

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”



Перетворення Мебіуса

Артем Якович Торохтій
artemtorokhtiy69@gmail.com

5 червня 2020 р.



Означення:

Перетворення Мебіуса — раціональна функція форми
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$



Означення

Перетворення Мебіуса - це проєктивні перетворення комплексної проєктивної лінії. Вони утворюють групу під назвою група Мебіуса, яка є проєктивною лінійною групою $PGL(2, \mathbb{C})$. Разом зі своїми підгрупами він має численні використання в галузі математики та фізики. Геометрично перетворення Мебіуса можна отримати, попередньо виконавши стереографічну проєкцію від площини до одиничної двосфери обертаючи та переміщуючи сферу на нове місце та орієнтацію в просторі, а потім виконуючи стереографічну проєкцію (з нового положення сфери) до площини. Ці перетворення зберігають кути, відображають кожен пряму лінію на лінію чи коло, а кожне коло - на лінію чи коло.



Означення:

Перетворення Мебіуса названі на честь Августа Фердинанда Мебіуса, їх також називають різними гомографіями, гомографічними перетвореннями, лінійними дробовими перетвореннями, білінійними перетвореннями або дробовими лінійними перетвореннями. Перетворення Мебіуса визначаються на розширеній комплексній площині $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup [\infty]$ (тобто, комплексній площині, що збільшується точкою в нескінченності).



Стереографічна проекція ідентифікує $\hat{C}$ зі сферою, яку потім назвуть сферою Рімана. Альтернативно, $\hat{C}$ можна розглядати як комплексну проєктивну лінію CP^1 . Перетворення Мебіуса - це саме бієктивні конформні карти від сфери Рімана до самої себе, тобто автоморфізми сфери Рімана як комплексна копія. Альтернативно, це автоморфізми CP^1 як алгебраїчний різновид. Тому множина всіх перетворень Мебіуса утворює групу під набором функцій. Ця група називається групою Мебіуса, її іноді позначають $Aut(\hat{C})$. Група Мебіуса ізоморфна групі орієнтовно збережених ізометрій гіперболічному три вимірному простору і тому відіграє важливу роль при вивченні три вимірних гіперболічних копій.



Загальна форма перетворення Мебіуса задана формулою $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ де a, b, c, d - будь-які комплексні числа, що задовольняють $ad - bc \neq 0$. Якщо $ad = bc$, раціональна функція, визначена вище, є сталою, оскільки $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(cz+d)}{c(cz+d)} = \frac{a}{c}$ і тому не вважається перетворенням Мебіуса. У випадку $c \neq 0$ це визначення поширюється на всю сферу Рімана шляхом визначення $f(-\frac{d}{c}) = \infty, f(\infty) = \frac{a}{c}$. Якщо $c = 0$, визначимо $f(\infty) = \infty$. Таким чином, перетворення Мебіуса - це завжди бієктивна голоморфна функція від сфери Рімана до сфери Рімана.



Сукупність усіх перетворень Мебіуса утворює групу за набором. Цій групі можна надати структуру комплексної копії таким чином, що склад і інверсія є голоморфними картами. Потім група Мебіуса - це комплексна група Лі. Групу Мебіуса зазвичай позначають $Aut(\hat{\mathbb{C}})$, як група автоморфізму сфери Рімана.



Окремі підгрупи групи Мебіуса утворюють групи автоморфізму інших просто з'єднаних Ріманових поверхонь (комплексної площини та гіперболічної площини). Такі перетворення Мебіуса відіграють важливу роль у теорії поверхонь

Рімана. Фундаментальна група кожної поверхні Рімана - це дискретна підгрупа групи Мебіуса. Особливо важливою дискретною підгрупою групи Мебіуса є модульна група, він є центральним у теорії фракталів, модульних форм, еліптичних кривих та Пелліанових рівнянь.

Дякую за увагу!