n^3)$ замість $n!$).

Загалом для матриць більш високих порядків (вище 2-го) $n \times n$ визначник можна обчислити, застосувавши таку рекурсивну формулу:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_j^{-1},$$

де M_j^{-1} — доповнювальний мінор елемента a_{1j}. Ця формула називається розкладанням за рядком.

Визначник матриці $N \times N$

Легко показати, що при транспонуванні визначник матриці не міняється (тобто аналогічне розкладання за першим стовпцем також справедливе, тобто дає такий же результат, як і за першим рядком):

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^{-i}.$$

Визначник матриці $N \times N$

Легко показати, що при транспонуванні визначник матриці не міняється (тобто аналогічне розкладання за першим стовпцем також справедливе, тобто дає такий же результат, як і за першим рядком):

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_1^{-i}.$$

Також справедливе й аналогічне розкладання за будь-яким рядком (або стовпцем):

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_j^{-i}.$$

Узагальненням вищенаведених формул є розкладання детермінанта за Лапласом (теорема Лапласа), що дає можливість обчислювати визначник за довільними k рядками (стовпцями):

$$\Delta = \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_k \le n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + j_1 + \dots + j_k} M^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k} M^{-i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_k}.$$

Властивості

- Якщо помножити якийсь рядок (стовпець) на константу a, то визначник також помножиться на a.
- Якщо у матриці поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний.

Властивості

- Якщо помножити якийсь рядок (стовпець) на константу a, то визначник також помножиться на a.
- Якщо у матриці поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний.
- При додаванні до будь-якого рядка (стовпця) лінійної комбінації кількох інших рядків (стовпців) визначник не зміниться.
- У матриці з двома однаковими/пропорційними рядками (стовпцями) або з нульовим рядком, визначник дорівнює нулю.

Властивості

- Всі властивості визначників, що стосуються рядків, так само справедливі і для стовпців.
- Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів на діагоналі.

Властивості

- Всі властивості визначників, що стосуються рядків, так само справедливі і для стовпців.
- Визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів на діагоналі.
- Теорема Лапласа: визначник квадратної матриці дорівнює сумі добутків елементів деякого рядка на відповідні їм алгебраїчні доповнення.
- Теорема про фальшивий розклад: сума добутків елементів деякого рядка на алгебраїчні доповнення відповідних елементів паралельного рядка дорівнює нулю.

Властивості

- $\det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$.
- $\det\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \det(A)$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Властивості

- $\det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$.
- $\det\left(A^{\mathrm{T}}\right) = \det(A)$.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

$$\begin{aligned}\det(C) &= \frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{rst} c^r_i c^s_j c^t_k = \frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{rst}(a^e_l b^l_i)(a^s_m b^m_j)(a^t_n b^n_k) = \\ &= \frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{rst}(a^r_l a^s_m a^t_n)(b^l_i b^m_j b^n_k) = \left[\frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{rst}(a^r_l a^s_m a^t_n)\right]\left[\frac{1}{3!}(b^l_i b^m_j b^n_k)\right] = \\ &= \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

Властивості

$$
\begin{aligned}
\det(C) &= \frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{rst} c^r_i c^s_j c^t_k = \frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{rst}(a^e_l b^l_i)(a^s_m b^m_j)(a^t_n b^n_k) = \\
&= \frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{rst}(a^r_l a^s_m a^t_n)(b^l_i b^m_j b^n_k) = \left[\frac{1}{3!}\delta^{ijk}_{rst}(a^r_l a^s_m a^t_n)\right]\left[\frac{1}{3!}(b^l_i b^m_j b^n_k)\right] = \\
&= \det(A)\det(B).
\end{aligned}
$$

В лінійній алгебрі доводиться, що перші три властивості майже характеризують визначник матриць з елементами у полі. А саме, якщо функція елементів матриці задовольняє властивості (1), (2), (3), то така функція пропорційна $\det$.

Дякую за увагу!