Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

**БОЙКО Вячеслав Миколайович**

УДК 517.958

# Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь

01.01.03 — математична фізика
111 — математика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело. ________ В.М. Бойко

Науковий консультант
доктор фіз.-мат. наук, професор
**ПОПОВИЧ Роман Омелянович**

Київ — 2017

# Анотація

**Бойко В.М. Узагальнені оператори Казіміра, сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь.** — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.03 “математична фізика” (111 — математика). — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

Основну увагу в дисертації зосереджено на проблемах, пов’язаних з узагальненими операторами Казіміра та реалізаціями алгебр Лі, а також ліївськими симетріями та модулями редукції диференціальних рівнянь.

Розроблено оригінальний алгоритм знаходження фундаментальних базисів інваріантів (узагальнених операторів Казіміра) алгебр Лі, що використовує картанівський метод рухомих реперів у версії Фелса–Олвера. З метою тестування методу, демонстрації його переваг і пояснення процедури нормалізації заново обчислено інваріанти дійсних низькорозмірних алгебр Лі. Вперше вичерпно описано базиси інваріантів серій розв’язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, зокрема майже абелевих алгебр Лі, розв’язних алгебр Лі, нільрадикали яких є ниткоподібними майже абелевими алгебрами, нільпотентних алгебр строго верхньотрикутних матриць та розв’язних алгебр Лі з трикутними нільрадикалами й діагональними нільнезалежними елементами.

Введено строге означення модулів редукції диференціальних рівнянь, що дало змогу переглянути та наново побудувати теорію некласичних симетрій диференціальних рівнянь. Запропоновано поняття сингулярних модулів редукції диференціальних рівнянь та проведено детальне дослідження властивостей таких модулів. Показано, що обчислення некласичних симетрій диференціальних рівнянь можна вдосконалити за допомогою глибокого попереднього вивчення асоційованих сингулярних

модулів векторних полів. Із точністю до точкових перетворень описано диференціальні функції та диференціальні рівняння, що допускають параметризовані сім'ї сингулярних модулів. Сингулярні випадки при побудові модулів редукції пов'язано з пониженням порядку відповідних редукованих рівнянь. Як приклади вивчено сингулярні модулі редукції еволюційних рівнянь і квазілінійних рівнянь другого порядку. Також розглянуто редукції диференціальних рівнянь до алгебраїчних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Це дозволило впорядкувати й узагальнити всі раніше відомі "no-go" результати щодо некласичних симетрій диференціальних рівнянь.

Доведено узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень без обмеження щодо кількості незалежних і залежних змінних. А саме, показано, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку такої групи можна побудувати за допомогою однієї квадратури та диференціювання. Детально проаналізовано зв'язок між знаходженням диференціальних інваріантів першого порядку для однопараметричних груп та інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті. Прокласифіковано максимальні алгебри ліївської інваріантності систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з комутуючими сталими матрицями коефіцієнтів без обмежень щодо кількості рівнянь і вигляду цих матриць. Отримано точні нижні та верхні оцінки розмірностей таких алгебр. Досліджено групоїд еквівалентності класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку, а також групоїди еквівалентності його підкласів, пов'язаних з раціональною формою, формою Лагера–Форсайта, першою та другою формами Арнольда. Це дозволило прокласифікувати ліївські симетрії лінійних звичайних диференціальних рівнянь алгебраїчним методом у три різні способи. Нормалізаційні властивості ненормалізованих класів таких рівнянь покращено через їх репараметризацію. У результаті вперше побудовано приклади розширених узагальнених груп еквівалентності. Запропоновано симетрійний підхід до опису нових інтегровних випадків рівняння Абеля.

Проведено повну групову класифікацію нелінійних галілей-інваріантних узагальнень рівнянь Бюргерса і Кортевега–де Фріза довільного порядку. Доведено теорему про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння з частинними похідними. Як приклад, що ілюструє цю теорему, досліджено сингулярні та регулярні оператори редукції лінійного рівняння стрижня. Вивчено найпростіші потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь, пов'язаних із введенням одного потенціалу за лінійними законами збереження. Доведено, що всі найпростіші потенціальні закони збереження будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальними законами збереження цього рівняння. Одержано ефективний критерій, який дозволяє легко перевірити, коли квадратичний закон збереження найпростішого потенціального рівняння є чисто потенціальним законом збереження відповідного (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку. Описано класи нелінійних рівнянь Шрьодінгера, які інваріантні відносно суттєвої частини максимальної алгебри ліївської симетрії вільного рівняння Шрьодінгера і розв'язки яких задовольняють рівняння неперервності.

**Ключові слова:** груповий аналіз диференціальних рівнянь, алгебра Лі, узагальнений оператор Казіміра, ліївська симетрія, оператор редукції, модуль редукції, сингулярний модуль редукції, інваріант, диференціальний інваріант, група еквівалентності, групоїд еквівалентності, закон збереження.

# Abstract

**Boyko V.M. Generalized Casimir operators, singular reduction modules and symmetries of differential equations.** — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, speciality 01.01.03 "Mathematical Physics" (111 — Mathematics). — Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, 2017.

In the thesis, the main attention is paid to problems related to generalized Casimir operators and realizations of Lie algebras as well as Lie symmetries and reduction modules of differential equations.

An original algorithm for finding fundamental bases of invariants (generalized Casimir operators) of Lie algebras is developed, which uses the Cartan method of moving frames in the Fels–Olver version. In order to test the method, demonstrate its advantages and explain the normalization procedure, invariants of real low-dimensional Lie algebras are re-computed. We completely describe for the first time invariant bases for series of solvable Lie algebras of arbitrary dimension with fixed structures of nilradicals, in particular, for almost Abelian Lie algebras, for solvable Lie algebras, whose nilradicals are filiform almost Abelian algebras, for nilpotent algebras of strictly upper triangular matrices and for solvable Lie algebras with triangular nilradicals and diagonal nilindependent elements.

A rigorous definition of reduction modules of differential equations is introduced, which allows us to revisit the theory of nonclassical symmetries of differential equations. The concept of singular reduction modules of differential equations is proposed, and the properties of such modules are studied in detail. It is shown that the derivation of nonclassical symmetries for differential equations can be improved by an in-depth prior study of the associated singular modules of vector fields. The form of differential functions and differential equations possessing parameterized families of singular

modules is described up to point transformations. Singular cases of finding reduction modules are related to lowering the order of the corresponding reduced equations. As examples, the singular reduction modules of evolution equations and second-order quasi-linear equations are investigated. We also consider reductions of differential equations to algebraic equations and to ordinary first-order differential equations. As a result, we arrange and generalize all previously known "no-go" results for nonclassical symmetries of differential equations.

The generalization of Lie's theorem on differential invariants of a one-parameter group of local transformations is proved without the restriction on the number of independent and dependent variables. Namely, it is shown that if a universal invariant of such a group is known, then its complete set of functionally independent differential invariants of any order can be constructed using single quadrature and differentiations. We also analyze the relation between finding first-order differential invariants for one-parameter groups and integrating Riccati-type systems. The maximal Lie invariance algebras of systems of second-order linear ordinary differential equations with commuting constant matrices of coefficients are classified without restrictions on the number of equations and the form of these matrices. The exact lower and upper bounds for the dimensions of such algebras are derived. The equivalence groupoids of the class of linear ordinary differential equations of an arbitrary order as well as of its subclasses associated with the rational form, the Laguerre–Forsyth form, and the first and second Arnold forms are constructed. This allows us to classify Lie symmetries of linear ordinary differential equations within the algebraic method in three different ways. Normalization properties of non-normalized classes of such equations are improved by their reparameterization. As a result, examples of generalized extended equivalence groups are constructed for the first time ever. A symmetry approach for describing new integrable cases of Abel equations is proposed.

We carry out the complete group classification of nonlinear Galilean-invariant generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations, which are of an arbitrary order. The theorem on linear reduction operators of a general linear partial differential equation is proved. As an example illustrating this theorem, singular and regular reduction operators of the linear rod equation are constructed. We study simplest potential conservation laws of (1+1)-dimensional linear evolution equations that are associated with introducing single potentials using linear conservation laws. We prove that all simplest potential conservation laws of any (1+1)-dimensional of even-order linear evolution equation are induced by local conservation laws of this equation. We also derive an effective criterion for checking whether a quadratic conservation law of a linear potential system is a purely potential conservation law of the corresponding $(1+1)$-dimensional odd-order linear evolution equation. We construct classes of nonlinear Schrödinger equations that are invariant with respect to the essential Lie symmetry algebra of the free Schrödinger equation and whose solutions satisfy the continuity equation.

**Key words:** group analysis of differential equations, Lie algebra, generalized Casimir operator, Lie symmetry, reduction operator, reduction module, singular reduction module, invariant, differential invariant, equivalence group, equivalence groupoid, conservation law.

# Список публікацій

1. Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, *J. Math. Phys.* **57** (2016), no. 10, 101503, 34 pp.; arXiv:1201.3223.

2. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification, *J. Phys. Conf. Ser.* **621** (2015), 012002, 17 pp.; arXiv:1403.6062v1.

3. Бойко В.М., Редукція диференціальних рівнянь до алгебраїчних, *Допов. НАН України* (2014), № 3, 7–12.

4. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **397** (2013), no. 1, 434–440; arXiv:1203.0387.

5. Бойко В.М., Попович Р.О., Умовні симетрії лінійного рівняння стрижня, *Допов. НАН України* (2013), № 9, 7–15.

6. Бойко В.М., Попович Р.О., Потенціальні закони збереження лінійних еволюційних рівнянь з одним потенціалом, *Допов. НАН України* (2012), № 4, 7–14.

7. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of solvable Lie algebras with triangular nilradicals and diagonal nilindependent elements, *Linear Algebra Appl.* **428** (2008), no. 4, 834–854; arXiv:0706.2465.

8. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of triangular Lie algebras with one nilindependent diagonal element, *J. Phys. A: Math. Gen.* **40** (2007), no. 32, 9783–9792; arXiv:0705.2394.

9. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of triangular Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **40** (2007), no. 27, 7557–7572; arXiv:0704.0937.

10. Boyko V.O., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras with fixed structure of nilradicals, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007), no. 1, 113–130; arXiv:math-ph/0606045.

11. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), no. 20, 5749–5762; arXiv:math-ph/0602046v2.

12. Boyko V.M., Symmetry, equivalence and integrable classes of Abel equations, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **3** (2006), № 2, 39–48; arXiv:nlin.SI/0404020.

13. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), no. 26, 7337–7360.

14. Popovych R.O., Boyko V.M., Differential invariants and application to Riccati-type systems, *Праці Інституту математики НАН України* **43** (2002), ч. 1, 184–193; arXiv:math-ph/0112057.

15. Попович Р.О., Бойко В.М., Диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень: одна незалежна змінна, *Нелінійні коливання* **5** (2002), № 2, 218–223.

16. Бойко В.М., Попович В.О., Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь, *Праці Інституту математики НАН України* **36** (2001), 45–50.

17. Бойко В.М., Попович Р.О., Про диференціальні інваріанти в просторі двох змінних, *Допов. НАН України* (2001), № 5, С. 7–10.

18. Попович Р.Е., Бойко В.Н., Дифференциальные инварианты однопараметрической группы локальных преобразований и интегрируемые уравнения Риккати, *Вест. Самар. гос. ун-та.* **18** (2000), № 4, 49–56.

19. Boyko V.M., Fushchych W.I., Lowering of order and general solutions of some classes of PDEs, *Reports Math. Phys.* **42** (1998), no. 3, 311–318.

20. Fushchych W.I., Boyko V.M., Continuity equation in nonlinear quantum mechanics and the Galilei relativity principle, *J. Nonlinear Math. Phys.* **4** (1997), no. 1–2, 124–128; arXiv:math-ph/0208016.

21. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification, 2015, arXiv:1403.6062v2, 22 pp.

22. Boyko V.M., Popovych R.O., Reduction operators of the linear rod equation, in *Proceedings of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012)*, University of Cyprus, Nicosia, 2013, 17–29.

23. Boyko V.M., Popovych R.O., Simplest potential conservation laws of linear evolution equations, in *Proceedings of 5th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (June 6–10, 2010, Protaras, Cyprus)*, University of Cyprus, Nicosia, 2011, 28–39; arXiv:1008.4851.

24. Boyko V.M., Shapoval N.M., Extended symmetry analysis of a "nonconservative Fokker–Plank equation", in *Proceedings of 5th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (June 6–10, 2010, Protaras, Cyprus)*, University of Cyprus, Nicosia, 2011, 40–46; arXiv:1008.1405.

25. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, 2010, arXiv:math-ph/0602046v3, 17 pp.

26. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras via moving frames, in *Proceedings of 4th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus)*, University of Cyprus, Nicosia, 2009, 36–44; arXiv:0904.4462.

27. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, 2005, arXiv:math-ph/0301029v7, 39 pp.

28. Boyko V.M., Nonlocal symmetry and integrable classes of Abel equation, *Праці Інституту математики НАН України* **50** (2004), ч. 1, 47–51.

29. Nesterenko M.O., Boyko V.M., Realizations of indecomposable solvable 4-dimensional real Lie algebras, *Праці Інституту математики НАН України* **43** (2002), ч. 1, 474–477.

30. Бойко В.М., Попович Р.О., Диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі, *Праці Інституту математики НАН України* **36** (2001), 51–62.

31. Boyko V.M., On Galilei invariance of the continuity equation, *Праці Інституту математики НАН України* **30** (2000), ч. 1, 99–102.

32. Boyko V.M., On new generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations, in *Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics. Memorial Prof. W. Fushchych Conference"*, Kyiv, Institute of Mathematics, 1997, Vol. 1, 122–129.

33. Boyko V.M., Popovych R.O., Algebraic approach and group classification of classes of linear ordinary differential equations, Eighth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and

Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 12–17, 2016), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2016, p. 18, http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abs2016/Boyko.html.

34. Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, International workshop in honor of Wilhelm Fushchych "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 17–20, 2016), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Boyko_Kunzinger_Popovych.html.

35. Boyko V.M., Popovych R.O., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification, International workshop in honor of 70th birthday of Anatoly Nikitin "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 27–28, 2015), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2015/BoykoPopovych.html.

36. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids and group classification of classes of linear ordinary differential equations, Seventh International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 15–19, 2014), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2014, p. 15, http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abs2014/Boyko.html.

37. Boyko V.M., Shapoval N.M., Symmetries of linear ordinary differential equations, International workshop in honor of Prof. Wilhelm Fushchych "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 22–23, 2013), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2013, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/BoykoShapoval2013.html.

38. Boyko V.M., Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients, Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 17–21, 2012), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2012, p. 14, `http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abstracts2012/Boyko.pdf`.

39. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Symmetries of system of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients, International workshop in honor of Prof. Wilhelm Fushchych "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 18–19, 2011), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2011, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Boyko.html`.

40. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras via moving frames, Eighth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Kyiv, June 21–27, 2009), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2009, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2009/Boyko.html`.

41. Boyko V.M., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, Fourth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, October 26–30, 2008), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2008, p. 11, `http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Talks08/Boyko.pdf`.

42. Boyko V.M., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, Seventh International Conference Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, June 24–30, 2007), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2007, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2007/Boyko.html`.

43. Boyko V.M., Symmetry, equivalence and integrable classes of Abel equations, Sixth International Conference Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, June 20–26, 2005), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2005, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2005/Boyko.html.

44. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of low-dimensional Lie algebras, Fifth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Kyiv, June 23–29, 2003), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2003, https://www.imath.kiev.ua/~snmp2003/abstract2003/Popovych-Boyko.html.

45. Попович Р.О., Бойко В.М., Про групову класифікацію галілей-інваріантних еволюційних рівнянь другого порядку, Український математичний конгрес–2001. Тези доповідей. Секція № 5 (математична фізика), Київ, Інститут математики НАН України, 2001, 25–26.

46. Boyko V.M., Popovych R.O., Differential invariants and integration of Riccati-type systems, Fourth International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Kyiv, July 9–15, 2001), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2001, https://www.imath.kiev.ua/~appmath/abstracts/Boyko.html.

# ЗМІСТ

# ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

| | |
|---|---|
| $\mathfrak{g}$, $G$ | алгебра Лі розмірності $\dim\mathfrak{g} = n < \infty$ та відповідна зв'язна група Лі |
| Ad, Ad$^*$ | приєднане, коприєднане представлення групи Лі |
| $\mathrm{Ad}^*_G$ | образ групи $G$ при Ad$^*$ |
| $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$ | фундаментальний інваріант групи $\mathrm{Ad}^*_G$ |
| $\mathcal{I}$ | фундаментальний піднятий інваріант групи $\mathrm{Ad}^*_G$ |
| $G^\sim$, $G^\sim(\mathcal{L})$ | група еквівалентності класу $\mathcal{L}$ |
| $\mathfrak{g}^\sim$, $\mathfrak{g}^\sim(\mathcal{L})$ | алгебра Лі групи еквівалентності класу $\mathcal{L}$ |
| $\mathfrak{g}^\cap$ | алгебра Лі ядра основних груп рівнянь з деякого класу |
| $\mathfrak{g}^{\max}$, $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}$ | максимальна алгебра ліївської інваріантності диференціального рівняння $\mathcal{E}$ |
| $D_i$, $D_{x_i}$ | оператор повного диференціювання за змінною $x_i$ |
| $\mathrm{J}^r = \mathrm{J}^r(x\vert u)$ | простір струменів порядку $r$ з незалежними змінними $x$ і залежними змінними $u$ |
| $\mathcal{E}$, $\mathcal{L}$ | диференціальне рівняння, система або клас диференціальних рівнянь |
| $\mathcal{L}_{(k)}$ | многовид визначений системою $\mathcal{L}$ у просторі $\mathrm{J}^k$ |
| $Q$ | векторне поле або модуль векторних полів |
| $Q_{(r)}$ | $r$-те продовження векторного поля $Q$ |
| $\mathrm{sco}_L\, Q$ | копорядок сингулярності модуля $Q$ для диференціальної функції $L$ |
| $\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q$ | копорядок слабкої сингулярності модуля $Q$ для рівняння $\mathcal{L}$ |

Якщо не оговорено інше, за індексами, що повторюються, йде підсумовування. $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $\partial_{u^a} = \partial/\partial u^a$.

# Вступ

**Актуальність теми.** Одне з можливих пояснень “незбагненної ефективності математики у природничих науках” полягає в тому, що одні й ті самі математичні моделі можуть успішно описувати досить широке коло явищ, інколи зовсім різної природи. Саме такі моделі є найцікавішими об’єктами математичних досліджень. Характерною рисою, що виокремлює їх серед нескінченної множини потенційних моделей, є наявність широких симетрій, тобто інваріантність відносно широких груп перетворень. Симетрії відіграють визначну роль у формулюванні та дослідженні сучасних моделей математичної фізики. Галузь математики на стику загальної теорії симетрій, теорії груп і алгебр Лі, математичної фізики і теорії диференціальних рівнянь називають груповим аналізом диференціальних рівнянь.

Підвищений інтерес до групового аналізу пов’язаний з його дієвістю у застосуваннях до проблем теоретичної та математичної фізики, математичної біології, метеорології тощо. Зокрема, він надає ефективні інструменти для побудови точних та наближених розв’язків складних нелінійних моделей. Дослідження щодо симетрій диференціальних рівнянь та суміжних проблем активно виконують у провідних наукових центрах світу, таких як Центр математичних досліджень Монреальського університету (м. Монреаль, Канада), Міннесотський університет (м. Міннеаполіс, США), Інститут гідродинаміки ім. М.А. Лаврентьєва Сибірського відділення РАН (м. Новосибірськ, Росія) та багатьох інших. Значну увагу зосереджено на розширенні різноманіття розглядуваних симетрій, які зараз включають точкові, контактні, узагальнені, неперервні, дискретні, умовні, потенціальні, приховані, наближені симетрії, супер- та парасуперсиметрії, перетворення Беклунда тощо. Розгляд складніших багатовимірних моделей і постановка нових типів задач призводить до потреби розробки нових, потужніших методів групового аналізу, що в свою чергу вимагає розвитку теорії. При цьому низка його класичних проблем залишається нерозв'язаними. Українська школа групового аналізу диференціальних рівнянь займає провідні позиції з досліджень у цій галузі. Зокрема, у роботах В.І. Фущича, А.Г. Нікітіна, М.І. Сєрова, Р.М. Цифри, Р.З. Жданова, В.І. Лагна, Р.О. Поповича та їхніх учнів отримано низку вагомих результатів щодо умовної інваріантності диференціальних рівнянь, їх групової класифікації та класифікації законів збереження, диференціальних інваріантів тощо.

Зв'язок теорії груп і алгебр Лі з груповим аналізом диференціальних рівнянь інтенсивно поглиблюється через розвиток алгебраїчних методів у груповому аналізі. І навпаки, задачі групового аналізу стимулюють розвиток нових методів у різних областях теорії груп і алгебр Лі, включаючи пов'язані з інваріантами, узагальненими операторами Казіміра, реалізаціями та контракціями алгебр Лі. Зокрема, класифікація реалізацій алгебр Лі векторними полями є основним кроком у процедурі групової класифікації диференціальних рівнянь алгебраїчним методом. Узагальнені оператори Казіміра напівпростих і неоднорідних алгебр Лі, а також низькорозмірних та фізично важливих алгебр Лі фіксованих розмірностей добре відомі, але для розв'язних алгебр Лі настільки повних результатів немає. Окрім того, традиційно для побудови узагальнених операторів Казіміра розв'язних алгебр використовували інфінітезимальний метод, що призводило до необхідності інтегрування надзвичайно громіздких перевизначених систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку. У першому розділі дисертації запропоновано набагато ефективніший алгебраїчний метод обчислення таких операторів. Переваги методу продемонстровано на дійсних низькорозмірних алгебрах Лі та вперше вичерпно описано узагальнені оператори Казіміра для низки серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими нільрадикалами.

Так званий некласичний метод знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними запропоновано Дж. Блуменом і Дж. Коулом. Згодом цей підхід у різних термінах (метод некласичної, умовної або $Q$-умовної симетрії, прямий метод, метод редукції та ін.) розвинуто у роботах І.М. Цифри, В.І. Фущича, М.І. Сєрова, П. Вінтерніца, П. Кларксона, Е. Менсфілд, Є.М. Воробйова, П. Олвера, Р.З. Жданова, В.І. Лагна, Р.О. Поповича та інших. Він дозволяє отримати точні розв'язки диференціальних рівнянь з частинними похідними, які неможливо побудувати в рамках методу Лі. Водночас задача відшукання некласичних симетрій деякого диференціального рівняння й, тим більше, їх класифікації в класах диференціальних рівнянь технічно та теоретично є значно складнішою, ніж аналогічна задача для ліївських симетрій. Це пояснює, чому існує мало прикладів вичерпного опису таких симетрій і не було отримано глибоких теоретичних результатів щодо них. На деякі базові питання теорії некласичних симетрій лише нещодавно знайдено відповіді, але більшість із них залишається відкритими. Тому в дисертації значну увагу приділено перебудові, впорядкуванню та подальшому розвитку цієї теорії, починаючи зі строгого означення модулів редукції диференціальних рівнянь як її фундаменту. На основі нового поняття сингулярних модулів редукції диференціальних рівнянь, зокрема, удосконалено процедуру пошуку некласичних симетрій та узагальнено всі раніше відомі “no-go” результати щодо них.

Значну частину задач групового аналізу диференціальних рівнянь складають класифікації — з точністю до певної еквівалентності — деяких об'єктів, пов'язаних з диференціальними рівняннями (як то ліївських симетрій, модулів редукції, законів збереження чи потенціальних симетрій). Водночас класичні методи групового аналізу вже вичерпали свій потенціал; їх застосування у прикладних багатовимірних задачах призводить до занадто громіздких обчислень. Запропоновані останнім часом підходи, включаючи різноманітні алгебраїчні методи, дозволили подолати цей бар'єр. Завдяки ним вдалося розв'язати класифікаційні задачі раніше недосяжної складності, спростити обчислення, уточнити та виправити недоліки або навіть помилки в існуючих класифікаціях, виконаних на основі класичних технік. Саме за допомогою сучасних підходів у дисертації розв'язано класифікаційні задачі для класів як звичайних диференціальних рівнянь, так і рівнянь з частинними похідними.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертацію виконано у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України в рамках тем "Аналітичні та симетрійні методи дослідження диференціальних моделей математичної фізики" (номер держреєстрації 0198U001993), "Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки" (номер держреєстрації 0101U000098), "Симетрія та інтегровність нелінійних моделей" (номер держреєстрації 0106U000436), "Симетрія, суперсиметрія та інтегровність диференціальних рівнянь" (номер держреєстрації 0110U008615), "Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність рівнянь математичної фізики" (номер держреєстрації 0116U003059).

**Мета і завдання дослідження.** *Метою* дисертаційної роботи є розробка нових методів та алгоритмів групового аналізу диференціальних рівнянь, а також дослідження деяких проблем із суміжних областей теорії алгебр Лі. Основну увагу в дисертації зосереджено на задачах, пов'язаних із узагальненими операторами Казіміра та реалізаціями алгебр Лі, ліївськими симетріями та модулями редукції диференціальних рівнянь.

*Об'єктом дослідження* є низькорозмірні алгебри Лі, серії розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, загальні класи диференціальних рівнянь, еволюційні рівняння та їх спеціальні класи, квазілінійні диференціальні рівняння другого порядку, звичайні диференціальні рівняння та системи таких рівнянь.

*Предметом дослідження* є узагальнені оператори Казіміра та реалізації алгебр Лі векторними полями, сингулярні модулі диференціальних функцій та диференціальних рівнянь, диференціальні інваріанти, групи та групоїди еквівалентності класів диференціальних рівнянь, а також ліївські симетрії, модулі редукції, закони збереження та точні розв'язки диференціальних рівнянь.

*Методи дослідження.* Оригінальний алгебраїчний метод обчислення узагальнених операторів Казіміра на основі картанівського методу рухомих реперів, класичний інфінітезимальний метод Лі–Овсяннікова, модифікація методу некласичних симетрій з використанням поняття сингулярних модулів диференціальних рівнянь, різноманітні версії алгебраїчного методу групової класифікації диференціальних рівнянь, прямий метод обчислення перетворень еквівалентності.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Запропоновано алгебраїчний метод обчислення узагальнених операторів Казіміра алгебр Лі, що використовує картанівський метод рухомих реперів у версії Фелса–Олвера. З метою тестування методу та демонстрації його переваг заново обчислено інваріанти дійсних низькорозмірних алгебр Лі.

2. Уперше побудовано базиси узагальнених операторів Казіміра серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, зокрема майже абелевих алгебр Лі, розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких є ниткоподібними майже абелевими алгебрами, нільпотентних алгебр строго верхньотрикутних матриць та розв'язних алгебр Лі з трикутними нільрадикалами й діагональними нільнезалежними елементами.

3. Введено строге означення модулів редукції диференціальних рівнянь. На його основі переглянуто та наново побудовано теорію "не-

класичних симетрій” диференціальних рівнянь. Запропоновано поняття сингулярних модулів редукції диференціальних рівнянь та досліджено властивості таких модулів.

4. Детально вивчено сингулярні модулі редукції еволюційних рівнянь і квазілінійних рівнянь другого порядку, а також редукції диференціальних рівнянь до алгебраїчних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, що впорядкувало й узагальнило всі раніше відомі “no-go” результати щодо “некласичних симетрій” диференціальних рівнянь.

5. Узагальнено теорему Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень, а саме доведено, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку такої групи можна побудувати за допомогою однієї квадратури та диференціювання. Проаналізовано зв’язок між диференціальними інваріантами першого порядку та інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті.

6. Прокласифіковано ліївські симетрії систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з комутуючими сталими матрицями коефіцієнтів. Отримано точні нижні та верхні оцінки розмірностей максимальних алгебр ліївської інваріантності цих систем.

7. Досліджено групоїди еквівалентності класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку та його підкласів, пов’язаних з раціональною формою, формою Лагера–Форсайта, першою та другою формами Арнольда. Це дозволило провести повну групову класифікацію таких рівнянь алгебраїчним методом трьома різними способами.

8. Проведено повну групову класифікацію нелінійних галілей-інваріантних узагальнень рівнянь Бюргерса й Кортевега–де Фріза довільного порядку.

9. Доведено теорему про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння з частинними похідними. Досліджено умовні та потенціальні симетрії лінійного рівняння стрижня.
10. Доведено, що кожен найпростіший потенціальний закон збереження будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальним законом збереження цього рівняння. Запропоновано ефективний критерій перевірки, коли квадратичний закон збереження найпростішої лінійної потенціальної системи є чисто потенціальним законом збереження відповідного (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку.
11. Описано нелінійні рівняння типу Шрьодінгера, які сумісні з принципом відносності Галілея та розв'язки яких задовольняють рівняння неперервності.

**Практичне значення одержаних результатів.** Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані результати та розвинуті методи можна використати у подальших дослідженнях нелінійних диференціальних рівнянь, алгебр Лі, а також моделей сучасної математичної та теоретичної фізики.

**Особистий внесок здобувача.** Усі результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем самостійно. У роботах, які опубліковано разом з іншими авторами, розподіл особистих внесків такий.

У циклі статей [79–85] щодо інваріантів алгебр Лі дисертанту належать загальний план дослідження, розробка основного варіанту методу, що базується на методі рухомих реперів, та виконання основного об'єму обчислень, особливо при побудові інваріантів алгебр Лі низької розмірності, Р.О. Поповичу — модифікація алгоритму з залученням процедури нормалізації, спеціальна модифікація алгоритму для розв'язних алгебр Лі з нільрадикалом ізоморфним алгебрі строго трикутних матриць. І. Патера брав участь у обговоренні результатів.

У статті [216] М.О. Нестеренко належить побудова реалізацій розглянутих алгебр, дисертанту — визначення плану дослідження та перевірка обрахунків. У роботі [247] Р.О. Поповичу належать загальний план дослідження, вдосконалення техніки класифікації реалізацій на основі поняття мегаідеалу та класифікація реалізацій простих алгебр Лі, дисертанту — перевірка класифікації алгебр Лі, порівняння одержаних результатів з результатами інших авторів, М.О. Нестеренко виконала класифікацію реалізацій алгебр Лі в просторах з чотирма змінними, а М.В. Лутфуллін — класифікацію реалізацій розв'язних алгебр у просторах з довільною скінченною кількістю змінних. У препринті [249], який є суттєво розширеним варіантом статті [247], дисертанту додатково належать впорядкування та обчислення алгебраїчних та інваріантних характеристик низькорозмірних алгебр Лі, решту результатів розподілено як у [247].

У циклі статей [5, 6, 28, 30, 246] про диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі та їхній зв'язок із системами рівнянь типу Ріккаті, внесок Р.О. Поповича і дисертанта у постановку задач рівноцінний, усі основі результати отримано дисертантом самостійно.

У роботах [93, 95–97] дисертанту та Р.О. Поповичу належать загальний план дослідження, Н.М. Шаповал — перевірка доведень та обчислень у прикладах, дисертанту — огляд попередніх результатів, розробка нових методів та доведення всіх основних результатів.

У статтях [7, 8, 29, 77, 88, 89] всі основні результати та їх доведення отримано дисертантом самостійно, Р.О. Поповичу належить загальний план дослідження, у роботі [77] М. Кунцінгер брав участь у обговоренні результатів та перевірці доведень.

У роботі [4] дисертанту належить доведення основного результату, В.О. Поповичу — перевірка результатів роботи.

У статтях [76, 136] В.І. Фущичу належать постановки задач, всі результати та їх доведення отримано дисертантом самостійно.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідалися на Міжнародних конференціях “Symmetry in nonlinear mathematical physics” (Київ, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009), Українському математичному конгресі (Київ, 2001), Міжнародних симпозіумах “Group analysis of differential equations and integrable systems” (Протарас, Кіпр, 2008, 2012; Ларнака, Кіпр, 2014, 2016), на Міжнародних конференціях “Classical and quantum integrable systems” (Дубна, Росія, 2004, 2007), на Міжнародних семінарах “Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики” (Київ, 2011, 2013, 2015, 2016).

Результати дисертаційної роботи неодноразово доповідалися й обговорювалися на науковому семінарі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України, професор А.Г. Нікітін, 1996–2017). Також результати дисертації були предметом доповідей на Вченій раді Інституту математики НАН України (2013), Київському семінарі з функціонального аналізу (керівники семінару — академік НАН України, професор Ю.М. Березанський, член-кореспондент НАН України А.Н. Кочубей, академік НАН України, професор Ю.С. Самойленко, 2017), науковому семінарі кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (керівники семінару — професор Т.А. Мельник, професор В.Г. Самойленко, 2017); наукових семінарах Центру математичних досліджень Монреальського університету (Канада, 2005–2007), науковому семінарі математичного факультету Віденського університету (Австрія, 2010), науковому семінарі математичного факультету університету м. Білосток (Польща, 2004), науковому семінарі математичного факультету технологічного університету м. Лулеа (Швеція, 2000).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковано в роботах [1–46] (див. список публікацій на с. 8–14), 9 з них опубліковано без співавторів, роботи [1–20] відповідають вимогам до публікації результатів дисертаційних робіт у фахових виданнях із фізико-математичних наук, [21–32] — публікації у працях конференцій або збірниках та препринти, [33–46] — тези конференцій, [1–20, 22–24, 26, 28–32] надруковано у виданнях, що включені до міжнародних наукометричних баз (Web of Science, Scopus, MathSciNet та Zentralblatt MATH).

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація складається зі змісту, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 294 найменування. Повний обсяг дисертації становить 338 сторінок.

**Короткий зміст основної частини роботи.** Основну частину роботи складають 4 розділи. На початку кожного розділу подано стислий огляд літератури та опис основних результатів, що містяться в ньому.

**Перший** розділ дисертації присвячено теорії узагальнених операторів Казіміра алгебр Лі (інша назва — інваріанти алгебр Лі). На початку розділу проведено детальний огляд літератури з цього та суміжних питань, зокрема щодо класифікації алгебр Лі та сучасного стану проблеми. У § 1.1 проаналізовано поняття та об'єкти, необхідні для подальшого розгляду, наведено стандартний інфінітезимальний підхід для побудови узагальнених операторів Казіміра. У § 1.2 на основі картанівського методу рухомих реперів у версії Фелса–Олвера сформульовано та обґрунтовано оригінальний метод знаходження фундаментальних базисів інваріантів алгебр Лі з використанням процедури нормалізації. Ілюстративні приклади, що демонструють переваги запропонованого методу, наведено у § 1.3. З цією ж метою у § 1.4 систематично заново обчислено інваріанти алгебр Лі розмірностей не вище шести, отримані раніше іншими авторами за допомогою інфінітезимального підходу. Виправлено ряд неточностей та помилок попередніх класифікацій. Окрім того, у багатьох випадках відповідні базиси вдалося записати у компактнішій формі. У наступних параграфах цього розділу отримано вичерпні описи базисів інваріантів серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, зокрема для майже абелевих алгебр Лі (§ 1.5), розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких є ниткоподібними майже абелевими алгебрами (§ 1.6), для нільпотентної алгебри строго верхньотрикутних матриць (§ 1.7) та серій розв'язних алгебр Лі з трикутними нільрадикалами й діагональними нільнезалежними елементами (§ 1.8). До цього в літературі існували лише часткові результати або гіпотези щодо інваріантів таких алгебр, і тільки в рамках запропонованого алгебраїчного підходу вдалося повністю розв'язати задачу побудови їхніх інваріантів.

У **другому** розділі після детального огляду літератури й аналізу основних понять і тверджень щодо некласичних симетрій у § 2.1 введено строге означення модулів редукції диференціальних рівнянь, що дало змогу переглянути та наново побудувати теорію некласичних симетрій диференціальних рівнянь. У §§ 2.2 і 2.3 запропоновано поняття сингулярних і метасингулярних модулів векторних полів для диференціальних функцій. Доведено, що на відміну від двовимірних метасингулярних модулів будь-який метасингулярний модуль розмірності вище двох є інволютивним. Основним результатом цих параграфів є теорема, яка з точністю до точкових перетворень описує вигляд диференціальних функцій, що допускають метасингулярні модулі. Аналогічні поняття сильно та слабо сингулярних і метасингулярних модулів диференціальних рівнянь введено у § 2.4. Доведено теорему, яка характеризує диференціальні рівняння, що допускають слабо метасингулярні модулі. З неї випливає, що замість таких модулів достатньо досліджувати метасингулярні модулі відповідних диференціальних функцій. Зв'язок між копорядком слабкої сингулярності операторів редукції, суттєвим порядком відповідних редукованих рівнянь і — у випадку редукції до звичайних диференціальних рівнянь — кількістю параметрів у відповідних сім'ях інваріантних розв'язків отримано в § 2.5. Показано, що зв'язок між редукцією диференціального рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою інволютивного модуля $Q$ і формальною сумісністю об'єднаної системи, утвореної з рівняння $\mathcal{L}$ і характеристичної системи, асоційованої з $Q$, суттєво залежить від копорядку слабкої сингулярності модуля $Q$ для диференціального рівняння $\mathcal{L}$. З використанням сингулярних модулів редукції у § 2.6 розглянуто особливий випадок модулів редукції розмірності, що співпадає з кількістю незалежних змінних. Такі модулі відповідають редукції до алгебраїчних рівнянь. У § 2.7 існуючі "no-go" результати розширено на модулі, що редукують еволюційні рівняння до звичайних диференціальних рівнянь з єдиною незалежною часовою змінною. Це мотивує розгляд модулів редукції з копорядком сингулярності 1 у § 2.8. За припущення, що диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ допускає $n$-вимірний метасингулярний модуль $M$ з копорядком сингулярності 1, де $n$ — кількість незалежних змінних у рівнянні $\mathcal{L}$, доведено "no-go" твердження, що встановлюють зв'язок між $(n{-}1)$-вимірними модулями редукції рівняння $\mathcal{L}$, що містяться в $M$, і розв'язками рівняння $\mathcal{L}$. Зокрема показано, що визначальні рівняння для таких модулів можна звести до початкового рівняння за допомогою композиції диференціальних підстановок і перетворення годографа. Заключний § 2.9 присвячено сингулярним модулям квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, причому розмірність модулів вважається меншою за кількість незалежних змінних. Показано, що еліптичні рівняння не допускають сингулярних модулів. Будь-яке еволюційне рівняння другого порядку з невиродженою матрицею коефіцієнтів при других похідних допускає лише сингулярні модулі, розглянуті в § 2.7 для загальних еволюційних рівнянь. Узагальнені хвильові рівняння є більш складними з цієї точки зору. Зокрема, вони можуть допускати сім'ї сингулярних модулів, які не мають інтерпретації в термінах метасингулярних модулів.

**Третій** розділ дисертації присвячено задачам, пов'язаним з ліївськими симетріями звичайних диференціальних рівнянь. Зокрема, у § 3.1 досліджено диференціальні інваріанти однопараметричних груп локальних перетворень у просторі $n$ незалежних та $m$ залежних змінних. Узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень проведено не тільки за кількістю залежних і незалежних змінних, а й безпосереднім посиленням її твердження. А саме, доведено, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку такої групи можна побудувати за допомогою однієї квадратури і диференціювання. Детально проаналізовано зв'язок між диференціальними інваріантами першого порядку й інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті.

У § 3.2 виконано вичерпний аналіз ліївських симетрій систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з комутуючими сталими матрицями коефіцієнтів над комплексним і дійсним полями. На основі оригінального алгебраїчного підходу суттєво розширено й узагальнено результати інших авторів. Зокрема, описано в явному вигляді максимальні алгебри ліївської інваріантності таких систем без обмежень щодо кількості рівнянь і вигляду матриць коефіцієнтів, а також отримано точні нижні та верхні оцінки щодо розмірностей цих алгебр.

У § 3.3 вичерпно описано групоїд еквівалентності класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь $r$-го порядку, а також групоїди еквівалентності його підкласів, пов'язаних з раціональною формою, формою Лагера–Форсайта, першою та другою формами Арнольда. Підкласи однорідних рівнянь, асоційовані з загального формою, раціональною формою та формою Лагера–Форсайта, при $r \geqslant 3$ є однорідно напівнормалізованими відносно груп точкових симетрій, пов'язаних з лінійною суперпозицією розв'язків. Це дозволило прокласифікувати ліївські симетрії лінійних ЗДР з використанням алгебраїчного методу трьома різними способами. Нормалізаційні властивості ненормалізованих класів таких рівнянь покращено через їх репараметризацію. У результаті вперше побудовано приклади розширених узагальнених груп еквівалентності.

У § 3.4 запропоновано симетрійний підхід до опису нових інтегровних випадків рівняння Абеля, який використовує зв'язок між рівняннями Абеля та звичайними диференціальними рівняннями другого порядку, а також перетворення еквівалентності у класах таких рівнянь.

У § 3.5 проведено детальний порівняний аналіз результатів щодо реалізацій низькорозмірних алгебр Лі векторними полями з результатами [283].

Різноманітні задачі симетрійного аналізу диференціальних рівнянь з частинними похідними, що виникають у математичній фізиці, розглянуто у **четвертому** розділі дисертації. Зокрема, повну групову класифікацію нелінійних галілей-інваріантних узагальнень рівнянь Бюргерса і Кортевега–де Фріза довільного порядку проведено в § 4.1.

Основним результатом у § 4.2 є теорема про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння з частинними похідними. Як приклад, що ілюструє цю теорему, в § 4.3 досліджено умовні симетрії (сингулярні та регулярні оператори редукції) лінійного рівняння стрижня. Додатково вивчено зв'язок між цим рівнянням і (1+1)-вимірним вільним рівнянням Шрьодінгера, що дозволило побудувати потенціальні симетрії рівняння стрижня.

Найпростіші потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь, пов'язані з введенням одного потенціалу за лінійними законами збереження, вивчено у § 4.4, використовуючи дуальне перетворення Дарбу. Доведено, що кожен найпростіший потенціальний закон збереження будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальним законом збереження цього рівняння. Це твердження також справедливе для лінійних найпростіших потенціальних законів збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь непарного порядку, пов'язаних з лінійними потенціальними системами. Запропоновано ефективний критерій перевірки, коли квадратичний закон збереження найпростішої лінійної потенціальної системи є чисто потенціальним законом збереження відповідного (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку.

У § 4.5 описано класи нелінійних рівнянь Шрьодінгера, які інваріантні відносно суттєвої частини максимальної алгебри ліївської симетрії вільного рівняння Шрьодінгера і розв'язки яких задовольняють рівняння неперервності.

Наприкінці дисертації наведено основні результати та висновки.

**Подяки.** Автор висловлює щиру вдячність науковому консультанту доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу і завідувачу відділу математичної фізики, члену-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Анатолію Глібовичу Нікітіну за постійну увагу і допомогу в роботі, співавторам та співробітникам відділу математичної фізики за плідну довголітню співпрацю і підтримку.

# РОЗДІЛ 1

# Узагальнені оператори Казіміра

Інваріанти алгебр Лі є їх важливими характеристик. Вони мають численні застосування в різноманітних галузях математики та фізики, в яких використовують алгебри Лі (теорія представлень, інтегровність гамільтонових диференціальних рівнянь, квантові числа тощо). Зокрема, поліноміальні інваріанти алгебри Лі вичерпують її множину операторів Казіміра, тобто центр її універсальної обгортуючої алгебри. З цієї причини загальні інваріанти алгебр Лі, включаючи неполіноміальні, також називають узагальненими операторами Казіміра, при цьому звичайні оператори Казіміра є "специфічними" узагальненими операторами Казіміра. Термін "оператор Казіміра" виник у фізичній літературі у зв'язку з роботою [115]. Інтерес до пошуку всіх незалежних інваріантів дійсних алгебр Лі невисоких розмірності відновився кілька десятиліть тому [37, 56, 232, 235, 256, 291].

Структура інваріантів суттєво залежить від структури відповідної алгебри. Класифікація всіх (скінченновимірних) алгебр Лі є дуже складною проблемою, фактично нерозв'язною для довільних розмірностей алгебр. На сьогодні в літературі прокласифіковано лише всі алгебри Лі до розмірності шість включно. Теорема Леві–Мальцева зводить задачу класифікації алгебр Лі до класифікації розв'язних алгебр Лі, але це проблема є *дикою*, оскільки включає як підзадачу проблему зведення пар матриць до канонічного вигляду [172]. Тому розробка завершеної теорії узагальнених операторів Казіміра в загальному випадку виглядає неможливою. Якщо відома класифікація певного класу алгебр Лі, то інваріанти таких алгебр можна описати вичерпно. Ця задача розв'язана для напівпростих і низькорозмірних алгебр Лі, а також для фізично важливих алгебр Лі фіксованих розмірностей. Є багато статей щодо властивостей таких інваріантів, оцінки їх кількості, методів обчислення та застосувань інваріантів різних класів алгебри Лі або навіть конкретних алгебр Лі, які виникають у фізичних задачах. Зокрема, функціональні базиси інваріантів побудовано для три-, чотири-, п'ятивимірних та нільпотентних шестивимірних дійсних алгебр Лі в [232]. Цю проблему розглянуто в [210] для шестивимірних алгебр Лі з чотиривимірними нільрадикалами, а в [106] — для шестивимірних алгебр Лі з п'ятивимірними нільрадикалами. У [233] прокласифіковано підгрупи групи Пуанкаре та знайдено їхні інваріанти. У [183] обчислено єдиний (з точністю до функціональної незалежності) оператор Казіміра унімодулярної афінної групи $\mathrm{SA}(4,\mathbb{R})$, що з'являється разом із подвійною накриваючою групою $\overline{\mathrm{SA}}(4,\mathbb{R})$ як група симетрії спектру частинок у різних теоріях, пов'язаних з гравітацією (метрико-афінна теорія гравітації, частинки в криволінійному просторі–часі, КХД-індуковані гравітаційні ефекти на адрони). Цей інваріант застосовано до явної побудови унітарних незвідних представлень групи $\overline{\mathrm{SA}}(4,\mathbb{R})$.

Важливим для теорії узагальнених операторів Казіміра та її застосувань є частинний випадок, коли базис утворено лише з операторів Казіміра, тобто з поліноміальних інваріантів. Найбільш відомими є результати щодо операторів Казіміра степеня 2 для напівпростих алгебр Лі. Доведено, що центр універсальної обгортуючої алгебри $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ для алгебри Лі $\mathfrak{g}$ ізоморфний простору поліномів дуального до $\mathfrak{g}$ простору, інваріантних відносно коприєднаної дії відповідної групи Лі [151]. Показано, що такі базиси існують для нільпотентних і для досконалих алгебр Лі [37, 38]. (Алгебру Лі $\mathfrak{g}$ називають досконалою, якщо її похідна дорівнює $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}' := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Зазначимо, що таку саму назву використовують і для іншого класу алгебр Лі [167].) Властивості операторів Казіміра деяких досконалих алгебр Лі та оцінки щодо їх кількості досліджено в [101–103, 212].

У літературі також є результати щодо інваріантів розв'язних алгебр Лі з різними додатковими структурними обмеженнями, зокрема, розв'язних алгебр Лі з нільрадикалами, ізоморфними алгебрі Гейзенберга [258], з абелевими [211, 214] та майже абелевими [268] нільрадикалами, розв'язних трикутних алгебр [273], деяких жорстких розв'язних алгебр [99, 100], розв'язних алгебр Лі з природно градуйованим нільрадикалом максимального нільіндексу, що містить підалгебру Гейзенберга корозмірності 1 [45].

Стандартний метод знаходження узагальнених операторів Казіміра базується на інтегруванні перевизначеної системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку і призводить до громіздких обчислень, навіть коли розмірність алгебри Лі достатньо низька. Альтернативні методи використовують матричні представлення алгебр Лі, але вони не набагато простіші та їх можна використати лише для обмежених класів алгебр. Так алгебраїчний підхід було використано для побудови інваріантів деяких неоднорідних алгебр Лі [169, 170]; такі інваріанти в рамках інфінітезимального підходу розглянуто в роботі [117]. У [238] також побудовано оператори Казіміра низки неоднорідних класичних алгебр за допомогою метода, що базується на певній структурі локальних тривіальних розшарувань загальних орбіт, породжених коприєднаним представленням напівпрямого добутку. Застосовано й інші емпіричні техніки, наприклад, матричний метод для специфічних алгебр Лі [105, 107, 108] або техніки з використанням комутаційних властивостей розглядуваних алгебр Лі [53].

Результати цього розділу опубліковано в роботах [73, 74, 79–86], де розроблено алгебраїчний алгоритм обчислення інваріантів (узагальнених операторів Казіміра) алгебр Лі. Запропонований підхід простий, він використовує метод Картана рухомих реперів [113, 114] у версії Фелса–Олвера [131, 132]. Детальний огляд щодо сучасного стану і застосувань методу рухомих реперів, а також посилання на додаткову літературу можна знайти у роботах [226, 227]. Зауважимо, що саме цей підхід для обчислення узагальнених операторів Казіміра серій розв'язних алгебр Лі використано іншими авторами у недавніх роботах з цієї тематики [109, 267, 269, 270].

Структура цього розділу така.

У § 1.1 зібрано та проаналізовано поняття та результати, необхідні для подальшого розгляду, та наведено стандартний інфінітезимальний підхід до побудови узагальнених операторів Казіміра. У § 1.2 на основі картанівського методу рухомих реперів за версією Фелса–Олвера сформульовано та обґрунтовано оригінальний алгоритм знаходження фундаментального базису інваріантів алгебр Лі з використанням процедури нормалізації.

Детальні ілюстративні приклади, що демонструють переваги запропонованого методу, наведено у § 1.3. З цією ж метою у § 1.4 заново обчислено інваріанти алгебр Лі розмірностей не вище шести. Хоча раніше ці інваріанти побудовано іншими авторами за допомогою інфінітезимального підходу, наведені в літератури списки алгебр та їх інваріантів містили ряд неточностей та помилок, які виправлено. Крім того, у багатьох випадках відповідні базиси інваріантів вдалося представити у компактнішій формі.

У наступних параграфах цього розділу отримано вичерпні описи базисів інваріантів серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, зокрема для майже абелевих алгебр Лі (§ 1.5), алгебр Лі, нільрадикали яких є ниткоподібними майже абелевими алгебрами (§ 1.6), для нільпотентних алгебр строго верхньотрикутних матриць (§ 1.7) та розв'язних алгебр Лі з трикутними нільрадикалами та діагональними нільнезалежними елементами (§ 1.8). До цього в літературі існували лише часткові результати або гіпотези щодо інваріантів таких алгебр, і лише в рамках запропонованого алгебраїчного підходу їх вдалося повністю описати.

## 1.1. Попередні результати

Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g}$ розмірності $\dim\mathfrak{g} = n < \infty$ над комплексним або дійсним полем $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ або $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) і відповідну зв'язну групу Лі $G$. Нехай $\mathfrak{g}^*$ — дуальний простір для векторного простору $\mathfrak{g}$. Відображення $\mathrm{Ad}^*\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$, визначене для будь-якого $g \in G$ співвідношенням

$$\langle \mathrm{Ad}^*_g x, u\rangle = \langle x, \mathrm{Ad}_{g^{-1}} u\rangle \quad \text{для всіх } x \in \mathfrak{g}^* \text{ та } u \in \mathfrak{g},$$

називають *коприєднаним представленням* групи Лі $G$. Тут $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ — звичайне приєднане представлення для $G$ на $\mathfrak{g}$, причому образ $\mathrm{Ad}_G$ групи $G$ при $\mathrm{Ad}$ є групою внутрішніх автоморфізмів $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Образ групи $G$ при $\mathrm{Ad}^*$ є підгрупою групи $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$. Позначаємо його як $\mathrm{Ad}^*_G$.

Максимальну розмірність орбіт групи $\mathrm{Ad}^*_G$ називають *рангом коприєднаного представлення* групи $G$ (і алгебри $\mathfrak{g}$) і позначаємо як $\mathrm{rank}\,\mathrm{Ad}^*_G$. Це базисно незалежна характеристика алгебри $\mathfrak{g}$. Орбіти такої розмірності називають *регулярними*.

Функцію $F \in C^\infty(\Omega)$, де $\Omega$ — область у $\mathfrak{g}^*$, називають (глобальним в $\Omega$) *інваріантом* групи $\mathrm{Ad}^*_G$, якщо

$$F(\mathrm{Ad}^*_g x) = F(x) \quad \text{для всіх } g \in G \text{ та } x \in \Omega \text{ таких, що } \mathrm{Ad}^*_g x \in \Omega.$$

Множину інваріантів групи $\mathrm{Ad}^*_G$ на $\Omega$ позначаємо як $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$ без явного зазначення області $\Omega$. Нехай нижче $\Omega$ — окіл точки з регулярної орбіти. Його завжди можна обрати таким чином, що на ньому група $\mathrm{Ad}^*_G$ діє регулярно. Тоді максимальна кількість $N_\mathfrak{g}$ функціонально незалежних інваріантів у $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$ співпадає з корозмірністю регулярних орбіт групи $\mathrm{Ad}^*_G$, тобто

$$N_\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{g} - \mathrm{rank}\,\mathrm{Ad}^*_G.$$

Тут через $\mathrm{rank}\,\mathrm{Ad}^*_G$ позначено розмірність регулярних орбіт групи $\mathrm{Ad}^*_G$, яку називають *рангом коприєднаного представлення* групи $G$ (і алгебри $\mathfrak{g}$). Інтерпретацію для $N_{\mathfrak{g}}$ у термінах диференціальних форм наведено в [104].

Для обчислення інваріантів у явному вигляді необхідно зафіксувати базис $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ алгебри $\mathfrak{g}$. Це призводить до фіксації дуального базису $\mathcal{E}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ у дуальному просторі $\mathfrak{g}^*$ і до ототожнення груп $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ та $\mathrm{Ad}_G^*$ з відповідними матричними групами. Базисні елементи $e_1, \ldots, e_n$ задовольняють комутаційні співвідношення $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, де $c_{ij}^k$ — компоненти тензора структурних сталих алгебри $\mathfrak{g}$ у базисі $\mathcal{E}$. Тут і далі індекси $i$, $j$, $k$ змінюються від 1 до $n$. За індексами, що повторюються, йде підсумовування. Нехай $x \to \check{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — координати в дуальному просторі $\mathfrak{g}^*$, що відповідають дуальному базису $\mathcal{E}^*$.

Добре відомо, що існує взаємно однозначна відповідність між елементами центра універсальної обгортуючої алгебри (тобто *операторами Казіміра*) алгебри $\mathfrak{g}$ і поліноміальними інваріантами групи $\mathrm{Ad}_G^*$ (щодо яких припускаємо глобальну визначеність на $\mathfrak{g}^*$); див., наприклад, [37]. Таку біекцію досягають, наприклад, за допомогою оператора Sym, який діє на одночлени за правилом

$$\mathrm{Sym}(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_r} e_{i_{\sigma_1}} \cdots e_{i_{\sigma_r}},$$

де $i_1, \ldots, i_r$ змінюються від 1 до $n$, $r \in \mathbb{N}$. Символом $\mathrm{S}_r$ позначено групу перестановок $r$ елементів. Процедуру симетризації можна також коректно визначити для раціональних інваріантів [37]. Якщо $\mathrm{Int}(\mathrm{Ad}_G^*)$ не має функціонального базису, утвореного лише раціональними інваріантами, то коректність процедури симетризації потребує додаткового дослідження для кожної фіксованої алгебри $\mathfrak{g}$, оскільки загальних результатів не існує. Після симетризації елементи з $\mathrm{Int}(\mathrm{Ad}_G^*)$ природно називати інваріантами або *узагальненими операторами Казіміра* алгебри $\mathfrak{g}$. Множину інваріантів алгебри $\mathfrak{g}$ позначаємо як $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$.

Функціонально незалежні інваріанти $F^l(x_1, \ldots, x_n)$, $l = 1, \ldots, N_{\mathfrak{g}}$, утворюють *функціональний базис* (*фундаментальний інваріант*) групи $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$, якщо будь-який елемент з $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$ можна (єдиним чином) представити як функцію цих інваріантів. Відповідну множину $\mathrm{Sym}\, F^l(e_1,\dots,e_n)$, $l=1,\dots,N_{\mathfrak g}$, називають базисом для $\mathrm{Inv}(\mathfrak g)$. Таким чином, задача полягає в тому, щоб знайти інваріанти для $\mathrm{Ad}^*_G$, а потім трансформувати їх у інваріанти алгебри $\mathfrak g$. Будь-який інваріант алгебри $\mathfrak g$ є функцією цих незалежних інваріантів.

У рамках стандартного інфінітезимального підходу інваріанти $F(x_1,\dots,x_n)$ групи $\mathrm{Ad}^*_G$ знаходять як розв'язки лінійної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку [37, 38, 56, 232, 236]

$$X_iF=0, \quad \text{тобто} \quad c^k_{ij}x_kF_{x_j}=0, \tag{1.1}$$

де $X_i=c^k_{ij}x_k\partial_{x_j}$ — інфінітезимальний генератор локальної однопараметричної групи $\{\mathrm{Ad}^*_{\exp(\varepsilon e_i)}\}$, що відповідає базисному елементу $e_i$, де параметр $\varepsilon$ пробігає деякий окіл нуля в $\mathbb R$. Відображення $e_i\to X_i$ визначає представлення алгебри Лі.

## 1.2. Алгоритм

Нагадаємо деякі факти картанівського методу рухомих реперів за версією Фелса–Олвера і адаптуємо їх у частинному випадку коприєднаної дії групи $G$ на $\mathfrak g^*$.

Нехай $\mathcal G=\mathrm{Ad}^*_G\times\mathfrak g^*$ — тривіальне ліве головне $\mathrm{Ad}^*_G$-розшарування над $\mathfrak g^*$. Правою регуляризацією $\widehat R$ коприєднаної дії групи $G$ на $\mathfrak g^*$ є діагональна дія $\mathrm{Ad}^*_G$ на $\mathcal G=\mathrm{Ad}^*_G\times\mathfrak g^*$, яку визначено відображенням

$$\widehat R_g(\mathrm{Ad}^*_h,x)=(\mathrm{Ad}^*_h\cdot\mathrm{Ad}^*_{g^{-1}},\mathrm{Ad}^*_gx), \quad g,h\in G, \quad x\in\mathfrak g^*.$$

Дія $\widehat R$ на розшаруванні $\mathcal G=\mathrm{Ad}^*_G\times\mathfrak g^*$ є вільною і регулярною. Назвемо її $\widehat R$ *піднятою коприєднаною дією* групи $G$. $\mathrm{Ad}^*_G$-еквіваріантна проекція $\pi_{\mathfrak g^*}\colon\mathcal G\to\mathfrak g^*$ проектує її назад на коприєднану дію на $\mathfrak g^*$. Будь-який *піднятий інваріант* групи $\mathrm{Ad}^*_G$ є (локально визначеною) функцією з $\mathcal{G}$ на деякий многовид, інваріантною відносно піднятої коприєднаної дії групи $G$. Функція $\mathcal{I}\colon \mathcal{G} \to \mathfrak{g}^*$, визначена співвідношенням $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathrm{Ad}^*_g, x) = \mathrm{Ad}^*_g x$, є *фундаментальним піднятим інваріантом* групи $\mathrm{Ad}^*_G$, тобто $\mathcal{I}$ — піднятий інваріант, і будь-який піднятий інваріант локально єдиним чином можна представити як функцію від $\mathcal{I}$. За допомогою довільної функції $F(x)$ на $\mathfrak{g}^*$ можна утворити піднятий інваріант $F \circ \mathcal{I}$ групи $\mathrm{Ad}^*_G$, замінивши $x$ на $\mathcal{I} = \mathrm{Ad}^*_g x$ у виразі для функції $F$. Звичайні інваріанти є частинними випадками піднятих інваріантів, які визначають будь-який інваріант як деяку їх композицію зі стандартною проекцією $\pi_{\mathfrak{g}^*}$. Таким чином, звичайні інваріанти є специфічними функціональними комбінаціями піднятих інваріантів, які виявляються незалежними від параметрів групи $\mathrm{Ad}^*_G$.

Нормалізаційна процедура Фелса–Олвера для групи $\mathrm{Ad}^*_G$ ґрунтується на такому твердженні.

**Твердження 1.1.** *Нехай $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n)$ — фундаментальний піднятий інваріант групи $\mathrm{Ad}^*_G$, для піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{j_1}$, …, $\mathcal{I}_{j_\rho}$ і деяких сталих $c_1$, …, $c_\rho$ система $\mathcal{I}_{j_1} = c_1$, …, $\mathcal{I}_{j_\rho} = c_\rho$ є розв'язною відносно групових параметрів $\theta_{k_1}$, …, $\theta_{k_\rho}$, а підстановка знайдених значень параметрів у решту піднятих інваріантів призводить до $m = n - \rho$ виразів $\hat{\mathcal{I}}_l$, $l = 1, \dots, m$, які залежать лише від $x$. Тоді $\rho = \operatorname{rank} \mathrm{Ad}^*_G$, $m = N_{\mathfrak{g}}$, а $\hat{\mathcal{I}}_1$, …, $\hat{\mathcal{I}}_m$ утворюють базис для $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$.*

*Алгебраїчний алгоритм* знаходження інваріантів алгебри Лі $\mathfrak{g}$ формують такі чотири кроки.

1. *Побудова генеруючої матриці $B(\theta)$ групи $\mathrm{Ad}^*_G$.* $B(\theta)$ — загальна матриця внутрішніх автоморфізмів алгебри Лі $\mathfrak{g}$ у заданому базисі $e_1$, …, $e_n$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ — повний набір параметрів (координат) групи $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$, і $r = \dim \mathrm{Ad}^*_G = \dim \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) = n - \dim \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$, де $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ — центр алгебри $\mathfrak{g}$.

2. *Представлення фундаментального піднятого інваріанта.* Фундаментальний піднятий інваріант $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n)$ групи $\mathrm{Ad}^*_G$ у вибраних

координатах $(\theta, \check{x})$ в $\mathrm{Ad}^*_G \times \mathfrak{g}^*$ має явний вигляд $\mathcal{I} = \check{x} \cdot B(\theta)$, тобто $(\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot B(\theta_1, \ldots, \theta_r)$.

3. *Виключення параметрів за допомогою процедури нормалізації.* Вибираємо максимально можливу кількість $\rho$ піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{j_1}$, ..., $\mathcal{I}_{j_\rho}$, сталі $c_1$, ..., $c_\rho$ та групові параметри $\theta_{k_1}$, ..., $\theta_{k_\rho}$ такі, що рівняння $\mathcal{I}_{j_1} = c_1$, ..., $\mathcal{I}_{j_\rho} = c_\rho$ є розв'язними відносно $\theta_{k_1}$, ..., $\theta_{k_\rho}$. Після підстановки знайдених значень параметрів $\theta_{k_1}, \ldots, \theta_{k_\rho}$ до незадіяних піднятих інваріантів отримаємо $N_\mathfrak{g} = n - \rho$ виразів $F^l(x_1, \ldots, x_n)$, які не залежать від $\theta$.

4. *Симетризація.* Функції $F^l(x_1, \ldots, x_n)$ обов'язково утворюють базис множини $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$. Їхні симетризації $\mathrm{Sym}\, F^l(e_1, \ldots, e_n)$ дають базис для множини $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$.

Приклади обчислення інваріантів для різних класів алгебр Лі показують, що версія алгебраїчного методу на основі твердження 1.1 є найбільш ефективною. Зокрема, цей алгоритм забезпечує знаходження кількості базисних інваріантів у процесі побудови цих інваріантів. Варто також зауважити, що з метою оптимізації та суттєвого спрощення обчислень можна використовувати різні типи координат для груп внутрішніх автоморфізмів (перші канонічні, другі канонічні чи спеціальні координати). У багатьох випадках можна також значно спростити і процедуру нормалізації (третій крок алгоритму) за рахунок вдалого вибору базису піднятих інваріантів та використання різних технік виключення параметрів (емпіричні методи, методи з додатковим комбінуванням піднятих інваріантів, з використанням плаваючої системи нормалізованих рівнянь тощо).

Підкреслимо, що в запропонованому підході для побудови інваріантів алгебри Лі $\mathfrak{g}$ замість стандартного інфінітезимального підходу, пов'язаного з розв'язанням системи диференціальних рівнянь першого порядку (1.1), використано алгебраїчний метод, в основі якого лежать побудова матриці $B(\theta)$ внутрішніх автоморфізмів і виключення параметрів $\theta$ з фундаментального піднятого інваріанта $\mathcal{I} = \check{x} \cdot B(\theta)$.

## 1.3. Ілюстративні приклади

Наведені далі приклади дають можливість продемонструвати переваги алгебраїчного підходу, зробити деякі важливі коментарі та порівняння з відомими результатами. У деяких випадках алгебри параметризовані неперервними параметрами, тобто фактично розглянуто серії алгебр, елементи яких є неізоморфними алгебрами Лі. Для кожної з алгебр вказано лише ненульові комутаційні співвідношення з урахуванням антисиметричності комутатора.

Зауважимо, що і спрощення вигляду інваріантів, і оптимізація обчислень часто залежать від вибору базису алгебри Лі. Принцип вибору прийнятного базису для розв'язної алгебри Лі полягає в явній побудові ланцюжка підалгебр $\mathfrak{g}_i$ строго зростаючої розмірності таких, що $\mathfrak{g}_i$ є ідеалом у $\mathfrak{g}_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. (Над комплексним полем такий базис завжди існує. Коли $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ситуація трохи складніша.) Базис $(e_1, \ldots, e_n)$, де $\mathfrak{g}_i = \langle e_1, \ldots, e_i \rangle$, називають канонічним для композиційної серії $K = (\mathfrak{g}_i, i = 1, \ldots, n)$, або коротко $K$-канонічним [18]. Базиси, канонічні відносно однієї й тієї самої композиційної серії підалгебр, пов'язані за допомогою лінійних перетворень із трикутними матрицями. Зокрема, для спрощення обчислень інваріантів, необхідно модифікувати базиси алгебр Лі з класифікації нільпотентних шестивимірних алгебр Лі з [17], а також із класифікації шестивимірних алгебр Лі з чотиривимірним нільрадикалом із [275] (див. § 1.4 нижче). Часто доводиться також використовувати додаткові критерії оптимальності вибору базисів розглядуваних алгебр Лі.

**Приклад 1.2.** Чотиривимірна розв'язна алгебра Лі $A^b_{4.8}$ [18,232] має такі ненульові комутаційні співвідношення:

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = (1+b)e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2,$$
$$[e_3, e_4] = be_3, \quad |b| \leqslant 1.$$

Її нільрадикал $\langle e_1, e_2, e_3\rangle$ тривимірний і ізоморфний алгебрі Вейля–Гайзенберга $A_{3.1}$.

Побудуємо загальну матрицю $B(\theta)$ внутрішніх автоморфізмів алгебри Лі $A^b_{4.8}$, використовуючи другі канонічні координати на $\mathrm{Ad}_G$ як групові параметри $\theta$. Матриці $\hat{\mathrm{ad}}_{e_i}$, $i=1,\dots,4$, приєднаного представлення базисних елементів $e_1$, $e_2$, $e_3$ та $e_4$ відповідно мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1+b\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&-1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&b\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1-b&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&-b&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Тоді трикутна матриця

$$B(\theta)=\prod_{i=1}^{3}\exp(\theta_i\hat{\mathrm{ad}}_{e_i})\cdot\exp(-\theta_4\hat{\mathrm{ad}}_{e_4}) = \begin{pmatrix} e^{(1+b)\theta_4} & -\theta_3e^{\theta_4} & \theta_2e^{b\theta_4} & b\theta_2\theta_3+(1+b)\theta_1\\ 0 & e^{\theta_4} & 0 & \theta_2\\ 0&0&e^{b\theta_4}&b\theta_3\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

описує внутрішні автоморфізми алгебри $A^b_{4.8}$. Отже, функціональний базис піднятих інваріантів має вигляд

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= e^{(1+b)\theta_4}x_1,\\
\mathcal{I}_2 &= e^{\theta_4}(-\theta_3x_1+x_2),\\
\mathcal{I}_3 &= e^{b\theta_4}(\theta_2x_1+x_3),\\
\mathcal{I}_4 &= (b\theta_2\theta_3+(1+b)\theta_1)x_1+\theta_2x_2+b\theta_3x_3+x_4.
\end{aligned}$$

Далі випадки $b = -1$ та $b \neq -1$ потрібно розглянути окремо.

У випадку $b \neq -1$ інваріантів немає, оскільки згідно твердження 1.1 кількість функціонально незалежних інваріантів дорівнює нулю. Дійсно, система $\mathcal{I}_1 = 1$, $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_4 = 0$ є розв'язною відносно всієї сукупності її параметрів $\theta$.

Очевидно, що у випадку $b = -1$ базисний елемент $e_1$ породжує центр алгебри $A_{4.8}^{-1}$, а тому є інваріантом (відповідний піднятий інваріант $\mathcal{I}_1 = x_1$ не залежить від параметрів $\theta$). Інший інваріант можна легко знайти за допомогою комбінування піднятих інваріантів:

$$\mathcal{I}_1\mathcal{I}_4 - \mathcal{I}_2\mathcal{I}_3 = x_1x_4 - x_2x_3.$$

Після симетризації отримаємо поліноміальний базис інваріантів цієї алгебри

$$e_1, \quad e_1e_4 - \frac{e_2e_3 + e_3e_2}{2}.$$

Другий базисний інваріант можна також побудувати за допомогою процедури нормалізації. Розв'язуємо рівняння $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_3 = 0$ відносно параметрів $\theta_2$, $\theta_3$ і підставляємо отримані вирази у піднятий інваріант $\mathcal{I}_4$. Вираз $x_4 - x_2x_3/x_1$ не залежить від параметрів $\theta$, а тому є інваріантом коприєднаного представлення. Для того, щоб базисні інваріанти були поліноміальними, домножимо цей інваріант на інваріант $x_1$. Подібну процедуру нормалізації використано нижче при побудові інваріантів інших алгебр Лі.

Зауважимо, що в цьому прикладі процедуру симетризації можна вважати тривіальною, оскільки симетризований інваріант $e_1e_4 - \frac{1}{2}(e_2e_3 + e_3e_2)$ відрізняється від несиметризованої версії $e_1e_4 - e_2e_3$ (або $e_1e_4 - e_3e_2$) на інваріант $\frac{1}{2}e_1$ (або $-\frac{1}{2}e_1$). Якщо розглянути раціональний інваріант $e_4 - e_2e_3/e_1$ (або $e_4 - e_3e_2/e_1$), то процедура симетризації еквівалентна додаванню сталої $\frac{1}{2}$ (або $-\frac{1}{2}$).

Інваріанти алгебри $A_{4.8}^b$ вперше описано у роботі [232], але в рамках інфінітезимального підходу.

**Приклад 1.3.** Дійсна алгебра Лі $A^{a,b}_{4.6}$ $[18, 232, 234, 247]$ є однією з найскладніших серед чотиривимірних розв'язних алгебр Лі. Її визначають комутаційні співвідношення

$$[e_1, e_4] = ae_1, \quad [e_2, e_4] = be_2 - e_3, \quad [e_3, e_4] = e_2 + be_3, \quad a > 0,\ b \in \mathbb{R}.$$

Згідно твердження 1.1 алгебра $A^{a,b}_{4.6}$ має два функціонально незалежних інваріанти. Матриці приєднаного представлення $\hat{\mathrm{ad}}_{e_i}$ для базисних елементів $e_1$, $e_2$, $e_3$ та $e_4$ відповідно мають вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Добуток експонент цих матриць, домножених на відповідні параметри, є загальною матрицею $B$ внутрішніх автоморфізмів з першого кроку алгоритму:

$$B(\theta) = \prod_{i=1}^{4} \exp(-\theta_i \hat{\mathrm{ad}}_{e_i})$$
$$= \begin{pmatrix} e^{a\theta_4} & 0 & 0 & -a\theta_1 \\ 0 & e^{b\theta_4}\cos\theta_4 & e^{b\theta_4}\sin\theta_4 & -b\theta_2 - \theta_3 \\ 0 & -e^{b\theta_4}\sin\theta_4 & e^{b\theta_4}\cos\theta_4 & \theta_2 - b\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, функціональний базис піднятих інваріантів, що явно залежать від параметрів $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, $\theta_4$, має вигляд:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= x_1 e^{a\theta_4}, \\
\mathcal{I}_2 &= e^{b\theta_4}(x_2\cos\theta_4 - x_3\sin\theta_4), \\
\mathcal{I}_3 &= e^{b\theta_4}(x_2\sin\theta_4 + x_3\cos\theta_4), \\
\mathcal{I}_4 &= -ax_1\theta_1 - x_2(b\theta_2 + \theta_3) + x_3(\theta_2 - b\theta_3) + x_4.
\end{aligned}$$

З другого і третього виразів отримуємо модифіковані підняті інваріанти

$$\tilde{\mathcal{I}}_2 = e^{2b\theta_4}(x_2^2 + x_3^2), \quad \tilde{\mathcal{I}}_3 = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_3}{x_2} + \theta_4\right).$$

Перекомбіновуючи підняті інваріанти, приходимо до піднятих інваріантів, що не залежать від $\theta$:

$$\mathcal{I} = \frac{x_1^{2b}}{(x_2^2 + x_3^2)^a}, \quad \mathcal{J} = (x_2^2 + x_3^2)\exp\left(-2b\operatorname{arctg}\frac{x_3}{x_2}\right).$$

Оскільки симетризація цих двох інваріантів тривіальна, то остаточно маємо два інваріанти

$$\frac{e_1^{2b}}{(e_2^2 + e_3^2)^a}, \quad (e_2^2 + e_3^2)\exp\left(-2b\operatorname{arctg}\frac{e_3}{e_2}\right),$$

які утворюють базис для $\operatorname{Inv}(A_{4.6}^{ab})$. Цей результат еквівалентний результату, отриманому в [232], але представлений над дійсним полем.

**Приклад 1.4.** Розв'язну алгебру Лі $A_{5.27}$ [19, 232] визначено комутаційними співвідношеннями

$$[e_3, e_4] = e_1, \quad [e_1, e_5] = e_1, \quad [e_2, e_5] = e_1 + e_2, \quad [e_3, e_5] = e_2 + e_3.$$

Тут у порівняні з [19] базис модифіковано до $K$-канонічного вигляду, тобто $\langle e_1, \ldots, e_i\rangle$ є ідеалом у $\langle e_1, \ldots, e_i, e_{i+1}\rangle$ для всіх $i = 1, 2, 3, 4$. Тоді трикутна матриця

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} e^{\theta_5} & \theta_5 e^{\theta_5} & (\theta_4 + \frac{1}{2}\theta_5^2)e^{\theta_5} & \theta_3 & \theta_1 + \theta_2 \\ 0 & e^{\theta_5} & \theta_5 e^{\theta_5} & 0 & \theta_2 + \theta_3 \\ 0 & 0 & e^{\theta_5} & 0 & \theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

визначає внутрішні автоморфізми алгебри $A_{5.27}$. Комбінуючи вирази для відповідних першого й другого піднятих інваріантів, отримаємо піднятий інваріант, що не залежить від параметрів $\theta$:

$$\mathcal{I} = x_1 \exp\left(-x_2/x_1\right).$$

Оскільки $N_{A_{5.27}} = 1$, то інших функціонально незалежних інваріантів не існує. Як результат отримаємо базис для $\mathrm{Inv}(A_{5.27})$, утворений єдиним елементом

$$e_1 \exp\left(-e_2/e_1\right).$$

**Приклад 1.5.** Розв'язну алгебру Лі $A_{5.36}$ [19, 232] визначено комутаційними співвідношеннями

$$[e_2, e_3] = e_1, \quad [e_1, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = e_2,$$
$$[e_2, e_5] = -e_2, \quad [e_3, e_5] = e_3.$$

Функціональний базис піднятих інваріантів для алгебри $A_{5.36}$ має вигляд

$$\mathcal{I}_1 = x_1 e^{\theta_4},$$
$$\mathcal{I}_2 = -x_1\theta_3 e^{\theta_4} e^{\theta_5} + x_2 e^{\theta_4} e^{\theta_5},$$
$$\mathcal{I}_3 = x_1\theta_2 e^{-\theta_5} + x_3 e^{-\theta_5},$$
$$\mathcal{I}_4 = x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + x_4,$$
$$\mathcal{I}_5 = x_1\theta_2\theta_3 - x_2\theta_2 + x_3\theta_3 + x_5.$$

Перемноживши друге й третє рівняння та розділивши отриманий вираз на перше рівняння, після додавання п'ятого рівняння отримаємо піднятий інваріант, що не залежить від параметрів $\theta$:

$$\mathcal{I} = x_5 + \frac{x_2 x_3}{x_1}.$$

Отже, права частина цього виразу визначає інваріант коприєднаного представлення групи Лі, що відповідає алгебрі $A_{5.36}$. Оскільки $N_{A_{5.36}} = 1$, то це єдиний функціонально незалежний інваріант. Після симетризації, яка у цьому випадку не є тривіальною, отримаємо базис для $\mathrm{Inv}(A_{5.36})$, що складається з єдиного інваріанта

$$e_5 + \frac{e_2 e_3 + e_3 e_2}{2e_1}.$$

**Приклад 1.6.** Шестивимірну алгебру Лі $N_{6.16}^{ab}$ [275] визначають такі комутаційні співвідношення:

$$[e_2, e_5] = e_1, \quad [e_3, e_5] = ae_3 + e_4, \quad [e_4, e_5] = -e_3 + ae_4,$$
$$[e_1, e_6] = e_1, \quad [e_2, e_6] = e_1, \quad [e_3, e_6] = be_3, \quad [e_4, e_6] = be_4, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Для узгодження з класифікацією алгебр Лі розмірності не вище чотири, отриманої Г.М. Мубаракзяновим, і з метою спрощення обчислень, тут змінено нумерацію базисних елементів у порівнянні з класифікацією П. Турковського [275]. Внутрішні автоморфізми алгебри $N_{6.16}^{ab}$ визначено блочно-трикутною матрицею

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} e^{\theta_6} & \theta_5 e^{\theta_6} & 0 & 0 & \theta_2 & \theta_1 \\ 0 & e^{\theta_6} & 0 & 0 & 0 & \theta_2 \\ 0 & 0 & e^{a\theta_5+b\theta_6}\cos\theta_5 & -e^{a\theta_5+b\theta_6}\sin\theta_5 & a\theta_3-\theta_4 & b\theta_3 \\ 0 & 0 & e^{a\theta_5+b\theta_6}\sin\theta_5 & e^{a\theta_5+b\theta_6}\cos\theta_5 & \theta_3+a\theta_4 & b\theta_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тобто відповідний функціональний базис піднятих інваріантів має вигляд

$$\mathcal{I}_1 = e^{\theta_6} x_1,$$
$$\mathcal{I}_2 = \theta_5 e^{\theta_6} x_1 + e^{\theta_6} x_2,$$
$$\mathcal{I}_3 = e^{a\theta_5+b\theta_6}(x_3\cos\theta_5 + x_4\sin\theta_5),$$
$$\mathcal{I}_4 = e^{a\theta_5+b\theta_6}(-x_3\sin\theta_5 + x_4\cos\theta_5),$$
$$\mathcal{I}_5 = \theta_2 x_1 + (a\theta_3 - \theta_4)x_3 + (\theta_3 + a\theta_4)x_4 + x_5,$$
$$\mathcal{I}_6 = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + b\theta_3 x_3 + b\theta_4 x_4 + x_6.$$

Очевидно, що можна виключити лише параметри $\theta_5$ та $\theta_6$ з перших чотирьох виразів. Комбінуючи їх, можна легко отримати два піднятих інваріанти, що не залежать від параметрів $\theta$:

$$\mathcal{I} = \frac{x_3^2 + x_4^2}{x_1^{2b}} \exp\left(-2a\frac{x_2}{x_1}\right), \quad \mathcal{J} = \frac{x_2}{x_1} + \operatorname{arctg}\frac{x_4}{x_3}.$$

Оскільки в цьому випадку процедура симетризації тривіальна, то отримаємо такий базис інваріантів для алгебри $N^{ab}_{6.16}$:

$$\frac{e_3^2+e_4^2}{e_1^{2b}}\exp\left(-2a\frac{e_2}{e_1}\right), \quad \frac{e_2}{e_1}+\operatorname{arctg}\frac{e_4}{e_3}.$$

Отриманий базис інваріантів еквівалентний базису з роботи [210], але має набагато простіший вигляд.

**Приклад 1.7.** Комутаційні співвідношення розв'язної алгебри Лі $\mathfrak{g} = N^{ab}_{6.25}$, які наведено у роботі [275] з помилками, після відповідних виправлень і перенумерації базисних елементів мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&[e_2,e_5]=ae_2, \quad [e_3,e_5]=e_4, \quad [e_4,e_5]=-e_3,\\
&[e_2,e_6]=be_2, \quad [e_3,e_6]=e_3, \quad [e_4,e_6]=e_4, \quad [e_5,e_6]=e_1,\\
&a,b\in\mathbb{R}, \quad a^2+b^2\neq 0.
\end{aligned}$$

Після обчислення групи внутрішніх автоморфізмів алгебри $N^{ab}_{6.25}$ отримано такий функціональний базис піднятих інваріантів:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_1=x_1,\\
&\mathcal{I}_2=e^{a\theta_4+b\theta_5}x_2,\\
&\mathcal{I}_3=e^{\theta_5}(x_3\cos\theta_4+x_4\sin\theta_4),\\
&\mathcal{I}_4=e^{\theta_5}(-x_3\sin\theta_4+x_4\cos\theta_4),\\
&\mathcal{I}_5=\theta_5x_1+a\theta_1x_2-\theta_3x_3+\theta_2x_4+x_5,\\
&\mathcal{I}_6=-\theta_4x_1+b\theta_1x_2+\theta_2x_3+\theta_3x_4+x_6.
\end{aligned}$$

Тут параметри $\theta_i$ відповідають базисним елементам $e_{i+1}$, $i=1,\dots,5$. Кількість $N_{\mathfrak{g}}$ незалежних інваріантів алгебри $N^{ab}_{6.25}$ дорівнює 2. Очевидно, що $e_1$ породжує центр цієї алгебри та є одним з її інваріантів. Другий функціонально незалежний інваріант знаходимо виключенням параметрів $\theta_4$ та $\theta_5$ з другого, третього та четвертого піднятих інваріантів:

$$\mathcal{I}=\frac{(x_3^2+x_4^2)^b}{x_2^2}\exp\left(2a\operatorname{arctg}\frac{x_4}{x_3}\right).$$

Отже, отримано такий базис інваріантів для $\operatorname{Inv}(N_{6.25}^{ab})$:

$$e_1, \quad \frac{(e_3^2+e_4^2)^b}{e_2^2}\exp\left(2a\operatorname{arctg}\frac{e_4}{e_3}\right).$$

Усі наведені тут приклади наглядно демонструють, що в рамках запропонованого підходу навіть для алгебр Лі відносно складної структури їх інваріанти можна знайти за допомогою простих обчислень за умови правильного вибору їх базисів.

**Приклад 1.8.** Розглянемо клас скінченновимірних алгебр Лі, множина розмірностей яких необмежена зверху, а саме нільпотентні алгебри Лі $\mathfrak{n}_{n,1}$, $n=3,4,\ldots$, з $(n-1)$-вимірним абелевим ідеалом $\langle e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}\rangle$, тобто ці алгебри є також майже абелевими. Ненульові комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{n}_{n,1}$ мають вигляд [268]

$$[e_k,e_n]=e_{k-1}, \quad k=2,\ldots,n-1.$$

Трикутна матриця

$$B(\theta)=\begin{pmatrix}
1 & \theta_1 & \frac{1}{2!}\theta_1^2 & \frac{1}{3!}\theta_1^3 & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}\theta_1^{n-2} & \theta_2\\
0 & 1 & \theta_1 & \frac{1}{2!}\theta_1^2 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}\theta_1^{n-3} & \theta_3\\
0 & 0 & 1 & \theta_1 & \cdots & \frac{1}{(n-4)!}\theta_1^{n-4} & \theta_4\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta_1 & \theta_{n-1}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

описує внутрішні автоморфізми алгебр $\mathfrak{n}_{n,1}$, тобто повна множина функціонально незалежних піднятих інваріантів має вигляд

$$\mathcal{I}_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{(k-j)!}\theta_1^{k-j}x_j, \quad k=1,\ldots,n-1,$$

$$\mathcal{I}_n=x_n+\sum_{j=1}^{n-2}\theta_{j+1}x_j.$$

Очевидно, що базисний елемент $e_1$ породжує центр алгебри $\mathfrak{n}_{n,1}$ і є одним з її інваріантів ($\mathcal{I}_1 = x_1$). Інші $(n-3)$ її функціонально незалежні інваріанти знаходимо за допомогою процедури нормалізації, яку застосовуємо до піднятих інваріантів $\mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_{n-1}$. А саме, розв'язуємо рівняння $\mathcal{I}_2 = 0$ відносно $\theta_1$ і підставляємо отриманий вираз $\theta_1 = -x_2/x_1$ в інші підняті інваріанти. Для побудови поліноміального базису інваріантів необхідно отримані вирази додатково домножити на степені інваріанта $x_1$. Оскільки процедура симетризації у цьому випадку є тривіальною, маємо повну множину узагальнених операторів Казіміра, які в цьому випадку є класичними операторами Казіміра:

$$e_1, \quad \sum_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} e_1^{j-2} e_2^{k-j} e_j, \quad k = 3, \ldots, n-1.$$

Цей набір інваріантів повністю співпадає з базисом інваріантів, побудованим у рамках інфінітезимального підходу в лемі 1 роботи [214] і теоремі 4 роботи [268].

## 1.4. Інваріанти низькорозмірних алгебр Лі

З метою тестування запропонованого методу було переотримано відомі базиси інваріантів для дійсних низькорозмірних алгебр Лі; див. відповідні результати в препринті [80], який є розширеним і доповненим варіантом статті [79]).

Інваріанти алгебр Лі розмірностей три, чотири, п'ять, а також нільпотентних алгебр Лі розмірності шість, обчислено в [232] коректно. Хоча слід зазначити, що з використанням алгебраїчного методу всі базиси інваріантів вдалося представити у простому вигляді і над полем дійсних чисел; див. для порівняння таблицю 1.1 і [232]. Наприклад, можна порівняти приклад у § 1.3 з відповідним результатом для алгебри Лі $A_{4.6}^{ab}$ з [232].

Аналогічні зауваження справедливі також щодо інваріантів шестивимірних розв'язних алгебр Лі з п'ятивимірним нільрадикалом, які побудовано у роботі [106].

Інваріанти шестивимірних розв'язних алгебр Лі з чотиривимірним нільрадикалом, розглянуті у [210], наведено в таблиці 1.2. Крім виправлення помилок (див., наприклад, результати для $N_{6.3}^{a}$, $N_{6.12}^{ab}$, $N_{6.21}^{a}$, $N_{6.25}^{ab}$, $N_{6.31}$, $N_{6.35}^{ab}$ і $N_{6.38}$), у рамках запропонованого підходу для більшості алгебр вдалося записати базиси інваріантів у компактнішій формі за допомогою вибору інших ($K$-канонічних) базисів відповідних алгебр Лі.

**Зауваження до таблиць.** Символом $A_{n.k}$ у першій колонці таблиці 1.1 позначено нерозкладну $n$-вимірну алгебру Лі з номером $k$ у класифікації Г.М. Мубаракзянова [18,19], якщо $n \leqslant 5$, або шестивимірну нільпотентну алгебру в класифікації Морозова [17], якщо $n = 6$. (Така нумерація дещо відрізняється від нумерації, використаної в [232].)

Аналогічно, у першій колонці таблиці 1.2 вказано відповідне позначення для шестивимірних розв'язних алгебр Лі з чотиривимірним нільрадикалом [275].

Додатковий верхній індекс використовуємо для позначення алгебр Лі з відповідними параметрами в серії алгебр. Параметри $a$, $b$, $c$ та $d$ — дійсні числа, що задовольняють зазначені умови.

Ненульові комутаційні співвідношення вказано у другій колонці таблиць. Для всіх випадків базисні елементи перенумеровано у порівняні з $[17, 275]$ з метою приведення базисів до $K$-канонічної форми.

Базиси інваріантів наведено у третій колонці.

Шестивимірні алгебри відсортовано відповідно до структури їхніх нільрадикалів і центрів. Алгебри $N_{6.1}$–$N_{6.19}$ мають абелеві нільрадикали ($\sim 4A_1$) і центри розмірності 0, а алгебри $N_{6.20}$–$N_{6.27}$ — абелеві нільрадикали ($\sim 4A_1$) і одновимірні центри. Нільрадикал алгебри $N_{6.28}$ ізоморфний $A_{4.1}$. Нільрадикали алгебр $N_{6.29}$–$N_{6.40}$ ізоморфні $A_{3.1} \oplus A_1$.

**Таблиця 1.1.** Інваріанти дійсних нерозкладних алгебр Лі до розмірності 5 та нільпотентних алгебр Лі розмірності 6

| Алгебра | Ненульові комутаційні співвідношення | Інваріанти |
|---|---|---|
| $A_1$ | | $e_1$ |
| $A_{2.1}$ | $[e_1,e_2]=e_1$ | — |
| $A_{3.1}$ | $[e_2,e_3]=e_1$ | $e_1$ |
| $A_{3.2}$ | $[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_1+e_2$ | $e_1\exp\Big(-\dfrac{e_2}{e_1}\Big)$ |
| $A_{3.3}$ | $[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2$ | $e_2/e_1$ |
| $A^a_{3.4}$, $\lvert a\rvert\leqslant 1$, $a\neq 0,1$ | $[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=ae_2$ | $e_1^{-a}e_2$ |
| $A^b_{3.5}$, $b\geqslant 0$ | $[e_1,e_3]=be_1-e_2$, $[e_2,e_3]=e_1+be_2$ | $(e_1^2+e_2^2)\exp\Big(-2b\operatorname{arctg}\dfrac{e_2}{e_1}\Big)$ |
| $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ | $[e_1,e_2]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_3,\ [e_1,e_3]=-2e_2$ | $e_1e_3+e_3e_1+2e_2^2$ |
| $\mathfrak{so}(3)$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_3,e_1]=e_2,\ [e_1,e_2]=e_3$ | $e_1^2+e_2^2+e_3^2$ |
| $A_{4.1}$ | $[e_2,e_4]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_2$ | $e_1,\ e_2^2-2e_1e_3$ |
| $A^a_{4.2}$, $a\neq 0$ | $[e_1,e_4]=ae_1,\ [e_2,e_4]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_2+e_3$ | $\dfrac{e_2^a}{e_1},\ e_2\exp\Big(-\dfrac{e_3}{e_2}\Big)$ |
| $A_{4.3}$ | $[e_1,e_4]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_2$ | $e_2,\ e_1\exp\Big(-\dfrac{e_3}{e_2}\Big)$ |
| $A_{4.4}$ | $[e_1,e_4]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_1+e_2$, $[e_3,e_4]=e_2+e_3$ | $e_1\exp\Big(-\dfrac{e_2}{e_1}\Big),\ \dfrac{e_2^2-2e_1e_3}{e_1^2}$ |
| $A^{a,b,c}_{4.5}$, $abc\neq 0$ | $[e_1,e_4]=ae_1,\ [e_2,e_4]=be_2,\ [e_3,e_4]=ce_3$ | $\dfrac{e_3^a}{e_1^c},\ \dfrac{e_2^a}{e_1^b}$ |
| $A^{a,b}_{4.6}$, $a>0$ | $[e_1,e_4]=ae_1,\ [e_2,e_4]=be_2-e_3$, $[e_3,e_4]=e_2+be_3$ | $(e_2^2+e_3^2)\exp\Big(-2b\operatorname{arctg}\dfrac{e_3}{e_2}\Big)$, $\dfrac{(e_2^2+e_3^2)^a}{e_1^{2b}}$ |
| $A_{4.7}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=2e_1$, $[e_2,e_4]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_2+e_3$ | — |
| $A^a_{4.8}$, $\lvert a\rvert\leqslant 1$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=(1+a)e_1$, $[e_2,e_4]=e_2,\ [e_3,e_4]=ae_3$ | лише для $a=-1$: $e_1,\ e_2e_3+e_3e_2-2e_1e_4$ |
| $A^a_{4.9}$, $a\geqslant 0$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=2ae_1$, $[e_2,e_4]=ae_2-e_3,\ [e_3,e_4]=e_2+ae_3$ | лише для $a=0$: $e_1,\ 2e_1e_4+e_2^2+e_3^2$ |
| $A_{4.10}$ | $[e_1,e_3]=e_1,\ [e_2,e_3]=e_2,\ [e_1,e_4]=-e_2,\ [e_2,e_4]=e_1$ | — |
| $A_{5.1}$ | $[e_3,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_2$ | $e_1,\ e_2,\ e_2e_3-e_1e_4$ |
| $A_{5.2}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3$ | $e_1,\ e_2^2-2e_1e_3$, $e_2^3+3e_1^2e_4-3e_1e_2e_3$ |
| $A_{5.3}$ | $[e_3,e_4]=e_2,\ [e_3,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_3$ | $e_1,\ e_2,\ e_3^2+2e_2e_5-2e_1e_4$ |
| $A_{5.4}$ | $[e_2,e_4]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_1$ | $e_1$ |

| Алгебра | Ненульові комутаційні співвідношення | Інваріанти |
|---|---|---|
| $A_{5.5}$ | $[e_3,e_4]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_2$ | $e_1$ |
| $A_{5.6}$ | $[e_3,e_4]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3$ | $e_1$ |
| $A^{abc}_{5.7}$, $abc\neq 0$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=ae_2,\ [e_3,e_5]=be_3,$ $[e_4,e_5]=ce_4$ | $\frac{e_1^a}{e_2},\ \frac{e_1^b}{e_3},\ \frac{e_1^c}{e_4}$ |
| $A^{a}_{5.8}$, $0<\lvert a\rvert\leqslant 1$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=ae_4$ | $e_1,\ \frac{e_3^a}{e_4},\ e_3\exp\Bigl(-\frac{e_2}{e_1}\Bigr)$ |
| $A^{ab}_{5.9}$, $0\neq b\leqslant a$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_5]=ae_3,\ [e_4,e_5]=be_4$ | $\frac{e_1^a}{e_3},\ \frac{e_1^b}{e_4},\ e_1\exp\Bigl(-\frac{e_2}{e_1}\Bigr)$ |
| $A_{5.10}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_4$ | $e_1,\ e_2^2-2e_1e_3,\ e_4\exp\Bigl(-\frac{e_2}{e_1}\Bigr)$ |
| $A^{a}_{5.11}$, $a\neq 0$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_5]=e_2+e_3,\ [e_4,e_5]=ae_4$ | $\frac{e_1^a}{e_3},\ e_1\exp\Bigl(-\frac{e_2}{e_1}\Bigr),\ \frac{e_2^2-2e_1e_3}{e_1^2}$ |
| $A_{5.12}$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_5]=e_2+e_3,\ [e_4,e_5]=e_3+e_4$ | $e_1\exp\Bigl(-\frac{e_2}{e_1}\Bigr),\ \frac{e_2^2-2e_1e_3}{e_1^2},$ $\frac{e_2^3+3e_1^2e_4-3e_1e_2e_3}{e_1^3}$ |
| $A^{abc}_{5.13}$, $\lvert a\rvert\leqslant 1$, $ac\neq 0$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=ae_2,$ $[e_3,e_5]=be_3-ce_4,\ [e_4,e_5]=ce_3+be_4$ | $\frac{e_1^a}{e_2},\ \frac{e_3^2+e_4^2}{e_1^{2b}},\ e_1^c\exp\Bigl(-\operatorname{arctg}\frac{e_4}{e_3}\Bigr)$ |
| $A^{a}_{5.14}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=ae_3-e_4,$ $[e_4,e_5]=e_3+ae_4$ | $e_1,\ (e_3^2+e_4^2)\exp\Bigl(-2a\frac{e_2}{e_1}\Bigr),$ $\frac{e_2}{e_1}-\operatorname{arctg}\frac{e_4}{e_3}$ |
| $A^{a}_{5.15}$, $\lvert a\rvert\leqslant 1$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_5]=ae_3,\ [e_4,e_5]=e_3+ae_4$ | $\frac{e_1^a}{e_3},\ e_1\exp\Bigl(-\frac{e_2}{e_1}\Bigr),\ e_3\exp\Bigl(-\frac{e_4}{e_3}\Bigr)$ |
| $A^{ab}_{5.16}$, $b\neq 0$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,$ $[e_3,e_5]=ae_3-be_4,\ [e_4,e_5]=be_3+ae_4$ | $e_1\exp\Bigl(-\frac{e_2}{e_1}\Bigr),$ $\frac{e_3^2+e_4^2}{e_1^{2a}},\ \frac{e_2}{e_1}-\operatorname{arctg}\frac{e_4}{e_3}$ |
| $A^{abc}_{5.17}$, $c\neq 0$ | $[e_1,e_5]=ae_1-e_2,\ [e_2,e_5]=e_1+ae_2,$ $[e_3,e_5]=be_3-ce_4,\ [e_4,e_5]=ce_3+be_4$ | $(e_1^2+e_2^2)\exp\Bigl(-2a\operatorname{arctg}\frac{e_2}{e_1}\Bigr),$ $\frac{(e_1^2+e_2^2)^b}{(e_3^2+e_4^2)^a},$ $(e_3^2+e_4^2)\exp\Bigl(-2\frac{b}{c}\operatorname{arctg}\frac{e_4}{e_3}\Bigr)$ |
| $A^{a}_{5.18}$, $a\geqslant 0$ | $[e_1,e_5]=ae_1-e_2,\ [e_2,e_5]=e_1+ae_2,$ $[e_3,e_5]=e_1+ae_3-e_4,\ [e_4,e_5]=e_2+e_3+ae_4$ | $(e_1^2+e_2^2)\exp\Bigl(-2a\operatorname{arctg}\frac{e_2}{e_1}\Bigr),$ $\frac{e_1e_4-e_2e_3}{e_1^2+e_2^2},$ $(e_1^2+e_2^2)\exp\Bigl(-2a\frac{e_1e_3+e_2e_4}{e_1^2+e_2^2}\Bigr)$ |
| $A^{ab}_{5.19}$, $b\neq 0$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=ae_1,\ [e_2,e_5]=e_2,$ $[e_3,e_5]=(a-1)e_3,\ [e_4,e_5]=be_4$ | $\frac{e_1^b}{e_4^a}$ |
| $A^{a}_{5.20}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=ae_2,\ [e_2,e_5]=e_2,$ $[e_3,e_5]=(a-1)e_3,\ [e_4,e_5]=e_1+ae_4$ | $e_1\exp\Bigl(-a\frac{e_4}{e_1}\Bigr)$ |

| Алгебра | Ненульові комутаційні співвідношення | Інваріанти |
|---|---|---|
| $A_{5.21}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=2e_1,\ [e_2,e_5]=e_2+e_3,$ $[e_3,e_5]=e_3+e_4,\ [e_4,e_5]=e_4$ | $\dfrac{e_4^2}{e_1}$ |
| $A_{5.22}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=e_4$ | $e_1$ |
| $A^a_{5.23}$, $a\neq 0$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=2e_1,\ [e_2,e_5]=e_2+e_3,$ $[e_3,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=ae_4$ | $\dfrac{e_1^a}{e_4^2}$ |
| $A^{\pm}_{5.24}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=2e_1,\ [e_2,e_5]=e_2+e_3,$ $[e_3,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=\pm e_1+2e_4$ | $e_1\exp\Big(\mp 2\dfrac{e_4}{e_1}\Big)$ |
| $A^{ab}_{5.25}$, $b\neq 0$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=2ae_1,\ [e_2,e_5]=ae_2+e_3,$ $[e_3,e_5]=-e_2+ae_3,\ [e_4,e_5]=be_4$ | $\dfrac{e_1^b}{e_4^{2a}}$ |
| $A^{\pm a}_{5.26}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=2ae_1,\ [e_2,e_5]=ae_2+e_3,$ $[e_3,e_5]=-e_2+ae_3,\ [e_4,e_5]=\pm e_1+2ae_4$ | $e_1\exp\Big(\mp 2a\dfrac{e_4}{e_1}\Big)$ |
| $A_{5.27}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_3+e_4,$ $[e_4,e_5]=e_1+e_4$ | $e_1\exp\Big(-\dfrac{e_4}{e_1}\Big)$ |
| $A^a_{5.28}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=ae_1,\ [e_2,e_5]=(a-1)e_2,$ $[e_3,e_5]=e_3+e_4,\ [e_4,e_5]=e_4$ | $\dfrac{e_4^a}{e_1}$ |
| $A_{5.29}$ | $[e_2,e_4]=e_1,\ [e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3$ | $e_3$ |
| $A^a_{5.30}$ | $[e_2,e_4]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=(a+1)e_1,$ $[e_2,e_5]=ae_2,\ [e_3,e_5]=(a-1)e_3,\ [e_4,e_5]=e_4$ | $\dfrac{(e_2^2-2e_1e_3)^{a+1}}{e_1^{2a}}$ |
| $A_{5.31}$ | $[e_2,e_4]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=3e_1,$ $[e_2,e_5]=2e_2,\ [e_3,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=e_3+e_4$ | $\dfrac{(e_2^2-2e_1e_3)^3}{e_1^4}$ |
| $A^a_{5.32}$ | $[e_2,e_4]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=e_1,$ $[e_2,e_5]=e_2,\ [e_3,e_5]=ae_1+e_3$ | $e_1^{2a}\exp\dfrac{e_2^2-2e_1e_3}{e_1^2}$ |
| $A^{ab}_{5.33}$, $a^2+b^2\neq 0$ | $[e_1,e_4]=e_1,\ [e_3,e_4]=ae_3,\ [e_2,e_5]=e_2,$ $[e_3,e_5]=be_3$ | $\dfrac{e_1^a e_2^b}{e_3}$ |
| $A^a_{5.34}$ | $[e_1,e_4]=ae_1,\ [e_2,e_4]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_3,$ $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_2$ | $\dfrac{e_2^a}{e_1}\exp\dfrac{e_3}{e_2}$ |
| $A^{ab}_{5.35}$, $a^2+b^2\neq 0$ | $[e_1,e_4]=ae_1,\ [e_2,e_4]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_3,$ $[e_1,e_5]=be_1,\ [e_2,e_5]=-e_3,\ [e_3,e_5]=e_2$ | $\dfrac{e_1^2}{(e_2^2+e_3^2)^a}\exp\Big(-2b\operatorname{arctg}\dfrac{e_3}{e_2}\Big)$ |
| $A_{5.36}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_2,e_5]=-e_2,\ [e_3,e_5]=e_3$ | $\dfrac{e_2e_3+e_3e_2+2e_1e_5}{e_1}$ |
| $A_{5.37}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_4]=2e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,$ $[e_3,e_4]=e_3,\ [e_2,e_5]=-e_3,\ [e_3,e_5]=e_2$ | $\dfrac{e_2^2+e_3^2+2e_1e_5}{e_1}$ |
| $A_{5.38}$ | $[e_1,e_4]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3$ | $e_3$ |
| $A_{5.39}$ | $[e_1,e_4]=e_1,\ [e_2,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=-e_2,$ $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_3$ | $e_3$ |
| $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\Subset 2A_1$ | $[e_1,e_2]=2e_1,\ [e_1,e_3]=-e_2,\ [e_2,e_3]=2e_3,$ $[e_1,e_4]=e_5,\ [e_2,e_4]=e_4,\ [e_2,e_5]=-e_5,$ $[e_3,e_5]=e_4$ | $\big\{e_1e_4^2-e_2e_4e_5-e_3e_5^2\big\}_{\text{symmetrized}}$ |

| Алгебра | Ненульові комутаційні співвідношення | Інваріанти |
|---|---|---|
| $A_{6.1}$ | $[e_3,e_6]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_2,\ [e_5,e_6]=e_4$ | $e_1,\ e_2,\ e_1e_4-e_2e_3,\ 2e_2e_5-e_4^2$ |
| $A_{6.2}$ | $[e_2,e_6]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_3,$ $[e_5,e_6]=e_4$ | $e_1,\ 2e_1e_3-e_2^2,\ 2e_1e_5-2e_2e_4+e_3^2,$ $3e_1^2e_4-3e_1e_2e_3+e_2^3$ |
| $A_{6.3}$ | $[e_4,e_5]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_2,\ [e_5,e_6]=e_3$ | $e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_1e_6+e_3e_4-e_2e_5$ |
| $A_{6.4}$ | $[e_3,e_5]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_1,\ [e_5,e_6]=e_2$ | $e_1,\ e_2$ |
| $A_{6.5}^a,$ $a\neq 0$ | $[e_3,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=ae_2,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_4,e_6]=e_1$ | $e_1,\ e_2$ |
| $A_{6.6}$ | $[e_4,e_5]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_2,$ $[e_5,e_6]=e_3$ | $e_1,\ e_2$ |
| $A_{6.7}$ | $[e_4,e_5]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_3$ | $e_1,\ e_2$ |
| $A_{6.8}$ | $[e_3,e_5]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_2,\ [e_5,e_6]=e_3+e_4$ | $e_1,\ e_2$ |
| $A_{6.9}$ | $[e_4,e_5]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_2,$ $[e_5,e_6]=e_4$ | $e_1,\ e_2$ |
| $A_{6.10}^a,$ $a\neq 0$ | $[e_3,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=ae_2,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_4,e_6]=e_1,\ [e_5,e_6]=e_4$ | $e_1,\ e_2$ |
| $A_{6.11}$ | $[e_5,e_6]=e_4,\ [e_4,e_6]=e_3,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_4,e_5]=e_1$ | $e_1,\ e_2$ |
| $A_{6.12}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_3$ | $e_1,\ 2e_1e_4-e_3^2$ |
| $A_{6.13}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_3,$ $[e_5,e_6]=e_2$ | $e_1,\ 2e_1e_4-e_3^2$ |
| $A_{6.14}^a,$ $a\neq 0$ | $[e_2,e_5]=ae_2,\ [e_4,e_5]=e_2,\ [e_3,e_6]=e_1,$ $[e_4,e_6]=e_3$ | $e_1,\ e_2^2+ae_3^2-2ae_1e_4$ |
| $A_{6.15}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_3,$ $[e_5,e_6]=e_2+e_4$ | $e_1,\ 2e_1e_4-e_3^2$ |
| $A_{6.16}$ | $[e_3,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_2,\ [e_2,e_6]=e_1,$ $[e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_3$ | $e_1,\ e_2^3+3e_1^2e_4-3e_1e_2e_3$ |
| $A_{6.17}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_3,$ $[e_5,e_6]=e_4$ | $e_1,\ 2e_1e_4-e_3^2$ |
| $A_{6.18}^a,$ $a\neq 0$ | $[e_2,e_5]=ae_1,\ [e_4,e_5]=e_2,\ [e_3,e_6]=e_1,$ $[e_4,e_6]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_4$ | $e_1,\ e_2^2+ae_3^2-2ae_1e_4$ |
| $A_{6.19}$ | $[e_4,e_5]=e_1,\ [e_2,e_6]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_4,e_6]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_4$ | $e_1,\ e_2^2-2e_1e_3$ |
| $A_{6.20}$ | $[e_3,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_2,\ [e_2,e_6]=e_1,$ $[e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_4$ | $e_1,\ e_2^3+3e_1^2e_4-3e_1e_2e_3$ |
| $A_{6.21}$ | $[e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3,$ $[e_2,e_6]=e_1,\ [e_5,e_6]=e_4$ | $e_1,\ e_3^2+2e_1e_5-2e_2e_4$ |
| $A_{6.22}$ | $[e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3,$ $[e_2,e_6]=e_1,\ [e_4,e_6]=e_2,\ [e_5,e_6]=e_4$ | $e_1,\ 2e_2^3+3e_1e_3^2+6e_1^2e_5-6e_1e_2e_4$ |

**Таблиця 1.2.** Інваріанти дійсних шестивимірних розв'язних алгебр Лі з чотирьохвимірним нільрадикалом

| Алгебра | Ненульові комутаційні співвідношення | Інваріанти |
|---|---|---|
| $N_{6.1}^{abcd}$ | $[e_1,e_5]=ae_1,\ [e_2,e_5]=be_2,\ [e_4,e_5]=e_4,$ $[e_1,e_6]=ce_1,\ [e_2,e_6]=de_2,\ [e_3,e_6]=e_3,$ $ac\neq 0,\ b^2+d^2\neq 0$ | $\dfrac{e_3^c e_4^a}{e_1},\ \dfrac{e_3^d e_4^b}{e_2}$ |
| $N_{6.2}^{abc}$ | $[e_1,e_5]=ae_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3,$ $[e_1,e_6]=be_1,\ [e_2,e_6]=ce_2,\ [e_3,e_6]=e_3,$ $[e_4,e_6]=e_4,\ a^2+b^2\neq 0$ | $\dfrac{e_2^a e_3^{ac-b}}{e_1},\ e_2e_3^c\exp\dfrac{e_4}{e_3}$ |
| $N_{6.3}^{a}$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3,$ $[e_1,e_6]=ae_1,\ [e_2,e_6]=e_1+ae_2,$ $[e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_4$ | $e_3\exp\Big(-\dfrac{e_2}{e_1}\Big),\ e_1\exp\Big(-\dfrac{e_4}{e_3}-a\dfrac{e_2}{e_1}\Big)$ |
| $N_{6.4}^{ab}$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3,$ $[e_1,e_6]=e_2,\ [e_2,e_6]=-e_1,\ [e_3,e_6]=ae_3,$ $[e_4,e_6]=be_3+ae_4,\ a\neq 0$ | $e_3^{2b}\,(e_1^2+e_2^2)^a\exp\Big(-2a\dfrac{e_4}{e_3}\Big),$ $e_3\exp\Big(a\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{e_2}{e_1}\Big)$ |
| $N_{6.5}^{ab}$ | $[e_1,e_5]=ae_1,\ [e_3,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=e_3+e_4,$ $[e_1,e_6]=be_1,\ [e_2,e_6]=e_2,\ ab\neq 0$ | $\dfrac{e_2^b e_3^a}{e_1},\ e_3\exp\Big(-\dfrac{e_4}{e_3}\Big)$ |
| $N_{6.6}^{ab}$ | $[e_1,e_5]=ae_1,\ [e_2,e_5]=ae_2,\ [e_3,e_5]=e_3,$ $[e_4,e_5]=e_3+e_4,\ [e_1,e_6]=e_1,\ [e_2,e_6]=e_1+e_2,$ $[e_4,e_6]=be_3,\ a^2+b^2\neq 0$ | $\dfrac{e_3^a}{e_1}\exp\dfrac{e_2}{e_1},\ e_3\exp\Big(b\dfrac{e_2}{e_1}-\dfrac{e_4}{e_3}\Big)$ |
| $N_{6.7}^{abc}$ | $[e_1,e_5]=ae_1,\ [e_2,e_5]=ae_2,\ [e_3,e_5]=e_3,$ $[e_4,e_5]=e_3+e_4,\ [e_1,e_6]=be_1+e_2,$ $[e_2,e_6]=-e_1+be_2,\ [e_4,e_6]=ce_3,\ a^2+c^2\neq 0$ | $e_3\exp\Big(-\dfrac{e_4}{e_3}-c\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{e_2}{e_1}\Big),$ $(e_1^2+e_2^2)e_3^{-a}\exp\Big(2b\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{e_2}{e_1}\Big)$ |
| $N_{6.8}$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_2,\ [e_2,e_6]=e_2,$ $[e_3,e_6]=e_2+e_3,\ [e_4,e_6]=e_4$ | $e_1\exp\Big(-\dfrac{e_4}{e_2}\Big),\ e_2\exp\Big(-\dfrac{e_3}{e_2}\Big)$ |
| $N_{6.9}^{a}$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_2,\ [e_2,e_6]=e_2,$ $[e_3,e_6]=ae_2+e_3,\ [e_4,e_6]=e_3+e_4$ | $e_1^{2a}\exp\Big(\dfrac{e_3^2-2ae_2e_4}{e_2^2}\Big),\ e_2^a\exp\Big(-\dfrac{e_3}{e_2}\Big)$ |
| $N_{6.10}^{ab}$ | $[e_1,e_5]=ae_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_3,e_5]=e_3,$ $[e_4,e_5]=be_2+e_4,\ [e_1,e_6]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_2,$ $[e_4,e_6]=e_3$ | $\dfrac{e_2^a}{e_1}\exp\dfrac{e_3}{e_2},\ e_2^{2b}\exp\Big(\dfrac{e_3^2-2e_2e_4}{e_2^2}\Big)$ |
| $N_{6.11}^{a}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=e_3+e_4,$ $[e_1,e_6]=e_1,\ [e_2,e_6]=e_2,\ [e_3,e_6]=ae_3,$ $[e_4,e_6]=ae_4$ | $\dfrac{e_4}{e_3}-\dfrac{e_2}{e_1},\ \dfrac{e_1^a}{e_3}\exp\dfrac{e_2}{e_1}$ |
| $N_{6.12}^{ab}$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_1+e_2,\ [e_3,e_5]=e_3,$ $[e_4,e_5]=e_3+e_4,\ [e_1,e_6]=e_3,$ $[e_2,e_6]=ae_1-be_3+e_4,\ [e_3,e_6]=-e_1,$ $[e_4,e_6]=be_1-e_2+ae_3$ | $\dfrac{e_1e_4-e_2e_3}{e_1^2+e_3^2}+b\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{e_3}{e_1},$ $\dfrac{e_1e_2+e_3e_4}{e_1^2+e_3^2}+a\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{e_3}{e_1}+\dfrac{1}{2}\ln(e_1^2+e_3^2)$ |

| Алгебра | Ненульові комутаційні співвідношення | Інваріанти |
|---|---|---|
| $N_{6.13}^{abcd}$ | $[e_1,e_5]=ae_1,\ [e_2,e_5]=be_2,\ [e_3,e_5]=e_4,$ $[e_4,e_5]=-e_3,\ [e_1,e_6]=ce_1,\ [e_2,e_6]=de_2,$ $[e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_4,\ a^2+c^2\neq 0,\ b^2+d^2\neq 0$ | $e_1^2(e_3^2+e_4^2)^{-c}\exp\Big(2a\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}\Big),$ $e_2^2(e_3^2+e_4^2)^{-d}\exp\Big(2b\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}\Big)$ |
| $N_{6.14}^{abc}$ | $[e_1,e_5]=ae_1,\ [e_3,e_5]=be_3+e_4,$ $[e_4,e_5]=-e_3+be_4,\ [e_1,e_6]=ce_1,$ $[e_2,e_6]=e_2,\ ac\neq 0$ | $e_1e_2^{-c}\exp\Big(a\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}\Big),$ $(e_3^2+e_4^2)\exp\Big(2b\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}\Big)$ |
| $N_{6.15}^{abcd}$ | $[e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_3,e_5]=ae_3+be_4,$ $[e_4,e_5]=-be_3+ae_4,\ [e_1,e_6]=ce_1+e_2,$ $[e_2,e_6]=-e_1+ce_2,\ [e_3,e_6]=de_3,\ [e_4,e_6]=de_4,$ $b\neq 0$ | $(e_1^2+e_2^2)\exp\Big(\dfrac{2}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}+2c\operatorname{arctg}\dfrac{e_2}{e_1}\Big),$ $(e_3^2+e_4^2)\exp\Big(\dfrac{2a}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}+2d\operatorname{arctg}\dfrac{e_2}{e_1}\Big)$ |
| $N_{6.16}^{ab}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=ae_3+e_4,$ $[e_4,e_5]=-e_3+ae_4,\ [e_1,e_6]=e_1,\ [e_2,e_6]=e_2,$ $[e_3,e_6]=be_3,\ [e_4,e_6]=be_4$ | $(e_3^2+e_4^2)e_1^{-2b}\exp\Big(-2a\dfrac{e_2}{e_1}\Big),\ \dfrac{e_2}{e_1}+\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}$ |
| $N_{6.17}^{a}$ | $[e_1,e_5]=ae_1,\ [e_2,e_5]=e_1+ae_2,\ [e_3,e_5]=e_4,$ $[e_4,e_5]=-e_3,\ [e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_4$ | $e_1\exp\Big(-a\dfrac{e_2}{e_1}\Big),\ \dfrac{e_2}{e_1}+\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}$ |
| $N_{6.18}^{abc}$ | $[e_1,e_5]=e_2,\ [e_2,e_5]=-e_1,\ [e_3,e_5]=ae_3+be_4,$ $[e_4,e_5]=-be_3+ae_4,\ [e_1,e_6]=e_1,\ [e_2,e_6]=e_2,$ $[e_3,e_6]=ce_3,\ [e_4,e_6]=ce_4,\ b\neq 0$ | $\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}-b\operatorname{arctg}\dfrac{e_2}{e_1},$ $(e_3^2+e_4^2)(e_1^2+e_2^2)^{-c}\exp\Big(2a\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}\Big)$ |
| $N_{6.19}$ | $[e_1,e_5]=e_2,\ [e_2,e_5]=-e_1,\ [e_3,e_5]=e_1+e_4,$ $[e_4,e_5]=e_2-e_3,\ [e_1,e_6]=e_1,\ [e_2,e_6]=e_2,$ $[e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_4$ | $\dfrac{e_1e_4-e_2e_3}{e_1^2+e_2^2},\ \dfrac{e_1e_3+e_2e_4}{e_1^2+e_2^2}+\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}$ |
| $N_{6.20}^{ab}$ | $[e_2,e_5]=ae_2,\ [e_4,e_5]=e_4,\ [e_2,e_6]=be_2,$ $[e_3,e_6]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_1$ | $e_1,\ \dfrac{e_3^be_4^a}{e_2}$ |
| $N_{6.21}^{a}$ | $[e_2,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=e_3,\ [e_2,e_6]=ae_2,$ $[e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_4,\ [e_5,e_6]=e_1$ | $e_1,\ \dfrac{e_3^a}{e_2}\exp\dfrac{e_4}{e_3}$ |
| $N_{6.22}^{a\varepsilon}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_4,e_5]=e_4,\ [e_3,e_6]=e_3,$ $[e_4,e_6]=ae_4,\ [e_5,e_6]=\varepsilon e_1,\ \varepsilon=0,1,\ a^2+\varepsilon^2\neq 0$ | $e_1,\ \dfrac{e_3^a}{e_4}\exp\dfrac{e_2}{e_1}$ |
| $N_{6.23}^{a\varepsilon}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=e_4,$ $[e_2,e_6]=ae_1,\ [e_3,e_6]=e_4,\ [e_4,e_6]=-e_3,$ $[e_5,e_6]=\varepsilon e_1,\ \varepsilon=0,1$ | $e_1,\ (e_3^2+e_4^2)\exp\Big(-2\dfrac{e_2}{e_1}-2a\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}\Big)$ |
| $N_{6.24}$ | $[e_3,e_5]=e_3,\ [e_4,e_5]=e_3+e_4,\ [e_2,e_6]=e_2,$ $[e_5,e_6]=e_1$ | $e_1,\ e_3\exp\Big(-\dfrac{e_4}{e_3}\Big)$ |
| $N_{6.25}^{ab}$ | $[e_2,e_5]=ae_2,\ [e_3,e_5]=e_4,\ [e_4,e_5]=-e_3,$ $[e_2,e_6]=be_2,\ [e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_4,$ $[e_5,e_6]=e_1,\ a^2+b^2\neq 0$ | $e_1,\ e_2^2(e_3^2+e_4^2)^{-b}\exp\Big(-2a\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}\Big)$ |
| $N_{6.26}^{a}$ | $[e_3,e_5]=ae_3+e_4,\ [e_4,e_5]=-e_3+ae_4,$ $[e_2,e_6]=e_2,\ [e_5,e_6]=e_1$ | $e_1,\ (e_3^2+e_4^2)\exp\Big(2a\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}\Big)$ |
| $N_{6.27}^{\varepsilon}$ | $[e_2,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=e_4,\ [e_4,e_5]=-e_3,$ $[e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_4,\ [e_5,e_6]=\varepsilon e_2,\ \varepsilon=0,1$ | $e_1,\ \dfrac{e_2}{e_1}+\operatorname{arctg}\dfrac{e_4}{e_3}$ |

| Алгебра | Ненульові комутаційні співвідношення | Інваріанти |
|---|---|---|
| $N_{6.28}$ | $[e_2,e_4]=e_1,\ [e_3,e_4]=e_2,\ [e_1,e_5]=e_1,\ [e_3,e_5]=-e_3,$ $[e_4,e_5]=e_4,\ [e_2,e_6]=e_2,\ [e_3,e_6]=2e_3,\ [e_4,e_6]=-e_4$ | — |
| $N_{6.29}^{ab}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_4,e_5]=ae_4,$ $[e_1,e_6]=e_1,\ [e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=be_4,\ a^2+b^2\neq 0$ | — |
| $N_{6.30}^{a}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=2e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_3,e_5]=e_3,$ $[e_4,e_5]=ae_4,\ [e_3,e_6]=e_2,\ [e_4,e_6]=e_4$ | — |
| $N_{6.31}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_3,e_5]=-e_3,\ [e_1,e_6]=e_1,$ $[e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_1+e_4$ | $e_1\exp\Bigl(-\dfrac{e_4}{e_1}\Bigr),\ e_5-\dfrac{e_2e_3+e_3e_2}{2e_1}$ |
| $N_{6.32}^{a}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_3,e_5]=-e_3,\ [e_4,e_5]=e_1,$ $[e_1,e_6]=e_1,\ [e_2,e_6]=ae_2,\ [e_3,e_6]=(1-a)e_3,$ $[e_4,e_6]=e_4$ | — |
| $N_{6.33}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_1,e_6]=e_1,$ $[e_3,e_6]=e_3+e_4,\ [e_4,e_6]=e_4$ | — |
| $N_{6.34}^{a}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_3,e_5]=e_4,$ $[e_1,e_6]=ae_1,\ [e_2,e_6]=(a-1)e_2,\ [e_3,e_6]=e_3,$ $[e_4,e_6]=e_4$ | — |
| $N_{6.35}^{ab}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_3,\ [e_3,e_5]=-e_2,\ [e_4,e_5]=ae_4,$ $[e_1,e_6]=2e_1,\ [e_2,e_6]=e_2,\ [e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=be_4,$ $a^2+b^2\neq 0$ | $\dfrac{e_1^b}{e_4^2},\ 2e_5-\dfrac{e_2^2+e_3^2}{e_1}$, якщо $a=0$; —, якщо $a\neq 0$ |
| $N_{6.36}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_3,\ [e_3,e_5]=-e_2,\ [e_1,e_6]=2e_1,$ $[e_2,e_6]=e_2,\ [e_3,e_6]=e_3,\ [e_4,e_6]=e_1+2e_4$ | $e_1\exp\Bigl(-2\dfrac{e_4}{e_1}\Bigr),\ 2e_5-\dfrac{e_2^2+e_3^2}{e_1}$ |
| $N_{6.37}^{a}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_3,\ [e_3,e_5]=-e_2,\ [e_4,e_5]=e_1,$ $[e_1,e_6]=2e_1,\ [e_2,e_6]=e_2+ae_3,\ [e_3,e_6]=-ae_2+e_3,$ $[e_4,e_6]=2e_4$ | — |
| $N_{6.38}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_1,e_5]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_2,\ [e_1,e_6]=e_1,$ $[e_3,e_6]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_4$ | $e_4,\ \dfrac{e_2e_3+e_3e_2}{2e_1}-e_5+e_6+e_4\ln e_1$ |
| $N_{6.39}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_3,\ [e_3,e_5]=-e_2,\ [e_1,e_6]=2e_1,$ $[e_2,e_6]=e_2,\ [e_3,e_6]=e_3,\ [e_5,e_6]=e_4$ | $e_4,\ \dfrac{e_2^2+e_3^2}{e_1}-2e_5+e_4\ln e_1$ |
| $N_{6.40}$ | $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,e_5]=e_3,\ [e_3,e_5]=-e_2,\ [e_4,e_6]=e_4,$ $[e_5,e_6]=e_1$ | $e_1,\ \dfrac{e_2^2+e_3^2}{e_1}-2e_5+2e_1\ln e_4$ |

## 1.5. Майже абелеві алгебри

**Позначення.** Нижче використовуємо такі позначення:

$\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ — діагональна матриця розмірності $r \times r$ з елементами $\alpha_1$, …, $\alpha_r$ на діагоналі;

$E^r = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1)$ — одинична матриця розмірності $r \times r$;

$E^r_{ij}$ (для фіксованих значень $i$ та $j$) — матриця розмірності $r \times r$ $(\delta_{ii'}\delta_{jj'})$ з $i'$ та $j'$, що пробігають кількість рядків і стовпчиків відповідно, тобто матриця розмірності $r \times r$ з одиницею на перетині $i$-го рядка та $j$-го стовпчика, а всі інші елементи таблиці нулі;

$J^r_\lambda$ — жорданова клітинка розмірності $r$ і власним значенням $\lambda$:

$$[J^r_\lambda]_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{якщо } j = i, \\ 1, & \text{якщо } j - i = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases} \qquad i, j = 1, \ldots, r,$$

тобто

$$J^r_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

$$\exp(\theta J^r_0) = \begin{pmatrix} 1 & \theta & \frac{1}{2!}\theta^2 & \frac{1}{3!}\theta^3 & \cdots & \frac{1}{(r-1)!}\theta^{r-1} \\ 0 & 1 & \theta & \frac{1}{2!}\theta^2 & \cdots & \frac{1}{(r-2)!}\theta^{r-2} \\ 0 & 0 & 1 & \theta & \cdots & \frac{1}{(r-3)!}\theta^{r-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(оскільки $J^r_\lambda = \lambda E^r + J^r_0$, то $\exp(\theta J^r_\lambda) = e^{\lambda\theta} \exp(\theta J^r_0)$ );

$R^r_{\mu\nu}$ — дійсна жорданова клітинка розмірності $r = 2q$, $q \in \mathbb{N}$, яка відповідає парі комплексних жорданових клітинок $J^q_\lambda$ та $J^q_{\lambda^*}$ з комплексно-спряженими власними значеннями $\lambda$ та $\lambda^*$, де $\mu = \operatorname{Re}\lambda$, $\nu = \operatorname{Im}\lambda \neq 0$:

$$R^2_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix},$$

$$R^{2q}_{\mu\nu} = \left.\begin{pmatrix} R^2_{\mu\nu} & E^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R^2_{\mu\nu} & E^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & R^2_{\mu\nu} & E^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & E^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & R^2_{\mu\nu} \end{pmatrix}\right\} q \text{ клітинок};$$

$A_1 \oplus A_2$ — пряма сума $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ квадратних матриць $A_1$ та $A_2$;

$A_1 \overset{C}{+} A_2$ — блочно-трикутна матриця $\begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, де $A_1$, $A_2$, $C$ — матриці розмірностей $r \times r$, $q \times q$ та $r \times q$.

Вище "0" означає нульові матриці відповідних розмірностей.

Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g}$ розмірності $n$ з абелевим ідеалом $I$ розмірності $n-1$ (див. [18]); такі алгебри називають майже абелевими. Припустимо, що ідеал $I$ породжено базисними елементами $e_1$, $e_2$, $\ldots$, $e_{n-1}$. Тоді алгебру $\mathfrak{g}$ повністю визначено матрицею $M = (m_{kl})$ розмірності $(n-1)\times(n-1)$, яка визначає приєднану дію $\operatorname{ad}_{e_n}$ на ідеалі $I$. Можливі ненульові комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}$ мають вигляд

$$[e_k, e_n] = \sum_{l=1}^{n-1} m_{lk} e_l, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Завдяки можливості масштабування $e_n$ матриця $M$, а отже, і її власні значення визначено з точністю до ненульового множника з базового поля. Матрицю $M$ можна звести до канонічного жорданового вигляду за допомогою заміни базису в ідеалі $I$: $M = J^{r_1}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus J^{r_s}_{\lambda_s}$, де

$r_1+\dots+r_s=n-1$, $r_i\in\mathbb{N}$, $\lambda_i\in\mathbb{C}$, $i=1,\dots,s$. У дійсному випадку пряму суму двох комплексних клітинок $J^{r_i}_{\lambda_i}$ та $J^{r_j}_{\lambda_j}$, де $r_i=r_j$ та $\lambda_i$ є спряженим до $\lambda_j$, замінюють відповідною дійсною жордановою клітинкою $R^{2r_i}_{\mu\nu}$ з $\mu=\operatorname{Re}\lambda_i$ та $\nu=\operatorname{Im}\lambda_i\neq 0$. Канонічна жорданова форма єдина з точністю до перестановок жорданових клітинок.

Будемо використовувати позначення $\mathfrak{J}^{r_1\dots r_s}_{\lambda_1\dots\lambda_s}$ для алгебри $\mathfrak{g}$. Зауважимо, що $\mathfrak{J}^{r'_1\dots r'_{s'}}_{\lambda'_1\dots\lambda'_{s'}}$ є тією самою алгеброю, якщо $s=s'$ та існує ненульова стала $\varkappa$ така, що $(\lambda'_i,r'_i)=(\varkappa\lambda_i,r_i)$, $i=1,\dots,s$, з точністю до перестановок пар $(\lambda_i,r_i)$.

Алгебра Лі $\mathfrak{J}^{r_1\dots r_s}_{\lambda_1\dots\lambda_s}$ є розкладною тоді й лише тоді, коли існує значення $i$ таке, що $(\lambda_i,r_i)=(0,1)$. (Тоді $e_i$ є інваріантом алгебри $\mathfrak{J}^{r_1\dots r_s}_{\lambda_1\dots\lambda_s}$.) Тому вважаємо, що ця умова не виконується і алгебра є нерозкладною. Слід також зауважити, що така алгебра є нільпотентною тоді й лише тоді, коли $\lambda_1=\dots=\lambda_s=0$.

**Найпростіший випадок.** Найпростішим випадком для матриці $M$ є випадок однієї жорданової клітинки з власним значенням $\lambda$, тобто $\mathfrak{g}=\mathfrak{J}^{n-1}_{\lambda}$, $n=2,4,\dots$. Значення $\lambda$ можна віднормувати до 1, якщо $\lambda\neq 0$, але для подальшого розгляду зручно не нормувати $\lambda$.

Ненульові комутаційні співвідношення для алгебри $\mathfrak{J}^{n-1}_{\lambda}$ щонайбільше є такими:

$$[e_1,e_n]=\lambda e_1,\quad [e_k,e_n]=\lambda e_k+e_{k-1},\quad k=2,\dots,n-1,\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

(Перше співвідношення буде нульовим, якщо $\lambda=0$.) Таким чином, трикутна матриця

$$B(\theta)=\exp\left(\theta_n J^{n-1}_{\lambda}\right)\overset{C}{+}E^1,$$
$$C=(\theta_2+\lambda\theta_1,\theta_3+\lambda\theta_2,\dots,\theta_{n-1}+\lambda\theta_{n-2},\lambda\theta_{n-1})^{\mathrm{T}}$$

описує внутрішні автоморфізми алгебри $\mathfrak{J}^{n-1}_{\lambda}$, тобто функціональний базис піднятих інваріантів має вигляд

$$\widehat{\mathcal{I}}_k=e^{\lambda\theta_n}\mathcal{I}_k,\quad k=1,\dots,n-1,\quad \widehat{\mathcal{I}}_n=\mathcal{I}_n+\lambda\sum_{j=1}^{n-1}\theta_j x_j,$$

де

$$\mathcal{I}_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{\theta_n^{k-j}}{(k-j)!}x_j,\ k=1,\dots,n-1,\quad \mathcal{I}_n=\sum_{j=1}^{n-2}\theta_{j+1}x_j+x_n. \tag{1.2}$$

Нільпотентний ($\lambda=0$) і розв'язний ($\lambda\neq 0$) випадки алгебри $\mathfrak{J}_\lambda^{n-1}$ далі потрібно розглядати окремо, оскільки існують певні відмінності у процедурі нормалізації. Розмірність $n=2$ є сингулярною в обох випадках. Алгебра $\mathfrak{J}_0^1$ — двовимірна абелева алгебра Лі, а тому має два незалежних інваріанти, а саме $e_1$ та $e_2$. Алгебра $\mathfrak{J}_1^1$ — двовимірна неабелева алгебра Лі, і в цьому випадку інваріантів немає. Нижче вважаємо, що $n\geqslant 3$.

Алгебра $\mathfrak{J}_0^{n-1}$ є, у деякому сенсі, найпростішою ниткоподібною алгеброю розмірності $n$. Зауважимо, що приєднане представлення алгебри $\mathfrak{J}_0^{n-1}$ не є точним, оскільки центр цієї алгебри ненульовий: $\mathrm{Z}(\mathfrak{J}_0^{n-1})=\langle e_1\rangle\neq\{0\}$. Отже, вираз для матриці $B(\theta)$ містить $n-1$ параметри, виключаючи $\theta_1$, а $\widehat{\mathcal{I}}$ співпадає з $\mathcal{I}$. Очевидно, що елемент $e_1$ породжує центр $\mathrm{Z}(\mathfrak{J}_0^{n-1})$ і є інваріантом, асоційованим із піднятим інваріантом $\mathcal{I}_1=x_1$. Інші $(n-3)$ інваріанти можна знайти за допомогою процедури нормалізації, яку застосовують до піднятих інваріантів $\mathcal{I}_2$, …, $\mathcal{I}_{n-1}$. А саме, розв'яжемо рівняння $\mathcal{I}_2=0$ відносно параметра $\theta_n$ і підставимо отриманий вираз $\theta_n=-x_2/x_1$ в інші підняті інваріанти. Для побудови поліноміального базису отримані інваріанти необхідно додатково домножити на відповідні степені інваріанта $x_1$. Оскільки процедура симетризації є тривіальною в цьому випадку, то знаходимо таку повну систему незалежних узагальнених операторів Казіміра, які є класичними (поліноміальними) операторами Казіміра:

$$\xi_1=e_1,\quad \xi_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!}e_1^{j-2}e_2^{k-j}e_j,\quad k=3,\dots,n-1. \tag{1.3}$$

Уперше ці інваріанти отримано в роботах [214, лема 1] і [268, теорема 4] за допомогою інфінітезимального методу, в роботі [79] — за допомогою методу рухомих реперів (див. приклад 1.8).

У випадку $\lambda \neq 0$ інваріанти алгебри $\mathfrak{J}_\lambda^{n-1}$ можна знайти за допомогою процедури нормалізації, яку застосовують до піднятих інваріантів $\widehat{\mathcal{I}}_1, \ldots, \widehat{\mathcal{I}}_{n-1}$. Розв'язуючи рівняння $\widehat{\mathcal{I}}_2 = 0$ відносно параметра $\theta_n$ і підставляючи отриманий вираз $\theta_n = -x_2/x_1$ у вирази для $\widehat{\mathcal{I}}_1$ та $\widehat{\mathcal{I}}_k/\widehat{\mathcal{I}}_1$, $k = 3, \ldots, n-1$, побудуємо базис інваріантів для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{J}_\lambda^{n-1})$:

$$\zeta_1 = e_1 \exp\left(-\lambda\frac{e_2}{e_1}\right), \quad \zeta_k = \frac{\xi_k}{\xi_1^{k-1}}, \quad k = 3, \ldots, n-1,$$

де $\xi_k$, $k = 1, 3, \ldots, n-1$, визначено формулами (1.3).

Отриманий базис інваріантів еквівалентний базису з [214, лема 2]. Слід зауважити, що будь-який базис для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{J}_\lambda^{n-1})$ включає принаймні один трансцендентний інваріант; інші інваріанти базису можна вибрати раціональними функціями.

Дійсний випадок $\mathfrak{J}_{(\mu,\nu)}^{n-1}$ комплексної алгебри $\mathfrak{J}_{\lambda\lambda^*}^{r\,r}$, де $n = 2r+1$, $r \in \mathbb{N}$, $\mu = \mathrm{Re}\,\lambda$, $\nu = \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, має такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned}
&[e_1, e_n] = \mu e_1 - \nu e_2, \quad [e_2, e_n] = \nu e_1 + \mu e_2, \\
&[e_{2k-1}, e_n] = \mu e_{2k-1} - \nu e_{2k} + e_{2k-3}, \\
&[e_{2k}, e_n] = \nu e_{2k-1} + \mu e_{2k} + e_{2k-2}, \quad k = 2, \ldots, r.
\end{aligned}$$

Повний набір $\widehat{\mathcal{I}}$ піднятих інваріантів має вигляд

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathcal{I}}_{2k-1} = e^{\mu\theta_n}(\mathcal{I}_{2k-1}\cos\nu\theta_n - \mathcal{I}_{2k}\sin\nu\theta_n), \\
&\widehat{\mathcal{I}}_{2k} = e^{\mu\theta_n}(\mathcal{I}_{2k-1}\sin\nu\theta_n + \mathcal{I}_{2k}\cos\nu\theta_n), \\
&\widehat{\mathcal{I}}_n = \sum_{j=1}^{r}\Big(\theta_{2j-1}(\mu x_{2j-1} - \nu x_{2j}) + \theta_{2j}(\nu x_{2j-1} + \mu x_{2j})\Big) + \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{r-1}\Big(\theta_{2j+1}x_{2j-1} + \theta_{2j+2}x_{2j}\Big) + x_n,
\end{aligned}$$

де $k = 1, \ldots, r$,

$$\mathcal{I}_{2k-1} = \sum_{j=1}^{k}\frac{\theta_n^{k-j}}{(k-j)!}x_{2j-1}, \quad \mathcal{I}_{2k} = \sum_{j=1}^{k}\frac{\theta_n^{k-j}}{(k-j)!}x_{2j}.$$

Процедуру нормалізації зручно застосовувати до таких комбінацій піднятих інваріантів $\widehat{\mathcal{I}}_{2k-1}$, $\widehat{\mathcal{I}}_{2k}$, $k=1,\dots,r$:

$$\widehat{\mathcal{I}}_1^2+\widehat{\mathcal{I}}_2^2=(x_1^2+x_2^2)e^{2\mu\theta_n},\quad \operatorname{arctg}\frac{\widehat{\mathcal{I}}_2}{\widehat{\mathcal{I}}_1}=\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}+\nu\theta_n,$$

$$\frac{\widehat{\mathcal{I}}_1\widehat{\mathcal{I}}_3+\widehat{\mathcal{I}}_2\widehat{\mathcal{I}}_4}{\widehat{\mathcal{I}}_1^2+\widehat{\mathcal{I}}_2^2}=\frac{x_1x_3+x_2x_4}{x_1^2+x_2^2}+\theta_n,\quad \frac{\widehat{\mathcal{I}}_2\widehat{\mathcal{I}}_3-\widehat{\mathcal{I}}_1\widehat{\mathcal{I}}_4}{\widehat{\mathcal{I}}_1^2+\widehat{\mathcal{I}}_2^2}=\frac{x_2x_3-x_1x_4}{x_1^2+x_2^2},$$

$$\frac{\widehat{\mathcal{I}}_1\widehat{\mathcal{I}}_{2k-1}+\widehat{\mathcal{I}}_2\widehat{\mathcal{I}}_{2k}}{\widehat{\mathcal{I}}_1^2+\widehat{\mathcal{I}}_2^2}=\frac{x_1\mathcal{I}_{2k-1}+x_2\mathcal{I}_{2k}}{x_1^2+x_2^2},$$

$$\frac{\widehat{\mathcal{I}}_2\widehat{\mathcal{I}}_{2k-1}-\widehat{\mathcal{I}}_1\widehat{\mathcal{I}}_{2k}}{\widehat{\mathcal{I}}_1^2+\widehat{\mathcal{I}}_2^2}=\frac{x_2\mathcal{I}_{2k-1}-x_1\mathcal{I}_{2k}}{x_1^2+x_2^2},\quad k=3,\dots,r.$$

Прирівнюючи третю комбінацію (або другу, якщо $n=3$) до нуля та використовуючи отримане рівняння як нормалізаційне рівняння на параметр $\theta_n$, виключаємо $\theta_n$ з інших комбінацій піднятих інваріантів. У результаті побудуємо такий базис для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{J}^{n-1}_{(\mu,\nu)})$:

$$\zeta_1=(e_1^2+e_2^2)\exp\Big(-2\frac{\mu}{\nu}\operatorname{arctg}\frac{e_2}{e_1}\Big),$$

$$\zeta_3=\nu\frac{e_1e_3+e_2e_4}{e_1^2+e_2^2}-\operatorname{arctg}\frac{e_2}{e_1},\quad \zeta_4=\frac{e_1e_4-e_2e_3}{e_1^2+e_2^2},$$

$$\zeta_{2k-1}=\frac{e_1\hat{\zeta}_{2k-1}+e_2\hat{\zeta}_{2k}}{e_1^2+e_2^2},\quad \zeta_{2k}=\frac{e_2\hat{\zeta}_{2k-1}-e_1\hat{\zeta}_{2k}}{e_1^2+e_2^2},\quad k=3,\dots,r,$$

де

$$\hat{\zeta}_{2k-1}=\sum_{j=1}^{k}\left(-\frac{e_1e_3+e_2e_4}{e_1^2+e_2^2}\right)^{k-j}\frac{e_{2j-1}}{(k-j)!},$$

$$\hat{\zeta}_{2k}=\sum_{j=1}^{k}\left(-\frac{e_1e_3+e_2e_4}{e_1^2+e_2^2}\right)^{k-j}\frac{e_{2j}}{(k-j)!}.$$

Таким чином, алгебра $\mathfrak{J}^2_{(\mu,\nu)}$ має єдиний незалежний інваріант $\zeta_1$, який обов'язково є транцендентним. У випадку $n=2r+1\geqslant 5$ будь-який базис для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{J}^{n-1}_{(\mu,\nu)})$ включає принаймі два трасцендентних інваріанти; інші $n-4$ інваріанти базису можна вибрати раціональними. Оптимальний базис інваріантів з мінімальною кількістю трансцендентних інваріантів складають наведені вище вирази $\zeta_k$, $k=1,3,\dots,n-1$.

**Загальний випадок.** Внутрішні автоморфізми алгебри $\mathfrak{J}^{r_1\dots r_s}_{\lambda_1\dots\lambda_s}$ описує трикутна матриця

$$B(\theta)=\big(\exp(\theta_n J^{r_1}_{\lambda_1})\oplus\dots\oplus\exp(\theta_n J^{r_s}_{\lambda_s})\big)\overset{C}{+}E^1,$$

$$C=(C^{r_1}_{\lambda_1},\dots,C^{r_s}_{\lambda_s})^{\mathrm{T}},$$

$$C^{r_j}_{\lambda_j}=(\lambda_j\theta_{\rho_j+1}{+}\theta_{\rho_j+2},\dots,\lambda_j\theta_{\rho_j+r_j-1}{+}\theta_{\rho_j+r_j},\,\lambda_j\theta_{\rho_j+r_j}),\quad j=1,\dots,s,$$

$$\rho_1=0,\quad \rho_j=r_1+\dots+r_{j-1},\quad j=2,\dots,s.$$

Відповідний повний набір $\widehat{\mathcal{I}}=\check{x}\cdot B(\theta)$ піднятих інваріантів має вигляд

$$\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+q}=e^{\lambda_j\theta_n}\sum_{p=1}^{q}\frac{1}{(q-p)!}\theta_n^{q-p}x_{\rho_j+p},\quad j=1,\dots,s,\quad q=1,\dots,r_j,$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_n=\sum_{j=1}^{s}\left(\lambda_j\sum_{q=1}^{r_j}\theta_{\rho_j+q}x_{\rho_j+q}+\sum_{q=1}^{r_j-1}\theta_{\rho_j+q+1}x_{\rho_j+q}\right)+x_n.$$

Цей набір потрібно модифікувати очевидним чином у дійсному випадку з комплексними власними значеннями.

Процедуру нормалізації можна застосовувати до піднятих інваріантів $\widehat{\mathcal{I}}_1,\dots,\widehat{\mathcal{I}}_{n-1}$ у різні способи: або використовувати одні й ті самі нормалізаційні рівняння для всіх жорданових клітинок, або нормалізувати підняті інваріанти для кожної жорданової клітинки окремо, а потім одночасно нормалізувати деякі підняті інваріанти, які відповідають різним жордановим клітинкам. Можна також використовувати інші проміжні варіанти нормалізації. У будь-якому випадку, процедуру нормалізації зведено до вибору $n-2$ пар серед піднятих інваріантів $\widehat{\mathcal{I}}_1,\ \dots,\ \widehat{\mathcal{I}}_{n-1}$. Перші співвідношення у кожній парі визначають ліві частини відповідних нормалізаційних рівнянь. Підстановка отриманих значень $\theta_n$ у другі співвідношення пари призводить до інваріантів алгебри $\mathfrak{J}^{r_1\dots r_s}_{\lambda_1\dots\lambda_s}$. Побудовані інваріанти утворюють базис для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{J}^{r_1\dots r_s}_{\lambda_1\dots\lambda_s})$ тоді й лише тоді, коли кожен з піднятих інваріантів $\widehat{\mathcal{I}}_1, \dots, \widehat{\mathcal{I}}_{n-1}$ потрапляє у вибрані пари хоч раз.

Для опису інваріантів використовуватимемо стратегію початкової нормалізації піднятих інваріантів для кожної жорданової клітинки окремо. Тоді буде достатнім описати процедуру для різних наборів пар жорданових клітинок. Нижче наведемо коротке пояснення щодо оптимального вибору пар піднятих інваріантів і отримані інваріанти для алгебри, $i, j = 1, \dots, s$:

$J^{r_i}_{\lambda_i},\ J^{r_j}_{\lambda_j}$:

$$\lambda_i \neq 0,\ \lambda_j \neq 0\colon\quad \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+1},\ \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+1},\quad e^{-\lambda_j}_{\rho_i+1} e^{\lambda_i}_{\rho_j+1};$$

$$r_i \geqslant 2,\ \lambda_i = 0,\ r_j \geqslant 2,\ \lambda_j = 0\colon\quad \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+2},\ \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+2},$$
$$e_{\rho_j+2}e_{\rho_i+1} - e_{\rho_i+2}e_{\rho_j+1};$$

$$r_i \geqslant 2,\ \lambda_i \neq 0,\ r_j \geqslant 2,\ \lambda_j = 0\colon\quad \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+2},\ \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+2},\quad \frac{e_{\rho_j+2}}{e_{\rho_j+1}} - \frac{e_{\rho_i+2}}{e_{\rho_i+1}};$$

$$r_i = 1,\ \lambda_i \neq 0,\ r_j \geqslant 2,\ \lambda_j = 0\colon\quad \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+1},\ \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+2},\ e_{\rho_i+1}\exp\Bigl(-\lambda_i\frac{e_{\rho_j+2}}{e_{\rho_j+1}}\Bigr);$$

$J^{r_i}_{\lambda_i},\ R^{2r_j}_{\mu_j\nu_j},\ \lambda_i, \mu_j, \nu_j \in \mathbb{R},\ \nu_j \neq 0$:

$$r_i \geqslant 2,\ r_j \geqslant 2\colon\quad \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+2},\ \frac{\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+2}\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+3} - \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+1}\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+4}}{\widehat{\mathcal{I}}^2_{\rho_j+1} + \widehat{\mathcal{I}}^2_{\rho_j+2}},$$
$$\frac{e_{\rho_j+1}e_{\rho_j+3} + e_{\rho_j+2}e_{\rho_j+4}}{e^2_{\rho_j+1} + e^2_{\rho_j+2}} - \frac{e_{\rho_i+2}}{e_{\rho_i+1}};$$

$$r_i = 1 \text{ або } r_j = 1\colon\quad \widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+1},\ \operatorname{arctg}\frac{\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+2}}{\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+1}},\quad e_{\rho_i+1}\exp\Bigl(-\frac{\lambda_i}{\nu_j}\operatorname{arctg}\frac{e_{\rho_j+2}}{e_{\rho_j+1}}\Bigr);$$

$R^{2r_i}_{\mu_i\nu_i},\ R^{2r_j}_{\mu_j\nu_j},\ \mu_i,\nu_i,\mu_j,\nu_j\in\mathbb{R},\ \nu_i\nu_j\neq 0\colon$

$$r_i\geqslant 2,\ r_j\geqslant 2\colon\quad \frac{\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+2}\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+3}-\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+1}\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+4}}{\widehat{\mathcal{I}}^2_{\rho_i+1}+\widehat{\mathcal{I}}^2_{\rho_i+2}},\ \frac{\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+2}\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+3}-\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+1}\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+4}}{\widehat{\mathcal{I}}^2_{\rho_j+1}+\widehat{\mathcal{I}}^2_{\rho_j+2}},$$

$$\frac{e_{\rho_j+1}e_{\rho_j+3}+e_{\rho_j+2}e_{\rho_j+4}}{e^2_{\rho_j+1}+e^2_{\rho_j+2}}-\frac{e_{\rho_i+1}e_{\rho_i+3}+e_{\rho_i+2}e_{\rho_i+4}}{e^2_{\rho_i+1}+e^2_{\rho_i+2}};$$

$$r_i=1 \text{ або } r_j=1\colon\quad \operatorname{arctg}\frac{\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+2}}{\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_i+1}},\ \operatorname{arctg}\frac{\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+2}}{\widehat{\mathcal{I}}_{\rho_j+1}},$$

$$\nu_i\operatorname{arctg}\frac{e_{\rho_j+2}}{e_{\rho_j+1}}-\nu_j\operatorname{arctg}\frac{e_{\rho_i+2}}{e_{\rho_i+1}}.$$

Особливим випадком є $r_1=\dots=r_s=1$, коли всі жорданові клітинки одновимірні, причому $s=n-1$. (Нагадаємо, що $\lambda_k$ вважається ненульовим, якщо $r_k=1$.) У цьому випадку повний набір узагальнених операторів Казіміра визначено виразами $e_1^{-\lambda_j}e_j^{\lambda_1}$, $j=2,\dots,n-1$. У випадку $\lambda_j/\lambda_1\in\mathbb{Q}$ для всіх $j$ інваріанти можна зробити раціональними піднесенням до певних степенів. Якщо додатково не всі $\lambda_1$, …, $\lambda_{n-1}$ одного знаку, то $\mathrm{Inv}(\mathfrak{J}^{r_1\dots r_s}_{\lambda_1\dots\lambda_s})$ має поліноміальний базис, тобто базис, утворений звичайними операторами Казіміра.

Отже, $\mathrm{Inv}(\mathfrak{J}^{r_1\dots r_s}_{\lambda_1\dots\lambda_s})$ має поліноміальний базис лише у двох випадках:

1) $\lambda_1=\dots=\lambda_s=0$, тобто алгебра є нільпотентною;
2) $s=n-1>2$, $r_1=\dots=r_s=1$, всі відношення $\lambda_j/\lambda_1$, $j=2,\dots$, $n-1$, — раціональні, причому не всі $\lambda_1$, …, $\lambda_{n-1}$ одного знаку.

## 1.6. Розв'язні алгебри Лі з нільрадикалом $\mathfrak{J}_0^{n-1}$

Розглянемо комплексні розв'язні алгебри Лі з нільрадикалами, ізоморфними $\mathfrak{J}_0^{n-1}$, $n\geqslant 4$ (тобто нільрадикали яких є ниткоподібними майже абелевими алгебрами). Усі можливі типи таких алгебр описано у теоремах 1–3 роботи [268]. Їх розмірності дорівнюють $n+1$ або $n+2$. Нижче наведено лише ненульові комутаційні співвідношення, додаткові до комутаційних співвідношень між базисними елементами нільрадикала

$$[e_k, e_n] = e_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Існує три нееквівалентних класи таких алгебр розмірності $n+1$.

Перша серія $\mathfrak{s}_{1,n+1}$ утворена алгебрами Лі $\mathfrak{s}_{1,n+1}^{\alpha\beta}$ з додатковими ненульовими комутаційними співвідношеннями

$$[e_k, e_{n+1}] = \gamma_k e_k, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad [e_n, e_{n+1}] = \alpha e_n,$$

де $\gamma_k := (n-k-1)\alpha + \beta$. Внаслідок можливості масштабування $e_{n+1}$ пару параметрів $(\alpha, \beta)$ можна нормалізувати до однієї з пар $(1, \beta)$, $(0, 1)$. Нижче вважаємо, що параметри приймають лише нормалізовані значення. Тоді будь-які алгебри в серіях $\mathfrak{s}_{1,n+1}$ будуть нееквівалентними. Для значень $(\alpha, \beta) \in \{(1, 0), (1, 2-n), (0, 1)\}$ відповідні алгебри мають деякі особливі властивості.

Другий клас включає єдину алгебру:

$$[e_k, e_{n+1}] = \gamma_k e_k, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad [e_n, e_{n+1}] = e_n + e_{n+1},$$

де $\gamma_k := n-k$.

Алгебру Лі $\mathfrak{s}_{3,n+1}^{a_3,\dots,a_{n-1}}$ з останньої $(n-3)$-параметричної серії $\mathfrak{s}_{3,n+1}$ визначено комутаційними співвідношеннями

$$[e_k, e_{n+1}] = e_k + \sum_{i=1}^{k-2} a_{k-i+1} e_i, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

де $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 3, \dots, n-1$, причому $a_j \neq 0$ для деяких значень $j$.

Єдина $(n+2)$-вимірна алгебра $\mathfrak{s}_{4,n+2}$ заданого типу має такі додаткові ненульові комутаційні співвідношення:

$$[e_k, e_{n+1}] = \gamma_k e_k, \quad [e_n, e_{n+1}] = e_n,$$
$$[e_k, e_{n+2}] = e_k, \quad k = 1, \dots, n-1,$$

де $\gamma_k := n-k-1$.

Матриці, що визначають внутрішні автоморфізми цих алгебр, зручно представити у вигляді $B(\theta)=B_1B_2B_3$, де

$$B_1=\exp(\theta_1\hat{\mathrm{ad}}_{e_1})\cdots\exp(\theta_{n-1}\hat{\mathrm{ad}}_{e_{n-1}}),\quad B_2=\exp(-\theta_n\hat{\mathrm{ad}}_{e_n}),$$
$$B_3=\exp(-\theta_{n+1}\hat{\mathrm{ad}}_{e_{n+1}}),$$

у $(n+2)$-вимірному випадку або

$$B_3=\exp(-\theta_{n+1}\hat{\mathrm{ad}}_{e_{n+1}})\exp(-\theta_{n+2}\hat{\mathrm{ad}}_{e_{n+2}})$$

у $(n+2)$-вимірному випадку. Матриці $B_1$, $B_2$ та $B_3$ зручно представити у блочному вигляді згідно з розбиттям базису розглядуваної алгебри на базис $(e_1,\dots,e_{n-1})$ максимального абелевого ідеалу та його доповнення.

Для алгебри $\mathfrak{s}^{\alpha\beta}_{1,n+1}$

$$B_1=E^{n-1}\overset{C}{+}E^2,\quad C=\begin{pmatrix}\theta_2 & \gamma_1\theta_1\\ \theta_3 & \gamma_2\theta_2\\ \cdots & \cdots\\ \theta_{n-1} & \gamma_{n-2}\theta_{n-2}\\ 0 & \gamma_{n-1}\theta_{n-1}\end{pmatrix},$$

$$B_2=\exp\left(\theta_nJ_0^{n-1}\right)\oplus\begin{pmatrix}1 & -\alpha\theta_n\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$B_3=\mathrm{diag}(e^{\gamma_1\theta_{n+1}},\dots,e^{\gamma_{n-1}\theta_{n+1}})\oplus\mathrm{diag}(e^{\alpha\theta_{n+1}},1).$$

Тому відповідний повний набір $\widehat{\mathcal{I}}=\check{x}\cdot B(\theta)$ піднятих інваріантів має вигляд

$$\widehat{\mathcal{I}}_k=e^{\gamma_k\theta_{n+1}}\mathcal{I}_k,\quad k=1,\dots,n-1,$$
$$\widehat{\mathcal{I}}_n=e^{\alpha\theta_{n+1}}\mathcal{I}_n,\quad \widehat{\mathcal{I}}_{n+1}=-\alpha\theta_n\mathcal{I}_n+\mathcal{I}_{n+1},$$

де $\mathcal{I}_1$, …, $\mathcal{I}_n$ визначено формулами (1.2) і

$$\mathcal{I}_{n+1}:=\sum_{j=1}^{n-1}\gamma_j\theta_jx_j+x_{n+1}.$$

Для алгебри $\mathfrak{s}_{2,n+1}$ лише матриці $B_2$, $B_3$ та підняті інваріанти $\widehat{\mathcal{I}}_n$, $\widehat{\mathcal{I}}_{n+1}$ відрізняються від аналогічних об'єктів алгебри $\mathfrak{s}^{\alpha\beta}_{1,n+1}$:

$$B_2 = \exp\left(\theta_n J_0^{n-1}\right) \oplus \begin{pmatrix} 1 & e^{-\theta_n} - 1 \\ 0 & e^{-\theta_n} \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \operatorname{diag}\left(e^{\gamma_1\theta_{n+1}}, \dots, e^{\gamma_{n-1}\theta_{n+1}}\right) \oplus \begin{pmatrix} e^{\theta_{n+1}} & 0 \\ e^{\theta_{n+1}} - 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_n = \big(e^{\theta_{n+1}-\theta_n} - e^{-\theta_n} + 1\big)\mathcal{I}_n + e^{-\theta_n}\big(e^{\theta_{n+1}} - 1\big)\mathcal{I}_{n+1},$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_{n+1} = \big(e^{-\theta_n} - 1\big)\mathcal{I}_n + e^{-\theta_n}\mathcal{I}_{n+1}.$$

Усі згадані $(n+1)$-вимірні алгебри мають точно $n-3$ незалежних інваріанти, які можна знайти за допомогою процедури нормалізації, застосованої до піднятих інваріантів $\widehat{\mathcal{I}}_1, \dots, \widehat{\mathcal{I}}_{n-1}$. Оскільки інваріанти цих алгебр залежать лише від елементів абелевого ідеалу, то процедура симетризації є тривіальною і можна пропустити цей крок алгоритму.

Для алгебр $\mathfrak{s}^{\alpha\beta}_{1,n+1}$, $(\alpha,\beta) \neq (1, 2-n)$ та $\mathfrak{s}_{2,n+1}$ розв'язуємо рівняння $\widehat{\mathcal{I}}_1 = 1$ та $\widehat{\mathcal{I}}_2 = 0$ відносно параметрів $e^{\theta_{n+1}}$ та $\theta_n$. Після підстановки отриманих виразів $e^{\theta_{n+1}} = x_1^{-1/\gamma_1}$ та $\theta_n = -x_2/x_1$ в інші вирази для піднятих інваріантів, отримаємо повний набір узагальнених операторів Казіміра

$$\xi_1^{-(k-1)\frac{(n-3)\alpha+\beta}{(n-2)\alpha+\beta}}\xi_k, \quad k = 3, \dots, n-1,$$

де $\xi_k$, $k = 1, 3, \dots, n-1$, визначено формулами (1.3). Для алгебри $\mathfrak{s}_{2,n+1}$ потрібно покласти $\alpha = \beta = 1$.

Випадок алгебри $\mathfrak{s}^{1,2-n}_{1,n+1}$ є особливим щодо процедури нормалізації, тому розглянемо його окремо. У цьому випадку $\gamma_1 = 0$ та $\widehat{\mathcal{I}}_1 = x_1$, тобто базисний елемент $e_1$, що породжує центр алгебри $\mathfrak{s}^{1,2-n}_{1,n+1}$, є одним з її інваріантів. З системи $\widehat{\mathcal{I}}_2 = 0$, $\widehat{\mathcal{I}}_3 = 1$ отримаємо вирази для $\theta_n$ та $e^{\theta_{n+1}}$ і підставляємо їх в інші підняті інваріанти. Додатково використовуємо можливість домноження інваріантів на степені інваріанта $x_1$. У результаті отримаємо повну множину узагальнених операторів Казіміра:

$$\xi_1, \quad \frac{\xi_k^2}{\xi_3^{k-1}}, \quad k=4,\dots,n-1.$$

Обчислення для алгебри Лі $\mathfrak{s}_{3,n+1}^{a_3,\dots,a_{n-1}}$ аналогічні, але більш громіздкі:

$$B_1 = E^{n-1} \overset{C}{+} E^2,$$

$$C = \begin{pmatrix} \theta_2 & \theta_1 + a_3\theta_3 + a_4\theta_4 + \dots + a_{n-1}\theta_{n-1} \\ \theta_3 & \theta_2 + a_3\theta_4 + a_4\theta_5 + \dots + a_{n-2}\theta_{n-1} \\ \dots & \dots \\ \theta_{n-3} & \theta_{n-3} + a_3\theta_{n-2} \\ \theta_{n-1} & \theta_{n-2} \\ 0 & \theta_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \exp\left(\theta_n J_0^{n-1}\right) \oplus E^2,$$

$$B_3 = e^{\theta_{n+1}}\left(E^{n-1} + \sum_{m=2}^{n-2}\left(J_0^{n-1}\right)^m \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{b_{mi}}{i!}\theta_{n+1}^i\right) \oplus E^2,$$

$$b_{mi} = \sum_{\substack{3\leqslant s_1,\dots,s_i\leqslant n-1\\ s_1+\dots+s_i=m+i}} a_{s_1}\cdots a_{s_i}.$$

Відповідний повний набір $\widehat{\mathcal{I}} = \check{x}\cdot B(\theta)$ піднятих інваріантів має вигляд

$$\widehat{\mathcal{I}}_k = e^{\theta_{n+1}}\left(\mathcal{I}_k + \sum_{m=2}^{k-1}\mathcal{I}_{k-m}\sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{b_{mi}}{i!}\theta_{n+1}^i\right), \quad k=1,\dots,n-1,$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_n = \mathcal{I}_n, \quad \widehat{\mathcal{I}}_{n+1} = \mathcal{I}_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} x_k \sum_{i=1}^{n-k-2}\theta_{k+1+i}a_{i+2}.$$

Алгебра Лі $\mathfrak{s}_{3,n+1}^{a_3,\dots,a_{n-1}}$ має $n-3$ інваріанти при будь-яких значеннях своїх параметрів. Застосовуючи процедуру нормалізації до піднятих інваріантів $\widehat{\mathcal{I}}$, розв'язуємо систему $\mathcal{I}_1 = 1$, $\mathcal{I}_2 = 0$ відносно параметрів $\theta_n$ та $\theta_{n+1}$. Далі, підставляючи отримані вирази $\theta_n = -x_2/x_1$ та

$\theta_{n+1} = -\ln x_1$ в інші підняті інваріанти $\mathcal{I}$, побудуємо повну множину узагальнених операторів Казіміра

$$\xi_1^{-k+1}\xi_k + \sum_{m=2}^{k-1} \xi_1^{-k+m+1}\xi_{k-m} \sum_{i=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{b_{mi}}{i!}(-\ln \xi_1)^i, \quad k = 3, \ldots, n-1,$$

де $\xi_k$, $k = 1, 3, \ldots, n-1$, задано формулами (1.3).

Для алгебри $\mathfrak{s}_{4,n+2}$

$$B_1 = E^{n-1} \overset{C}{+} E^3,$$

$$C = \begin{pmatrix} \theta_2 & \gamma_1\theta_1 & \theta_1 \\ \theta_3 & \gamma_2\theta_2 & \theta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \theta_{n-1} & \gamma_{n-2}\theta_{n-2} & \theta_{n-2} \\ 0 & \gamma_{n-1}\theta_{n-1} & \theta_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_k := n - k - 1,$$

$$B_2 = \exp\left(\theta_n J_0^{n-1}\right) \oplus \begin{pmatrix} 1 & -\theta_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = e^{\theta_{n+2}} \operatorname{diag}\left(e^{\gamma_1\theta_{n+1}}, \ldots, e^{\gamma_{n-1}\theta_{n+1}}\right) \oplus \operatorname{diag}\left(e^{\alpha\theta_{n+1}}, 1, 1\right),$$

тобто набір $\widehat{\mathcal{I}} = \check{x} \cdot B(\theta)$ піднятих інваріантів має вигляд

$$\widehat{\mathcal{I}}_k = e^{\gamma_k\theta_{n+1}+\theta_{n+2}}\mathcal{I}_k, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_n = e^{\theta_{n+1}}\mathcal{I}_n, \quad \widehat{\mathcal{I}}_{n+1} = \mathcal{I}_{n+1} - \theta_n\mathcal{I}_n,$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_{n+2} = \mathcal{I}_{n+2} := \sum_{j=1}^{n-1} \theta_j x_j + x_{n+2}.$$

Набір $n-4$ інваріантів алгебри $\mathfrak{s}_{4,n+2}$ знаходимо за допомогою процедури нормалізації, яку застосовуємо до піднятих інваріантів $\widehat{\mathcal{I}}_1$, ..., $\widehat{\mathcal{I}}_{n-1}$. Розв'язавши систему $\widehat{\mathcal{I}}_1 = 1$, $\widehat{\mathcal{I}}_2 = 0$, $\widehat{\mathcal{I}}_3 = 1$ відносно параметрів $\theta_n$,

$\theta_{n+1}$, $\theta_{n+2}$ і виключивши ці параметри з інших піднятих інваріантів $\widehat{\mathcal{I}}$, отримаємо повний набір інваріантів алгебри $\mathfrak{s}_{4,n+2}$:

$$\frac{\xi_k^2}{\xi_3^{k-1}}, \quad k = 4, \dots, n-1,$$

де $\xi_k$, $k = 3, \dots, n-1$, задано формулами (1.3).

Усі побудовані вище набори узагальнених операторів Казіміра алгебр Лі з нільрадикалами, ізоморфними $\mathfrak{J}_0^{n-1}$, співпадають з інваріантами, наведеними в теоремах 5 і 6 роботи [268].

## 1.7. Нільпотентна алгебра строго верхньотрикутних матриць

Розглянемо нільпотентну алгебру Лі $\mathfrak{t}_0(n)$, ізоморфну алгебрі Лі строго верхньотрикутних матриць розмірності $n \times n$ над полем $\mathbb{F}$, де $\mathbb{F}$ — дійсне або комплексне поле. Алгебра $\mathfrak{t}_0(n)$ має розмірність $n(n-1)/2$, і це алгебра Лі, асоційовано з групою Лі $\mathrm{T}_0(n)$ верхньотрикутних уніпотентних матриць розмірності $n \times n$, тобто верхньотрикутних матриць з одиницями на діагоналі.

Базисні елементи алгебри $\mathfrak{t}_0(n)$ зручно пронумерувати за допомогою пар "зростаючих" індексів аналогічно канонічному базису $\{E_{ij}^n, i < j\}$ ізоморфної матричної алгебри. Отже, базисні елементи $e_{ij} \sim E_{ij}^n$, $i < j$, задовольняють комутаційні співвідношення $[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk}e_{il} - \delta_{li}e_{kj}$, де $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. Тут і надалі індекси $i$, $j$, $k$ та $l$ пробігають значення від 1 до $n$, нижче будемо вказувати лише додаткові обмеження на індекси.

Нехай $e_{ji}^*$, $x_{ji}$ та $y_{ij}$ відповідно позначають базисний елемент, координатну функцію в дуальному просторі $\mathfrak{t}_0^*(n)$ і координатну функцію в $\mathfrak{t}_0(n)$, що відповідають базисному елементу $e_{ij}$, $i < j$. Доповнимо множини $x_{ji}$ та $y_{ij}$ до матриць $X$ та $Y$ нулями. Тоді $X$ буде строго нижньотрикутною матрицею, а $Y$ — строго верхньотрикутною матрицею.

**Лема 1.9.** *Повний набір незалежних піднятих інваріантів групи* $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_0(n)}$ *вичерпують такі вирази:*

$$\mathcal{I}_{ij} = x_{ij} + \sum_{i<i'} b_{ii'} x_{i'j} + \sum_{j'<j} b_{j'j} x_{ij'} + \sum_{i<i',\, j'<j} b_{ii'} \widehat{b}_{j'j} x_{i'j'}, \quad j < i,$$

*де* $B = (b_{ij})$ *— довільна матриця з* $\mathrm{T}_0(n)$*,* $\widehat{B} = (\widehat{b}_{ij})$ *— матриця обернена до* $B$*.*

*Доведення.* Приєднану дію матриці $B \in \mathrm{T}_0(n)$ на матрицю $Y$ визначено формулою $\mathrm{Ad}_B Y = BYB^{-1}$, тобто

$$\mathrm{Ad}_B \sum_{i<j} y_{ij} e_{ij} = \sum_{i<j} (BYB^{-1})_{ij} e_{ij} = \sum_{i\leqslant i'<j'\leqslant j} b_{ii'} y_{i'j'} \widehat{b}_{j'j} e_{ij}.$$

Після замін $e_{ij} \to x_{ji}$, $y_{ij} \to e^*_{ji}$, $b_{ij} \leftrightarrow \widehat{b}_{ij}$ в останній рівності, отримаємо представлення для коприєднаної дії матриці $B$:

$$\mathrm{Ad}^*_B \sum_{i<j} x_{ji} e^*_{ji} = \sum_{i\leqslant i'<j'\leqslant j} b_{j'j} x_{ji} \widehat{b}_{ii'} e^*_{j'i'} = \sum_{i'<j'} (BXB^{-1})_{j'i'} e^*_{j'i'}.$$

Таким чином, елементи $\mathcal{I}_{ij}$, $j < i$, матриці

$$\mathcal{I} = BXB^{-1}, \quad B \in \mathrm{T}_0(n),$$

утворюють повний набір функціонально незалежних піднятих інваріантів групи $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_0(n)}$. □

**Зауваження 1.10.** Центром групи $\mathrm{T}_0(n)$ є

$$\mathrm{Z}(\mathrm{T}_0(n)) = \{E^n + b_{1n} E^n_{1n},\ b_{1n} \in \mathbb{F}\}.$$

Група внутрішніх автоморфізмів групи $\mathfrak{t}_0(n)$ ізоморфна фактор-групі $\mathrm{T}_0(n)/\mathrm{Z}(\mathrm{T}_0(n))$, а тому має розмірність $\frac{1}{2}n(n-1)-1$. Параметр $b_{1n}$ в отриманому представленні для піднятих інваріантів є несуттєвим.

Через $A^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}$, де $i_1 \leqslant i_2$, $j_1 \leqslant j_2$, позначимо підматрицю $(a_{ij})^{i=i_1,\dots,i_2}_{j=j_1,\dots,j_2}$ матриці $A = (a_{ij})$.

**Лема 1.11.** *Поліноми*

$$\det X_{1,k}^{n-k+1,n}, \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

*є функціонально незалежними інваріантами групи* $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_0(n)}$.

*Доведення.* З отриманої формули для піднятих інваріантів $\mathcal{I}$ і (трикутної) структури матриць $B$ та $X$ маємо

$$\mathcal{I}_{1,k}^{n-k+1,n} = B_{n-k+1,n}^{n-k+1,n} X_{1,k}^{n-k+1,n} \widehat{B}_{1,k}^{1,k}, \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

(Ці підматриці мають розмірність $k \times k$ і відповідно знаходяться в лівому нижньому куті матриці $\mathcal{I}$, у правому нижньому куті матриці $B$, у лівому нижньому куті матриці $X$ і й лівому верхньому куті матриці $\widehat{B}$.) Тоді

$$\det \mathcal{I}_{1,k}^{n-k+1,n} = \det X_{1,k}^{n-k+1,n}, \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

оскільки $\det B_{n-k+1,n}^{n-k+1,n} = \det \widehat{B}_{1,k}^{1,k} = 1$, тобто $\det X_{1,k}^{n-k+1,n}$ — інваріанти групи $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_0(n)}$ внаслідок означення інваріанта. Функціональна незалежність побудованих інваріантів є очевидною. □

**Лема 1.12.** *Кількість функціонально незалежних інваріантів групи* $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_0(n)}$ *не більша за* $\left[\frac{n}{2}\right]$.

*Доведення.* Оскільки $\det B = 1$, то $\widehat{b}_{ij}$ для $i < j$ є алгебраїчним доповненням до $b_{ij}$, звідки

$$\widehat{b}_{ij} = (-1)^{i+j} \det B_{i+1,j}^{i,j-1} = -b_{ij} + \cdots,$$

де решта доданків є поліномами від $b_{i'j'}$, $i' = i, \ldots, j-1$, $j' = i+1, \ldots, j$, $(i', j') \neq (i, j)$, $i' < j'$. Ці елементи $b_{i'j'}$ знаходяться над головною діагоналлю матриці $B$, не правіше та не вище від $b_{ij}$.

Упорядкуємо підняті інваріанти $\mathcal{I}_{ij}$, $j < i$, $i + j \neq n+1$, таким чином:

$$\mathcal{I}_{n-k+1,j}, \quad j = 1, \ldots, \min(k-1, n-k),$$
$$\mathcal{I}_{ik}, \quad i = \max(k+1, n-k+2), \ldots, n, \quad k = 2, \ldots, n-1,$$

а потім перенумеруємо їх. Матрицю нумерації можна представити як

$$\begin{pmatrix}
\times &&&&&&&& \\
m_n{-}1 & \times &&&&&&& \\
m_n{-}5 & m_n{-}4 & \times &&&&&& \\
m_n{-}11 & m_n{-}10 & m_n{-}9 & \times &&&&& \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots &&&& \\
7 & 8 & 9 & \times & \dots & \times &&& \\
3 & 4 & \times & 10 & \dots & m_n{-}6 & \times && \\
1 & \times & 5 & 11 & \dots & m_n{-}7 & m_n{-}2 & \times & \\
\times & 2 & 6 & 12 & \dots & m_n{-}8 & m_n{-}3 & m_n & \times
\end{pmatrix},$$

де $m_n = \dfrac{n(n-1)}{2} - \left[\dfrac{n}{2}\right]$.

Отриманий упорядкований набір піднятих інваріантів позначимо як $\mathcal{I}_{\prec}$.

Аналогічно упорядкуємо та перенумеруємо параметри $b_{ij}$, $i < j$, $i + j \neq n + 1$:

$$b_{n-k+1,j}, \quad j = \max(k+1, n-k+2), \dots, n,$$
$$b_{ik}, \quad i = 1, \dots, \min(k-1, n-k), \quad k = 2, \dots, n-1.$$

Відповідну матрицю нумерації можна отримати з попередньої матриці нумерації за допомогою транспонування, інверсії порядку вибраних пар з рядків і стовпчиків, а також інверсії всередині цих пар:

$$\begin{pmatrix}
\times & 2 & 5 & 10 & \dots & m_n{-}6 & m_n{-}2 & m_n & \times \\
& \times & 6 & 11 & \dots & m_n{-}7 & m_n{-}3 & \times & m_n{-}1 \\
&& \times & 12 & \dots & m_n{-}8 & \times & m_n{-}5 & m_n{-}4 \\
&&& \times & \dots & \times & m_n{-}11 & m_n{-}10 & m_n{-}9 \\
&&&& \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
&&&&& \times & 7 & 8 & 9 \\
&&&&&& \times & 3 & 4 \\
&&&&&&& \times & 1 \\
&&&&&&&& \times
\end{pmatrix}.$$

Отриманий упорядкований набір параметрів позначимо як $b_{\succ}$.

З огляду на представлення піднятих інваріантів, матриця Якобі $\partial\mathcal{I}_{\prec}/\partial b_{\succ}$ є блочно-нижньотрикутною розмірності $m_n$ з невиродженими блоками

$$X_{1,k}^{n-k+1,n},\ (X_{1,k}^{n-k+1,n})^{\mathrm{T}},\ k=1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right],$$

$$X_{1,k}^{n-k+1,n},\ (X_{1,k}^{n-k+1,n})^{\mathrm{T}},\ k=\left[\frac{n}{2}\right],\dots,1,$$

на головній діагоналі. Таким чином, ця матриця є невиродженою, а тому ранг повної матриці Якобі похідних піднятих інваріантів відносно параметрів не менший за $m_n$. Тоді для кількості незалежних інваріантів $N_{\mathfrak{t}_0(n)}$ групи $\mathfrak{t}_0(n)$ маємо

$$\begin{aligned}N_{\mathfrak{t}_0(n)} &= \dim\mathfrak{t}_0(n) - \operatorname{rank}\mathfrak{t}_0(n)\\ &\leqslant \frac{n(n-1)}{2} - m_n = \left[\frac{n}{2}\right],\end{aligned}$$

що завершує доведення леми. □

**Теорема 1.13.** *Базис для* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_0(n))$ *утворюють оператори Казіміра*

$$\det(e_{ij})_{j=n-k+1,n}^{i=1,\dots,k},\quad k=1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

*Доведення.* Із лем 1.11, 1.12 випливає, що вирази з леми 1.11 утворюють базис для $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_0(n)})$. Оскільки базисні елементи алгебри, асоційовані з координатними функціями в цих виразах, комутують між собою, то процедура симетризації є тривіальною. □

Вперше гіпотезу про цей базис інваріантів сформульовано С. Тремблаєм та П. Вінтерніцом у роботі [273].

**Зауваження 1.14.** Інше доведення теореми 1.13 з використанням процедури нормалізації представлено у роботі [82, теорема 1 та наслідок 1]. Також твердження щодо базису для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_0(n))$ можна виокремити як частинний випадок теореми 1.21; див. обговорення наприкінці § 1.8.

## 1.8. Розв'язні алгебри Лі з трикутними нільрадикалами і діагональними нільнезалежними елементами

**Структура алгебр.** Розглянемо розв'язну алгебру Лі $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ з нільрадикалом $\mathrm{NR}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$, ізоморфним $\mathfrak{t}_0(n)$, та $s$ нільнезалежними елементами $f_p$, $p=1,\dots,s$, які діють на елементи нільрадикала аналогічно тому, як діагональні матриці $\Gamma_p=\mathrm{diag}(\gamma_{p1},\dots,\gamma_{pn})$ діють на строго верхньотрикутні матриці. Матриці $\Gamma_p$, $p=1,\dots,s$, та одинична матриця повинні бути лінійно незалежними, оскільки інакше $\mathrm{NR}(\mathfrak{t}_\gamma(n))\neq\mathfrak{t}_0(n)$. Параметричну матрицю $\gamma=(\gamma_{pi})$ визначено з точністю до домноження на невироджену матрицю розмірності $s\times s$ та однорідних по рядках зсувів значень елементів. Іншими словами, алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ та $\mathfrak{t}_{\gamma'}(n)$ ізоморфні тоді, коли існують $\lambda\in\mathrm{GL}(s,\mathbb{F})$ та $\mu\in\mathbb{F}^s$ такі, що

$$\gamma'_{pi}=\sum_{p'=1}^{s}\lambda_{pp'}\gamma_{p'i}+\mu_p,\quad p=1,\dots,s,\ i=1,\dots,n.$$

Параметричні матриці $\gamma$ та $\gamma'$ вважаємо еквівалентними. Із точністю до цієї еквівалентності можна накласти додаткову умову на параметри алгебри: $\mathrm{tr}\,\Gamma_p=\sum_i\gamma_{pi}=0$. Отже, алгебру $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ природним чином можна вкласти в $\mathfrak{st}(n)$ як ідеал при ідентифікації $\mathrm{NR}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ з $\mathfrak{t}_0(n)$ та $f_p$ з $\Gamma_p$.

Виберемо конкатинацію канонічного базису $\mathrm{NR}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ та $s$-елементного набору $(f_p,p=1,\dots,s)$ як канонічний базис $\mathfrak{t}_\gamma(n)$. У базисі алгебри $\mathrm{NR}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ використаємо "матричну" нумерацію базисних елементів $e_{ij}$, $i<j$, "зростаючою" парою індексів аналогічно до ізоморфної матричної алгебри $\mathfrak{t}_0(n)$.

Тут і нижче через $E^n_{ij}$ (для фіксованих значень $i$ та $j$) позначено матрицю $(\delta_{ii'}\delta_{jj'})$ розмірності $n\times n$ з $i'$ та $j'$, що відповідно пробігають номери рядків і стовпчиків, тобто це матриця розмірності $n\times n$ з одиницею на перетині $i$-го рядка та $j$-го стовпчика і нулями на інших місцях. Індекси $i$, $j$, $k$, $l$ змінюються від 1 до $n$. Надалі вказуємо лише додаткові обмеження на відповідні індекси. Індекс $p$ змінюється від 1 до $s$, індекс $q$ змінюється від 1 до $s'$. Якщо не зазначено інше, за індексами $p$ та $q$, що повторюються, розуміємо підсумовування. Цілий параметр $s$ належить інтервалу від 0 до $n-1$. У випадку $s=0$ вважаємо, що $\gamma=0$ і всі члени з індексом $p$ потрібно опустити. Значення $s'$ ($s'<s$) визначено у твердженні 1.18 нижче.

Отже, базисні елементи $e_{ij}\sim E^n_{ij}$, $i<j$, та $f_p\sim\sum_i\gamma_{pi}E^n_{ii}$ задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$[e_{ij},e_{i'j'}]=\delta_{i'j}e_{ij'}-\delta_{ij'}e_{i'j},\quad [f_p,e_{ij}]=(\gamma_{pi}-\gamma_{pj})e_{ij},$$

де $\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

Алгебру Лі $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ можна розглядати як алгебру Лі підгрупи

$$\mathrm{T}_\gamma(n)=\{B\in\mathrm{T}(n)\mid \exists\,\varepsilon_p\in\mathbb{F}\colon b_{ii}=e^{\gamma_{pi}\varepsilon_p}\}$$

групи Лі $\mathrm{T}(n)$ невироджених верхньотрикутних $n\times n$ матриць.

**Підняті інваріанти коприєднаної дії.** Нехай через $e^*_{ji}$, $x_{ji}$ та $y_{ij}$ відповідно позначено базисний елемент і координатну функцію у дуальному просторі $\mathfrak{t}^*_\gamma(n)$, а також координатну функцію в $\mathfrak{t}_\gamma(n)$, асоційовані з базисним елементом $e_{ij}$, $i<j$. Зокрема,

$$\langle e^*_{j'i'},e_{ij}\rangle=\delta_{ii'}\delta_{jj'}.$$

Зворотній порядок індексів для об'єктів, пов'язаних з дуальним простором, є природним (див., наприклад, [237, § 1.4]) і додатково виправданим спрощенням матричних представлень піднятих інваріантів. Через $f^*_p$, $x_{p0}$ та $y_{p0}$ позначено аналогічні об'єкти, що відповідають базисним елементам $f_p$. Додатково покладемо $y_{ii}=\gamma_{pi}y_{p0}$, а потім доповнимо множини $x_{ji}$ та $y_{ij}$ до матриць $X$ та $Y$ нулями. Таким чином, $X$ — строго нижньотрикутна матриця, а $Y$ — нестрого верхньотрикутна матриця. Аналогічну "матрицю", $(i,j)$-елемент якої дорівнює $e_{ij}$ для $i<j$, і 0 в усіх інших випадках, позначимо через $\mathcal{E}$.

**Лема 1.15.** *Повний набір функціонально незалежних піднятих інваріантів для* $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_\gamma(n)}$ *вичерпують вирази*

$$\mathcal{I}_{ij} = \sum_{i\leqslant i',\, j'\leqslant j} b_{ii'}\widehat{b}_{j'j}x_{i'j'}, \quad j<i,$$

$$\mathcal{I}_{p0} = x_{p0} + \sum_{j<i}\ \sum_{j\leqslant l\leqslant i} \gamma_{pl} b_{li}\widehat{b}_{jl}x_{ij},$$

*де* $B=(b_{ij})$ *— довільна матриця з* $\mathrm{T}_\gamma(n)$*, а* $B^{-1}=(\widehat{b}_{ij})$ *— обернена до* $B$ *матриця.*

*Доведення.* Приєднана дія матриці $B\in\mathrm{T}_\gamma(n)$ на матрицю $Y$ має вигляд $\mathrm{Ad}_B Y = BYB^{-1}$, тобто

$$\mathrm{Ad}_B\Biggl(y_{p0}f_p + \sum_{i<j} y_{ij}e_{ij}\Biggr) = y_{p0}f_p + y_{p0}\sum_{i<j}\ \sum_{i\leqslant i'\leqslant j} b_{ii'}\gamma_{pi'}\widehat{b}_{i'j}e_{ij} + \sum_{i\leqslant i'<j'\leqslant j} b_{ii'}y_{i'j'}\widehat{b}_{j'j}e_{ij}.$$

Після заміни

$$e_{ij}\to x_{ji},\quad y_{ij}\to e^*_{ji},\quad f_p\to x_{p0},\quad y_{p0}\to f^*_p,\quad b_{ij}\leftrightarrow \widehat{b}_{ij}$$

у цій рівності отримаємо представлення для коприєднаної дії матриці $B$

$$\mathrm{Ad}^*_B\Biggl(x_{p0}f^*_p + \sum_{i<j} x_{ji}e^*_{ji}\Biggr) = x_{p0}f^*_p + \sum_{i<j}\ \sum_{i\leqslant i'\leqslant j} b_{i'j}x_{ji}\widehat{b}_{ii'}\gamma_{pi'}f^*_p + \sum_{i\leqslant i'<j'\leqslant j} b_{j'j}x_{ji}\widehat{b}_{ii'}e^*_{j'i'}$$
$$= \Biggl(x_{p0} + \sum_{i<j}\ \sum_{i\leqslant i'\leqslant j} b_{i'j}x_{ji}\widehat{b}_{ii'}\gamma_{pi'}\Biggr)f^*_p + \sum_{i'<j'}(BXB^{-1})_{j'i'}e^*_{j'i'}.$$

Таким чином, $\mathcal{I}_{p0}$ та елементи $\mathcal{I}_{ij}$, $j<i$, матриці $\mathcal{I}=BXB^{-1}$, де $B\in\mathrm{T}_\gamma(n)$, утворюють фундаментальний піднятий інваріант для $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_\gamma(n)}$. $\square$

**Зауваження 1.16.** Повний набір параметрів у побудованому представленні піднятих інваріантів утворено параметрами $b_{ij}$, $j < i$, і $\varepsilon_p$. Центр групи $\mathrm{T}_\gamma(n)$ буде нетривіальним лише тоді, коли $\gamma_{p1} = \gamma_{pn}$. У цьому випадку

$$\mathrm{Z}(\mathrm{T}_\gamma(n)) = \{E^n + b_{1n}E^n_{1n},\ b_{1n} \in \mathbb{F}\}$$

та група внутрішніх автоморфізмів алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ ізоморфна фактор-групі $\mathrm{T}_\gamma(n)/\mathrm{Z}(\mathrm{T}_\gamma(n))$, а тому її розмірність дорівнює $\frac{1}{2}n(n-1)$. Параметр $b_{1n}$ у представленні піднятих інваріантів є несуттєвим. Інакше, зазначена група ізоморфна всій групі $\mathrm{T}_\gamma(n)$, а всі параметри у побудованих піднятих інваріантах є суттєвими.

**Інваріанти коприєднаної дії.** Через $A^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}$, $i_1 \leqslant i_2$, $j_1 \leqslant j_2$, позначимо підматрицю $(a_{ij})^{i=i_1,\dots,i_2}_{j=j_1,\dots,j_2}$ матриці $A = (a_{ij})$. Також використовуємо стандартне позначення для визначників: $|A| = \det A$. Спряжене до $k$ відносно $n$ значення позначимо через $\varkappa$, тобто

$$\varkappa = n - k + 1.$$

У доведенні використано технічну лему; див. [82–84].

**Лема 1.17.** *Нехай* $1 < k < n$. *Якщо* $|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}| \neq 0$, *то для будь-якого* $\beta \in \mathbb{F}$ *маємо*

$$\beta - X^{i,i}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{j,j} = \frac{(-1)^{k+1}}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k-1} & \beta \\ X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1} & X^{\varkappa+1,n}_{j,j}\end{vmatrix}.$$

*Зокрема,*

$$x_{\varkappa k} - X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{k,k} = (-1)^{k+1}|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|^{-1}|X^{\varkappa,n}_{1,k}|.$$

*Аналогічно*

$$\left(x_{\varkappa j} - X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{j,j}\right)\left(x_{jk} - X^{j,j}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{k,k}\right)$$

$$= \frac{1}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|}\begin{vmatrix} X^{j,j}_{1,k} & \beta \\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{j,j}\end{vmatrix} + \frac{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|^2}\begin{vmatrix} X^{j,j}_{1,k-1} & \beta \\ X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1} & X^{\varkappa+1,n}_{j,j}\end{vmatrix}.$$

**Твердження 1.18.** *З точністю до відношення еквівалентності для параметрів алгебри* $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ *можна вважати, що виконуються умови:*

$$\begin{aligned}
&\exists\, s' \in \left\{0, \ldots, \min\left(s, \left[\frac{n}{2}\right]\right)\right\},\\
&\exists\, k_q,\ q = 1, \ldots, s', \quad 1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_{s'} \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]:\\
&\gamma_{qk} = \gamma_{q\varkappa},\ k < k_q, \quad \gamma_{q\varkappa_q} - \gamma_{qk_q} = 1,\\
&\gamma_{pk_q} = \gamma_{p\varkappa_q},\ p \neq q, \quad q = 1, \ldots, s',\\
&\gamma_{pk} = \gamma_{p\varkappa},\ p > s',\ k = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right].
\end{aligned}$$

*Тут* $\varkappa = n - k + 1$, $\varkappa_q = n - k_q + 1$.

*Доведення.* Якщо $\gamma_{pk} = \gamma_{p\varkappa}$ для будь-якого $k \in \{1, \ldots, [n/2]\}$ і будь-якого $p \in \{1, \ldots, s\}$, покладемо $s' = 0$. Інакше, покладемо $k_1$ рівним мінімальному значенню $k$, для якого існує $p_1$ таке, що $\gamma_{p_1k} \neq \gamma_{p_1\varkappa}$. Переставляючи, масштабуючи та комбінуючи рядки матриці $\gamma$, можна досягти того, що

$$p_1 = 1, \quad \gamma_{1\varkappa_1} - \gamma_{1k_1} = 1 \quad \text{та} \quad \gamma_{pk_1} = \gamma_{p\varkappa_1}, \quad p \neq 1,$$

тобто отримаємо умови, які відповідають $q = 1$.

Тоді, якщо $\gamma_{pk} = \gamma_{p\varkappa}$ для будь-якого $k \in \{1, \ldots, [n/2]\}$ і будь-якого $p \in \{2, \ldots, s\}$, це означає, що $s' = 1$. Інакше, покладемо $k_2$ рівним мінімальному значенню $k$, для якого існує $p_2 > p_1 = 1$ таке, що $\gamma_{p_2k} \neq \gamma_{p_2\varkappa}$. З попереднього кроку випливає, що $k_2 > k_1$. Переставляючи, масштабуючи та комбінуючи рядки матриці $\gamma$, зробимо $p_2 = 2$, $\gamma_{2\varkappa_2} - \gamma_{2k_2} = 1$ та $\gamma_{pk_2} = \gamma_{p\varkappa_2}$ при $p \neq 2$.

Індуктивне повторення цієї процедури дає умови твердження. □

Зауважимо, що

$$s' = \operatorname{rank}(\gamma_{p\varkappa} - \gamma_{pk})_{k=1,\ldots,[n/2]}^{p=1,\ldots,s}.$$

Будемо казати, що параметричну матрицю $\gamma$ задано у *зведеній формі*, якщо вона задовольняє умови твердження 1.18.

**Теорема 1.19.** *Нехай параметричну матрицю $\gamma$ задано у зведеній формі. Базис для* $\operatorname{Inv}(\operatorname{Ad}^*_{\mathrm{T}_\gamma(n)})$ *утворюють вирази*

$$|X^{\varkappa,n}_{1,k}|\prod_{q=1}^{s'}|X^{\varkappa_q,n}_{1,k_q}|^{\beta_{qk}},\quad k\in\{1,\dots,[n/2]\}\setminus\{k_1,\dots,k_{s'}\},$$

$$x_{p0}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+1}}{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}(\gamma_{pk}-\gamma_{p,k+1})\sum_{k<i<\varkappa}\begin{vmatrix}X^{i,i}_{1,k} & 0\\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{i,i}\end{vmatrix},\quad p=s'+1,\dots,s,$$

*де*

$$\beta_{qk}=-\frac{\Delta_{qk}}{\Delta},\quad \Delta=\det(\alpha_{q'k_{q''}})_{q',q''=1,\dots,s'},$$

$\Delta_{qk}$ *— визначник, отриманий з* $\Delta$ *заміною стовпчика* $(\alpha_{q'k_q})_{q'=1,\dots,s'}$ *на стовпчик* $(\alpha_{q'k})_{q'=1,\dots,s'}$*, а*

$$\alpha_{qj}=-\sum_{k=1}^{j}(\gamma_{q\varkappa}-\gamma_{qk}),\quad \varkappa=n-k+1.$$

*Доведення.* Для процедури нормалізації накладемо такі умови на підняті інваріанти $\mathcal{I}_{ij}$, $j<i$:

$$\mathcal{I}_{ij}=0,\quad \text{якщо}\quad j<i,\ (i,j)\neq(n-j'+1,j'),\ j'=1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right].$$

Це означає, що не фіксовано лише суттєві елементи матриці піднятих інваріантів $\mathcal{I}$, які розміщені на побічній діагоналі під головною діагоналлю. Всі інші суттєві елементи матриці $\mathcal{I}$ прирівнюємо до 0. Вибір саме цих нормалізаційних умов виконано після ретельного попереднього аналізу. Його можна обґрунтувати, зокрема, структурою групи автоморфізмів алгебри $\mathfrak{t}_0(n)$, наведеною, наприклад, у [112].

Рішення про те, що робити з особливими піднятими інваріантами $\mathcal{I}_{p0}$ і піднятими інваріантами $\mathcal{I}_{\varkappa k}$, $k=1,\dots,[n/2]$, розташованими на побічній діагоналі, прийматимемо пізніше, оскільки це пов'язано з необхідністю вибору для них умов нормалізації залежно від значень $\gamma$. Як буде показано нижче, остаточна нормалізація в усіх випадках забезпечує виконання умов твердження 1.18, а тому є коректною.

З формули $\mathcal{I} = BXB^{-1}$, що визначає матричну частину піднятих інваріантів, внаслідок (трикутної) структури матриць $B$ та $X$ випливає співвідношення $BX = \mathcal{I}B$. Ця матрична рівність суттєва тільки для матричних елементів її лівої і правої частин, розташованих під головними діагоналями, тобто маємо систему

$$e^{\gamma_{pi}\varepsilon_p}x_{ij} + \sum_{i<i'} b_{ii'}x_{i'j} = \mathcal{I}_{ij}e^{\gamma_{pj}\varepsilon_p} + \sum_{j'<j} \mathcal{I}_{ij'}b_{j'j}, \quad j < i.$$

Після врахування вибраних умов нормалізації, розділимо для зручності цю систему на чотири сукупності підсистем

$$S_1^k\colon \quad e^{\gamma_{p\varkappa}\varepsilon_p}x_{\varkappa j} + \sum_{i'>\varkappa} b_{\varkappa i'}x_{i'j} = 0,$$
$$i = \varkappa, \quad j < k, \quad k = 2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right],$$

$$S_2^k\colon \quad e^{\gamma_{p\varkappa}\varepsilon_p}x_{\varkappa k} + \sum_{i'>\varkappa} b_{\varkappa i'}x_{i'k} = \mathcal{I}_{\varkappa k}e^{\gamma_{pk}\varepsilon_p},$$
$$i = \varkappa, \quad j = k, \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

$$S_3^k\colon \quad e^{\gamma_{p\varkappa}\varepsilon_p}x_{\varkappa j} + \sum_{i'>\varkappa} b_{\varkappa i'}x_{i'j} = \mathcal{I}_{\varkappa k}b_{kj},$$
$$i = \varkappa, \quad k < j < \varkappa, \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1,$$

$$S_4^k\colon \quad e^{\gamma_{pk}\varepsilon_p}x_{kj} + \sum_{i'>k} b_{ki'}x_{i'j} = 0,$$
$$i = k, \quad j < k, \quad k = 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

і розв'яжемо їх послідовно. Підсистема $S_2^1$ включає єдине рівняння

$$\mathcal{I}_{n1} = x_{n1}e^{(\gamma_{pn}-\gamma_{p1})\varepsilon_p}.$$

Для будь-якого фіксованого $k \in \{2, \ldots, [n/2]\}$ підсистема $S_1^k \cup S_2^k$ є добре визначеною системою лінійних рівнянь відносно $b_{\varkappa i'}$, $i' > \varkappa$, і $\mathcal{I}_{\varkappa k}$.

Аналогічно, підсистема $S_1^k$ при $k = \varkappa = [(n+1)/2]$ у випадку непарних $n$ є добре визначеною системою лінійних рівнянь відносно $b_{ki'}$, $i' > k$. Розв'язки цих підсистем можна виразити через $x_{i'j}$, $i' \geqslant \varkappa$, $j < k$, і $\varepsilon_p$ так:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\varkappa k} &= (-1)^{k+1} \frac{|X_{1,k}^{\varkappa,n}|}{|X_{1,k-1}^{\varkappa+1,n}|}\, e^{(\gamma_{p\varkappa}-\gamma_{pk})\varepsilon_p}, \quad k = 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right], \\
B_{\varkappa+1,n}^{\varkappa,\varkappa} &= -e^{\gamma_{p\varkappa}\varepsilon_p} X_{1,k-1}^{\varkappa,\varkappa} (X_{1,k-1}^{\varkappa+1,n})^{-1}, \quad k = 2, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right].
\end{aligned}
$$

Після підстановки виразів для $\mathcal{I}_{\varkappa k}$ та $b_{\varkappa i'}$, $i' > \varkappa$, через $\varepsilon_p$ та $x$ в $S_3^k$ розв'язуємо отриману систему відносно $b_{kj}$ як незачеплену систему лінійних рівнянь:

$$
\begin{aligned}
b_{1j} &= e^{\gamma_{p1}\varepsilon_p} \frac{x_{nj}}{x_{n1}}, \quad 1 < j < n, \\
b_{kj} &= (-1)^{k+1} e^{\gamma_{pk}\varepsilon_p} \frac{|X_{1,k-1}^{\varkappa+1,n}|}{|X_{1,k}^{\varkappa,n}|} \left( x_{\varkappa j} - X_{1,k-1}^{\varkappa,\varkappa} (X_{1,k-1}^{\varkappa+1,n})^{-1} X_{j,j}^{\varkappa+1,n} \right) \\
&= \frac{e^{\gamma_{pk}\varepsilon_p}}{|X_{1,k}^{\varkappa,n}|} \begin{vmatrix} X_{1,k-1}^{\varkappa,\varkappa} & x_{\varkappa j} \\ X_{1,k-1}^{\varkappa+1,n} & X_{j,j}^{\varkappa+1,n} \end{vmatrix}, \quad k < j < \varkappa, \quad k = 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right] - 1.
\end{aligned}
$$

Виконуючи подальшу підстановку обчислених виразів для $b_{kj}$ до $S_4^k$, для будь-якого фіксованого $k$ отримаємо добре визначену систему лінійних рівнянь, наприклад відносно $b_{ki'}$, $i' > \varkappa$. Її розв'язок виражаємо через $x$, $b_{k\varkappa}$ та $\varepsilon_p$:

$$
\begin{aligned}
B_{\varkappa+1,n}^{k,k} &= -\left( e^{\gamma_{pk}\varepsilon_p} X_{1,k-1}^{k,k} + \sum_{k<j\leqslant\varkappa} b_{kj} X_{1,k-1}^{j,j} \right) (X_{1,k-1}^{\varkappa+1,n})^{-1} \\
&= -b_{k\varkappa} X_{1,k-1}^{\varkappa,\varkappa} (X_{1,k-1}^{\varkappa+1,n})^{-1} \\
&\quad - \frac{e^{\gamma_{pk}\varepsilon_p}}{|X_{1,k}^{\varkappa,n}|} \sum_{k\leqslant j<\varkappa} \begin{vmatrix} X_{1,k-1}^{\varkappa,\varkappa} & x_{\varkappa j} \\ X_{1,k-1}^{\varkappa+1,n} & X_{j,j}^{\varkappa+1,n} \end{vmatrix} X_{1,k-1}^{j,j} (X_{1,k-1}^{\varkappa+1,n})^{-1},
\end{aligned}
$$

$$k = 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right].$$

Переписуємо вираз для піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{p0}$, враховуючи вже зафіксовані нормалізаційні умови (зауважимо, що $\varkappa=[(n+1)/2]+1$, якщо $k=[n/2]$):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{p0} = {} & x_{p0}+\sum_{l}\gamma_{pl}\widehat{b}_{ll}\sum_{l<i}b_{li}x_{il}+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\sum_{j<k}\gamma_{pk}\widehat{b}_{jk}\sum_{i\geqslant k}b_{ki}x_{ij}\\
&+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\sum_{j<k}+\sum_{k\leqslant j<\varkappa}\right)\gamma_{p\varkappa}\widehat{b}_{j\varkappa}\sum_{i\geqslant\varkappa}b_{\varkappa i}x_{ij}\\
= {} & x_{p0}+\sum_{l}\gamma_{pl}\widehat{b}_{ll}\sum_{l<i}b_{li}x_{il}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\gamma_{p\varkappa}\mathcal{I}_{\varkappa k}\sum_{k\leqslant j<\varkappa}b_{kj}\widehat{b}_{j\varkappa}\\
= {} & x_{p0}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\gamma_{pk}\widehat{b}_{kk}\left(\sum_{k<i\leqslant\varkappa}+\sum_{i>\varkappa}\right)b_{ki}x_{ik}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\gamma_{p\varkappa}\widehat{b}_{\varkappa\varkappa}\sum_{i>\varkappa}b_{\varkappa i}x_{i\varkappa}\\
&-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\gamma_{p\varkappa}\widehat{b}_{\varkappa\varkappa}\mathcal{I}_{\varkappa k}b_{k\varkappa}.
\end{aligned}
$$

І підставляємо знайдені вирази для $b$ та $I_{\varkappa k}$ в отримані вирази для $\mathcal{I}_{p0}$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{p0} = {} & x_{p0}+\gamma_{p1}e^{-\gamma_{p1}\varepsilon_p}\sum_{1<i\leqslant n}b_{1i}x_{i1}\\
&+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\gamma_{pk}e^{-\gamma_{pk}\varepsilon_p}\sum_{k<i\leqslant\varkappa}b_{ki}\left(x_{ik}-X^{i,i}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{k,k}\right)\\
&-\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\gamma_{pk}X^{k,k}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{k,k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\gamma_{p\varkappa}\widehat{b}_{\varkappa\varkappa}\sum_{i>\varkappa}b_{\varkappa i}x_{i\varkappa}\\
&-\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\gamma_{p\varkappa}\widehat{b}_{\varkappa\varkappa}\mathcal{I}_{\varkappa k}b_{k\varkappa}\\
= {} & x_{p0}+(\gamma_{p1}-\gamma_{pn})e^{-\gamma_{p1}\varepsilon_p}b_{1n}x_{n1}\\
&+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(\gamma_{pk}-\gamma_{p\varkappa})e^{-\gamma_{pk}\varepsilon_p}b_{k\varkappa}(-1)^{k+1}\frac{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\gamma_{pk}X^{k,k}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{k,k}\\
&-\sum_{k=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\gamma_{p\varkappa}X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{\varkappa,\varkappa}\\
&+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+1}\gamma_{pk}}{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}\sum_{k<i<\varkappa}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k} & 0\\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{i,i}\end{vmatrix}\\
&+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+1}\gamma_{pk}}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|}\sum_{k<i<\varkappa}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k-1} & 0\\ X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1} & X^{\varkappa+1,n}_{i,i}\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Суттєвим для подальшого розгляду є те, що матрицю $\gamma$ задано у зведеній формі. Для будь-якого фіксованого $q \in \{1,\dots,s'\}$ піднятий інваріант $\mathcal{I}_{q0}$ обов'язково залежить від параметра $b_{k_q\varkappa_q}$, який за вже вибраних нормалізаційних умов не міститься у виразах для інших піднятих інваріантів. Тому в цьому випадку можна використати додаткову нормалізаційну умову для $\mathcal{I}_{q0}$, наприклад, $\mathcal{I}_{q0} = 0$. Це дає вираз для $b_{k_q\varkappa_q}$, $q = 1,\dots,s'$, через $x$, інші $b_{k\varkappa}$ та $\varepsilon_p$. Точний вигляд виразу для $b_{k_q\varkappa_q}$ не є суттєвим. Вирази для $\mathcal{I}_{p0}$, $p > s'$, не залежать від групових параметрів, а тому є інваріантами. Зауважимо лише, що при заданих припущеннях щодо $\gamma$ формулу для $\mathcal{I}_{p0}$ з $p > s'$ можна записати у вигляді

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_{p0} = x_{p0} &+ \left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}+\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)\frac{(-1)^{k+1}\gamma_{pk}}{|X^{\varkappa,n}_{1,k}|}\sum_{k<i<\varkappa}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k} & 0\\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{i,i}\end{vmatrix}\\
&+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+1}\gamma_{pk}}{|X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1}|}\sum_{k\leqslant i\leqslant\varkappa}\begin{vmatrix} X^{i,i}_{1,k-1} & 0\\ X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1} & X^{\varkappa+1,n}_{i,i}\end{vmatrix}\\
&-\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\gamma_{p\varkappa}X^{\varkappa,\varkappa}_{1,k-1}(X^{\varkappa+1,n}_{1,k-1})^{-1}X^{\varkappa+1,n}_{\varkappa,\varkappa}.
\end{aligned}
$$

Отже, після зсуву індексу $k$ у третій сумі на $-1$ і подальшій перестановці й комбінації членів отримаємо другу підмножину інваріантів з формулювання теореми.

Покладемо $\hat{\mathcal{I}}_1 = \mathcal{I}_{n1}$ та $\hat{\mathcal{I}}_k = (-1)^{k+1}\mathcal{I}_{\varkappa k}\hat{\mathcal{I}}_{k-1}$, $k = 2, \ldots, [n/2]$, тобто

$$\hat{\mathcal{I}}_k = |X^{\varkappa,n}_{1,k}|e^{-\alpha_{qk}\varepsilon_q}, \quad \alpha_{qk} := -\sum_{k'=1}^{k}(\gamma_{q\varkappa'} - \gamma_{qk'}) = -\sum_{k'=k_q}^{k}(\gamma_{q\varkappa'} - \gamma_{qk'}),$$
$$k = 1, \ldots, [n/2].$$

Оскільки $\hat{\mathcal{I}}_{k_q}$ залежить лише від $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ та $\partial\hat{\mathcal{I}}_{k_q}/\partial\varepsilon_q \neq 0$ для будь-якого фіксованого $q$, то відповідний якобіан ненульовий:

$$\left|\frac{\partial\hat{\mathcal{I}}_{k_q}}{\partial\varepsilon_{q'}}\right| \neq 0.$$

Тому потрібно накласти $s'$ додаткових нормалізаційних умов $\hat{\mathcal{I}}_{k_q} = 1$. Розв'язавши їх відносно $\varepsilon_q$ і підставивши в інші $\hat{\mathcal{I}}_k$, отримаємо першу підмножину інваріантів з умови теореми.

Під час виконання процедури нормалізації для ненормалізованих піднятих інваріантів знайдено вирази через $x$, для частини параметрів $b$ та $\varepsilon$ коприєднаної дії — через $x$ та інші $b$ й $\varepsilon$. Вирази в побудованих наборах інваріантів функціонально незалежні. Не отримано рівнянь, що містять лише $x$. Внаслідок твердження 1.18 це означає, що вибір нормалізаційних умов залежно від значень параметричної матриці $\gamma$ є коректним. Тому число знайдених функціонально незалежних інваріантів є максимальним, тобто вони утворюють базис для $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_\gamma(n)})$. □

**Наслідок 1.20.** $|X^{\varkappa,n}_{1,k}|$, $k = 1, \ldots, [n/2]$, *функціонально незалежні відносні інваріанти* $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_\gamma(n)}$ *для будь-якого допустимого значення* $\gamma$.

Дивись, наприклад, [224] щодо означення відносних інваріантів.

**Інваріанти алгебри.** Переформулюємо теорему 1.19 у термінах узагальнених операторів Казіміра.

**Теорема 1.21.** *Нехай параметричну матрицю $\gamma$ задано у зведеній формі. Базис для* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ *утворюють вирази*

$$|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|\prod_{q=1}^{s'}|\mathcal{E}^{1,k_q}_{\varkappa_q,n}|^{\beta_{qk}},\quad k\in\{1,\dots,[n/2]\}\setminus\{k_1,\dots,k_{s'}\},$$

$$f_p+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k+1}}{|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|}(\gamma_{pk}-\gamma_{p,k+1})\sum_{k<i<\varkappa}\begin{vmatrix}\mathcal{E}^{1,k}_{i,i} & \mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}\\ 0 & \mathcal{E}^{i,i}_{\varkappa,n}\end{vmatrix},\quad p=s'+1,\dots,s,$$

*де* $\beta_{qk}=-\Delta_{qk}/\Delta$, $\Delta=\det(\alpha_{q'k_{q''}})_{q',q''=1,\dots,s'}$, $\Delta_{qk}$ *— визначник, отриманий з* $\Delta$ *заміною стовпчика* $(\alpha_{q'k_q})_{q'=1,\dots,s'}$ *на стовпчик* $(\alpha_{q'k})_{q'=1,\dots,s'}$, *а*

$$\alpha_{qj}=-\sum_{k=1}^{j}(\gamma_{q\varkappa}-\gamma_{qk}),\quad \varkappa=n-k+1.$$

*Доведення.* Розкладуючи визначники у будь-якому елементі з першої частини набору інваріантів із теореми 1.19, отримаємо вирази від $x$, що містять лише координатні функції, відповідні базисні елементи яких комутують. Тому процедура симетризації є тривіальною. Оскільки $x_{ij}\sim e_{ji}$, $j<i$, то необхідно транспонувати матриці в побудованих виразах інваріантів для покращення представлення. Таким чином, отримуємо першу частину базису для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ з формулювання теореми.

Процедуру симетризації другої частини набору інваріантів, наведених у теоремі 1.19, також можна вважати тривільною. Щоб показати це, знову розкладемо всі визначники. Лише одночлени визначників

$$\begin{vmatrix}X^{i,i}_{1,k} & 0\\ X^{\varkappa,n}_{1,k} & X^{\varkappa,n}_{i,i}\end{vmatrix},\quad k\in\{1,\dots,[n/2]\},\quad i=k,\dots,\varkappa,$$

містять координатні функції, асоційовані з некомутуючими базисними елементами алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$. Точніше, кожен з цих одночленів містить дві такі координатні функції, а саме $x_{ii'}$ та $x_{j'i}$ для деяких значень $i'\in\{1,\dots,k\}$ та $j'\in\{\varkappa,\dots,n\}$. Тому достатньо виконати симетризацію відповідних пар базисних елементів. У результаті, після симетризації й транспортування матриць, отримаємо такі вирази для інваріантів алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$, що відповідають другій частині набору інваріантів з теореми 1.19:

$$f_p + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{k+1}}{|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|}(\gamma_{pk} - \gamma_{p,k+1}) \sum_{k<i<\varkappa} \sum_{i'=1}^{k} \sum_{j'=\varkappa}^{n} \frac{e_{i'i}e_{ij'} + e_{ij'}e_{i'i}}{2}(-1)^{i'j'}|\mathcal{E}^{1,k;\hat{i}'}_{\varkappa,n;\hat{j}'}|,$$

де $p = s'+1,\dots,s$, а через $\left|\mathcal{E}^{1,k;\hat{i}'}_{\varkappa,n;\hat{j}'}\right|$ позначено мінор матриці $\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}$, доповнювальний до елементу $e_{i'j'}$. Оскільки $e_{i'i}e_{ij'} = e_{ij'}e_{i'i} + e_{i'j'}$, то

$$\sum_{i'=1}^{k} \sum_{j'=\varkappa}^{n} \frac{e_{i'i}e_{ij'} + e_{ij'}e_{i'i}}{2}(-1)^{i'j'}|\mathcal{E}^{1,k;\hat{i}'}_{\varkappa,n;\hat{j}'}| = \begin{vmatrix} \mathcal{E}^{1,k}_{i,i} & \mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n} \\ 0 & \mathcal{E}^{i,i}_{\varkappa,n} \end{vmatrix} \pm \frac{1}{2}|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|,$$

де вибираємо знак '$+$' (або '$-$'), якщо елементи матриці $\mathcal{E}^{1,k}_{i,i}$ розташовані після (або до) елементів матриці $\mathcal{E}^{i,i}_{\varkappa,n}$ у всіх релевантних одночленах. Із точністю до сталих доданків, отримаємо вирази для елементів із другої частини базису інваріантів, наведених у твердженні. Ці вирази можна формально вивести з відповідних виразів теореми 1.19 заміною $x_{ij} \to e_{ji}$ та $x_{p0} \to f_p$ й транспортуванням усіх матриць. Таким чином, процедуру симетризації можна вважати тривіальною в описаному сенсі. Зауважимо, що при використанні 'несиметризованого' вигляду інваріантів потрібно зафіксувати одноманітний порядок елементів з $\mathcal{E}^{1,k}_{i,i}$ та $\mathcal{E}^{i,i}_{\varkappa,n}$ у всіх одночленах. $\square$

**Наслідок 1.22.** *Алгебра $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ допускає раціональний базис інваріантів тоді й лише тоді, коли $\beta_{qk} \in \mathbb{Q}$ для будь-якого $k \in \{1,\dots,[n/2]\} \setminus \{k_1,\dots,k_{s'}\}$ і будь-якого $q \in \{1,\dots,s'\}$.*

**Зауваження 1.23.** З теореми 1.21 випливає, що потужність $N_{\mathfrak{t}_\gamma(n)}$ кожного з фундаментальних інваріантів алгебри $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ дорівнює $[n/2]+s-2s'$, де $s$ — число нільнезалежних елементів і

$$s' = \operatorname{rank}(\gamma_{p\varkappa} - \gamma_{pk})^{p=1,\dots,s}_{k=1,\dots,[n/2]}.$$

Для будь-якого фіксованого $s$ число $N_{\mathfrak{t}_\gamma(n)}$ є максимальним, якщо $s'$ має мінімально можливе значення. У випадку $s \in \{1,\dots,[n/2]\}$ таким значенням є $s'=0$, а тому $N_{\mathfrak{t}_\gamma(n)} = [n/2]+s$. Це означає, що $\gamma_{pk} = \gamma_{p\varkappa}$ для будь-якого $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$ і будь-якого $p \in \{1, \dots, s\}$. Цю умову можна переформулювати у термінах комутаторів таким чином. Будь-який нільнезалежний елемент комутує з "нільпотентними" базисними елементами $e_{k\varkappa}$, $k = 1, \dots, [n/2]$, що знаходяться на суттєвій частині побічної діагоналі базисної матриці $\mathcal{E}$, тобто, $[f_p, e_{k\varkappa}] = 0$, $k = 1, \dots, [n/2]$. Якщо $s \in \{[n/2] + 1, \dots, n - 1\}$, то мінімальним значенням $s'$ є $s' = s - [n/2]$ і, отже, $N_{\mathfrak{t}_\gamma(n)} = 3[n/2] - s$. Це еквівалентно умові, що $[n/2]$ нільнезалежних елементи алгебри комутують з базисними елементами $e_{k\varkappa}$, $k = 1, \dots, [n/2]$.

**Зауваження 1.24.** Елементи, що лежать на побічній діагоналі матриці піднятих інваріантів, відіграють особливу роль під час процедури нормалізації для усіх досліджених алгебр з нільрадикалом, ізоморфним алгебрі $\mathfrak{t}_0(n)$: самої $\mathfrak{t}_0(n)$ [81, 82], $\mathfrak{st}(n)$ [82] і $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ [83, 84]. (Точніше, в [82] процедуру нормалізації реалізовано для $\mathfrak{t}(n)$, а потім результати щодо інваріантів розширено на випадок $\mathfrak{st}(n)$.) Причини цієї особливості не були зрозумілими з розгляду в [82]. Зауваження 1.23 пояснює її, а також обґрунтовує природність вибору нормалізаційних умов.

**Частинні випадки.** Теорема 1.21 включає як частинні випадки результати щодо інваріантів нільпотентної алгебри строго верхньотрикутних матриць $\mathfrak{t}_0(n)$ [81, 82, 273], розв'язних алгебр $\mathfrak{st}(n)$ та $\mathfrak{t}(n)$ спеціальних верхньо- та нестрого верхньотрикутних матриць [82, 273] і розв'язних алгебр з нільрадикалом, ізоморфним $\mathfrak{t}_0(n)$, і одним нільнезалежним елементом [83, 273]. Покажемо це з додатковими коментарями, переписуючи базисні інваріанти у вигляді, зручнішому для цих спеціальних випадків.

Нагадаємо, що через $N_\mathfrak{g}$ позначено максимальне число функціонально незалежних інваріантів у множині $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_G)$ інваріантів групи $\mathrm{Ad}^*_G$, де $G$ — зв'язна група Лі, асоційована з алгеброю Лі $\mathfrak{g}$.

Алгебра $\mathfrak{t}_0(n)$ не має нільнезалежних елементів, тобто $s = 0$, звідки $|X^{\varkappa,n}_{1,k}|$, $k = 1, \dots, [n/2]$, — повний набір функціонально незалежні абсолютні інваріанти групи $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}_0(n)}$, що дає теорему 1.13.

У випадку одного нільнезалежного елементу ($s = 1$) опускаємо індекс біля $f$ і перший індекс в $\gamma$. Є два різних випадки залежно від значення $s'$, яке може бути або 0, або 1. Твердження про інваріанти можна легко сформулювати навіть для незведеної форми матриці $\gamma$.

**Наслідок 1.25.** *Нехай $s = 1$. Якщо додатково $s' = 0$, тобто $\gamma_k = \gamma_\varkappa$ для будь-якого $k \in \{1, \dots, [n/2]\}$, то $N_{\mathfrak{t}_0(n)} = [n/2] + 1$ і базис для* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ *утворюють вирази*

$$|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|, \quad k = 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

$$f + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{k+1}}{|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|}(\gamma_k - \gamma_{k+1}) \sum_{i=k+1}^{n-k} \begin{vmatrix} \mathcal{E}^{1,k}_{i,i} & \mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n} \\ 0 & \mathcal{E}^{i,i}_{\varkappa,n} \end{vmatrix}.$$

*Тут і нижче $\varkappa := n - k + 1$, а через $\mathcal{E}^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}$, $i_1 \leqslant i_2$, $j_1 \leqslant j_2$, позначено матрицю $(e_{ij})^{i=i_1,\dots,i_2}_{j=j_1,\dots,j_2}$. В іншому випадку $s' = 1$, $N_{\mathfrak{t}_0(n)} = [n/2] - 1$, а базис для* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ *утворюють вирази*

$$|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|, \quad k = 1, \dots, k_0 - 1,$$

$$|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|\,|\mathcal{E}^{1,k_0}_{\varkappa_0,n}|^{\beta_k}, \quad \beta_k := -\sum_{i=k_0}^{k} \frac{\gamma_{n-i+1} - \gamma_i}{\gamma_{n-k_0+1} - \gamma_{k_0}}, \quad k = k_0 + 1, \dots, \left[\frac{n}{2}\right],$$

*де $k_0$ — мінімальне значення $k$ для якого $\gamma_k \neq \gamma_\varkappa$.*

У першому випадку з наслідку базис утворюють $[n/2]$ оператори Казіміра й один номінально раціональний інваріант. Останній можна замінити його добутком з операторами Казіміра $|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|$, $k = 1, \dots, [n/2]$. Такий добуток складніший, ніж вихідний інваріант, але поліноміальний. Отже, за умов $s = 1$, $s' = 0$ алгебра $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ допускає поліноміальний фундаментальний інваріант.

У другому випадку множина інваріантів $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}_\gamma(n))$ має раціональний базис тоді й лише тоді, коли $\beta_k \in \mathbb{Q}$ для будь-якого $k \in \{k_0, \dots, [n/2]\}$. За цієї умови базис утворюють $k_0 - 1$ оператори Казіміра і $[n/2] - k_0$ раціональні інваріанти. Якщо додатково $\beta_k \geqslant 0$ для будь-якого $k \in \{k_0, \dots, [n/2]\}$, весь базис буде поліноміальним.

У випадку максимальної кількості $s = n - 1$ нільнезалежних елементів алгебра $\mathfrak{t}_\gamma(n)$ ізоморфна алгебрі $\mathfrak{st}(n)$ спеціальних верхньотрикутних матриць [82]. Для матриці $\gamma$, асоційованою з цією алгеброю,

$$s' = \operatorname{rank}(\gamma_{p\varkappa} - \gamma_{pk})_{k=1,\dots,[n/2]}^{p=1,\dots,s} = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Тому $\mathfrak{st}(n)$ не допускає інваріантів, що залежать лише від елементів нільрадикала. Число нульових рядків у матриці $(\gamma_{p\varkappa} - \gamma_{pk})_{k=1,\dots,[n/2]}^{p=1,\dots,s}$ після спрощення матриці $\gamma$ має дорівнювати $s - s' = n - 1 - [n/2] = [(n-1)/2]$. Виберемо базис в $\mathfrak{st}(n)$, утворений елементами канонічного базису нільрадикала та нільнезалежними елементами $f_p$, $p = 1, \dots, n-1$, що відповідають матриці $\gamma$ з

$$\gamma_{pi} = \frac{n-p}{n}, \quad i = 1, \dots, p, \quad \gamma_{pi} = -\frac{p}{n}, \quad i = p+1, \dots, n.$$

Комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{st}(n)$ у вибраному базисі мають вигляд

$$\begin{aligned}
&[e_{ij}, e_{i'j'}] = \delta_{i'j} e_{ij'} - \delta_{ij'} e_{i'j}, \quad i < j, \quad i' < j';\\
&[f_k, f_{k'}] = 0, \quad k, k' = 1, \dots, n-1;\\
&[f_k, e_{ij}] = 0, \quad i < j \leqslant k \quad \text{або} \quad k \leqslant i < j;\\
&[f_k, e_{ij}] = e_{ij}, \quad i \leqslant k \leqslant j, \quad i < j.
\end{aligned}$$

Перейдемо до базису, в якому матриця $\gamma$ набуває зведену форму. Позначимо її через $\gamma'$. Лише частина нового базису, що відповідає нульовим рядкам $(\gamma'_{p\varkappa} - \gamma'_{pk})_{k=1,\dots,[n/2]}^{p=1,\dots,s}$, є суттєвою для знаходження фундаментального інваріанта алгебри $\mathfrak{st}(n)$. У якості цієї частині, можна вибрати множину, утворену елементами $f'_{s'+p} = f_p - f_{n-p}$, $p = 1, \dots, [(n-1)/2]$. Дійсно, вони лінійно незалежні та

$$\begin{aligned}
&\gamma'_{s'+p,i} = -2\frac{p}{n}, \quad i = p+1, \dots, n-p,\\
&\gamma_{s'+p,i} = \frac{n-2p}{n} \quad i = 1, \dots, p \quad \text{або} \quad i = n-p+1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що при $p = 1, \dots, [(n-1)/2]$ та $k = 1, \dots, [n/2]$ вираз $\gamma'_{s'+p,k} - \gamma'_{s'+p,k+1}$ дорівнює 1, якщо $k = p$, і 0 — в інших випадках.

**Наслідок 1.26.** $N_{\mathfrak{st}(n)} = [(n-1)/2]$. *Базис для* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{st}(n))$ *утворюють раціональні інваріанти*

$$\check{\mathcal{I}}_k = f_k - f_{n-k} + \frac{(-1)^{k+1}}{|\mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n}|} \sum_{j=k+1}^{n-k} \begin{vmatrix} \mathcal{E}^{1,k}_{j,j} & \mathcal{E}^{1,k}_{\varkappa,n} \\ 0 & \mathcal{E}^{j,j}_{\varkappa,n} \end{vmatrix}, \quad k = 1, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

*де через* $\mathcal{E}^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}$, $i_1 \leqslant i_2$, $j_1 \leqslant j_2$, *позначено матрицю* $(e_{ij})^{i=i_1,\ldots,i_2}_{j=j_1,\ldots,j_2}$, $|\mathcal{E}^{1,0}_{n+1,n}| := 1$, *а* $\varkappa := n-k+1$.

Алгебра $\mathfrak{t}(n)$ нестрого верхньотрикутних матриць стоїть окремо серед розглядуваних алгебр, оскільки нільрадикал алгебри $\mathfrak{t}(n)$ ширший, ніж $\mathfrak{t}_0(n)$. Аналогічно алгебрі $\mathfrak{t}_0(n)$, алгебра $\mathfrak{t}(n)$ допускає повністю матричну інтерпретацію базису піднятих інваріантів. А саме, базисні елементи зручно занумерувати за допомогою “неспадної” пари індексів подібно до канонічного базису $\{E^n_{ij},\, i \leqslant j\}$ ізоморфної матричної алгебри. Таким чином, базисні елементи $e_{ij} \sim E^n_{ij}$, $i \leqslant j$, задовольняють комутаційні співвідношення $[e_{ij}, e_{i'j'}] = \delta_{i'j} e_{ij'} - \delta_{ij'} e_{i'j}$, де $\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

Центр алгебри $\mathfrak{t}(n)$ є одновимірним і співпадає з лінійною оболонкою суми $e_{11} + \cdots + e_{nn}$, що відповідає одиничній матриці $E^n$. Елементи $e_{ij}$, $i < j$, та $e_{11} + \cdots + e_{nn}$ утворюють базис нільрадикала алгебри $\mathfrak{t}(n)$, ізоморфного алгебрі $\mathfrak{t}_0(n) \oplus \mathfrak{a}$, де $\mathfrak{a}$ — одновимірна (абелева) алгебра Лі.

Нехай $e^*_{ji}$, $x_{ji}$ та $y_{ij}$ — базисний елемент, координатна функція у дуальному просторі $\mathfrak{t}^*(n)$ та координатна функція в $\mathfrak{t}(n)$, що відповідають базисному елементу $e_{ij}$, $i \leqslant j$. Доповнимо множини $x_{ji}$ та $y_{ij}$ до матриць $X$ та $Y$ нулями. Отже, $X$ — нижньотрикутна матриця, $Y$ — верхньотрикутна матриця. У цих позначеннях фундаментальний піднятий інваріант $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}(n)}$ утворюють елементи $\mathcal{I}_{ij}$, $j \leqslant i$, матриці $\mathcal{I} = BXB^{-1}$, де $B$ — довільна матриця з $\mathrm{T}(n)$ [82, лемма 2]. Дивись також зауваження 3 у [82] щодо суттєвих параметрів у цьому фундаментальному піднятому інваріанті. На основі матричного представлення піднятого інваріанта базис для $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}(n)})$ можна побудувати за допомогою процедури нормалізації у простий спосіб.

Водночас, базис для $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}(n)})$ можна отримати з базису для $\mathrm{Inv}(\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{ST}(n)})$ додаванням центрального елементу $e_{11}+\dots+e_{nn}$. Дійсно, алгебра $\mathfrak{t}(n)$ є центральним розширенням алгебри $\mathfrak{st}(n)$, тобто $\mathfrak{t}(n)=\mathfrak{st}(n)\oplus \mathrm{Z}(\mathfrak{t}(n))$, при природному вкладенні $\mathfrak{st}(n)$ в $\mathfrak{t}(n)$. Добре відомо, що базис інваріантів прямої суми алгебр Лі $\mathfrak{g}_1$ та $\mathfrak{g}_2$ є об'єднанням базисів для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}_1)$ та $\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}_2)$. Базис для $\mathrm{Inv}(\mathrm{Z}(\mathfrak{t}(n)))$ очевидно містить лише один елемент, наприклад, $e_{11}+\dots+e_{nn}$. Отже, кількість базисних елементів у $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}(n))$ перевищує аналогічну кількість у $\mathrm{Inv}(\mathfrak{st}(n))$ на 1, тобто $N_{\mathfrak{t}(n)}=[(n+1)/2]$. Комбінуючи базисні елементи й переписуючи їх у термінах канонічного базису алгебри $\mathfrak{t}(n)$, отримаємо

$$
\begin{aligned}
&\hat{\mathcal{I}}_0 := e_{11}+\dots+e_{nn},\\
&\hat{\mathcal{I}}_k = (-1)^{k+1}\check{\mathcal{I}}_k+(-1)^k\frac{n-2k}{n}\hat{\mathcal{I}}_0,\quad k=1,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right].
\end{aligned}
$$

**Наслідок 1.27.** $N_{\mathfrak{t}(n)}=[(n+1)/2]$. *Базис для* $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}(n))$ *утворюють раціональні інваріанти*

$$
\hat{\mathcal{I}}_k=\frac{1}{|\bar{\mathcal{E}}^{1,k}_{\varkappa,n}|}\sum_{j=k+1}^{n-k}\begin{vmatrix}\bar{\mathcal{E}}^{1,k}_{j,j} & \bar{\mathcal{E}}^{1,k}_{\varkappa,n}\\ e_{jj} & \bar{\mathcal{E}}^{j,j}_{\varkappa,n}\end{vmatrix},\quad k=0,\dots,\left[\frac{n-1}{2}\right],
$$

*де* $\bar{\mathcal{E}}^{i_1,i_2}_{j_1,j_2}$, $i_1\leqslant i_2$, $j_1\leqslant j_2$ *— матриця* $(e_{ij})^{i=i_1,\dots,i_2}_{j=j_1,\dots,j_2}$, $|\bar{\mathcal{E}}^{1,0}_{n+1,n}|:=1$, *а* $\varkappa:=n-k+1$.

Зауважимо, що в [82] використано зворотну процедуру внаслідок простоти матричного представлення фундаментального піднятого інваріанта для $\mathrm{Ad}^*_{\mathrm{T}(n)}$. А саме, спочатку знайдено базис для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{t}(n))$ за допомогою процедури нормалізації, а вже потім з цього базису отримано базис для $\mathrm{Inv}(\mathfrak{st}(n))$.

# РОЗДІЛ 2

# Сингулярні модулі редукції диференціальних рівнянь

"Некласичний" підхід до знаходження розв'язків диференціальних рівнянь у замкненому вигляді запропоновано [64] на прикладі (1+1)-вимірного рівняння теплопровідності з метою розширити область застосувань симетрійних методів. Із кінця 1980-х років цей метод використано для дослідження багатьох диференціальних рівнянь, які моделюють реальні явища; див., наприклад, [48, 123, 124, 254] і огляди [144, 229]. Відповідні об'єкти, які подібні до підалгебр алгебр Лі симетрій, у літературі називають по-різному: некласичні [184], $Q$-умовні [144], умовні [148], часткові [279] симетрії, або — у більш повній формі — інволютивні сім'ї/модулі операторів некласичної/умовної симетрії [229, 294]. Характерною рисою, яку некласичні симетрії успадковують від лiївських, є те, що вони дозволяють будувати анзаци для невідомої функції, які редукують відповідне диференціальне рівняння до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних [47, 221, 255, 279, 294]. Ця риса пов'язує некласичні симетрії з прямим методом Кларксона–Крускала [122] і загальним методом анзаців [144]. Однак насправді властивості некласичних симетрій більш тісно пов'язані з теоріями диференціальних зв'язків і формальної сумісності систем диференціальних рівнянь [179, 221, 255]. Саме тому надалі використовуємо термін "модулі редукції" (векторних полів) замість "інволютивні сім'ї операторів умовної симетрії" і кажемо, що інволютивний модуль векторних полів редукує диференціальне рівняння, якщо це рівняння можна редукувати за допомогою відповідного анзаца.

Включення умови інваріантної поверхні, асоційованої з модулем, у критерій умовної інваріантності призводить до кількох суттєвих ускладнень знаходження умовних симетрій порівняно з ліївськими. Для заданого диференціального рівняння $\mathcal{L}$ елементи його різних модулів редукції не утворюють об'єктів з гарною алгебраїчною або диференціальною структурою. Тому окремі оператори редукції не можна компонувати в модулі редукції по аналогії з максимальною алгеброю ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}$ та її підалгебрами, які утворено векторними полями, асоційованими з однопараметричними псевдогрупами точкових симетрій Лі рівняння $\mathcal{L}$. У той час як системи визначальних рівнянь для ліївських симетрій завжди лінійні, аналогічні системи для модулів редукції нелінійні, причому — у випадку модулів розмірності більше одиниці — ці системи додатково потрібно доповнити умовою інволютивності, тобто вимагати замкненість модулів відносно операції комутування векторних полів. Більш того, навіть для заданого диференціального рівняння і фіксованої розмірності його модулів редукції єдиної системи визначальних рівнянь для таких модулів немає. Замість цього множина таких модулів розпадається на підмножини, асоційовані з суттєво різними системами визначальних рівнянь. Розв'язання деяких з цих систем може бути еквівалентно розв'язанню вихідного рівняння, що призводить до так званих "no-go" випадків при вивчені модулів редукції. Подібні "no-go" випадки відомі для окремих (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь, включаючи лінійне рівняння теплопровідності [143–145, 200, 286], рівняння Бюргерса [49, 200] та лінійні еволюційні рівняння другого порядку [25, 244], а також для всього класу (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь [292], багатовимірних еволюційних рівнянь [26] і навіть систем таких рівнянь [10]. Зауважимо, що при дослідженні ліївських симетрій аналогічна "no-go" ситуація виникає для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку [188, теорема 10, с. 130]; див. також [220, § 2.5]. Фактично, всі вказані вище "no-go" випадки операторів редукції є проявами певного "no-go" випадку, спільного для всіх еволюційних рівнянь, і ще одного випадку, специфічного для лінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Причини, що породжують розбиття модулів редукції і "no-go" випадки для некласичних симетрій, до останнього часу не досліджували. Також було незрозуміло, як результати щодо "no-go" випадків для еволюційних рівнянь можна поширити на модулі редукції для інших — нееволюційних — рівнянь.

У статті [180] розбиття множини модулів редукції диференціального рівняння пов'язано з пониженням порядку цього рівняння на многовидах, визначених умовами інваріантної поверхні для цих модулів у відповідному просторі струменів. У результаті, дослідження сингулярних модулів векторних полів, що понижують порядок рівняння, включено як початковий крок до процедури знаходження некласичних симетрій. У цій статті розглянуто лише випадок окремого диференціального рівняння з частинними похідними від двох незалежних і однієї залежної змінних і одного оператора редукції. Також введено поняття сингулярних операторів редукції та показано, що копорядок слабкої сингулярності оператора редукції $Q$ дорівнює суттєвому порядку відповідного редукованого рівняння і кількості суттєвих параметрів у сім'ї $Q$-інваріантних розв'язків. Там само отримано "no-go" твердження про сингулярні оператори редукції (1+1)-вимірних еволюційних і хвильових рівнянь і доведено їх узагальнення для параметризованих сімей векторних полів, які редукують диференціальне рівняння з частинними похідними від двох незалежних змінних до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

У цьому розділі результати роботи [180] розширено на випадок більшої кількості незалежних змінних. Після аналізу та переосмислення в § 2.1 основних понять і тверджень теорії некласичних симетрій у § 2.2 запропоновано поняття сингулярних і метасингулярних модулів векторних полів для диференціальних функцій. Доведено, що на відміну від двовимірних метасингулярних модулів будь-який метасингулярний модуль розмірності вище 2 обов'язково є інволютивним. Основним результатом цього параграфу є теорема 2.19, яка з точністю до точкових перетворень описує диференціальні функції, що допускають метасингулярні модулі. Аналогічні поняття сильно і слабо сингулярних і метасингулярних модулів диференціальних рівнянь введено у § 2.4. Із теореми 2.31, яка характеризує диференціальні рівняння, що допускають слабо метасингулярні модулі, випливає, що замість таких модулів достатньо досліджувати метасингулярні модулі відповідних диференціальних функцій. Зв'язок між копорядком слабкої сингулярності модулів редукції, суттєвим порядком відповідних редукованих рівнянь і — у випадку редукції до звичайних диференціальних рівнянь — кількістю параметрів у відповідних сім'ях інваріантних розв'язків вивчено в § 2.5. Показано, що зв'язок між редукцією диференціального рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою інволютивного модуля $Q$ і формальною сумісністю об'єднаної системи, яку утворюють рівняння $\mathcal{L}$ і характеристична система, асоційована з модулем $Q$, суттєво залучає копорядок слабкої сингулярності модуля $Q$ для диференціального рівняння $\mathcal{L}$. Переглядаючи результати [158] з використанням поняття сингулярних модулів редукції, у § 2.6 вивчено особливий випадок модулів редукції розмірності, що співпадає з кількістю незалежних змінних; такі модулі призводять до редукції до алгебраїчних рівнянь. У § 2.7 "no-go" результати роботи [26] переформульовано й розширено на модулі, що редукують багатовимірні еволюційні рівняння до звичайних диференціальних рівнянь з часом як єдиною незалежною змінною. Цим обґрунтовано розгляд модулів редукції з копорядком сингулярності 1 у § 2.8. За припущення, що диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ допускає $n$-вимірний метасингулярний модуль $M$ з копорядком сингулярності 1, де $n$ — кількість незалежних змінних у рівнянні $\mathcal{L}$, доведено "no-go" твердження, що встановлюють зв'язок між $(n-1)$-вимірними модулями редукції рівняння $\mathcal{L}$, які містить модуль $M$, і розв'язками рівняння $\mathcal{L}$. Зокрема показано, що визначальні рівняння для таких модулів можна звести до початкового рівняння за допомогою композиції диференціальної підстановки та перетворення годографа. Заключний § 2.9 присвячено сингулярним модулям для квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, причому розмірність модулів вважаємо меншою за кількість незалежних змінних. Показано, що такі еліптичні рівняння не допускають сингулярних модулів. Будь-яке еволюційне рівняння другого порядку з невиродженою матрицею коефіцієнтів при других похідних допускає лише сингулярні модулі, розглянуті в § 2.7 для загальних еволюційних рівнянь. Узагальнені хвильові рівняння є більш складними з цієї точки зору. Зокрема, вони можуть допускати сім'ї сингулярних модулів, які не мають інтерпретації в термінах метасингулярних модулів, що показує необхідність подальшого розвитку теорії сингулярних модулів.

Результати цього розділу опубліковано у роботах [3, 77, 78].

## 2.1. Модулі редукції диференціальних рівнянь

У цьому параграфі, спираючись на роботи [146,148,229,254,294], коротко наведемо й уточнимо необхідні поняття і результати щодо некласичних (умовних) симетрій диференціальних рівнянь.

Нехай задано розшарований простір $n$ незалежних змінних $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і однієї залежної змінної $u$. Розглянемо скінченновимірний інволютивний модуль $Q$ векторних полів, визначений у деякій області цього простору, і припустимо, що розмірність $p$ модуля $Q$ (над кільцем гладких функцій змінних $(x, u)$) не перевищує $n$, $0 < p \leqslant n$. Додатково вважаємо, що модуль $Q$ задовольняє *умову на ранг*, тобто для кожного фіксованого значення $(x, u)$ проекція на простір змінних $x$ є $p$-вимірною. Атрибут "*інволютивний*" означає, що дужка Лі (комутатор) будь-яких двох векторних полів модуля $Q$ належить $Q$. Очевидно, що будь-який одновимірний модуль є інволютивним. Тому у випадку $p = 1$ опускатимемо атрибут “інволютивний” і говоритимемо лише про модулі.

Надалі вважаємо, що індекси $i$ та $j$ змінюються від 1 до $n$, індекс $s$ змінюється від 1 до $p$, індекс $\sigma$ змінюється від 1 до $n-p$, і за індексами, що повторюються, розумітимемо підсумовування. Дужки $\langle \dots \rangle$ використовуватимемо для позначення лінійної оболонки над кільцем гладких функцій змінних $(x, u)$. Нижні індекси функцій позначають диференціювання за відповідними змінними, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ й $\partial_u = \partial/\partial u$. Будь-яка функція розглядається як її похідна нульового порядку. Весь розгляд проведено в рамках локального підходу. Поняття функціональної незалежності розумітимемо в сенсі повної функціональної незалежності, тобто функціонально незалежні функції є функціонально незалежними на будь-якій підмножині їх спільної області визначення.

Нехай векторні поля

$$Q_s = \xi^{si}(x,u)\partial_i + \eta^s(x,u)\partial_u$$

утворюють базис модуля $Q$, тобто $Q = \langle Q_1, \dots, Q_p \rangle$. Тоді умова на ранг еквівалентна рівності $\operatorname{rank}(\xi^{si}) = p$. Умова, що комутатор будь-якої пари базисних елементів належав модулю $Q$, $[Q_s, Q_{s'}] \in Q$, достатня для того, щоб модуль $Q$ був інволютивним. Якщо векторні поля $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_p$ утворюють інший базис модуля $Q$, то існує невироджена $p \times p$ матрична функція $(\lambda^{ss'}(x,u))$ така, що $\tilde{Q}_s = \lambda^{ss'} Q_{s'}$.

Диференціальну функцію першого порядку

$$Q_s[u] := \eta^s(x,u) - \xi^{si}(x,u)u_i$$

називають *характеристикою* векторного поля $Q_s$. Внаслідок теореми Фробеніуса, інволютивність модуля $Q$ еквівалентна тому, що характеристична система $\mathcal{Q}$: $Q[u] = 0$ диференціальних рівнянь з частинними похідними $Q_s[u] = 0$ (її також називають *умовою інваріантної поверхні*) має $n + 1 - p$ функціонально незалежних інтегралів

$\omega^0(x,u),\dots,\omega^{n-p}(x,u)$. Тому загальний розв'язок цієї системи можна неявно представити у вигляді $F(\omega^0,\dots,\omega^{n-p})=0$, де $F$ — довільна гладка функція своїх аргументів.

Диференціальною функцією $G=G[v]$ залежних змінних $v=(v^1,\dots,v^m)$, які у свою чергу є функціями незалежних змінних $y=(y_1,\dots,y_n)$, називають гладку функцію, що залежить від $y$ і похідних функції $v$ за змінними $y$. Більш формально, диференціальну функцію визначають як гладку функцію на області простору струменів $\mathrm{J}^r=\mathrm{J}^r(y|v)$ деякого порядку $r$ з незалежними змінними $y$ і залежними змінними $v$ [220]. Порядок $r=\operatorname{ord}G$ диференціальної функції $G$ дорівнює максимальному порядку похідних (відповідно струменевих змінних), від яких функція $G$ залежить суттєво. Зокрема, $\operatorname{ord}G=-\infty$, якщо $G$ залежить лише від $y$. Будь-яка множина диференціальних функцій фіксованого додатного порядку, як і множина диференціальних функцій недодатного порядку, інваріантна відносно точкових перетворень змінних $(y,v)$.

Використання іншого базису модуля $Q$ призводить лише до іншого представлення характеристичної системи $\mathcal{Q}$ з тією самою множиною розв'язків. Тому характеристична система $\mathcal{Q}$ асоційована скоріше з модулем $Q$, ніж з фіксованим базисом модуля $Q$. І навпаки, будь-яка сім'я $n+1-p$ функціонально незалежних функцій змінних $x$ та $u$ є повною системою інтегралів характеристичної системи деякого $p$-вимірного інволютивного модуля. Отже, існує взаємно однозначна відповідність між множиною $p$-вимірних інволютивних модулів і множиною сімей $n+1-p$ функціонально незалежних функцій змінних $x$ та $u$, які факторизовано щодо відповідної еквівалентності. (Дві сім'ї однакової кількості функціонально незалежних функцій тих самих аргументів вважаємо еквівалентними, якщо будь-яка функція однієї з сімей є функціонально залежною від функцій іншої сім'ї.)

Функцію $u=f(x)$ називають *інваріантом інволютивного модуля* $Q$ (скорочено $Q$-*інваріантом*), якщо вона є розв'язком характеристичної системи $\mathcal{Q}$. Введення цього поняття обґрунтовано наступним. Внаслідок умови на ранг, можна вибрати базис модуля $Q$, породжений (над полем, що розглядається) $p$-вимірною (абелевою) алгеброю Лі $\mathfrak{g}$ векторних полів у просторі змінних $(x,u)$[2.1]. Графік кожного розв'язку характеристичної системи $\mathcal{Q}$ очевидно є інваріантним відносно $p$-параметричної групи локальних перетворень, породженої алгеброю $\mathfrak{g}$.

Виберемо базис модуля $Q$ з комутуючих векторних полів $Q_1, \ldots, Q_p$ і для кожного фіксованого $s$ розглянемо розв'язок системи $Q_{s'}J^s = \delta_{ss'}$, де $\delta_{ss'}$ — символ Кронекера. Оскільки функції $I^0, \ldots, I^{n-p}, J^1, \ldots, J^p$ змінних $(x,u)$ функціонально незалежні, то можна зробити заміну змінних

$$\varphi = I^0(x,u), \quad \omega_\sigma = I^\sigma(x,u), \quad \omega'_s = J^s(x,u),$$

де $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-p})$ та $\omega' = (\omega'_1, \ldots, \omega'_p)$ — нові незалежні змінні, а $\varphi$ — нова залежна змінна. Змінні $\omega$ та $\varphi$ називатимемо $Q$-інваріантними, а змінні $\omega'$ — параметричними для модуля $Q$. У нових змінних базисні елементи $Q_s$ набувають вигляду $Q_s = \partial_{\omega'_s}$.

Розглянемо диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ порядку $r$ вигляду $L(x, u_{(r)}) = 0$ для невідомої функції $u$ незалежних змінних $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Тут через $u_{(r)}$ позначено набір усіх похідних функції $u$ за змінними $x$ порядку не вище $r$, включаючи $u$ як похідну нульового порядку. Порядок $r$ рівняння $\mathcal{L}$ вважаємо суттєвим, тобто мінімальним серед порядків рівнянь, еквівалентних рівнянню $\mathcal{L}$ з точністю до ненульових множників, які є диференціальними функціями від $u$. У рамках локального підходу рівняння $\mathcal{L}$ вважаємо алгебраїчним рівнянням у просторі струменів $\mathrm{J}^r = \mathrm{J}^r(x|u)$ по-

[2.1] Щоб побудувати такий базис, вибираємо довільний базис модуля $Q$, утворений векторними полями $Q_s = \xi^{si}(x,u)\partial_i + \eta^s(x,u)\partial_u$. З точністю до заміни незалежних змінних і базисних елементів модуля $Q$, внаслідок умови на ранг можна вважати, що $\operatorname{rank}(\xi^{ss'}) = p$, і звести базис до вигляду $(\hat{Q}_s = \partial_s + \hat{\xi}^{s\iota}\partial_\iota + \hat{\eta}^s\partial_u)$, де індекс $\iota$ змінюється від $p+1$ до $n$ та матриці $(\hat{\xi}^{s\iota})$ і $(\hat{\eta}^s)$ є добутками матриці $(\xi^{ss'})^{-1}$ і матриць $(\xi^{s\iota})$ і $(\eta^s)$ відповідно. Оскільки модуль $Q$ інволютивний, то векторні поля $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_p$ комутують.

рядку $r$ і ототожнюємо його з многовидом $\{(x, u_{(r)}) \in \mathrm{J}^r \mid L(x, u_{(r)}) = 0\}$ його розв'язків у $\mathrm{J}^r$. Використовуємо символ $\mathcal{L}$ також для позначення цього многовиду, а $\mathcal{Q}_{(r)}$ — як для позначення многовиду, визначеного всіма диференціальними наслідками характеристичної системи $\mathcal{Q}$ до порядку $r$ включно, так і для позначення многовиду, визначеного системою $\mathcal{Q}_{(r)}$ в $\mathrm{J}^r$, тобто

$$\mathcal{Q}_{(r)} = \{(x, u_{(r)}) \in \mathrm{J}^r \mid D^\alpha Q_s[u] = 0,\ |\alpha| < r\}.$$

Тут і надалі $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \partial_{x_i} + u_{\alpha+\delta_i}\partial_{u_\alpha}$ — оператор повної похідної за змінною $x_i$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — довільний мультиіндекс, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $\delta_i$ — мультиіндекс, $i$-та компонента якого дорівнює 1, а всі інші компоненти нульові. Змінна $u_\alpha$ простору струменів $\mathrm{J}^r$ відповідає похідній $\partial^{|\alpha|}u/\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, а $u_i \equiv u_{\delta_i}$, $u_{ij} \equiv u_{\delta_i + \delta_j}$ і т. ін.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $F_{I^0} \neq 0$ у представленні $F(I^0, \dots, I^{n-p}) = 0$ загального розв'язку характеристичної системи $\mathcal{Q}$, і розв'язуємо рівняння $F(I^0, \dots, I^{n-p}) = 0$ відносно $I^0$: $I^0 = \varphi(I^1, \dots, I^{n-p})$. Внаслідок умови на ранг отримаємо представлення (у загальному випадку неявне)

$$\mathcal{A}\colon\quad I^0(x, u) = \varphi(\omega), \quad \omega_\sigma = I^\sigma(x, u) \tag{2.1}$$

для розв'язків характеристичної системи $\mathcal{Q}$, де $\varphi = \varphi(\omega)$ — довільна гладка функція своїх аргументів, яке називають *анзацом* для функції $u$, що відповідає модулю $Q$.

Зафіксувавши анзац $\mathcal{A}$ для $u$, всі похідні від $u$ можна виразити у термінах $\omega$, $\omega'$ та похідних від $\varphi$ і підставити всі співвідношення в $L[u]$, а решту змінних $x$ замінити їх виразами у нових змінних. Або можна спочатку замінити змінні через $(\omega, \omega', \varphi)$ і далі врахувати співвідношення $\varphi_{\omega'_s} = 0$. Функцію, отриману внаслідок такої процедури, позначимо через $L|_{\mathcal{A}}$. Вона залежить щонайбільше від $\omega$, $\omega'$ і $\varphi_{(r)}$, де $\varphi_{(r)}$ позначає набір похідних від $\varphi$ за змінними $\omega$ до порядку $r$ включно.

**Означення 2.1.** Анзац $\mathcal{A}$, побудований за модулем $Q$, *редукує* рівняння $\mathcal{L}$, якщо існують гладкі функції $\check{\lambda} = \check{\lambda}(\omega, \omega', \varphi_{(r)})$ та $\check{L} = \check{L}(\omega, \varphi_{(r)})$ такі, що функція $\check{\lambda}$ є ненульовою та

$$L|_{\mathcal{A}} = \check{\lambda}(\omega, \omega', \varphi_{(r)})\check{L}(\omega, \varphi_{(r)}).$$

Тоді модуль $Q$ називають *модулем редукції* рівняння $\mathcal{L}$, а рівняння $\check{L}(\omega, \varphi_{(r)}) = 0$ — *редукованим рівнянням*, пов'язаним з анзацом $\mathcal{A}$.

Процедуру редукції потрібно додатково уточнити у випадку редукції до алгебраїчних рівнянь при $p < n$; див. доведення теореми 2.34.

Множину $p$-вимірних модулів редукції рівняння $\mathcal{L}$ будемо позначати як $\mathcal{R}^p(\mathcal{L})$.

Розглянемо умови на диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ ($r$-го порядку) та інволютивний модуль $Q$, що задовольняє умову на ранг:

(C1) $Q$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$;

(C2) $V_{(r)}L[u] \in \langle L[u], D^\alpha Q_s[u], |\alpha| < r\rangle$ для всіх $V \in Q$;

(C3) $V_{(r)}L[u]\big|_{\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(r)}} = 0$ для всіх $V \in Q$.

Тут через $V_{(r)}$ позначено стандартне $r$-е продовження векторного поля $V = \xi^i(x,u)\partial_i + \eta(x,u)\partial_u$ [220, 230]:

$$V_{(r)} = V + \sum_{0<|\alpha|\leqslant r} \eta^\alpha \partial_{u_\alpha},$$

де $\eta^\alpha = D^\alpha V[u] + \xi^i u_{\alpha+\delta_i}$ і $V[u] = \eta - \xi^i u_i$. В умовах (C2) та (C3) достатньо вимагати, щоб векторне поле $V$ пробігало базис $(Q_1, \dots, Q_p)$ модуля $Q$. Вибір базису для представлення характеристичної системи $\mathcal{Q}$ і перевірки умов (C2) та (C3) не є суттєвим; див. [148, 294].

Усі ці умови зберігаються при точкових перетвореннях змінних $(x, u)$.

**Теорема 2.2.** *Умови* (C1) *та* (C2) *є еквівалентними й із них випливає умова* (C3)*. Якщо набір диференціальних функцій* $(L[u], D^\alpha Q_s[u], |\alpha| < r)$ *має максимальний ранг на* $\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(r)}$*, то з умови* (C3) *випливає умова* (C2) *(а отже, і умова* (C1)*).*

Окрім випадку максимальності рангу є інші, більш специфічні, випадки, коли умови (C1), (C2), (C3) задовольняються одночасно, наприклад, якщо $\mathcal{L} \cap \mathcal{Q}_{(r)} = \mathcal{Q}_{(r)}$.

Доведення теореми 2.2 спирається на таке твердження.

**Лема 2.3.** *Нехай гладкі функції $f$, $\Lambda^1$, ..., $\Lambda^p$ і інволютивний модуль $Q = \langle Q_1, \dots, Q_p \rangle$ векторних полів, визначених в околі $O_{z^0}$ деякої точки $z^0 \in \mathbb{R}^l$ для деякого $l \in \mathbb{N}$, задовольняють умови $Q_s f(z) = \Lambda^s(z) f(z)$ для всіх $z \in O_{z^0}$, $s = 1, \dots, p$, а $\dim Q|_{z^0} = p$. Тоді існує окіл $\check{O}_{z^0} \subset O_{z^0}$ точки $z^0$ і гладкі функції $\check{f}$ і $\lambda$, визначені в $\check{O}_{z^0}$, такі, що $\lambda(z) \neq 0$, $Q^s \check{f}(z) = 0$ і $f(z) = \lambda(z) \check{f}(z)$ для всіх $z \in \check{O}_{z^0}$.*

У попередніх роботах щодо модулів редукції використано досить різноманітну термінологію (див., наприклад, [64, 144, 146, 228, 294]). Зазвичай умову (C3) розглядали як основну та називали *критерієм умовної інваріантності*, а диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ — *умовно інваріантним* відносно інволютивного модуля $Q$. При цьому модуль $Q$ називали *інволютивним модулем операторів умовної симетрії* (або $Q$-умовною симетрією, або некласичною симетрією тощо) для рівняння $\mathcal{L}$. Версію умови (C2) у випадку систем диференціальних рівнянь для декількох невідомих функцій вперше запропоновано у роботі [158]. На відміну від випадку одного диференціального рівняння з однією невідомою функцією, версія умови (C2) є достатньою, але не є необхідною для того, щоб анзац, побудований за допомогою модуля $Q$, редукував вихідну систему, див. [179, § 5]. Альтернативний підхід до умовної інваріантності вимагає, щоб об'єднана система $\mathcal{L}$ і $\mathcal{Q}_{(r)}$ була формально сумісною у сенсі відсутності нетривіальних диференціальних наслідків [221, 229]. Але питання, яке саме представлення об'єднаної системи потрібно вибирати для дослідження формальної сумісності, є делікатним, див. [179, зноска 1] і § 2.5 нижче. Якщо критерій умовної інваріантності не виконується, але, незважаючи на це, рівняння $\mathcal{L}$ має $Q$-інваріантні розв'язки, то говорять про слабку інваріантність рівняння $\mathcal{L}$ відносно модуля $Q$ [228, 229, 255].

Існують модулі редукції, що відповідають класичним ліївським симетріям. Нехай $\mathfrak{g}$ — $p$-вимірна алгебра ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}$, базисні векторні поля якої $Q_1, \ldots, Q_p$ задовольняють умову $\operatorname{rank}(\xi^{si}) = \operatorname{rank}(\xi^{si}, \eta^s)$ ( $= p' \leqslant p$). Оболонка цих векторних полів над кільцем гладких функцій змінних $(x, u)$ є $p'$-вимірним інволютивним модулем, який належить до $\mathcal{R}^{p'}(\mathcal{L})$. Модулі такого типу називатимемо *ліївськими модулями редукції*. Інші модулі редукції називатимемо *неліївськими*. Наступне твердження щодо модулів редукції є важливим для подальшого розгляду (див. [294]).

**Лема 2.4.** *Нехай задано диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ $r$-го порядку: $L[u] = 0$, $p$-вимірний ($0 < p \leqslant n$) інволютивний модуль $Q$, що задовольняє умову на ранг, і диференціальні функції $\tilde{L}[u]$ й $\lambda[u] \neq 0$ порядку не вище $r$ такі, що $(L - \lambda\tilde{L})|_{\mathcal{Q}_{(r)}} = 0$. Модуль $Q$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли він є модулем редукції рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$: $\tilde{L}[u] = 0$. Анзац, побудований за модулем $Q$, редукує рівняння $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$ до рівнянь, що відрізняються щонайбільше на ненульовий множник.*

Класифікацію модулів редукції можна суттєво удосконалити й спростити шляхом використання ліївських симетрій і перетворень еквівалентності (класів) диференціальних рівнянь.

Позначимо через $\mathfrak{M}^p$ множину $p$-вимірних модулів векторних полів у просторі змінних $(x, u)$. Будь-яке точкове перетворення змінних $(x, u)$ індукує взаємно однозначне відображення $\mathfrak{M}^p$ у себе. А саме, перетворення

$$g\colon \quad \tilde{x}_i = X^i(x, u), \quad \tilde{u} = U(x, u)$$

генерує відображення $g_*\colon \mathfrak{M}^p \to \mathfrak{M}^p$ таке, що для будь-яких $Q \in \mathfrak{M}^p$ й $V \in Q$ векторне поле $V = \xi^i(x, u)\partial_i + \eta(x, u)\partial_u$ відображається у векторне поле $g_*V = \tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{x}_i} + \tilde{\eta}\partial_{\tilde{u}}$, де $\tilde{\xi}^i(\tilde{x}, \tilde{u}) = VX^i(x, u)$, $\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{u}) = VU(x, u)$.

Нехай задано групу $G$ точкових перетворень у просторі змінних $(x, u)$. Модулі $Q$ та $\tilde{Q}$ (одної розмірності) називають *еквівалентними* відносно групи $G$, якщо існує таке перетворення $g \in G$, що $\tilde{Q} = g_*Q$.

**Лема 2.5.** *Нехай $Q \in \mathcal{R}^p(\mathcal{L})$, а точкове перетворення $g$ відображає рівняння $\mathcal{L}$ у рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$ і образ $g_*Q$ задовольняє умову на ранг. Тоді $g_*Q \in \mathcal{R}^p(\tilde{\mathcal{L}})$.*

**Наслідок 2.6.** *Нехай $G$ — група точкових симетрій рівняння $\mathcal{L}$. Тоді еквівалентність $p$-вимірних модулів векторних полів відносно групи $G$ породжує відношення еквівалентності в $\mathcal{R}^p(\mathcal{L})$.*

Розглянемо клас $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ диференціальних рівнянь $\mathcal{L}_\theta$: $L(x, u_{(r)}, \theta_{(q)}) = 0$. Тут $L$ — фіксована функція, що залежить від $x$, $u_{(r)}$ і $\theta_{(q)}$, де $\theta$ — набір довільних (параметричних) диференціальних функцій, який пробігає множину $\mathcal{S}$ розв'язків допоміжної системи, а $\theta_{(q)}$ — набір усіх похідних функцій $\theta$ за змінними $x$ і $u_{(r)}$ порядку не вище $q$. Допоміжна система містить диференціальні рівняння $S(x, u_{(r)}, \theta_{(q')}(x, u_{(r)})) = 0$ і диференціальні нерівності $\Sigma(x, u_{(r)}, \theta_{(q')}(x, u_{(r)})) \neq 0$ ($> 0$, $< 0$, $\dots$) на $\theta$, де $x$ та $u_{(r)}$ відіграють роль незалежних змінних. Надалі функції $\theta$ називатимемо довільними елементами. Позначення $G^\sim$ і $\mathcal{G}^\sim$ використовуємо відповідно для групи еквівалентності та групоїда еквівалентності класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$. Грубо кажучи, групу $G^\sim$ складають точкові перетворення у просторі $(x, u_{(r)}, \theta)$, що зберігають вигляд рівнянь з класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$. Насправді існують різні типи груп еквівалентності [251, § 2.3]. Групоїд $\mathcal{G}^\sim$ — це множина

$$\{(\theta, \tilde{\theta}, g) \mid \theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{S},\ g \in \mathrm{T}(\theta, \tilde{\theta})\},$$

на якій природно введено структуру групоїда за допомогою композиції перетворень. Тут $\mathrm{T}(\theta, \tilde{\theta})$ — множина точкових перетворень змінних $(x, u)$, що відображають рівняння $\mathcal{L}_\theta$ у рівняння $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ (див. [27, 61, 251] щодо строгих означень понять, пов'язаних з класами диференціальних рівнянь).

Позначимо через $P$ набір усіх пар вигляду $(\mathcal{L}_\theta, Q)$, де $\mathcal{L}_\theta$ — рівняння з класу $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$, а $Q$ — модуль з $\mathcal{R}^p(\mathcal{L}_\theta)$. Із леми 2.5 випливає, що дія перетворень з групи еквівалентності $G^\sim$ або з групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ на $\mathcal{L}|_\mathcal{S}$ і $\{\mathcal{R}^p(\mathcal{L}_\theta) \mid \theta \in \mathcal{S}\}$ індукує відношення еквівалентності на $P$ [254].

**Означення 2.7.** Нехай $\theta, \theta' \in \mathcal{S}$, $Q \in \mathcal{R}^p(\mathcal{L}_\theta)$, $Q' \in \mathcal{R}^p(\mathcal{L}_{\theta'})$. Пари $(\mathcal{L}_\theta, Q)$, $(\mathcal{L}_{\theta'}, Q')$ назвемо $G^\sim$-*еквівалентними*, якщо $Q' = (\mathcal{T}^\theta)_* Q$ для деякого перетворення $\mathcal{T} \in G^\sim$, що відображає рівняння $\mathcal{L}_\theta$ у рівняння $\mathcal{L}_{\theta'}$. Пари $(\mathcal{L}_\theta, Q)$, $(\mathcal{L}_{\theta'}, Q')$ назвемо $\mathcal{G}^\sim$-*еквівалентними* (або *точково еквівалентними*), якщо $Q' = g_* Q$ для деякого перетворення $g \in \mathrm{T}(\theta, \tilde{\theta})$.

Класифікацію операторів редукції відносно $G^\sim$ (або $\mathcal{G}^\sim$) інтерпретуємо як класифікацію в $P$ відносно відповідного відношення еквівалентності, яку можна провести аналогічно до звичайної групової класифікації в класах диференціальних рівнянь. А саме, спочатку будуємо модулі редукції, що визначені для всіх значень довільних елементів $\theta$, а потім класифікуємо відносно $G^\sim$ (або $\mathcal{G}^\sim$) значення $\theta$, для яких рівняння $\mathcal{L}_\theta$ допускає додаткові модулі редукції.

## 2.2. Сингулярні модулі векторних полів для диференціальних функцій

Нехай $L = L[u]$ — диференціальна функція порядку $\operatorname{ord} L = r > 0$ (тобто гладка функція незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$ і похідних від $u$ за змінними $x$ порядку не вище $r$), а $Q$ — $p$-вимірний ($0 < p < n$) інволютивний модуль, породжений векторними полями $Q_s = \xi^{si}(x,u)\partial_i + \eta^s(x,u)\partial_u$, що визначені в просторі змінних $(x,u)$ і задовольняють умову на ранг $\operatorname{rank}(\xi^{si}) = p$.

**Означення 2.8.** Модуль $Q$ назвемо *сингулярним* для диференціальної функції $L$, якщо існує диференціальна функція $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$ порядку, меншого за $r$, така, що $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} = \tilde{L}|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$. В іншому випадку $Q$ назвемо *регулярним* модулем для диференціальної функції $L$. Якщо мінімальний порядок диференціальних функцій, обмеження яких на $\mathcal{Q}_{(r)}$ співпадає з $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$, дорівнює $k \in \{-\infty, 0, 1, \dots, r\}$, то модуль $Q$ назвемо *сингулярним копорядку* $k$ для диференціальної функції $L$. Модуль $Q$ назвемо *ультрасингулярним* для диференціальної функції $L$, якщо $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} \equiv 0$.

Зокрема, якщо модуль є регулярним для диференціальної функції $L$, то його копорядок сингулярності дорівнює $r = \operatorname{ord} L$. Копорядок сингулярності модуля $Q$ для диференціальної функції $L$ позначатимемо через $\operatorname{sco}_L Q$. Очевидно, що будь-яка диференціальна функція недодатного порядку не допускає сингулярних інволютивних модулів; це пояснює умову $\operatorname{ord} L = r > 0$ в означені 2.8.

Випадок $p = n$ є особливим. Розглянемо $n$-вимірний інволютивний модуль $Q$, породжений векторними полями, що задовольняють умову на ранг. Для будь-якої диференціальної функції $L = L[u]$ порядку $r$ існує диференціальна функція $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$ недодатного порядку така, що $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} = \tilde{L}|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$. Тому в цьому випадку природно вважати, що модуль $Q$ є сингулярним для $L$ тоді й лише тоді, коли $\operatorname{sco}_L Q = -\infty$.

Покажемо, як алгоритмічно побудувати функцію $\tilde{L}$, що задовольняє умови означення 2.8. Спершу зауважимо, що без обмеження загальності можна розглядати базис $(\hat{Q}_s = \partial_s + \hat{\xi}^{s\iota}\partial_\iota + \hat{\eta}^s\partial_u)$, де індекс $\iota$ змінюється від $p+1$ до $n$ (див. зноску 2.1). У рамках теорії сумісності Рік'є, розгляд такого базису можна інтерпретувати як виокремлення похідних від $u$, що містять диференціювання за змінними $x_s$ (*головні похідні* для характеристичної системи $\mathcal{Q}$). Тоді на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ будь-яку $\mathcal{Q}$-головну похідну порядку не вище $r$ можна виразити лише через похідні функції $u$ за змінними $x_{p+1}, \dots, x_n$ і коефіцієнти $\hat{\xi}^{s\iota}$ й $\hat{\eta}^s$. Наприклад, для похідних першого і другого порядку матимемо

$$
\begin{aligned}
&u_s = \hat{\eta}^s - \hat{\xi}^{s\iota}u_\iota,\\
&u_{s\iota} = \hat{\eta}^s_\iota - \hat{\xi}^{s\iota'}_\iota u_{\iota'} + \hat{\eta}^s_u u_\iota - \hat{\xi}^{s\iota'}_u u_{\iota'}u_\iota - \hat{\xi}^{s\iota'}u_{\iota\iota'},\\
&u_{ss'} = \hat{\eta}^s_{s'} - \hat{\xi}^{s\iota}_{s'}u_\iota + (\hat{\eta}^s_u - \hat{\xi}^{s\iota}_u u_\iota)(\hat{\eta}^{s'} - \hat{\xi}^{s'\iota'}u_{\iota'})\\
&\qquad - \hat{\xi}^{s\iota}(\hat{\eta}^{s'}_\iota - \hat{\xi}^{s'\iota'}_\iota u_{\iota'} + \hat{\eta}^{s'}_u u_\iota - \hat{\xi}^{s'\iota'}_u u_{\iota'}u_\iota - \hat{\xi}^{s'\iota'}u_{\iota\iota'}).
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Підставляючи в $L$ вирази для $\mathcal{Q}$-головних похідних до порядку $r$ включно, отримаємо диференціальну функцію $\hat{L}$, яка залежить лише від $x$, $u$ і похідних від $u$ за змінними $x_{p+1}, \dots, x_n$. Функцію $\hat{L}$ називаємо *диференціальною функцією, асоційованою з $L$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$*. Модуль $Q$

є сингулярним для диференціальної функції $L$ тоді й лише тоді, коли порядок функції $\hat{L}$ менший за $r$. Копорядок сингулярності модуля $Q$ дорівнює порядку функції $\hat{L}$. Модуль $Q$ є ультрасингулярним тоді й лише тоді, коли $\hat{L} \equiv 0$. Отже, можна вибрати $\hat{L}$ як $\tilde{L}$. Це показує, що перевірка, чи є інволютивний модуль з умовою на ранг сингулярним для диференціальної функції, насправді виконується цілком алгоритмічно, а отже її можна легко реалізувати в рамках існуючих програм символьних обчислень симетрій.

**Приклад 2.9.** Нижче наведено приклади сингулярних модулів $Q$ для диференціальних функцій ($L$), пов'язаних з фізично релевантними диференціальними рівняннями з частинними похідними ($L = 0$).

1. $n = 3$, $r = 2$, $L = u_1 - (f(u)u_2)_2 - (f(u)u_3)_3$ з $f \neq 0$, (1+2)-вимірне нелінійне ізотропне рівняння дифузії, $p = 2$, $Q = \langle \partial_2, \partial_3 \rangle$, $\hat{L} = u_1$, $\operatorname{sco}_L Q = 1$.

2. $n = 2$, $r = 4$, $L = g(x_2)u_{11} - (f(x_2)u_{22})_{22}$ з $fg \neq 0$, рівняння Ейлера–Бернулі для стрижня, $p = 1$, $Q = \langle \partial_2 \rangle$, $\hat{L} = g(x_2)u_{11}$, $\operatorname{sco}_L Q = 2$.

3. $n = 4$, $r = 2$, $L = u_{11} - u_{22} - u_{33} - u_{44}$, (1+3)-вимірне однорідне лінійне хвильове рівняння $p = 3$, $Q = \langle \partial_1 + \partial_4, \partial_2, \partial_3 \rangle$, $\hat{L} = 0$, $\operatorname{sco}_L Q = -\infty$, і, більш того, $Q$ є ультрасингулярним для $L$.

4. $n = 4$, $r = 2$, $L = u_{11} - u_{22} - u_{33} - u_{44} - u$, (1+3)-вимірне рівняння Клейна–Гордона, $p = 3$, $Q = \langle \partial_1 + \partial_4, \partial_2, \partial_3 \rangle$, $\hat{L} = u$, $\operatorname{sco}_L Q = 0$.

5. $n = 3$, $r = 2$, $L = u_1 - (f(u)u_2)_2 - g(u)u_3$ з $f \neq 0$, (1+2)-вимірне вироджене нелінійне рівняння дифузії–конвекції,
   a) $p = 1$, $Q = \langle \partial_2 \rangle$, $\hat{L} = u_1 - g(u)u_3$, $\operatorname{sco}_L Q = 1$;
   b) для $Q = \langle \partial_2, \partial_3 \rangle$ з $p = 2$, $\hat{L} = u_1$, а тому знову $\operatorname{sco}_L Q = 1$;
   c) $p = 2$, $Q = \langle \partial_2, \partial_1 - g(u)\partial_3 \rangle$, $\hat{L} = 0$, $\operatorname{sco}_L Q = -\infty$, і, більш того, $Q$ є ультрасингулярним для $L$.

**Твердження 2.10.** *Нехай $L = L[u]$ — диференціальна функція змінних $u = u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, а $Q$ — інволютивний модуль векторних полів у просторі $(x, u)$, розмірність якого менша за $n$ і який задовольняє умову на ранг. Тоді $\mathrm{sco}_L\, Q \leqslant \mathrm{sco}_L\, \check{Q}$ для будь-якого інволютивного підмодуля $\check{Q}$ модуля $Q$. Зокрема, модуль $Q$ сингулярний для $L$, якщо він містить підмодуль, сингулярний для $L$.*

*Доведення.* Якщо $\check{Q}$ є інволютивним підмодулем модуля $Q$, то для нього виконується умова на ранг і $\mathcal{Q}_{(r)} \subseteq \check{\mathcal{Q}}_{(r)}$, де $r = \mathrm{ord}\, L$. Якщо диференціальна функція $L$ співпадає з диференціальною функцією $\tilde{L}$ на многовиді $\check{\mathcal{Q}}_{(r)}$, то це справедливо і на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$. Отже, $\mathrm{sco}_L\, Q \leqslant \mathrm{sco}_L\, \check{Q}$. □

**Означення 2.11.** $(p{+}1)$-вимірний $(0 < p < n)$ модуль $M$ назвемо *метасингулярним* для диференціальної функції $L$, якщо будь-який $p$-вимірний інволютивний підмодуль модуля $M$, що задовольняє умову на ранг, є сингулярним для $L$ і модуль $M$ містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ таких підмодулів, параметризовану довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ усіх незалежних і залежних змінних. *Копорядок сингулярності* $\mathrm{sco}_L\, M$ метасингулярного модуля $M$ визначимо як максимум копорядків сингулярності його інволютивних $p$-вимірних підмодулів, що задовольняють умову на ранг.

**Означення 2.12.** $(p{+}1)$-вимірний $(0 < p < n)$ модуль $M$ назвемо *метарегулярним* для диференціальної функції $L$, якщо він містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ $p$-вимірних інволютивних підмодулів, регулярних для $L$, яку параметризовано довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ всіх незалежних і залежних змінних. Отже, $\mathrm{sco}_L\, M = \mathrm{ord}\, L$.

Тут та надалі під параметризацією довільною функцією розуміємо параметризацію по модулю розв'язків деякої системи диференціальних рівнянь на цю функції. *Копорядок сингулярності* сім'ї $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ також визначимо як максимум копорядків сингулярності її елементів і позначимо як $\mathrm{sco}_L\, \mathfrak{M}$.

Для зручності вважаємо, що випадок копорядку сингулярності $-\infty$ включає параметризовані сім'ї ультрасингулярних модулів, а також метасингулярні модулі, інволютивні $p$-вимірні підмодулі яких є ультрасингулярними, якщо задовольняють умову на ранг. Як показано далі, цей випадок є неможливим; див. наслідок 2.20.

**Приклад 2.13.** Для кожної диференціальної функції $L$ з прикладу 2.9, наведемо модуль $M$, метасингулярний для $L$, і відповідну сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$. Специфічний вигляд функціональних коефіцієнтів у $Q^\Phi$ вибраний з огляду на те, щоб гарантувати інволютивність $Q^\Phi$.

1. $M = \langle \partial_2, \partial_3, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 - (\Phi_2/\Phi_u)\partial_u, \partial_3 - (\Phi_3/\Phi_u)\partial_u \rangle\}$, $\operatorname{sco}_L M = 1$.

2. $M = \langle \partial_2, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 + \Phi\partial_u \rangle\}$, $\operatorname{sco}_L M = 2$.

3. $M = \langle \partial_1 + \partial_4, \partial_2, \partial_3, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 + \partial_4 - ((\Phi_2 + \Phi_4)/\Phi_u)\partial_u, \partial_2 - (\Phi_2/\Phi_u)\partial_u, \partial_3 - (\Phi_3/\Phi_u)\partial_u \rangle\}$, $\operatorname{sco}_L M = 1$.

4. $M = \langle \partial_1 + \partial_4, \partial_2, \partial_3, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 + \partial_4 - ((\Phi_2 + \Phi_4)/\Phi_u)\partial_u, \partial_2 - (\Phi_2/\Phi_u)\partial_u, \partial_3 - (\Phi_3/\Phi_u)\partial_u \rangle\}$, $\operatorname{sco}_L M = 1$.

5. a) $M = \langle \partial_2, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 + \Phi\partial_u \rangle\}$, $\operatorname{sco}_L M = 1$;
   b) $M = \langle \partial_2, \partial_3, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 - (\Phi_2/\Phi_u)\partial_u, \partial_3 - (\Phi_3/\Phi_u)\partial_u \rangle\}$, $\operatorname{sco}_L M = 1$.

Умова інволютивності модуля $M$ не включена явно в означення 2.11 й 2.12. Згідно цих означень метасингулярний (або метарегулярний) модуль $M$ має містити сім'ю $p$-вимірних інволютивних підмодулів, параметризованих функцією всіх змінних. Але у випадку $p \geqslant 2$ така вимога еквівалентна умові, що модуль $M$ є інволютивним.

**Твердження 2.14.** *$(p{+}1)$-вимірний модуль $M$, $p \geqslant 2$, містить сім'ю $p$-вимірних інволютивних підмодулів, параметризованих довільною функцією всіх незалежних і залежних змінних, тоді й лише тоді, коли модуль $M$ є інволютивним.*

*Доведення.* Припустимо, що модуль $M$ містить сім'ю $\mathfrak{M}$ $p$-вимірних інволютивних підмодулів, параметризованих довільною функцією всіх змінних по модулю функцій з меншою кількістю аргументів. Тоді базис $(Q_0, \dots, Q_p)$ модуля $M$ можна вибрати таким чином, щоб векторні поля $Q_1, \dots, Q_p$ породжували інволютивний підмодуль модуля $M$ з $\mathfrak{M}$ і, більш того, комутували. За допомогою деякої заміни змінних $(x, u)$ зведемо ці векторні поля до операторів зсувів: $Q_s = \partial_s$. З точністю до додавання $Q_s$ і множення на довільну ненульову функцію, векторне поле $Q_0$ можна вибрати у вигляді $Q_0 = \xi^{0\iota}(x, u)\partial_\iota + \eta^0(x, u)\partial_u$, де один із коефіцієнтів $\xi^{0\iota}$, $\iota = p+1, \dots, n$, чи $\eta^0$ дорівнює 1. Усю множину $p$-вимірних підмодулів модуля $M$ розіб'ємо на підмножини

$$S_0 = \{Q^{\bar\theta} = \langle Q_s + \theta^s Q_0,\ s = 1, \dots, p\rangle\},$$
$$S_s = \{Q^{\bar\theta^s} = \langle Q_0,\ \dots,\ Q_{s-1},\ Q_{s'} + \theta^{s'} Q_s,\ s' = s+1, \dots, p\rangle\},$$

де $\bar\theta = (\theta^1, \dots, \theta^p)$, $\bar\theta^s = (\theta^{s+1}, \dots, \theta^p)$, і всі $\theta$ належать множині гладких функцій змінних $(x, u)$[2.2]. За побудовою, якщо $Q^{\bar\theta^s}$ є інволютивним модулем, то вибрані базисні елементи комутують. Це означає, що компоненти $\bar\theta^s$ задовольняють рівняння $Q_0\theta^{s'} = 0, \dots, Q_{s-1}\theta^{s'} = 0$, $s' = s+1, \dots, p$, а тому їх можна виразити через функції щонайбільше $n+1-s$ аргументів. Таким чином, модуль $M$ містить сім'ю $\mathfrak{M}$ $p$-вимірних інволютивних підмодулів, параметризованих довільною функцією всіх змінних за модулем функцій з меншою кількістю аргументів, тоді й лише тоді, коли така сім'я є підмножиною множини $S_0$.

Якщо модуль $Q^{\bar\theta}$ з $S_0$ є інволютивним, то за теоремою Фробеніуса перевизначена система лінійних диференціальних рівнянь з частинни-

[2.2]Це можна зробити таким чином. Припустимо, що $R = \langle R_1, \dots, R_p\rangle$ — $p$-вимірний підмодуль модуля $M$, де $R_s = \sum_{k=0}^p \lambda^{sk} Q_k$, а $\lambda^{sk}$ — гладкі функції змінних $(x, u)$. Покладемо $\Lambda := (\lambda^{sk})_{s=1,\dots,p}^{k=0,\dots,p}$ та $\Lambda' := (\lambda^{sk})_{s=1,\dots,p}^{k=1,\dots,p}$. Маємо, що $\operatorname{rank}\Lambda = p$. Якщо $\operatorname{rank}\Lambda' = p$, то за допомогою елементарних операцій з рядками можна побудувати базис $R$, що ідентифікує його як елемент з множини $S_0$. Інакше матрицю $\Lambda$ можна звести до вигляду, де $\lambda^{10} = 1$, а всі інші елементи першого стовпчика і першого рядка нульові. Застосовуючи аналогічні міркування до отриманої підматриці в нижньому правому кутку, отримаємо базис типу $S_1$ або знову спрощуємо перший стовпчик і перший рядок цієї підматриці. Необхідне розбиття побудуємо, індуктивно повторюючи ці міркування.

ми похідними першого порядку $Q_s\Phi + \theta^s Q_0\Phi = 0$ відносно невідомої функції $\Phi = \Phi(x,u)$ має розв'язок, причому $Q_0\Phi \neq 0$, тобто функції-параметри $\theta^s$ можна представити у вигляді $\theta^s = -\Phi_s/Q_0\Phi$. Оскільки базисні елементи $Q_s + \theta^s Q_0$ модуля $Q^{\bar\theta}$ мають комутувати, то

$$\begin{aligned}
&[Q_s + \theta^s Q_0, Q_{s'} + \theta^{s'} Q_0] \\
&\quad = (\theta^{s'}_s + \theta^s Q_0\theta^{s'} - \theta^s_{s'} - \theta^{s'} Q_0\theta^s)Q_0 + \theta^{s'} Q_{0,s} - \theta^s Q_{0,s'} \\
&\quad = \frac{\Phi_{s'}Q_{0,s}\Phi - \Phi_s Q_{0,s'}\Phi}{(Q_0\Phi)^2}Q_0 + \frac{\Phi_s}{Q_0\Phi}Q_{0,s'} - \frac{\Phi_{s'}}{Q_0\Phi}Q_{0,s} = 0,
\end{aligned}$$

де $Q_{0,s} = [Q_s, Q_0] = \xi^{0\iota}_s\partial_\iota + \eta^0_s\partial_u$.

Припустимо, що не всі векторні поля $Q_{0,s}$ є нульовими. Нехай векторні поля $\tilde Q_1, \ldots, \tilde Q_{\tilde p}$ утворюють базис модуля $\langle Q_{0,s}\rangle$. Тоді векторні поля $Q_0, \tilde Q_1, \ldots, \tilde Q_{\tilde p}$ лінійно незалежні, а тому $Q_{0,s} = \sum_{\tilde s=1}^{\tilde p}\lambda^{s\tilde s}\tilde Q_{\tilde s}$ з деякими гладкими функціями $\lambda^{s\tilde s} = \lambda^{s\tilde s}(x,u)$. Із наведених вище комутаційних співвідношень випливає система для функції $\Phi$:

$$\Phi_{s'}Q_{0,s}\Phi - \Phi_s Q_{0,s'}\Phi = 0, \quad \lambda^{s'\tilde s}\Phi_s = \lambda^{s\tilde s}\Phi_{s'}, \quad \tilde s = 1, \ldots, \tilde p.$$

Оскільки серед коефіцієнтів $\lambda^{s\tilde s}$ обов'язково є ненульові, то функція $\Phi$ пробігає щонайбільше множину розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Отже, кількість її аргументів насправді менша за $n+1$. Це суперечить існуванню сім'ї $p$-вимірних інволютивних підмодулів модуля $M$, параметризованих довільною функцією всіх змінних за модулем функцій з меншою кількістю аргументів.

Отже, всі векторні поля $Q_{0,s} = [Q_s, Q_0]$ є нульовими, тобто модуль $M$ є інволютивним.

Навпаки, якщо модуль $M$ є інволютивним, виберемо базис утворений комутуючими векторними полями $Q_0, \ldots, Q_p$. Кожен підмодуль $Q^\Phi = \langle Q_s - (Q_s\Phi)/(Q_0\Phi)Q_0\rangle$ є інволютивним і має розмірность $p$. Тут $\Phi = \Phi(x,u)$ пробігає множину функцій від змінних $(x,u)$ з $Q_0\Phi \neq 0$, тобто доповнення до множини розв'язків рівняння $Q_0\Phi = 0$. Загальний розв'язок цього рівняння параметризований однією функцією від $n$ аргументів. Модулі $Q^{\Phi}$ і $Q^{\tilde{\Phi}}$, що відповідають функціям $\Phi$ і $\tilde{\Phi}$, співпадають тоді й лише тоді, коли $(Q_0\Phi)Q_s\tilde{\Phi} = (Q_s\Phi)Q_0\tilde{\Phi}$. Назвемо такі функції $\Phi$ і $\tilde{\Phi}$ еквівалентними. Таким чином, множину, визначену функцією $\Phi$, потрібно додатково факторизувати відносно цього відношення еквівалентності. Необхідною і достатньою умовою для еквівалентності функцій $\Phi$ і $\tilde{\Phi}$ є існування гладкої функції $F$ від $n-p+1$ аргументів, для якої $\tilde{\Phi} = F(\omega^1, \ldots, \omega^{n-p}, \Phi)$, де $\omega^1, \ldots, \omega^{n-p}$ утворюють повну множину функціонально незалежних розв'язків системи $Q_0\omega = 0$, $Q_s\omega = 0$. Оскільки кількість аргументів функції $F$ менша за $n+1$, то факторизація не впливає на ступінь довільності функції $\Phi$. □

**Зауваження 2.15.** Сім'ї інволютивних підмодулів, що належать до множини $S_0$, можна параметризувати різним чином. У доведенні твердження 2.14 ці підмодулі параметризовані за допомогою представлення коефіцієнтів $\theta^s$ у вигляді $\theta^s = -Q_s\Phi/Q_0\Phi$, а множину, визначену за допомогою функції $\Phi = \Phi(x, u)$, потрібно додатково факторизувати відносно деякого відношення еквівалентності. В якості параметризуючої функції замість $\Phi$ можна вибрати будь-яку функцію $\theta^s$. Після того, як $\Psi^1 = \theta^1$ вибрана в якості такої функції, умова $[Q_1 + \theta^1 Q_0, Q_2 + \theta^2 Q_0] = 0$ призводить до лінійного диференціального рівняння першого порядку з частинними похідними $Q_1\theta^2 + \theta^1 Q_0\theta^2 = Q_2\theta^1 + \theta^2 Q_0\theta^1$ відносно функції $\theta^2$, загальний розв'язок якого параметризовано довільною функцією $\Psi^2$ від $n$ змінних. Аналогічно, умова $[Q_i + \theta^i Q_0, Q_3 + \theta^3 Q_0] = 0$, $i = 1, 2$, призводить до системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними $Q_i\theta^3 + \theta^i Q_0\theta^3 = Q_3\theta^i + \theta^3 Q_0\theta^i$. Ця система відповідає модулю, породженому векторними полями $Q_i + \theta^i Q_0 + (Q_3\theta^i + \theta^3 Q_0\theta^i)\partial_{\theta^3}$, який є інволютивним, внаслідок рівняння для $\theta^2$. З теореми Фробеніуса випливає, що загальний розв'язок цієї системи параметризований довільною функцією $\Psi^3$ від $n-1$ змінних. Повторюючи процедуру для кожного $\theta^s$, взаємно однозначно параметризуємо інволютивні модулі з множини підмодулів $S_0$ набором $(\Psi^1, \dots, \Psi^p)$, де $\Psi^s$ пробігає множину гладких функцій $n+2-s$ змінних.

**Наслідок 2.16.** *Будь-який $(p{+}1)$-вимірний метасингулярний (або метарегулярний) модуль $M$ для диференціальної функції $L$, де $p \geqslant 2$, є інволютивним.*

**Твердження 2.17.** *$(p{+}1)$-вимірний модуль $M$ з $p \geqslant 2$ є метасингулярним (або відповідно метарегулярним) для диференціальної функції $L$ тоді й лише тоді, коли з точністю до точкових перетворень у просторі змінних $(x, u)$ він містить сім'ю $\mathfrak{M}$ $p$-вимірних інволютивних підмодулів, сингулярних (або відповідно регулярних) для $L$, вигляду*

$$Q^\Phi = \langle \partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u,\ s = 1, \dots, p\rangle,$$

*що параметризовані довільною гладкою функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ всіх незалежних і залежних змінних, $\Phi_u \neq 0$, причому копорядок сингулярності сім'ї $\mathfrak{M}$ для диференціальної функції $L$ співпадає з копорядком сингулярності всього модуля $M$, $\mathrm{sco}_L\,\mathfrak{M} = \mathrm{sco}_L\,M$.*

*Доведення.* Припустимо, що модуль $M$ є метасингулярним (або метарегулярним) для диференціальної функції $L$. Оскільки модуль $M$ інволютивний згідно наслідку 2.16, то можна вибрати його базис, утворений комутуючими векторними полями $Q_0$, …, $Q_p$, які задовольняють умову на ранг $\mathrm{rank}(\xi^{si}) = p$. За допомогою заміни змінних $(x, u)$ ці векторні поля можна звести до операторів зсувів: $Q_s = \partial_s$ і $Q_0 = \partial_u$. Підмодуль $Q^{\bar\theta} = \langle Q_s + \theta^s Q_0,\ s = 1, \dots, p\rangle$ модуля $M$ буде інволютивним тоді й лише тоді, коли коефіцієнти $\theta^s$ можна представити у вигляді $\theta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ для деякої функції $\Phi = \Phi(x, u)$, $\Phi_u \neq 0$ (див. доведення твердження 2.14). Отже, сім'я

$$\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u,\ s = 1, \dots, p\rangle\},$$

що параметризована довільною функцією $\Phi$, $\Phi_u \neq 0$, матиме необхідний вигляд.

Обернене твердження та рівність для копорядків сингулярності є очевидними у регулярному випадку, тому їх достатньо довести лише у сингулярному випадку.

Припустимо, що з точністю до точкових перетворень у просторі змінних $(x, u)$ модуль $M$ містить таку сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$, і нехай $\mathrm{sco}_L\,\mathfrak{M} = k < r = \mathrm{ord}\,L$. Звідси випливає, що $\mathrm{sco}_L\,Q^\Phi \leqslant k$ для будь-якого допустимого значення параметр-функції $\Phi$. У початкових змінних базисні елементи підмодуля $Q^\Phi$ мають вигляд $Q_s - (Q_s\Phi)/(Q_0\Phi)Q_0$, де $Q_0, \ldots, Q_p$ — комутуючі векторні поля. Достатньо довести, що будь-який $p$-вимірний інволютивний підмодуль $P$ модуля $M$, який задовольняє умову на ранг і не належить сім'ї $\{Q^\Phi\}$, є сингулярним для $L$. З точністю до перестановки векторних полів $Q_1, \ldots, Q_p$ базис підмодуля $P$ містить векторні поля $Q_0$ і $Q_{s'} + \theta^{s'}Q_1$, $s' = 2, \ldots, p$, де коефіцієнти $\theta^{s'}$ — гладкі функції змінних $(x, u)$. Для зручності, за допомогою точкових перетворень змінних $(x, u)$, зводимо векторні поля $Q_0$, $Q_2$, …, $Q_p$ і $Q_1$ до операторів зсувів $\partial_1$, $\partial_2$, …, $\partial_p$ і $\partial_u$ відповідно. Оскільки підмодуль $P$ інволютивний, то коефіцієнти $\theta^{s'}$ допускають представлення $\theta^{s'} = -\Psi_{s'}/\Psi_u$, де $\Psi$ — гладка функція змінних $x_2$, …, $x_n$ і $u$, $\Psi_u \neq 0$. Розглянемо сім'ю інволютивних модулів вигляду

$$Q^\varepsilon = \langle Q_0 + \varepsilon Q_1,\ Q_{s'} + \theta^{s'\varepsilon}Q_1,\ s' = 2, \ldots, p\rangle,$$

параметризованих малою сталою $\varepsilon$. Тут коефіцієнти $\theta^{s'\varepsilon}$ отримано за допомогою заміни в $\theta^{s'}$ аргументу $u$ на $u - \varepsilon x_1$: $\theta^{s'\varepsilon} = \theta^{s'}(x_2, \ldots, x_n, u - \varepsilon x_1)$. Для кожного ненульового значення $\varepsilon$ модуль $Q^\varepsilon$ належить сім'ї $\{Q^\Phi\}$. Це стає очевидним після переходу від вибраного базису до базису

$$(Q_1 + \varepsilon^{-1}Q_0,\ Q_{s'} - \varepsilon^{-1}\theta^{s'\varepsilon}Q_0,\ s' = 2, \ldots, p).$$

Таким чином, будь-який модуль $Q^\varepsilon$ з $\varepsilon \neq 0$ є сингулярним для диференціальної функції $L$. Розглянемо диференціальну функцію $\hat{L}^\varepsilon$, яка асоційована з $L$ на многовиді $\mathcal{Q}^\varepsilon_{(r)}$ через виключення похідних $u_\alpha$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p > 0$, з $L$, використовуючи рівняння $u_1 = \varepsilon$, $u_{s'} = \theta^{s'\varepsilon}$ та їхні диференціальні наслідки. Функція $\hat{L}^\varepsilon$ гладка за сукупністю параметра $\varepsilon$, змінних $x$ та похідних від $u$ за змінними $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Оскільки $\operatorname{ord}\hat{L}^\varepsilon \leqslant k$ для будь-якого $\varepsilon \neq 0$, то внаслідок неперервності це вірно й для $\varepsilon = 0$. Це означає, що підмодуль $P = Q^\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ буде сингулярним для $L$, і $\operatorname{sco}_L P \leqslant k = \operatorname{sco}_L \mathfrak{M}$.

Очевидно, що $\operatorname{sco}_L M \geqslant \operatorname{sco}_L \mathfrak{M}$. Оскільки будь-який $p$-вимірний інволютивний підмодуль $Q$ модуля $M$ задовольняє нерівність $\operatorname{sco}_L Q \leqslant \operatorname{sco}_L \mathfrak{M}$, то отримаємо $\operatorname{sco}_L M = \operatorname{sco}_L \mathfrak{M}$. □

Випадок двовимірних метасингулярних (або метарегулярних) модулів є особливим. Оскільки будь-який одновимірний модуль векторних полів інволютивний, то з метасингулярності (або метарегулярності) двовимірного модуля для диференціальної функції не випливає інволютивність цього модуля. Іншими словами, висновок твердження 2.14 невірний у випадку $p = 1$. Тому редукована форма підмодулів двовимірного метасингулярного (або метарегулярного) модуля залежить від того, чи є цей модуль інволютивним.

**Твердження 2.18.** *Двовимірний модуль $M$ є метасингулярним (або метарегулярним) для диференціальної функції $L$ тоді й лише тоді, коли з точністю до точкових перетворень у просторі змінних $(x, u)$ він містить сім'ю $\mathfrak{M}$ одновимірних підмодулів, сингулярних (або регулярних) для $L$, з базисними векторними полями в редукованій формі, параметризованій довільною гладкою функцією $\theta = \theta(x, u)$. Редукована форма має вигляд*

$$\partial_1 + \theta\partial_u \quad \textit{або} \quad \partial_1 + u\partial_2 + \xi^3\partial_3 + \cdots + \xi^n\partial_n + \theta\partial_u$$

*залежно від того, чи є модуль $M$ інволютивним. Тут $\xi^i = \xi^i(x, u)$, $i = 3, \ldots, n$ — фіксовані гладкі функції. Копорядок сингулярності сім'ї $\mathfrak{M}$ для диференціальної функції $L$ співпадає з копорядком усього модуля $M$, $\operatorname{sco}_L \mathfrak{M} = \operatorname{sco}_L M$.*

Щоб узгодити подальший розгляд для $p = 1$ із випадком $p \geqslant 2$, параметр-функцію $\theta$ можна представити у вигляді $\theta = -\Phi_1/\Phi_u$, де $\Phi = \Phi(x, u)$ — довільна гладка функція з $\Phi_u \neq 0$.

*Доведення.* Якщо модуль $M$ інволютивний, то доведення аналогічне доведенню твердження 2.14. Тому нижче розглянемо лише випадок, коли модуль $M$ не є неінволютивним.

Припустимо, що модуль $M$ метасингулярний (або метарегулярний) для диференціальної функції $L$. Виберемо базис $(Q_0, Q_1)$ модуля $M$ так, щоб векторне поле $Q_1$ задовольняло умову на ранг $\operatorname{rank}(\xi^{1i}) = 1$ і зведемо за допомогою точкової заміни змінних $(x, u)$ векторне поле $Q_0$ до оператору зсуву відносно змінної $u$: $Q_0 = \partial_u$. З точністю до перестановки змінних $x_1, \ldots, x_p$ можна вважати, що $\xi^{11} \neq 0$. Далі міняємо базисний елемент $Q_1$ на $(\xi^{11})^{-1}(Q_1 - \eta^1 Q_0)$ для того, щоб покласти $\eta^1 = 0$ і $\xi^{11} = 1$. Оскільки модуль $M$ неінволютивний, то комутатор $[Q_0, Q_1] = \xi^{12}_u \partial_2 + \cdots + \xi^{1n}_u \partial_n$ не дорівнює нулю. Тому з точністю до перестановки змінних $x_2, \ldots, x_p$ можна вважати, що $\xi^{12}_u \neq 0$. Заміна змінних $\tilde{x}^s = x^s$, $\tilde{u} = \xi^{12}(x, u)$ разом із одночасною заміною $Q_0$ на $(\xi^{12}_u)^{-1} Q_0$ зводить базисні елементи модуля $M$ до вигляду $Q_0 = \partial_u$ і $Q_1 = \partial_1 + u\partial_2 + \xi^3\partial_3 + \cdots + \xi^n\partial_n$. Тоді сім'я $\mathfrak{M} = \{\langle Q_1 + \theta Q_0 \rangle\}$ одновимірних підмодулів модуля $M$, сингулярних для функції $L$, де параметр $\theta = \theta(x, u)$ пробігає множину гладких функцій всіх незалежних і залежних функцій, є шуканою.

Обернене твердження та рівність для копорядків сингулярності знову є очевидними у регулярному випадку, тому їх достатньо довести лише у сингулярному випадку.

Нехай з точністю до точкових перетворень у просторі змінних $(x, u)$ модуль $M$ містить таку сім'ю $\mathfrak{M}$, причому $\operatorname{sco}_L \mathfrak{M} = k < r = \operatorname{ord} L$. Звідки випливає, що $\operatorname{sco}_L \langle Q_1 + \theta Q_0 \rangle \leqslant k$ для будь-якого значення параметр-функції $\theta$. Після повернення до початкових змінних достатньо довести, що підмодуль $\langle Q_0 \rangle$ модуля $M$ є сингулярним для функції $L$, якщо вектор поле $Q_0$ також задовольняє умову на ранг у цих координатах. Для зручності, за допомогою заміни змінних зведемо $Q_0$ до оператору зсуву $\partial_1$. Розглянемо сім'ю модулів вигляду $Q^\varepsilon = \langle Q_0 + \varepsilon(Q_1 - \xi^{11}Q_0)\rangle$, параметризованих малою сталою $\varepsilon$. Для кожного ненульового значення $\varepsilon$ модуль $Q^\varepsilon$ належить сім'ї $\mathfrak{M}$, оскільки в цьому випадку $Q^\varepsilon = \langle Q_1 + (\varepsilon^{-1} - \xi^{11})Q_0\rangle$. Таким чином, будь-який модуль $Q^\varepsilon$ з $\varepsilon \neq 0$ є сингулярним для диференціальної функції $L$. Розглянемо диференціальну функцію $\hat{L}^\varepsilon$, що асоційована з функцією $L$ на многовиді $\mathcal{Q}^\varepsilon_{(r)}$ через виключення похідних $u_\alpha$, $\alpha_1 > 0$, з $L$, використовуючи рівняння $u_1 = \varepsilon(\eta^{11} - \xi^{12}u_2 - \cdots - \xi^{1n}u_n)$ і його диференціальні наслідки. Функція $\hat{L}^\varepsilon$ є гладкою за сукупністю параметра $\varepsilon$, змінних $x$ і похідних $u$ за змінними $x_2, \ldots, x_n$. Оскільки порядок $\hat{L}^\varepsilon$ не перевищує $k$ для будь-якого ненульового $\varepsilon$, то внаслідок неперервності це твердження справедливе й для $\varepsilon = 0$. Це означає, що підмодуль $\langle Q_0\rangle = Q^\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ сингулярний для функції $L$, причому $\mathrm{sco}_L\langle Q_0\rangle \leqslant k = \mathrm{sco}_L\,\mathfrak{M}$.

Множину одновимірних підмодулів модуля $M$ вичерпують модуль $\langle Q_0\rangle$ і елементи сім'ї $\mathfrak{M}$. Звідки $\mathrm{sco}_L\,\mathfrak{M} = \mathrm{sco}_L\,M$. □

## 2.3. Диференціальні функції, що допускають метасингулярні модулі

З точністю до точкових перетворень можна описати загальний вигляд диференціальних функцій, що допускають метасингулярні модулі векторних полів.

**Теорема 2.19.** *Диференціальна функція $L$ $r$-го порядку однієї залежної та $n$ незалежних змінних допускає $(p+1)$-вимірний метасингулярний модуль векторних полів копорядку сингулярності $k$ $(0 \leqslant k < r,\ 0 < p < n)$ тоді й лише тоді, коли з точністю до точкових перетворень її можна представити у вигляді*

$$L = \bar{L}(x, \Omega_{r,k,p}), \tag{2.3}$$

*де* $\Omega_{r,k,p} = \big(\omega_\alpha,\ |\alpha| \leqslant r,\ \alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_n \leqslant k\big)$*, функція* $\bar L$ *суттєво залежить від деякого* $\omega_\alpha$ *з* $\alpha_{p+1} + \cdots + \alpha_n = k$*. Тут* $\omega_\alpha = u_\alpha$ *або, лише у випадку* $p = 1$*,* $\omega_\alpha = D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}(D_1 + uD_2 + \xi^3 D_3 + \cdots + \xi^n D_n)^{\alpha_1} u$ *для деяких фіксованих гладких функцій* $\xi^i = \xi^i(x,u)$*,* $i = 3, \ldots, n$*.*

*Доведення.* Припустимо, що диференціальна функція $L$ допускає $(p{+}1)$-вимірний метасингулярний модуль $M$ копорядку сингулярності $k$. З точністю до заміни базису та заміни змінних базис модуля $M$ включає або векторні поля $Q_s = \partial_s$ і $Q_0 = \partial_u$, або, якщо $p = 1$ і модуль $M$ неінволютивний, векторні поля $Q_1 = \partial_1 + u\partial_2 + \xi^3\partial_3 + \cdots + \xi^n\partial_n$ і $Q_0 = \partial_u$ (див. твердження 2.17 і 2.18). Хоча вигляд початкової диференціальної функції $L$ також зміниться внаслідок заміни змінних, для спрощення викладок використовуватимемо старі позначення для всіх нових величин.

Виберемо сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle Q_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u,\ s = 1, \ldots, p\rangle\}$ $p$-вимірних інволютивних підмодулів модуля $M$, параметризованих довільною функцією $\Phi = \Phi(x,u)$. Зафіксуємо довільну точку $z^0 = (x^0, u^0_{(r)}) \in \mathrm{J}^r$ і розглянемо такі значення параметр-функції $\Phi$, для яких $z^0 \in \mathcal{Q}^\Phi_{(r)}$. (Тут $\mathcal{Q}^\Phi_{(r)}$ — многовид, визначений у просторі струменів $\mathrm{J}^r$ диференціальними наслідками характеристичної системи $\mathcal{Q}^\Phi$, що мають як рівняння порядок не вище, ніж $r$. Систему таких диференціальних наслідків позначимо тим самим символом $\mathcal{Q}^\Phi_{(r)}$, що й многовид.) З цієї умови на $\Phi$ випливає, що значення похідних функції $\Phi$ лише за змінними $x_1, \ldots, x_n$ у точці $(x^0, u^0)$, які включають диференціювання за деякою змінною $x_s$, можна виразити через $u^0_{(r)}$ і значення похідних функції $\Phi$ у точці $(x^0, u^0)$, що включають диференціювання за змінною $u$. Останні значення є незв'язаними. Наприклад, якщо модуль $M$ інволютивний, маємо

$$
\begin{aligned}
&\Phi_s(x^0,u^0) = -u^0_s \Phi_u(x^0,u^0),\\
&\Phi_{si}(x^0,u^0) = -u^0_{si}\Phi_u(x^0,u^0) - u^0_i \Phi_{su}(x^0,u^0)\\
&\qquad\qquad - u^0_s \Phi_{iu}(x^0,u^0) - u^0_s u^0_i \Phi_{uu}(x^0,u^0), \quad \ldots .
\end{aligned}
$$

Введемо в $\mathrm{J}^r$ нові координати $(x_i, \omega_\alpha,\ |\alpha| \leqslant r)$ замість початкових координат $(x_i, u_\alpha,\ |\alpha| \leqslant r)$. Якщо модуль $M$ інволютивний, то ця заміна — лише перепозначення координат, яку виконуємо для того, щоб гарантувати узгодженість з особливим випадком неінволютивних модулів з $p = 1$. Заміна координат у особливому випадку добре визначена, оскільки матриця Якобі $(\partial\omega_\alpha/\partial u_{\alpha'})$ невироджена: вона є трикутною матрицею з одиницями на діагоналі за умови, що мультиіндекси впорядковано за правилом

$$\begin{aligned}\alpha \prec \beta \ \Leftrightarrow\ & |\alpha| < |\beta| \vee (|\alpha| = |\beta| \wedge \alpha_1 < \beta_1)\\ & \vee (|\alpha| = |\beta| \wedge \alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 < \beta_2) \vee \cdots .\end{aligned}$$

Позначимо через $\hat{L}$ диференціальну функцію, отриману з $L$ за допомогою процедури виключення внаслідок системи $\mathcal{Q}^{\Phi}_{(r)}$ похідних функції $u$, що містять диференціювання за змінними $x_s$, і які вважаємо $\mathcal{Q}^{\Phi}$-головними. Для мультиіндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ покладемо

$$\check{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \quad \hat{\alpha} = (\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n),$$

тобто $\alpha = (\check{\alpha}, \hat{\alpha})$. Через $\check{0}$ позначимо набір з $p$ нулів. Оскільки $Q^{\Phi}$ — метасингулярний модуль для функції $L$ копорядку сингулярності $k$, то функція $\hat{L}$ не залежить від похідних $u_{(\check{0},\hat{\alpha})}$, $|\hat{\alpha}| = k+1, \ldots, r$. Використаємо цю умову крок за кроком, починаючи з найбільшого значення $|\hat{\alpha}|$ і переписуючи похідні в нових змінних простору струменів $\mathrm{J}^r$ і в термінах функції $L$. Під час виконання цієї процедури враховуємо рівність $\omega_\beta = \psi^\beta[u]$, що виконується на многовиді $\mathcal{Q}^{\Phi}_{(r)}$ для кожного мультиіндекса $\beta$ з $|\beta| \leqslant r$. Диференціальну функцію $\psi^\beta = \psi^\beta[u]$ визначає рівність

$$\psi^\beta = D_{p+1}^{\beta_{p+1}} \cdots D_n^{\beta_n} (Q_1^{\Phi})^{\beta_1} \cdots (Q_p^{\Phi})^{\beta_p} u,$$

а тому її порядок дорівнює $|\hat{\beta}|$ і вона допускає представлення

$$\psi^\beta = \big(\partial_u (Q_1^{\Phi})^{\beta_1} \cdots (Q_p^{\Phi})^{\beta_p} u\big) u_{(\check{0},\hat{\beta})} + \tilde{\psi}^\beta[u]$$

з деякою диференціальною функцією $\tilde\psi^\beta=\tilde\psi^\beta[u]$ порядку меншого за $|\hat\beta|$. Тому для кожного $\alpha$ з $\check\alpha=\check 0$ і $|\hat\alpha|\leqslant r$ за ланцюговим правилом отримаємо

$$\hat L^\Phi_{u_\alpha}(z^0)=\sum_{\beta\colon\,|\beta|\leqslant r,\,|\hat\beta|\geqslant|\hat\alpha|}L_{\omega_\beta}(z^0)\psi^\beta_{u_\alpha}(z^0).\tag{2.4}$$

Отже, у нових змінних для кожного $\alpha$ з $\check\alpha=\check 0$ і $|\hat\alpha|=r$ рівняння $\hat L_{u_\alpha}(z^0)=0$ можна записати у вигляді $L_{\omega_\alpha}(z^0)=0$. Дійсно, у цьому випадку маємо $\psi^\beta_{u_\alpha}=1$, якщо $\beta=\alpha$, і $\psi^\beta_{u_\alpha}=0$, якщо $\beta\neq\alpha$. Це завершує перший крок доведення.

На другому кроці фіксуємо значення $\alpha$ з $\check\alpha=\check 0$ і $|\hat\alpha|=r-1$. Оскільки $L_{\omega_\beta}(z^0)=0$, якщо $\check\beta=\check 0$ і $|\hat\beta|=r$, то мультиіндекс підсумовування в (2.4) з фіксованим $\alpha$ можна вважати таким, що пробігає множину

$$B_1=\{\beta\mid|\check\beta|\leqslant 1,\,|\hat\beta|=r-1\}.$$

Похідна $\psi^\beta_{u_\alpha}$ дорівнює 1, $\partial_uQ^\Phi_su$ і 0 для $\beta=(\check 0,\hat\alpha)$, $\beta=(\delta_s,\hat\alpha)$ і всіх інших значень $\beta$ з $B_1$ відповідно. Тут $\delta_s$ — $p$-набір з 1 на $s$-му місці і 0 на всіх інших. Тому з рівняння $\hat L_{u_{(\check 0,\hat\alpha)}}(z^0)=0$ отримаємо

$$L_{\omega_{(\check 0,\hat\alpha)}}(z^0)+L_{\omega_{(\delta_s,\hat\alpha)}}(z^0)\big(\partial_uQ^\Phi_su\big)\big|_{(x,u)=(x^0,u^0)}=0.$$

Зауважимо, що $\partial_uQ^\Phi_su=-(\Phi_s/\Phi_u)_u$. Розщеплюючи за незв'язаними значеннями $\Phi_{su}(x^0,u^0)$ приходимо до рівнянь $L_{\omega_{(\check 0,\hat\alpha)}}(z^0)=0$ і $L_{\omega_{(\delta_s,\hat\alpha)}}(z^0)=0$.

Повторюючи цю процедуру, на $\mu$-му кроці, $\mu\in\{3,\dots,r-k\}$, отримаємо рівняння $L_{\omega_\beta}(z^0)=0$, де мультиіндекс $\beta$ приймає значення, для яких $r-\mu+2\leqslant|\hat\beta|\leqslant r$ та $|\check\beta|\leqslant r-|\hat\beta|$. Тоді для кожного фіксованого значення $\alpha$ з $\check\alpha=\check 0$ і $|\hat\alpha|=r-\mu+1$ мультиіндекс підсумовування $\beta$ у (2.4) фактично пробігає множину $B_\mu=\{\beta\mid|\check\beta|\leqslant\mu-1,\,|\hat\beta|=r-\mu+1\}$. Для $\beta\in B_\mu$ похідна $\psi^\beta_{u_\alpha}$ дорівнює $\partial_u(Q^\Phi_1)^{\beta_1}\cdots(Q^\Phi_p)^{\beta_p}u$, якщо $\hat\beta=\hat\alpha$, або 0 у протилежному випадку. Таким чином, з рівняння $\hat L_{u_{(\check 0,\hat\alpha)}}(z^0)=0$ отримаємо умову

$$\sum_{|\check\beta|\leqslant\mu-1,\,\hat\beta=\hat\alpha}L_{\omega_\beta}(z^0)\big(\partial_u(Q^\Phi_1)^{\beta_1}\cdots(Q^\Phi_p)^{\beta_p}u\big)\big|_{(x,u)=(x^0,u^0)}=0.$$

Значення $(\partial_1^{\beta_1}\cdots\partial_p^{\beta_p}\Phi_u)(x^0,u^0)$ з $|\check\beta|\leqslant\mu-1$ є незв'язаними. Тому розщеплюючи за ними або, рівносильно, розщеплюючи за

$$\big(\partial_u(Q_1^\Phi)^{\beta_1}\cdots(Q_p^\Phi)^{\beta_p}u\big)\big|_{(x,u)=(x^0,u^0)},\quad 0<|\check\beta|\leqslant\mu-1,$$

отримаємо рівняння $L_{\omega_\beta}(z^0)=0$, де $|\hat\beta|=r-\mu+1$ та $|\check\beta|\leqslant\mu-1$.

Після $(r-k)$-го кроку отримаємо систему $L_{\omega_\alpha}(z^0)=0$, де $|\hat\alpha|>k$ та $|\alpha|\leqslant r$, з якої випливає умова (2.3).

Навпаки, нехай диференціальна функція $L$ $r$-го порядку має вигляд (2.3), можливо, після виконання деякого точкового перетворення. Для довільної гладкої функції $\Phi=\Phi(x,u)$ з $\Phi_u\neq0$ розглянемо інволютивний модуль $Q^\Phi$, породжений або векторними полями $Q_s^\Phi=\partial_s-(\Phi_s/\Phi_u)\partial_u$ у загальному випадку, або векторним полем

$$Q_1^\Phi=\partial_1+u\partial_2+\xi^3\partial_3+\cdots+\xi^n\partial_n-(\Phi_s/\Phi_u)\partial_u$$

у спеціальному випадку з $p=1$. Використовуючи $\check L$ і $Q^\Phi$, побудуємо диференціальну функцію $\tilde L^\Phi=\bar L(x,\tilde\Omega_{r,k,p})$, де

$$\tilde\Omega_{r,k,p}=\big(\omega_\alpha=D_{p+1}^{\alpha_{p+1}}\cdots D_n^{\alpha_n}(Q_1^\Phi)^{\alpha_1}\cdots(Q_p^\Phi)^{\alpha_p}u,\ |\hat\alpha|\leqslant k,\ |\alpha|\leqslant r\big).$$

За побудовою, $\operatorname{ord}\tilde L^\Phi\leqslant k$ для всіх значень параметр-функції $\Phi$ з $\Phi_u\neq0$. Більш того, $\operatorname{ord}\tilde L^\Phi=k$ майже для всіх значень цієї параметр-функції за виключенням тих, які задовольняють деякій системі диференціальних рівнянь. Оскільки $L|_{\mathcal Q^\Phi_{(r)}}=\tilde L^\Phi|_{\mathcal Q^\Phi_{(r)}}$, де $\Phi$ пробігає множину гладких функцій змінних $(x,u)$ з ненульовою похідною за змінною $u$, то сім'я $\mathfrak M=\{Q^\Phi\}$ є сингулярною сім'єю $p$-вимірних інволютивних модулів копорядку сингулярності $k$ для диференціальної функції $L$ у нових координатах. Далі повертаємося до старих координат. Внаслідок твердження 2.17, якщо $p\geqslant2$, або твердження 2.18, якщо $p=1$, модуль векторних полів, що містить сім'ю $\mathfrak M$, є метасингулярним $(p{+}1)$-вимірним модулем копорядку сингулярності $k$ для диференціальної функції $L$. □

Виключаючи особливий випадок двовимірних неінволютивних метасингулярних модулів, результат теореми 2.19 можна сформулювати таким чином: диференціальна функція однієї залежної та $n$ незалежних змінних допускає метасингулярний $(p+1)$-вимірний інволютивний модуль $M$ копорядку сингулярності $k$ тоді й лише тоді, коли вона зводиться точковою заміною змінних до диференціальної функції, в аргументах якої диференціювання за $n-p$ фіксованими незалежними змінними для кожної похідної від залежної змінної серед (суттєвих) аргументів функції $L$ мають сукупний порядок не вищий за $k$.

**Наслідок 2.20.** *Будь-яка диференціальна функція однієї залежної та $n$ незалежних змінних додатного порядку не допускає метасингулярних $(p+1)$-вимірних ($0<p<n$) модулів копорядку сингулярності $-\infty$.*

*Доведення.* Припустимо протилежне, тобто нехай існує диференціальна функція $L$ порядку $r$ ($r>0$) однієї залежної та $n$ незалежних змінних, яка допускає $(p+1)$-вимірний ($0<p<n$) метасингулярний модуль $M$ копорядку сингулярності $-\infty$. Аналогічно доведенню теореми 2.19 перекомбінуємо базисні елементи модуля $M$ і виконаємо заміну змінних для того, щоб звести вибраний базис модуля $M$ до того ж самого канонічного вигляду, як і в доведенні теореми. Виберемо сім'ю $\mathfrak{M}$ $p$-вимірних інволютивних підмодулів модуля $M$, параметризованих довільною функцією $\Phi$ змінних $(x,u)$. Повторення подальших кроків доведення призводить до висновку, що диференціальна функція $L$ має вигляд (2.3) з $k=0$. Оскільки $\operatorname{ord} L=r$, то функція $\bar L$ у цьому представленні суттєво залежить від деякого $\omega_\alpha$ з $|\alpha|=r$. Для кожного $\alpha$ з $|\alpha|=r$ вираз для $\omega_\alpha$ внаслідок системи $\mathcal{Q}^{\Phi}_{(r)}$ включає похідну $\Phi_\alpha$, а аналогічні вирази для решти $\omega$ цю похідну не містять. Таким чином, диференціальна функція $\hat L^{\Phi}$ має порядок 0 для всіх значень параметр-функції $\Phi$, крім розв'язків рівняння $\hat L^{\Phi}_u=0$, яке розглядаємо як диференціальне рівняння порядку $r+1$ на параметр-функцію $\Phi$. Ця властивість зберігається при точкових перетвореннях у силу довільності параметр-функції $\Phi$. Тому в початкових змінних також маємо $\operatorname{sco}_L M\geqslant 0$, що суперечить припущенню. $\square$

**Зауваження 2.21.** Очевидно, що метасингулярний (або метарегулярний) $(p{+}1)$-вимірний модуль $M$ для диференціальної функції $L$ може містити $p$-вимірні інволютивні модулі, копорядки сингулярності яких менші за копорядок сингулярності $\operatorname{sco}_L M =: k$ модуля $M$. Розглянемо сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle Q_s - (\Phi_s/\Phi_u)Q^0,\ s = 1,\dots,p\rangle\}$ $p$-вимірних інволютивних підмодулів модуля $M$, параметризованих довільною функцією $\Phi = \Phi(x,u)$, і вважаємо, що $\operatorname{sco}_L \mathfrak{M} = k$. Також вважаємо, що базисні векторні поля $Q_s$ і $Q^0$ модуля $M$ мають вигляд, наведений на початку доведення теореми 2.19. Тоді значення параметр-функції $\Phi$, для яких $\operatorname{sco}_L Q^\Phi < k$, є розв'язками системи

$$\sum_{|\breve\alpha|\leqslant r-k} \bar L_{\omega_\alpha}(x,\tilde\Omega_{r,k,p})\bigl(\partial_u (Q^\Phi_1)^{\alpha_1}\cdots(Q^\Phi_p)^{\alpha_p}u\bigr) = 0, \quad |\hat\alpha| = k,$$

де $\check L$ і $\tilde\Omega_{r,k,p}$ визначено в теоремі 2.19 і в її доведенні відповідно. Іншими словами, регулярні значення параметр-функції $\Phi$, асоційовані з підмодулями максимального копорядку сингулярності $k$ у $\mathfrak{M}$, задовольняють нерівність для деякого $\alpha$ з $|\hat\alpha| = k$

$$\sum_{|\breve\alpha|\leqslant r-k} \bar L_{\omega_\alpha}(x,\tilde\Omega_{r,k,p})\bigl(\partial_u (Q^\Phi_1)^{\alpha_1}\cdots(Q^\Phi_p)^{\alpha_p}u\bigr) \neq 0.$$

**Зауваження 2.22.** Загалом, диференціальна функція (порядку $r > 0$) допускає нескінченну кількість метарегулярних модулів різних розмірностей. Дійсно, нехай у точці $z^0 = (x^0, u^0_{(r)})$ простору струменів $\mathrm J^r$ порядку $r$ диференціальна функція $L$ має нехарактеристичний напрямок $(c_1,\dots,c_n)$, тобто

$$C := \sum_{|\alpha|=r} L_{u_\alpha}(x^0,u^0_{(r)})c_1^{\alpha_1}\cdots c_n^{\alpha_n} \neq 0;$$

див. [220, твердження 2.75]. Виконаємо заміну незалежних змінних $x$, $\tilde x_i = X^i(x)$ з $X^1_i(x^0) = c_i$ в околі $x^0$ і покладемо $\tilde u = u$, що індукує точкову заміну координат у просторі струменів $\mathrm J^r$. Позначимо через $\tilde z^0$ нові координати точки $z^0$. У нових координатах похідна $L_{\tilde u_{r\delta_1}}$ співпадає з $C$

в точці $\tilde{z}^0$, а тому не дорівнює нулю в околі цієї точки. Тоді будь-який модуль $M = \langle Q^0, \dots, Q^p \rangle$ з $0 < p < n$, де $Q^0 = \partial_{\tilde{u}}$ і $\langle Q^1, \dots, Q^p \rangle$ — підмодуль модуля $\langle \partial_{\tilde{x}_2}, \dots, \partial_{\tilde{x}_n} \rangle$, є метарегулярним модулем для диференціальної функції $L$. Підняття елементів модуля $M$ оберненою заміною координат дає метарегулярний модуль для диференціальної функції $L$ у початкових змінних $(x, u)$. Завдяки функціональній свободі у виборі функції $X^1$ і — додатково при $p < n - 1$ — у виборі $p$-вимірних підмодулів у $\langle \partial_{\tilde{x}_2}, \dots, \partial_{\tilde{x}_n} \rangle$ диференціальна функція $L$ допускає нескінченну кількість метарегулярних модулів будь-якої розмірності $p$ з $0 < p < n$.

## 2.4. Сингулярні модулі векторних полів для диференціальних рівнянь

Інволютивний модуль $Q$, що задовольняє умову на ранг, назвемо *(сильно) сингулярним для диференціального рівняння* $\mathcal{L}$, якщо він сингулярний для диференціальної функції $L[u]$, яка є лівою частиною канонічного представлення $L[u] = 0$ рівняння $\mathcal{L}$. Сильно регулярні модулі визначаємо аналогічно. Як правило, атрибут "сильний" надалі опускаємо. Оскільки ліві частини диференціальних рівнянь визначено з точністю до множників, які є ненульовими диференціальними функціями, то при розгляді диференціальних рівнянь умови означення 2.8 можна послабити.

**Означення 2.23.** $p$-вимірний $(0 < p < n)$ інволютивний модуль $Q$, що задовольняє умову на ранг, назвемо *слабо сингулярним* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ суттєвого порядку $r > 0$, якщо існують диференціальна функція $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$ порядку, нижчого за $r$, і ненульова диференціальна функція $\lambda = \lambda[u]$ порядку, не вищого за $r$, такі, що $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} = (\lambda \tilde{L})|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$. В іншому випадку назвемо $Q$ *слабо регулярним* модулем для диференціального рівняння $\mathcal{L}$. Якщо мінімальний порядок диференціальної функції, обмеження якої на $\mathcal{Q}_{(r)}$ співпадає з точністю до ненульових функціональних множників з $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$, дорівнює $k \in \{-\infty, 0, 1, \dots, r\}$, то модуль $Q$ назвемо *слабо сингулярним копорядку* $k$ для диференціального рівняння $\mathcal{L}$.

Зокрема, як і у випадку сильної регулярності, слабо регулярні модулі для диференціального рівняння $\mathcal{L}$ мають копорядок слабкої сингулярності $r = \operatorname{ord} L$. Інволютивний модуль $Q$ є слабо ультрасингулярним для диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$, якщо він є сильно ультрасингулярним для $\mathcal{L}$. Копорядок слабкої сингулярності модуля $Q$ для рівняння $\mathcal{L}$ позначатимемо $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q$.

З сильної сингулярності випливає слабка сингулярність, і тому з слабкої регулярності випливає сильна регулярність. Копорядок слабкої сингулярності є завжди меншим або рівним і може бути строго меншим за копорядок сильної сингулярності. Отже, сильно регулярні модулі можуть бути сингулярними в слабкому сенсі.

**Приклад 2.24.** Для ілюстрації зв'язку між сильною та слабкою сингулярністю розглянемо рівняння $x_2u_{111} + x_1u_{222} = e^{u_{33}}(u_3 + u)$. Воно допускає двовимірний сингулярний модуль $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle$, копорядки сильної та слабкої сингулярності якого дорівнюють відповідно 2 і 1. Цей же модуль $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle$ є сильно регулярним і слабо сингулярним копорядку 1 для рівняння $x_2u_{11} + x_1u_{22} = e^{u_{33}}(u_3 + u)$.

Нехай $\hat{L}$ — диференціальна функція, асоційована з $L$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ через виключення $\mathcal{Q}$-головних похідних. Без обмеження загальності, диференціальні функції $\lambda$ і $\tilde{L}$ в означенні 2.23 можна замінити диференціальними функціями, асоційованими з ними на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$. Тоді рівність $L = \lambda\tilde{L}$, що виконується на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$, еквівалентна представленню $\hat{L} = \lambda\tilde{L}$. Припустимо, що $\hat{L}$ є максимального рангу відносно похідної $u_\alpha$ найвищого порядку $k$, від якої ця диференціальна функція залежить суттєво, тобто $\hat{L}_{u_{(\check{0},\hat{\alpha})}} \neq 0$ для деякого $\hat{\alpha}$ з $|\hat{\alpha}| = k$ на многовиді розв'язків рівняння $\hat{L} = 0$ (див. позначення в теоремі 2.19). Тоді можна покласти $\tilde{L} = \hat{L}$ і $\lambda = 1$. Це означає, що копорядок слабкої сингулярності модуля $Q$ для рівняння $\mathcal{L}$: $L=0$ дорівнює порядку $k$ диференціальної функції $\hat{L}$, а тому є порядком сильної сингулярності модуля $Q$ для цього рівняння. Отже, у цьому випадку існує цілком алгоритмічна процедура для перевірки, чи є інволютивний модуль слабо сингулярним для диференціального рівняння з частинними похідними.

**Твердження 2.25.** *Диференціальне рівняння $\mathcal{L}$: $L[u]=0$ однієї залежної та $n$ незалежних змінних допускає слабо сингулярний $p$-вимірний модуль векторних полів ($0<p\leqslant n$) копорядку сингулярності $k$ тоді й лише тоді, коли цей модуль є сильно сингулярним для $\mathcal{L}$ копорядку $k$ (можливо в представленні, що відрізняється від $L[u]=0$ на ненульовий множник, який диференціальною функцією від $u$).*

*Доведення.* У позначеннях означення 2.23 рівняння $L=0$ еквівалентне рівнянню $\tilde{L}=0$, причому $\operatorname{sco}_{\tilde{L}} Q=k$. □

**Приклад 2.26.** Домножуючи рівняння з прикладу 2.24 на ненульову диференціальну функцію $e^{-u_{33}}$, отримаємо відповідно рівняння $e^{-u_{33}}(x_2u_{111}+x_1u_{222})=u_3+u$ та $e^{-u_{33}}(x_2u_{11}+x_1u_{22})=u_3+u$. Тоді модуль $\langle\partial_1,\partial_2\rangle$ одночасно буде і слабо, і сильно сингулярним копорядку 1 для цих рівнянь.

Аналогічно твердженню 2.10 доводимо таке твердження.

**Твердження 2.27.** *Нехай $\mathcal{L}$ — диференціальне рівняння на невідому функцію $u$ від $n$ незалежних змінних $x$, $Q$ — інволютивний модуль векторних полів у просторі змінних $(x,u)$, що має розмірність меншу за $n$ і задовольняє умову на ранг. Тоді $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q\leqslant \operatorname{wsco}_{\mathcal{L}}\check{Q}$ для будь-якого інволютивного підмодуля $\check{Q}$ модуля $Q$. Зокрема, модуль $Q$ є слабо сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, якщо він містить підмодуль, слабо сингулярний для $\mathcal{L}$.*

Поняття модулів, метасингулярних (метарегулярних) для диференціальних рівнянь у сильному сенсі, визначаємо аналогічно до сильно сингулярних (регулярних) модулів.

**Означення 2.28.** $(p{+}1)$-вимірний $(0 < p < n)$ модуль $M$ назвемо *метасингулярним* (або *метарегулярним*) для диференціального рівняння $\mathcal{L}$ *у сильному сенсі*, якщо він є метасингулярним (або метарегулярним) для диференціальної функції $L[u]$, яка є лівою частиною канонічного представлення $L[u] = 0$ рівняння $\mathcal{L}$.

Поняття модулів, метасингулярних для диференціальних рівнянь у слабкому сенсі, визначаємо аналогічно випадку диференціальних функцій.

**Означення 2.29.** $(p{+}1)$-вимірний $(0 < p < n)$ модуль $M$ назвемо *метасингулярним у слабкому сенсі* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L = 0$, якщо будь-який $p$-вимірний інволютивний підмодуль модуля $M$, що задовольняє умову на ранг, слабо сингулярний для рівняння $\mathcal{L}$, причому модуль $M$ містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ таких підмодулів, параметризовану довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ всіх незалежних і залежних змінних. *Копорядок слабкої сингулярності* метасингулярного модуля $M$ для рівняння $\mathcal{L}$, який позначаємо через $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} M$, співпадає з максимумом копорядків слабкої сингулярності його $p$-вимірних інволютивних підмодулів, які задовольняють умову на ранг.

**Означення 2.30.** $(p{+}1)$-вимірний $(0 < p < n)$ модуль $M$ назвемо *метарегулярним у слабкому сенсі* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$, якщо модуль $M$ містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ $p$-вимірних інволютивних підмодулів, які слабо регулярні для рівняння $\mathcal{L}$ і параметризовані довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ всіх незалежних і залежних змінних, а тому

$$\operatorname{sco}_L M = \operatorname{ord} L.$$

**Теорема 2.31.** *Диференціальне рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ $r$-го порядку і максимального рангу з однією залежною та $n$ незалежними змінними допускає слабо метасингулярний $(p{+}1)$-вимірний модуль $M$ векторних полів копорядку сингулярності $k$ тоді й лише тоді, коли з точністю до* *точкових перетворень диференціальну функцію $L$ можна представити у вигляді*

$$L = \bar{\lambda}[u]\bar{L}(x, \Omega_{r,k,p}), \tag{2.5}$$

*де $\bar{\lambda}$ — ненульова диференціальна функція порядку не вище $r$, $\bar{L}$ — гладка функція від $x$ і $\Omega_{r,k,p} = \big(\omega_\alpha,\ |\alpha| \leqslant r,\ \alpha_{p+1}+\dots+\alpha_n \leqslant k\big)$, що суттєво залежить від деякого $\omega_\alpha$ з $\alpha_{p+1}+\dots+\alpha_n = k$. Тут $\omega_\alpha = u_\alpha$ або, лише у випадку $p=1$,*

$$\omega_\alpha = D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}(D_1 + uD_2 + \xi^3 D_3 + \dots + \xi^n D_n)^{\alpha_1} u$$

*для деяких фіксованих гладких функцій $\xi^i = \xi^i(x,u)$, $i = 3, \dots, n$. Значення $k$ має бути мінімальним серед усіх можливих представлень вигляду* (2.5) *для диференціальної функції $L$. Тоді модуль $M$ є строго метасингулярним копорядку $k$ для рівняння $\bar{L}(x, \Omega_{r,k,p}) = 0$, яке еквівалентне $\mathcal{L}$.*

*Доведення.* Використаємо позначення й означення з доведення теореми 2.19. Спочатку припускаємо, що диференціальне рівняння $\mathcal{L}$: $L[u]=0$ максимального рангу й допускає слабо метасингулярний $(p{+}1)$-вимірний модуль векторних полів копорядку сингулярності $k$. З точністю до точкових перетворень і замін базису модуля достатньо розглянути лише сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle Q_s - (\Phi_s/\Phi_u)Q^0,\ s = 1, \dots, p\rangle\}$ $p$-вимірних інволютивних підмодулів модуля $M$, параметризованих довільною функцією $\Phi = \Phi(x,u)$. Тут векторне поле $Q^0$ зведено до оператора зсуву $\partial_u$, а векторні поля $Q^s$ мають вигляд $Q_s = \partial_s$ або, якщо $p=1$ і модуль неінволютивний, $Q_1 = \partial_1 + u\partial_2 + \xi^3\partial_3 + \dots + \xi^n\partial_n$.

Для будь-якої точки $z^0 = (x^0, u^0_{(r)}) \in \mathcal{L} \subset \mathrm{J}^r$ виберемо модулі з $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$, для яких $z^0 \in \mathcal{Q}^\Phi_{(r)}$. З цього випливає, що значення похідних функції $\Phi$ лише за змінними $x_1, \dots, x_n$ у точці $(x^0, u^0)$, які включають диференціювання за деякою змінною $x_s$, можна виразити через $u^0_{(r)}$ і значення похідних функції $\Phi$ у точці $(x^0, u^0)$, що містять диференціювання за змінною $u$. Останні значення є незв'язаними.

З лівої частини рівняння $\mathcal{L}$ отримаємо диференціальну функцію $\hat{L}^\Phi$, асоційовану з $L$ на многовиді $\mathcal{Q}^\Phi_{(r)}$ через виключення $\mathcal{Q}^\Phi$-головних похідних функції $u$. (Такі похідні містять диференціювання за змінною $x_s$.) Властивість, що для будь-якої функції $\Phi$ з $\Phi_u \neq 0$ модуль $Q^\Phi$ є слабо сингулярним щонайбільше копорядку $k$ для рівняння $\mathcal{L}$, призводить до умови

$$\hat{L}^\Phi_{u_{(\check{0},\hat{\alpha})}}(z_0) = 0, \quad |\hat{\alpha}| = k+1, \dots, r.$$

Як і при доведені теореми 2.19, ітеративно використаємо цю умову, починаючи з найвищого значення $r$ для $|\hat{\alpha}|$ і переписуючи похідні в нових координатах $(x_i, \omega_\alpha, |\alpha| \leqslant r)$ простору струменів $\mathrm{J}^r$ і в термінах функції $L$. У такий спосіб виведемо рівняння

$$L_{\omega_\alpha}(z^0) = 0, \quad |\hat{\alpha}| > k, \quad |\alpha| \leqslant r,$$

що виконуються для всіх $z^0 \in \mathcal{L}$. Застосовуючи лему Адамара до кожного з цих рівнянь і скориставшись лемою 2.3, отримаємо (2.5).

Навпаки, припустимо, що диференціальна функція $L$ порядку $r$ має вигляд (2.5), можливо, після виконання деякого точкового перетворення. Для довільної гладкої функції $\Phi = \Phi(x,u)$ з $\Phi_u \neq 0$ розглянемо інволютивний модуль $Q^\Phi$, породжений або векторними полями

$$Q^\Phi_s = \partial_s - \frac{\Phi_s}{\Phi_u}\partial_u$$

у загальному випадку, або векторним полем

$$Q^\Phi_1 = \partial_1 + u\partial_2 + \xi^3\partial_3 + \dots + \xi^n\partial_n - \frac{\Phi_s}{\Phi_u}\partial_u$$

у спеціальному випадку з $p = 1$. Використовуючи $\bar{L}$ і $Q^\Phi$, побудуємо диференціальну функцію $\tilde{L}^\Phi = \bar{L}(x, \tilde{\Omega}_{r,k,p})$, де

$$\tilde{\Omega}_{r,k,p} = \big(\omega_\alpha = D_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \cdots D_n^{\alpha_n} (Q^\Phi_1)^{\alpha_1} \cdots (Q^\Phi_p)^{\alpha_p} u,\, |\hat{\alpha}| \leqslant k,\, |\alpha| \leqslant r\big).$$

За побудовою порядок диференціальної функції $\tilde{L}^\Phi$ не вищий $k$ для всіх допустимих значень параметр-функції $\Phi$. Більш того, $\operatorname{ord} \tilde{L}^\Phi = k$ для майже всіх значень цієї параметр-функції за виключенням тих, які задовольняють систему диференціальних рівнянь. Оскільки

$$L\big|_{\mathcal{Q}^{\Phi}_{(r)}} = (\bar{\lambda}\bar{L})\big|_{\mathcal{Q}^{\Phi}_{(r)}} = (\bar{\lambda}\tilde{L}^{\Phi})\big|_{\mathcal{Q}^{\Phi}_{(r)}},$$

де $\Phi$ пробігає множину гладких функцій змінних $(x, u)$ з ненульовими похідними за змінною $u$, то сім'я $\mathfrak{M} = \{Q^{\Phi}\}$ є сім'єю $p$-вимірних інволютивних модулів, слабо сингулярних копорядку $k$ для диференціального рівняння $\mathcal{L}$ у нових координатах. Після повернення до старих координат внаслідок твердження 2.17 для $p \geqslant 2$ або твердження 2.18 для $p = 1$, модуль $M$ векторних полів, породжений сім'єю $\mathfrak{M}$, є метасингулярним $(p{+}1)$-вимірним модулем копорядку сингулярності $k$ для диференціальної функції $L/\Lambda$. Отже, цей модуль є слабо метасингулярним $(p{+}1)$-вимірним модулем копорядку сингулярності $k$ для диференціального рівняння $\mathcal{L}$. □

**Зауваження 2.32.** З теореми 2.31 випливає, що з точністю до домноження рівнянь на ненульові диференціальні функції немає потреби уточнювати, який тип метасингулярності диференціальних рівнянь — слабкий чи сильний — маємо на увазі.

## 2.5. Сингулярність модулів редукції та порядок редукованих рівнянь

**Означення 2.33.** Інволютивний модуль $Q$ назвемо *сингулярним модулем редукції* диференціального рівняння $\mathcal{L}$, якщо $Q$ є і модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$, і слабо сингулярним модулем рівняння $\mathcal{L}$.

Нагадаємо, що диференціальні рівняння є еквівалентними, якщо вони відрізняються на ненульовий множник, який є диференціальною функцією. Суттєвим порядком диференціального рівняння $\mathcal{L}$ є мінімальний порядок рівнянь у класі еквівалентності, якому належить рівняння $\mathcal{L}$.

Прямим узагальненням відповідних результатів для $n = 2$ роботи [180] отримаємо такі твердження.

**Теорема 2.34.** *Нехай $Q$ — $p$-вимірний модуль редукції ($0 < p \leqslant n$) рівняння $\mathcal{L}$. Тоді копорядок слабкої сингулярності модуля $Q$ для рівняння $\mathcal{L}$ співпадає з суттєвим порядком відповідного редукованого диференціального рівняння.*

*Доведення.* Нехай $p < n$ і $k := \operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q > 0$. Тоді при будь-якому точковому перетворені значення $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q$ не змінюється. За допомогою точкового перетворення локально можна домогтися ситуації, що в нових змінних модуль $Q$ матиме базис ($Q_s = \partial_s$, $s = 1, \dots, p$). (Знову використовуємо одні й ті самі позначення для старих і нових змінних.) Тоді анзац, побудований за модулем $Q$, можна вибрати у вигляді $u = \varphi(\omega)$, де $\varphi = \varphi(\omega)$ — нова невідома функція, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-p})$ і $\omega_1 = x_{p+1}$, $\dots$, $\omega_{n-p} = x_n$ — інваріантні незалежні змінні. Систему $\mathcal{Q}_{(r)}$ утворюють рівняння $u_\alpha = 0$, де мультиіндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ задовольняє умови

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p > 0, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leqslant r = \operatorname{ord} L.$$

Оскільки $Q \in \mathcal{R}^p(\mathcal{L})$, то існують диференціальні функції $\check\lambda = \check\lambda[\varphi]$ і $\check L = \check L[\varphi]$ порядку не вище $r$ такі, що $L|_{\mathcal{A}} = \check\lambda \check L$ (див. [294]). Функція $\check\lambda$ ненульова й може залежати від змінних $x_s$ як параметрів. Із точністю до еквівалентності, породженої ненульовими множниками, можна вважати, що функція $\check L$ має мінімальний порядок $\check r$. Тоді редуковане рівняння $\check{\mathcal{L}}$: $\check L = 0$ має суттєвий порядок $\check r$.

Оскільки $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q = k$, то існують диференціальна функція $\tilde L = \tilde L[u]$ точно порядку $k$ і ненульова диференціальна функція $\tilde\lambda = \tilde\lambda[u]$ порядку не вище $r$, які залежать щонайменше від $x$ і похідних від $u$ за змінними $x_{p+1}$, $\dots$, $x_n$, такі, що $(L - \tilde\lambda \tilde L)|_{\mathcal{Q}_{(r)}} = 0$.

Припустимо спочатку, що $\check r$ менше за $k$. У цьому випадку можна використати $\tilde\lambda_{\rm new} = \check\lambda|_{u \rightsquigarrow \varphi}$ і $\tilde L_{\rm new} = \check L|_{u \rightsquigarrow \varphi}$ в означенні слабкої сингулярності, що призводить до суперечності $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q \leqslant \operatorname{ord} \tilde L_{\rm new} = \check r < k$. Тому $\check r \geqslant k$.

(Тут “$u \rightsquigarrow \varphi$” означає, що похідні $\partial_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \ldots \partial_n^{\alpha_n} u$ потрібно підставити замість похідних $\partial_{\omega_{p+1}}^{\alpha_{p+1}} \ldots \partial_{\omega_n}^{\alpha_n} \varphi$.)

З іншого боку, якщо $\check{r} > k$, то $\check{\lambda}\check{L} = (\tilde{\lambda}\tilde{L})|_{\mathcal{A}}$, де змінні $x_s$ відіграють роль параметрів. Фіксуючи значення $x_s^0$ змінних $x_s$ для кожного $s$, отримаємо представлення

$$\check{L} = \frac{\tilde{\lambda}|_{\mathcal{A}}}{\check{\lambda}}\bigg|_{x_s = x_s^0} \tilde{L}\,\bigg|_{\mathcal{A},\, x_s = x_s^0}.$$

Але оскільки $\operatorname{ord} \tilde{L}|_{\mathcal{A},\, x_s = x_s^0} \leqslant k < \check{r}$, то це представлення суперечить умові, що $\check{r}$ — суттєвий порядок редукованого рівняння $\check{\mathcal{L}}$.

Отже, $\check{r} = k > 0$. Тоді значення $\check{r}$ не залежить від вибору анзаца серед тих, що можна побудувати за модулем $Q$. Обернена заміна змінних зберігає зазначену властивість.

Розглянемо тепер випадок $k := \mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q \leqslant 0$. Загалом значення $k = -\infty$ і $k = 0$ не є інваріантними відносно точкових перетворень, оскільки їх можна відобразити одне в інше такими перетвореннями. Це означає, що суттєвий порядок відповідного редукованого рівняння може залежати від вибору анзаца серед множини анзаців, побудованих за модулем $Q$. Тому спрямлення векторних полів $Q_s$ і вибір анзаца потрібно узгодити зі структурою обмеження диференціальної функції $L$ на многовид $\mathcal{Q}_{(r)}$, щоб забезпечити коректність процедури редукції. Внаслідок умови $k \leqslant 0$ існують гладка функція $\tilde{L} = \tilde{L}(x, u)$ з $\operatorname{ord} \tilde{L} = k$ і ненульова диференціальна функція $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}[u]$ порядку не вище $r$, такі, що $L = \tilde{\lambda}\tilde{L}$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$. З леми 2.4 випливає, що $Q$ є модулем редукції рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$: $\tilde{L} = 0$, а тому $Q_s\tilde{L} = \Lambda^s\tilde{L}$ для деякої гладкої функції $\Lambda^s = \Lambda^s(x, u)$. З леми 2.3 отримаємо представлення $\tilde{L} = \check{\lambda}\check{L}$, де $\check{\lambda}$ — ненульова гладка функція змінних $(x, u)$, а гладка функція $\check{L} = \check{L}(x, u)$ задовольняє систему $Q_s\check{L} = 0$. Отже, функція $\check{L}$ є інваріантном модуля $Q$ і тому її можна представити як функцію базисних інваріантів $I^0, \ldots, I^{n-p}$, $\check{L} = \zeta(I^0, \ldots, I^{n-p})$, де $\zeta$ — деяка гладка функція своїх аргументів. Зауважимо, що $k \leqslant \operatorname{ord} \check{L} \leqslant 0$, оскільки

$L = \tilde\lambda\check\lambda\check L$ на многовиді $\mathcal Q_{(r)}$, а $\tilde\lambda\check\lambda$ — ненульова диференціальна функція від $u$.

Якщо $k=0$, то $\operatorname{ord}\check L=0$, а тому функція $\zeta$ суттєво залежить щонайменше від одного базисного інваріанта. З точністю до перестановки базисних інваріантів можна вважати, що цим інваріантом є $I^0$. Тоді анзац (2.1) редукує $\mathcal L$ до рівняння $\zeta(\varphi,\omega)=0$, а порядок редукованого рівняння як рівняння на $\varphi$ дорівнює 0.

Нехай тепер $k=-\infty$. З умови на ранг для модуля $Q$ випливає, що існує елемент базису $(I^0,\dots,I^{n-p})$ $Q$-інваріантів, який має ненульову похідну за змінною $u$. З точністю до перестановки базису можна вважати, що цим інваріантом є $I^0$. Виконаємо заміну змінних $(x,u)$: $y_0=I^0(x,u)$, $y_\sigma=I^\sigma(x,u)$, $z_s=J^s(x,u)$, де, як і в § 2.1, кожна функція $J^s=J^s(x,u)$ є розв'язком системи $Q_{s'}J^s=\delta_{ss'}$. Тут $\delta_{ss'}$ позначає символ Кронекера. Нехай $y=(y_0,\dots,y_{n-p})$ і $z=(z_1,\dots,z_p)$. Використовуючи представлення $\tilde L=\check\lambda(y,z)\zeta(y)$, рівність $\tilde L_u=0$ можна записати як

$$\zeta_{y_0}+\frac{I^\sigma_u}{I^0_u}\zeta_{y_\sigma}=-\frac{\lambda_u}{\lambda I^0_u}\zeta,$$

де коефіцієнти $\zeta_{y_\sigma}$ і $\zeta$ — гладкі функції, які потрібно виразити у координатах $(y,z)$. Зафіксуємо значення $z=z^0$ у цих коефіцієнтах й модифікуємо координати $y$ з метою спрямлення векторного поля $\partial_{y_0}+(I^\sigma_u/I^0_u)\big|_{z=z^0}\partial_{y_\sigma}$ до $\partial_{y_0}$. Відповідним чином модифікуємо і функціональний базис $Q$-інваріантів. Із леми 2.3 випливає представлення $\zeta=\breve\lambda\breve\zeta$, де $\breve\lambda$ — ненульова гладка функція від $y$, а гладка функція $\breve\zeta$ від $y$ не залежить від $y_0$. Тоді анзац (2.1) редукує рівняння $\mathcal L$ до рівняння $\breve\zeta(\omega)=0$, що має порядок $-\infty$ як диференціальне рівняння відносно $\varphi$. □

Доведення для випадку $p=n$ також наведено у § 2.6 перед твердженням 2.37. Особливістю цього випадку порівняно з випадком $\mathrm{wsco}_{\mathcal L}\,Q\leqslant 0$, де $p<n$, є відсутність значної свободи у виборі інваріантної залежної змінної, оскільки з огляду на розмірність $n$ модуля $Q$ є лише один функціонально незалежний $Q$-інваріант.

Неультрасингулярні $p$-вимірні модулі редукції ($0 < p \leqslant n$) з копорядком слабкої сингулярності $-\infty$ призводять до несумісних редукованих рівнянь.

Властивості ультрасингулярних модулів векторних полів як модулів редукції є очевидними. Вибір анзаців для них не потрібен.

**Твердження 2.35.** *1) Будь-який $p$-вимірний модуль $Q$ векторних полів ($0 < p \leqslant n$), ультрасингулярний для диференціального рівняння $\mathcal{L}$, є модулем редукції цього рівняння. Анзац, побудований за модулем $Q$, редукує рівняння $\mathcal{L}$ до тотожності. Тому сім'ю $Q$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ параметризовано довільною гладкою функцією $(n - p)$ $Q$-інваріантних змінних.*

*2) Якщо $Q$ — $p$-вимірний інволютивний модуль векторних полів, а сім'ю $Q$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ параметризовано довільною гладкою функцією $(n - p)$ $Q$-інваріантних змінних, то модуль $Q$ є ультрасингулярним модулем для рівняння $\mathcal{L}$.*

Для заданого диференціального рівняння з частинними похідними $\mathcal{L}$ розглянемо модуль редукції $Q$ розмірності $n - 1$, тобто $p = n - 1$. Такий модуль з $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q > 0$ редукує рівняння $\mathcal{L}$ до звичайного диференціального рівняння, суттєвий порядок якого внаслідок теореми 2.34 дорівнює $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q$. Якщо $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q = 0$, редуковане рівняння є алгебраїчним. Це дозволяє пов'язати $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q$ з максимальним числом параметрів у сім'ях $Q$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Виключним є випадок $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q = -\infty$, коли або модуль $Q$ редукує рівняння $\mathcal{L}$ до тотожності, якщо він ультрасингулярний для $\mathcal{L}$, або відповідне редуковане рівняння несумісне.

**Твердження 2.36.** *Нехай задано $(n{-}1)$-вимірний інволютивний модуль $Q$ векторних полів і диференціальна функція $L[u]$, причому рівняння $\hat{L} = 0$ з диференціальною функцією $\hat{L} = \hat{L}[u]$ найнижчого порядку, асоційованою з $L[u]$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ ($r = \operatorname{ord} L$) з точністю до ненульового множника, можна розв'язати відносно похідної найвищо-*

*го порядку від $u$, яку містить це рівнянні. Тоді з будь-яких двох таких властивостей випливає третя:*

1) *$Q$ — модуль редукції рівняння $\mathcal{L}$: $L = 0$;*
2) *копорядок слабкої сингулярності модуля $Q$ для рівняння $\mathcal{L}$ дорівнює $l$, де $0 \leqslant l \leqslant r$;*
3) *рівняння $\mathcal{L}$ допускає $l$-параметричну сім'ю $Q$-інваріантних розв'язків, причому будь-який $Q$-інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ належить цій сім'ї.*

*Доведення.* Якщо $Q$ — $(n{-}1)$-вимірний модуль редукції рівняння $\mathcal{L}$ з $\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q \geqslant 0$, то копорядок слабкої сингулярності модуля $Q$ для рівняння $\mathcal{L}$ дорівнює максимальній кількості $N_{\mathcal{L},Q}$ суттєвих неперервних параметрів у сім'ї $Q$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Дійсно, копорядок слабкої сингулярності модуля $Q$ для рівняння $\mathcal{L}$ співпадає з суттєвим порядком $\check{r}$ редукованого звичайного диференціального рівняння $\check{\mathcal{L}}$, асоційованого з модулем $Q$: $\check{r} = \mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q$. Максимальна кількість суттєвих неперервних параметрів у розв'язках рівняння $\check{\mathcal{L}}$ також дорівнює $\check{r}$. Підстановка цих розв'язків у відповідний анзац дає параметричні сім'ї $Q$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, причому всі $Q$-інваріантні розв'язки рівняння $\mathcal{L}$ можна отримати цим шляхом. Отже, $N_{\mathcal{L},Q} = \check{r}$.

Внаслідок умов твердження щодо $\hat{L}$, рівняння $\check{\mathcal{L}}$ можна записати в нормальній формі, а тому воно має $\check{r}$-параметричний загальний розв'язок, який включає всі розв'язки рівняння $\check{\mathcal{L}}$. Після підстановки у відповідний анзац цей розв'язок дає $\check{r}$-параметричну сім'ю $Q$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Інших $Q$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ немає. Отже, умови 2 і 3 еквівалентні, якщо виконується умова 1.

Для будь-якого $(n{-}1)$-вимірного інволютивного модуля $Q$ векторних полів маємо $N_{\mathcal{L},Q} \leqslant k$, де через $k$ позначено $\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q$. Доведемо, що $Q$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$, якщо $N_{\mathcal{L},Q} = k$.

Точкові перетворення змінних зберігають заявлену властивість при $k > 0$, а тому можна використати змінні та позначення з доведення теореми 2.34. Для анзаца $\mathcal{A}$: $u = \varphi(\omega)$, побудованого за модулем $Q$ у нових змінних, розглянемо диференціальну функцію $\breve{L}[\varphi] = \hat{L}|_{\mathcal{A}}$, яка залежить від змінних $x_s$ як параметрів, причому $\operatorname{ord}\breve{L} = k$. З огляду на припущення щодо $\hat{L}$, рівняння $\breve{L} = 0$ можна розв'язати відносно похідної найвищого порядку $\varphi^{(k)}$: $\varphi^{(k)} = R[\varphi]$, де $\operatorname{ord} R < k$. Якщо $R_{x_s} \neq 0$ для деякого $s$, то, розщеплюючи за $x_s$ у розв'язаному рівнянні, отримаємо звичайне диференціальне рівняння $\tilde{R}[\varphi] = 0$ порядку меншого за $k$. Будь-який $Q$-інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ має вигляд $u = \varphi(\omega)$, де функція $\varphi$ задовольняє, зокрема, і рівняння $\tilde{R}[\varphi] = 0$. Це суперечить умові $N_{\mathcal{L},Q} = k$. Отже, $R_{x_s} = 0$, тобто рівняння $\varphi^{(k)} = R[\varphi]$ — редуковане рівняння, отримане з рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою анзаца $u = \varphi(\omega)$, побудованого за модулем $Q$, тобто $Q$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$.

Умова $k = 0$ означає, що $\hat{L}$ є функцією від $(x, u)$. Внаслідок припущення щодо $\hat{L}$ рівняння $\hat{\mathcal{L}}$: $\hat{L} = 0$ можна розв'язати відносно $u$. Це дає функцію $u = f(x)$, яка є єдиним можливим розв'язком об'єднаної системи $\hat{\mathcal{L}}$ і $\mathcal{Q}$. Водночас, згідно умови 3 рівняння $\mathcal{L}$ (або, рівносильно, $\hat{\mathcal{L}}$), допускає $Q$-інваріантні розв'язки. Отже, функція $u = f(x)$ є єдиним розв'язком рівняння $\hat{L} = 0$, і цей розв'язок є $Q$-інваріантним. Саме тому з точністю до ненульового множника, який залежить щонайбільше від $(x, u)$, рівняння $\hat{L} = 0$ еквівалентне рівнянню, яке можна записати в термінах $Q$-інваріантів, а це означає, що $Q$ є модулем редукції рівняння $\hat{\mathcal{L}}$, і — згідно леми 2.4 — рівняння $\mathcal{L}$. $\square$

Точне співвідношення між редукованістю рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою модуля $Q$ і формальною сумісністю об'єднаної системи $\mathcal{L}$ і $\mathcal{Q}$ насправді не таке просте, як можна було б сподіватися; див. [179, зноска 1] для випадку одновимірних модулів редукції. Вибір системи, формальну сумісність якої потрібно перевірити, залежить від $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q$ і від того, яке означення формальної сумісності використовуємо. Розглянемо, наприклад, означення, наведене в роботі [265]. Нехай $\mathcal{E}_\rho$ — система $\kappa$ диференціальних рівнянь $E^1[u] = 0,\ \dots,\ E^\kappa[u] = 0$, яка містять похідні від $u$ до порядку $\rho$

включно. Систему $\mathcal{E}_\rho$ можна інтерпретувати як систему алгебраїчних рівнянь у просторі струменів $\mathrm{J}^\rho$, і вона визначає многовид у $\mathrm{J}^\rho$, який також позначаємо як $\mathcal{E}_\rho$. Продовження $\mathcal{E}_{\rho+\varsigma}$ порядку $\varsigma$, $\varsigma \in \mathbb{N}$, системи $\mathcal{E}_\rho$ — це система в $\mathrm{J}^{\rho+\varsigma}$, утворена рівняннями $D^\alpha E^\nu[u] = 0$, $\nu = 1, \dots, \kappa$, $|\alpha| \leqslant \varsigma$. Проекцію відповідного многовиду на $\mathrm{J}^{\rho+\varsigma-\varsigma'}$, де $\varsigma' \in \mathbb{N}$ і $\varsigma' \leqslant \varsigma$, позначаємо як $\mathcal{E}^{(\varsigma')}_{\rho+\varsigma-\varsigma'}$. Систему $\mathcal{E}_\rho$ назвемо *формально інтегровною* (або *формально сумісною*), якщо $\mathcal{E}^{(1)}_{\rho+\varsigma} = \mathcal{E}_{\rho+\varsigma}$ для будь-якого $\varsigma \in \mathbb{N}$.

Є дві перешкоди для узгодження цього означення формальної сумісності й означення модуля редукції. Перша перешкода пов'язана (у загальній ситуації) з різними порядками рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ і характеристичної системи $\mathcal{Q}$: $Q_s[u] = 0$. Її можна подолати приєднанням диференціальних наслідків характеристичної системи $\mathcal{Q}$ до об'єднаної системи $\mathcal{L}$ і $\mathcal{Q}$ перед тим, як перевіряти її сумісність. Друга перешкода пов'язана з пониженням порядку рівняння $L[u]$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$, якщо $Q$ є сингулярним модулем редукції для рівняння $L[u] = 0$. Тому замість рівняння $\mathcal{L}$ потрібно використовувати рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$: $\tilde{L}[u] = 0$, де $\tilde{L}$ — диференціальна функція така, що $L = \tilde{\lambda}\tilde{L}$ на $\mathcal{Q}_{(r)}$ для деякої ненульової диференціальної функції $\lambda$ від $u$, причому $\operatorname{ord}\tilde{L} = \operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q$. Модуль $Q$ редукує диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли

- система $\tilde{L}[u] = 0$, $D^\alpha Q_s[u] = 0$, $|\alpha| < \operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q$, або
- система $\tilde{L}[u] = 0$, $D_\iota \tilde{L}[u] = 0$, $Q_s[u] = 0$

відповідно у випадку $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q > 0$ або $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q = 0$ є формально сумісною. Тут індекс $\iota$ пробігає підмножину $\{\iota_1, \dots, \iota_{n-p}\}$ множини $\{1, \dots, n\}$ таку, що модуль $\langle Q_1, \dots, Q_p, \partial_{\iota_1}, \dots, \partial_{\iota_{n-p}}\rangle$ задовольняє умову на ранг.

Випадок $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q = -\infty$, де $\tilde{L}$ не дорівнює нулю тотожно, є нерелевантним у рамках формальної сумісності, оскільки у цьому випадку рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$ саме по собі несумісне як рівняння відносно $u$. Якщо $Q$ є ультрасингулярним модулем для рівняння $\mathcal{L}$, тобто $\tilde{L} \equiv 0$, то "формальна сумісність" об'єднаної системи $\mathcal{L}$ і $\mathcal{Q}$ є тривіально еквівалентною інволютивності модуля $Q$.

## 2.6. Модулі редукції максимальної розмірності

Як зазначено в § 2.2, випадок, коли розмірність модулів векторних полів співпадає з кількістю незалежних змінних ($p = n$), є особливим для модулів, сингулярних для диференціальних функцій. Цей випадок також є особливим для редукції диференціальних рівнянь. На відміну від модулів редукції менших розмірностей, $n$-вимірні модулі редукції будь-якого диференціального рівняння $\mathcal{L}$ з $n$ незалежними змінними редукують це рівняння щонайбільше до алгебраїчних рівнянь, а не до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Більш того, лише в цьому випадку регулярні та сингулярні модулі редукції можна вивчити в рамках єдиного підходу.

Нехай $Q$ — інволютивний модуль розмірності $p = n$, який задовольняє умову на ранг. Тоді можна вибрати його базис, утворений векторними полями $Q_s = \partial_s + \eta^s(x, u)\partial_u$. Оскільки модуль $Q$ інволютивний, то базисні елементи $Q_s$ комутують, а тому коефіцієнти $\eta^s = \eta^s(x, u)$ задовольняють систему рівнянь

$$\eta^s_{s'} + \eta^{s'}\eta^s_u = \eta^{s'}_s + \eta^s\eta^{s'}_u. \qquad (2.6)$$

Згідно теореми Фробеніуса, система $Q_s\Phi = \Phi_s + \eta^s\Phi_u = 0$ відносно функції $\Phi = \Phi(x, u)$ має єдиний функціонально незалежний розв'язок, що не є сталою. Іншими словами, коефіцієнти $\eta^s$ можна представити у вигляді $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, де $\Phi = \Phi(x, u)$ — деяка гладка функція з $\Phi_u \neq 0$. Неявний анзац, побудований для $u$ за допомогою модуля $Q$, має вигляд $\Phi(x, u) = \varphi$, де $\varphi$ — нова невідома функція. Вона є нуль-арною, оскільки розмірність $p$ модуля $Q$ дорівнює кількості $n$ незалежних змінних $x$.

Припустимо, що $Q$ є модулем редукції диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ порядку $r$. На многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ усі похідні від функції $u$ за змінними $x$ від 1-го до $r$-го порядку включно можна виразити через змінні $(x, u)$:

$$u_\alpha = h^\alpha(x, u) := (\partial_1 + \eta^1\partial_u)^{\alpha_1} \cdots (\partial_n + \eta^n\partial_u)^{\alpha_n} u, \quad 1 \leqslant |\alpha| \leqslant r.$$

Оскільки векторні поля $Q_s$ комутують, то таке представлення для похідних $u_\alpha$ добре визначене, оскільки не залежить від порядку операторів у правих частинах виразів. Використовуючи ці вирази для виключення відповідних похідних $u_\alpha$ в $L$, отримаємо диференціальну функцію $\hat{L} = \hat{L}[u]$ недодатного порядку, тобто функцію від $(x, u)$. Варіюючи $\eta^s$, отримані функцію можна проінтерпретувати як диференціальну функцію незалежних змінних $x$, $u$ та залежних змінних $\eta^s$. Таким чином, той факт, що $Q$ є модулем редукції для рівняння $\mathcal{L}$, внаслідок леми 2.4 еквівалентний умові $Q_s\hat{L} = \Lambda^s\hat{L}$ для деяких гладких функцій $\Lambda^s = \Lambda^s(x, u)$, яка виконується на відповідній відкритій підмножині простору струменів нульового порядку. Ця умова разом з рівняннями (2.6) утворює повну систему визначальних рівнянь для коефіцієнтів $\eta^s$. Внаслідок представлення $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ для розв'язків рівнянь (2.6), її можна проінтерпретувати як умову на функцію $\Phi$, де $L^\Phi = \hat{L}|_{-\Phi_s/\Phi_u \rightsquigarrow \eta^s}$ розглядаємо як диференціальну функцію незалежних змінних $x$, $u$ та залежної змінної $\Phi$.

Для зручного використання умови $Q_s\hat{L} = \Lambda^s\hat{L}$ у випадку, коли рівняння $\hat{L} = 0$ є максимального рангу, його можна розв'язати відносно однієї змінної (або відносно однієї з незалежних змінних, або відносно залежної змінної $u$) і виключити цю змінну з рівняння $Q_s\hat{L} = 0$ за допомогою отриманого виразу. Оскільки функції $\hat{L}$ і $\eta^s$ (або відповідно $\Phi$) залежать від тих самих аргументів, ця процедура не призводить до диференціального рівняння.

Застосуємо інший, більш зручніший підхід. Згідно леми 2.3, з умови $Q_s\hat{L} = \Lambda^s\hat{L}$ випливає, що існують ненульова гладка функція $\lambda = \lambda(x, u)$ і гладка функція $\check{L} = \check{L}(x, u)$ такі, що $\hat{L} = \lambda\check{L}$ і $Q_s\check{L} = 0$. Остання умова означає, що $\check{L} = \zeta(\Phi)$ для деякої гладкої функції $\zeta$ одного аргументу. Тоді рівняння $\hat{L} = \lambda\check{L}$ у термінах функції $\Phi$ набуває вигляду $L^\Phi = \tilde{\lambda}\zeta(\Phi)$.

Насправді це рівняння співпадає з умовою редукції рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою анзаца $\Phi(x, u) = \varphi$, побудованого з модулем $Q$. Дійсно, якщо функцію $u = u(x)$ явно визначено цим анзацом, то похідні від $u$

(ненульового порядку) знаходимо з диференціальних наслідків рівнянь $u_s = -\Phi_s/\Phi_u$. Тому підстановка анзаца в рівняння $\mathcal{L}$ призводить до рівняння $\hat{L}|_{\Phi(x,u)=\varphi} = 0$, яке внаслідок умови редукції є еквівалентним алгебраїчному рівнянню $\zeta(\varphi) = 0$ відносно сталої $\varphi$.

Очевидно, що суттєвий порядок редукованого рівняння співпадає з $\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q \in \{-\infty, 0\}$. Модуль $Q$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли функція $\zeta$ тотожно дорівнює нулю. Якщо $\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q = -\infty$ і модуль $Q$ не є ультрасингулярним, то відповідне редуковане алгебраїчне рівняння не є сумісним відносно $\varphi$.

Підсумовуючи викладені результати, отримаємо таке твердження.

**Твердження 2.37.** *$n$-вимірний модуль $Q$ є модулем редукції диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ з $n$ незалежними змінними $x$ тоді й лише тоді, коли цей модуль породжено векторними полями $\partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u$, $s = 1, \ldots, n$, де функція $\Phi = \Phi(x, u)$ задовольняє рівняння $L^\Phi = \tilde{\lambda}\zeta(\Phi)$ для деякої гладкої функції $\zeta$ одного аргументу і деякої ненульової функції $\tilde{\lambda}$ змінних $(x, u)$, а диференціальну функцію $L^\Phi = L^\Phi[\Phi]$ отримано з $L[u]$ виключенням похідних від $u$, використовуючи диференціальні наслідки рівнянь $u_s = -\Phi_s/\Phi_u$. При цьому анзац $\Phi(x, u) = \varphi$ редукує рівняння $\mathcal{L}$ до алгебраїчного рівняння $\zeta(\varphi) = 0$ відносно сталої $\varphi$ і суттєвий порядок редукованого рівняння співпадає з $\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q \in \{-\infty, 0\}$.*

**Теорема 2.38.** *Для будь-якого диференціального рівняння $\mathcal{L}$ однієї невідомої функції від $n$ незалежних змінних з точністю до еквівалентності сімей розв'язків існує взаємно однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями його розв'язків і його $n$-вимірними ультрасингулярними модулями редукції. А саме, кожен модуль вказаного типу відповідає сім'ї розв'язків, інваріантних відносно цього модуля. Проблеми побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ і вичерпного опису його $n$-вимірних ультрасингулярних модулів редукції повністю еквівалентні.*

*Доведення.* Нехай $Q$ — $n$-вимірний ультрасингулярний модуль редукції рівняння $\mathcal{L}$. Із твердження 2.37 випливає, що анзац $\Phi(x,u)=\varphi$, побудований за допомогою модуля $Q$, редукує рівняння $\mathcal{L}$ до тотожності. Іншими словами, для кожного значення сталої $\varphi$ цей анзац неявним чином визначає розв'язок рівняння $\mathcal{L}$.

Навпаки, нехай $\mathcal{F}=\{u=f(x,\varkappa)\}$ — сім'я розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, параметризована одним параметром $\varkappa$. Оскільки цей параметр суттєвий, а тому похідна $f_\varkappa$ є ненульовою, то параметр $\varkappa$ можна виразити із рівності $u=f(x,\varkappa)$. Звідки отримаємо, що $\varkappa=\Phi(x,u)$ для деякої функції $\Phi=\Phi(x,u)$ з $\Phi_u\neq 0$. Розглянемо модуль $Q=\langle Q_1,\dots,Q_n\rangle$, де $Q_s=\partial_s+\eta^s\partial_u$, причому коефіцієнти $\eta^s=\eta^s(x,u)$ визначено як $\eta^s=-\Phi_s/\Phi_u$. Це $n$-вимірний інволютивний модуль і $Q[u]=0$ для будь-якого елемента множини $\mathcal{F}$. Анзац $u=f(x,\varphi)$, побудований за допомогою модуля $Q$, де $\varphi$ — нова невідома (нуль-арна) функція, редукує рівняння $\mathcal{L}$ до тотожності. Це означає, що $Q$ є ультрасингулярним модулем для рівняння $\mathcal{L}$.

Однопараметричні сім'ї $\mathcal{F}=\{u=f(x,\varkappa)\}$ і $\tilde{\mathcal{F}}=\{u=\tilde f(x,\tilde\varkappa)\}$ назвемо еквівалентними, якщо вони складаються з тих самих функцій і відрізняються лише параметризаціями, тобто, якщо існує функція $\zeta=\zeta(\varkappa)$ така, що $\zeta_\varkappa\neq 0$ і $\tilde f(x,\zeta(\varkappa))=f(x,\varkappa)$. Це справедливо тоді й лише тоді, коли функції $\Phi=\Phi(x,u)$ і $\tilde\Phi=\tilde\Phi(x,u)$, асоційовані відповідно з сім'ями $\mathcal{F}$ і $\tilde{\mathcal{F}}$, є функціонально залежними. Більш точно, $\tilde\Phi=\zeta(\Phi)$. Оскільки $\Phi_u\tilde\Phi_u\neq 0$, то функціональна залежність $\Phi$ і $\tilde\Phi$ еквівалентна співвідношенню $\Phi_s/\Phi_u=\tilde\Phi_s/\tilde\Phi_u$. Отже, еквівалентні однопараметричні сім'ї розв'язків відповідають одному й тому самому ультрасингулярному модулю редукції $Q$ рівняння $\mathcal{L}$ і, навпаки, будь-які однопараметричні сім'ї $Q$-інваріантних розв'язків є еквівалентними. $\square$

**Наслідок 2.39.** *Систему визначальних рівнянь на коефіцієнти ультрасингулярних $n$-вимірних модулів редукції рівняння $\mathcal{L}$, яку утворюють рівняння* (2.6) *і рівняння $\tilde L=0$, за допомогою композиції нело-*

*кальної підстановки* $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$*, де* $\Phi$ *— функція змінних* $(x, u)$*, та перетворення годографа*

$$\begin{aligned} &\textit{нові незалежні змінні:} \qquad \tilde{x}_i = x_i, \quad \varkappa = \Phi, \\ &\textit{нова залежна змінна:} \qquad \tilde{u} = u \end{aligned}$$

*можна звести до початкового рівняння* $\mathcal{L}$ *від функції* $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \varkappa)$*, де* $\varkappa$ *відіграє роль параметра.*

Зауважимо, що редукцію диференціальних рівнянь до алгебраїчних із використанням некласичних симетрій розглянуто в роботі [158], де отримано твердження, аналогічне теоремі 2.38. Поняття сингулярних операторів редукції дає можливість сформулювати теорему 2.38 більш точно.

## 2.7. Мотивуючий приклад: еволюційні рівняння

Вивчимо $n$-вимірні сингулярні модулі редукції $(1+n)$-вимірних еволюційних рівнянь загального вигляду

$$u_t = H(t, x, u_{(r,x)}) \tag{2.7}$$

для невідомої функції $u$, яка залежить від змінних $t = x_0$ і $x = (x_1, \ldots, x_n)$. (Для зручності вважаємо, що кількість незалежних змінних становить $n+1$ замість $n$, і додатково, виокремлюємо змінну $x_0$.) Тут через $u_{(r,x)}$ позначено множину всіх похідних від функції $u$ за просторовими змінними $x$ порядку не вище $r$, включаючи $u$ як похідну нульового порядку. Також $u_t = \partial u/\partial t$ і $r = \max\{|\alpha| \mid H_{u_\alpha} \neq 0\} \geqslant 2$, тобто вважаємо, що порядок розглядуваних рівнянь не менший двох.

Фіксуємо довільне рівняння $\mathcal{L}$ вигляду (2.7). $n$-вимірний модуль редукції рівняння $\mathcal{L}$ редукує рівняння $\mathcal{L}$ до звичайного диференціального рівняння. Такий модуль $Q$ породжено $n$ векторними полями вигляду

$$Q_s = \tau^s(t, x, u)\partial_t + \xi^{si}(t, x, u)\partial_i + \eta^s(t, x, u)\partial_u,$$

причому $\operatorname{rank}(\tau^s, \xi^{si}) = n$. (Використовуємо ті самі домовленості щодо індексів, як і в усьому розділі, тобто індекси $i$, $j$ змінюються від 1 до $n$, а індекс $s$ змінюється від 1 до $p$. Зауважимо, що тут $p$ співпадає з $n$.)

Систематичне вивчення сингулярних модулів редукції еволюційних рівнянь розпочато у роботі [145], де показано, що система визначальних рівнянь для сингулярних модулів редукції (1+1)-вимірного лінійного рівняння теплопровідності містить єдине (1+2)-вимірне еволюційне рівняння, яке можна звести нелокальним перетворенням до початкового рівняння з додатковою неявною незалежною змінною в якості параметра. Пізніше це "no-go" твердження узагальнено на ширший клас (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь [25,143], а також на загальні (1+1)-вимірні еволюційні [292] і багатовимірні [26] еволюційні рівняння. Водночас, обчислення всіх одновимірних модулів редукції для (1+$n$)-вимірного рівняння теплопровідності при $n > 2$ у явній формі в роботі [13] показало, що існування таких "no-go" випадків не пояснюється лише нульовим значенням $t$-компонент векторних полів відповідних модулів редукції. Аналогічно [180], обґрунтуємо ці результати в рамках теорії сингулярних модулів редукції.

На відміну від особливого випадку $n = 1$ [180], для довільних значень $n$ можна повністю описати сингулярні $n$-вимірні модулі рівняння $\mathcal{L}$ лише після уточнення вигляду його правої частини $H$. Водночас, через пряме узагальнення результатів для випадку $n = 1$ можна легко знайти сім'ю таких модулів для будь-якого рівняння вигляду (2.7).

**Твердження 2.40.** *Якщо $t$-компонента будь-якого векторного поля з $n$-вимірного інволютивного модуля $Q$ дорівнює нулю, то $Q$ є сингулярним модулем для диференціальної функції $L = u_t - H(t, x, u_{(r,x)})$. Копорядок сингулярності модуля $Q$ дорівнює 1, $\operatorname{sco}_{\mathcal{L}} Q = 1$.*

*Доведення.* Нехай $\tau^s = 0$. Тоді $\operatorname{rank}(\xi^{si}) = n$, і з точністю до заміни базису модуля $Q$ можна покласти

$$Q_s = \partial_s + \eta^s(t, x, u)\partial_u. \tag{2.8}$$

Усі похідні від $u$ за $x$ від порядку 1 до порядку $r$ можна виразити на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ через $t$, $x$, $u$:

$$u_\alpha = h^\alpha(t,x,u) := (\partial_1 + \eta^1\partial_u)^{\alpha_1} \cdots (\partial_n + \eta^n\partial_u)^{\alpha_n} u.$$

Тут і надалі $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant r$ і $\alpha_0 = 0$. Внаслідок інволютивності модуля $Q$ векторні поля $Q_s$ комутують. (Більш того, $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ для деякої гладкої функції $\Phi = \Phi(x,u)$ з $\Phi_u \neq 0$.) Тому наведене вище представлення для $u_\alpha$ добре визначене, оскільки воно не залежить від послідовності операторів у правій частині виразу. Використовуючи ці вирази для виключення відповідних похідних $u_\alpha$ з рівняння $L$, отримаємо диференціальну функцію $\tilde L = u_t - \tilde H(t,x,u)$, де $\tilde H = \tilde H(t,x,u)$ — функція, побудована з $H$ за допомогою підстановки $h^\alpha$ замість $u_\alpha$. Порядок диференціальної функції $\tilde L$ дорівнює 1. Отже, модуль $Q$ є сингулярним для диференціальної функції $L$, причому його копорядок сингулярності дорівнює 1. □

**Наслідок 2.41.** *Модуль $M = \langle \partial_1, \dots, \partial_n, \partial_u \rangle$ є сильно метасингулярним $(n{+}1)$-вимірним модулем копорядку сингулярності 1 для будь-якого $(1{+}n)$-вимірного еволюційного рівняння.*

*Доведення.* $n$-вимірний інволютивний підмодуль $Q$ модуля $M$ задовольняє умову на ранг тоді й лише тоді, коли він породжений векторними полями $\partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u$ для деякої гладкої функції $\Phi = \Phi(x,u)$. З твердження 2.40 випливає, що модуль $Q$ є сильно сингулярним копорядку 1 для будь-якого еволюційного рівняння вигляду (2.7). Варіюючи параметр-функцію $\Phi$, отримаємо сім'ю таких підмодулів, параметризовану довільною функцією всіх незалежних і залежних змінних. □

Векторні поля $\partial_s$ і $\partial_u$, що породжують метасингулярний модуль $M$, комутують і диференціальна функція $L$ включає диференціювання за $t$ лише першого порядку, а саме, у вигляді похідної $u_t$). Це повністю узгоджено з теоремою 2.19.

Позначимо через $\mathcal{R}_0^n(\mathcal{L})$ множину $n$-вимірних модулів редукції рівняння $\mathcal{L}$, що є підмодулями модуля $M$. Розглянемо модуль $Q$ з $\mathcal{R}_0^n(\mathcal{L})$ і виберемо його базис з векторних полів $Q^s$ вигляду (2.8). Систему $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ визначальних рівнянь на коефіцієнти $\eta^s$ природним чином можна розбити на дві підсистеми. Першу підсистему

$$\eta^s_{s'} + \eta^{s'}\eta^s_u = \eta^{s'}_s + \eta^s\eta^{s'}_u \tag{2.9}$$

отримаємо з умови, що модуль $Q$ інволютивний і тому базисні елементи $Q^s$ комутують. Другу підсистему

$$\eta^s_t + \tilde{H}\eta^s_u = \tilde{H}_s + \eta^s\tilde{H}_u \tag{2.10}$$

отримаємо як результат застосування критерію умовної інваріантності до рівняння $\mathcal{L}$ і модуля $Q$. Функцію $\tilde{H} = \tilde{H}(t,x,u)$ визначено в доведенні твердження 2.40. Вона співпадає з $H$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$. Загальна кількість рівнянь об'єднаної системи $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ з (2.9) і (2.10) дорівнює $n(n+1)/2$, а тому вона більше кількості невідомих функцій $\eta^s$, якщо $n>1$. У зв'язку з цим, система $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ виглядає сильно перевизначеною в багатовимірному випадку. Насправді ж, рівняння підсистем добре узгоджені одне з одним. Підсистема (2.9) дає представлення $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ для $\eta^s$ з однією довільною функцією $\Phi = \Phi(t,x,u)$. Підставляючи це представлення в підсистему (2.10), отримаємо систему $n$ диференціальних рівнянь з частинними похідними на одну функцію $\Phi$:

$$\begin{aligned}\tilde{H}_s + \eta^s\tilde{H}_u - \eta^s_n - \eta^s_u\tilde{H} &= H^\Phi_s - \frac{\Phi_s}{\Phi_u}H^\Phi_u + \left(\frac{\Phi_s}{\Phi_u}\right)_n + \left(\frac{\Phi_s}{\Phi_u}\right)_u H^\Phi \\ &= \frac{1}{\Phi_u}\left(\partial_s - \frac{\Phi_s}{\Phi_u}\partial_u\right)\left(\Phi_n + \Phi_u H^\Phi\right) = 0,\end{aligned}$$

яка еквівалентна одному рівняння на $\Phi$, а саме, $\Phi_t + \Phi_u H^\Phi = \chi(t,\Phi)$. Тут $\chi$ — довільна гладка функція своїх аргументів і $H^\Phi$ співпадає з $\tilde{H}$ при підстановці $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$. Функцію $\Phi$, асоційовану з фіксованим модулем $Q$, визначено з точністю до перетворення $\tilde{\Phi} = \theta(t,\Phi)$ з $\theta_\Phi \neq 0$.

Оскільки $\tilde{\eta}^s = -\tilde{\Phi}_s/\tilde{\Phi}_u = -\Phi_s/\Phi_u = \eta^s$, то функції $H^\Phi$ і $H^{\tilde{\Phi}}$ співпадають. Водночас, якщо вибрати $\theta$, що задовольняє рівняння $\theta_t + \chi\theta_\Phi = 0$, то $\tilde{\Phi}_t + \tilde{\Phi}_u H^{\tilde{\Phi}} = 0$. Таким чином, з точністю до еквівалентності на множині функцій, які параметризують сингулярні модулі, можна вважати, що функція $\Phi$ є розв'язком рівняння $\Phi_t + \Phi_u H^\Phi = 0$.

Підсумовуючи наведені аргументи, отримаємо таке твердження.

**Твердження 2.42.** *Систему* $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ *визначальних рівнянь* (2.9) *і* (2.10) *за допомогою композиції нелокальної підстановки* $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, *де* $\Phi$ *— функція змінних* $(t,x,u)$, *і перетворення годографа*

$$\begin{array}{ll} \textit{нові незалежні змінні:} & \tilde{t} = t, \quad \tilde{x}_i = x_i, \quad \varkappa = \Phi, \\ \textit{нова залежна змінна:} & \tilde{u} = u \end{array}$$

*можна звести до початкового рівняння* $\mathcal{L}$ *на функцію* $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \varkappa)$, *де* $\varkappa$ *відіграє роль параметра.*

*Доведення.* З підсистеми (2.9) випливає існування функції $\Phi = \Phi(t,x,u)$ з $\Phi_u \neq 0$ такої, що $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$. З точністю до еквівалентності на множині, яку пробігає параметр-функція $\Phi$ з наведеного вище представлення для $\eta^s$, усю систему $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$ можна звести до одного рівняння $\Phi_t + \Phi_u H^\Phi = 0$. Перетворення годографа відображає це рівняння у початкове рівняння $\mathcal{L}$ на функцію $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \varkappa)$. Це безпосередньо випливає з означення функції $H^\Phi$ і правила перерахунку похідних при перетворені годографа, $\tilde{u}_{\tilde{x}_i} = -\Phi_i/\Phi_u$ і т. ін. □

**Твердження 2.43.** *Для будь-якого рівняння* $\mathcal{L}$ *вигляду* (2.7) *такі твердження еквівалентні:*

1) *оболонка* $Q = \langle Q_s = \partial_s + \eta^s(t,x,u)\partial_u, s = 1,\dots,n\rangle$ *є модулем редукції рівняння* $\mathcal{L}$;

2) *модуль* $\tilde{Q} = \langle \tilde{Q}_0, Q_1, \dots, Q_n\rangle$, *де* $\tilde{Q}_0 = \partial_t + \tilde{H}\partial_u$ *і функція* $\tilde{H} = \tilde{H}(t,x,u)$ *співпадає з* $H$ *на многовиді* $\mathcal{Q}_{(r)}$, *є інволютивним;*

*3) існує векторне поле $\hat{Q}_0 = \partial_t + \eta^0(t,x,u)\partial_u$ таке, що модуль $\hat{Q} = \langle \hat{Q}_0, Q_1, \dots, Q_n\rangle$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$.*

*Більш того, за цих еквівалентних умов коефіцієнт $\eta^0$ визначено єдиним чином як $\eta^0 = \tilde{H}$, тобто обов'язково $\hat{Q}_0 = \tilde{Q}_0$.*

*Доведення.* Умови 1 та 2 еквівалентні внаслідок того, що коефіцієнти $\eta^s$ задовольняють систему $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$, утворену рівняннями (2.9) і (2.10). Модуль $\hat{Q}$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли $\eta^0 = \tilde{H}$, тобто модуль $\hat{Q}$ співпадає з модулем $\tilde{Q}$, і цей модуль є інволютивним. □

**Теорема 2.44.** *З точністю до еквівалентності сімей розв'язків для будь-якого рівняння вигляду* (2.7) *існує взаємно однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями його розв'язків і його $n$-вимірними модулями редукції, утвореними векторними полями з нульовими $t$-компонентами. А саме, кожному модулю вказаного типу відповідає сім'я розв'язків, інваріантна відносно цього модуля. Проблеми побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння* (2.7) *і вичерпного опису його $n$-вимірних модулів редукції, утворених векторними полями з нульовими $t$-компонентами, повністю еквівалентні.*

*Доведення.* Нехай $\mathcal{L}$ — рівняння з класу (2.7), а $Q = \langle Q_1, \dots, Q_n\rangle \in \mathcal{R}_0^n(\mathcal{L})$, тобто $Q_s = \partial_s + \eta^s\partial_u$, де коефіцієнти $\eta^s = \eta^s(t,x,u)$ задовольняють систему $\mathrm{DE}_0(\mathcal{L})$. Анзац, побудований за модулем $Q$, має вигляд $u = f(t,x,\varphi(\omega))$, де $f = f(t,x,\varphi)$ — задана функція з $f_\varphi \neq 0$, $\varphi = \varphi(\omega)$ — нова невідома функція, $\omega = t$ — інваріантна незалежна змінна. Цей анзац редукує рівняння $\mathcal{L}$ до звичайного диференціального рівняння першого порядку $\mathcal{L}'$ на $\varphi$, яке є розв'язним відносно $\varphi_\omega$. Загальний розв'язок редукованого рівняння $\mathcal{L}'$ можна представити у вигляді $\varphi = \varphi(\omega, \varkappa)$, де $\varphi_\varkappa \neq 0$ і $\varkappa$ — довільна стала. Вигляд загального розв'язку визначено з точністю до перетворень $\tilde{\varkappa} = \zeta(\varkappa)$ параметра $\varkappa$. Підстановка цього розв'язку в анзац дає однопараметричну сім'ю $\mathcal{F}$ розв'язків $u = \tilde{f}(t,x,\varkappa)$

рівняння $\mathcal{L}$ з $\tilde{f} = f(t,x,\varphi(t,\varkappa))$, причому будь-який $Q$-інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ належить цій сім'ї. Виражаючи параметр $\varkappa$ з рівності $u = \tilde{f}(t,x,\varkappa)$, отримаємо, що $\varkappa = \Phi(t,x,u)$, де $\Phi_u \neq 0$. Тоді $\eta^s = u_s = -\Phi_s/\Phi_u$ для будь-якого $u \in \mathcal{F}$, тобто будь-якого допустимого значення $(t,x,\varkappa)$. З цього випливає, що $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ для будь-якого допустимого значення $(t,x,u)$.

Доведення оберненого твердження аналогічне доведенню теореми 2.38. Розглянемо однопараметричну сім'ю $\mathcal{F} = \{u = f(t,x,\varkappa)\}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Похідна $f_\varkappa$ ненульова, оскільки параметр $\varkappa$ є суттєвим. Виражаємо $\varkappa$ з рівності $u = f(t,x,\varkappa)$: $\varkappa = \Phi(t,x,u)$ для деякої функції $\Phi = \Phi(t,x,u)$ з $\Phi_u \neq 0$. Оболонка $Q = \langle Q_1,\dots,Q_n\rangle$, де $Q_s = \partial_s + \eta^s\partial_u$ і коефіцієнти $\eta^s = \eta^s(t,x,u)$ визначено як $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, є $n$-вимірним інволютивним модулем. Для будь-якого $u \in \mathcal{F}$ маємо $Q_s[u] = 0$. Анзац $u = f(t,x,\varphi(\omega))$ з $\omega = t$, асоційований з модулем $Q$, редукує рівняння $\mathcal{L}$ до рівняння $\varphi_\omega = 0$. Тому за означенням 2.1 $Q \in \mathcal{R}^n_0(\mathcal{L})$.

Однопараметричні сім'ї $\mathcal{F} = \{u = f(t,x,\varkappa)\}$ та $\tilde{\mathcal{F}} = \{u = \tilde{f}(t,x,\tilde{\varkappa})\}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли асоційовані функції $\Phi = \Phi(t,x,u)$ та $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(t,x,u)$ задовольняють умову

$$\frac{\Phi_s}{\Phi_u} = \frac{\tilde{\Phi}_s}{\tilde{\Phi}_u}.$$

Отже, еквівалентні однопараметричні сім'ї розв'язків відповідають одному й тому самому модулю $Q$ з $\mathcal{R}^n_0(\mathcal{L})$ і, навпаки, будь-які однопараметричні сім'ї $Q$-інваріантних розв'язків еквівалентні. $\square$

**Зауваження 2.45.** Тривіальність зазначеного анзаца та редукованого рівняння зумовлена спеціальним представленням розв'язків визначального рівняння. У цьому підході складнощі в побудові анзаців та інтегруванні редукованих рівняння підмінено складністю отримання представлення для компонент базисних елементів модулів редукції.

**Зауваження 2.46.** Теорема 2.44 насправді є наслідком теореми 2.38 і твердження 2.42. Це спостереження надає універсальне обґрунтування щодо “no-go” результатів для модулів редукції. Достатньо зауважити, що будь-який $Q$-інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ є $\hat{Q}$-інваріантним, де модулі $Q$ і $\hat{Q}$ визначено в твердженні 2.42. Наведене пряме доведення забезпечує глибше розуміння редукції еволюційних рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

## 2.8. Модулі редукції корозмірності 1 і копорядку сингулярності 1

Спираючись на приклад еволюційних рівнянь як модельний випадок, розглянемо $(n{-}1)$-вимірні сингулярні модулі редукції копорядку сингулярності 1 для загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними однієї залежної та $n$ незалежних змінних. Під час вивчення окремих модулів такого типу можна отримати лише твердження, аналогічне твердженню 2.43.

**Твердження 2.47.** *Нехай $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ — диференціальне рівняння з частинними похідними однієї залежної та $n$ незалежних змінних, а $Q$ — $(n{-}1)$-вимірний інволютивний модуль векторних полів у просторі $(x,u)$, який задовольняє умову на ранг, причому $\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\,Q = 1$. Також припустимо, що диференціальна функція першого порядку $\hat{L}$, асоційована з $L$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ (де $r = \mathrm{ord}\,L$) з точністю до ненульового множника, має максимальний ранг відносно єдиної похідної першого порядку від $u$, від якої залежить $\hat{L}$. Тоді $Q$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли існує (єдиний) $n$-вимірний модуль $\hat{Q}$, який є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ і містить модуль $Q$.*

*Доведення.* За цих припущень існує векторне поле $Q_0$ таке, що рівняння $\hat{L} = 0$ еквівалентне рівнянню $Q_0[u] = 0$, де $Q_0[u]$ — характеристика векторного поля $Q_0$. Розглянемо модуль $\hat{Q}$, породжений $Q$ і $Q_0$. Він

$n$-вимірний і задовольняє умову на ранг. З леми 2.4 випливає, що $Q$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли він є модулем редукції рівняння $\hat{L} = 0$. Остання умова еквівалентна інволютивності модуля $\hat{Q}$, і тоді рівняння $\mathcal{L}$ є тотожністю на добре визначеному многовиді $\hat{\mathcal{Q}}_{(r)}$, тобто модуль $\hat{Q}$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$. Умови, що $n$-вимірний модуль $\hat{Q}$ є ультрасингулярним для $\mathcal{L}$ і містить модуль $Q$, однозначно визначають $\hat{Q}$. □

**Зауваження 2.48.** Припущення, що диференціальна функція $\hat{L}$ має максимальний ранг відносно єдиної похідної першого порядку від $u$, від якої ця функції залежить, можна замінити слабшим припущенням, що рівняння $\hat{L} = 0$ еквівалентне рівнянню $\check{L} = 0$, де диференціальна функція $\check{L}$ задовольняє умові максимальності рангу.

Для того, щоб побудувати більш змістовну теорію, розглянемо сім'ї $(n{-}1)$-вимірних модулів редукції копорядку сингулярності 1, параметризованих довільною функцією. Нехай $\mathcal{L}$: $L = 0$ — диференціальне рівняння з частинними похідними з диференціальною функцією $L = L[u]$ порядку $r \geqslant 1$. Вважаємо, що функція $L$ допускає $n$-вимірний метасингулярний модуль $M$ векторних полів копорядку сингулярності 1; див. зауваження 2.32. Оскільки особливий випадок двох незалежних змінних, коли метасингулярні модулі можуть бути неінволютивними, розглянуто в [180], надалі додатково вимагаємо, що модуль $M$ є інволютивним.

**Зауваження 2.49.** Для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку інволютивні модулі копорядку сингулярності 1 є регулярними. Результати цього параграфу є вірними також і для таких рівнянь, якщо замінити атрибути "сингулярний копорядку сингулярності 1" й "метасингулярний копорядку сингулярності 1" відповідно на "регулярний" і "метарегулярний".

З точністю до заміни змінних можна припустити, що модуль $M$ містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ $(n{-}1)$-вимірних модулів копорядку сингулярності 1, яка у зведеній формі параметризована довільною гладкою функцією $\Phi$ змінних $(x, u)$, тобто $Q^\Phi = \langle \partial_s + \eta^s \partial_u \rangle$, де $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, а індекс $s$ пробігає від 1 до $p = n - 1$. Надалі всюди використовуємо це представлення для $\eta^s$.

Згідно теореми 2.19 диференціальну функцію $L$ можна записати у вигляді $L = \check{L}(x, \Omega_{r,1,n-1})$, де $\Omega_{r,1,n-1} = \big(u_\alpha,\, \alpha_n \leqslant 1,\, |\alpha| \leqslant r\big)$, а $\check{L}$ суттєво залежить від деякого $u_\alpha$ з $\alpha_n = 1$. У цьому випадку обмеження $L$ на $\mathcal{Q}^\Phi_{(r)}$ співпадає з обмеженням на той же многовид $\mathcal{Q}^\Phi_{(r)}$ функції $\tilde{L}^\Phi = \check{L}(x, \tilde{\Omega}_{r,1,n-1})$, де

$$\tilde{\Omega}_{r,1,n-1} = \big(D_n^{\alpha_n} (Q_1^\Phi)^{\alpha_1} \cdots (Q_{n-1}^\Phi)^{\alpha_{n-1}} u, \alpha_n \leqslant 1,\, |\alpha| \leqslant r\big).$$

Отже, вигляд функції $\tilde{L}^\Phi$ визначено виглядом $L$ і вибраним значенням параметр-функції $\Phi$. Залежно від значення параметр-функції $\Phi$ диференціальна функція $\tilde{L}^\Phi$ може або тотожно дорівнювати нулю, або мати порядок не більший за 1. Тому модуль $Q^\Phi$ буде або ультрасингулярним для $L$, або $\operatorname{sco}_L Q^\Phi \leqslant 0$ з $\tilde{L}^\Phi$, не рівною тотожно нулю, або $\operatorname{sco}_L Q^\Phi = 1$. Проаналізуємо кожен з цих випадків окремо. Додатково припускаємо, що рівняння $\tilde{L}^\Phi = 0$ можна розв'язати відносно $u$, якщо $\operatorname{sco}_L Q^\Phi = 0$, або відносно $u_n$, якщо $\operatorname{sco}_L Q^\Phi = 1$.

Умова $\tilde{L}^\Phi \equiv 0$, де $u$ і $u_n$ розглядаємо як незалежні змінні, визначає такі значення параметр-функції $\Phi$, за яких модуль $Q^\Phi$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$. Після розщеплення цієї умови за $u_n$ отримаємо систему $\mathcal{S}_{\rm ultra}$ диференціальних рівнянь з частинними похідними для $\Phi$ порядку не вище $r$, яка у загальному випадку може бути несумісною. Несумісність тут означає, що сім'я $\mathfrak{M}$ не містить ультрасингулярних модулів. Наприклад, еволюційні рівняння порядку вищого за 1 не мають ультрасингулярних модулів, породжених векторними полями загального вигляду (2.8); див. § 2.7. Якщо параметр-функція $\Phi$ задовольняє умову ультрасингулярності $\mathcal{S}_{\rm ultra}$, то це гарантує, що $Q^\Phi \in \mathcal{R}^{n-1}(\mathcal{L})$ і сім'я $Q^\Phi$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ параметризована довільною функцією однієї $Q^\Phi$-інваріантної змінної $x_n$.

За припущення $\mathrm{sco}_L\, Q^\Phi \leqslant 0$ з $\tilde L^\Phi \not\equiv 0$ параметр-функція $\Phi$ задовольняє умову $\tilde L^\Phi_{u_n} \equiv 0$, де $u$ і $u_n$ знову вважаємо незалежними змінними, яка є слабшою за умову ультрасингулярності. У цьому випадку відповідна система $\mathcal S_0$ диференціальних рівнянь з частинними похідними для $\Phi$ порядку не вище $r$, отримана після розщеплення за $u_n$ умови сингулярності копорядку 0, є сумісною з більшою ймовірністю, ніж $\mathcal S_{\rm ultra}$.

Наведемо деякі достатні умові сумісності системи $\mathcal S_0$. Якщо $\check L_{u_n} = 0$, то система $\mathcal S_0$ сумісна, оскільки її розв'язком є будь-яка параметр-функція $\Phi$ з $(\Phi_s/\Phi_u)_u = 0$. З точністю до еквівалентності функцій, які параметризують модулі з сім'ї $\mathfrak M$, можна припустити, що $\Phi = u - \zeta(x)$ і $\eta^s = \zeta_s$, тобто $Q^{u-\zeta} = \langle \partial_s + \zeta_s\partial_u\rangle$. Іншими словами, $\mathrm{sco}_L\, Q^{u-\zeta} \leqslant 0$ для будь-якої $\zeta = \zeta(x)$.

Якщо додатково $\check L_u = 0$, то умова $\tilde L^{u-\zeta} = 0$ за припущення $\zeta = \zeta(x)$ дає лише єдине диференціальне рівняння з частинними похідними на $\zeta$. Будь-який його розв'язок є розв'язком системи $\mathcal S_{\rm ultra}$ і тому відповідний модуль $Q^{u-\zeta}$ ультрасингулярний для рівняння $L$.

У протилежному випадку маємо $\mathrm{sco}_L\, Q^{u-\zeta} = 0$, і рівняння $\mathcal L$ можемо розв'язати відносно $u$ як змінної відповідного простору струменів. Іншими словами, представимо це рівняння у вигляді $u = K[u]$. Тут $K[u]$ — диференціальна функція, яка залежить щонайбільше від змінних $x$ і $u_\alpha$, де $0 < |\alpha| \leqslant r$, $\alpha_n \leqslant 1$ і (якщо $\alpha_n = 1$) $|\alpha| > 1$. Рівняння $\tilde L^{u-\zeta} = 0$ можна отримати заміною $u_{\alpha+\delta_s}$ на $\zeta_{\alpha+\delta_s}(x)$ для всіх $\alpha$ з $|\alpha| < r$ у рівнянні $\mathcal L$; див. позначення на с. 105. Тому його можна представити у вигляді $u = G^\zeta(x)$, де $G^\zeta(x) = K[u]\big|_{u=\zeta(x)}$. Отже, вираз для функції $G^\zeta$ включає похідні від параметр-функції $\zeta = \zeta(x)$ до порядку $r$ включно. Умовна інваріантність рівняння $\mathcal L$ відносно модуля $Q^{u-\zeta}$ еквівалентна сумісності системи $u = G^\zeta$, $u_s = \zeta_s$ відносно $u$ і тому призводить до системи $n-1$ диференціальних рівнянь з частинними похідними $\zeta_s = G^\zeta_s$ на $\zeta$. Тут $G^\zeta$ вважаємо диференціальною функцією від $\zeta = \zeta(x)$. Тоді $G^\zeta_s$ — повна похідна функції $G^\zeta$ за $x_s$. Оскільки для фіксованого модуля параметр-функцію $\zeta$ визначено з точністю до сталих доданків, то зазначена система еквівалентна одному диференціальному рівнянню з частинними похідними $\zeta = G^\zeta$. Це означає, що $Q^{u-\zeta}$ є модулем редукції для рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли з точністю до зсувів залежної змінної параметр-функція $\zeta$ є розв'язком цього рівняння. Анзац, побудований за модулем $Q^{u-\zeta}$, можна вибрати у вигляді $u = \varphi(\omega) + \zeta(x)$, де $\varphi = \varphi(\omega)$ — нова невідома функція, а $\omega = x_n$ — інваріантна незалежна змінна. Цей анзац редукує початкове рівняння $\mathcal{L}$ до тривіального алгебраїчного рівняння $\varphi = 0$, тобто функція $u = \zeta(x)$ є єдиним $Q^{u-\zeta}$-інваріантним розв'язком рівняння $\mathcal{L}$. Навпаки, фіксуємо розв'язок $u = \zeta(x)$ рівняння $\mathcal{L}$. Тоді $\zeta = G^\zeta(x)$, звідки $\zeta_s = G^\zeta_s$, що еквівалентно критерію умовної інваріантності для випадку модуля $Q^{u-\zeta} = \langle \partial_s + \zeta_s \partial_u \rangle$ і рівняння $\mathcal{L}$, тобто $Q^{u-\zeta}$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$, причому $\zeta_u = 0$. Розв'язок $u = \zeta(x)$ інваріантний відносно $Q^{u-\zeta}$ за побудовою.

Отже, отримаємо таке твердження.

**Теорема 2.50.** *Припустимо, що рівняння $\mathcal{L}$: $L = 0$ допускає сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ $(n-1)$-вимірних модулів копорядку сингулярності $1$ у зведеній формі $Q^\Phi = \langle \partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u \rangle$, параметризованій довільною гладкою функцією $\Phi$ змінних $(x, u)$, тобто ліву частину $L$ цього рівняння можна представити у вигляді $L = \check{L}(x, \Omega_{r,1,n-1})$, де $\Omega_{r,1,n-1} = \big(u_\alpha,\, \alpha_n \leqslant 1,\, |\alpha| \leqslant r\big)$, $\check{L}_{u_\alpha} \neq 0$ для деякої $u_\alpha$ з $\alpha_n = 1$, і додатково $\check{L}_{u_n} = 0$, $\check{L}_u \neq 0$. Тоді існує взаємно однозначна відповідність між розв'язками рівняння $\mathcal{L}$ і модулями редукції з $\mathfrak{M}$, для яких $\Phi = u - \zeta(x)$. А саме, кожен такий модуль має копорядок сингулярності $0$ і відповідає єдиному розв'язку, який інваріантний відносно цього модуля. Проблеми розв'язання рівняння $\mathcal{L}$ і вичерпного опису його модулів редукції зазначеного типу є повністю еквівалентними.*

Повертаємося до аналізу регулярних значень параметр-функцій $\Phi$, для яких копорядок сингулярності відповідних модулів $Q^\Phi$ співпадає з копорядком сингулярності всієї сім'ї $\mathfrak{M}$ (і дорівнює 1). Якщо $\operatorname{sco}_L Q^\Phi = 1$, то параметр-функція $\Phi$ задовольняє умову регулярності $\tilde{L}^{\Phi}_{u_n} \neq 0$. Таким чином, рівняння $\tilde{L}^{\Phi} = 0$, еквівалентне рівнянню $\mathcal{L}$ на многовиді $\mathcal{Q}^{\Phi}_{(r)}$, можна розв'язати відносно $u_n$: $u_n = G^{\Phi}(x, u)$. Тут вираз для функції $G^{\Phi}$ залежить від похідних параметр-функції $\Phi$ до порядку $r$ включно. Застосовуючи критерій умовної інваріантності до рівняння $\mathcal{L}$ і модуля $Q^{\Phi}$, отримаємо систему

$$\eta^s_n + \eta^s_u G^{\Phi} = G^{\Phi}_s + \eta^s G^{\Phi}_u \tag{2.11}$$

відносно функції $\Phi$ (нагадаємо, що $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$). Ця система співпадає з умовою формальної сумісності рівнянь $u_n = G^{\Phi}$ і $u_s = \eta^s$ відносно $u$. Оскільки функцію $G^{\Phi}$ також можна виразити безпосередньо у термінах коефіцієнтів $\eta^s$, то систему (2.11), доповнену умовою інволютивності $\eta^s_{s'} + \eta^{s'}\eta^s_u = \eta^{s'}_s + \eta^s\eta^{s'}_u$ відповідного модуля, можна проінтерпретувати як систему відносно $\eta^s$; див. § 2.7. Оскільки

$$\begin{aligned} G^{\Phi}_s + \eta^s G^{\Phi}_u - \eta^s_n - \eta^s_u G^{\Phi} &= G^{\Phi}_s - \frac{\Phi_s}{\Phi_u} G^{\Phi}_u + \left(\frac{\Phi_s}{\Phi_u}\right)_n + \left(\frac{\Phi_s}{\Phi_u}\right)_u G^{\Phi} \\ &= \frac{1}{\Phi_u}\left(\partial_s - \frac{\Phi_s}{\Phi_u}\partial_u\right)\left(\Phi_n + \Phi_u G^{\Phi}\right) = 0, \end{aligned}$$

то система (2.11) еквівалентна рівнянню $\Phi_n + \Phi_u G^{\Phi} = \chi(x_n, \Phi)$ на функцію $\Phi$, де параметр-функція $\chi$ — довільна гладка функція своїх аргументів. Значення параметр-функції $\Phi$, асоційованої з фіксованим модулем $Q^{\Phi}$, визначається з точністю до перетворень $\tilde{\Phi} = \theta(x_n, \Phi)$. Оскільки $\tilde{\eta}^s = -\tilde{\Phi}_s/\tilde{\Phi}_u = -\Phi_s/\Phi_u = \eta^s$, то функції $G^{\Phi}$ і $G^{\tilde{\Phi}}$ співпадають. Водночас, якщо вибрати $\theta$, що задовольняє рівняння $\theta_n + \chi\theta_{\Phi} = 0$, то $\tilde{\Phi}_n + \tilde{\Phi}_u G^{\tilde{\Phi}} = 0$. Отже, з точністю до еквівалентності на множині функцій, які параметризують модулі сім'ї $\mathfrak{M}$, можна вважати, що функція $\Phi$ є розв'язком рівняння $\Phi_n + \Phi_u G^{\Phi} = 0$.

Порядок кожного рівняння системи (2.11) відносно $\Phi$ дорівнює $r + 1$ і тому більший за порядок системи $\mathcal{S}_0$. За деяких припущень щодо гладкості (наприклад, за аналітичності) це означає, що рівняння (2.11) має розв'язки, які не є розв'язками $\mathcal{S}_0$. Отже, *рівняння* $\mathcal{L}$ *обов'язково допускає модулі редукції копорядку сингулярності* 1, *які належать* $\mathfrak{M}$.

**Твердження 2.51.** *Нехай будь-який* $(n{-}1)$*-вимірний інволютивний модуль у зведеній формі* $Q = \langle \partial_s + \eta^s \partial_u \rangle$ *є модулем копорядку сингулярності* 1 *для рівняння* $\mathcal{L}$. *Тоді систему визначальних рівнянь на значення* $\eta^s$, *які відповідають модулям редукції рівняння* $\mathcal{L}$, *за допомогою композиції нелокальної підстановки* $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, *де* $\Phi$ *— гладка функція від* $(x,u)$ *з* $\Phi_u \neq 0$, *і перетворення годографа*

$$\begin{array}{ll} \textit{нові незалежні змінні:} & \tilde{x}_i = x_i, \quad \varkappa = \Phi, \\ \textit{нова залежна змінна:} & \tilde{u} = u \end{array}$$

*можна звести до початкового рівняння* $\mathcal{L}$ *на функцію* $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \varkappa)$, *де* $\varkappa$ *відіграє роль параметра.*

*Доведення.* Можливість представлення $\eta^s$ у вигляді $\Phi_s/\Phi_u$ з деякою функцією $\Phi = \Phi(x,u)$ випливає з умови інволютивності $\eta^s_{s'} + \eta^{s'}\eta^s_u = \eta^{s'}_s + \eta^s\eta^{s'}_u$ для модуля $Q$. За такого представлення система визначальних рівнянь на значення $\eta^s$, які відповідають модулям редукції рівняння $\mathcal{L}$, матиме вигляд (2.11) і з точністю до еквівалентності на множині, яку пробігає параметр-функція $\Phi$, буде еквівалентною одному рівнянню $\Phi_n + \Phi_u G^\Phi = 0$. Внаслідок означення функції $G^\Phi$ і виразів для похідних при перетворенні годографа ($\tilde{u}_{\tilde{x}_i} = -\Phi_i/\Phi_u$ і т. ін.) це перетворення відображає рівняння $\Phi_n + \Phi_u G^\Phi = 0$ у початкове рівняння $\mathcal{L}$ на функцію $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \varkappa)$. □

У твердженні 2.51 йдеться про зведення системи визначальних рівнянь (2.11) до початкового рівняння $\mathcal{L}$, а тому це так званий “no-go” результат. Його можна переформулювати в термінах співвідношення між однопараметричними сім'ями розв'язків і $(n{-}1)$-вимірними модулями редукції копорядку сингулярності 1. Результати § 2.5 означають, що для кожного $(n{-}1)$-вимірного модуля редукції $Q$ копорядку сингулярності 1 рівняння $\mathcal{L}$ існує однопараметрична сім'я $Q$-інваріантних розв'язків цього рівняння. Якщо рівняння $\mathcal{L}$ допускає $n$-вимірний метасингулярний модуль з копорядком сингулярності 1, то обернене твердження також справедливе. Зручно довести це твердження без використання зведеної форми метасингулярного модуля.

**Теорема 2.52.** *Нехай рівняння $\mathcal{L}$ допускає $n$-вимірний метасингулярний модуль $M$ копорядку сингулярності 1. Тоді для будь-якої однопараметричної сім'ї $\mathcal{F}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ існує $(n-1)$-вимірний інволютивний підмодуль $Q$ модуля $M$, що є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$, і для якого кожний розв'язок із $\mathcal{F}$ є $Q$-інваріантним.*

*Доведення.* Нехай $\mathcal{F} = \{u = f(x, \varkappa)\}$ — однопараметрична сім'я розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Похідна $f_\varkappa$ ненульова, оскільки параметр $\varkappa$ є суттєвим. Розв'язуючи рівняння $u = f(x, \varkappa)$ відносно $\varkappa$, отримуємо, що $\varkappa = \Phi(x, u)$ для деякою функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ з $\Phi_u \neq 0$.

Нехай $(Q_0, \dots, Q_p)$ з $p = n - 1$ — комутативний базис модуля $M$. Припустимо, що існує $\sigma \in \{0, \dots, p\}$ таке, що $Q_\sigma\Phi \neq 0$. З точністю до перестановки базисних елементів можна вважати, що $Q_0\Phi \neq 0$. Тоді покладемо

$$\tilde{Q}_s = Q_s - \frac{Q_s\Phi}{Q_0\Phi} Q_0.$$

Якщо $Q_\sigma\Phi = 0$ для всіх $\sigma \in \{0, \dots, p\}$, то покладемо $\tilde{Q}_s = Q_s$.

Розглянемо підмодуль $Q$, породжений векторними полями $\tilde{Q}_s$. Цей підмодуль інволютивний, задовольняє умову на ранг і має розмірність $p = n - 1$. Звідки $\operatorname{sco}_L Q^\Phi \leqslant 1$. Також очевидно, що $\tilde{Q}_s\Phi = 0$. Оскільки $f_i = -(\Phi_i/\Phi_u)|_{u=f}$, то це означає, що будь-який розв'язок із сім'ї $\mathcal{F}$ є $Q$-інваріантним. Випадок $\operatorname{sco}_L Q \leqslant 0$ з $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} \not\equiv 0$ неможливий, оскільки інакше рівняння $\mathcal{L}$ не мало б однопараметричної сім'ї $Q$-інваріантних розв'язків. Таким чином, або $Q$ є ультрасингулярним модулем для $L$, або $\operatorname{sco}_L Q = 1$. Будь-який ультрасингулярний модуль для $L$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$. Якщо $\operatorname{sco}_L Q = 1$, то згідно з твердженням 2.36 $Q$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$. □

Для того, щоб відповідність між однопараметричними сім'ями розв'язків та $(n{-}1)$-вимірними модулями редукції була взаємно однозначною, відповідний метасингулярний модуль має задовольняти додаткові обмеження.

**Теорема 2.53.** *Припустимо, що рівняння $\mathcal{L}$ $r$-го порядку: $L[u] = 0$ допускає $n$-вимірний метасингулярний модуль $M$ копорядку сингулярності 1, причому весь модуль $M$ не є ультрасингулярними для рівняння $\mathcal{L}$, а будь-який $(n{-}1)$-вимірний підмодуль $Q$ модуля $M$ має копорядок сингулярності 1 для $\mathcal{L}$. Також нехай диференціальне рівняння $\hat{L} = 0$ з диференціальною функцією $\hat{L} = \hat{L}[u]$ першого порядку, асоційованою з $L[u]$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ з точністю до ненульового множника, можна розв'язати відносно похідної від $u$ першого порядку, яку включає це рівняння. Тоді з точністю до еквівалентності сімей розв'язків існує взаємно однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ і його $(n{-}1)$-вимірними модулями редукції з $M$. А саме, кожному модулю вказаного типу відповідає сім'я розв'язків, інваріантних відносно нього.*

Іншими словами, проблеми побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ і вичерпного опису його модулів редукції вказаного вище типу повністю еквівалентні.

*Доведення.* Якщо $(n{-}1)$-вимірний модуль редукції $Q$ рівняння $\mathcal{L}$ є підмодулем модуля $M$, то $\operatorname{sco}_{\mathcal{L}} Q = 1$. Тому згідно з твердженням 2.36 рівняння $\mathcal{L}$ допускає однопараметричну сім'ю $\mathcal{F}$ $Q$-інваріантних розв'язків, причому будь-який $Q$-інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ належить цій сім'ї. Кожну однопараметричну сім'ю $Q$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ можна отримати з $\mathcal{F}$ за допомогою репараметризації.

Навпаки, розглянемо однопараметричну сім'ю $\mathcal{F} = \{u = f(x, \varkappa)\}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. З теореми 2.52 випливає, що існує модуль $Q \in$

$\mathcal{R}^{n-1}(\mathcal{L})$, який є підмодулем $M$, причому будь-який розв'язок з $\mathcal{F}$ є $Q$-інваріантним. Доведемо, що такий модуль $Q$ єдиний. Припустимо, що існує інший $(n{-}1)$-вимірний інволютивний підмодуль $\tilde{Q}$ модуля $M$ такий, що будь-який розв'язок з $\mathcal{F}$ є $\tilde{Q}$-інваріантним. Це означає, що сім'я $\mathcal{F}$ утворена розв'язками, інваріантними відносно всього модуля $M$.

Тому модуль $M$ задовольняє умову на ранг. Щоб показати це, фіксуємо базис $(Q_0,\dots,Q_p)$ модуля $M$, де $Q_\sigma=\xi^{\sigma i}(x,u)\partial_i+\eta^\sigma(x,u)\partial_u$, $\sigma=0,\dots,n$. Функція $\Phi$, визначена в доведенні теореми 2.52, є інваріантом для всіх $Q_\sigma$, тобто $Q_\sigma\Phi=0$. Оскільки $\Phi_u\neq 0$, то $\operatorname{rank}(\xi^{\sigma i})=n$.

Отже, $M$ є $n$-вимірним інволютивним модулем, що задовольняє умову на ранг, а сім'я $\mathcal{F}$, утворена $M$-інваріантними розв'язками рівняння $\mathcal{L}$, однопараметрична. Тому з твердження 2.35 випливає, що модуль $M$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, а це суперечить умовам теореми. Таким чином, модуль $Q$ єдиний. □

Бієкція з теореми 2.53, взагалі кажучи, порушується за наявності $(n{-}1)$-вимірних підмодулів копорядку сингулярності, меншого за 1, або ультрасингулярності всього метасингулярного модуля. Справді, якщо $(n{-}1)$-вимірний інволютивний модуль $Q$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, то сім'ю $Q$-інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ можна параметризувати довільною функцією одного аргументу; див. твердження 2.35. У випадку $\operatorname{sco}_L Q=-\infty$ з $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}}\not\equiv 0$ рівняння $\mathcal{L}$ не має $Q$-інваріантних розв'язків. Якщо є модулі редукції рівняння $\mathcal{L}$ серед $(n{-}1)$-вимірних підмодулів модуля $M$ копорядку сингулярності 0, то множина інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ для цих модулів редукції є дискретною. Якщо весь $n$-вимірний модуль $M$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, то це рівняння допускає однопараметричну сім'ю $\mathcal{F}$ $M$-інваріантних розв'язків. Тоді будь-який розв'язок із сім'ї $\mathcal{F}$ інваріантний відносно будь-якого $(n{-}1)$-вимірного інволютивного підмодуля модуля $M$.

Копорядок сингулярності 1 модулів редукції також є суттєвим для справедливості твердження 2.51 і теореми 2.53. Наприклад, єдиним метасингулярним модулем лінійного рівняння стрижня $u_{tt}+u_{xxxx}=0$ є модуль $M=\langle\partial_x,\partial_u\rangle$, і його копорядок сингулярності дорівнює 2; див. пункт 2 у прикладі 2.9. Одновимірні сингулярні модулі редукції цього рівняння знайдено в явному вигляді у роботі [89]; див. § 4.3. Вони не підпадають під "no-go" випадок, оскільки всі вони мають копорядок сингулярності 2 і відповідні сім'ї інваріантних розв'язків є двопараметричними.

**Зауваження 2.54.** Модулі редукції корозмірності 1 і копорядку сингулярності 1 не вичерпують можливі "no-go" випадки знаходження модулів редукції. Зокрема, система визначальних рівнянь для знаходження регулярних операторів редукції для будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння другого порядку $\mathcal{L}$ зводиться нелокальним перетворенням до системи трьох копій цього рівняння [244]. Отже, регулярні оператори редукції рівняння $\mathcal{L}$ утворюють "no-go" випадок, відмінний від "no-go" випадку сингулярних операторів редукції, що є характерним для всіх (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь. Аналогічна ситуація буде й для рівняння Бюргерса $u_t+uu_x-\mu u_{xx}=0$, де "no-go" випадок з'являється для регулярних операторів редукції вигляду

$$\partial_t+\xi(t,x,u)\partial_x+\eta(t,x,u)\partial_u \quad \text{з} \quad \xi_u=1/2$$

[49, 200, 240]. Скоріше за все, подібні "no-go" випадки породжує поєднання декількох властивостей відповідних рівнянь таких, як еволюційність, другий порядок, лінійність або лінеаризованість. Вивчення модулів редукції для класу диференціальних рівнянь може призводити до "no-go" випадків через появу у відповідних визначальних рівняннях довільних елементів, що параметризують рівняння класу. Як приклад такої ситуації, можна навести опис з [239] одновимірних регулярних модулів редукції, породжених векторними полями вигляду

$$\partial_t+\xi(t,x)\partial_x+\eta(t,x,u)\partial_u \quad \text{з} \quad \xi_{xx}\neq 0,$$

для класу узагальнених рівнянь Бюргерса $u_t+uu_x+f(t,x)u_{xx}=0$.

## 2.9. Сингулярні модулі квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

Для деяких класів диференціальних рівнянь можна вичерпно описати відповідні сингулярні модулі. Вивчимо з цієї точки зору квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку. Природно розрізняти еліптичні, еволюційні та узагальнені хвильові рівняння. В усіх випадках $Q$ є інволютивним модулем векторних полів, який визначено у відповідному просторі незалежних і залежних змінних і який задовольняє умову на ранг, причому розмірність $Q$ менша за кількість незалежних змінних.

**Еліптичні рівняння.** Розглянемо рівняння $\mathcal{L}$ на одну невідому функцію $u$ незалежних змінних $x=(x_1,\dots,x_n)$, що має загальний вигляд

$$L[u]:=a^{ij}(x,u_{(1)})u_{ij}+b(x,u_{(1)})=0,$$

де коефіцієнти $a^{ij}$ і $b$ визначено на одній і тій самій області $\Omega$ простору струменів першого порядку, $a^{ij}=a^{ji}$, причому матрична функція $(a^{ij})$ додатно визначена в кожній точці області $\Omega$. Доведемо, що рівняння $\mathcal{L}$ не допускає сингулярних модулів розмірності менше за $n$.

Позначимо $\dim Q$ через $p$; $0<p<n$. З точністю до заміни змінних $x$ можна локально вибрати базис $Q$, утворений векторними полями вигляду $\hat Q_s=\partial_s+\hat\xi^{s\iota}(x,u)\partial_\iota+\hat\eta^s(x,u)\partial_u$ (див. § 2.2). Тут і далі індекс $\iota$ змінюється від $p+1$ до $n$. Тоді будь-яку похідну функції $u$ першого або другого порядку можна виразити на многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$ лише через похідні функції $u$ за змінними $x_{p+1}$, …, $x_n$ і коефіцієнти $\hat\xi^{s\iota}$ і $\hat\eta^s$ (див. рівняння (2.2)). Оскільки у виразах для похідних другого порядку функції $u$ суттєвими є лише члени цього ж порядку, то використовуємо представлення

$$u_{s\iota}=-\hat\xi^{s\iota'}u_{\iota\iota'}+R^{s\iota}(x,u_{(1)}),\quad u_{ss'}=\hat\xi^{s\iota}\hat\xi^{s'\iota'}u_{\iota\iota'}+R^{ss'}(x,u_{(1)}),$$

де через $R^{si}$ позначено члени, що не містять похідних другого порядку, причому $R^{ss'} = R^{s's}$. Підставляючи ці вирази для похідних $u_{si}$ в $L[u]$, отримаємо диференціальну функцію $\hat{L}[u] := \hat{a}^{\iota\iota'}u_{\iota\iota'} + \hat{b}$, що асоційована з $L[u]$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$. Тут

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}^{\iota\iota'} = a^{\iota\iota'} - a^{s\iota}\hat{\xi}^{s\iota'} - a^{s\iota'}\hat{\xi}^{s\iota} + a^{ss'}\hat{\xi}^{s\iota}\hat{\xi}^{s'\iota'},\\
&\hat{b} = b + 2a^{s\iota}R^{s\iota} + a^{ss'}R^{ss'}.
\end{aligned}
$$

Іншими словами, для кожного фіксованого $\iota$ і $\iota' = \iota$ коефіцієнт $\hat{a}^{\iota\iota'}$ співпадає зі значенням квадратичної форми з матрицею $(a^{ij})$ на наборі $(z^1, \dots, z^n)$, де $z^s = -\hat{\xi}^{s\iota}$, $z^\iota = 1$, а інші $z$-компоненти — нульові. Оскільки матриця $(a^{ij})$ додатно визначена, то коефіцієнт $\hat{a}^{\iota\iota'}$ ненульовий і, більш того, додатній. Це означає, що навіть з точністю до ненульового множника диференціальна функція $L[u]$ не може співпадати на многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$ з диференціальною функцією порядку, меншого за 2. Отже, $\operatorname{wsco}_{\mathcal{L}} Q = \operatorname{sco}_{\mathcal{L}} Q = 2$.

**Еволюційні рівняння.** Аналогічно § 2.7, для цього й наступного класу рівнянь покладемо кількість незалежних змінних рівною $n+1$ замість $n$ і додатково виокремемо змінну $t = x_0$, тобто невідома функція $u$ залежить від змінних $t$ та $x = (x_1, \dots, x_n)$. Розглянемо квазілінійні еволюційні рівняння другого порядку $\mathcal{L}$ загального вигляду

$$
u_t = H[u] := a^{ij}(t, x, u_{(1,x)})u_{ij} + b(t, x, u_{(1,x)}), \tag{2.12}
$$

де $u_{(1,x)} = (u, u_1, \dots, u_n)$, коефіцієнти $a^{ij}$ і $b$ визначено на тій самій області $\Omega$ простору струменів першого порядку, а матрична функція $(a^{ij})$ — симетрична й додатно визначена у кожній точці $\Omega$. Із точністю до заміни змінних $x_i$ будь-який інволютивний модуль $Q$ векторних полів у просторі змінних $(t, x, u)$, що задовольняє умову на ранг і для якого $\dim Q < n+1$, локально можна вважати породженим векторними полями $\partial_t + \xi^{0\iota}\partial_\iota + \eta^0\partial_u$, $\partial_s + \xi^{s\iota}\partial_\iota + \eta^s\partial_u$ з $p = \dim Q - 1$ або векторними полями $\partial_s + \xi^{s\iota}\partial_\iota + \eta^s\partial_u$ з $p = \dim Q$. Тут $\xi^{0\iota}$, $\eta^0$, $\xi^{s\iota}$ і $\eta^s$ — гладкі функції змінних $(t,x,u)$. Аналогічно розгляду еліптичних рівнянь можна показати, що у другому випадку з $p=n$ і лише у ньому модуль $Q$ є сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, причому $\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\,Q=\mathrm{sco}_{\mathcal{L}}\,Q=1$. Тоді базисні елементи модуля $Q$ набувають вигляду $Q^s=\partial_s+\eta^s\partial_u$. Це випадок вивчено в § 2.7. На відміну від загальних еволюційних рівнянь (див. наслідок 2.41) можна гарантувати, що $M=\langle\partial_1,\dots,\partial_n,\partial_u\rangle$ є єдиним метасингулярним модулем для рівняння $\mathcal{L}$.

**Узагальнені хвильові рівняння.** Розглянемо рівняння $\mathcal{L}$: $u_{tt}=H[u]$ на одну невідому функцію $u$ незалежних змінних $t$ та $x=(x_1,\dots,x_n)$, де диференціальну функцію $H=H[u]$ визначено аналогічно до (2.12), але коефіцієнти $a^{ij}$ і $b$ можуть додатково залежати від $u_t$. Розіб'ємо множину відповідних інволютивних модулів іншим чином ніж у випадку еволюційних рівнянь. Із точністю до заміни змінних $x$ будь-який інволютивний модуль $Q$ векторних полів, визначений у просторі $(t,x,u)$, що задовольняє умову на ранг і для якого $\dim Q<n+1$, локально можна вважати породженим векторними полями $\partial_t+\eta^0\partial_u$, $\partial_s+\xi^{s\iota}\partial_\iota+\eta^s\partial_u$ з $p=\dim Q-1$ або векторними полями $\partial_s+\tau^s\partial_t+\xi^{s\iota}\partial_\iota+\eta^s\partial_u$ з $p=\dim Q$. Тут $\eta^0$, $\tau^s$, $\xi^{s\iota}$, $\eta^s$ — гладкі функції змінних $(t,x,u)$. Лише у другому випадку з $p=n$ модуль може бути сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$. Розглянемо цей випадок детально.

Якщо $p=n$, то базисні елементи модуля $Q$ набувають вигляд $Q^s=\partial_s+\tau^s\partial_t+\eta^s\partial_u$. На многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$ маємо $u_s=\eta^s-\xi^s u_t$, $u_{ss'}=\tau^s\tau^{s'}u_{tt}+R^{ss'}$, де через $R^{ss'}$ позначено відповідну сукупність членів, що залежать щонайбільше від $t$, $x$, $u$ і $u_t$. Підставляючи ці вирази для похідних функції $u$ за змінними $x$ у диференціальну функцію $L[u]=u_{tt}-H[u]$, побудуємо диференціальну функцію

$$\hat{L}[u]:=(1-\hat{a}^{ij}\tau^i\tau^j)u_{tt}+\hat{b}(t,x,u,u_t),$$

асоційовану з $L[u]$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$, яка залежить щонайбільше від $t$, $x$, $u$, $u_t$ і $u_{tt}$. Тут коефіцієнти $\hat{a}^{ij}=\hat{a}^{ij}(t,x,u,u_t)$ отримано з $a^{ij}$ підстановкою $u_s=\eta^s-\xi^s u_t$, а явний вигляд коефіцієнта $\hat{b}=\hat{b}(t,x,u,u_t)$

несуттєвий. Модуль $Q$ є сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли $\operatorname{ord}\hat{L}[u] < 2$, тобто коефіцієнти $\tau^s = \tau^s(t,x,u)$ задовольняють рівняння $\hat{a}^{ij}\tau^i\tau^j = 1$. Якщо деякі з коефіцієнтів $\hat{a}^{ij}$ залежать від $u_t$, то це рівняння треба розщепити за цією похідною, а тому воно може бути несумісним.

Оскільки модуль $Q$ інволютивний, то векторні поля $Q^s$ комутують, тобто коефіцієнти $\tau^s$ і $\eta^s$ задовольняють систему

$$Q^s\tau^{s'} = Q^{s'}\tau^s, \quad Q^s\eta^{s'} = Q^{s'}\eta^s,$$

розгорнутим виглядом якої є

$$\begin{aligned}
&\tau^{s'}_s + \tau^s\tau^{s'}_t + \eta^s\tau^{s'}_u = \tau^s_{s'} + \tau^{s'}\tau^s_t + \eta^{s'}\tau^s_u,\\
&\eta^{s'}_s + \tau^s\eta^{s'}_t + \eta^s\eta^{s'}_u = \eta^s_{s'} + \tau^{s'}\eta^s_t + \eta^{s'}\eta^s_u.
\end{aligned}$$

З цього внаслідок теореми Фробеніуса випливає, що система $Q^s\Phi = 0$ відносно невідомої функції $\Phi = \Phi(t,x,u)$ допускає розв'язки $\Phi^l$, $l = 1,2$, з $\Phi^1_t\Phi^2_u - \Phi^1_u\Phi^2_t \neq 0$. Розв'язуючи пару рівнянь $\Phi^l_s + \tau^s\Phi^l_t + \eta^s\Phi^l_u = 0$ для кожного фіксованого $s$ як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $(\tau^s, \eta^s)$, отримаємо представлення

$$\tau^s = -\frac{\Phi^1_s\Phi^2_u - \Phi^2_s\Phi^1_u}{\Phi^1_t\Phi^2_u - \Phi^2_t\Phi^1_u}, \quad \eta^s = -\frac{\Phi^1_t\Phi^2_s - \Phi^2_t\Phi^1_s}{\Phi^1_t\Phi^2_u - \Phi^2_t\Phi^1_u}. \tag{2.13}$$

Навпаки, можна перевірити прямим обчисленням, що для довільних функцій $\Phi^1$ і $\Phi^2$ з $\Phi^1_t\Phi^2_u - \Phi^1_u\Phi^2_t \neq 0$ модуль $Q$, породжений векторними полями $Q^s = \partial_s + \tau^s\partial_t + \eta^s\partial_u$ з коефіцієнтами (2.13), є інволютивним. З точністю до функціональної залежності пар функцій $\Phi^1$ і $\Phi^2$ з $\Phi^1_t\Phi^2_u - \Phi^1_u\Phi^2_t \neq 0$ існує взаємно однозначна відповідність між такими парами й інволютивними модулями, породженими $n$ векторними полями вигляду $Q^s = \partial_s + \tau^s\partial_t + \eta^s\partial_u$.

Якщо коефіцієнти $\hat{a}^{ij}$ не залежать від $u_t$ (наприклад, якщо $a^{ij} = a^{ij}(t,x,u)$, звідки $\hat{a}^{ij} = a^{ij}$), то підстановка виразів (2.13) для $\tau^s$ у рівняння $\hat{a}^{ij}\tau^i\tau^j = 1$ дає одне рівняння на дві невідомі функції $\Phi^1$

та $\Phi^2$. Кожен розв'язок цього рівняння пов'язаний з сингулярним модулем $Q$ рівняння $\mathcal{L}$. Взагалі кажучи, у багатовимірному випадку $n > 1$ коефіцієнти $\tau^s$ і $\eta^s$ відповідних базисних елементів $Q^s$ пов'язані нелокальним і нелінійним чином. З цієї причини *неможливо вичерпно описати сингулярні модулі багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь за допомогою метасингулярних модулів*. Водночас, за додаткових умов на коефіцієнти $a^{ij}$ нелінійні хвильові рівняння допускають сім'ї сингулярних модулів, які добре вписуються в конструкцію метасингулярних модулів.

Отже, нехай коефіцієнти $\hat{a}^{ij}$ залежать лише від $t$ і $x$. Розглянемо сингулярні модулі для рівняння $\mathcal{L}$, для яких відповідні коефіцієнти $\tau^s$ також не залежать від $u$. Достатньо розглянути пари функцій $\Phi^1$ і $\Phi^2$ з $\Phi^1_u = 0$, а тому $\Phi^1_t\Phi^2_u \neq 0$. Тоді вирази (2.13) для $\tau^s$ можна звести до вигляду $\tau^s = -\Phi^1_s/\Phi^1_t$. Рівняння $a^{ij}\tau^i\tau^j = 1$ еквівалентне рівнянню

$$(\Phi^1_t)^2 = a^{ij}\Phi^1_i\Phi^1_j,$$

яке є рівнянням ейконала, пов'язаним з хвильовим рівнянням $\mathcal{L}$. Зафіксуємо розв'язок $\Psi = \Psi(t, x)$ рівняння ейконала з $\Psi_t \neq 0$ і розглянемо модуль $M^\Psi$, породжений векторний полями $\Psi_t\partial_s - \Psi_s\partial_t$, $s = 1, \dots, n$, і $\partial_u$. Модуль $M^\Psi$ є метасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ і $\operatorname{sco}_{\mathcal{L}} M^\Psi \leqslant 1$ для кожного $\Psi$. Тому результати § 2.8 релевантні у цьому випадку. Кількість таких метасингулярних модулів з копорядком сингулярності 1 є нескінченною, оскільки вони параметризовані функцією $\Phi$, яка пробігає множину розв'язків зазначеного рівняння ейконала, з $\Phi_t \neq 0$.

**Приклад 2.55.** Опишемо сингулярні одновимірні модулі для (1+1)-вимірного нелінійного хвильового рівняння загального вигляду

$$u_{tt} - (G(u)u_x)_x - F(u) = 0,$$

де $F$ і $G$ — довільні гладкі функції змінної $u$ з $G > 0$. Для зручності використаємо специфічні позначення для змінних: $t = x_0$, $x = x_1$. Випадок $G = \text{const}$ у характеристичних змінних вичерпно розглянуто в [180, § 6].

Позначимо нелінійне хвильове рівняння з фіксованими $F$ і $G$ через $\mathcal{L}$. Нехай векторне поле $Q_1 = \tau\partial_t + \xi\partial_x + \eta\partial_u$, де компоненти $\tau$, $\xi$, $\eta$ — гладкі функції змінних $(t, x, u)$, причому $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$, породжує одновимірний модуль $Q$. Модуль $Q$ є сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли він є строго сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, тобто $\mathrm{sco}_{\mathcal{L}}\, Q \leqslant 1$. Тоді обидві компоненти $\tau$ і $\xi$ з необхідністю є ненульовими. Змінивши базис $Q$, можна покласти $\tau = 1$. У новому базисі умова $\mathrm{sco}_{\mathcal{L}}\, Q \leqslant 1$ є еквівалентною такому обмеженню на компоненту $\xi$:

$$\xi = \pm g(u), \quad \text{де} \quad g := \sqrt{G}.$$

Це означає, що рівняння $\mathcal{L}$ допускає рівно два двовимірні метасингулярні модулі $M_\pm = \langle \partial_t \pm g\partial_x, \partial_u \rangle$ з $\mathrm{sco}_{\mathcal{L}}\, M_\pm = 1$, а тому результати § 2.8 тут є релевантними.

Копорядок сингулярності модуля $Q$ для рівняння $\mathcal{L}$ є недодатним, тобто $(\mathrm{w})\mathrm{sco}_{\mathcal{L}}\, Q \leqslant 0$, тоді й лише тоді, коли компонента $\eta$ додатково задовольняє рівняння

$$(\sqrt{g}\eta)_u = 0, \quad \text{тобто} \quad \eta = \frac{\alpha(t, x)}{\sqrt{g}}$$

з деякою гладкою функцією $\alpha$ змінних $(t, x)$. Якщо вибрати похідну $u_t$ головною в характеристичному рівнянні $Q_1[u] = 0$, то ліва частина рівняння $\mathcal{L}$ асоційована на многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$ з функцією

$$\hat{L} = \frac{\alpha_t - g\alpha_x}{\sqrt{g}} - \frac{\alpha^2 g_u}{2g^2} - F,$$

яка залежить лише від $(t, x, u)$. Якщо рівняння $\hat{L} = 0$ можна розв'язати відносно $u$, то $\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q = 0$; інакше $\mathrm{wsco}_{\mathcal{L}}\, Q = -\infty$. Умовою виокремлення ультрасингулярних модулів серед модулів з недодатним копорядком сингулярності є $\hat{L} \equiv 0$. У випадку $g_u \neq 0$ це означає, що існують сталі $b$, $a_0$ і $a_1$ такі, що $F = bg_u/(2g^2)$, $\alpha = \alpha(z)$, де $z = a_0 t + a_1 x$ і $\alpha_z = \alpha^2 + b$. Нестале значення параметр-функції $\alpha$ можливе лише для $g$, що задовольняє рівняння $g_u = 2g^{3/2}(a_0 - a_1 g)$.

Для $\alpha = \mathrm{const}$ умов на $g$ немає. Тому для будь-якої невід'ємної гладкої функції $g = g(u)$ і будь-якої сталої $\alpha$ кожне векторне поле $Q_\pm = \partial_t \pm g\partial_x + \alpha g^{-1/2}\partial_u$ породжує ультрасингулярний модуль редукції рівняння $u_{tt} = (g^2 u_x)_x - \alpha^2 g_u/(2g^2)$, яке допускає факторизацію

$$u_{tt} - (g^2 u_x)_x + \frac{\alpha^2 g_u}{2g^2} = \left(D_t \mp D_x \circ g - \frac{\alpha g_u}{2g^{3/2}}\right)\left(u_t \pm g u_x - \frac{\alpha}{g^{1/2}}\right).$$

Для $g = 1/u$ цю факторизацію отримано в роботі [199] у термінах "редукцій першого порядку". Інтерпретація і розвиток результатів прикладу 2.55 для (1+1)-вимірних хвильових рівнянь, аналогічно тому, як це зроблено у частинному випадку $G = \mathrm{const}$ у роботі [180, § 6], потребують подальших досліджень.

# РОЗДІЛ 3

# Ліївські симетрії звичайних диференціальних рівнянь

Дослідження ліївських симетрій звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) має довгу історію, причому "теорія Лі" виникла саме як систематичний і елегантний підхід до інтегрування різноманітних класів ЗДР. Перші результати щодо можливих розмірностей максимальних алгебр ліївської інваріантності ЗДР фіксованого порядку отримано ще Софусом Лі; див., наприклад, [189, с. 294–301], або у більш сучасному викладі [153, § 2]. А саме, С. Лі довів, що максимальна алгебра ліївської інваріантності ЗДР $r$-го порядку є нескінченновимірною при $r = 1$, не перевищує 8 при $r = 2$ і не перевищує $r+4$ при $r \geqslant 3$. Він також показав, що будь-яке ЗДР першого порядку точковою заміною змінних можна звести до елементарного рівняння $x' = 0$ і що для ЗДР порядку $r \geqslant 2$ максимальна розмірність алгебри ліївської інваріантності досягається для рівнянь, які точковими перетвореннями можна звести до елементарного рівняння $x^{(r)} = 0$; див. [221, теорема 14] і [224, теореми 6.39 і 6.43].

Саме класичним задачам, пов'язаним з симетріями звичайних диференціальних рівнянь, присвячено цей розділ дисертації. Зокрема, у § 3.1 досліджено диференціальні інваріанти однопараметричних груп локальних перетворень у просторі $n$ незалежних та $m$ залежних змінних. Узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень проведено не тільки за кількістю залежних і незалежних змінних, а й безпосереднім посиленням її твердження. Доведено, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку такої групи можна побудувати за допомогою однієї квадратури та диференціювання. Проаналізовано зв'язок між диференціальними інваріантами першого порядку та інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті.

Вичерпний аналіз ліївських симетрій систем лінійних ЗДР другого порядку зі сталими комутуючими матрицями коефіцієнтів над комплексним і дійсним полями виконано у § 3.2. На основі оригінального алгебраїчного підходу — простого, але ефективного — суттєво розширено й узагальнено результати інших авторів. Зокрема, описано в явному вигляді максимальні алгебри ліївської інваріантності таких систем без обмежень щодо кількості рівнянь і вигляду матриць коефіцієнтів, а також отримано точні нижні та верхні оцінки щодо розмірностей цих алгебр.

У § 3.3 описано групоїд еквівалентності класу лінійних ЗДР $r$-го порядку, а також групоїди еквівалентності його підкласів, пов'язаних з раціональною формою, формою Лагера–Форсайта, першою та другою формами Арнольда. Весь клас і перші два зазначені підкласи на відміну від двох останніх є нормалізованими. Підкласи однорідних рівнянь, асоційовані з загального формою, раціональною формою та формою Лагера–Форсайта, при $r \geqslant 3$ є однорідно напівнормалізованими відносно груп точкових симетрій, пов'язаних з лінійною суперпозицією розв'язків. Це дозволило прокласифікувати ліївські симетрії лінійних ЗДР із використанням алгебраїчного методу трьома різними способами. Нормалізаційні властивості ненормалізованих класів лінійних ЗДР покращено через їх репараметризацію. У результаті побудовано перші, хоча і специфічні для звичайних диференціальних рівнянь, приклади розширених узагальнених груп еквівалентності.

У § 3.4 запропоновано симетрійний підхід до опису нових інтегровних випадків рівняння Абеля, який використовує зв'язок між рівняннями Абеля та звичайними диференціальними рівняннями другого порядку, а також перетворення еквівалентності у класах таких рівнянь.

У § 3.5 проведено детальний порівняльний аналіз результатів, отриманих у [247, 249], щодо реалізацій низькорозмірних алгебр Лі векторними полями з результатами К. Вафо Соха та Ф.М. Махомеда [283].

## 3.1. Диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі та системи рівнянь Ріккаті

Диференціальні інваріанти широко застосовують при інтегруванні в квадратурах або пониженні порядку звичайних диференціальних рівнянь, а також для опису класів інваріантних диферецiальних рівнянь, тому їх теорія є важливою складовою групового аналізу диференціальних рівнянь. У теорії диференціальних інваріантів особливу роль відіграють різні варіанти теореми про скінчений базис диференціальних інваріантів, яку можна сформулювати таким чином: *для довільної групи $G$ локальних перетворень існує такий скінчений набір диференціальних інваріантів, що кожен диференціальний інваріант групи $G$ є функцією цих інваріантів та інваріантних похідних від них.* Уперше твердження такого типу (для однопараметричної групи локальних перетворень у просторі двох змінних) отримано ще С. Лі наприкінці XIX ст. [188] (див. також [12, 23]) і невдовзі суттєво узагальнено А. Трессе [274]. Прогрес останнього часу в цьому напрямі пов'язаний з роботами Л.В. Овсяннікова [230] і П. Олвера [222–225] та їх співавторів, де введено поняття оператора інваріантного диференціювання, інваріантного кофрейму диференціальних форм та ін., а також отримано результати щодо стабілізації рангу продовженої дії групи та оцінки кількості диференціальних інваріантів.

У цьому параграфі предметом дослідження є диференціальні інваріанти однопараметричних груп локальних перетворень у просторі $n$ незалежних та $m$ залежних змінних ($m, n \in \mathbb{N}$). Важливість цієї задачі зумовлено тим, що побудова диференціальних інваріантів однопараметричної групи локальних перетворень є складовою задачі пошуку диференціальних інваріантів для групи довільної розмірності [23]. Випадок $n=m=1$ розглянуто в [5], а результати для випадку $n=1$ при довільному $m\in\mathbb{N}$ опубліковано в [28,30]. Нижче доведено узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень без обмеження щодо кількості незалежних і залежних змінних. А саме, показано, що повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку для такої групи можна побудувати за допомогою однієї квадратури і диференціювань, якщо універсальний інваріант цієї групи відомий. Крім того, детально проаналізовано зв'язок між диференціальними інваріантами першого порядку однопараметричних груп і інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті.

Результати параграфу опубліковано у роботах [5, 6, 28, 30, 87, 246].

**Узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти.** Нехай $Q=\xi^a(x,u)\partial_{x_a}+\eta^i(x,u)\partial_{u^i}$ — інфінітезимальний оператор однопараметричної групи $G$ локальних перетворень, що діє на множині $M\subset \mathrm{J}^0=X\times U$, де $X\simeq\mathbb{R}^n$ — простір незалежних змінних $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ і $U\simeq\mathbb{R}^m$ — простір залежних змінних $u=(u^1,u^2,\dots,u^m)$, $G_{(r)}$ — продовження дії групи $G$ на підмножину $M_{(r)}=M\times U^{(1)}\times U^{(2)}\times\dots\times U^{(r)}$ продовженого простору $\mathrm{J}^r=X\times U_{(r)}$ струменів $r$-го порядку над простором $X\times U$ (тут $U_{(r)}=U\times U^{(1)}\times U^{(2)}\times\dots\times U^{(r)}$, $r\geqslant 1$, $Q_{(r)}$ — $r$-те продовження оператора $Q$ (див. [23, 224]). Диференціальним інваріантом $r$-го порядку групи $G$ (або оператора $Q$) називають функцію $I\colon M_{(r)}\to\mathbb{R}$, яка є інваріантом продовженої дії $G_{(r)}$. Необхідною і достатньою умовою того, щоб функція $I$ була диференціальним інваріантом $r$-го порядку групи $G$, є співвідношення $Q_{(r)}I=0$.

Тут і надалі, якщо не обумовлено інше, індекси $a$, $b$, $c$, $d$ змінюються від 1 до $n$, індекси $i$, $j$, $k$, $l$ — від 1 до $m$. За індексами, що повторюються, йде підсумовування.

Нехай $I = I(x,u) = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^{m+n-1}(x,u))$ — повний набір функціонально незалежних інваріантів (або *універсальний інваріант* [230]) оператора $Q$, а $J(x,u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$. Тоді функції $I^1(x,u)$, $I^2(x,u)$, $\dots$, $I^{m+n-1}(x,u)$, $J(x,u)$ функціонально незалежні. Виконаємо локальну заміну змінних: $y_c = I^c(x,u)$, $c = 1,\dots,n-1$, $y_n = J(x,u)$ — нові незалежні змінні та $v^i = I^{i+n-1}(x,u)$ — нові залежні змінні. У змінних $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ і $v = (v^1, v^2, \dots, v^m)$ оператор $Q$ набуває вигляд $\partial_{y_n}$. Отже, для будь-якого $r \geqslant 1$ вигляд продовженого оператора $Q_{(r)}$ співпадає з $Q = \partial_{y_n}$, а тому

$$\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}),$$

$$v_{(r)} = \left( v^i_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} v^i}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} \;\middle|\; \alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ |\alpha| = \sum_{a=1}^{n} \alpha_a \leq r \right)$$

(тут $v^i_\alpha = v^i$, якщо $|\alpha| = 0$) утворюють повний набір його функціонально незалежних інваріантів, тобто $(\hat{y}, v_{(r)})$ — універсальний інваріант групи $G_{(r)}$. (Функціональна незалежність компонент $\hat{y}$ та $v_{(r)}$ очевидна, оскільки $(y, v_{(r)})$ є набором змінних у просторі $\mathrm{J}^r$.) Це означає, що $(\hat{y}, v)$ є фундаментальним набором диференціальних інваріантів оператора $Q$, тобто будь-який диференціальний інваріант оператора $Q$ можна зобразити як функцію від $\hat{y}$ та $v$ і похідних $v$ за операторами $G$-інваріантного диференціювання, які співпадають з операторами $D_{y_a} = \partial_{y_a} + v^i_{y_a} \partial_{v^i} + v^i_{y_a y_b} \partial_{v^i_{y_b}} + \cdots$ повних похідних за змінними $y_a$.

Повернемося до змінних $x$, $u$. У цих змінних

$$\begin{aligned} D_{y_c} &= \frac{(-1)^{c+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,{\scriptstyle d=1,\dots,n-1,\, d\neq c},\, J)}{D(x_b,{\scriptstyle b=1,\dots,n,\, b\neq a})} D_{x_a}, \quad c = 1,\dots,n-1, \\ D_{y_n} &= \frac{(-1)^{n+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,{\scriptstyle d=1,\dots,n-1})}{D(x_b,{\scriptstyle b=1,\dots,n,\, b\neq a})} D_{x_a}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

де $D_{x_a} = \partial_{x_a} + u^i_{x_a} \partial_{u^i} + u^i_{x_a x_b} \partial_{u^i_{x_b}} + \cdots$ — оператор повної похідної за змінною $x_a$, а

$$\frac{D(I^d,{\scriptstyle d=1,\dots,n-1,\, d\neq c},\, J)}{D(x_b,{\scriptstyle b=1,\dots,n,\, b\neq a})},\ \frac{D(I^d,{\scriptstyle d=1,\dots,n-1})}{D(x_b,{\scriptstyle b=1,\dots,n,\, b\neq a})},\ \Delta = \frac{D(I^d,{\scriptstyle d=1,\dots,n-1},\, J)}{D(x_b,{\scriptstyle b=1,\dots,n})}$$

позначають якобіани (з повних похідних)

– функцій $I^d$, $d = 1, \dots, n-1$, $d \neq c$, $J$ за змінними $x_b$, $b = 1, \dots, n$, $b \neq a$,

– функцій $I^d$, $d = 1, \dots, n-1$ за змінними $x_b$, $b = 1, \dots, n$, $b \neq a$,

– функцій $I^d$, $d = 1, \dots, n-1$, $J$ за змінними $x_b$, $b = 1, \dots, n$, відповідно.

У результаті отримаємо таку теорему.

**Теорема 3.1.** *Нехай $I(x,u) = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^{m+n-1}(x,u))$ — універсальний інваріант оператора $Q$, а $J(x,u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$. Тоді функції*

$$I^c(x,u), \quad D_{y_1}^{\alpha_1} D_{y_2}^{\alpha_2} \cdots D_{y_n}^{\alpha_n} I^{i+n-1}(x,u),$$

*де $c = 1, \dots, n-1$, $\alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sum\limits_{a=1}^{n} \alpha_a \leq r$, а оператори $D_{y_a}$ мають вигляд* (3.1), *утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів (або універсальний диференціальний інваріант) $r$-го порядку оператора $Q$.*

**Наслідок 3.2.** *Для будь-якого оператора $Q$ існує повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів $r$-го порядку, в якому кожен інваріант є раціональною функцією змінних $u^i_\alpha$ ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \sum\limits_{a=1}^{n} \alpha_a \leq r$) продовженого простору $\mathrm{J}^r$ з коефіцієнтами, що залежать від $x_a$ та $u^j$.*

**Наслідок 3.3.** *Якщо $I = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^{m+n-1}(x,u))$ — універсальний інваріант оператора $Q$, а $J = J(x,u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$, то функції*

$$\begin{aligned} D_{y_c} I^{i+n-1} &= \frac{(-1)^{c+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,\, {\scriptstyle d=1,\dots,n-1,\, d\neq c},\, J)}{D(x_b,\, {\scriptstyle b=1,\dots,n,\, b\neq a})} D_{x_a} I^{i+n-1}, \\ D_{y_n} I^{i+n-1} &= \frac{(-1)^{n+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,\, {\scriptstyle d=1,\dots,n-1})}{D(x_b,\, {\scriptstyle b=1,\dots,n,\, b\neq a})} D_{x_a} I^{i+n-1} \end{aligned} \tag{3.2}$$

*$(c = 1, \dots, n-1)$ утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів строго першого порядку оператора $Q$.*

Зауважимо, що за відомого універсального інваріанта $I$ оператора $Q$ частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$ легко знайти за допомогою однієї квадратури. Наприклад, якщо $\xi^a \neq 0$ для деякого фіксованого $a$, то частинним розв'язком рівняння $QJ = 1$ є

$$J(x,u) = \int \mathrm{d}x_a/\xi^a(X^1, \dots, X^{a-1}, x_a, X^{a+1}, \dots, X^n, U^1, \dots, U^m),$$

де підсумовування за $a$ відсутнє, $x_b = X^b(x_a, C)$, $b \neq a$, $u^j = U^j(x, C)$ — розв'язок системи алгебраїчних рівнянь $I(x,u) = C := (C_1, C_2, \dots, C_{m+n-1})$ відносно змінних $x_b$, $b \neq a$, $u^j$, причому після інтегрування необхідно виконати обернену підстановку $C = I(x,u)$. Аналогічно, якщо $\eta^i \neq 0$ для деякого фіксованого $i$, то можна покласти

$$J(x,u) = \int \mathrm{d}u^i/\eta^i(X^1, \dots, X^n, U^1, \dots, U^{i-1}, u^i, U^{i+1}, \dots, U^m),$$

де підсумовування за $i$ немає, $x_b = X^b(u^i, C)$, $u^j = U^j(u^i, C)$, $j \neq i$, — розв'язок системи алгебраїчних рівнянь $I(x,u) = C$ відносно змінних $x_b$, $u^j$, $j \neq i$.

Таким чином, має місце така теорема.

**Теорема 3.4.** *Якщо знайдено універсальний інваріант оператора $Q$, то повний набір його функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку можна побудувати за допомогою однієї квадратури та диференціювання.*

**Інваріантні диференціали.** Введемо поняття інваріантного диференціала, що є частинним випадком більш загального поняття контактно-інваріантної диференціальної форми першого порядку в продовженому просторі [224].

**Означення 3.5.** Диференціал $\mathrm{d}W(x,u)$ назвемо *інваріантним* відносно групи $G$ (оператора $Q$), якщо він не змінюється під дією перетворень з групи $G$.

Необхідною і достатньою умовою інваріантності диференціала є рівність $\mathrm{d}QW(x,u)=0$. Можливі два принципово різні випадки:

1) функція $W(x,u)$ є інваріантом оператора $Q$, тобто $QW(x,u)=0$; диференціал $\mathrm{d}W(x,u)$ автоматично є інваріантним відносно оператора $Q$ (*інваріантний диференціал першого роду*);

2) функція $W(x,u)$ не є інваріантом оператора $Q$, але диференціал $\mathrm{d}W(x,u)$ інваріантний відносно оператора $Q$ (*інваріантний диференціал другого роду*); тоді $QW(x,u)$ — ненульова стала.

Якщо відомий деякий набір функцій $I(x,u)=(I^q(x,u))_{q=1,\dots,m+n-1}$ та $J(x,u)$, що задають універсальний інваріант та інваріантний диференціал оператора $Q$ другого роду відповідно, то всі такі набори, очевидно, можна знайти за формулами

$$\hat{I}(x,u)=F(I(x,u)),\quad \hat{J}(x,u)=J(x,u)+H(I(x,u)),\tag{3.3}$$

де $F=(F^1,F^2,\dots,F^{m+n-1})$ та $H$ — гладкі функції своїх аргументів, причому $|\partial F/\partial I|\neq 0$. Формули (3.3) визначають відношення еквівалентності $\Omega$ на множині $\mathcal{M}$ наборів з $m+n$ гладких функцій від $m+n$ змінних з ненульовим якобіаном. Відповідну множину класів еквівалентності позначимо через $\mathcal{M}/\Omega$.

**Твердження 3.6.** *Між $\mathcal{M}/\Omega$ і множиною ненульових векторних полів $\{Q\}$ у просторі змінних $(x,u)$ існує взаємно однозначна відповідність: сукупність $\{(I(x,u);J(x,u))\}$ розв'язків системи $QI^q=0$, $q=1,\dots,m+n-1$, $QJ=1$, де $I^q$ — функціонально незалежні, є елементом множини $\mathcal{M}/\Omega$, і навпаки, якщо $(I(x,u);J(x,u))$ — деякий представник класу еквівалентності з $\mathcal{M}/\Omega$, то система $QI^q=0$, $q=1,\dots,m+n-1$, $QJ=1$ є сумісною системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно компонент відповідного векторного поля $Q$.*

**Випадок $n=1$.** Розглянемо докладніше випадок однієї незалежної змінної $x$, в якому можна значно компактніше сформулювати теорему 1 та її наслідки, а також отримати деякі додаткові результати.

**Теорема 3.7.** *Нехай* $I = I(x,u) = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^m(x,u))$ *— універсальний інваріант оператора* $Q$*, а* $J(x,u)$ *— частинний розв'язок рівняння* $QJ = 1$*. Тоді функції*

$$I^j(x,u), \quad \left(\frac{1}{D_xJ}D_x\right)^s I^j(x,u), \quad s = 1, \dots, r,$$

*де* $D_x = \partial_x + u^i_x\partial_{u^i} + u^i_{xx}\partial_{u^i_x} + \cdots$ *— оператор повної похідної за змінною* $x$*, утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів (або універсальний диференціальний інваріант)* $r$*-го порядку оператора* $Q$*.*

Зауважимо, що ідею доведення теореми 3.7 у випадку $m = 1$ наведено в [1].

**Наслідок 3.8.** *Для будь-якого оператора* $Q$ *і будь-якого* $r \geqslant 1$ *існує повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів* $r$*-го порядку, в якому кожен інваріант є раціональною функцією змінних* $u^i_x$*,* $u^i_{xx}$*, ...,* $(u^i)^{(r)}$ *продовженого простору з коефіцієнтами, що залежать від* $x$ *та* $u^i$*.*

**Наслідок 3.9.** *Якщо* $I = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^m(x,u))$ *— універсальний інваріант оператора* $Q$*, а* $J = J(x,u)$ *— частинний розв'язок рівняння* $QJ = 1$*, то функції*

$$I^j_{(1)} = I^j_{(1)}(x, u_{(1)}) = \frac{\mathrm{d}I^j}{\mathrm{d}J} = \frac{D_xI^j}{D_xJ} = \frac{I^j_x + I^j_{u^i}u^i_x}{J_x + J_{u^{i'}}u^{i'}_x} \tag{3.4}$$

*утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів строго першого порядку оператора* $Q$*.*

**Наслідок 3.10.** *Компоненти строго першого порядку універсального диференціального інваріанта оператора* $Q$ *можна шукати у вигляді дробово-лінійних функцій змінних* $u^i_x$ *продовженого простору з коефіцієнтами, що залежать від* $x$ *та* $u^i$*.*

Наслідок 3.9 можна переформулювати, використовуючи поняття інваріантного диференціала.

**Наслідок 3.11.** *Відношення інваріантних диференціалів оператора $Q$ першого і другого роду є його диференціальним інваріантом строго першого порядку. Якщо* $\mathrm{d}I^1$*,* $\mathrm{d}I^2$*, …,* $\mathrm{d}I^m$ *утворюють повний набір незалежних інваріантних диференціалів оператора $Q$ першого роду, то їх відношення з його інваріантним диференціалом другого роду вичерпують функціонально незалежні диференціальні інваріанти строго першого порядку оператора $Q$.*

**Наслідок 3.12** (теорема Лі)**.** *Нехай $n = m = 1$, $I(x,u)$ та $I_{(1)}(x,u,u_x)$ — диференціальні інваріанти нульового і строго першого порядку оператора $Q$. Тоді функції*

$$I, \quad I_{(1)}, \quad \frac{\mathrm{d}^s I_{(1)}}{\mathrm{d}I^s} = \left(\frac{1}{D_x I} D_x\right)^s I_{(1)}, \quad s = 1, \dots, r-1,$$

*утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів $r$-го порядку оператора $Q$.*

Оператори $G$-інваріантного диференціювання у випадку однієї незалежної змінної традиційно шукають у вигляді

$$\mathcal{D} = \frac{1}{D_x I^0} D_x,$$

де $I^0$ — диференціальний інваріант групи $G$; див., наприклад, наслідок 3.12. Тому для побудови універсального диференціального інваріанта довільного порядку однопараметричної групи локальних перетворень за допомогою оператора $G$-інваріантного диференціювання такого вигляду необхідно знати $m+1$ функціонально незалежних диференціальних інваріантів групи $G$ мінімально можливого порядку, тобто $m$ функціонально незалежних диференціальних інваріантів нульового порядку (або просто інваріантів) і один диференціальний інваріант строго першого порядку. Запропонований у теоремі 3.7 алгоритм дозволяє взагалі уникнути прямої побудови диференціальних інваріантів.

**Приклад 3.13** (див. для порівняння [23, приклади 2.52 та 2.55])**.** Нехай $n = m = 1$, а $G = \mathrm{SO}(2)$ — група поворотів, що діє на $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, з інфінітезимальним оператором $Q = u\partial_x - x\partial_u$. $I = \sqrt{x^2+u^2}$ — інваріант групи $G$ (оператора $Q$), а тому (в позначеннях з доведення теореми 3.4) $U(x,C) = \pm\sqrt{C^2-x^2}$. Тоді

$$J = \pm\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{C^2-x^2}} = \pm\arcsin\frac{x}{C} = \pm\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+u^2}}$$

(тут сталу інтегрування покладено рівною нулю), звідки

$$I_{(1)} = \frac{I_x + I_u u_x}{J_x + J_u u_x} = \frac{x+uu_x}{-u+xu_x}\sqrt{x^2+u^2}, \quad \text{або} \quad \widetilde{I}_{(1)} = \frac{x+uu_x}{-u+xu_x}$$

— диференціальний інваріант першого порядку оператора $Q$.

**Стандартний підхід та інтегрування систем рівнянь типу Ріккаті.** Прямим методом диференціальні інваріанти строго першого порядку знаходять як інваріанти першого продовження

$$Q_{(1)} = \xi^a\partial_{x_a} + \eta^i\partial_{u^i} + (\eta^k_c + \eta^k_{u^j}u^j_c - \xi^b_{x_c}u^k_b - \xi^b_{u^j}u^j_c u^k_b)\partial_{u^k_c}$$

оператора $Q$, тобто як перші інтеграли відповідної характеристичної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\mathrm{d}x_a}{\xi^a} = \frac{\mathrm{d}u^i}{\eta^i} = \frac{\mathrm{d}u^k_c}{\eta^k_c + \eta^k_{u^j}u^j_c - \xi^b_{x_c}u^k_b - \xi^b_{u^j}u^j_c u^k_b}, \tag{3.5}$$

що залежать не тільки від $x$ та $u$, а й від інших змінних простору $\mathrm{J}^1$. (Тут $u^i_a$ — змінна продовженого простору $\mathrm{J}^1$, що відповідає похідній $\partial u^i/\partial x_a$; нижні індекси функцій означають диференціювання за відповідними змінними; в останньому рівнянні підсумовування по $a$, $c$, $i$ та $k$ немає). Інтегрування системи (3.5) як правило є технічно складною задачею. За відомого універсального інваріанта $I(x,u)$ оператора $Q$ його можна звести до інтегрування систем рівнянь типу Ріккаті вигляду

$$\frac{\mathrm{d}u^k_c}{\mathrm{d}x_a} = -\frac{\xi^b_{u^j}}{\xi^a}u^j_c u^k_b + \frac{\eta^k_{u^j}}{\xi^a}u^j_c - \frac{\xi^b_{x_c}}{\xi^a}u^k_b + \frac{\eta^k_{x_c}}{\xi^a}\Bigg|_{\substack{u=U(x_a,C)\\ x_d=X^d(x_a,C),\ d\neq a}}, \tag{3.6}$$

якщо $\xi^a \neq 0$ для деякого фіксованого $a$, або

$$\frac{\mathrm{d}u^k_c}{\mathrm{d}u^i} = -\frac{\xi^b_{u^j}}{\eta^i}u^j_c u^k_b + \frac{\eta^k_{u^j}}{\eta^i}u^j_c - \frac{\xi^b_{x_c}}{\eta^i}u^k_b + \frac{\eta^k_{x_c}}{\eta^i}\Bigg|_{\substack{x=X(u^i,C),\\ u^l=U^l(u^i,C),\ l\neq i}}, \tag{3.7}$$

якщо $\eta^i \neq 0$ для деякого фіксованого $i$. Тут $x_d = X^d(x_a, C)$, $d \neq a$, $u = U(x, C)$ та $x = X(u^i, C)$, $u^l = U^l(u^i, C)$, $l \neq i$, — розв'язки системи алгебраїчних рівнянь $I(x, u) = C$ відносно змінних $x_d$, $d \neq a$, $u$ та $x$, $u^l$, $l \neq i$, відповідно. Сталі $C = (C_1, C_2, \ldots, C_{m+n-1})$ в системах (3.6) і (3.7) вважаємо параметрами. Випадок $\eta^i \neq 0$ можна звести до випадку $\xi^a \neq 0$ за допомогою перетворення годографа:

$$\tilde{x}_a = u^i, \quad \tilde{x}_d = x_d, \quad \tilde{u}^i = x_a, \quad \tilde{u}^l = u^l, \quad d \neq a, \quad l \neq i,$$

$$\tilde{u}^i_a = \frac{1}{u^i_a}, \quad \tilde{u}^i_d = -\frac{u^i_d}{u^i_a}, \quad \tilde{u}^l_a = \frac{u^l_a}{u^i_a}, \quad \tilde{u}^l_d = u^l_d - \frac{u^i_d}{u^i_a} u^l_a.$$

Тому надалі детально розглянуто лише випадок $\xi^a \neq 0$.

Запропонований у наслідку 3.3 метод знаходження диференціальних інваріантів строго першого порядку на відміну від стандартного дозволяє уникнути прямого інтегрування систем рівнянь типу Ріккаті (3.6) або (3.7) і знайти розв'язок задачі за допомогою однієї квадратури й диференціювання. Це означає, що *за відомого універсального інваріанта $I(x, u)$ оператора $Q$ системи* (3.6) *і* (3.7) *завжди можна проінтегрувати однією квадратурою.* Дійсно, загальний розв'язок системи (3.6) неявно задають $m$ незачеплених систем лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D_{x_b} \hat{I}^j \Big|_{\substack{u=U(x_a,C) \\ x_d=X^d(x_a,C),\, d\neq a}} = 0,$$

де $\hat{I}^j = I^{j+n-1} + \sum_{d=1}^{n-1} \widetilde{C}_{jd} I^d + \widetilde{C}_{jn} J$, а $\widetilde{C}_{ib}$ — довільні сталі. Щоб записати розв'язок у явному вигляді, додатково введемо позначення:

$$\bar{x} = (x_d)_{d=1,\, d\neq a}^{n}, \quad \bar{X} = (X^d)_{d=1,\, d\neq a}^{n}, \quad z = x_a,$$

$$I^{\bar{x}} = (I^d)_{d=1}^{n-1}, \quad I^u = (I^{j+n-1})_{j=1}^{m},$$

$$C^{\bar{x}} = (C_d)_{d=1}^{n-1}, \quad C^u = (C_{j+n-1})_{j=1}^{m},$$

$$\widetilde{C}' = (\widetilde{C}_{jd})_{j=1}^{m}{}_{d=1}^{n-1}, \quad \widetilde{C}'' = (\widetilde{C}_{jn})_{j=1}^{m}, \quad \hat{I} = I^u + \widetilde{C}' I^{\bar{x}} + \widetilde{C}'' J.$$

Тоді загальний розв'язок системи (3.6) дають формули

$$(u^j_b)_{j=1}^{m}{}_{b=1}^{n} = -\hat{I}_u^{-1} \hat{I}_x \Big|_{\substack{u=U(x_a,C) \\ \bar{x}=\bar{X}(x_a,C)}},$$

або

$$(u_a^j)_{j=1}^m = U_z - U_{C^{\bar x}}\bar X_{C^{\bar x}}^{-1}\bar X_z + H((\widetilde C' + \widetilde C'' J_{C^{\bar x}})\bar X_{C^{\bar x}}^{-1}\bar X_z - \widetilde C'' J_{C^{\bar x}}),$$

$$(u_b^j)_{j=1}^m{}_{b=1,\,b\neq a}^n = U_{C^{\bar x}}\bar X_{C^{\bar x}}^{-1} - H(\widetilde C' + \widetilde C'' J_{C^{\bar x}})\bar X_{C^{\bar x}}^{-1},$$

де

$$H = (U_{C^u} - U_{C^{\bar x}}\bar X_{C^{\bar x}}^{-1}\bar X_{C^u})(E + \widetilde C'' J_{C^u} - (\widetilde C' + \widetilde C'' J_{C^{\bar x}})\bar X_{C^{\bar x}}^{-1} X_{C^u})^{-1},$$

$E$ — одинична матриця розміру $m\times m$; символи вектор-функцій з нижніми індексами, що є наборами змінних, позначають відповідні матриці Якобі. Для існування в деякому околі фіксованої точки $(x^0,u^0)$ всіх обернених матриць, що зустрічаються вище, достатньо вважати сталі $\widetilde C_{ib}$ малими і виконати попередньо невироджену лінійну заміну в множині інваріантів таким чином, щоб матриця $I_{(\bar x,u)}(x^0,u^0)$ була одиничною.

Якщо покласти $\widetilde C_{ib}=0$, то отримаємо частинний розв'язок

$$(u_a^j)_{j=1}^m = U_z - U_{C^{\bar x}}\bar X_{C^{\bar x}}^{-1}\bar X_z, \quad (u_b^j)_{j=1}^m{}_{b=1,\,b\neq a}^n = U_{C^{\bar x}}\bar X_{C^{\bar x}}^{-1}.$$

Розв'язок системи (3.6) в явному вигляді при $n=1$ необхідно виписувати окремо. Оскільки у цьому випадку $u=U(x,C)$ — загальний розв'язок системи $\mathrm{d}u^j/\mathrm{d}x = \eta^j(x,u)/\xi(x,u)$, то легко перевірити, що $u_x = U_x(x,C)$ є частинним розв'язком системи (3.6) (тут, як і в (3.6), $C$ — набір параметрів). Загальний розв'язок системи (3.6) має вигляд

$$\begin{aligned} u_x &= -(I_u - \widetilde C\otimes J_u)^{-1}(I_x + \widetilde C J_x)\Big|_{u=U(x,C)} \\ &= U_z - U_C(E + \widetilde C\otimes J_C)^{-1}\widetilde C J_z, \end{aligned} \tag{3.8}$$

де в останній рівності виконано заміну $x=z$, $u=U(z,C)$, а $E$ — одинична матриця розміру $m\times m$, $\widetilde C = (\widetilde C_1, \widetilde C_2, \dots, \widetilde C_m)^{\mathrm T}$ — стовпчик довільних сталих, $I_u = (I^i_{u^j})$, $I_x = (I^i_x)$, $U_z = (U^k_z)$, $U_C = (U^i_{C_j})$, $\widetilde C\otimes J_u = (\widetilde C^k J_{u^l})$, $\widetilde C\otimes J_C = (\widetilde C^k J_{C^l})$. Обернені матриці в (3.8) завжди існують для достатньо малих $\widetilde C_i$.

**Приклад 3.14.** Нехай $n = m = 1$, $Q = e^{x+u}(\partial_x + 2x\partial_u)$. $I(x, u) = u - x^2$ — інваріант оператора $Q$, звідки $u = U(x, C) = x^2 + C$. Тоді

$$J = \int e^{-x-x^2-C}\mathrm{d}x = e^{-C}\int e^{-x-x^2}\mathrm{d}x = e^{x^2-u}\int e^{-x-x^2}\mathrm{d}x,$$

а тому

$$I_{(1)} = \frac{I_x + I_u u_x}{J_x + J_u u_x} = \frac{(u_x - 2x)e^u}{e^{-x} - (u_x - 2x)\int e^{-x-x^2}\mathrm{d}x}$$

— диференціальний інваріант першого порядку оператора $Q$. Рівняння (3.6) для оператора $Q$ має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = -u_x^2 + (2x - 1)u_x + 2x + 2,$$

а функція $u_x = U_x = 2x$ є його частинним розв'язком.

**Приклад 3.15.** Нехай $n = m = 1$, $Q = \exp(-x - u)(\partial_x + u\partial_u)$. $I(x, u) = u\exp(-x)$ — інваріант оператора $Q$, звідки $u = U(x, C) = C\exp(x)$. Тоді

$$J = \int \frac{\mathrm{d}x}{\exp(-x - C\exp(x))} = \frac{1}{C}\exp(C\exp(x)) = \frac{\exp(x + u)}{u}$$

(тут сталу інтегрування покладено рівною 0), і тому

$$I_{(1)} = \frac{\exp(-2x - u)y^2(u_x - u)}{u + uu_x - u_x} \quad \text{або} \quad \widetilde{I_{(1)}} = \frac{u_x - u}{u + uu_x - u_x}\exp(-u)$$

— диференціальний інваріант першого порядку оператора $Q$.

Відповідне рівняння Ріккаті для оператора $Q$ має вигляд

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = u_x^2 + (2 - C\exp(x))u_x - C\exp(x).$$

Функція $u_x = C\exp(x)$ — його частинний розв'язок, а загальний розв'язок задає формула

$$u_x = C\exp(x) - \frac{C^2\exp(2x)}{C\exp(x) - 1 + \widehat{C}\exp(-C\exp(x))},$$

де $\widehat{C}$ — довільна стала.

**Приклад 3.16.** Нехай $n = m = 1$, $Q = xu(x\partial_x + ku\partial_u)$, $k \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Інваріантом оператора $Q$ є $I(x,u) = ux^{-k}$, звідки $U(x,C) = Cx^k$. Тоді

$$J = \int \frac{\mathrm{d}x}{Cx^{k+2}} = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{C} = \dfrac{\ln x}{xu}, & \text{якщо} \quad k = -1, \\[2ex] -\dfrac{x^{-(k+1)}}{(k+1)C} = -\dfrac{1}{(k+1)xu}, & \text{якщо} \quad k \neq -1 \end{cases}$$

(тут сталу інтегрування покладено рівною 0). Відповідне рівняння Ріккаті має вигляд

$$\frac{du_x}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{Cx^k}u_x^2 + \frac{2(k-1)}{x}u_x + kCx^{k-2}.$$

Функція $u_x = kCx^{k-1}$ є частинним розв'язком цього рівняння, а його загальний розв'язок задає формула

$$u_x = -\frac{C}{x^2}\left(1 + \frac{1}{\widehat{C} - \ln x}\right), \quad \text{якщо } k = -1, \quad \text{або}$$

$$u_x = Cx^{k-1}\left(k - \frac{k+1}{1 + \widehat{C}x^{k+1}}\right), \quad \text{якщо } k \neq -1,$$

де $\widehat{C}$ — довільна стала.

**Зауваження 3.17.** Для добре відомих груп перетворень на площині (тобто $n = m = 1$) інтегровність у квадратурах рівнянь (3.6) і (3.7) як правило очевидно випливає з вигляду цих рівнянь. Так, коли $\xi_u = 0$ або $\eta_x = 0$, вони є лінійними рівнянням або рівняннями Бернуллі відповідно. Якщо $G$ — однопараметрична група конформних перетворень, то $\xi_x = \eta_u$ і $\xi_u = -\eta_x$, а тому в рівняннях (3.6) і (3.7) змінні розділяються:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2+1} = \frac{\eta_x}{\xi}\mathrm{d}x\,\bigg|_{u=U(x,C)} \quad \text{i} \quad \frac{\mathrm{d}v}{v^2+1} = \frac{\eta_x}{\eta}\mathrm{d}u\,\bigg|_{x=X(u,C)}.$$

**Приклад 3.18.** Нехай $n = 1$, $m = 2$,

$$Q = \exp(-x - u^1 - u^2)(\partial_x + u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}).$$

Інваріантами оператора $Q$ є

$$I^1(x,u^1,u^2)=u^1\exp(-x),\quad I^2(x,u^1,u^2)=u^2\exp(-x),$$

а тому $U^1(x,C^1,C^2)=C^1\exp(x)$, $U^1(x,C^1,C^2)=C^2\exp(x)$. Тоді

$$\begin{aligned}J\left(x,C^1,C^2\right)&=\int\frac{\mathrm{d}x}{\exp\left(-x-(C^1+C^2)\exp(x)\right)}\\&=\frac{\exp\left(\left(C^1+C^2\right)\exp(x)\right)}{C^1+C^2}.\end{aligned}$$

(тут сталу інтегрування покладено рівною 0). Відповідна система рівнянь типу Ріккаті має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_x^1}{\mathrm{d}x}&=\left(u_x^1+u_x^2\right)u_x^1+\left(2-C^1\exp(x)\right)u_x^1-C^1\exp(x)u_x^2-C^1\exp(x),\\\frac{\mathrm{d}u_x^2}{\mathrm{d}x}&=\left(u_x^1+u_x^2\right)u_x^2-C^2\exp(x)u_x^1+\left(2-C^2\exp(x)\right)u_x^2-C^2\exp(x).\end{aligned}$$

Згідно (3.8) загальний розв'язок цієї системи можна представити як

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}u_x^1\\u_x^2\end{pmatrix}=\exp(x)\begin{pmatrix}C^1\\C^2\end{pmatrix}+\\&\quad+\frac{\left(C^1+C^2\right)\exp(2x)J\left(x,C^1,C^2\right)}{1-\left(\widetilde{C}^1+\widetilde{C}^2\right)\left(\exp(x)-(C^1+C^2)^{-1}\right)J\left(x,C^1,C^2\right)}\begin{pmatrix}\widetilde{C}^1\\\widetilde{C}^2\end{pmatrix},\end{aligned}$$

де $\widetilde{C}^1$, $\widetilde{C}^2$ — довільні сталі.

**Приклад 3.19.** Нехай $n=1$, $m=2$,

$$Q=\exp(u^1+u^2)(\partial_x+u^2\partial_{u^1}-u^1\partial_{u^2}).$$

Тоді

$$\begin{aligned}U^1\left(x,C^1,C^2\right)&=C^1\cos x+C^2\sin x,\\U^2\left(x,C^1,C^2\right)&=-C^1\sin x+C^2\cos x,\\J\left(x,C^1,C^2\right)&=\int\exp\left(-\left(C^1+C^2\right)\cos x-\left(C^2-C^1\right)\sin x\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Відповідна система рівнянь типу Ріккаті має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_x^1}{\mathrm{d}x} &= -\left(u_x^1+u_x^2\right)u_x^1+\left(-C^1\sin x+C^2\cos x\right)u_x^1\\ &\qquad+\left(-C^1\sin x+C^2\cos x+1\right)u_x^2,\\ \frac{\mathrm{d}u_x^2}{\mathrm{d}x} &= -\left(u_x^1+u_x^2\right)u_x^2-\left(C^1\cos x+C^2\sin x+1\right)u_x^1\\ &\qquad-\left(C^1\cos x+C^2\sin x\right)u_x^2.\end{aligned}$$

Згідно (3.8) загальний розв'язок цієї системи можна представити як

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u_x^1\\ u_x^2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-C^1\sin x+C^2\cos x\\ -C^1\cos x-C^2\sin x\end{pmatrix}+\\ &\quad+\frac{\exp\left(-\left(C^1+C^2\right)\cos x-\left(C^2-C^1\right)\sin x\right)}{1-\widetilde{C}^1J_{C^1}-\widetilde{C}^2J_{C^2}}\\ &\quad\times\begin{pmatrix}\widetilde{C}^1\cos x+\widetilde{C}^2\sin x\\ -\widetilde{C}^1\sin x+\widetilde{C}^2\cos x\end{pmatrix},\end{aligned}$$

де $\widetilde{C}^1$, $\widetilde{C}^2$ — довільні сталі.

Отже, пошук диференціальних інваріантів однопараметричної групи $G$ точкових перетворень зведено теоремами 3.1 та 3.4 до побудови універсального інваріанта групи $G$. Доведення цих теорем не є суттєво чутливими до кількості змінних і, крім того, допускають узагальнення на деякі класи багатопараметричних груп точкових перетворень (або алгебр Лі векторних полів).

## 3.2. Ліївські симетрії систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Задача про допустимі розмірності максимальних алгебр ліївської інваріантності диференціальних рівнянь з фіксованого класу має довгу історію. Уже Софус Лі отримав вичерпні результати щодо максимальної розмірності таких алгебр для окремих звичайних диференціальних рівнянь

(ЗДР) довільного фіксованого порядку [189, с. 294–301]. Пізніше ці результати неодноразово перевідкрито; див., наприклад, [153].

Аналогічні результати для систем ЗДР є менш відомими. Згадаємо деякі з них. Так, згідно теореми 44 з курсу лекцій Л. Маркуса [201, с. 68–69], довільна система ЗДР другого порядку

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}), \tag{3.9}$$

де $\boldsymbol{x}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))^{\mathrm{T}}$, $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{d}\boldsymbol{x}/\mathrm{d}t$, $\ddot{\boldsymbol{x}} = \mathrm{d}\dot{\boldsymbol{x}}/\mathrm{d}t$, допускає максимальну алгебру ліївської інваріантності розмірності не більше за $(n+2)^2-1$. Пізніше цей результат більш строго передоведено в роботі [153, §§ 4, 5], і, крім того, показано, що максимальна розмірність $(n+2)^2-1 = n^2+4n+3$ досягається для систем, які точковими перетвореннями можна звести до найпростішої системи

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}. \tag{3.10}$$

Максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^0$ системи (3.10) породжують векторні поля

$$\partial_t,\ \partial_{x^a},\ t\partial_t,\ x^a\partial_t,\ t\partial_{x^a},\ x^a\partial_{x^b},\ tx^a\partial_t + x^ax^c\partial_{x^c},\ t^2\partial_t + tx^c\partial_{x^c},$$

причому ця алгебра ізоморфна алгебрі Лі $\mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{C})$ або $\mathfrak{sl}(n+2, \mathbb{R})$ для комплексного або дійсного випадку відповідно; див., наприклад, [156]. Тут і нижче, індекси $a$, $b$, $c$ змінюються від 1 до $n$. За індексами, що повторюються, йде підсумовування. Можна легко перевірити, що система (3.10) є інваріантною відносно загальної проективної групи на $\mathbb{C}^{n+1}$ (або, відповідно, $\mathbb{R}^{n+1}$), утвореної точковими перетвореннями [187, том I, с. 554]

$$\tilde{x}^i = \frac{\alpha_{i0}x^0 + \dots + \alpha_{in}x^n + \alpha_{i,n+1}}{\alpha_{n+1,0}x^0 + \dots + \alpha_{n+1,n}x^n + \alpha_{n+1,n+1}}, \quad i = 0, \dots, n,$$

де $\alpha_{00}$, $\alpha_{01}$, …, $\alpha_{n+1,n+1}$ — однорідні групові параметри, а $x^0 = t$. Алгебра $\mathfrak{g}^0$ є алгеброю Лі цієї групи. Кількість суттєвих параметрів у перетвореннях з неї насправді дорівнює $(n+2)^2-1$, оскільки, вважаючи однорідний груповий параметр ненульовим, його можна покласти рівним 1, одночасно поділивши чисельник і знаменник у виразі для кожного $\tilde{x}^i$ на цей параметр і проінтерпретувавши відношення параметрів як нові параметри. Твердження, що ці перетворення вичерпують усі можливі точкові симетрії системи (3.10), наведено у статті [35].

М. Фелс [129, 130] показав, що з точністю до точкових перетворень система (3.10) є єдиною системою вигляду (3.9), яка допускає $(n^2{+}4n{+}3)$-вимірну алгебру ліївської інваріантності; раніше це було відомо лише для лінійних систем з класу (3.9) [156]. Недавно критерії лінеаризовності систем з класу (3.9) незалежно отримано в роботах [44, 52, 207]; див. також посилання в цих роботах. Дослідження можливих розмірностей максимальних алгебр ліївської інваріантності систем ЗДР $r$-го порядку для довільного $r > 3$ розпочато в роботах [153–155] для довільного $r \geqslant 3$. Пізніше доведено [129], що з точністю до точкових перетворень система $\dddot{\boldsymbol{x}} = 0$ є єдиною серед систем ЗДР третього порядку, для якої розмірність алгебри ліївської інваріантності досягає максимально можливого для $r = 3$ значення $n^2 + 3n + 3$.

Точні верхні оцінки розмірностей алгебр ліївської інваріантності нормальних систем ЗДР $r$-го порядку з $n$ залежними змінними поки не встановлено для довільних значень $n$, якщо $r > 3$; див. обговорення та відповідні результати в [224, с. 206]. Найкращою з відомих оцінок при $r > 3$ є $n^2 + (r+1)n + 2$ [154], але вона більша за розмірність алгебри ліївської інваріантності елементарного рівняння ${x_i}^{(r)} = 0$, $i = 1, \dots, n$, що дорівнює $n^2 + rn + 3$ [153] і має, за існуючим припущенням, бути найкращою оцінкою для розмірностей алгебр ліївської інваріантності таких систем. (Алгебри ліївської інваріантності елементарної систем для довільних $n$ та $r$ знайдено у роботі [153].)

У серії нещодавніх робіт вивчено ліївські симетрії лінійних систем $n$ ($n \geqslant 2$) ЗДР другого порядку зі сталими комутуючими матрицями коефіцієнтів при $\boldsymbol{x}$ та $\dot{\boldsymbol{x}}$. А саме, випадки $n = 2$ та $n = 3$ розглянуто в [281]. У [110] Р. Кампоамор-Штурсберг виправив результати [281] (див.

також коментар щодо [281] у [205]) і вивчив випадок $n = 4$, а також системи без обмежень на $n$, що пов'язані з діагональними матрицями. Деякі результати щодо розмірностей максимальних алгебр ліївської інваріантності таких систем у випадку довільного $n$ і матриць загальної жорданової форми отримано в [111]. Незважаючи на велику кількість публікацій з цієї тематики, групову класифікацію систем лінійних ЗДР другого порядку виконано лише у випадках систем двох або трьох рівнянь [209, 272, 282]. Розгляд систем більшої кількості рівнянь або систем рівнянь вищого або різного порядку в рамках стандартного методу розв'язання визначальних рівнянь потребує надзвичайно складних обчислень.

Дослідження симетрійних властивостей систем із класу (3.9) стимулюють різноманітні застосування в механіці, гравітації тощо. На жаль, дотепер немає загальних і вичерпних результатів щодо ліївські симетрії таких систем. Тому лінійні системи зі сталими коефіцієнтами є цікавими для попередніх досліджень у цьому напрямку, зважаючи на добре відомий алгоритм побудови їх загальних розв'язків. Групова класифікація лінійних систем із сталими коефіцієнтами дає приклади максимальних алгебр ліївської інваріантності систем з класу (3.9) й інформацію щодо можливих розмірностей цих алгебр. Зауважимо, що подібні результати є важливими для задач лінеаризації систем з класу (3.9).

Нижче виконано вичерпний аналіз ліївських симетрій лінійних систем із класу (3.9) зі сталими комутуючими матрицями коефіцієнтів при $\boldsymbol{x}$ та $\dot{\boldsymbol{x}}$ над комплексним або дійсним полями. У цьому параграфі суттєво розширено й узагальнено результати робіт [110, 111, 205, 281] на основі оригінального та ефективного алгебраїчного підходу. Зокрема, опис симетрій проведено без обмежень щодо кількості рівнянь і вигляду матриць коефіцієнтів, а також отримано точні нижні та верхні оцінки щодо розмірностей алгебр інваріантності. Результати цього параграфу опубліковано у роботах [75, 92, 93, 98].

**Основний результат.** Як і в роботах [110,111,205,281], розглянемо систему лінійних ЗДР другого порядку у нормальній формі

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = A\dot{\boldsymbol{x}} + B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{C}(t) \tag{3.11}$$

над комплексним полем. Тут $\boldsymbol{C}(t)$ — гладка $n$-компонентна вектор-функція від змінної $t$, $A$ та $B$ — комутуючі сталі комплекснозначні матриці розмірності $n \times n$, $n \geqslant 2$. Зауважимо, що вибір базового поля ($\mathbb{C}$ або $\mathbb{R}$) не є принциповим. Комплексне поле вибрано з метою спрощення презентації.

Добре відомо (див., наприклад, [156]), що заміна залежних змінних

$$\boldsymbol{x} = \exp\left(\frac{1}{2}At\right)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t),$$

де $\boldsymbol{x}_{\mathrm{p}}(t)$ — частинний розв'язок системи (3.11), зводить систему (3.11) до системи

$$\ddot{\boldsymbol{y}} = D\boldsymbol{y}, \quad \text{де} \quad D = B - A^2.$$

Позначимо через $J$ жорданову нормальну форму матриці $D$. Тоді існує невироджена матриця $P$ така, що $D = P^{-1}JP$, а точкова заміна змінних $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ зводить систему $\ddot{\boldsymbol{y}} = D\boldsymbol{y}$ до системи $\ddot{\boldsymbol{z}} = J\boldsymbol{z}$. Як наслідок, для вивчення симетрійних властивостей нормальних лінійних систем ЗДР вигляду (3.11) достатньо розглянути лише системи вигляду

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{x}, \tag{3.12}$$

де $J$ — жорданова матриця,

$$J = \bigoplus_{l=1}^{s} J_{\lambda_l}^{k_l}, \quad k_1 + \dots + k_s = n, \tag{3.13}$$

$J_{\lambda_l}^{k_l}$ — жорданова клітинка розмірності $k_l$ з власним значенням $\lambda_l$ (див. позначення на с. 60), $(\lambda - \lambda_1)^{k_1}, \ldots, (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$ — елементарні дільники матриці $J$.

Нижче також використовуємо позначення $\operatorname{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_l)$ для діагональної матриці розмірності $l \times l$ з елементами $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ на діагоналі, а $E^l = \operatorname{diag}(1, \dots, 1)$ — одинична матриця розмірності $l \times l$. Нижні індекси функцій позначають диференціювання за відповідними змінними.

**Зауваження 3.20.** Якщо матриця $J$ пропорційна одиничній, тобто $J \in \langle E^n \rangle$, то відповідну систему (3.12) можна звести до елементарної системи (3.10) точковою заміною змінних, яку називають узагальненим перетворенням Арнольда [156]. Тому такі системи можна виключити з подальшого розгляду. Водночас, представлення (3.13) матриці $J$ у вигляді прямої суми жорданових клітинок може містити часткова прямі суми однакових $1 \times 1$ жорданових клітинок, а такі часткова суми пропорційні одиничним матрицям відповідної розмірності.

Для знаходження ліївських симетрій системи (3.12) використаємо стандартний ліївський підхід [220,230]. Діючи другим продовженням векторного поля $Q = \xi(t, \boldsymbol{x})\partial_t + \eta^a(t, \boldsymbol{x})\partial_{x^a}$ на систему (3.12) та виключаючи другі похідні $\ddot{\boldsymbol{x}}$ за допомогою (3.12), отримаємо необхідну і достатню умову її інфінітезимальної інваріантності

$$
\begin{aligned}
&\eta^b_{tt} + 2\eta^b_{x^a t} x^a_t + \eta^b_{x^a x^c} x^a_t x^c_t + \eta^b_{x^a} (J\boldsymbol{x})^a \\
&\quad - (\xi_{tt} + 2\xi_{x^a t} x^a_t + \xi_{x^a x^c} x^a_t x^c_t + \xi_{x^a} (J\boldsymbol{x})^a) x^b_t \\
&\quad - 2(\xi_t + \xi_{x^a} x^a_t)(J\boldsymbol{x})^b = (J\boldsymbol{\eta})^b. \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

Розщеплюючи (3.14) за похідними $x^a_t$, приходимо до системи визначальних рівнянь на коефіцієнти $\xi(t, \boldsymbol{x})$ і $\eta^a(t, \boldsymbol{x})$:

$$\xi_{x^a x^c} = 0, \qquad (3.15)$$

$$\eta^b_{x^a x^c} = 0, \quad a \neq b \neq c, \quad \eta^b_{x^a x^b} = \xi_{x^a t}, \quad a \neq b, \quad \eta^b_{x^b x^b} = 2\xi_{x^b t}, \qquad (3.16)$$

$$\eta^b_{x^a t} = \xi_{x^a} (J\boldsymbol{x})^b, \quad a \neq b, \quad 2\eta^b_{x^b t} = \xi_{tt} + 2\xi_{x^b} (J\boldsymbol{x})^b + \xi_{x^a} (J\boldsymbol{x})^a, \qquad (3.17)$$

$$\eta^b_{tt} + \eta^b_{x^a} (J\boldsymbol{x})^a - 2\xi_t (J\boldsymbol{x})^b = (J\boldsymbol{\eta})^b, \qquad (3.18)$$

де підсумовування за індексом $b$ немає. Тоді з рівнянь (3.15), (3.16) випливає

$$\xi = \xi^a(t)x^a + \xi^0(t), \quad \eta^b = \xi^a_t(t)x^a x^b + \eta^{ba}(t)x^a + \eta^{b0}(t), \tag{3.19}$$

де $\xi^a$, $\xi^0$, $\eta^{ba}$ і $\eta^{b0}$ — гладкі функції змінної $t$. Підставляючи вирази (3.19) у рівняння (3.17) і (3.18), з урахування умови $J \notin \langle E^n \rangle$, отримаємо уточнені вирази

$$\xi = c_1 t + c_0, \quad \eta^b = \eta^{ba}x^a + \eta^{b0}(t),$$

де $c_1$, $c_0$, $\eta^{ba}$ — сталі, а $\eta^{b0}$ — гладкі функції змінної $t$. Подробиці виведення цих виразів є такими. Підстановка виразів (3.19) у рівняння (3.17) і подальше часткове розщеплення за змінними $\boldsymbol{x}$ призводить до системи

$$\begin{aligned} &\eta^{ba}_t = 0, \quad \xi^a_{tt}x^b = \xi^a(J\boldsymbol{x})^b, \quad a \neq b, \quad 2\eta^{bb}_t = \xi^0_{tt}, \\ &2\xi^b_{tt}x^b = -\xi^a_{tt}x^a + 2\xi^b(J\boldsymbol{x})^b + \xi^a(J\boldsymbol{x})^a, \end{aligned} \tag{3.20}$$

де підсумовування за індексом $b$ знову немає.

Нехай $S = \{a_i,\ i = 1, \ldots, m\}$, $m \leqslant n$, — підмножина натуральних чисел $\{1, \ldots, n\}$ з множини, для яких $\xi^{a_i} \neq 0$. Для будь-якого фіксованого $a_i \in S$ маємо умову $\xi^{a_i}_{tt}/\xi^{a_i} = (J\boldsymbol{x})^b/x^b =: \mu_i = \mathrm{const}$ при $b \neq a_i$. Якщо $n > 2$ й $m \geqslant 2$, то сталі $\mu_i$, $i = 1, \ldots, m$, співпадають. Якщо $n = m = 2$, то ця умова еквівалентна множині рівнянь $(J\boldsymbol{x})^1 = \mu_1 x^1$, $(J\boldsymbol{x})^2 = \mu_2 x^2$, $\xi^1_{tt} = \mu_2\xi^1$ і $\xi^2_{tt} = \mu_1\xi^2$. Тоді рівняння (3.20) можна звести до простих рівнянь $(\mu_1 - \mu_2)\xi^i = 0$. Звідси знову $\mu_1 = \mu_2$, оскільки $\xi^1\xi^2 \neq 0$. Обидва випадки суперечать умові $J \notin \langle E^n \rangle$. Якщо $n \geqslant 2$ та $m = 1$, то лише одне рівняння серед (3.20) не виконується тотожно, і після додаткового спрощення воно набуває вигляду $(J\boldsymbol{x})^{a_1} = \mu_1 x^{a_1}$ і разом з рівняннями $(J\boldsymbol{x})^b = \mu_1 x^b$ для $b \neq a_i$ призводить до умови $J \in \langle E^n \rangle$, що суперечить припущенню $J \notin \langle E^n \rangle$. Таким чином, залишається єдина можливість $m = 0$, тобто $\xi^a = 0$ для будь-якого $a$. Диференціюючи визначальне рівняння (3.18) за змінною $t$ та розщеплюючи за змінними $\boldsymbol{x}$, зокрема, отримаємо матричне рівняння $\frac{1}{2}\xi^0_{tttt}E^n - 2\xi^0_{tt}J = 0$, з якого випливає, що $\xi^0_{tt} = 0$ внаслідок лінійної незалежності матриць $J$ та $E^n$. Тому $\eta^{ba}_t = 0$ для будь-якої пари індексів $a$ та $b$.

Отже, визначальні рівняння (3.18) еквівалентні сукупності системи

$$\boldsymbol{\eta}^0_{tt} = J\boldsymbol{\eta}^0, \quad \boldsymbol{\eta}^0 = (\eta^{10}, \dots, \eta^{n0})^{\mathrm{T}}$$

(тобто $\boldsymbol{\eta}^0$ є довільним розв'язком системи (3.12)) і матричного рівняння

$$HJ - 2\xi_t J = JH. \tag{3.21}$$

на матрицю $H = (\eta^{ba})$ розмірності $n \times n$.

Якщо $\xi_t = 0$ для будь-якого оператора ліївської симетрії системи (3.12), то рівняння (3.21) — умова комутування матриць $H$ та $J$, тобто $JH = HJ$. Таким чином, приходимо до задачі Фробеніуса: визначити всі матриці $H$, що комутують з фіксованою матрицею $J$. Це стандартна задача з класичної теорії матриць; див., наприклад, [150, розділ VIII].

Якщо існує ліївський оператор симетрії $Q$ системи (3.12) з $\xi_t \neq 0$, то відповідна матриця $H$ задовольняє неоднорідне матричне рівняння

$$JH - HJ = \kappa J, \tag{3.22}$$

де $\kappa = -2c_1 \neq 0$. Це рівняння сумісне тоді й лише тоді, коли матриця $J$ є нільпотентною, що прямо випливає з леми 4 у [167, с. 44] або теореми II у [257]. Матричне рівняння (3.22) є неоднорідною лінійною системою алгебраїчних рівнянь на коефіцієнти матриці $H$. Тому загальний розв'язок рівняння (3.22) є сумою частинного розв'язку рівняння (3.22) і загального розв'язку відповідного однорідного матричного рівняння $JH = HJ$, яке обговорювалося вище. Частинним розв'язком рівняння (3.22) є

$$\kappa\,\mathrm{diag}(1, 2, \dots, k_1, 1, 2, \dots, k_2,\ \dots,\ 1, 2, \dots, k_s),$$

де $k_1$, $k_2$, …, $k_s$ — розміри жорданових клітинок матриці $J$, див. (3.13).

Підсумовуючи викладене, сформулюємо основне твердження.

**Теорема 3.21.** *Нехай $J$ — матриця в жордановій формі* (3.13)*, не пропорційна одиничній матриці. Максимальною алгеброю ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^J$ системи $\ddot{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{x}$ є*

$$\langle \mathcal{X}^m,\, m = 1, \dots, 2n,\ \mathcal{H}^\ell,\, \ell = 1, \dots, N,\ \mathcal{T} \rangle$$

*або*

$$\langle \mathcal{X}^m,\, m = 1, \dots, 2n,\ \mathcal{H}^\ell,\, \ell = 1, \dots, N,\ \mathcal{T},\ \mathcal{D} \rangle,$$

*якщо матриця $J$ є ненільпотентною або нільпотентною відповідно. Тут*

$$\mathcal{X}^m = \varphi^{ma}(t)\partial_{x^a}, \quad \mathcal{H}^\ell = (H^\ell)^{ba}x^a\partial_{x^b},$$
$$\mathcal{T} = \partial_t, \quad \mathcal{D} = t\partial_t - 2\gamma^{ab}x^b\partial_{x^a},$$

*вектор-функції $\boldsymbol{\varphi}^m = (\varphi^{m1}(t), \dots, \varphi^{mn}(t))^{\mathrm{T}}$, $m = 1, \dots, 2n$, утворюють фундаментальну систему розв'язків системи $\ddot{\boldsymbol{x}} = J\boldsymbol{x}$, а $H^\ell$, $\ell = 1, \dots, N$, вичерпують усі лінійно незалежні матриці, що комутують з матрицею $J$, $(\gamma^{ab}) = \operatorname{diag}(1, 2, \dots, k_1, 1, 2, \dots, k_2, \dots, 1, 2, \dots, k_s)$.*

Через $N = N(D)$ позначимо кількість лінійно незалежних матриць, що комутують із матрицею $D$. Очевидно, що $N(D) = N(\tilde{D})$, якщо матриці $D$ та $\tilde{D}$ подібні.

**Наслідок 3.22.** *Розмірність максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^D$ системи $\ddot{\boldsymbol{x}} = D\boldsymbol{x}$ з $D \notin \langle E^n \rangle$ дорівнює $2n + N + 1$ або $2n + N + 2$, якщо матриця $D$ є відповідно ненільпотентною або нільпотентною.*

Нехай матриця $J$ вигляду (3.13) є жордановою формою матриці $D$, а $\sigma_{ij}$ — степінь найбільшого спільного дільника многочленів $(\lambda - \lambda_i)^{k_i}$ і $(\lambda - \lambda_j)^{k_j}$, тобто $\sigma_{ij} = 0$, якщо $\lambda_i \neq \lambda_j$, і $\sigma_{ij} = \min(k_i, k_j)$, якщо $\lambda_i = \lambda_j$. Тоді значення $N = N(D)$ обчислюють за формулою [150, с. 221]

$$N = \sum_{i,j=1}^{s} \sigma_{ij}. \tag{3.23}$$

Нехай $\mathcal{I}_1(\lambda)$, …, $\mathcal{I}_q(\lambda)$ утворюють повну систему несталих інваріантних многочленів для матриці $D$ зі степенями $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_q > 0$. Кожен інваріантний многочлен $\mathcal{I}_\alpha(\lambda)$ є добутком взаємно простих елементарних дільників матриці $D$: $\mathcal{I}_\alpha(\lambda) = (\lambda - \hat\lambda_1)^{d_{\alpha 1}} \cdots (\lambda - \hat\lambda_p)^{d_{\alpha p}}$, $\alpha = 1, \ldots, q$. Тут $\hat\lambda_1$, …, $\hat\lambda_p$ — усі різні власні значення матриці $D$, $d_{1j} \geqslant d_{2j} \geqslant \cdots \geqslant d_{qj} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$, $n_\alpha = d_{\alpha 1} + \cdots + d_{\alpha p}$, $\alpha = 1, \ldots, q$, $n_1 + \cdots + n_q = n$, а тому $\mathcal{I}_1(\lambda) \cdots \mathcal{I}_q(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці $D$. Згідно [150, с. 222, теорема 2] маємо ще одну формулу для знаходження значення $N = N(D)$,

$$N = n_1 + 3n_2 + \cdots + (2q-1)n_q. \tag{3.24}$$

Наведемо деякі елементарні властивості для $N(D)$, необхідні для подальшого розгляду. По-перше, $N(D) = n \bmod 2$, тобто $N(D)$ приймає лише непарні (або парні) значення для непарних (або парних) $n$. Значення $N(D)$ повністю визначено набором $\bar n = (n_1, \ldots, n_q)$ степенів несталих інваріантних многочленів матриці $D$ або, еквівалентно, розбиттям $n$ на натуральні доданки $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_q > 0$: $n = n_1 + \cdots + n_q$. З представлення (3.24) випливає, що $n \leqslant N(D) \leqslant n^2$ для будь-якої матриці $D$ розмірності $n \times n$. Рівність $N(D) = n$ має місце тоді й лише тоді, коли $q = 1$, звідки $\bar n = (n)$, тобто всі елементарні дільники матриці $D$ є попарно взаємно простими, або, іншими словами, всі власні значення матриці $D$ є попарно різними. Максимальне значення $N = n^2$ досягається лише тоді, коли матриця $D$ пропорційна одиничній матриці, тобто $D \in \langle E^n \rangle$, оскільки в цьому випадку кількість (несталих) інваріантних многочленів для матриці $D$ є також максимальною й дорівнює $n$, а $\bar n = (1, \ldots, 1)$. Підмаксимальне значення $N(D)$ дорівнює $N = n^2 - 2n + 2$; воно можливе лише для набору $\bar n = (2, 1, \ldots, 1)$. Тоді матриця $D$ подібна або $J^2_{\lambda_1} \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n-2} J^1_{\lambda_1}\right)$, або $\left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} J^1_{\lambda_1}\right) \oplus J^1_{\lambda_2}$, де $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Наступне можливе значення $N = n^2 - 4n + 8$ відповідає набору $\bar n = (2, 2, 1, \ldots, 1)$, $n \geqslant 4$.

Теорема 3.21 та наслідок 3.22 разом із формулами (3.23) і (3.24) надають більш ефективний алгоритм знаходження розмірностей максимальних алгебр ліївської інваріантності для систем з класу (3.11), ніж раніше відомі; див., наприклад, [111, твердження 4]. Також цей алгоритм дає можливість явної побудови базисів таких алгебр для фіксованих жорданових матриць. Окрім того, отримано серію простих оцінок для розмірностей таких алгебр (для порівняння див., наприклад, [110, 111]).

**Наслідок 3.23.** *Максимальна алгебра ліївської інваріантності для системи* $\ddot{\boldsymbol{x}} = D\boldsymbol{x}$ *має мінімальну розмірність* $3n+1$ *серед систем вигляду* (3.11) *тоді й лише тоді, коли матриця* $D$ *є ненільпотентною й усі її елементарні дільники попарно взаємно прості.*

Іншими словами, мінімальна розмірність досягається, коли жорданову форму матриці $D$ утворено або єдиною жордановою клітинкою з ненульовим власним значенням, або декількома жордановими клітинками з попарно різними власними значеннями. Якщо матриця $D$ подібна одній жордановій клітинці $J_0^n$ з нульовим власним значенням, то розмірність максимальної алгебри ліївської інваріантності системи $\ddot{\boldsymbol{x}} = D\boldsymbol{x}$ дорівнює $3n+2$.

**Наслідок 3.24.** *Розмірності максимальних алгебр ліївської інваріантності систем вигляду* $\ddot{\boldsymbol{x}} = D\boldsymbol{x}$ *з* $D \notin \langle E^n \rangle$ *не більші за* $n^2+4$*, причому ця верхня оцінка досягається тоді й лише тоді, коли матриця* $D$ *подібна нільпотентній жордановій матриці* $J_0^2 \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{n-2} J_0^1\big)$*.*

Таким чином, для будь-якої системи з класу (3.11), нееквівалентної найпростішій системі $\ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}$, розмірність максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ задовольняє нерівність

$$3n+1 \leqslant \dim \mathfrak{g} \leqslant n^2+4,$$

і ці оцінки є точними. Розмірнісь $\dim \mathfrak{g}$ дорівнює $n^2+3$ для будь-якої системи $\ddot{\boldsymbol{x}} = D\boldsymbol{x}$ з матрицею $D$, яка подібна або $J_{\lambda_1}^2 \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{n-2} J_{\lambda_1}^1\big)$, $\lambda_1 \neq 0$, або $\big(\bigoplus_{i=1}^{n-1} J_{\lambda_1}^1\big) \oplus J_{\lambda_2}^1$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, і лише для елементів підкласів еквівалентності таких систем з точністю до точкових перетворень. Як згадувалося вище, $\dim \mathfrak{g} = 3n+2$, якщо матриця $D$ подібна до $J_0^n$.

Водночас, лише у випадку $2 \leqslant n \leqslant 4$ для кожного натурального значення $\rho$ з інтервалу $[3n+1, n^2+4]$ існує система з класу (3.11), розмірність максимальної алгебри ліївської інваріантності якої дорівнює $\rho$. Для $n \geqslant 5$, наприклад, не існує матриць $D$ розмірності $n \times n$ таких, що $\dim \mathfrak{g}^D \in [n^2-2n+11, n^2+2]$. Причому кількість таких особливих інтервалів зростає зі збільшенням $n$.

Якщо матриця $J$ є діагональною, тобто всі елементарні дільники мають степень 1, і додатково $J \notin \langle E^n \rangle$, то

$$N = N(J) = \sum_{i=1}^{p} r_i^2,$$

де $\hat{\lambda}_1$, …, $\hat{\lambda}_p$ — всі різні власні значення матриці $J$, а $r_i$ — кратності $\hat{\lambda}_i$, $i = 1, \dots, p$. Таким чином, з наслідку 3.22 прямо випливає твердження 3 статті [110].

Розглянемо жорданову матрицю $J$ з єдиним власним значенням $\lambda$, тобто $J = J_\lambda^{k_1} \oplus J_\lambda^{k_2} \oplus \dots \oplus J_\lambda^{k_s}$ з $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \dots \geqslant k_s$ і $k_1 + \dots + k_s = n$. З формул (3.23) і (3.24) випливає, що

$$N = \sum_{i=1}^{s} (2i-1)k_i = ns - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=i+1}^{s} (k_i - k_j).$$

З огляду на наслідок 3.22 це суттєво спрощує доведення теореми 2 роботи [111].

**Зауваження 3.25.** Для дійсної матриці $D$ кількість лінійно незалежних розв'язків системи $\ddot{\boldsymbol{x}} = D\boldsymbol{x}$ (як і кількість $N = N(D)$ лінійно незалежних матриць, комутуючих із $D$) над дійсним полем така сама, як над комплексним полем. Таким чином, усі отримані результати можна прямо перенести на дійсний випадок. Зокрема, в теоремі 3.21 достатньо розглянути дійсні жорданові матриці й використовувати дійсні відповідники вектор-функцій $\boldsymbol{\varphi}^m = (\varphi^{m1}(t), \dots, \varphi^{mn}(t))^{\mathrm{T}}$, $m = 1, \dots, 2n$, та матриць $H^\ell$, $\ell = 1, \dots, N$. Дивись приклад 3.27.

**Ілюстративні приклади.** Нижче наведемо прості приклади для ілюстрації теореми 3.21.

**Приклад 3.26.** Для системи (3.12) з жордановою матрицею $J = J^2_{\lambda_1} \oplus J^2_{\lambda_2}$, тобто системи

$$\begin{aligned} &\ddot{x}^1 = \lambda_1 x^1 + x^2, \quad \ddot{x}^2 = \lambda_1 x^2, \\ &\ddot{x}^3 = \lambda_2 x^3 + x^4, \quad \ddot{x}^4 = \lambda_2 x^4, \end{aligned} \tag{3.25}$$

необхідно розглянути два різних випадки залежно від власних значень $\lambda_1$ та $\lambda_2$, а саме $\lambda_1 \neq \lambda_2$ та $\lambda_1 = \lambda_2$.

У випадку $\lambda_1 \neq \lambda_2$ єдиним несталим інваріантним многочленом матриці $J$ є $(\lambda - \lambda_1)^2(\lambda - \lambda_2)^2$. Звідки $N = 4$, і будь-яка комутуюча з $J$ матриця має вигляд [150, розділ VIII]

$$H = \begin{pmatrix} \eta^{11} & \eta^{12} & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \eta^{11} & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & \eta^{33} & \eta^{34} \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & \eta^{33} \end{pmatrix}.$$

Побудувавши фундаментальну множину розв'язків системи (3.25), з використанням теореми 3.21 отримаємо 13-вимірну максимальну алгебру ліївської інваріантності системи (3.25): або

$$\begin{aligned} &\langle e^{\sqrt{\lambda_1}t}(t\partial_{x^1} + 2\sqrt{\lambda_1}\partial_{x^2}),\ e^{-\sqrt{\lambda_1}t}(t\partial_{x^1} - 2\sqrt{\lambda_1}\partial_{x^2}),\ e^{\sqrt{\lambda_1}t}\partial_{x^1},\ e^{-\sqrt{\lambda_1}t}\partial_{x^1}, \\ &e^{\sqrt{\lambda_2}t}(t\partial_{x^3} + 2\sqrt{\lambda_2}\partial_{x^4}),\ e^{-\sqrt{\lambda_2}t}(t\partial_{x^3} - 2\sqrt{\lambda_2}\partial_{x^4}),\ e^{\sqrt{\lambda_2}t}\partial_{x^3},\ e^{-\sqrt{\lambda_2}t}\partial_{x^3}, \\ &x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2},\ x^2\partial_{x^1},\ x^3\partial_{x^3} + x^4\partial_{x^4},\ x^4\partial_{x^3},\ \partial_t\rangle \end{aligned}$$

для $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$, або

$$\begin{aligned} &\langle e^{\sqrt{\lambda_1}t}(t\partial_{x^1} + 2\sqrt{\lambda_1}\partial_{x^2}),\ e^{-\sqrt{\lambda_1}t}(t\partial_{x^1} - 2\sqrt{\lambda_1}\partial_{x^2}),\ e^{\sqrt{\lambda_1}t}\partial_{x^1},\ e^{-\sqrt{\lambda_1}t}\partial_{x^1}, \\ &t^3\partial_{x^3} + 6t\partial_{x^4},\ t^2\partial_{x^3} + 2\partial_{x^4},\ t\partial_{x^3},\ \partial_{x^3},\ x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2},\ x^2\partial_{x^1}, \\ &x^3\partial_{x^3} + x^4\partial_{x^4},\ x^4\partial_{x^3},\ \partial_t\rangle \end{aligned}$$

для $\lambda_1 \neq \lambda_2 = 0$.

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2$, то несталими інваріантними многочленами для матриці $J$ є $(\lambda - \lambda_1)^2$ і $(\lambda - \lambda_1)^2$, а тому $N = 8$. Матриця $H$ комутує з $J$ тоді й лише тоді, коли вона має вигляд

$$H = \begin{pmatrix} \eta^{11} & \eta^{12} & \vdots & \eta^{13} & \eta^{14} \\ 0 & \eta^{11} & \vdots & 0 & \eta^{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \eta^{31} & \eta^{32} & \vdots & \eta^{33} & \eta^{34} \\ 0 & \eta^{31} & \vdots & 0 & \eta^{33} \end{pmatrix}.$$

У результаті знаходимо 17-вимірну максимальну алгебру ліївської інваріантності

$$\begin{aligned}
&\langle e^{\sqrt{\lambda_1}t}(t\partial_{x^1} + 2\sqrt{\lambda_1}\partial_{x^2}),\ e^{-\sqrt{\lambda_1}t}(t\partial_{x^1} - 2\sqrt{\lambda_1}\partial_{x^2}),\ e^{\sqrt{\lambda_1}t}\partial_{x^1},\ e^{-\sqrt{\lambda_1}t}\partial_{x^1},\\
&e^{\sqrt{\lambda_1}t}(t\partial_{x^3} + 2\sqrt{\lambda_1}\partial_{x^4}),\ e^{-\sqrt{\lambda_1}t}(t\partial_{x^3} - 2\sqrt{\lambda_1}\partial_{x^4}),\ e^{\sqrt{\lambda_1}t}\partial_{x^3},\ e^{-\sqrt{\lambda_1}t}\partial_{x^3},\\
&x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2},\ x^2\partial_{x^1},\ x^3\partial_{x^1} + x^4\partial_{x^2},\ x^4\partial_{x^1},\ x^1\partial_{x^3} + x^2\partial_{x^4},\ x^2\partial_{x^3},\\
&x^3\partial_{x^3} + x^4\partial_{x^4},\ x^4\partial_{x^3},\ \partial_t\rangle
\end{aligned}$$

для $\lambda_1 \neq 0$ або 18-вимірну максимальну алгебру ліївської інваріантності

$$\begin{aligned}
&\langle t^3\partial_{x^1} + 6t\partial_{x^2},\ t^2\partial_{x^1} + 2\partial_{x^2},\ t\partial_{x^1},\ \partial_{x^1},\ t^3\partial_{x^3} + 6t\partial_{x^4},\\
&t^2\partial_{x^3} + 2\partial_{x^4},\ t\partial_{x^3},\ \partial_{x^3},\ x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2},\ x^2\partial_{x^1},\ x^3\partial_{x^1} + x^4\partial_{x^2},\\
&x^4\partial_{x^1},\ x^1\partial_{x^3} + x^2\partial_{x^4},\ x^2\partial_{x^3},\ x^3\partial_{x^3} + x^4\partial_{x^4},\ x^4\partial_{x^3},\ \partial_t,\\
&t\partial_t - 2x^1\partial_{x^1} - 4x^2\partial_{x^2} - 2x^3\partial_{x3} - 4x^4\partial_{x^4}\rangle
\end{aligned}$$

для $\lambda_1 = 0$.

**Приклад 3.27.** Розглянемо над дійсним полем систему

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 = \mu x_1 + \nu x_2, \quad \ddot{x}_2 = -\nu x_1 + \mu x_2,\\
&\ddot{x}_3 = x_4, \quad \ddot{x}_4 = 0, \quad \ddot{x}_5 = 0,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

вигляду (3.12) з дійсною жордановою матрицею $J = R^2_{\mu\nu} \oplus J^2_0 \oplus J^1_0$, де $R^2_{\mu\nu} = \left(\begin{smallmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{smallmatrix}\right)$, ненульову сталу $\nu$ можна вважати додатною з точністю до перестановки $x_1$ та $x_2$.

Матриця $H$ комутує з $J$ тоді й лише тоді, коли вона має вигляд

$$H = \left(\begin{array}{cc:cc:c} \eta^{11} & \eta^{12} & 0 & 0 & 0 \\ -\eta^{12} & \eta^{11} & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \eta^{33} & \eta^{34} & \eta^{35} \\ 0 & 0 & 0 & \eta^{33} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \eta^{54} & \eta^{55} \end{array}\right).$$

Тоді згідно теореми 3.21 максимальну алгебру ліївської інваріантності системи (3.26) породжують 18 векторних полів

$$\begin{gathered} e^{\alpha t}\cos\beta t\partial_{x^1} - e^{\alpha t}\sin\beta t\partial_{x^2}, \quad e^{\alpha t}\sin\beta t\partial_{x^1} + e^{\alpha t}\cos\beta t\partial_{x^2}, \\ e^{-\alpha t}\cos\beta t\partial_{x^1} + e^{-\alpha t}\sin\beta t\partial_{x^2}, \quad -e^{-\alpha t}\sin\beta t\partial_{x^1} + e^{-\alpha t}\cos\beta t\partial_{x^2}, \\ \partial_{x^3},\ t\partial_{x^3},\ t^3\partial_{x^3} + 6t\partial_{x^4},\ t^2\partial_{x^3} + 2\partial_{x^4},\ \partial_{x^5},\ t\partial_{x^5},\ x^1\partial_{x^1} + x^2\partial_{x^2}, \\ x^2\partial_{x^1} - x^1\partial_{x^2},\ x^3\partial_{x^3} + x^4\partial_{x^4},\ x^4\partial_{x^3},\ x^5\partial_{x^3},\ x^4\partial_{x^5},\ x^5\partial_{x^5},\ \partial_t, \end{gathered}$$

де $\alpha = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\mu^2+\nu^2}+\mu}{2}}$, $\beta = \sqrt{\dfrac{\sqrt{\mu^2+\nu^2}-\mu}{2}}$.

**Висновки.** У цьому параграфі вичерпно вивчено ліївські симетрії систем лінійних ЗДР другого порядку зі сталими комутуючими матричними коефіцієнтами над комплексним та дійсним полями, які зводяться до вигляду (3.12). Явний опис максимальних алгебр ліївської інваріантності для будь-якої системи з класу (3.11) наведено в теоремі 3.21. Наслідок 3.22 разом з формулами (3.23) і (3.24) дає простий і алгоритмічний підхід для обчислення розмірностей таких алгебр. Зокрема, показано, що ці розмірності повністю визначено степенями несталих інваріантних многочленів відповідних жорданових матриць у зведених системах (3.12). Також знайдено точні оцінки для можливих значень цих розмірностей. Для спрощення розгляд проведено над комплексним полем, але всі результати і твердження можна прямо розширити на дійсний випадок, див.

зауваження 3.25. Ці результати суттєво покращують і узагальнюють попередні результати з [110, 111, 205, 281]. Переваги запропонованого підходу проілюстровано прикладами.

Відкритою залишається проблема дослідження ліївських симетрій більш загальних систем, ніж (3.11), зокрема, лінійних систем зі змінними коефіцієнтами. Ця задача потребую детального вивчення групоїдів еквівалентності розглядуваних класів, опису їх максимальних нормалізованих підкласів, поєднання алгебраїчних методів і теорії сумісності систем диференціальних рівнянь у груповій класифікації [251]. Також відкритою є проблема лінеаризації систем (3.9) за допомогою точкових перетворень.

## 3.3. Групоїди еквівалентності класів лінійних звичайних диференціальних рівнянь та їх групова класифікація

Незважаючи на те, що трансформаційні (зокрема й симетрійні) властивості лінійних ЗДР добре вивчено (див., наприклад, детальні огляди [12, 194, 263] і монографії [2, 162, 224, 264]), розглянемо їх з іншої точки зору, а саме опишемо повну множину допустимих перетворень між такими рівняннями. Це дозволить провести групову класифікацію лінійних ЗДР у рамках алгебраїчного підходу, який уже показав свою ефективність у задачах групової класифікації як звичайних диференціальних рівнянь, так і диференціальних рівнянь з частинними похідними; див., наприклад, [61, 245, 251, 252, 276] та відповідні посилання у цих статтях. Раніше — у [174, 196] — групову класифікацію лінійних ЗДР незалежно виконано в рамках стандартного підходу, що базується на дослідженні сумісності визначальних рівнянь для ліївських симетрій і прямому розв’язанні цих рівнянь, а тому призводить до дуже громіздких обчислень. Хоча цей підхід є загальноприйнятим у груповому аналізі диференціальних рівнянь, він є ефективним лише для класів рівнянь відносно простої структури. У [224, с. 217–218] розв'язання задачі групової класифікації лінійних ЗДР пов'язано з результатами Е.Ю. Вілкзинського [287] про відносні інваріанти для лінійних ЗДР у формі Лагера–Форсайта. Аналогічну проблему класифікації лінійних ЗДР з точністю до контактних перетворень, а також відповідну задачу еквівалентності, детально розглянуто у роботах [288–290].

Метою цього параграфу є повна групова класифікація класу $\mathcal{L}$ лінійних ЗДР $r$-го порядку ($r \geqslant 3$) за допомогою більш елегантного алгебраїчного підходу з використанням підгрупового аналізу алгебри еквівалентності класу $\mathcal{L}$. Такий підхід спрацьовує належним чином, оскільки клас $\mathcal{L}$ є (точково) нормалізованим (у звичайному сенсі), тобто перетворення з його (звичайної) точкової (псевдо)групи еквівалентності[3.1] $G^{\sim}$ генерують усі допустимі точкові перетворення[3.2] між рівняннями з класу $\mathcal{L}$. Групова класифікація класу лінійних ЗДР другого порядку є тривіальною, оскільки його група еквівалентності дії транзитивно. Зауважимо, що групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}$, $r \geqslant 2$, вперше знайдено П. Штекелем [271][3.3]. На множині допустимих перетворень будь-якого класу диференціальних рівнянь природно ввести структуру групоїда, тому її називають *групоїдом еквівалентності* цього класу [61, 245]. Див., наприклад, [61, 245, 251, 277] щодо означення нормалізованих класів та інших пов'язаних понять. Можна сказати, що гру-

[3.1]Існує й інша термінологія для цього поняття, наприклад, "структурна група еквівалентності" [264]. Атрибути "звичайна" і "псевдо-" як правило прийнято опускати для звичайної псевдогрупи еквівалентності. Також атрибут "нормалізований" вживаємо без додаткових уточнень у випадку точкової нормалізованості у звичайному сенсі.

[3.2]*Допустимим (точковим) перетворенням* класу диференціальних рівнянь називають трійку вигляду $(\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{T})$. Тут $\mathcal{E}$ та $\tilde{\mathcal{E}}$ — рівняння з заданого класу, або, що еквівалентно, відповідні значення довільних елементів, які параметризують цей клас. Елемент $\mathcal{T}$ у допустимому перетворенні — точкове перетворення, що відображає рівняння $\mathcal{E}$ у рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$.

[3.3]Тут також варто згадати про внесок Г.Г. Альфана (G.H. Halphen) [159], Е. Лагера (E. Laguerre) [182], А.Р. Форсайта (A.R. Forsyth) [135] та Е.Ю. Вілкзицького (E.J. Wilczynski) [287] у дослідженні точкових перетворень між лінійними ЗДР.

поїд еквівалентності $\mathcal{G}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}$ з $r \geqslant 3$ породжує його група еквівалентності $G^{\sim}$.

Вивчення класу $\mathcal{L}$ лінійних ЗДР $r$-го порядку ($r \geqslant 2$) розпочнемо з опису його групоїда еквівалентності у термінах нормалізованості. Довільні елементи класу $\mathcal{L}$ можна калібрувати параметризованими сім'ями перетворень з $G^{\sim}$, що призводить до відображення класу $\mathcal{L}$ у його підкласи. Два таких калібрування пов'язані з похідними порядку $r-1$ та $r-2$ і є добре відомими. Результатом таких калібрувань є раціональна форма з нульовим коефіцієнтом при похідній $n-1$ порядку (підклас $\mathcal{L}_1$) та форма Лагера–Форсайта з нульовими коефіцієнтами при похідних $r-1$ та $r-2$ порядку (підклас $\mathcal{L}_2$). При $r \geqslant 3$ обидва підкласи $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_2$ також нормалізовані відносно своїх груп еквівалентності. Далі розглянуто два калібрування, що пов'язані з похідними найнижчого порядку і призводять до першої та другої форм Арнольда. Відповідні підкласи не є навіть напівнормалізованими, а тому такі калібрування непридатні для симетрійного аналізу. Маючи послідовність нормалізованих класів $\mathcal{L} \supset \mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2$ для $r \geqslant 3$ і відповідну послідовність класів однорідних рівнянь, які є лише напівнормалізованими, можна прокласифікувати ліївські симетрії лінійних ЗДР $r$-го порядку за допомогою алгебраїчного підходу трьома різними способами.Також досліджено узагальнені розширені групи еквівалентності згаданих вище класів лінійних однорідних ЗДР і покращено властивості нормалізованості цих класів за допомогою репараметризації. На завершення підсумовано отримані результати й обговорено їхній зв'язок із можливими методами групової класифікації систем лінійних ЗДР.

Результати цього параграфу опубліковано у роботах [90, 91, 94–96].

**Групоїди еквівалентності класів лінійних ЗДР.** Розглянемо клас $\mathcal{L}$ лінійних ЗДР $r$-го порядку ($r \geqslant 2$) вигляду

$$x^{(r)} + a_{r-1}(t)x^{(r-1)} + \dots + a_1(t)x^{(1)} + a_0(t)x = b(t), \tag{3.27}$$

де $a_{r-1}$, …, $a_1$, $a_0$ та $b$ — довільні гладкі функції змінної $t$, $x = x(t)$ — невідома функція, $x^{(k)} = \mathrm{d}^k x/\mathrm{d}t^k$, $k = 1, \dots, r$, і $x^{(0)} := x$. Далі використовуємо також позначення $x' = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ та $x'' = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ для похідних першого і другого порядків відповідно. Через нижні індекси $t$ і $x$ позначено диференціювання за відповідною змінною. Вважаємо, що всі змінні, функції та інші значення є або дійсними, або комплексними, тобто базове поле $\mathbb{F}$ є відповідно або $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, або $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Весь розгляд проведено в локальному підході.

**Загальний клас.** При дослідженні структури групоїда еквівалентності всього класу $\mathcal{L}$ залежно від значення $r$ виникає два різні випадки, а саме $r = 2$ та $r \geqslant 3$. Розпочнемо розгляд із випадку $r = 2$.

**Твердження 3.28.** *Групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}$ з $r = 2$ складають перетворення, проекції яких на простір змінних*[3.4] *мають вигляд*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X_1(t)x + X_0(t), \tag{3.28}$$

*де $T$, $X_1$, $X_0$ — довільні гладкі функції змінної $t$, причому $T_tX_1 \neq 0$.*

*Доведення.* Розглянемо точкове перетворення $\mathcal{T}$ загального вигляду

$$\tilde{t} = T(t, x), \quad \tilde{x} = X(t, x) \tag{3.29}$$

з ненульовим якобіаном

$$J = |\partial(T, X)/\partial(t, x)| \neq 0,$$

що пов'язує два фіксованих лінійних ЗДР другого порядку $\mathcal{E}$ та $\tilde{\mathcal{E}}$. Підставляємо вирази для нових змінних (з хвильками) і відповідних похідних у старих змінних (без хвильок) у рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$. Отримана рівність має виконуватися тотожно на розв'язках рівняння $\mathcal{E}$. Додатково підставляючи вираз для $x''$, визначений рівнянням $\mathcal{E}$, розщеплюємо тотожність за

[3.4] Оскільки немає нетривіальних калібровочних еквівалентностей для всіх класів лінійних ЗДР, що розглядаються нижче (це не відноситься до репараметризованих класів, що досліджуються в останньому пункті цієї секції), то наведено лише $t$- та $x$-компоненти перетворень, причому кожна така пара повністю визначає відповідні компоненти для довільних елементів. Форма (3.28) є найбільш загальною для всіх перетворень еквівалентності, що виникають. Компоненти для довільних елементів можна отримати з використанням формули Фаа ді Бруно й загального правила Лейбніца, а тому вони дуже громіздкі.

степенями похідної $x'$. Зібравши коефіцієнти при $(x')^3$, отримаємо рівняння

$$X_{xx}T_x - X_xT_{xx} + \tilde{a}_1X_xT_x^2 + (\tilde{a}_0X - \tilde{b})T_x^3 = 0.$$

Оскільки в це рівняння входять лише довільні елементи $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_0$ та $\tilde{b}$ і потрібно обчислити групу еквівалентності, то ці елементи можна варіювати й розщепити за ними. Таким чином, $T_x = 0$, тобто $T = T(t)$. Коефіцієнти при $(x')^2$ задовольняють рівняння $T_tX_{xx} = 0$. Оскільки умова $J \neq 0$ зводиться до нерівності $T_tX_x \neq 0$, маємо, що

$$X = X_1(t)x + X_0(t), \quad X_1 \neq 0.$$

Інші визначальні рівняння, отримані після додаткового розщеплення за $x'$ та $x$, визначають перетворення для компонент довільних елементів як функції від змінних та довільних елементів. □

**Твердження 3.29.** *Групоїд еквівалентності класу $\mathcal{L}$ лінійних ЗДР другого порядку породжено композиціями перетворень із групи еквівалентності $G^{\sim}$ цього класу та перетвореннями з групи точкових симетрій рівняння $x'' = 0$. Іншими словами, клас $\mathcal{L}$ є напівнормалізованим, але не є нормалізованим.*

*Доведення.* Елементарне рівняння $x'' = 0$ інваріантне відносно точкових перетворень, які є дробово-лінійними, але не лінійними відносно $x$ або $t$-компоненти яких залежать від змінної $x$. Кожна з цих властивостей не має місце для перетворень вигляду (3.28). Таким чином, у класі $\mathcal{L}$ існують допустимі перетворення, не породжені його перетвореннями еквівалентності, тобто цей клас не є нормалізованим.

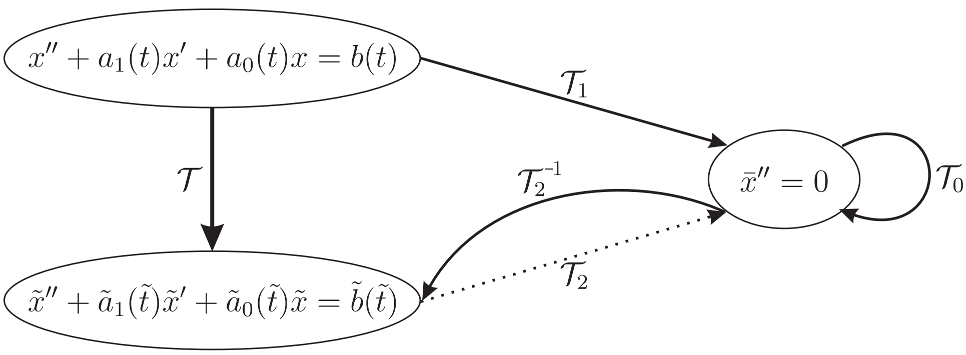
Добре відомо, що будь-яке лінійне ЗДР другого порядку $\mathcal{E}$ можна звести до рівняння $x'' = 0$ точковим перетвореннями еквівалентності — так званими перетвореннями Арнольда

$$\tilde{t} = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}, \quad \tilde{x} = \frac{x - \varphi_0(t)}{\varphi_1(t)}, \tag{3.30}$$

де $\varphi_0$ — частинний розв'язок рівняння $\mathcal{E}$, $\varphi_1$ та $\varphi_2$ — лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння; див., наприклад, [50, с. 43] або [156]. Іншими словами, клас $\mathcal{L}$ є єдиною орбітою своєї групи еквівалентності $G^{\sim}$. Будь-який клас з такою властивістю є напівнормалізованим. Покажемо це детальніше. Розглянемо два фіксованих рівняння $\mathcal{E}_1$ та $\mathcal{E}_2$ з класу $\mathcal{L}$ з $r = 2$ та точкове перетворення $\mathcal{T}$, що пов'язує ці рівняння. Нехай $\mathcal{T}_1$ та $\mathcal{T}_2$ — проекції елементів з $G^{\sim}$ на простір змінних, що відповідно відображають рівняння $\mathcal{E}_1$ та $\mathcal{E}_2$ у рівняння $x'' = 0$. Тоді перетворення $\mathcal{T}_0 := \mathcal{T}_2\mathcal{T}\mathcal{T}_1^{-1}$ належить групі точкових симетрій рівняння $x'' = 0$. Звідси випливає представлення

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_2^{-1}\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1.$$

Таким чином, $\mathcal{T}$ є композицією перетворень еквівалентності $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2^{-1}$ та перетворення симетрії $\mathcal{T}_0$ рівняння $x'' = 0$ (див. рисунок).




Очевидно, що будь-яке перетворення, яке допускає таке представлення, відображає рівняння $\mathcal{E}_1$ у рівняння $\mathcal{E}_2$. Це перетворення можна записати як $\mathcal{T} = \check{\mathcal{T}}\hat{\mathcal{T}}$, де $\check{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_2^{-1}\mathcal{T}_1$ — перетворення еквівалентності класу $\mathcal{L}$ та $\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T}_0\mathcal{T}_1$ — перетворення симетрії рівняння $\mathcal{E}_1$. Це означає, що клас $\mathcal{L}$ є напівнормалізованим. □

**Зауваження 3.30.** Група еквівалентності $G^{\sim}$ породжує всі допустимі перетворення класу $\mathcal{L}$ з $r = 2$, що зберігають розшарування на незалежні й залежні змінні. Це безпосередньо випливає з того, що накладання умови $T_x = 0$ на допустимі перетворення призводить до умови $X_{xx} = 0$.

Розглянемо клас $\mathcal{L}$ при $r \geqslant 3$. Хоча проекції перетворень з групи еквівалентності на простір змінних у випадку $r \geqslant 3$ такі самі, як і у випадку $r = 2$, відповідний групоїд еквівалентності має іншу структуру.

**Твердження 3.31.** *Групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}$ з $r \geqslant 3$ складають перетворення, проекції яких на простір змінних мають вигляд* (3.28)*. Ця група породжує весь групоїд еквівалентності класу $\mathcal{L}$, тобто клас $\mathcal{L}$ є нормалізованим.*

*Доведення.* Для дослідження допустимих перетворень у класі $\mathcal{L}$ розглянемо пару рівнянь з цього класу, а саме рівняння $\mathcal{E}$ вигляду (3.27) і рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$ такого самого вигляду, у якому всі змінні, похідні й довільні елементи з хвильками, і припускаємо, що ці рівняння пов'язані точковим перетворенням $\mathcal{T}$ загального вигляду (3.29). Спочатку виразимо похідні з хвильками через змінні без хвильок:

$$\tilde{x}^{(k)} = \left(\frac{1}{DT}D\right)^k X,$$

де $D = \partial_t + x'\partial_x + x''\partial_{x'} + \cdots$ — оператор повної похідної за змінною $t$. Після підстановки виразів для змінних і похідних у $\tilde{\mathcal{E}}$ з хвильками, отримаємо рівняння без змінних з хвильками. Це рівняння має бути тотожністю на многовиді, визначеному рівнянням $\mathcal{E}$ у просторі струменів $r$-го порядку незалежної змінної $t$ і залежної змінної $x$. Коефіцієнт при $x''x^{(r-1)}$ у цьому рівнянні дорівнює

$$-\frac{J}{(DT)^{r+2}}T_x\left(3 + \frac{(r-2)(r+3)}{2}\right) = 0,$$

а тому $T_x = 0$, тобто функція $T$ не залежить від змінної $x$: $T = T(t)$. При цьому умова невиродженості $J \neq 0$ спрощується до $T_tX_x \neq 0$. Враховуючи рівність $T_x = 0$, збираємо коефіцієнти при $x'x^{(r-1)}$, що дає

$$rT_t^{-r}X_{xx} = 0.$$

Звідси випливає, що $X_{xx} = 0$, тобто $X$ є лінійною функцією змінної $x$: $X = X_1(t)x + X_0(t)$. Таким чином, перетворення $\mathcal{T}$ має вигляд (3.28). Інші визначальні рівняння, побудовані розщепленням за похідними змінної $x$ після підстановки виразу для $x^{(r)}$ з рівняння $\mathcal{E}$, визначають співвідношення між довільними елементами початкового й перетвореного рівнянь.

Перетворення $\mathcal{T}$ відображає будь-яке рівняння з класу $\mathcal{L}$ у рівняння з цього ж класу, а його продовження на довільні елементи $a_{r-1}, \dots, a_0$, $b$, визначене зазначеними співвідношеннями, є точковим перетворенням в об'єднаному просторі змінних і довільних елементів. Тому такі продовження перетворень вигляду (3.28) утворюють (звичайну) групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}$. Оскільки будь-яке допустиме перетворення у класі $\mathcal{L}$ породжено перетворенням з $G^{\sim}$, цей клас є нормалізованим. $\square$

Розглянемо відповідний підклас $\widehat{\mathcal{L}}$ лінійних однорідних ЗДР $r$-го порядку ($r \geqslant 2$), виокремлений з класу $\mathcal{L}$ умовою $b = 0$. Довільний елемент $b$ можна відкалібрувати до нуля перетвореннями еквівалентності. А саме, клас $\mathcal{L}$ можна відобразити в його підклас $\widehat{\mathcal{L}}$ за допомогою сім'ї точкових перетворень з $T = t$, $X^1 = 1$, а $X^0$ — частинний розв'язок початкового рівняння, а тому ці перетворення параметризовані функцією $b$.

**Наслідок 3.32.** *Групу еквівалентності $\widehat{G}^{\sim}$ підкласу $\widehat{\mathcal{L}}$ складають перетворення, які можна формально отримати з елементів групи еквівалентності $G^{\sim}$ класу $\mathcal{L}$, поклавши $X_0 = 0$ і опустивши компоненту для $b$.*

**Наслідок 3.33.** *Підклас $\widehat{\mathcal{L}}$ при $r = 2$ є орбітою елементарного рівняння $x'' = 0$ під дією групи еквівалентності $\widehat{G}^{\sim}$. Звідки підклас $\widehat{\mathcal{L}}$ є напівнормалізованим, але не є нормалізованим.*

**Наслідок 3.34.** *Точкове перетворення відображає рівняння $\mathcal{E}$ з підкласу $\widehat{\mathcal{L}}$ при $r \geqslant 3$ у рівняння з цього ж підкласу тоді й лише тоді, коли це перетворення має вигляд* (3.28)*, де відношення $X_0/X_1$ є розв'язком рівняння $\mathcal{E}$.*

Іншими словами, трансформаційну частину будь-якого допустимого перетворення в класі $\widehat{\mathcal{L}}$ з $r \geqslant 3$ можна представити як композицію перетворення симетрії початкового рівняння, пов'язаного з лінійним принципом суперпозиції, з проекцією елемента групи еквівалентності $\widehat{G}^{\sim}$ на простір змінних. Для всіх рівнянь з класу $\widehat{\mathcal{L}}$ відповідні групи точкових симетрій, що пов'язані з лінійним принципом суперпозиції, мають однакову структуру. Зокрема, вони комутативні та $r$-вимірні. Таким чином, хоча клас $\widehat{\mathcal{L}}$ не є нормалізованим, він є напівнормалізованим у дуже специфічний спосіб, який є частинним випадком так званої *однорідної напівнормалізації*[3.5]. У подібних ситуаціях коротко казатимемо, що клас однорідно напівнормалізований відносно лінійної суперпозиції розв'язків.

**Раціональна форма.** За допомогою параметризованих сімей перетворень з групи еквівалентності $G^{\sim}$ можна калібрувати довільні елементи класу $\mathcal{L}$. Наприклад, можна покласти

$$a_{r-1} = 0$$

за допомогою параметризованої сім'ї проекцій перетворень еквівалентності на $(t, x)$-простір

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \exp\left(\frac{1}{r}\int a_{r-1}(t)\mathrm{d}t\right)x, \tag{3.31}$$

яка відображає клас $\mathcal{L}$ у підклас $\mathcal{L}_1$ рівнянь у *раціональній формі*

$$x^{(r)} + a_{r-2}(t)x^{(r-2)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t), \tag{3.32}$$

де хвильки над змінними та довільними елементів опущено. Цю форму використано у роботах [174, 196] для групової класифікації лінійних ЗДР у рамках стандартного підходу, що базується на дослідженні сумісності системи визначальних рівнянь.

[3.5] Аналогічні властивості відомі для класів однорідних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, для яких відповідні класи (у загальному) неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є нормалізованими [252].

**Твердження 3.35.** *Групу еквівалентності $G_1^\sim$ підкласу $\mathcal{L}_1$ складають перетворення, проекції яких на простір змінних мають вигляд*[3.6]

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = C(T_t(t))^{\frac{r-1}{2}}x + X_0(t), \tag{3.33}$$

*де $T$ та $X_0$ — довільні гладкі функції змінної $t$ з $T_t \neq 0$, а $C$ — довільна ненульова стала. Підклас $\mathcal{L}_1$ при $r = 2$ є напівнормалізованим. Якщо $r \geqslant 3$, то група $G_1^\sim$ породжує групоїд еквівалентності цього підкласу, тобто підклас є нормалізованим.*

*Доведення.* У випадку $r = 2$, повторимо кроки доведення твердження 3.28 й отримаємо (3.28) для перетворень еквівалентності підкласу $\mathcal{L}_1$. Збираючи коефіцієнти при $x'$ та $x$, додатково маємо рівняння

$$\frac{X_1}{T_t^2}\left(\frac{X_{1,t}}{X_1} - \frac{1}{2}\frac{T_{tt}}{T_t}\right) = 0,$$

інтегрування якого дає вираз $X_1 = CT_t^{\frac{1}{2}}$ з довільною ненульовою сталою $C$, а також компоненти перетворень еквівалентності для довільних елементів $a_0$ та $b$ підкласу $\mathcal{L}_1$ з $r = 2$. Напівнормалізованість цього підкласу можна довести аналогічно твердженню 3.29.

У випадку $r \geqslant 3$ опишемо весь групоїд еквівалентності. Нехай маємо рівняння $\mathcal{E}$ вигляду (3.32) і рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$ такого самого вигляду, але де всі змінні, похідні та довільні елементи з хвильками, причому ці рівняння пов'язано точковим перетворенням $\mathcal{T}$. З огляду на твердження 3.31 це перетворення має вигляд (3.28). Виразимо змінні й відповідні похідні з хвильками через змінні й похідні без хвильок, підставимо ці вирази у рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$, потім виключимо похідну $x^{(r)}$ з урахуванням рівняння $\mathcal{E}$ і зберемо члени з похідною $x^{(r-1)}$. У результаті отримаємо

$$r\frac{X_1}{T_t^r}\left(\frac{X_{1,t}}{X_1} - \frac{r-1}{2}\frac{T_{tt}}{T_t}\right)x^{(r-1)}.$$

[3.6] Для парних $r$ степінь функції $T_t$ у виразі для $\tilde x$ є напівцілим. Тому у дійсному випадку замість цієї функції треба використовувати її модуль, а у комплексному — зафіксувати гілку квадратного кореня.

Коефіцієнт при $x^{(r-1)}$ є нулевим лише тоді, коли $X_1 = C{T_t}^{\frac{r-1}{2}}$, де $C$ — довільна ненульова стала. Отже, точкове перетворення $\mathcal{T}$ має вигляд (3.33). Аналогічно доведенню твердження 3.31 можна показати, що перетворення такого вигляду, продовжені на довільні елементи $a_{r-2}$, …, $a_0$ та $b$, складають групу еквівалентності $G_1^{\sim}$ підкласу $\mathcal{L}_1$. □

Статус і властивості підкласу $\widehat{\mathcal{L}}_1$ однорідних рівнянь з класу $\mathcal{L}_1$ такі самі, як і підкласу $\widehat{\mathcal{L}}$ відносно класу $\mathcal{L}$.

**Наслідок 3.36.** *Групу еквівалентності $\widehat{G}_1^{\sim}$ підкласу $\widehat{\mathcal{L}}_1$ складають перетворення, які можна формально отримати з елементів групи еквівалентності $G_1^{\sim}$ класу $\mathcal{L}_1$, поклавши $X_0 = 0$ і опустивши компоненту для $b$.*

Групоїд еквівалентності підкласу $\widehat{\mathcal{L}}_1$ залежно від значення $r$ вичерпно описують такі два твердження.

**Наслідок 3.37.** *Якщо $r = 2$, то підклас $\widehat{\mathcal{L}}_1$ є напівнормалізованим, але не є нормалізованим, оскільки він є орбітою елементарного рівняння $x'' = 0$ під дією групи $\widehat{G}_1^{\sim}$.*

**Наслідок 3.38.** *Для кожного рівняння $\mathcal{E}$ з підкласу $\widehat{\mathcal{L}}_1$ при $r \geqslant 3$ точкове перетворення є трансформаційною частиною допустимого перетворення в $\widehat{\mathcal{L}}_1$ з початком у $\mathcal{E}$ тоді й лише тоді, коли воно має вигляд (3.33), де ${T_t}^{-\frac{r-1}{2}}X_0$ — розв'язок рівняння $\mathcal{E}$. Іншими словами, підклас $\widehat{\mathcal{L}}_1$ є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків.*

**Форма Лагера–Форсайта.** Перетворення з $G_1^{\sim}$ параметризовано довільною функцією $T = T(t)$ з $T_t \neq 0$. Тому в рівнянні (3.32) можна покласти $a_{r-2} = 0$ за допомогою перетворень з групи $G_1^{\sim}$, де параметр-функція $T$ є розв'язком рівняння

$$T_{ttt}T_t - \frac{3}{2}{T_{tt}}^2 + \frac{12}{r(r^2-1)}a_{r-2}{T_t}^4 = 0.$$

Отже, сім'я таких перетворень еквівалентності, параметризована довільним елементом $a_{r-2}$, відображає підклас $\mathcal{L}_1$ у вужчий підклас $\mathcal{L}_2$ рівнянь у *формі Лагера–Форсайта*

$$x^{(r)} + a_{r-3}(t)x^{(r-3)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t). \tag{3.34}$$

Слід зауважити, що на відміну від перетворень (3.31) вказане вище відображення не зберігає відповідний підклас лінійних ЗДР зі сталими коефіцієнтами.

**Твердження 3.39.** *Групу еквівалентності $G_2^{\sim}$ підкласу $\mathcal{L}_2$ при $r \geqslant 2$ складають перетворення, проекції яких на простір змінних мають вигляд*

$$\tilde{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{C}{(\gamma t + \delta)^{r-1}}x + X_0(t), \tag{3.35}$$

*де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $C$ — довільні сталі з $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ і $C \neq 0$, визначені з точністю до очевидного перемасштабування (а тому лише чотири серед них є суттєвими), а $X_0$ — довільна гладка функція змінної $t$. У випадку $r = 2$ підклас $\mathcal{L}_2$ є напівнормалізованим, але не є нормалізованим. Якщо $r \geqslant 3$, то група $G_2^{\sim}$ породжує групоїд еквівалентності цього підкласу, тобто він є нормалізованим.*

*Доведення.* Знову розглянемо випадки $r = 2$ та $r \geqslant 3$ окремо.

При $r = 2$ повторимо доведення твердження 3.28 і відповідну частину доведення твердження 3.35. У результаті отримаємо вигляд (3.28) для перетворень еквівалентності підкласу $\mathcal{L}_2$. Зібравши коефіцієнти при $x$, маємо рівняння

$$\frac{T_{ttt}}{T_t} - \frac{3}{2}\left(\frac{T_{tt}}{T_t}\right)^2 = 0. \tag{3.36}$$

Іншими словами, похідна Шварца функції $T$ дорівнює нулю, тобто функція $T$ є дробово-лінійною,

$$T(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \tag{3.37}$$

де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — довільні сталі з $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, визначені з точністю до ненульового сталого множника. Члени, що залишилися у визначальних рівняннях, визначають компоненту перетворень еквівалентності для довільного елемента $b$ підкласу $\mathcal{L}_2$ з $r = 2$. Напівнормалізованість цього підкласу доводимо як у твердженні 3.29.

Для того, щоб описати весь групоїд еквівалентності підкласу $\mathcal{L}_2$ у випадку $r \geqslant 3$, припустимо, що точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує рівняння $\mathcal{E}$ та $\tilde{\mathcal{E}}$ з класу $\mathcal{L}_2$. (Вважаємо, що всі змінні й довільні елементи у рівнянні $\tilde{\mathcal{E}}$ з хвильками.) Отже, $\mathcal{T}$ має вигляд (3.33). Виразимо похідні з хвильками у термінах $(t, x)$, підставимо отримані вирази у рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$, а потім виключимо $x^{(r)}$ з урахуванням рівняння $\mathcal{E}$. Зібравши коефіцієнти при $x^{(r-2)}$, приходимо до рівняння (3.36), тобто функція $T$ має вигляд (3.37). Далі підставимо вираз для $T$ у рівняння (3.33) і отримаємо перетворення, що відображають будь-яке рівняння з підкласу $\mathcal{L}_2$ у рівняння з цього ж підкласу, причому нові довільні елементи виражаються через старі змінні й старі довільні елементи як при точковому відображенні. Отже, продовження цих перетворень на довільні елементи $a_{r-3}, \ldots, a_0, b$ складають групу еквівалентності $G_2^{\sim}$ підкласу $\mathcal{L}_2$. $\square$

Позначимо через $\widehat{\mathcal{L}}_2$ підклас однорідних рівнянь з класу $\mathcal{L}_2$. Випадок $r = 2$ є особливим щодо трансформаційних властивостей $\widehat{\mathcal{L}}_2$, оскільки тоді єдиним елементом цього підкласу є елементарне рівняння $x'' = 0$. Тому підклас $\widehat{\mathcal{L}}_2$ є нормалізованим, причому його група еквівалентності співпадає з групою точкових симетрій рівняння $x'' = 0$, яку складають дробово-лінійні перетворення в просторі $(t, x)$. Випадок $r \geqslant 3$ для $\widehat{\mathcal{L}}_2$ є аналогічним таким самим випадкам для $\widehat{\mathcal{L}}$ та $\widehat{\mathcal{L}}_1$.

**Наслідок 3.40.** *Групу еквівалентності $\widehat{G}_2^{\sim}$ підкласу $\widehat{\mathcal{L}}_2$ з $r \geqslant 3$ складають перетворення, які можна формально отримати з елементів групи еквівалентності $G_2^{\sim}$ класу $\mathcal{L}_2$, поклавши $X_0 = 0$ і опустивши компоненту для $b$. Підклас $\widehat{\mathcal{L}}_2$ є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків. Більш точно, групоїд еквівалент-*

*ності цього підкласу складають трійки вигляду* $(\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{T})$*, де початкове рівняння* $\mathcal{E}$ *пробігає весь підклас* $\widehat{\mathcal{L}}_2$*, трансформаційна частина* $\mathcal{T}$ *має вигляд* (3.35)*, де* $(\gamma t+\delta)^{r-1}X_0$ *— довільний розв'язок рівняння* $\mathcal{E}$*, а перетворене рівняння визначено як* $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$*.*

**Зауваження 3.41.** Як перетворення еквівалентності, так і допустимі перетворення класів $\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\mathcal{L}}_1$ та $\widehat{\mathcal{L}}_2$ насправді давно відомі завдяки роботам П. Штекеля, Е. Лагера, А.Р. Форсайта та ін.; див., наприклад, [264, § 4.1] і [287, розділ I, § II.4]. Водночас, у цьому параграфі представлено строге формулювання цих результатів, явно описано відповідні групоїди еквівалентності й доведено, що ці класи є нормалізованими при $r \geqslant 3$ і напівнормалізованими при $r=2$.

**Перша форма Арнольда.** Хоча стандартними для довільних елементів класу $\mathcal{L}$ є калібрування коефіцієнтів $a_{r-1}$ та $a_{r-2}$, вони не є єдино можливими. Замість $a_{r-1}$ та $a_{r-2}$ можна калібрувати коефіцієнти $a_0$ та $a_1$. У будь-якому рівнянні з класу $\mathcal{L}$ можна покласти $a_0=0$ за допомогою перетворення Арнольда

$$\tilde t = t, \quad \tilde x = \frac{x}{\varphi_1(t)},$$

де $\varphi_1$ — ненульовий розв'язок відповідного однорідного рівняння. У результаті отримаємо підклас $\mathcal{A}_1$ класу $\mathcal{L}$, утворений рівняннями вигляду

$$x^{(r)} + a_{r-1}(t)x^{(r-1)} + \dots + a_1(t)x^{(1)} = b(t). \tag{3.38}$$

Згідно принципу Арнольда[3.7] назвемо цей вигляд *першою формою Арнольда.*

**Твердження 3.42.** *Групоїд еквівалентності класу* $\mathcal{A}_1$ *з* $r \geqslant 3$ *утворено допустимими перетвореннями, для яких початкове рівняння пробігає весь клас* $\mathcal{A}_1$*, а трансформаційна частина має вигляд*

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = \frac{x}{\psi_1(t)} + X_0(t), \tag{3.39}$$

[3.7]Принцип Арнольда стверджує: якщо деяке поняття має персональне ім'я, то це ім'я не першовідкривача. Принцип Бері розширює принцип Арнольда таким чином: принцип Арнольда поширюється на себе.

*де $T$ та $X_0$ — довільні гладкі функції змінної $t$ з $T_t \neq 0$, а $\psi_1 = \psi_1(t)$ — ненульовий розв'язок однорідного рівняння, асоційованого з початковим рівнянням.*

*Доведення.* Нехай $\mathcal{T}$ — точкове перетворення між рівняннями $\mathcal{E}$ та $\tilde{\mathcal{E}}$ вигляду (3.38). Тоді воно має загальний вигляд (3.28). Оскільки рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$ з класу $\mathcal{A}_1$, то функція $\tilde{\psi}_1 \equiv 1$ є розв'язком відповідного однорідного рівняння. Звідки $\psi_1 = 1/X_1$ є розв'язком однорідного рівняння, асоційованого з рівнянням $\mathcal{E}$. Отже, перетворення $\mathcal{T}$ має вигляд (3.39). □

**Зауваження 3.43.** У випадку $r = 2$ аналогічне твердження справедливе для підгрупоїда групоїда еквівалентності класу $\mathcal{A}_1$, елементи якого зберігають розшарування на незалежні й залежні змінні; див. зауваження 3.30.

**Твердження 3.44.** *Групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$ класу $\mathcal{A}_1$, $r \geqslant 2$, складають перетворення, проекції яких на простір змінних мають вигляд*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = Cx + X_0(t), \tag{3.40}$$

*де $T$ та $X_0$ — довільні гладкі функції змінної $t$ з $T_t \neq 0$, а $C$ — довільна ненульова стала.*

*Доведення.* Проекція будь-якого перетворення з групи $G^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$ на простір змінних має вигляд (3.39). Для $r \geqslant 3$ це є очевидним наслідком твердження 3.42. У випадку $r = 2$ аналогічно доведенню твердження 3.28 спочатку показуємо, що проекції перетворень еквівалентності на простір змінних зберігають розшарування, а далі враховуємо зауваження 3.43.

Зауважимо, що сталі функції є розв'язками будь-якого однорідного рівняння з класу $\mathcal{A}_1$. Тому група $G^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$ включає перетворення, проекції яких простір $(t, x)$ мають вигляд (3.40). Більш того, лише такі перетворення є в групі $G^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$. Справді, розглянемо перетворення $\mathcal{T}$ вигляду (3.39) з $\psi_1 \neq \mathrm{const}$. Тоді існує однорідне рівняння з $\mathcal{A}_1$ для якого функція $\psi_1$ не є розв'язком. Звідки коефіцієнт $\tilde{a}_0$ відповідного перетвореного рівняння є ненульовим. Це означає, що перетворення $\mathcal{T}$ не є проекцією деякого елемента групи $G^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$. $\square$

Позначимо через $\widehat{\mathcal{A}}_1$ підклас, утворений однорідними рівняннями вигляду (3.38), тобто рівняннями, які виокремлено з класу $\mathcal{A}_1$ умовою $b=0$.

**Наслідок 3.45.** *Групу еквівалентності $\widehat{G}^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$ підкласу $\widehat{\mathcal{A}}_1$ з $r\geqslant 2$ складають перетворення, які можна формально отримати з елементів групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$, поклавши $X_0=0$ і опустивши компоненту для $b$. Точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує два рівняння з цього підкласу тоді й лише тоді, коли воно має вигляд* (3.39), *де $\psi_1 X_0$ — розв'язок відповідного початкового рівняння.*

**Наслідок 3.46.** *Класи $\mathcal{A}_1$ та $\widehat{\mathcal{A}}_1$ при $r\geqslant 3$ не є напівнормалізованими.*

*Доведення.* У підкласі $\widehat{\mathcal{A}}_1\subset\mathcal{A}_1$ існує рівняння $\mathcal{E}$, група точкових симетрій якого включає лише перетворення, пов'язані з лінійністю й однорідністю цього рівняння[3.8]. Такі перетворення мають вигляд $\tilde t=t$, $\tilde x=\widehat{C}x+\widehat{X}^0(t)$, де $\widehat{C}$ — довільна ненульова стала, а $\widehat{X}_0$ — довільний розв'язок рівняння $\mathcal{E}$. Композиції перетворень симетрії рівняння $\mathcal{E}$ і проекцій перетворень з $G^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$ (відповідно з $\widehat{G}^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$) на простір змінних мають вигляд (3.40). Водночас рівняння $\mathcal{E}$ має несталий розв'язок. Це означає, що деякі з допустимих перетворень рівняння $\mathcal{E}$ з огляду на твердження 3.44 не можуть бути породжені зазначеними композиціями. $\square$

**Зауваження 3.47.** Аналогічно твердженню 3.29 класи $\mathcal{A}_1$ та $\widehat{\mathcal{A}}_1$ при $r=2$ є напівнормалізованими, але не є нормалізованими, оскільки ці

[3.8] Добре відомо, що подібні рівняння мають подібні групи точкових симетрій. Більш того, будь-яке допустиме перетворення в класі $\widehat{\mathcal{L}}$ відображає точкові симетрії, пов'язані з лінійністю й однорідністю відповідного початкового рівняння, у симетрії такого самого типу для перетвореного рівняння. Тому достатньо знайти рівняння $\widetilde{\mathcal{E}}$ з тривіальними точковими симетріями у класі $\widehat{\mathcal{L}}_2$. Згідно наслідку 3.40, з точністю до точкових симетрій, пов'язаних з лінійністю й однорідністю рівняння $\widetilde{\mathcal{E}}$, його можливі точкові перетворення в класі $\widehat{\mathcal{L}}_2$ вичерпують перетворення вигляду (3.35) з $C=1$ і $X^0=0$. Рівняння, неінваріантні відносно будь-якого з цих перетворень, існують навіть серед рівнянь з класу $\widehat{\mathcal{L}}_2$ з поліноміальними коефіцієнтами.

класи відповідно є орбітами елементарного рівняння $x'' = 0$ відносно груп еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$ та $\widehat{G}^{\sim}_{\mathcal{A}_1}$.

**Друга форма Арнольда.** Використовуючи перетворення вигляду (3.30) з $\varphi_0 = 0$, можна додатково покласти $a_1 = 0$ у будь-якому рівнянні з класу $\mathcal{A}_1$. У такий спосіб клас $\mathcal{A}_1$ (а отже, і весь клас $\mathcal{L}$) відображаємо у підклас $\mathcal{A}_2$, утворений рівняннями вигляду

$$x^{(r)} + a_{r-1}(t)x^{(r-1)} + \cdots + a_2(t)x^{(2)} = b(t), \tag{3.41}$$

який називаємо *другою формою Арнольда.*

**Твердження 3.48.** *Групоїд еквівалентності підкласу $\mathcal{A}_2$ з $r \geqslant 3$ складають допустимі перетворення, для яких початкові рівняння вичерпують цілий клас $\mathcal{A}_2$, а трансформаційні частини мають вигляд*

$$\tilde{t} = \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\psi_1(t)} + X_0(t), \tag{3.42}$$

*де $\psi_1 = \psi_1(t)$ і $\psi_2 = \psi_2(t)$ — довільні лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, асоційованого з відповідним початковим рівнянням, а $X_0$ — довільна гладка функція змінної $t$.*

*Доведення.* Нехай точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує два рівняння $\mathcal{E}$ та $\tilde{\mathcal{E}}$ з класу $\mathcal{A}_2$. Тоді воно має вигляд (3.39). Зауважимо, що функція $\tilde{\psi}_2 = \tilde{t}$ є розв'язком однорідного рівняння, асоційованого з $\tilde{\mathcal{E}}$. Звідки функція $\psi_2 = \psi_1 T$ є розв'язком однорідного рівняння, що відповідає $\mathcal{E}$, тобто $T = \psi_2/\psi_1$. Отже, перетворення $\mathcal{T}$ має вигляд (3.42). □

**Твердження 3.49.** *Групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{A}_2}$ підкласу $\mathcal{A}_2$ з $r \geqslant 3$ складають перетворення, проекції яких на простір змінних мають вигляд*

$$\tilde{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\gamma t + \delta} + X_0(t), \tag{3.43}$$

*де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ та $\delta$ — довільні сталі з $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, а $X_0$ — довільна гладка функція змінної $t$.*

*Доведення.* Будь-яке перетворення з групи $G^{\sim}_{\mathcal{A}_2}$ породжує сім'ю елементів групоїда еквівалентності підкласу $\mathcal{A}_2$, а тому його проекція на простір змінних має вигляд (3.42). Оскільки всі лінійні функції змінної $t$ є розв'язками будь-якого однорідного рівняння з підкласу $\mathcal{A}_2$, то група $G^{\sim}_{\mathcal{A}_2}$ включає перетворення, проекції яких на простір змінних мають вигляд (3.43). Доведемо, що у групі $G^{\sim}_{\mathcal{A}_2}$ немає інших перетворень, тобто перетворення $\mathcal{T}$ вигляду (3.42) не є перетворенням еквівалентності класу $\mathcal{A}_2$, якщо хоча б одна з параметр-функцій $\psi_1$ або $\psi_2$ є нелінійною функцією змінної $t$.

Розглянемо спочатку випадок, коли нелінійною є функція $\psi_1$. Візьмемо однорідне рівняння $\mathcal{E}$ з підкласу $\mathcal{A}_2$, яке функція $\psi_1$ не задовольняє. Тоді відповідне перетворене рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$ не допускає ненульових сталих розв'язків, а тому його коефіцієнт $\tilde{a}_0$ не є нульовим. Це означає, що рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$ не належить до підкласу $\mathcal{A}_2$, що й доводить твердження.

Розглянемо тепер комплементарний випадок, де функція $\psi_1$ є лінійною, а функція $\psi_2$ — нелінійна. Тоді існує однорідне рівняння $\mathcal{E}$ вигляду (3.41), яке функція $\psi_2$ не задовольняє. Оскільки $\psi_1$ — розв'язок рівняння $\mathcal{E}$, то сталі функції задовольняють відповідне перетворене рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$, а тому його коефіцієнт $\tilde{a}_0$ дорівнює нулю. Більш того, функція $\tilde{\psi}_2 \equiv \tilde{t}$ не є розв'язком рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$, а отже його коефіцієнт $\tilde{a}_1$ — ненульовий. Таким чином, рівняння $\tilde{\mathcal{E}}$ не належить підкласу $\mathcal{A}_2$. Це завершує доведення. $\square$

Трансформаційні властивості підкласу $\widehat{\mathcal{A}}_2$ однорідних рівнянь з $\mathcal{A}_2$ при $r \geqslant 3$ аналогічні властивостям класу $\widehat{\mathcal{A}}_1$.

**Наслідок 3.50.** *Групу еквівалентності $\widehat{G}^{\sim}_{\mathcal{A}_2}$ підкласу $\widehat{\mathcal{A}}_2$ з $r \geqslant 3$ складають перетворення, які можна формально отримати з елементів групи еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{A}_2}$, поклавши $X_0 = 0$ і опустивши компоненту для $b$. Точкове перетворення пов'язує два рівняння з цього підкласу тоді й лише тоді, коли воно має вигляд* (3.42)*, де $\psi_1 X_0$ — розв'язок відповідного початкового рівняння.*

**Наслідок 3.51.** *Класи* $\mathcal{A}_2$ *та* $\widehat{\mathcal{A}}_2$ *при* $r \geqslant 3$ *не є напівнормалізованими.*

*Доведення.* Аналогічно доведенню наслідку 3.46 розглянемо допустиме перетворення $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{T})$ у класі $\widehat{\mathcal{A}}_2 \subset \mathcal{A}_2$, де групу точкових симетрій рівняння $\mathcal{E}_1$ складають лише перетворення, пов'язані з його лінійністю і однорідністю, а розв'язок $\psi_1$ цього рівняння у представленні (3.42) для $\mathcal{T}$ не є лінійним відносно змінної $t$: $\psi_1'' \neq 0$, причому $\mathcal{E}_2 = \mathcal{T}(\mathcal{E}_1)$. Композиції перетворень точкової симетрії рівняння $\mathcal{E}_1$ з проекціями перетворень з $G^{\sim}_{\mathcal{A}_2}$ (відповідно з $\widehat{G}^{\sim}_{\mathcal{A}_2}$) на простір змінних мають вигляд (3.43). Отже, допустиме перетворення $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{T})$ не може бути породжене однією із зазначених композицій. □

**Зауваження 3.52.** При $r = 2$ класи $\mathcal{A}_2$ та $\widehat{\mathcal{A}}_2$ відповідно співпадають з класами $\mathcal{L}_2$ та $\widehat{\mathcal{L}}_2$.

**Групова класифікація.** Як зазначалося, будь-яке лінійне ЗДР другого порядку можна звести точковим перетворенням до елементарного рівняння $x'' = 0$ (див., наприклад, [186]), яке допускає восьмивимірну алгебру лiївської інваріантності

$$\langle \partial_t,\ \partial_x,\ t\partial_t,\ x\partial_t,\ t\partial_x,\ x\partial_x,\ tx\partial_t + x^2\partial_x,\ t^2\partial_t + tx\partial_x \rangle.$$

Це дає вичерпну групову класифікацію лінійних ЗДР другого порядку.

Нехай $r \geqslant 3$. Згідно класичного результату Софуса Лі [189, с. 296–298] розмірність алгебри лiївської інваріантності ЗДР $r$-го порядку при $r \geqslant 3$ не перевищує $r + 4$. Набагато пізніше цей результат частково передоведено в роботах [174, 196], причому лише для лінійних ЗДР.

Будь-яке неоднорідне лінійне ЗДР можна звести до відповідного однорідного рівняння за допомогою перетворення з групи еквівалентності $G^{\sim}$. Клас $\mathcal{L}$ з $r \geqslant 3$ є нормалізованим, а його підклас $\widehat{\mathcal{L}}$ однорідних рівнянь є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків. Тому для групової класифікації класу $\mathcal{L}$ достатньо розв'язати аналогічну проблему для підкласу $\widehat{\mathcal{L}}$.

Розглянемо лінійне однорідне ЗДР $\mathcal{E}$ $r$-го порядку. Внаслідок лінійності, що призводить до лінійного принципу суперпозиції, це рівняння допускає $r$-вимірну абелеву алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}_{\mathrm{a}}$, породжену векторними полями

$$\varphi_1(t)\partial_x,\ \varphi_2(t)\partial_x,\ \dots,\ \varphi_r(t)\partial_x, \tag{3.44}$$

де функції $\varphi_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, \dots, r$, утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння $\mathcal{E}$. Внаслідок однорідності рівняння $\mathcal{E}$ також інваріантне відносно однопараметричної групи масштабних перетворень, породженої векторним полем $x\partial_x$. Отже, кожне рівняння $\mathcal{E}$ з підкласу $\widehat{\mathcal{L}}$ допускає $(r+1)$-вимірну алгебру ліївської інваріантності

$$\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}_0 = \langle x\partial_x,\ \varphi_1(t)\partial_x,\ \varphi_2(t)\partial_x,\ \dots,\ \varphi_r(t)\partial_x\rangle. \tag{3.45}$$

З наслідку 3.34 випливає, що будь-який оператор $Q$ ліївської симетрії рівняння $\mathcal{E}$ має вигляд

$$Q = \tau(t)\partial_t + (\xi_1(t)x + \xi_0(t))\partial_x,$$

де $\tau$, $\xi_1$, $\xi_0$ — гладкі функції змінної $t$, причому $\xi_0$ є розв'язком рівняння $\mathcal{E}$. Таким чином, максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}$ рівняння $\mathcal{E}$ містить підалгебру $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}_0$ як ідеал. Тому групова класифікація класу $\mathcal{L}$ означає класифікацію з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності фактор-алгебр $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}/\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}_0$, де $\mathcal{E}$ пробігає весь клас $\mathcal{L}$.

Нижче проведемо групову класифікацію лінійних ЗДР трьома різними способами, що відповідно базуються на формі Лагера–Форсайта (3.34), раціональній формі (3.32) та загальній формі (3.27) разом із ліївською класифікацією скінченновимірних алгебр Лі над векторними полями у просторі двох змінних.

**Перший спосіб: форма Лагера–Форсайта.** Групову класифікацію класу $\widehat{\mathcal{L}}$ можна звести до групової класифікації його підкласу $\widehat{\mathcal{L}}_2$ однорідних лінійних ЗДР $r$-го порядку у формі Лагера–Форсайта, який виокремлено з класу $\widehat{\mathcal{L}}$ умовою $a_{r-1} = a_{r-2} = 0$. Дійсно, обидва довільні елементи $a_{r-1}$ та $a_{r-2}$ можна відкалібрувати до нуля за допомогою сім'ї точкових перетворень, параметризованої цими довільними елементами та асоційованої з перетвореннями еквівалентності. Більш того, рівняння з класу $\widehat{\mathcal{L}}$ є $\widehat{G}^{\sim}$-еквівалентними тоді й лише тоді, коли їх образи в класі $\widehat{\mathcal{L}}_2$ є $\widehat{G}_2^{\sim}$-еквівалентними.

Згідно наслідку 3.40 клас $\widehat{\mathcal{L}}_2$ не є нормалізованим. Водночас, цей клас є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків (тобто відносно груп симетрій цих рівнянь, пов'язаних з лінійною суперпозицією їхніх розв'язків). Цього достатньо для застосування сучасної версії алгебраїчного методу до групової класифікації класу $\widehat{\mathcal{L}}_2$. Групу еквівалентності $\widehat{G}_2^{\sim}$ класу $\widehat{\mathcal{L}}_2$ складають перетворення, проекції яких на простір змінних мають вигляд (3.35) з $X_0 = 0$. Масштабування змінної $x$ утворюють ядро групи $\widehat{G}_2^{\cap}$ класу $\widehat{\mathcal{L}}_2$, оскільки лише вони є спільними точковими перетвореннями симетрії для всіх рівнянь з $\widehat{\mathcal{L}}_2$. Шляхом тривіального продовження на довільні елементи групу $\widehat{G}_2^{\cap}$ можна вкласти в $\widehat{G}_2^{\sim}$ як нормальну підгрупу. Фактор-групу $\widehat{G}_2^{\sim}/\widehat{G}_2^{\cap}$ ототожнюємо з підгрупою $H$ групи $\widehat{G}_2^{\sim}$, виокремленою умовою $C = 1$, де додатково вираз $\alpha\delta - \beta\gamma$ дорівнює 1 або $\pm 1$ у випадках, відповідно, комплексного ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$) або дійсного ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$) полів. З точністю до точкових перетворень симетрії, асоційованих з принципом лінійної суперпозиції чи однорідністю, тобто з алгеброю $\mathfrak{g}_0^{\mathcal{E}}$, усі допустимі перетворення рівняння $\mathcal{E}$ з класу $\widehat{\mathcal{L}}_2$ вичерпують проекції елементів підгрупи $H$ на простір змінних. Підгрупа $H$ ізоморфна проективній загальній лінійній групі $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F})$ дробово-лінійних перетворень змінної $t$.

Таким чином, усі можливі розширення ліївської симетрії у класі $\widehat{\mathcal{L}}_2$ обов'язково пов'язані з підгрупами групи $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F})$. В інфінітезимальних термінах, максимальна алгебра ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{E}$ є напівпрямою сумою алгебри $\mathfrak{g}_0^{\mathcal{E}}$ і деякої підалгебри реалізації алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$, породженої векторними полями

$$\mathcal{P} = \partial_t, \quad \mathcal{D} = t\partial_t + \tfrac{1}{2}(r-1)x\partial_x, \quad \mathcal{K} = t^2\partial_t + (r-1)tx\partial_x.$$

Підалгебри алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ добре відомі (див., наприклад, [234] або додаток у [249]). З точністю до внутрішніх автоморфізмів алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, повний список її підалгебр вичерпують нульова підалгебра $\{0\}$, одновимірна підалгебра $\langle\mathcal{P}\rangle$, $\langle\mathcal{D}\rangle$ і, лише для $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\langle\mathcal{P}+\mathcal{K}\rangle$[3.9], двовимірна підалгебра $\langle\mathcal{P},\,\mathcal{D}\rangle$, а також вся алгебра $\langle\mathcal{P},\,\mathcal{D},\,\mathcal{K}\rangle$. Еквівалентність підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ добре узгоджена з еквівалентністю рівнянь у класі $\widehat{\mathcal{L}}_2$.

Підалгебра $\{0\}$ відповідає загальному випадку без розширень.

Для одновимірних розширень алгебр вигляду (3.45) підалгебрами $\langle\mathcal{P}\rangle$, $\langle\mathcal{D}\rangle$ і $\langle\mathcal{P}+\mathcal{K}\rangle$ відповідні рівняння з класу $\widehat{\mathcal{L}}_2$ мають вигляд

$$x^{(r)}+c_{r-3}x^{(r-3)}+\dots+c_1x'+c_0x=0, \tag{3.46}$$

$$x^{(r)}+c_{r-3}t^{-3}x^{(r-3)}+\dots+c_1t^{-r+1}x'+c_0t^{-r}x=0, \tag{3.47}$$

$$x^{(r)}+q_{r-3}(t)x^{(r-3)}+\dots+q_1(t)x'+q_0(t)x=0, \tag{3.48}$$

де $c_0,\dots,c_{r-3}$ — довільні сталі,

$$q_{r-3}(t)=\frac{c_{r-3}}{(1+t^2)^3},$$
$$q_m(t)=\frac{c_m}{(1+t^2)^{r-m}}-\frac{(m+1)(r-m-1)}{(1+t^2)^{r-m}}\int\big(1+t^2\big)^{r-m-1}q_{m+1}(t)\mathrm{d}t,$$
$$m=r-4,\dots,0,$$

і невизначений інтеграл означає фіксовану первісну. За допомогою точкових перетворень[3.10]

$$\tilde t=\ln t,\ \tilde x=xt^{-(r-1)/2}\quad\text{та}\quad \tilde t=\operatorname{arctg}t,\ \tilde x=x\big(1+t^2\big)^{-(r-1)/2}$$

максимальні алгебри ліївської інваріантності рівнянь відповідно вигляду (3.47) (відомого як рівняння Ейлера–Коші, чи просто рівняння Ейлера) і вигляду (3.48) можна звести до алгебр

$$\langle\partial_{\tilde t},\ \tilde x\partial_{\tilde x},\ \tilde\varphi_1(\tilde t)\partial_{\tilde x},\ \tilde\varphi_2(\tilde t)\partial_{\tilde x},\ \dots,\ \tilde\varphi_r(\tilde t)\partial_{\tilde x}\rangle. \tag{3.49}$$

[3.9]Підалгебра $\langle\mathcal{P}+\mathcal{K}\rangle$ еквівалентна підалгебрі $\langle\mathcal{P}\rangle$, якщо $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. Тому підалгеброю $\langle\mathcal{P}+\mathcal{K}\rangle$ можна знехтувати, якщо розгляд йде над комплексним полем.

[3.10]У першому перетворенні необхідно підставити $|t|$ замість $t$ у дійсному випадку або фіксувати гілку функції ln та — тільки при парних $r$ — гілку степеневої функції у випадку комплексного поля.

Більш того, зазначені перетворення відображають ці рівняння у рівняння зі сталими коефіцієнтами з класу (3.32), де $a_{r-2} = -\frac{1}{24}r(r^2-1)$ для (3.47) та $a_{r-2} = \frac{1}{6}r(r^2-1)$ для (3.48). Додатково масштабуючи $t$, можна відповідно покласти $a_{r-2} = -1$ та $a_{r-2} = 1$. Отже, будь-яке рівняння з класу $\widehat{\mathcal{L}}_2$, яке допускає $(r+2)$-вимірну алгебра ліївської інваріантності, є еквівалентним однорідному рівнянню зі сталими коефіцієнтами з класу (3.32), в якому $a_{r-2} = 0$, $a_{r-2} = -1$ або $a_{r-2} = 1$ відповідно для (3.46), (3.47) або (3.48).

Якщо рівняння з класу $\widehat{\mathcal{L}}_2$ допускає $(r+3)$-вимірну алгебру ліївської інваріантності

$$\langle \partial_t,\ t\partial_t + \tfrac{1}{2}(r-1)x\partial_x,\ x\partial_x,\ \varphi_1(t)\partial_x,\ \varphi_2(t)\partial_x,\ \dots,\ \varphi_r(t)\partial_x \rangle,$$

то воно має вигляд $x^{(r)} = 0$ і його максимальна алгебра ліївської інваріантності є $(r+4)$-вимірною алгеброю

$$\begin{aligned}&\langle \partial_t,\ t\partial_t + \tfrac{1}{2}(r-1)x\partial_x,\ t^2\partial_t + (r-1)tx\partial_x,\ x\partial_x,\\ &\quad \varphi_1(t)\partial_x,\ \varphi_2(t)\partial_x,\ \dots,\ \varphi_r(t)\partial_x \rangle.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Оскільки функції $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ утворюють фундаментальну систему розв'язків елементарного рівняння $x^{(r)} = 0$, можна вибрати $\varphi_i = t^{i-1}$, $i = 1, \dots, r$. Отже, не існує лінійного ЗДР $r$-го порядку, максимальна алгебра ліївської інваріантності якого була б $(r+3)$-вимірною. Більш того, якщо таке рівняння допускає $(r+4)$-вимірну алгебру ліївської інваріантності, то воно еквівалентне елементарному рівнянню $x^{(r)} = 0$ відносно точкового перетворення вигляду (3.28).

**Другий спосіб: раціональна форма.** Розглянемо тепер підклас $\widehat{\mathcal{L}}_1$ однорідних ЗДР у раціональній формі (3.32). Групову класифікацію класу $\widehat{\mathcal{L}}$ можна також звести до групової класифікації підкласу $\widehat{\mathcal{L}}_1$, оскільки калібрування $a_{r-1} = 0$, що виокремлює підклас $\widehat{\mathcal{L}}_1$ з класу $\widehat{\mathcal{L}}$, можна виконати за допомогою сім'ї перетворень еквівалентності. Рівняння з класу $\widehat{\mathcal{L}}$ є $\widehat{G}^{\sim}$-еквівалентними тоді й лише тоді, коли їх образи в класі $\widehat{\mathcal{L}}_1$ є

$\widehat{G}_1^{\sim}$-еквівалентними. Більш того, підклас $\widehat{\mathcal{L}}_1$ є однорідно напівнормалізованим відносно лінійної суперпозиції розв'язків.

Будь-яке рівняння $\mathcal{E}$ з класу $\widehat{\mathcal{L}}_1$ допускає $(r{+}1)$-вимірну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_0^{\mathcal{E}}$, яка є ідеалом у максимальній алгебрі ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}$ рівняння $\mathcal{E}$. Водночас, на відміну від форми Лагера–Форсайта, група еквівалентності $\widehat{G}_1^{\sim}$ класу $\widehat{\mathcal{L}}_1$ параметризована однією довільною функцією $T = T(t)$. Із наслідку 3.38 випливає, що алгебру $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}$ містить алгебра $\langle\mathcal{R}(\tau)\rangle + \mathfrak{g}_0^{\mathcal{E}}$, де "+" означає суму векторних просторів,

$$\mathcal{R}(\tau) = \tau(t)\partial_t + \tfrac{1}{2}(r-1)\tau_t(t)x\partial_x,$$

а параметр $\tau$ пробігає множину гладких функцій змінної $t$. Легко перевірити, що

$$[\mathcal{R}(\tau^1), \mathcal{R}(\tau^2)] = \mathcal{R}(\tau^1\tau^2_t - \tau^2\tau^1_t).$$

Звідси $\mathfrak{g}_1^{\mathcal{E}} := \langle\mathcal{R}(\tau)\rangle \cap \mathfrak{g}^{\mathcal{E}}$ є (скінченновимірною) підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}$. Будь-яке векторне поле $\mathcal{R}(\tau)$ повністю визначене його проекцією $\mathrm{pr}_t\mathcal{R}(\tau)$ на простір змінної $t$, $\mathrm{pr}_t\mathcal{R}(\tau) = \tau(t)\partial_t$. Іншими словами, алгебри $\mathfrak{g}_1^{\mathcal{E}}$ та $\mathrm{pr}_t\mathfrak{g}_1^{\mathcal{E}}$ є ізоморфними. Більш того, аналогічна проекція групи еквівалентності підкласу $\widehat{\mathcal{L}}_1$ співпадає з групою всіх локальних дифеоморфізмів у просторі змінної $t$.

Отже, групову класифікацію класу $\widehat{\mathcal{L}}_1$ можна звести до класифікації (локальних) реалізацій скінченновимірних алгебр Лі векторними полями у просторі однієї змінної $t$. Ця класифікація добре відома й виконана ще Софусом Лі. Повний список нееквівалентних реалізацій на прямій вичерпують алгебри $\{0\}$, $\langle\partial_t\rangle$, $\langle\partial_t,\, t\partial_t\rangle$ і $\langle\partial_t,\, t\partial_t,\, t^2\partial_t\rangle$, які визначають $\{0\}$, $\langle\mathcal{P}\rangle$, $\langle\mathcal{P},\, \mathcal{D}\rangle$ і $\langle\mathcal{P},\, \mathcal{D},\, \mathcal{K}\rangle$ як можливі нееквівалентні розширення алгебр ліївських симетрій для рівнянь з класу $\widehat{\mathcal{L}}_1$. Тут $\mathcal{P} = \mathcal{R}(1)$, $\mathcal{D} = \mathcal{R}(t)$, $\mathcal{K} = \mathcal{R}(t^2)$ — ті самі оператори, що й у першому способі. Якщо рівняння $\mathcal{E}$ допускає двовимірне розширення $\langle\mathcal{P},\, \mathcal{D}\rangle$, то воно співпадає з елементарним рівнянням $x^{(r)} = 0$, яке допускає тривимірне розширення $\langle\mathcal{P},\, \mathcal{D},\, \mathcal{K}\rangle$, а тому двовимірне розширення є неналежним. Таким чином, маємо три нееквівалентних випадки розширення ліївської симетрії для класу $\mathcal{L}$, а саме:

- загальний випадок без розширень;
- рівняння зі сталими коефіцієнтами, що допускають одновимірне розширення $\langle\mathcal{P}\rangle$;
- елементарне рівняння $x^{(r)}=0$, що допускає тривимірне розширення $\langle\mathcal{P},\,\mathcal{D},\,\mathcal{K}\rangle$.

**Третій спосіб: рівняння загального вигляду.** Групову класифікацію всього класу $\widehat{\mathcal{L}}$ можна також отримати прямо з класифікації Лі реалізацій скінченновимірних алгебр Лі векторними полями у просторі двох дійсних або комплексних змінних [186, 187]. Сучасну інтерпретацію цих результатів представлено, наприклад, у роботах [157, 215, 221, 224]. Для групової класифікації класу $\widehat{\mathcal{L}}$ відберемо з класифікації Лі реалізацій, які придатні як максимальні алгебри ліївської інваріантності рівнянь з класу $\widehat{\mathcal{L}}$. Усі такі реалізації повинні задовольняти очевидним властивостям, які зберігаються при точкових перетвореннях:

- Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}$ будь-якого лінійного ЗДР $\mathcal{E}$ $r$-го порядку ($r\geqslant 3$) містить $(r{+}1)$-вимірний майже абелевий ідеал $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}_0$. Точніше, ідеал $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}_0$ є напівпрямою сумою $r$-вимірного абелевого ідеалу $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}_{\mathrm{a}}$ всієї алгебри $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}$ і лінійної оболонки векторного поля $x\partial_x$, приєднана дія якого на ідеал $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}_{\mathrm{a}}$ є тотожним оператором.
- Ідеал $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}_0$ є нетранзитивною алгеброю Лі векторних полів, причому $\operatorname{rank}\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}_0=1$.

Цим властивостям задовольняють лише чотири сім'ї реалізацій 21, 23, 26, 28 з [157, таблиця 1] (або сім'ї реалізацій 3.2, 1.6, 1.9, 1.11 з [224, с. 472–473], або сім'ї реалізацій 49, 51, 54, 56 з [215, таблиця 1.1] відповідно). Як і у двох попередніх способах, серед лінійних ЗДР $r$-го порядку лише елементарне рівняння $x^{(r)} = 0$ допускає третю реалізацію. Водночас, це рівняння допускає також і четверту реалізацію, яка має більшу розмірність, ніж третя реалізація, а тому третьою реалізацією можна знехтувати.

Еквівалентність у рамках вибраних сімей реалізацій добре узгоджена з точковою еквівалентністю лінійних ЗДР. Дійсно, нехай задано дві реалізації, які еквівалентні відносно точкового перетворення $\mathcal{T}$ і $(r{+}1)$-вимірні майже абелеві ідеали яких мають вигляд (3.45). Тоді перетворення $\mathcal{T}$ має вигляд (3.28), де $X_0/X_1$ є лінійною комбінацією параметр-функцій $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ початкової реалізації. Доведення цього твердження базується на двох фактах. Перший факт є тривіальним: відображення, породжене точковим перетворенням між реалізаціями алгебр Лі векторними полями, є ізоморфізмом алгебр Лі та, зокрема, встановлює бієкцію між відповідними нільрадикалами. Другий факт полягає в тому, що нільрадикали придатних реалізацій породжені векторними полями

$$\varphi_1(t)\partial_x,\ \ldots,\ \varphi_r(t)\partial_x,$$

де $\varphi_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$, — лінійно незалежні функції. Цей факт є очевидним для реалізацій, які можна звести до виглядів (3.45) і (3.50). Нехай це не справедливо для деякої реалізації, яку можна звести до вигляду (3.49), де опущено хвильки над усіма змінними. Тоді для деякої сталої $\nu$ відповідний нільрадикал включає векторне поле $\partial_t + \nu x\partial_x$, і з комутаційних співвідношень для елементів нільрадикалу випливає існування сталої нільпотентної матриці $(\mu_{ij})$ такої, що

$$\varphi_i' - \nu\varphi_i = \mu_{i1}\varphi_1 + \cdots + \mu_{ir}\varphi_r.$$

Сталу $\nu$ можна покласти рівною нулю за допомогою точкового перетворення $\bar t = t$, $\bar x = e^{\nu t}x$. Оскільки функції $\varphi_i$ є лінійно незалежними, то з точністю до їх лінійного перекомбінування можна вважати, що матриця $(\mu_{ij})$ співпадає з нільпотентною жордановою клітинкою розмірності

$r\times r$. Тому можна покласти $\varphi_i = t^{i-1}$. Водночас, єдиним рівнянням з класу $\widehat{\mathcal{L}}$, інваріантним відносно алгебри $\langle\partial_x,\, t\partial_x, \dots, t^{r-1}\partial_x\rangle$, є елементарне рівняння $x'' = 0$, але максимальна алгебра ліївської інваріантності цього рівняння має вищу розмірність.

Отже, з використанням алгебраїчного методу групової класифікації у три різні способи передоведено таке твердження (див., наприклад, [174, 196, 224, 264, 290]).

**Твердження 3.53.** *Розмірність максимальної алгебри ліївської інваріантності* $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}$ *лінійного ЗДР* $\mathcal{E}$ $r$*-го порядку* ($r \geqslant 3$) *може приймати лише значення з* $\{r+1, r+2, r+4\}$*. У загальному випадку* $\dim\mathfrak{g}^{\mathcal{E}} = r+1$ *алгебру* $\mathfrak{g}^{\mathcal{E}}$ *вичерпують симетрії, пов'язані з лінійністю рівняння* $\mathcal{E}$*. Якщо* $\dim\mathfrak{g}^{\mathcal{E}} \geqslant r+2$*, то рівняння* $\mathcal{E}$ *еквівалентне лінійному ЗДР зі сталими коефіцієнтами. У випадку* $\dim\mathfrak{g}^{\mathcal{E}} = r+4$ *рівняння* $\mathcal{E}$ *можна звести точковим перетворенням вигляду* (3.28) *до елементарного рівняння* $x^{(r)} = 0$.

**Узагальнені розширені групи еквівалентності.** Для кожного нормалізованого класу, як то $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_2$ при $r \geqslant 3$, його групоїд еквівалентності породжено його (як правило, точковою) групою еквівалентності. Постає питання: чи можна узагальнити поняття груп еквівалентності у такий спосіб, щоб інші класи лінійних ЗДР були нормалізованими у цьому узагальненому сенсі.

Для заданого класу (системи) диференціальних рівнянь кожен елемент його звичайної групи еквівалентності є

- точковим перетворенням у відповідному розширеному просторі незалежних і залежних змінних, залучених похідних (точніше, відповідних струменевих змінних) і довільних елементів,
- проектовним на простір змінних, тобто його компоненти, що пов'язані з незалежними і залежними змінними, не залежать від довільних елементів.

При узагальнені поняття звичайної групи еквівалентності умови точковості та проектовності можна послабити або кожну окремо, або разом [204, 251]. Водночас, потрібно зберегти принципові ознаки, що дозволять називати такі перетворення перетвореннями еквівалентності. Ці ознаки мають однозначно включати узгодженість з контактною структурою базового простору струменів й інваріантність розглядуваного класу відносно таких перетворень. Окрім того, щоб залишатися у рамках локального підходу, перетворення повинні щонайменше бути точковими відносно незалежних і залежних змінних, коли довільні елементи зафіксовано. Отже, процедура послаблення властивості точковості є більш делікатною, ніж просте нехтування незалежністю компонент перетворень для змінних від довільних елементів. Введення нелокальних величин з довільними елементами реалізують через визначення накриття для допоміжної системи зв'язків на довільні елементи.

Розглядаючи класи лінійних ЗДР, потрібно одночасно послаблювати умови точковості й проектовновності, що призводить до означення *узагальненої розширеної групи еквівалентності*. Характеристики "розширена" та "узагальнена" відносяться відповідно до послаблення точковості й проектовності.

Оскільки коефіцієнти лінійних ЗДР залежать лише від змінної $t$, то формальне означення класу $\mathcal{L}$ включає допоміжну систему

$$\frac{\partial a_{i-1}}{\partial x^{(m)}}=0,\quad \frac{\partial b}{\partial x^{(m)}}=0 \tag{3.51}$$

на довільні елементи $a_0$, $\dots$, $a_{r-1}$, $b$.

**Позначення.** Тут і нижче індекс $m$ змінюється від 0 до $r$, індекси $i$, $j$, $k$, $l$ змінюються від 1 до $r$, тобто $m=0,\dots,r$ та $i,j,k,l=1,\dots,r$, і, як завжди, за індексами $j$, $k$, $l$, що повторюються, йде підсумовування.

Розширимо множину довільних елементів додатковими $r$ функціями $\chi_1$, $\dots$, $\chi_r$ змінної $t$ і накладемо умову, що для будь-якого рівняння $\mathcal{E}$ з класу $\mathcal{L}$ відповідні значення додаткових елементів складають фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння, пов'язаного з $\mathcal{E}$. Іншими словами, побудуємо таке накриття допоміжної системи (3.51):

$$\frac{\partial a_{i-1}}{\partial x^{(m)}} = 0, \tag{3.52a}$$

$$\frac{\partial b}{\partial x^{(m)}} = 0, \quad \frac{\partial \chi_i}{\partial x^{(m)}} = 0, \tag{3.52b}$$

$$\frac{\partial^r \chi_i}{\partial t^r} + a_{r-1}\frac{\partial^{r-1}\chi_i}{\partial t^{r-1}} + \dots + a_1\frac{\partial \chi_i}{\partial t} + a_0\chi_i = 0, \tag{3.52c}$$

$$W(\chi_1, \dots, \chi_r) := \det\left(\frac{\partial^{i-1}\chi_j}{\partial t^{i-1}}\right) \neq 0, \tag{3.52d}$$

де $W(\chi_1, \dots, \chi_r)$ — вронскіан функцій $\chi_1$, …, $\chi_r$ відносно змінної $t$. Оскільки будь-яке однорідне лінійне ЗДР визнає свою фундаментальну систему розв'язків з точністю до їх невиродженого лінійного перекомбінування, то недоліком розширення множини довільних елементів є поява калібровочно-еквівалентних наборів цих елементів, тобто зникає взаємно однозначна відповідність між рівняннями і наборами довільних елементів. Відповідну групу калібровочної еквівалентності складають перетворення вигляду

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x}^{(m)} = x^{(m)},$$
$$\tilde{a}_{i-1} = a_{i-1}, \quad \tilde{b} = b, \quad \tilde{\chi}_i = \mu_{ij}\chi_j,$$

де $\mu_{ij}$ — довільні сталі з $\det(\mu_{ij}) \neq 0$. Дивись [190, § 3.3.5][3.11] і [251, § 2.5] щодо більш детального обговорення калібровочної еквівалентності.

Зручніше інтерпретувати введення довільних елементів $\chi_1$, …, $\chi_r$ як репараметризацію класу $\mathcal{L}$, ніж розширення його множини довільних елементів. Рівняння вигляду (3.27) з фундаментальною системою розв'язків $\{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ можна представити як

$$\frac{W(\chi_1, \dots, \chi_r, x)}{W(\chi_1, \dots, \chi_r)} = b.$$

[3.11] Калібровочні перетворення еквівалентності в [190] названо тривіальними.

Це означає, що довільні елементи $a_0$, …, $a_{r-1}$ повністю визначено через $\chi_1$, …, $\chi_r$:

$$a_{i-1} = \frac{(-1)^{r+i-1}}{W(\chi_1,\dots,\chi_r)} \det\left(\frac{\partial^m \chi_j}{\partial t^m}\right)_{m\neq i-1},$$

а тому набір довільних елементів можна звести до

$$(\chi_1,\dots,\chi_r,b).$$

Допоміжну систему зв'язків для зведеного набору довільних елементів складають рівняння (3.52b) і нерівності (3.52d).

Репараметризовані аналоги підкласів класу $\mathcal{L}$, $r \geqslant 2$, виокремлюємо з репараметризації $\mathcal{L}$ додатковими обмеженнями на довільні елементи $\chi_1$, …, $\chi_r$, $b$. Для кожного розглянутого підкласу представимо додаткові до допоміжної системи (3.52b), (3.52d) обмеження на довільні елементи його репараметризації. Використовуючи знання відповідного групоїда еквівалентності для $r \geqslant 3$ або повторюючи кроки доведення твердження 3.28 для випадку $r = 2$, наведемо загальний вигляд перетворень з узагальненої групи еквівалентності репараметризованого підкласу[3.12]. Для таких перетворень необхідно вказувати всі компоненти, включаючи ті, що пов'язані з довільними елементами.

$\mathcal{L}$: $\quad -$;

$$\tilde t = T(t), \quad \tilde x = X_1(t)\big(x+\tilde X_0(t)\big), \quad \tilde\chi_i = X_1(t)\mu_{ij}\chi_j,$$
$$\tilde b = \frac{X_1(t)}{(T_t(t))^r}\left(b + \frac{W(\chi_1,\dots,\chi_r,\tilde X_0(t))}{W(\chi_1,\dots,\chi_r)}\right),$$

де $T$, $X_1$, $\tilde X_0$ — довільні гладкі функції змінної $t$ з $T_tX_1 \neq 0$, а $\mu_{ij}$ — довільні сталі з $\det(\mu_{ij}) \neq 0$.

[3.12]Компоненти перетворень тут можуть залежати від похідних довільних елементів. Для належної інтерпретації таких перетворень як елементів узагальнених груп еквівалентності потрібно додатково розширити набір довільних елементів і допоміжну систему для них, вважаючи довільними елементами також усі похідні від $\chi_i$ до порядку $r$ включно і розглядуючи співвідношення між послідовними похідними як зв'язки для цих нових елементів.

$\widehat{\mathcal{L}}\colon\quad b=0;$

$$\tilde t=T(t),\quad \tilde x=X_1(t)\bigl(x+\nu_j\chi_j\bigr),\quad \tilde\chi_i=X_1(t)\mu_{ij}\chi_j,$$

де $T$, $X_1$ — довільні гладкі функції змінної $t$ з $T_tX_1\neq0$, а $\mu_{ij}$ і $\nu_j$ — довільні сталі з $\det(\mu_{ij})\neq0$.

$\mathcal{L}_1\colon\quad \det\left(\dfrac{\partial^m\chi_j}{\partial t^m}\right)_{m\neq r-1}=0;$

$$\tilde t=T(t),\quad \tilde x=C(T_t(t))^{\frac{r-1}{2}}\bigl(x+\tilde X_0(t)\bigr),\quad \tilde\chi_i=C(T_t(t))^{\frac{r-1}{2}}\mu_{ij}\chi_j,$$

$$\tilde b=\frac{C}{(T_t(t))^{\frac{r+1}{2}}}\left(b+\frac{W(\chi_1,\dots,\chi_r,\tilde X_0(t))}{W(\chi_1,\dots,\chi_r)}\right),$$

де $T$, $\tilde X_0$ — довільні гладкі функції змінної $t$ з $T_t\neq0$, а $C$, $\mu_{ij}$ — довільні сталі з $C\det(\mu_{ij})\neq0$. Тут і далі степені функції $T_t$ інтерпретуємо аналогічно примітці 3.6.

$\widehat{\mathcal{L}}_1\colon\quad \det\left(\dfrac{\partial^m\chi_j}{\partial t^m}\right)_{m\neq r-1}=0,\quad b=0;$

$$\tilde t=T(t),\quad \tilde x=C(T_t(t))^{\frac{r-1}{2}}\bigl(x+\nu_j\chi_j\bigr),\quad \tilde\chi_i=C(T_t(t))^{\frac{r-1}{2}}\mu_{ij}\chi_j,$$

де $T$ — довільна гладка функція змінної $t$ з $T_t\neq0$, а $C$, $\mu_{ij}$, $\nu_j$ — довільні сталі з $C\det(\mu_{ij})\neq0$.

$\mathcal{L}_2\colon\quad \det\left(\dfrac{\partial^m\chi_j}{\partial t^m}\right)_{m\neq r-1}=\det\left(\dfrac{\partial^m\chi_j}{\partial t^m}\right)_{m\neq r-2}=0;$

$$\tilde t=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta},\quad \tilde x=\frac{C}{(\gamma t+\delta)^{r-1}}\bigl(x+\tilde X_0(t)\bigr),\quad \tilde\chi_i=\frac{C}{(\gamma t+\delta)^{r-1}}\mu_{ij}\chi_j,$$

$$\tilde b=C\frac{(\gamma t+\delta)^{r+1}}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^r}\left(b+\frac{W(\chi_1,\dots,\chi_r,\tilde X_0(t))}{W(\chi_1,\dots,\chi_r)}\right),$$

де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $C$ — довільні сталі з $\alpha\delta-\beta\gamma\neq0$ і $C\neq0$, що визначені з точністю до очевидного масштабування (тобто лише чотири сталі серед них є суттєвими), $X_0$ — довільна гладка функція змінної $t$, а $\mu_{ij}$ — довільні сталі з $\det(\mu_{ij})\neq0$.

$$\widehat{\mathcal{L}}_2,\ r\geqslant 3\colon\quad \det\left(\frac{\partial^m\chi_j}{\partial t^m}\right)_{m\neq r-1}=\det\left(\frac{\partial^m\chi_j}{\partial t^m}\right)_{m\neq r-2}=0,\quad b=0;$$

$$\tilde t=\frac{\alpha t+\beta}{\gamma t+\delta},\quad \tilde x=\frac{C}{(\gamma t+\delta)^{r-1}}\big(x+\nu_j\chi_j\big),\quad \tilde\chi_i=\frac{C}{(\gamma t+\delta)^{r-1}}\mu_{ij}\chi_j,$$

де $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $C$ — довільні сталі з $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ і $C\neq 0$, що визначені з точністю до очевидного масштабування (тобто лише чотири сталі серед них є суттєвими), $\mu_{ij}$ і $\nu_j$ — довільні сталі з $\det(\mu_{ij})\neq 0$.

З точністю до калібровочної еквівалентності репараметризований підклас $\widehat{\mathcal{L}}_2$ з $r=2$ складає єдине рівняння $x''=0$. Тому узагальнена група еквівалентності цього підкласу співпадає з його звичайною групою еквівалентності, а породжують її калібровочна група еквівалентності цього підкласу та група точкових симетрій рівняння $x''=0$. Нагадаємо, що останню складають дробово-лінійні перетворення у просторі $(t,x)$. Очевидно, що цей підклас є нормалізованим у звичайному сенсі. Фіксування значень $\chi_1=1$ та $\chi_2=t$ як канонічних представників множин калібровочно-еквівалентних наборів довільних елементів призводить до зникнення перетворень калібровочної еквівалентності.

$\mathcal{A}_1\colon\quad \chi_1=1;$

$$\tilde t=T(t),\quad \tilde x=\frac{x+\tilde X_0(t)}{\mu_{1k}\chi_k},\quad \tilde\chi_i=\frac{\mu_{ij}\chi_j}{\mu_{1k}\chi_k},$$
$$\tilde b=\frac{(T_t(t))^{-r}}{\mu_{1k}\chi_k}\left(b+\frac{W(\chi_1,\dots,\chi_r,\tilde X_0(t))}{W(\chi_1,\dots,\chi_r)}\right),$$

де $T$, $\tilde X_0$ — довільні гладкі функції змінної $t$ з $T_t\neq 0$, а $\mu_{ij}$ — довільні сталі з $\det(\mu_{ij})\neq 0$.

$\widehat{\mathcal{A}}_1\colon\quad \chi_1=1,\quad b=0;$

$$\tilde t=T(t),\quad \tilde x=\frac{x+\nu_j\chi_j}{\mu_{1k}\chi_k},\quad \tilde\chi_i=\frac{\mu_{ij}\chi_j}{\mu_{1k}\chi_k},$$

де $T$ — довільна гладка функція змінної $t$ з $T_t\neq 0$, а $\mu_{ij}$, $\nu_j$ — довільні сталі з $\det(\mu_{ij})\neq 0$.

$\mathcal{A}_2\colon\quad \chi_1=1,\quad \chi_2=t;$

$$\tilde t=\frac{\mu_{2j}\chi_j}{\mu_{1k}\chi_k},\quad \tilde x=\frac{x+\tilde X_0(t)}{\mu_{1k}\chi_k},\quad \tilde\chi_i=\frac{\mu_{ij}\chi_j}{\mu_{1k}\chi_k},$$

$$\tilde b=\frac{(\mu_{1k}\chi_k)^{2r-1}}{\big(\mu_{2j}\mu_{1l}(\chi_j'\chi_l-\chi_j\chi_l')\big)^r}\left(b+\frac{W(\chi_1,\dots,\chi_r,\tilde X_0(t))}{W(\chi_1,\dots,\chi_r)}\right),$$

де $\mu_{ij}$ — довільні сталі з $\det(\mu_{ij})\neq 0$, а $\tilde X_0$ — довільна гладка функція змінної $t$.

$\widehat{\mathcal{A}}_2,\ r\geqslant 3\colon\quad \chi_1=1,\quad \chi_2=t,\quad b=0;$

$$\tilde t=\frac{\mu_{2j}\chi_j}{\mu_{1k}\chi_k},\quad \tilde x=\frac{x+\nu_j\chi_j}{\mu_{1k}\chi_k},\quad \tilde\chi_i=\frac{\mu_{ij}\chi_j}{\mu_{1k}\chi_k},$$

де $\mu_{ij}$, $\nu_j$ — довільні сталі з $\det(\mu_{ij})\neq 0$.

При $r=2$ репараметризований підклас $\widehat{\mathcal{A}}_2$ співпадає з репараметризованим підкласом $\widehat{\mathcal{L}}_2$, оскільки включає єдине рівняння $x''=0$.

Для кожного з репараметризованих класів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_2$, його наведена група еквівалентності не є насправді узагальненою, оскільки компоненти перетворення для змінних $t$ та $x$ не залежать безпосередньо від довільних елементів. Тобто ця група співпадає з відповідною звичайною групою еквівалентності, яка породжує весь групоїд еквівалентності репараметризованого класу при $r\geqslant 3$. Іншими слова, репараметризація зберігає нормалізованість класів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_2$ з $r\geqslant 3$ у звичайному сенсі.

Водночас, для інших згаданих підкласів наведені групи еквівалентності є по-справжньому узагальненими і, при $r\geqslant 3$, породжують групоїди еквівалентності цих підкласів. Таким чином, хоча класи $\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\mathcal{L}}_1$, $\widehat{\mathcal{L}}_2$, $\mathcal{A}_1$, $\widehat{\mathcal{A}}_1$, $\mathcal{A}_2$ і $\widehat{\mathcal{A}}_2$ не є нормалізованими в звичайному чи узагальненому сенсі і, більш того, класи, пов'язані з формами Арнольда, при $r\geqslant 3$ не є навіть напівнормалізованими, репараметризовані версії всіх цих класів є нормалізованими (або напівнормалізованими) в узагальненому сенсі при $r\geqslant 3$ (або при $r=2$). Можна сказати, що репараметризація на основі фундаментальних систем розв'язків покращує властивості нормалізованості цих класів.

Довільні елементи $\chi_1, \ldots, \chi_r$ нелокально пов'язані з $a_0, \ldots, a_{r-1}$. Узагальнені групи еквівалентності репараметризованих класів породжують відповідні групоїди еквівалентності. Звідки, у певному сенсі, вони є максимальними серед узагальнених груп еквівалентності класів, отриманих з початкових класів за допомогою заміни початкових допоміжних систем на їхні накриття. Отже, ці групи можна розглядати як *узагальнені розширені групи еквівалентності* підкласів класу $\mathcal{L}$.

Таким чином, отримаємо твердження.

**Твердження 3.54.** *Класи $\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\mathcal{L}}_1$, $\widehat{\mathcal{L}}_2$, $\mathcal{A}_1$, $\widehat{\mathcal{A}}_1$, $\mathcal{A}_2$ і $\widehat{\mathcal{A}}_2$ при $r \geqslant 3$ є нормалізованими в узагальненому розширеному сенсі. Відповідні узагальнені розширені групи еквівалентності пов'язані з репараметризацією на основі фундаментальних систем розв'язків рівнянь з цих класів.*

**Висновки.** У цьому параграфі вичерпно описано групоїд еквівалентності класу $\mathcal{L}$ лінійних ЗДР $r$-го порядку, а також групоїди еквівалентності його підкласів $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ відповідно пов'язаних з раціональною формою, формою Лагера–Форсайта, першою та другою формами Арнольда, тобто класами рівнянь вигляду (3.27), (3.32), (3.34), (3.38), (3.41). З точки зору допустимих перетворень також відповідні класи $\widehat{\mathcal{L}}$, $\widehat{\mathcal{L}}_1$, $\widehat{\mathcal{L}}_2$, $\widehat{\mathcal{A}}_1$ та $\widehat{\mathcal{A}}_2$ однорідних рівнянь.

Випадок $r = 2$ є особливим для всіх вказаних класів. Кожен із класів $\mathcal{L}$, $\widehat{\mathcal{L}}$, $\mathcal{L}_1$, $\widehat{\mathcal{L}}_1$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1$ та $\widehat{\mathcal{A}}_1$ при $r = 2$ є орбітою елементарного рівняння $x'' = 0$ відносно групи еквівалентності цього класу. Тому відповідний групоїд еквівалентності породжено композиціями перетворень з групи еквівалентності та перетворень з групи симетрії рівняння $x'' = 0$. Отже, кожен з цих класів є напівнормалізованими, але не є нормалізованими; див. доведення твердження 3.29. Клас $\widehat{\mathcal{L}}_2 = \widehat{\mathcal{A}}_2$ утворено єдиним рівнянням $x'' = 0$, тому він є нормалізованим.

При $r \geqslant 3$ групоїди еквівалентності класів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ та $\mathcal{L}_2$ породжено відповідними (звичайними) групами еквівалентності. Іншими словами, кожен з цих класів є нормалізованим; див. твердження 3.31, 3.35 і 3.39. Асоційовані підкласи однорідних рівнянь є однорідно напівнормалізованими відносно груп симетрій, пов'язаних з лінійним принципом суперпозиції цих рівнянь. Це дозволило прокласифікувати ліївські симетрії лінійних ЗДР із використанням алгебраїчного методу трьома різними способами. Метою презентації різних способів для отримання відомої класифікації є демонстрація переваг і недоліків кожного з них, що важливо, наприклад, для ефективного застосування алгебраїчного методу у груповій класифікації систем лінійних ЗДР. Зокрема, класифікацію на основі форми Лагера–Форсайта, асоційованої з максимальним калібруванням довільних елементів, можна просто звести до класифікації підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, яка є скінченновимірною (точніше, тривимірною). Спосіб на основі раціональної форми потребує використання класифікації всіх можливих реалізацій скінченновимірних алгебр Лі на прямій. Водночас, один із класифікаційних випадків для рівнянь зі сталими коефіцієнтами в раціональній формі розщеплюється у формі Лагера–Форсайта на три (або, відповідно, два) випадки над дійсним (або комплексним) полем, і два (або один) з них відповідають рівнянням зі змінними коефіцієнтами. Якщо не застосовувати калібрування довільних елементів і розглядати лінійні ЗДР загального вигляду, то виникає необхідність у використанні класифікації реалізацій специфічних алгебр Лі в просторі двох змінних.

Структура групоїдів еквівалентності класів $\widehat{\mathcal{A}}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\widehat{\mathcal{A}}_2$, пов'язаних з формами Арнольда з $r \geqslant 3$, є більш складною, оскільки ці класи навіть не є напівнормалізованими. З цієї причини вони непридатні для групової класифікації класу $\mathcal{L}$, незважаючи на те, що ці форми використовують при редукції порядку лінійних ЗДР.

Нормалізаційні властивості цих ненормалізованих класів можна покращити за допомогою їхньої репараметризації; див. твердження 3.54. Водночас, репараметризацію не можна застосувати для групової класифікації лінійних ЗДР через складність співвідношень між старими та новими довільними елементами, складним включенням довільних елементів у нове представлення рівнянь і появою калібровочних перетворень еквівалентності.

На відміну від випадку одного лінійного ЗДР, результати щодо групових властивостей нормальних систем лінійних ЗДР другого порядку далекі від повноти, не кажучи вже про довільні системи лінійних ЗДР; дивись більш детальне обговорення в [93], а також § 3.2. Таким чином, актуальною є розробка нових, більш потужних, алгебраїчних і геометричних методів вивчення ліївських симетрій, які, наприклад, включатимуть повне дослідження відповідних групоїдів еквівалентності та інших пов'язаних алгебраїчних структур.

## 3.4. Симетрія, еквівалентність та інтегровні класи рівнянь Абеля

На сьогодні розроблено різноманітні методи побудови точних розв'язків нелінійних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Для інтегрування конкретного ЗДР, як правило, використовують накопичені бази даних або довідники щодо окремих класів ЗДР та спеціальні методи їх інтегрування; див., наприклад, [168, 242]. Але якщо деяке ЗДР не належить до жодного з описаних у літературі класів, це не означає, що його не можна проінтегрувати.

Симетрійний підхід є одним з найбільш алгоритмічних для інтегрування та пониження порядку ЗДР, які допускають нетривіальні симетрії; див., наприклад, монографії [23, 162, 188, 224] та оглядові статті [12, 263]. У рамках симетрійного підходу та його модифікацій можна отримати багато відомих класів інтегрованих ЗДР. Однак потреби знаходження точних розв'язків у різноманітних прикладних моделях стимулюють розвиток нових методів побудови розв'язків ЗДР у замкненій формі. Зокрема, статті [2, 12, 31, 39–43, 57, 67, 120, 121, 126–128, 153, 155, 195, 196, 206, 224, 242, 246, 247, 261–263] надають деяке уявлення про поточні результати та напрямки досліджень в області симетрійних (алгебраїчних) методів дослідження ЗДР протягом останніх десятиліть.

Пошук ліївських симетрії для ЗДР першого порядку еквівалентний розв'язанню цих рівнянь, а тому пряме застосування методу Лі є неконструктивним у загальному випадку. Якщо для заданого ЗДР першого порядку неможливо (або є неефективним) застосовувати ліївський метод безпосередньо, то можна підвищити його порядок, зокрема, щоб отримати ЗДР другого порядку, пов'язане з початковим ЗДР першого порядку деякою диференціальною підстановкою першого порядку. Як приклади використання такого підходу можна згадати роботи [39–43, 126, 195, 196, 206]. У випадках, коли "індуковане" рівняння вищого порядку допускає нетривіальні ліївські симетрії, які генерують нелокальні симетрії для початкового рівняння, можна говорити про так звані приховані симетрії для початкового рівняння (для більш детальної інформації див. [39–41]).

Підвищення порядку рівнянь першого порядку диференціальною підстановкою можна скомбінувати з використанням перетворень еквівалентності як відповідних звичайних диференціальних рівнянь вищого порядку, так і вихідних рівнянь, а також з класифікацією релевантних алгебр Лі векторних полів. Тут цей модифікований алгебраїчний метод застосовано до опису інтегровних випадків рівнянь Абеля, порядок яких підвищено елементарною диференціальною підстановкою до двох. Крім класифікації реалізацій алгебр Лі у спеціальний спосіб, для пошуку інтегровних рівнянь Абеля використано також класичні результати щодо лінеаризації ЗДР другого порядку.

**Підвищення порядку.** Розглянемо загальний клас рівнянь Абеля вигляду

$$\dot{p}(f_5(y)p + f_0(y)) = p^3 f_4(y) + p^2 f_3(y) + p f_2(y) + f_1(y), \tag{3.53}$$

де $p = p(y)$, крапка позначає диференціювання за незалежною змінною $y$, а $f_0, \ldots, f_5$ — довільні гладкі функції, причому $f_0$ та $f_5$ не рівні одночасно нулю. З огляду на існування каліброовчних перетворень еквівалентності [190, 243, 251] (домноження всіх довільних елементів на довільну ненульову функцію змінної $y$), будь-яке рівняння (3.53) можна звести до однієї з двох канонічних форм:

$$\dot{p} = p^3 f_4(y) + p^2 f_3(y) + p f_2(y) + f_1(y), \tag{3.54}$$

$$\dot{p}(p + f_0(y)) = p^3 f_4(y) + p^2 f_3(y) + p f_2(y) + f_1(y), \tag{3.55}$$

які відповідно називають рівняннями Абеля першого і другого роду; див., наприклад, [36, 168, 242]. Рівняння (3.54), (3.55) разом з рівняннями Ріккаті — "найпростіші" нелінійні ЗДР першого порядку, які мають широкі застосування. Водночас, проблема опису інтегровних підкласів цих рівнянь залишається актуальною, її розглянуто у багатьох роботах; див., наприклад, [31, 42, 43, 118–121, 206, 242, 246, 261, 262].

Зазначимо, що класи рівнянь Абеля першого і другого роду (3.54), (3.55) пов'язані один з іншим параметризованою сім'єю точкових перетворень. А саме, рівняння (3.55) можна звести до вигляду (3.54) (з можливо іншими значеннями довільних елементів) за допомогою заміни залежної змінної $\tilde{p} = 1/(p+f_0)$. Крім того, клас рівнянь Ріккаті є підкласом класу (3.54).

Підстановка $y' = p(y)$ з $y = y(x)$, де штрих позначає диференціювання за $x$, зводить ЗДР другого порядку

$$y''(f_5(y)y' + f_0(y)) = y'^4 f_4(y) + y'^3 f_3(y) + y'^2 f_2(y) + y' f_1(y) \tag{3.56}$$

до рівняння Абеля (3.53). Цю редукцію порядку для рівнянь вигляду (3.56), яка пояснює необхідність розгляду їх у контексті рівнянь Абеля, індуковано їхнім оператором ліївської симетрії $Q_1 = \partial_x$, що відповідає інваріантності відносно зсувів за змінною $x$. У випадку, коли ці рівняння інваріантні відносно ще одного оператора ліївської симетрії, тобто допускають двовимірні алгебри ліївських симетрій, їх можна проінтегрувати методом Лі й, таким чином, побудувати точні розв'язки певних рівнянь з класу (3.53). Підкласи класу (3.56), що відповідають каліброваним підкласам рівнянь Абеля першого і другого роду (3.54), (3.55), утворюють рівняння вигляду

$$y'' = {y'}^4 f_4(y) + {y'}^3 f_3(y) + {y'}^2 f_2(y) + y' f_1(y), \tag{3.57}$$

$$y''(y' + f_0(y)) = {y'}^4 f_4(y) + {y'}^3 f_3(y) + {y'}^2 f_2(y) + y' f_1(y). \tag{3.58}$$

**Класифікація реалізацій.** Опишемо нееквівалентні рівняння з накриваючого класу (3.56), інваріантні відносно двовимірних алгебр вигляду

$$L = \langle Q_1, Q_2 \rangle, \quad Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y. \tag{3.59}$$

Нееквівалентні реалізації оператора $Q_2$ в алгебрі (3.59) визначають канонічні представники серед рівнянь з класу (3.56), а після відповідного калібрування — із його підкласів (3.57) і (3.58).

Добре відомо, що множину двовимірних алгебр Лі векторних полів можна розбити на чотири підмножини залежно від комутативності чи некомутативності алгебр та їхніх рангів; див., наприклад, [12,23,162,188]. Оскільки в (3.59) зафіксовано вигляд лише векторного поля $Q_1$, що порушує рівноправність базисних елементів, необхідно розглянути додаткові випадки. Рівняння (3.56) може допускати двовимірну алгебру Лі (3.59) одного з таких типів:

$$\begin{aligned}
&1.\ [Q_1, Q_2] = 0, && \operatorname{rank} L = 1;\\
&2.\ [Q_1, Q_2] = 0, && \operatorname{rank} L = 2;\\
&3.\ [Q_1, Q_2] = Q_1, && \operatorname{rank} L = 1;\\
&4.\ [Q_1, Q_2] = Q_1, && \operatorname{rank} L = 2;\\
&5.\ [Q_1, Q_2] = Q_2, && \operatorname{rank} L = 1;\\
&6.\ [Q_1, Q_2] = Q_2, && \operatorname{rank} L = 2,
\end{aligned} \tag{3.60}$$

для кожного з яких можливі лише такі реалізації:

1. $Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = \xi(y)\partial_x, \quad \xi(y) \not\equiv \mathrm{const};$
2. $Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = \xi(y)\partial_x + \eta(y)\partial_y, \quad \xi(y) \not\equiv \mathrm{const}$ або $\xi(y) \equiv 0, \quad \eta(y) \neq 0;$
3. $Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = (x + \xi(y))\partial_x, \quad \xi(y) \not\equiv \mathrm{const}$ або $\xi(y) \equiv 0;$
4. $Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = (x + \xi(y))\partial_x + \eta(y)\partial_y, \quad \xi(y) \not\equiv \mathrm{const}$ або $\xi(y) \equiv 0, \quad \eta(y) \neq 0;$
5. $Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = e^x\xi(y)\partial_x, \quad \xi(y) \not\equiv 0;$
6. $Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = e^x(\xi(y)\partial_x + \eta(y)\partial_y), \quad \eta(y) \neq 0. \qquad (3.61)$

Зрозуміло, що за допомогою цих реалізацій можна описати рівняння вигляду (3.56), інваріантні відносно двовимірних алгебр Лі, як обговорено в [31]. Однак, цей спосіб занадто громіздкий і, як наслідок, побудовані підкласи інтегровних рівнянь (3.56) будуть досить складними, оскільки такими є відповідні вирази для довільних елементів $f_i$, $i = 0, \ldots, 5$, у (3.56) через компоненти векторного поля $Q_2$ з реалізацій (3.61).

Легко показати, що найбільш загальні точкові перетворення, які зберігають векторне поле $Q_1$, мають вигляд

$$\tilde{x} = x + \omega(y), \quad \tilde{y} = g(y), \tag{3.62}$$

де $\omega(y)$, $g(y)$ — довільні гладкі функції, причому $g(y) \not\equiv \mathrm{const}$. Після заміни (3.62) рівняння (3.56) набуває вигляду

$$\tilde{y}''(\tilde{f}_5\tilde{y}' + \tilde{f}_0)\dot{g}^2 = \tilde{f}_4\tilde{y}'^4 + \tilde{f}_3\tilde{y}'^3 + \tilde{f}_2\tilde{y}'^2 + \tilde{f}_1\tilde{y}', \tag{3.63}$$

де
$$\begin{aligned}
&\tilde{f}_0 = f_0\dot{g}^3,\\
&\tilde{f}_1 = \ddot{g}\dot{g}^2 f_0 + f_1\dot{g}^3,\\
&\tilde{f}_2 = \dot{g}^2 f_2 + \ddot{g}\dot{g}(f_5 - \dot{\omega} f_0) - (\dot{\omega}\dot{g})^{\cdot} f_0\dot{g} - 3\dot{\omega}\dot{g}^2 f_1,\\
&\tilde{f}_3 = \dot{g} f_3 + \dot{\omega}\ddot{\omega}\dot{g} f_0 + (\dot{\omega}\dot{g})^{\cdot}(f_5 - \dot{\omega} f_0) - 2\dot{\omega}\dot{g} f_2 + 3\dot{\omega}^2\dot{g} f_1,\\
&\tilde{f}_4 = f_4 + \dot{\omega}\ddot{\omega}(f_5 - \dot{\omega} f_0) - \dot{\omega} f_3 + \dot{\omega}^2 f_2 - \dot{\omega}^3 f_1,\\
&\tilde{f}_5 = (f_5 - \dot{\omega} f_0)\dot{g}^2,
\end{aligned} \tag{3.64}$$

крапка позначає диференціювання за $y$, а штрих — за $\tilde{x}$. Додатково в (3.64) усі функції змінної $y$ необхідно представити як функції змінної $\tilde{y} = g(y)$, виконавши для $y$ зворотну підстановку.

Отже, перетворення (3.62) не змінюють векторне поле $Q_1 = \partial_x$ в алгебрі (3.59), а їхні продовження на довільні елементи $f_0, \ldots, f_5$ згідно (3.64) є точковими перетвореннями еквівалентності для класу рівнянь (3.56). Крім того, якщо продовжити їх на $p := y'$, а потім спроектувати на простір змінних $(y, p)$ (операція проектування буде добре визначеною), отримані перетворення

$$\tilde{y} = g(y), \quad \tilde{p} = \frac{\dot{g}p}{\dot{\omega}p + 1}$$

утворюють підгрупу в проекції (точкової) групи еквівалентності класу (3.53) на цей самий простір, яку складають перетворення вигляду

$$\tilde{y} = g(y), \quad \tilde{p} = \frac{P_1(y)p + Q_1(y)}{P_2(y)p + Q_2(y)}, \tag{3.65}$$

де $g$, $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$ — довільні гладкі функції змінної $y$, для яких

$$g'(P_1Q_2 - P_2Q_1) \neq 0.$$

Тому за допомогою перетворень (3.62) кожну з реалізацій (3.61) алгебри (3.59) можна звести до найпростішої канонічної форми, не виходячи при цьому із класу (3.56):

$$\begin{aligned}
&1.\ Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = y\partial_x; \\
&2.\ Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = \partial_y; \\
&3.\ Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = x\partial_x; \\
&4.\ Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = x\partial_x + y\partial_y; \\
&5.\ Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = e^x\partial_x; \\
&6.\ Q_1 = \partial_x, \quad Q_2 = e^x(\partial_x + \partial_y).
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Рівняння з класу (3.56), що допускають ці реалізації й, відповідно, об'єднані в підкласи, не пов'язані перетвореннями еквівалентності (3.62), з точністю до множника, лінійного по $y'$, мають такий вигляд:

1. $y'' = \alpha(y){y'}^3$;
2. $y''(c_5y' + c_0) = c_4{y'}^4 + c_3{y'}^3 + c_2{y'}^2 + c_1y'$;
3. $y'' = \alpha(y){y'}^2$;
4. $yy''(c_5y' + c_0) = c_4{y'}^4 + c_3{y'}^3 + c_2{y'}^2 + c_1y'$;
5. $y'' = \alpha(y){y'}^2 - y'$;
6. $$y''(c_5y' - c_0e^{-y} - c_5) = \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}c_ie^{(i-3)y}(y'-1)^i - c_5y'(y'-1)^2 + c_0e^{-y}y'(y'-1), \tag{3.67}$$

де $\alpha(y)$ — довільна гладка функція, $c_0$, …, $c_5$ — довільні сталі, причому $(c_0, c_5) \neq 0$. Канонічні форми (3.67) є простими завдяки класифікації з точністю до перетворень (3.62).

Підсумовуючи, отримаємо такий алгоритм інтегрування деяких рівнянь Абеля вигляду (3.53):

- підвищуємо порядок рівняння (3.53), розглядаючи рівняння другого порядку (3.56);
- якщо рівняння (3.56) допускає двовимірну алгебру Лі, то зводимо цю алгебру до однієї з форм (3.66), а рівняння — до відповідної канонічної форми з переліку (3.67);
- інтегруємо цю канонічну форму;
- виконуючи обернену заміну змінних і диференціюючи результат, отримаємо розв'язок рівняння Абеля (3.53) у параметричній формі.

**Випадок лінеаризації.** Згідно класичних результатів С. Лі [186] (див. також [12, 162, 165, 166]), ЗДР другого порядку

$$y'' = f(x, y, y') \tag{3.68}$$

можна звести (невиродженою) точковою заміною змінних

$$\tilde{x} = \varphi(x, y), \quad \tilde{y} = \psi(x, y), \tag{3.69}$$

до елементарного рівняння $\tilde{y}'' = 0$ (а отже, взагалі, лінеаризувати) тоді й лише тоді, коли воно є щонайбільше кубічним відносно першої похідної:

$$y'' + F_3(x, y)y'^3 + F_2(x, y)y'^2 + F_1(x, y)y' + F(x, y) = 0, \tag{3.70}$$

причому

$$\begin{aligned}
F_3(x, y) &= \frac{\varphi_y\psi_{yy} - \psi_y\varphi_{yy}}{\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x},\\
F_2(x, y) &= \frac{\varphi_x\psi_{yy} - \psi_x\varphi_{yy} + 2(\varphi_y\psi_{xy} - \psi_y\varphi_{xy})}{\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x},\\
F_1(x, y) &= \frac{\varphi_y\psi_{xx} - \psi_y\varphi_{xx} + 2(\varphi_x\psi_{xy} - \psi_x\varphi_{xy})}{\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x},\\
F(x, y) &= \frac{\varphi_x\psi_{xx} - \psi_x\varphi_{xx}}{\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x}.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

При заданих функціях $F_3(x, y)$, $F_2(x, y)$, $F_1(x, y)$ та $F(x, y)$ лінеаризація можлива, якщо система (3.71) сумісна як перевизначена система відносно $\varphi$ та $\psi$. С. Лі показав, що умова сумісності цієї системи має вигляд

$$\begin{aligned}
&3(F_3)_{xx} - 2(F_2)_{xy} + (F_1)_{yy}\\
&\quad = (3F_1F_3 - F_2^2)_x - 3(FF_3)_y - 3F_3F_y + F_2(F_1)_y,\\
&3F_{yy} - 2(F_1)_{xy} + (F_2)_{xx}\\
&\quad = 3(FF_3)_x - 3(FF_2 - F_1^2)_y + 3F(F_3)_x - F_1(F_2)_x
\end{aligned} \tag{3.72}$$

(нижні індекси $x$ та $y$ відповідно позначають диференціювання за змінними $x$ та $y$). Отже, умова (3.72) є необхідною й достатньою для того, щоб рівняння вигляду (3.70) було лінеаризовним [165, 166].

Рівняння (3.58) з $f_0(y) \equiv 0$ після зведення до вигляду

$$y'' = y'^3 f_4(y) + y'^2 f_3(y) + y' f_2(y) + f_1(y). \tag{3.73}$$

є частинним випадком (3.70). Отже, це рівняння можна лінеаризувати тоді й лише тоді, коли відповідні значення довільних елементів $f_1$, ..., $f_4$ задовольняють умову (3.72), тобто

$$(f_2)_{yy} = 3(f_1 f_4)_y + 3f_4(f_1)_y - f_3(f_2)_y, \quad 3(f_1)_{yy} = 3(f_1 f_3 - f_2^2)_y.$$

Точкові перетворення (3.69), що лінеаризують (3.73), можна знайти з системи (3.71). Слід зауважити, що ЗДР другого порядку можна лінеаризувати тоді й лише тоді, коли воно допускає восьмивимірну алгебру Лі. Отже, будь-яке лінеаризоване рівняння вигляду (3.73) можна звести перетвореннями еквівалентності (3.62) до однієї з канонічних форм (3.67).

Таким чином, запропоновано симетрійний підхід до опису інтегровних випадків рівняння Абеля, який використовує підвищення порядку на одиницю й точкові перетворення вигляду (3.62) між відповідними ЗДР другого порядку. Застосовуючи перетворення еквівалентності класу (3.53), проекції яких на простір змінних мають вигляд (3.65), із деякого рівняння Абеля з відомим точним розв'язком можна знайти інші такі рівняння Абеля. Побудову нових інтегровних рівнянь Абеля можна починати навіть з добре відомих рівнянь Ріккаті, оскільки вони утворюють підклас у каліброваному класі рівнянь Абеля першого роду (3.54). (Для генерування інтегровних рівнянь Ріккаті можна використовувати, наприклад, підхід, запропонований у [246]; див. § 3.1.)

## 3.5. Реалізації низькорозмірних алгебр Лі

Задачу опису реалізацій алгебр Лі векторними полями поставлено й уперше досліджено С. Лі. Однак до цієї проблеми зберігається великий інтерес і результати її вивчення широко застосовують, наприклад, при інтегруванні звичайних диференціальних рівнянь [186, 188] (див. також деякі нові результати та тенденції в цій області, наприклад, у [46, 116, 126, 195, 196, 259, 263, 282–284]), груповій класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними [14, 54, 160, 293], класифікації гравітаційних полів загального вигляду щодо груп руху або груп конформних перетворень [24, 175–177, 192, 197]. (Див., наприклад, [157, 160] щодо інших фізичних застосувань реалізацій алгебр Лі.) Отже, можна без перебільшення сказати, що ця проблема займає важливе місце в сучасному груповому аналізі диференціальних рівнянь. Незважаючи на це, проблему повного опису реалізацій не розв'язано навіть у випадках малих розмірностей алгебр або просторів змінних, у яких алгебри реалізовано. Єдиним винятком є ліївська класифікація всіх можливих груп Лі точкових перетворень у двовимірному комплексному чи дійсному просторі без фіксованих точок [185, 187], яка еквівалентна класифікації всіх можливих реалізацій алгебр Лі векторними полями цьому просторі; див. також статті [157, 215] та посилання в них.

У роботах [191, 216, 217, 247–249] побудовано повну множину нееквівалентних реалізацій дійсних алгебр Лі розмірностей не вище чотири у просторах довільної (скінченної) кількості змінних. У цих роботах також проведено детальний огляд проблеми, стану її досліджень та обговорено застосування отриманих результатів; див. також дисертаційні роботи М.В. Лутфуліна [15] та М.О. Нестеренко [20].

Побудовані в [247] реалізації низькорозмірних алгебр Лі знайшли широке застосування і пройшли апробацію у низці нещодавніх досліджень, зокрема при вивчені три- й чотиривимірних динамічних систем, що допускають нелінійний принцип суперпозиції [163, 164]; при класифікації ліївських симетрій систем ЗДР, інтегруванні таких систем та їх лінеаризації (див., наприклад, [11, 15, 51, 149, 152, 173, 194, 231]); у симетрійному аналізі моделей теорії управління (див., наприклад, [59, 60]). Крім того, оскільки роботи [247, 249] містять також детальний огляд щодо низькорозмірних алгебр Лі та впорядковану й оригінальну інформацію стосовно характеристик таких алгебр, то ці результати цитуються у роботах, пов'язаних з дослідженнями в теорії алгебр Лі; див., наприклад, [55, 58, 133, 134, 161, 193, 198, 218, 219].

**Таблиця 3.1.** Реалізації дійсних одно- і двовимірних алгебр Лі.

| Алгебра | $N$ | Реалізація | $(*)$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | $\partial_1$ | |
| $2A_1$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2$ | |
| | 2 | $\partial_1,\ x_2\partial_1$ | |
| $A_{2.1}$ | 1 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_2$ | |
| $[e_1,e_2]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ x_1\partial_1$ | |

**Таблиця 3.2.** Реалізації дійсних тривимірних розв'язних алгебр Лі.

| Алгебра | $N$ | Реалізація | $(*)$ |
|---|---|---|---|
| $3A_1$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3$ | |
| | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2$ | |
| | 3 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+\varphi(x_3)\partial_2$ | $(*)$ |
| | 4 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1$ | |
| | 5 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \varphi(x_2)\,\partial_1$ | $(*)$ |
| $A_{2.1}\oplus A_1$ | 1 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3,\ \partial_2$ | |
| $[e_1,e_2]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_3\partial_2,\ \partial_2$ | |
| | 3 | $\partial_1, x_1\partial_1,\ \partial_2$ | |
| | 4 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_2\partial_1$ | |
| $A_{3.1}$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3$ | |
| $[e_2,e_3]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+x_3\partial_2$ | |
| | 3 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1$ | |
| $A_{3.2}$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ (x_1+x_2)\,\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3$ | |
| $[e_1,e_3]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ (x_1+x_2)\,\partial_1+x_2\partial_2$ | |
| $[e_2,e_3]=e_1+e_2$ | 3 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1-\partial_2$ | |
| $A_{3.3}$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3$ | |
| $[e_1,e_3]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2$ | |
| $[e_2,e_3]=e_2$ | 3 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3$ | |
| | 4 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1$ | |
| $A^a_{3.4},\ \lvert a\rvert\le 1,\ a\ne 0,1$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3$ | |
| $[e_1,e_3]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_1\partial_1+ax_2\partial_2$ | |
| $[e_2,e_3]=ae_2$ | 3 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_1\partial_1+(1-a)x_2\partial_2$ | |
| $A^b_{3.5},\ \ b\ge 0$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ (bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2+\partial_3$ | |
| $[e_1,e_3]=be_1-e_2$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ (bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2$ | |
| $[e_2,e_3]=e_1+be_2$ | 3 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ (b-x_2)x_1\partial_1-(1+x_2^2)\partial_2$ | |

**Таблиця 3.3.** Реалізації дійсних розкладних розв'язних чотиривимірних алгебр Лі.

| Алгебра | $N$ | Реалізація | $(*)$ |
|---|---|---|---|
| $4A_1$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ \partial_4$ | |
| | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_4\partial_1+x_5\partial_2+x_6\partial_3$ | |
| | 3 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_4\partial_1+x_5\partial_2+\theta(x_4,x_5)\partial_3$ | $(*)$ |
| | 4 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_4\partial_1+\varphi(x_4)\partial_2+\psi(x_4)\partial_3$ | $(*)$ |
| | 5 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ x_5\partial_1+x_6\partial_2$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ x_5\partial_1+\theta(x_3,x_4,x_5)\partial_2$ | $(*)$ |
| | 7 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+\varphi(x_3,x_4)\partial_2,\ x_4\partial_1+\psi(x_3,x_4)\partial_2$ | $(*)$ |
| | 8 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+\varphi(x_3)\partial_2,\ \theta(x_3)\partial_1+\psi(x_3)\partial_2$ | $(*)$ |
| | 9 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ x_4\partial_1$ | |
| | 10 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ \theta(x_2,x_3)\partial_1$ | $(*)$ |
| | 11 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \varphi(x_2)\partial_1,\ \psi(x_2)\partial_1$ | $(*)$ |
| $A_{2.1}\oplus 2A_1$ | 1 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_4,\ \partial_2,\ \partial_3$ | |
| $[e_1,e_2]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_4\partial_2+x_5\partial_3,\ \partial_2,\ \partial_3$ | |
| | 3 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_4\partial_2+\varphi(x_4)\partial_3,\ \partial_2,\ \partial_3$ | $(*)$ |
| | 4 | $\partial_1,\ x_1\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3$ | |
| | 5 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_3\partial_3,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_3\partial_3,\ \partial_2,\ x_3\partial_1$ | |
| | 7 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_4,\ \partial_2,\ x_3\partial_2$ | |
| | 8 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_4\partial_2,\ \partial_2,\ x_3\partial_2$ | |
| | 9 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+\varphi(x_3)\partial_2,\ \partial_2,\ x_3\partial_2$ | $(*)$ |
| | 10 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+x_3\partial_3,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1$ | |
| $2A_{2.1}$ | 1 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3,\ \partial_2,\ x_2\partial_2+\partial_4$ | |
| $[e_1,e_2]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3,\ \partial_2,\ x_2\partial_2+x_4\partial_3$ | |
| $[e_3,e_4]=e_3$ | 3 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3,\ \partial_2,\ x_2\partial_2+C\partial_3$ | $(*)$ |
| | 4 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_3\partial_2,\ \partial_2,\ x_2\partial_2+x_3\partial_3$ | |
| | 5 | $\partial_1,\ x_1\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_2$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_2\partial_1,\ -x_2\partial_2+\partial_3$ | |
| | 7 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_2\partial_1,\ -x_2\partial_2$ | |
| $A_{3.1}\oplus A_1$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+\partial_4,\ \partial_2$ | |
| $[e_2,e_3]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2+x_5\partial_3,\ \partial_2$ | |
| | 3 | $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+\varphi(x_4)\partial_2+x_4\partial_3,\ \partial_2$ | $(*)$ |
| | 4 | $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ \partial_2$ | |
| | 5 | $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1,\ \partial_2$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+\partial_4,\ x_2\partial_1$ | |
| | 7 | $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+x_4\partial_3,\ x_2\partial_1$ | |
| | 8 | $\partial_1,\ \partial_3,\ x_3\partial_1+\varphi(x_2)\partial_3,\ x_2\partial_1$ | $(*)$ |

| Алгебра | $N$ | Реалізація | $(*)$ |
|---|---|---|---|
| $A_{3.2}\oplus A_1$ | 1 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\,\partial_4$ | |
| $[e_1,e_3]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\,x_4\partial_3$ | |
| $[e_2,e_3]=e_1+e_2$ | 3 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2,\,\partial_3$ | |
| | 4 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\,x_4e^{x_3}(x_3\partial_1+\partial_2)$ | |
| | 5 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\,e^{x_3}(x_3\partial_1+\partial_2)$ | |
| | 6 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\,e^{x_3}\partial_1$ | |
| | 7 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,x_1\partial_1-\partial_2,\,\partial_3$ | |
| | 8 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,x_1\partial_1-\partial_2,\,x_3e^{-x_2}\partial_1$ | |
| | 9 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,x_1\partial_1-\partial_2,\,e^{-x_2}\partial_1$ | |
| $A_{3.3}\oplus A_1$ | 1 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\,\partial_4$ | |
| $[e_1,e_3]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\,x_4\partial_3$ | |
| $[e_2,e_3]=e_2$ | 3 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+x_2\partial_2,\,\partial_3$ | |
| | 4 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\,e^{x_3}(\partial_1+x_4\partial_2)$ | |
| | 5 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3,\,e^{x_3}\partial_1$ | |
| | 6 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,x_1\partial_1+\partial_3,\,\partial_4$ | |
| | 7 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,x_1\partial_1+\partial_3,\,x_4\partial_3$ | |
| | 8 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,x_1\partial_1+\partial_3,\,\varphi(x_2)\partial_3$ | $(*)$ |
| | 9 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,x_1\partial_1+\partial_3,\,e^{x_3}\partial_1$ | |
| $A^a_{3.4}\oplus A_1$ | 1 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\,\partial_4$ | |
| $\|a\|\le 1,\;\; a\ne 0,1$ | 2 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\,x_4\partial_3$ | |
| $[e_1,e_3]=e_1$ | 3 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+ax_2\partial_2,\,\partial_3$ | |
| $[e_2,e_3]=ae_2$ | 4 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\,e^{x_3}\partial_1+x_4e^{ax_3}\partial_2$ | |
| | 5 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\,e^{x_3}\partial_1+e^{ax_3}\partial_2$ | |
| | 6 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\,e^{x_3}\partial_1$ | |
| | 7 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,x_1\partial_1+(1-a)x_2\partial_2,\,\partial_3$ | |
| | 8 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,x_1\partial_1+(1-a)x_2\partial_2,\,x_3\|x_2\|^{\frac{1}{1-a}}\partial_1$ | |
| | 9 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,x_1\partial_1+(1-a)x_2\partial_2,\,\|x_2\|^{\frac{1}{1-a}}\partial_1$ | |
| $a\ne -1$ | 10 | $\partial_1,\,\partial_2,\,x_1\partial_1+ax_2\partial_2+\partial_3,\,e^{ax_3}\partial_2$ | |
| $A^b_{3.5}\oplus A_1,\;\; b\ge 0$ | 1 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2+\partial_3,\,\partial_4$ | |
| $[e_1,e_3]=be_1-e_2$ | 2 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2+\partial_3,\,x_4\partial_3$ | |
| $[e_2,e_3]=e_1+be_2$ | 3 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2,\,\partial_3$ | |
| | 4 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2+\partial_3,\,x_4e^{bx_3}(\cos x_3\partial_1-\sin x_3\partial_2)$ | |
| | 5 | $\partial_1,\,\partial_2,\,(bx_1+x_2)\partial_1+(-x_1+bx_2)\partial_2+\partial_3,\,e^{bx_3}(\cos x_3\partial_1-\sin x_3\partial_2)$ | |
| | 6 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,(b-x_2)x_1\partial_1-(1+x_2^2)\partial_2,\,\partial_3$ | |
| | 7 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,(b-x_2)x_1\partial_1-(1+x_2^2)\partial_2,\,x_3\sqrt{1+x_2^2}\,e^{-b\,\mathrm{arctg}\,x_2}\partial_1$ | |
| | 8 | $\partial_1,\,x_2\partial_1,\,(b-x_2)x_1\partial_1-(1+x_2^2)\partial_2,\,\sqrt{1+x_2^2}\,e^{-b\,\mathrm{arctg}\,x_2}\partial_1$ | |

**Таблиця 3.4.** Реалізації дійсних нерозкладних розв'язних чотиривимірних алгебр Лі.

| Алгебра | $N$ | Реалізація | $(*)$ |
|---|---|---|---|
| $A_{4.1}$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_2\partial_1+x_3\partial_2+\partial_4$ | |
| $[e_2,e_4]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_2\partial_1+x_3\partial_2+x_4\partial_3$ | |
| $[e_3,e_4]=e_2$ | 3 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_2\partial_1+x_3\partial_2$ | |
| | 4 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ x_2\partial_1+x_4\partial_3-\partial_4$ | |
| | 5 | $\partial_1,\ \partial_2,\ -\frac{1}{2}x_3^2\partial_1+x_3\partial_2,\ x_2\partial_1-\partial_3$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ x_2x_3\partial_1-\partial_2$ | |
| | 7 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ -\partial_2-x_2\partial_3$ | |
| | 8 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \frac{1}{2}x_2^2\partial_1,\ -\partial_2$ | |
| $A_{4.2}^b,\ \ b\neq 0$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ bx_1\partial_1+(x_2+x_3)\partial_2+x_3\partial_3+\partial_4$ | |
| $[e_1,e_4]=be_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ bx_1\partial_1+(x_2+x_3)\partial_2+x_3\partial_3$ | |
| $[e_2,e_4]=e_2$ | 3 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_4\partial_1+x_3\partial_2,\ bx_1\partial_1+x_2\partial_2+(b-1)x_4\partial_4-\partial_3$ | |
| $[e_3,e_4]=e_2+e_3$ | 4 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_2,\ bx_1\partial_1+x_2\partial_2-\partial_3$ | |
| | 5 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ (bx_1+x_2x_3)\partial_1+(b-1)x_2\partial_2+x_3\partial_3$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ bx_1\partial_1+(b-1)x_2\partial_2+((b-1)x_3-x_2)\partial_3$ | |
| $b\neq 1$ | 7 | $\partial_1,\ \partial_2,\ e^{(1-b)x_3}\partial_1+x_3\partial_2,\ bx_1\partial_1+x_2\partial_2-\partial_3$ | |
| | 8 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \frac{x_2}{1-b}\ln\|x_2\|\partial_1,\ bx_1\partial_1+(b-1)x_2\partial_2$ | |
| $b=1$ | 7 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ (x_1+x_2x_3)\partial_1+x_3\partial_3+\partial_4$ | |
| $A_{4.3}$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_1\partial_1+x_3\partial_2+\partial_4$ | |
| $[e_1,e_4]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_1\partial_1+x_3\partial_2+x_4\partial_3$ | |
| $[e_3,e_4]=e_2$ | 3 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ x_1\partial_1+x_3\partial_2$ | |
| | 4 | $\partial_1,\partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ x_1\partial_1+x_3\partial_3-\partial_4$ | |
| | 5 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \varepsilon e^{-x_3}\partial_1+x_3\partial_2,\ x_1\partial_1-\partial_3$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ (x_1+x_2x_3)\partial_1+x_2\partial_2$ | |
| | 7 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+(x_3-x_2)\partial_3$ | |
| | 8 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ -x_2\ln\|x_2\|\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2$ | |
| $A_{4.4}$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ (x_1+x_2)\partial_1+(x_2+x_3)\partial_2+x_3\partial_3+\partial_4$ | |
| $[e_1,e_4]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ (x_1+x_2)\partial_1+(x_2+x_3)\partial_2+x_3\partial_3$ | |
| $[e_2,e_4]=e_1+e_2$ | 3 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ (x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2+x_4\partial_3-\partial_4$ | |
| $[e_3,e_4]=e_2+e_3$ | 4 | $\partial_1,\ \partial_2,\ -\frac{1}{2}x_3^2\partial_1+x_3\partial_2,\ (x_1+x_2)\partial_1+x_2\partial_2-\partial_3$ | |
| | 5 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ (x_1+x_2x_3)\partial_1-\partial_2+x_3\partial_3$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ x_1\partial_1-\partial_2-x_2\partial_3$ | |
| | 7 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \frac{1}{2}x_2^2\partial_1,\ x_1\partial_1-\partial_2$ | |

| Алгебра | $N$ | Реалізація | $(*)$ |
|---|---|---|---|
| $A_{4.5}^{a,b,c}$, $abc\neq 0$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ ax_1\partial_1+bx_2\partial_2+cx_3\partial_3+\partial_4$ | |
| $[e_1,e_4]=ae_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ ax_1\partial_1+bx_2\partial_2+cx_3\partial_3$ | |
| $[e_2,e_4]=be_2$ | 3 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ ax_1\partial_1+bx_2\partial_2+(a-c)x_3\partial_3+(b-c)x_4\partial_4$ | |
| $[e_3,e_4]=ce_3$ | 4 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1,\ ax_1\partial_1+(a-b)x_2\partial_2+(a-c)x_3\partial_3$ | |
| $a=b=c=1$ | 5 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_5$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+\varphi(x_3)\partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_4$ | $(*)$ |
| | 7 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+\varphi(x_3)\partial_2,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2$ | $(*)$ |
| | 8 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ x_3\partial_1, x_1\partial_1+\partial_4$ | |
| | 9 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \varphi(x_2)\partial_1,\ x_1\partial_1+\partial_3$ | $(*)$ |
| | 10 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \varphi(x_2)\partial_1,\ x_1\partial_1$ | $(*)$ |
| $a=b=1,\ c\neq 1$ | 5 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ x_1\partial_1+cx_3\partial_3+\partial_4$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ x_1\partial_1+cx_3\partial_3$ | |
| | 7 | $\partial_1,\ \partial_2,\ e^{(1-c)x_3}\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3$ | |
| $-1\leq a<b<c=1$ | 5 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \varepsilon_1 e^{(a-1)x_3}\partial_1+\varepsilon_2 e^{(b-1)x_3}\partial_2,\ ax_1\partial_1+bx_2\partial_2+\partial_3$ | $(*)$ |
| $b>0$, якщо $a=-1$ | 6 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ \partial_3,\ ax_1\partial_1+(a-b)x_2\partial_2+x_3\partial_3$ | |
| | 7 | $\partial_1,\ e^{(a-b)x_2}\partial_1,\ e^{(a-1)x_2}\partial_1,\ ax_1\partial_1+\partial_2$ | |
| $A_{4.6}^{a,b}$, $a>0$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ ax_1\partial_1+(bx_2+x_3)\partial_2+(-x_2+bx_3)\partial_3+\partial_4$ | |
| $[e_1,e_4]=ae_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \partial_3,\ ax_1\partial_1+(bx_2+x_3)\partial_2+(-x_2+bx_3)\partial_3$ | |
| $[e_2,e_4]=be_2-e_3$ | 3 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_3\partial_1+x_4\partial_2,\ (ax_1-x_2x_3)\partial_1+(b-x_4)x_2\partial_2+(a-b-$ $x_4)x_3\partial_3-(1+x_4^2)\partial_4$ | |
| $[e_3,e_4]=e_2+be_3$ | 4 | $\partial_1,\ \partial_2,\ \varepsilon e^{(b-a)\operatorname{arctg} x_3}\sqrt{1+x_3^2}\partial_1+x_3\partial_2,$ $(ax_1-\varepsilon x_2 e^{(b-a)\operatorname{arctg} x_3}\sqrt{1+x_3^2}\,)\partial_1+(b-x_3)x_2\partial_2-(1+x_3^2)\partial_3$ | |
| | 5 | $\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, ax_1\partial_1+((a-b)x_2+x_3)\partial_2+(-x_2+(a-b)x_3)\partial_3$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ e^{(a-b)x_2}\cos x_2\partial_1,\ -e^{(a-b)x_2}\sin x_2\partial_1,\ ax_1\partial_1+\partial_2$ | |
| $A_{4.7}$ | 1 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3,\ (2x_1+\frac{1}{2}x_3^2)\partial_1+(x_2+x_3)\partial_2+x_3\partial_3+\partial_4$ | |
| $[e_2,e_3]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+\partial_3,\ (2x_1+\frac{1}{2}x_3^2)\partial_1+(x_2+x_3)\partial_2+x_3\partial_3$ | |
| $[e_1,e_4]=2e_1$ | 3 | $\partial_1,\ \partial_2,\ x_2\partial_1+x_3\partial_2,\ 2x_1\partial_1+x_2\partial_2-\partial_3$ | |
| $[e_2,e_4]=e_2$ | 4 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ -\partial_2,\ (2x_1-\frac{1}{2}x_2^2)\partial_1+x_2\partial_2+\partial_3$ | |
| $[e_3,e_4]=e_2+e_3$ | 5 | $\partial_1,\ x_2\partial_1,\ -\partial_2,\ (2x_1-\frac{1}{2}x_2^2)\partial_1+x_2\partial_2$ | |

| Алгебра | $N$ | Реалізація | $(*)$ |
|---|---|---|---|
| $A^b_{4.8}$, $\|b\| \le 1$ | 1 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + \partial_3,\, (1+b)x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + bx_3\partial_3 + \partial_4$ | |
| $[e_2, e_3] = e_1$ | 2 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + \partial_3,\, (1+b)x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + bx_3\partial_3$ | |
| $[e_1, e_4] = (1+b)e_1$ | 3 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + x_3\partial_2,\, (1+b)x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + (1-b)x_3\partial_3$ | |
| $[e_2, e_4] = e_2$ | 4 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1,\, (1+b)x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$ | |
| $[e_3, e_4] = be_3$ | 5 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1,\, (1+b)x_1\partial_1 + x_2\partial_2$ | |
| $b = 1$ | 6 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + x_3\partial_2,\, 2x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_4$ | |
| $b = -1$ | 6 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + \partial_3,\, x_4\partial_1 + x_2\partial_2 - x_3\partial_3$ | |
| | 7 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1,\, x_3\partial_1 + x_2\partial_2$ | |
| $b \ne \pm 1$ | 6 | $\partial_1,\, x_2\partial_1,\, -\partial_2,\, (1+b)x_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + \partial_3$ | |
| | 7 | $\partial_1,\, x_2\partial_1,\, -\partial_2,\, (1+b)x_1\partial_1 + bx_2\partial_2$ | |
| $b = 0$ | 8 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + \partial_3,\, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_4\partial_3$ | |
| | 9 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + \partial_3,\, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + C\partial_3$ | $(*)$ |
| $A^a_{4.9}$, $a \ge 0$ | 1 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + \partial_3,\, \frac{1}{2}(4ax_1 + x_3^2 - x_2^2)\partial_1 + (ax_2 + x_3)\partial_2 + (-x_2 + ax_3)\partial_3 + \partial_4$ | |
| $[e_2, e_3] = e_1$ | | | |
| $[e_1, e_4] = 2ae_1$ | 2 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + \partial_3,\, \frac{1}{2}(4ax_1 + x_3^2 - x_2^2)\partial_1 + (ax_2 + x_3)\partial_2 + (-x_2 + ax_3)\partial_3$ | |
| $[e_2, e_4] = ae_2 - e_3$ | | | |
| $[e_3, e_4] = e_2 + ae_3$ | 3 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + x_3\partial_2,\, (2ax_1 - \frac{1}{2}x_2^2)\partial_1 + (a - x_3)x_2\partial_2 - (1 + x_3^2)\partial_3$ | |
| $a = 0$ | 4 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_2\partial_1 + \partial_3,\, \frac{1}{2}(x_3^2 - x_2^2 + 2x_4)\partial_1 + x_3\partial_2 - x_2\partial_3$ | |
| $A_{4.10}$ | 1 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3,\, x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \partial_4$ | |
| $[e_1, e_3] = e_1$ | 2 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3,\, x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + x_4\partial_3$ | |
| $[e_2, e_3] = e_2$ | 3 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3,\, x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + C\partial_3$ | $(*)$ |
| $[e_1, e_4] = -e_2$ | 4 | $\partial_1,\, x_2\partial_1,\, x_1\partial_1 + \partial_3,\, -x_1x_2\partial_1 - (1 + x_2^2)\partial_2$ | |
| $[e_2, e_4] = e_1$ | 5 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\, x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \partial_3$ | |
| | 6 | $\partial_1,\, \partial_2,\, x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\, x_2\partial_1 - x_1\partial_2$ | |
| | 7 | $\partial_1,\, x_2\partial_1,\, x_1\partial_1,\, -x_1x_2\partial_1 - (1 + x_2^2)\partial_2$ | |

**Таблиця 3.5.** Реалізації дійсних нерозв'язних три- і чотиривимірних алгебр Лі.

| Алгебра | $N$ | Реалізація | $(*)$ |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ | 1 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2+x_2\partial_3$ | |
| $[e_1,e_2]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ (x_1^2-x_2^2)\partial_1+2x_1x_2\partial_2$ | |
| $[e_2,e_3]=e_3$ | 3 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ (x_1^2+x_2^2)\partial_1+2x_1x_2\partial_2$ | |
| $[e_1,e_3]=2e_2$ | 4 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2$ | |
| | 5 | $\partial_1,\ x_1\partial_1,\ x_1^2\partial_1$ | |
| $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\oplus A_1$ | 1 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2+x_2\partial_3,\ \partial_4$ | |
| $[e_1,e_2]=e_1$ | 2 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2+x_2\partial_3,\ x_2\partial_1+2x_2x_3\partial_2+$ $(x_3^2+x_4)\partial_3$ | |
| $[e_2,e_3]=e_3$ | 3 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2+x_2\partial_3,\ x_2\partial_1+2x_2x_3\partial_2+$ $(x_3^2+c)\partial_3,\quad c\in\{-1;0;1\}$ | |
| $[e_1,e_3]=2e_2$ | 4 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ (x_1^2+x_2^2)\partial_1+2x_1x_2\partial_2,\ \partial_3$ | |
| | 5 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ (x_1^2-x_2^2)\partial_1+2x_1x_2\partial_2,\ \partial_3$ | |
| | 6 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2,\ \partial_3$ | |
| | 7 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2,\ x_2x_3\partial_2$ | |
| | 8 | $\partial_1,\ x_1\partial_1+x_2\partial_2,\ x_1^2\partial_1+2x_1x_2\partial_2,\ x_2\partial_2$ | |
| | 9 | $\partial_1,\ x_1\partial_1,\ x_1^2\partial_1,\ \partial_2$ | |
| $\mathfrak{so}(3)$ | 1 | $-\sin x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1-\cos x_1\partial_2,\ -\cos x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1+\sin x_1\partial_2,\ \partial_1$ | |
| $[e_2,e_3]=e_1$ | 2 | $-\sin x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1-\cos x_1\partial_2+\sin x_1\sec x_2\partial_3,$ | |
| $[e_3,e_1]=e_2$ | | $-\cos x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1+\sin x_1\partial_2+\cos x_1\sec x_2\partial_3,\ \partial_1$ | |
| $[e_1,e_2]=e_3$ | | | |
| $\mathfrak{so}(3)\oplus A_1$ | 1 | $-\sin x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1-\cos x_1\partial_2,\ -\cos x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1+\sin x_1\partial_2,\ \partial_1,\ \partial_3$ | |
| $[e_2,e_3]=e_1$ | 2 | $-\sin x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1-\cos x_1\partial_2+\sin x_1\sec x_2\partial_3,$ | |
| $[e_3,e_1]=e_2$ | | $-\cos x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1+\sin x_1\partial_2+\cos x_1\sec x_2\partial_3,\ \partial_1,\ \partial_3$ | |
| $[e_1,e_2]=e_3$ | 3 | $-\sin x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1-\cos x_1\partial_2+\sin x_1\sec x_2\partial_3,$ | |
| | | $-\cos x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1+\sin x_1\partial_2+\cos x_1\sec x_2\partial_3,\ \partial_1,\ x_4\partial_3$ | |
| | 4 | $-\sin x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1-\cos x_1\partial_2+\sin x_1\sec x_2\partial_3,$ | |
| | | $-\cos x_1\operatorname{tg}x_2\partial_1+\sin x_1\partial_2+\cos x_1\sec x_2\partial_3,\ \partial_1,\ \partial_4$ | |

**Зауваження до табл. 3.2.**

$R(3A_1,3,\varphi)$. $\varphi=\varphi(x_3)$. Реалізації $R(3A_1,3,\varphi)$ та $R(3A_1,3,\tilde\varphi)$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли

$$\begin{aligned}\tilde x_3 &= -(\alpha_{11}x_3+\alpha_{12}\varphi(x_3)-\alpha_{13})/(\alpha_{31}x_3+\alpha_{32}\varphi(x_3)-\alpha_{33}),\\ \tilde\varphi &= -(\alpha_{21}x_3+\alpha_{22}\varphi(x_3)-\alpha_{23})/(\alpha_{31}x_3+\alpha_{32}\varphi(x_3)-\alpha_{33}).\end{aligned}\tag{3.74}$$

$R(3A_1,5,\varphi)$. $\varphi=\varphi(x_2)$, $\varphi''\neq 0$. Реалізації $R(3A_1,5,\varphi)$ та $R(3A_1,5,\tilde\varphi)$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли

$$\begin{aligned}\tilde x_2 &= -(\alpha_{21}x_2+\alpha_{22}\varphi(x_2)-\alpha_{23})/(\alpha_{11}x_2+\alpha_{12}\varphi(x_2)-\alpha_{13}),\\ \tilde\varphi &= -(\alpha_{31}x_2+\alpha_{32}\varphi(x_2)-\alpha_{33})/(\alpha_{11}x_2+\alpha_{12}\varphi(x_2)-\alpha_{13}).\end{aligned}\tag{3.75}$$

**Зауваження до табл. 3.3.**

$R(4A_1,3,\theta)$. $\theta=\theta(x_4,x_5)$. Реалізації $R(4A_1,3,\theta)$ та $R(4A_1,3,\tilde\theta)$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли

$$\tilde\xi^a=-(\xi^b\alpha_{ba}-\alpha_{4a})/(\xi^c\alpha_{c4}-\alpha_{44}),\tag{3.76}$$

де $\xi^1=x_4$, $\xi^2=x_5$, $\xi^3=\theta(x_4,x_5)$, $\tilde\xi^1=\tilde x_4$, $\tilde\xi^2=\tilde x_5$, $\tilde\xi^3=\tilde\theta(\tilde x_4,\tilde x_5)$, $a,b,c=1,\dots,3$.

$R(4A_1,4,(\varphi,\psi))$. $\varphi=\varphi(x_4)$, $\psi=\psi(x_4)$. Реалізації $R(4A_1,4,(\varphi,\psi))$ та $R(4A_1,4,(\tilde\varphi,\tilde\psi))$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли виконується умова (3.76), де $\xi^1=x_4$, $\xi^2=\varphi(x_4)$, $\xi^3=\psi(x_4)$, $\tilde\xi^1=\tilde x_4$, $\tilde\xi^2=\tilde\varphi(\tilde x_4)$, $\tilde\xi^3=\tilde\psi(\tilde x_4)$.

$R(4A_1,6,\theta)$. $\theta=\theta(x_3,x_4,x_5)$. Реалізації $R(4A_1,3,\theta)$ та $R(4A_1,3,\tilde\theta)$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли

$$(\xi^{ik}\alpha_{k,2+j}-\alpha_{2+i,2+j})\tilde\xi^{jl}=-(\xi^{ik}\alpha_{kl}-\alpha_{2+i,l}),\tag{3.77}$$

де $\xi^{11}=x_3$, $\xi^{12}=x_4$, $\xi^{21}=x_5$, $\xi^{22}=\theta(x_3,x_4,x_5)$, $\tilde\xi^{11}=\tilde x_3$, $\tilde\xi^{12}=\tilde x_4$, $\tilde\xi^{21}=\tilde x_5$, $\tilde\xi^{22}=\tilde\theta(\tilde x_3,\tilde x_4,\tilde x_5)$, $i,j,k,l=1,2$.

$R(4A_1,7,(\varphi,\psi))$. $\varphi=\varphi(x_3,x_4)$, $\psi=\psi(x_3,x_4)$. Реалізації $R(4A_1,7,(\varphi,\psi))$ та $R(4A_1,7,(\tilde\varphi,\tilde\psi))$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли виконується умова (3.77), де $\xi^{11}=x_3$, $\xi^{12}=\varphi(x_3,x_4)$, $\xi^{21}=x_4$, $\xi^{22}=\psi(x_3,x_4)$, $\tilde\xi^{11}=\tilde x_3$, $\tilde\xi^{12}=\tilde\varphi(\tilde x_3,\tilde x_4)$, $\tilde\xi^{21}=\tilde x_4$, $\tilde\xi^{22}=\tilde\psi(\tilde x_3,\tilde x_4)$.

$R(4A_1,8,(\varphi,\psi,\theta))$. $\varphi=\varphi(x_3)$, $\psi=\psi(x_3)$, $\theta=\theta(x_3)$, причому вектор-функції $(x_3,\varphi)$ та $(\theta,\psi)$ лінійно незалежні. Реалізації $R(4A_1,8,(\varphi,\psi,\theta))$ та $R(4A_1,8,(\tilde\varphi,\tilde\psi,\tilde\theta))$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли виконується умова (3.77), де $\xi^{11}=x_3$, $\xi^{12}=\varphi(x_3)$, $\xi^{21}=\theta(x_3)$, $\xi^{22}=\psi(x_3)$, $\tilde\xi^{11}=\tilde x_3$, $\tilde\xi^{12}=\tilde\varphi(\tilde x_3)$, $\tilde\xi^{21}=\tilde\theta(\tilde x_3)$, $\tilde\xi^{22}=\tilde\psi(\tilde x_3)$.

$R(4A_1,10,\theta)$. $\theta=\theta(x_2,x_3)$, причому функція $\theta$ є нелінійною відносно $(x_2,x_3)$. Реалізації $R(4A_1,10,\theta)$ та $R(4A_1,10,\tilde\theta)$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли

$$(\xi^a\alpha_{1,b+1}-\alpha_{a+1,b+1})\tilde\xi^b=-(\xi^a\alpha_{11}-\alpha_{a1}),\tag{3.78}$$

де $\xi^1=x_2$, $\xi^2=x_3$, $\xi^3=\theta(x_2,x_3)$, $\xi^1=\tilde x_2$, $\xi^2=\tilde x_3$, $\xi^3=\tilde\theta(\tilde x_2,\tilde x_3)$, $a,b=1,\dots,3$.

$R(4A_1,11,(\varphi,\theta))$. $\varphi=\varphi(x_2)$, $\psi=\psi(x_2)$, причому функції 1, $x_2$, $\varphi$ та $\psi$ є лінійно незалежними. Реалізації $R(4A_1,11,(\varphi,\theta))$ та $R(4A_1,11,(\tilde\varphi,\tilde\theta))$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли виконується умова (3.78), де $\xi^1=x_2$, $\xi^2=\varphi(x_2)$, $\xi^3=\psi(x_2)$, $\xi^1=\tilde x_2$, $\xi^2=\tilde\varphi(\tilde x_2)$, $\xi^3=\tilde\psi(\tilde x_2)$.

$R(A_{2.1}\oplus 2A_1,3,\varphi)$. $\varphi=\varphi(x_4)$. Реалізації $R(A_{2.1}\oplus 2A_1,3,\varphi)$ та $R(A_{2.1}\oplus 2A_1,3,\tilde\varphi)$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли $\tilde x_4=-\alpha_{23}+\alpha_{33}x_4+\alpha_{43}\varphi$, $\tilde\varphi=-\alpha_{24}+\alpha_{34}x_4+\alpha_{44}\varphi$ ($\tilde\varphi=\tilde\varphi(\tilde x_4)$, $\alpha_{22}=1$, $\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{14}=\alpha_{31}=\alpha_{32}=\alpha_{41}=\alpha_{42}=0$).

$R(A_{2.1}\oplus 2A_1,9,\varphi)$. $\varphi=\varphi(x_3)$. Реалізації $R(A_{2.1}\oplus 2A_1,9,\varphi)$ та $R(A_{2.1}\oplus 2A_1,9,\tilde\varphi)$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли $\tilde x_3=-(\alpha_{33}x_3-\alpha_{43})/(\alpha_{34}x_3-\alpha_{44})$, $\tilde\varphi=(\alpha_{33}+\alpha_{34}\tilde x_3)\varphi-(\alpha_{23}+\alpha_{24}\tilde x_3)$ ($\tilde\varphi=\tilde\varphi(\tilde x_3)$, $\alpha_{22}=1$, $\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{14}=\alpha_{31}=\alpha_{32}=\alpha_{41}=\alpha_{42}=0$).

$R(2A_{2.1}, 3, C)$. $|C| \leq 1$. Якщо $C \neq \tilde{C}$ ($|C| \leq 1$, $|\tilde{C}| \leq 1$), то реалізації $R(2A_{2.1}, 3, C)$ та $R(2A_{2.1}, 3, \tilde{C})$ нееквівалентні.

$R(A_{3.1} \oplus A_1, 3, \varphi)$. $\varphi = \varphi(x_4)$. Реалізації $R(A_{3.1} \oplus A_1, 3, \varphi)$ та $R(A_{3.1} \oplus A_1, 3, \tilde{\varphi})$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли $\tilde{x}_4 = -(\alpha_{22}x_4 - \alpha_{32})/(\alpha_{23}x_4 - \alpha_{33})$, $\tilde{\varphi} = -(\alpha_{44}\varphi + \alpha_{24}x_4 - \alpha_{34})/(\alpha_{23}x_4 - \alpha_{33})$
($\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_4)$, $\alpha_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}$, $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0$).

$R(A_{3.1} \oplus A_1, 8, \varphi)$. $\varphi = \varphi(x_2)$. Реалізації $R(A_{3.1} \oplus A_1, 8, \varphi)$ та $R(A_{3.1} \oplus A_1, 8, \tilde{\varphi})$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли $\tilde{x}_2 = (\alpha_{11}x_2 - \alpha_{41})/\alpha_{44}$, $\tilde{\varphi} = -(\alpha_{22}\varphi - \alpha_{32})/(\alpha_{23}\varphi - \alpha_{33})$ ($\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_2)$, $\alpha_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}\alpha_{32}$, $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0$).

$R(A_{3.3} \oplus A_1, 8, \varphi)$. $\varphi = \varphi(x_2) \neq 0$. Реалізації $R(A_{3.3} \oplus A_1, 8, \varphi)$ та $R(A_{3.3} \oplus A_1, 8, \tilde{\varphi})$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли $\tilde{x}_2 = -(\alpha_{11}x_2 - \alpha_{21})/(\alpha_{12}x_2 - \alpha_{22})$, $\tilde{\varphi} = -\varphi/(\alpha_{34}\varphi - \alpha_{44})$ ($\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_2)$, $\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0$, $\alpha_{33} = 1$).

**Зауваження до табл. 3.4.**

$R(A^{1,1,1}_{4.5}, N, \varphi)$, $N = 6, 7$. $\varphi = \varphi(x_3)$. Реалізації $R(A^{1,1,1}_{4.5}, N, \varphi)$ та $R(A^{1,1,1}_{4.5}, N, \tilde{\varphi})$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли виконується умова (3.74) ($\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_3)$, $\alpha_{41} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0$).

$R(A^{1,1,1}_{4.5}, N, \varphi)$, $N = 9, 10$. $\varphi = \varphi(x_2)$, $\varphi'' \neq 0$. Реалізації $R(A^{1,1,1}_{4.5}, N, \varphi)$ та $R(A^{1,1,1}_{4.5}, N, \tilde{\varphi})$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли виконується умова (3.75) ($\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}_2)$, $\alpha_{41} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0$).

$R(A^{a,b,c}_{4.5}, 5, (\varepsilon_1, \varepsilon_2))$, де $-1 \leq a < b < c = 1$, $b > 0$ при $a = -1$. $\varepsilon_i \in \{0; 1\}$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (0, 0)$ (можливі три різних варіанти). Усі три варіанти є нееквівалентними.

$R(A^0_{4.8}, 9, C)$. $C \neq 0$ (оскільки $R(A^0_{4.8}, 9, 0) = R(A^0_{4.8}, 2)$).

$R(A_{4.10}, 3, C)$. $C$ — довільна стала.

Результати, наведені у табл. 3.1–3.5, включають як частинний випадок реалізації в трьох змінних, які розглядалися К. Вафо Сохом та Ф.М. Махомедом у статті [283]. Тому природним є питання порівняння отриманих списків реалізацій.

Загалом, результат класифікації може містити помилки двох типів:

- відсутні деякі нееквівалентні випадки і
- включено взаємно еквівалентні випадки.

На основі наведеного нижче порівняння можна стверджувати, що помилки обох типів наявні у [283]. А саме, для тривимірних алгебр три випадки пропущено, один випадок є еквівалентний іншому і в одному випадку результат можна звести до трьох значно простіших підвипадків. Для чотиривимірних алгебр 34 випадки пропущено, а 13 випадків еквівалентні іншим. Типовими були помилки, пов'язані з виконанням некоректних замін змінних та недоліками використаних алгоритмів.

Нижче збережено позначення роботи [283] ($\mathcal{L}_{\dots}$, $\mathcal{L}_{\dots}^{\dots}$, $X_{\dots}$) і відповідні позначення ($A_{\dots}$, $R(A_{\dots},\dots)$, $e_{\dots}$) для алгебр, реалізацій і базисних елементів із статей [247, 249], див. таблиці. Пари еквівалентних реалізацій $\mathcal{L}_{r.m_1}^{k_1}$ та $R(A_{r.m_2}, k_2)$ відповідно з [283] та [247, 249] коротко позначаємо записом $k_1 \sim k_2$. Поряд з цим вказуємо відмінності класифікацій. Те, що реалізації $\mathcal{L}_{r.m}^{k_1}$ та $\mathcal{L}_{r.m}^{k_2}$ з $k_1 < k_2$ в списку з [283] еквівалентні, зазначено як $k_2 \sim \mathcal{L}_{r.m}^{k_1}$. У випадках, коли еквівалентність реалізацій не є очевидною, наведено відповідні перетворення змінних та/або заміни базисних елементів.

## Тривимірні алгебри

$\mathcal{L}_{3.1} \sim 3A_1$. $1 \sim 1$; $2 \sim 3$ (одну з параметр-функцій у $\mathcal{L}_{3.1}$ можна покласти рівною $t$); $3 \sim 4$; реалізацію $R(3A_1, 5)$ пропущено в [283].

$\mathcal{L}_{3.2} \sim A_{2.1} \oplus A_1$ ($X_1 = -e_2$, $X_2 = e_1$, $X_3 = e_3$). $1 \sim 3$; $2 \sim 1$; серію реалізацій $\mathcal{L}_{3.2}^3$ з двома параметр-функціями $f$ та $g$ можна звести до трьох реалізацій:
$R(A_{2.1} \oplus A_1, 2)$, якщо $f' \neq 0$ ($x_1 = y - xg(t)/f(t)$, $x_2 = \ln|x|/f(t)$, $x_3 = 1/f(t)$),
$R(A_{2.1} \oplus A_1, 3)$, якщо $f' = 0$ і $f \neq 0$ ($x_1 = y - xg(t)/f$, $x_2 = \ln|x|/f$, $x_3 = t$, $X_1 = -e_2 - (1/f)e_3$, $X_2 = e_1$, $X_3 = e_3$), яка співпадає з $\mathcal{L}_{3.2}^1$,
$R(A_{2.1} \oplus A_1, 4)$, якщо $f = 0$, а тому $g \neq 0$ ($x_1 = g(t)x$, $x_2 = y$, $x_3 = t$).

$\mathcal{L}_{3.3} \sim A_{3.1}$. $1 \sim 3$; $2 \sim 2$; $3 \sim 1$; $4 \sim \mathcal{L}_{3.3}^1$.

$\mathcal{L}_{3.4} \sim A_{3.2}$. $1 \sim 2$; $2 \sim 1$; $3 \sim 3$.

$\mathcal{L}_{3.5} \sim A_{3.3}$. $1 \sim 2$; $2 \sim 1$; $3 \sim 4$; $4 \sim 3$.

$\mathcal{L}^a_{3.6} \sim A^a_{3.4}$. $1 \sim 2$; $2 \sim 1$; $3 \sim 3$.

$\mathcal{L}^a_{3.7} \sim A^a_{3.5}$. $1 \sim 2$; $2 \sim 1$; $3 \sim 3$.

$\mathcal{L}_{3.8} \sim \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. $1 \sim 5$; $2 \sim 1$; $3 \sim 3$ ($x_1 = (x+t)/2$, $x_2 = (x-t)/2$); $4 \sim 4$ ($x_1 = -x/t$, $x_2 = 1/t^2$, $x_3 = y$); реалізацію $R(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}),2)$ пропущено в [283].

$\mathcal{L}_{3.9} \sim \mathfrak{so}(3)$. $1 \sim 1$ ($x_1 = \operatorname{arctg} t/x$, $x_2 = \operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+t^2}$, $e_1 = X_3$, $e_2 = -X_1$, $e_3 = X_2$); реалізацію $R(\mathfrak{so}(3),2)$ пропущено в [283].

**Чотиривимірні алгебри**

$\mathcal{L}_{4.1} \sim 4A_1$. $1 \sim 8$ (одну з параметр-функцій в $\mathcal{L}_{3.1}$ можна покласти рівною $t$); $2 \sim 10$; реалізацію $R(4A_1,11)$ пропущено в [283].

$\mathcal{L}_{4.2} \sim A_{2.1} \oplus 2A_1$ ($X_1 = -e_2$, $X_2 = e_1$, $X_3 = e_3$, $X_4 = e_4$). $1 \sim 10$; $2 \sim 4$; $3 \sim \mathcal{L}^2_{4.2}$ ($\tilde{x} = \ln|t|$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{t} = x/t$); $4 \sim \mathcal{L}^5_{4.2}$ ($\tilde{x} = x/t$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{t} = 1/t$); $5 \sim 6$; $6 \sim 9$; $7 \sim \mathcal{L}^1_{4.2}$, якщо $f = 0$ ($\tilde{x} = ye^{-x}/g(t)$, $\tilde{y} = e^{-x}/g(t), \tilde{t} = te^{-x}/g(t)$) або $7 \sim \mathcal{L}^6_{4.2}$, якщо $f \neq 0$ ($\tilde{x} = -e^{-x}/f(t)$, $\tilde{y} = y - xg(t)/f(t)$, $\tilde{t} = t$).

$\mathcal{L}_{4.3} \sim 2A_{2.1}$ ($X_1 = -e_2$, $X_2 = e_1$, $X_3 = -e_4$, $X_4 = e_3$). $1 \sim \mathcal{L}^3_{4.3}$ ($\tilde{x} = t$, $\tilde{y} = x$, $\tilde{t} = y$; $\tilde{X}_1 = X_3$, $\tilde{X}_2 = X_4$, $\tilde{X}_3 = X_1$, $\tilde{X}_4 = X_2$); $2 \sim 7$; $3 \sim 3^{C=0}$; $4 \sim 6$ ($x_1 = y$, $x_2 = t$, $x_3 = \ln|x/t|$); $5 \sim \mathcal{L}^3_{4.3}$ ($\tilde{x} = 1/x$, $\tilde{y} = y/x$, $\tilde{t} = t$); $6 \sim 3^{C=1}$ ($x_1 = y$, $x_2 = x/t$, $x_3 = \ln|t|$); $7 \sim 4$ ($x_1 = y$, $x_2 = x/t$, $x_3 = 1/t$); $8 \sim 5$; серію реалізацій $R(2A_{2.1},3,C)$ ($C \neq 0,1$) пропущено в [283].

$\mathcal{L}_{4.4} \sim A_{3.1} \oplus A_1$. Реалізація $\mathcal{L}^1_{4.4}$ є частинним випадком реалізації $\mathcal{L}^4_{4.4}$; $2 \sim 5$; базисні оператори реалізації $\mathcal{L}^3_{4.4}$ не задовольняють комутаційні співвідношення алгебри $\mathcal{L}_{4.4}$; $4 \sim 8$.

$\mathcal{L}_{4.5} \sim A_{3.2} \oplus A_1$. $1 \sim 8$ ($x_1 = x$, $x_2 = t$, $x_3 = ye^t$); $2 \sim 6$ ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = \ln|t|$); $3 \sim 5$ ($x_1 = x - tye^{-t}$, $x_2 = ye^{-t}$, $x_3 = -t$); $4 \sim 3$

$(x_1 = t,\ x_2 = x,\ x_3 = y)$; реалізації $R(A_{3.2} \oplus A_1, 7)$ та $R(A_{3.2} \oplus A_1, 9)$ пропущені в [283].

$\mathcal{L}^1_{4.6} \sim A_{3.3} \oplus A_1$. $1 \sim 9$ $(x_1 = x,\ x_2 = t,\ x_3 = \ln|y|)$; $2 \sim 5$ $(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = \ln|t|)$; $3 \sim \mathcal{L}^{1,2}_{4.6}$ $(\tilde{x} = y,\ \tilde{y} = x,\ \tilde{t} = t;\ \tilde{X}_1 = X_2,\ \tilde{X}_2 = X_1,\ \tilde{X}_3 = -X_3,\ \tilde{X}_4 = X_4)$; $4 \sim 3$; $5 \sim \mathcal{L}^{1,2}_{4.6}$ $(\tilde{x} = x,\ \tilde{y} = ty,\ \tilde{t} = t;\ \tilde{X}_1 = X_1 + X_2,\ \tilde{X}_2 = X_2,\ \tilde{X}_3 = X_3,\ \tilde{X}_4 = X_4)$; реалізацію $R(A_{3.3} \oplus A_1, 8)$ пропущено в [283].

$\mathcal{L}^a_{4.6} \sim A^a_{3.4} \oplus A_1$ $(-1 \le a < 1,\ a \ne 0)$. $1 \sim 8$ $(x_1 = x,\ x_2 = t,\ x_3 = y|t|^{-\frac{1}{1-a}})$; $2 \sim 6$ $(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = \ln|t|)$; $3 \sim 10$ if $a \ne -1$ $(x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = \frac{1}{a}\ln|t|)$, $3 \sim \mathcal{L}^{-1,2}_{4.6}$ for $a = -1$ $(\tilde{x} = y,\ \tilde{y} = x,\ \tilde{t} = t;\ \tilde{X}_1 = X_2,\ \tilde{X}_2 = X_1,\ \tilde{X}_3 = X_3,\ \tilde{X}_4 = X_4)$; $4 \sim 3$; $5 \sim 5$ $(x_1 = x,\ x_2 = yt^a + xt^{a-1},\ x_3 = \ln|t|)$; серії реалізацій $R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 7)$ та $R(A^a_{3.4} \oplus A_1, 9)$ пропущені в [283].

$\mathcal{L}_{4.7} \sim A^0_{3.5} \oplus A_1$. Базисні оператори алгебри $\mathcal{L}^1_{4.7}$ не задовольняють комутаційні співвідношення $\mathcal{L}_{4.7}$; $2 \sim 3$; $3 \sim 5$; реалізації $R(A^0_{3.5} \oplus A_1, 6)$, $R(A^0_{3.5} \oplus A_1, 7)$ та $R(A^0_{3.5} \oplus A_1, 8)$ пропущені [283]; нульове значення параметра в серії алгебр $A^a_{3.5} \oplus A_1$ не є суттєвим для побудови нееквівалентних реалізацій.

$\mathcal{L}^a_{4.8} \sim A^a_{3.5} \oplus A_1$ $(a > 0)$. $1 \sim 3$; $2 \sim 5$ (позначення для $X_4$ містить деякі описки); серії реалізацій $R(A^a_{3.5} \oplus A_1, 6)$, $R(A^a_{3.5} \oplus A_1, 7)$ та $R(A^a_{3.5} \oplus A_1, 8)$ пропущені в [283].

$\mathcal{L}_{4.9} \sim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus A_1$ $(e_1 = X_1,\ e_2 = X_2,\ e_3 = -X_3,\ e_4 = X_4)$. $1 \sim 3^{c=0}$ $(x_1 = t + x/(1+y),\ x_2 = t/(1+y),\ x_3 = -y(1+y))$; $2 \sim 4$ $(x_1 = (t+x)/2,\ x_2 = (t-x)/2,\ x_3 = y)$; $3 \sim 6$ $(x_1 = -x/t,\ x_2 = -1/t^2,\ x_3 = y)$; $4 \sim 9$; реалізації $R(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus A_1, 3, c)$ $(c = \pm 1)$, $R(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus A_1, 5)$, $R(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus A_1, 7)$ та $R(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus A_1, 8)$ пропущені в [283].

$\mathcal{L}_{4.10} \sim \mathfrak{so}(3) \oplus A_1$. $1 \sim 1$ ($x_1 = \operatorname{arctg} t/x$, $x_2 = \operatorname{arcctg} \sqrt{x^2+t^2}$, $x_3 = y$, $e_1 = X_3$, $e_2 = -X_1$, $e_3 = X_2$, $e_4 = X_4$); реалізацію $R(\mathfrak{so}(3) \oplus A_1, 2)$ пропущено в [283].

$\mathcal{L}_{4.11} \sim A_{4.1}$. $1 \sim 7$; $2 \sim 5$; $3 \sim 3$; реалізації $R(A_{4.1}, 6)$ і $R(A_{4.1}, 8)$ пропущені в [283].

$\mathcal{L}^a_{4.12} \sim A^a_{4.2}$ ($a \neq 0$). $1 \sim 6$; $2 \sim 4$; $3 \sim 2$; $4 \sim 7$ для $a \neq 1$ і $4 \sim \mathcal{L}^{a,2}_{4.12}$ для $a = 1$; серії реалізацій $R(A^a_{4.2}, 5)$, $R(A^a_{4.2}, 7)$ ($a = 1$) та $R(A^a_{4.2}, 8)$ ($a \neq 1$) пропущені в [283].

$\mathcal{L}_{4.13} \sim A_{4.3}$. $1 \sim 7$; $2 \sim 3$; $3 \sim 5$; реалізації $R(A_{4.3}, 6)$ та $R(A_{4.3}, 8)$ пропущені в [283].

$\mathcal{L}_{4.14} \sim A_{4.4}$. $1 \sim 6$; $2 \sim 2$; $3 \sim 4$; реалізації $R(A_{4.4}, 5)$ та $R(A_{4.4}, 7)$ пропущені в [283].

$\mathcal{L}^{a,b}_{4.15} \sim A^{a,b,1}_{4.5}$ ($-1 \leq a < b < 1$, $ab \neq 0$, $e_1 = -X_2$, $e_2 = X_3$, $e_3 = X_1$, $e_4 = X_4$). $1 \sim 4$ ($x_1 = -x/t$, $x_2 = -y/t$, $x_3 = -1/t$); $2 \sim 2$; $3 \sim 5^{\varepsilon_1=0}$ ($x_1 = -y$, $x_2 = x/t$, $x_3 = (1-b)^{-1} \ln|t|$); $4 \sim 6$ ($x_1 = -y$, $x_2 = t$, $x_3 = x$); $5 \sim 5^{\varepsilon_1=\varepsilon_2=1}$ ($x_1 = -y + e^{(a-1)t}x$, $x_2 = e^{(b-1)t}x$, $x_3 = t$); серії реалізацій $R(A^{a,b,1}_{4.5}, 5^{\varepsilon_2=0})$ та $R(A^{a,b,1}_{4.5}, 7)$ пропущені в [283].

$\mathcal{L}^{a,a}_{4.15} \sim A^{1,1,a^{-1}}_{4.5}$ ($-1 < a < 1$, $a \neq 0$, $e_1 = X_3$, $e_2 = X_2$, $e_3 = X_1$, $e_4 = X_4$, $\mathcal{L}^{-1,-1}_{4.15} \sim \mathcal{L}^{-1,1}_{4.15}$). $1 \sim 4$ ($x_1 = x/y$, $x_2 = t/y$, $x_3 = 1/y$); $2 \sim 2$; $3 \sim 7$ ($x_1 = x/t$, $x_2 = y$, $x_3 = a(a-1)^{-1} \ln|t|$); $4 \sim 6$ ($x_1 = y/t$, $x_2 = 1/t$, $x_3 = x$).

$\mathcal{L}^{a,1}_{4.15} \sim A^{1,1,a}_{4.5}$ ($-1 \leq a < 1$, $a \neq 0$, $e_1 = X_1$, $e_2 = X_3$, $e_3 = X_2$, $e_4 = X_4$). $1 \sim 4$; $2 \sim 2$; $3 \sim 6$; $4 \sim 7$ ($x_1 = x$, $x_2 = y/t$, $x_3 = (a-1)^{-1} \ln|t|$).

$\mathcal{L}_{4.16} \sim A^{1,1,1}_{4.5}$. $1 \sim 2$; $2 \sim 4$; $3 \sim 7$ (функцію $f(t)$ можна покласти рівною $t$); реалізації $R(A^{1,1,1}_{4.5}, 9)$ та $R(A^{1,1,1}_{4.5}, 10)$ пропущені в [283].

$\mathcal{L}^{a,b}_{4.17} \sim A^{a,b}_{4.6}$. $1 \sim 5$; $2 \sim 2$; $3 \sim 4$; серію реалізацій $R(A^{a,b}_{4.6}, 6)$ пропущено в [283].

$\mathcal{L}_{4.18} \sim A_{4.7}$. $1 \sim 5$ ($x_1 = x/2$, $x_2 = t$, $x_3 = y$); $2 \sim 4$ ($x_1 = x/2$, $x_2 = t$, $x_3 = y$); $3 \sim 2$ ($x_1 = x/2$, $x_2 = t$, $x_3 = y$); $4 \sim 3$ ($x_1 = y$, $x_2 = x$, $x_3 = -t$).

$\mathcal{L}_{4.19} \sim A_{4.8}^{-1}$. $1 \sim 7$; $2 \sim \mathcal{L}_{4.19}^{8}$ і $3 \sim \mathcal{L}_{4.19}^{1}$ ($\tilde{x} = t$, $\tilde{y} = x$, $\tilde{t} = -y$, $\tilde{X}_1 = X_1$, $\tilde{X}_2 = -X_3$, $\tilde{X}_3 = X_2$, $\tilde{X}_4 = -X_4$); $4 \sim \mathcal{L}_{4.19}^{5}$ ($\tilde{x} = t$, $\tilde{y} = x$, $\tilde{t} = e^{-2y}$, $\tilde{X}_1 = X_1$, $\tilde{X}_2 = -X_3$, $\tilde{X}_3 = X_2$, $\tilde{X}_4 = -X_4$); $5 \sim 4$ ($x_1 = y$, $x_2 = x$, $x_3 = \frac{1}{2}\ln|t|$); $6 \sim 3$; $7 \sim 2$; $8 \sim 5$.

$\mathcal{L}_{4.20}^{b} \sim A_{4.8}^{b}$ ($-1 < b \leq 1$). $1 \sim 5$; $2 \sim 7$ і $3 \sim 6$ (ці реалізації входять у список нееквівалентних реалізацій лише тоді, коли $b \neq \pm 1$); $4 \sim 4$ for $b \neq 1$ ($x_1 = y$, $x_2 = x$, $x_3 = (1-b)^{-1}\ln|t|$) і $4 \sim \mathcal{L}_{4.20}^{b,1}$, якщо $b = 1$; $5 \sim 3$; $6 \sim 2$; серію реалізацій $R(A_{4.8}^{0}, 9, C)$ пропущено в [283].

$\mathcal{L}_{4.21}^{a} \sim A_{4.9}^{a}$ ($a \geqslant 0$). $1 \sim 2$; $2 \sim 3$; реалізацію $R(A_{4.9}^{0}, 4)$ пропущено в [283].

$\mathcal{L}_{4.22} \sim A_{4.10}$. $1 \sim 7$; $2 \sim 6$; $3 \sim 4$; $4 \sim 5$; $5 \sim 3$.

# РОЗДІЛ 4

# Симетрійний аналіз диференціальних рівнянь з частинними похідними

Загальновідомою є ефективність симетрійного аналізу при дослідженні важливих класів диференціальних рівнянь, що виникають при моделюванні явищ і процесів у математичній і теоретичній фізиці, хімії, біології, фінансовій математиці та інших науках. Як правило, модельні рівняння мають нетривіальні симетрійні властивості. Групова класифікація дозволяє виокремити з досліджуваного класу рівняння з алгебрами ліївських симетрій певної структури чи найвищої розмірності. У рамках інфінітезимального підходу існують два основні методи розв'язання задач групової класифікації: пряме інтегрування систем визначальних рівнянь з точністю до перетворень еквівалентності та алгебраїчний метод з попереднім вивченням можливих структур алгебр ліївської інваріантності. Перший метод бере свій початок з робіт Л.В. Овсяннікова та його учнів, пізніше його було суттєво удосконалено представниками київської школи симетрійного аналізу, створеної В.І. Фущичем. Сучасний прогрес алгебраїчного методу, запропонованого С. Лі, суттєво пов'язаний з роботами П. Вінтерніца, Р.З. Жданова, В.І. Лагна та Р.О. Поповича. Принципово нові можливості для симетрійного аналізу диференціальних рівнянь пов'язані з відкриттям некласичних і умовних симетрій (див. огляд літератури у розділі 2). Важливим є також використання симетрійних методів при класифікації законів збереження диференціальних рівнянь. Саме класифікаційним задачам симетрійного аналізу диференціальних рівнянь з частинними похідними та рівнянь математичної фізики присвячено цей розділ дисертації.

У § 4.1 проведено повну групову класифікацію нелінійних галілей-інваріантних узагальнень рівнянь Бюргерса і Кортевега–де Фріза довільного порядку.

Основним результатом § 4.2 є теорема про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння з частинними похідними. Як приклад, що ілюструє цю теорему, у § 4.3 розглянуто умовні симетрії (сингулярні та регулярні оператори редукції) лінійного рівняння стрижня. Додатково вивчено зв'язок між цим рівнянням і (1+1)-вимірним вільним рівнянням Шрьодінгера, що дозволило побудувати потенціальні симетрії рівняння стрижня.

Лінійний потенціальний фрейм над (1+1)-вимірними лінійними еволюційними рівняннями розглянуто у § 4.4. Доведено, що кожен найпростіший потенціальний закон збереження (тобто закон збереження, що включає один потенціал) будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальним законом збереження цього рівняння. Це твердження також справедливе для лінійних найпростіших потенціальних законів збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь непарного порядку, пов'язаних з лінійними потенціальними системами. Запропоновано ефективний критерій перевірки, коли квадратичний закон збереження найпростішої лінійної системи, асоційованої з деяким (1+1)-вимірним лінійним еволюційним рівнянням непарного порядку, є чисто потенціальним законом збереження цього рівняння.

У § 4.5 описано нелінійні рівняння типу Шрьодінгера, сумісні з принципом відносності Галілея та розв'язки яких задовольняють рівняння неперервності.

Результати, пов'язані з цим розділом, представлено у роботах [4, 7, 8, 29, 68, 69, 76, 88, 89, 97, 136].

## 4.1. Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь

Розглянемо клас еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t + uu_1 = F(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n), \quad F_{u_n} \neq 0, \tag{4.1}$$

де $u = u(t,x)$, $u_t = \partial u/\partial t$, $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $F$ — довільна гладка функція змінних $u_2$, $u_3$, …, $u_n$. Важливість цього класу рівнянь і необхідність його дослідження обумовлена кількома причинами. Перш за все, він містить як частинні випадки низку відомих рівнянь математичної фізики:

$F = 0$ — рівняння простої хвилі;
$F = \mu u_2$ — рівняння Бюргерса;
$F = \nu u_3$ — рівняння Кортевега–де Фріза;
$F = \mu u_2 + \nu u_3$ — рівняння Бюргерса–Кортевега–де Фріза;
$F = \mu u_2 + \gamma u_4$ — рівняння Курамото–Сивашинського.

Крім того, частинна похідна за часом входить у рівняння (4.1) у складі "матеріальної похідної" $\partial/\partial t + u\partial/\partial x$, яка співпадає з повною похідною по часу $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ у випадку, коли $u$ інтерпретують як швидкість переміщення частинок певного середовища (в ейлерових координатах). Наявність такого агрегату (разом із структурою функції $F$) гарантує виконання для всіх рівнянь з класу (4.1) принципу відносності Галілея, тобто інваріантність відносно групи Галілея $\mathrm{G}(1,1)$, породженої перетвореннями зсуву за часом $t$ і просторовою змінною $x$ ($t' = t + a$, $x' = x + b$, $u' = u$) та перетвореннями Галілея ($t' = t$, $x' = x + vt$, $u' = u + v$).

**Підклас з загальним $n$.** Щоб виконати повну групову класифікацію звузимо клас (4.1) до підкласу рівнянь вигляду

$$u_t + uu_1 = F(u_n), \quad F_{u_n} \neq 0, \tag{4.2}$$

тобто розглянемо випадок, коли функція $F$ залежить лише від старшої похідної $u_n$. Вперше групову класифікацію таких рівнянь для

$n \in \{2;3;4\}$ проведено в [32, 68], де для них також побудовано класи точних розв'язків та отримано узагальнення, що мають широку симетрію. На відміну від [32, 68], значення $n$ тут не фіксовано, що суттєво ускладнює проведення групової класифікації.

**Результат класифікації.** Введемо позначення:

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \quad G = t\partial_x + \partial_u,\\
&D^k = (nk - k + 1)t\partial_t + (2 - k)x\partial_x + (1 - nk)u\partial_u,\\
&D = (n + 1)D^{3/(n+1)} = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\\
&\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u,\\
&D' = 2D - (2n - 1)(t^2\partial_x + 2t\partial_u), \quad \widehat{D} = 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u,\\
&R_1 = u\partial_x, \quad R_2 = (2tu - x)\partial_x + u\partial_u, \quad R_3 = (tu - x)(t\partial_x + \partial_u).
\end{aligned}
$$

Результат групової класифікації рівнянь з класу (4.2) сформулюємо у вигляді таких теорем.

**Теорема 4.1.** *Ядро основних груп рівнянь вигляду* (4.2) *співпадає з групою Галілея* $\mathrm{G}(1,1)$*, алгебра Лі якої* $\mathfrak{g}^\cap = \mathrm{AG}(1,1) = \langle P_0,\, P_1,\, G\rangle$.

**Теорема 4.2.** *Алгебру еквівалентності класу рівнянь* (4.2) *породжують оператори*

$$
\begin{aligned}
&\partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad t^2\partial_x + 2t\partial_u + 2\partial_F,\\
&\partial_t, \quad t\partial_t + x\partial_x - F\partial_F, \quad x\partial_x + u\partial_u + F\partial_F.
\end{aligned}
$$

*Дія будь-якого перетворення еквівалентності на функцію* $F$ *має вигляд*

$$
\widetilde{F}(u_n) = \delta_1 F(\delta_2 u_n) + \delta_0, \tag{4.3}
$$

*де* $\delta_0$, $\delta_1$, $\delta_2$ *— довільні сталі з* $\delta_1\delta_2 \neq 0$.

**Зауваження 4.3.** При виведенні формули (4.3) (щоб зняти вимогу додатності для сталих $\delta_1$ і $\delta_2$) використано також два дискретних перетворення еквівалентності рівнянь (4.2):

$$
\tilde{t} = -t,\ \tilde{x} = -x,\ \tilde{u} = u,\ \widetilde{F} = -F \quad \text{та}
$$

$$
\tilde{t} = t,\ \tilde{x} = -x,\ \tilde{u} = -u,\ \widetilde{F} = -F.
$$

**Теорема 4.4.** *З точністю до перетворень з $G^{\sim}$ для рівнянь* (4.2) *існує лише чотири при $n = 2$ і три при $n > 2$ випадки розширення максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\max} = \mathfrak{g}^{\max}(F)$ (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до $\mathfrak{g}^{\cap}$):*

1. $F = (u_n)^k$, $k \neq 0, \frac{3}{n+1}$: $\quad D^k$;
2. $F = \ln u_n$: $\quad D'$;
3. $F = (u_n)^{\frac{3}{n+1}}$: $\quad D$, $\Pi$;
4. $F = (u_2)^{\frac{1}{3}}$ $(n = 2)$: $\quad \widehat{D}$, $R_1$, $R_2$, $R_3$.

У доведенні класифікаційного результату використано таку лему (див. також [16, 171]).

**Лема 4.5.** *Для довільного еволюційного рівняння*

$$u_t = H(t, x, u, u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \text{де} \quad n \geqslant 2, \quad H_{u_n} \neq 0,$$

*$t$-компонента в будь-якому інфінітезимальному операторі, що породжує однопараметричну групу локальних перетворень симетрії цього рівняння, не залежить від $x$ та $u$.*

*Доведення.* Перейдемо у відповідному інфінітезимальному критерії інваріантності [22, 23] на многовид, заданий рівнянням у продовженому просторі. Збираючи коефіцієнти при похідній $u_{n-1,t}$ в одержаній рівності, маємо, що $nH_{u_n}(\xi^t_x + \xi^t_u u_x) = 0$, тобто $\xi^t_x = \xi^t_u = 0$. □

**Доведення.** Випадок $n = 2$ (доведення якого має певні особливості порівняно з загальним випадком) повністю розглянуто в [32, 68]. Тому надалі вважаємо, що $n > 2$.

Для класифікації скористаємося технікою, запропонованою в [21]. Оскільки рівняння (4.2) еволюційне, то внаслідок леми 4.5 для будь-якої однопараметричної групи локальних перетворень його симетрії відповідний інфінітезимальний оператор має вигляд

$$Q = \xi^t(t)\partial_t + \xi^x(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u.$$

Інфінітезимальний критерій інваріантності [22, 23] для рівняння (4.2) і оператора $Q$ після переходу за рахунок виключення похідної $u_t$ на многовид, заданий рівнянням (4.2) у продовженому просторі, набуває вигляду

$$\eta_t + u\eta_x + (\eta - \xi^x_t)u_1 + (\xi^t_t - \xi^x_x)uu_1 + (\eta_u - \xi^t_t - \xi^x_u u_1)F = \eta^n F', \quad (4.4)$$

де $\eta^n$ — коефіцієнт при $\partial_{u_n}$ у $n$-му продовженні оператора $Q$ [22, 23]:

$$\eta^n = u_n\{\eta_u - n\xi^x_x - (n+1)\xi^x_u u_1\} + u_{n-1}\{n\eta_{xu} + n\eta_{uu}u_1 -$$
$$-\tfrac{1}{2}n(n-1)\xi^x_{xx}n^2\xi^x_{xu}u_1 - \tfrac{1}{2}n(n+1)\xi^x_{uu}u_1^2 - \tfrac{1}{2}n(n+1)\xi^x_u u_2\} + \cdots$$

(тут наведено лише члени, що містять старші похідні $u_n$ та $u_{n-1}$).

Якщо $F$ — довільна функція, то розщеплюючи спочатку по $F$ і $F'$, а потім по $u_1$, $u_2$, …, $u_n$, отримаємо, зокрема, такі визначальні рівняння:

$$\xi^x_u = 0, \quad \eta_u = \xi^t_t = n\xi^x_x, \quad \eta = (\xi^x_x - \xi^t_t)u + \xi^x_t, \quad \eta_t + u\eta_x = 0,$$

звідки $\xi^x_u = \xi^x_x = \xi^t_t = 0$, $\eta = \xi^x_t$, $\xi^x_{tt} = 0$. При виконанні останнього набору умов рівняння (4.4) перетворюється в тотожність, що завершує доведення теореми 4.1.

Зв'язна компонента тотожного перетворення у групі еквівалентності класу рівнянь (4.2) (тобто множина точкових перетворень у просторі "незалежних змінних" $t$, $x$, $u$, $u_1$, $u_2$, …, $u_n$ та "залежної змінної" $F$, що не виводять з класу рівнянь (4.2), причому перетворення по $t$, $x$ та $u$ не залежать від $F$ [22]) співпадає з групою, породженою сукупністю однопараметричних груп точкових симетрій системи

$$u_t + uu_x = F, \quad F_t = F_x = 0, \quad F_{u_k} = 0, \; k = 1, \ldots, n-1, \quad (4.5)$$

інфінітезимальні генератори яких мають вигляд

$$\widehat{Q} = \hat{\xi}^t(t,x,u)\partial_t + \hat{\xi}^x(t,x,u)\partial_x + \hat{\eta}(t,x,u)\partial_u + \hat{\eta}^k(t,x,u)\partial_{u_k} +$$
$$+ \hat{\chi}(t,x,u,u_1,u_2,\ldots,u_n,F)\partial_F,$$

де $\hat\eta^k = D_x^k(\hat\eta-\hat\xi^t u_t-\hat\xi^x u_x)+\hat\xi^t u_{k,t}+\hat\xi^x u_{k+1}$, $D_x$ — оператор повної похідної за змінною $x$,

$$D_x = \partial_x + u_1\partial_u + \sum_{k=1}^{\infty} u_{k+1}\partial_{u_k}.$$

З інфінітезимального критерію інваріантності для системи (4.5) після розщеплення за незв'язаними змінними отримаємо визначальні рівняння на коефіцієнти оператора $\widehat{Q}$, з яких випливає твердження теореми 4.2.

Опишемо тепер усі можливі розширення $\mathfrak{g}^{\max}$ у класі рівнянь (4.2). Якщо $\dim\mathfrak{g}^{\max} > \dim\mathfrak{g}^{\cap}$, то (4.4) є нетотожним відносно $F$ рівнянням загального вигляду

$$(au_n+b)F' = cF + d, \quad \text{де} \quad a,\ b,\ c,\ d \text{ — деякі сталі.} \tag{4.6}$$

Таких рівнянь з лінійно незалежними наборами коефіцієнтів $(a,b,c,d)$ може бути одне або два. Функція $F$ задовольняє два рівняння вигляду (4.6) тоді й лише тоді, коли вона лінійна.

Розглянемо перший випадок, коли (нелінійна) функція $F$ задовольняє точно одне рівняння вигляду (4.6). Тоді $(a,b)\neq(0,0)$, $(c,d)\neq(0,0)$. Виразимо $F'$ з (4.6) і підставимо в (4.4). В отриманій таким чином умові $F$ виступає як ще одна незв'язана змінна. Зберемо послідовно коефіцієнти при $u_{n-1}u_2$, $u_{n-1}u_1$, $uu_1$, $u^2$, $u_1$, $u$, $u_nF$, $u_n$, $F$ у цій умові та прирівняємо до нуля, враховуючи на кожному кроці вже знайдені визначальні рівняння. У результаті розщепимо (4.4) до такої системи визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора $Q$:

$$\begin{aligned}
&\xi^x_u = 0, \quad \eta_{uu} = 0 \quad (\text{тобто } \eta = \eta^1(t,x)u + \eta^0(t,x)),\\
&\eta^1 = \xi^x_x - \xi^t_t, \quad \eta^1_x = 0 \quad (\text{тоді } \xi^x_{xx} = 0), \quad \eta^0 = \xi^x_t,\\
&\eta^1_t + \eta^0_x = 0 \quad (\text{а тому } 2\xi^x_{xt} = \xi^t_{tt}),
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
&a(\eta^1 - \xi^t_t) = c(\eta^1 - n\xi^x_x), \quad d(\eta^1 - n\xi^x_x) = a\eta^0_t,\\
&b(\eta^1 - \xi^t_t) = 0, \quad b\eta^0_t = 0.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Рівняння (4.8) — класифікуючі. Необхідно знайти такі значення параметрів $a$, $b$, $c$, $d$, щоб система (4.7)–(4.8) мала нетривіальні розв'язки.

Якщо $b \neq 0$, то $\eta^0_t = \eta^1 - \xi^t_t = \eta^1 - n\xi^x_x = 0$, тобто розширення $\mathfrak{g}^{\max}$ немає. Тому надалі $b = 0$, звідки $a \neq 1$. Без обмеження загальності можна вважати $a = 1$.

Якщо $c \neq 0$, то перетворенням еквівалентності функцію $F$ приведемо до вигляду $F = (u_n)^k$, тобто $c = k$, $d = 0$. Залежно від значення $k$ маємо або перший, або третій випадок теореми 4.4.

Коли $c = 0$, то $d = 0$, і перетворень еквівалентності (4.3) можна покласти $d = 1$. У результаті отримаємо другий випадок теореми.

У другому випадку, коли функція $F$ лінійна, її можна привести до вигляду $F = u_n$. Додаткового розширення порівняно із загальною степеневою функцією $F = u_n^k$ у цьому випадку немає. Доведення теореми 4.4 завершено.

**Випадок $\boldsymbol{n = 2}$.** Наведемо результат частинної групової класифікації в класі (4.1) з $n = 2$, тобто в класі еволюційних рівнянь другого порядку загального вигляду

$$u_t + uu_x = F(u_x, u_{xx}), \quad F_{u_{xx}} \neq 0. \tag{4.9}$$

**Теорема 4.6.** *Ядро основних груп рівнянь вигляду* (4.9) *співпадає з групою Галілея* $\mathrm{G}(1,1)$, *алгебра Лі якої*

$$\mathfrak{g}^\cap = \mathrm{AG}(1,1) = \langle \partial_t,\ \partial_x,\ G = t\partial_x + \partial_u \rangle.$$

**Теорема 4.7.** *Алгебру еквівалентності* $\mathfrak{g}^\sim$ *класу рівнянь* (4.9) *породжують векторні поля*

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad G, \quad t\partial_t + x\partial_x - F\partial_F, \quad x\partial_x + u\partial_u + F\partial_F,$$
$$t^2\partial_x + 2t\partial_u + 2\partial_F, \quad \partial_u + u_x\partial_F.$$

*Дія будь-якого перетворення з* $G^\sim$ *на функцію* $F$ *має вигляд*

$$\widetilde{F}(u_x, u_{xx}) = \delta_1^{-1}\delta_2 F(\delta_1 u_x, \delta_1^2\delta_2 u_{xx}) + \delta_0 + \delta_3 u_x, \tag{4.10}$$

*де* $\delta_\mu$, $\mu = 0, \dots, 3$, *— довільні сталі з* $\delta_1\delta_2 \neq 0$.

**Теорема 4.8.** *З точністю до перетворень з* $G^{\sim}$ *для класу* (4.9) *існує тринадцять випадків розширення максимальної алгебри ліївської інваріантності* $\mathfrak{g}^{\max}=\mathfrak{g}^{\max}(F)$, *для яких відповідні класи рівнянь параметризовані довільною функцією від одного аргументу (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до* $\mathrm{AG}(1,1)$)*:*

1. $F=u_xf(\omega)-u_x\ln|{u_x}^{-1}(u_x-\alpha)|$, $\omega=(u_x-\alpha)^{-2}{u_x}^{-1}u_{xx}+(u_x-\alpha)^{-1}$: $e^u(\partial_x+\alpha\partial_u)$;
2. $F=u_xf(\omega)$, $\omega={u_x}^{-3}u_{xx}$: $2t\partial_t+(2x+tu)\partial_x+u\partial_u$, $u\partial_x$;
3. $F=|u_x|^{\gamma}|u_x-1|^{1-\gamma}f(\omega)$, $\omega=|u_x|^{\gamma-3}|u_x-1|^{-\gamma}u_{xx}$: $u\partial_x-D^1+\gamma D^2$, $\gamma\notin\{0;1\}$;
4. $F=(u_x-1)f(\omega)+\alpha(u_x-1)\ln|{u_x}^{-1}(u_x-1)|$, $\omega={u_x}^{-3}u_{xx}$: $u\partial_x-D^1$;
5. $F=u_xf(\omega)-\alpha u_x\ln|{u_x}^{-1}(u_x-1)|$, $\omega={u_x}^{-2}(u_x-1)^{-1}u_{xx}$: $u\partial_x-D^1+D^2+\alpha\partial_u$;
6. $F=u_xe^{1/u_x}f(\omega)$, $\omega={u_x}^{-3}e^{1/u_x}u_{xx}$: $u\partial_x+D^2$;
7. $F=u_xe^{1/u_x}f(\omega)$, $\omega={u_x}^{-3}u_{xx}$: $e^{-t}(\partial_t+u\partial_x)$;
8. $F=u_xf(\omega)+{u_x}^{-1}$, $\omega={u_x}^{-3}u_{xx}$: $u\partial_x+2R$;
9. $F=f(\omega)-\ln|u_x|$, $\omega={u_x}^{-3}u_{xx}$: $D^1+R$;
10. $F=u_xf(\omega)-u_x\ln|u_x|$, $\omega={u_x}^{-2}u_{xx}$: $D^1-D^2+\partial_u$;
11. $F=|u_x|^{-\beta}f(\omega)$, $\omega=|u_x|^{-3-\beta}u_{xx}$: $D^1+\beta D^2$;
12. $F={u_{xx}}^{-1}f(\omega)$, $\omega=u_x$: $D^2$;
13. $F=u_xf(\omega)+u_x\ln|u_x|$, $\omega={u_x}^{-1}u_{xx}-u_x$: $e^u\partial_u$.

*Тут*

$$D^1=t\partial_t+2x\partial_x+u\partial_u,\quad D^2=x\partial_x+u\partial_u,$$
$$R=\frac{1}{2}t^2\partial_x+t\partial_u,\quad \alpha\in\{0;1\}.$$

Аналіз результатів, отриманих у [32, 68] й у цьому параграфі, показує, що клас рівнянь (4.1) містить, окрім наведених у теоремі 4.4 для класу (4.2), цілу низку рівнянь з широкою симетрією. Зокрема, в [32,68] описано всі рівняння вигляду (4.1), що інваріантні відносно групи симетрії рівняння Бюргерса (узагальненої групи Галілея), алгебра Лі якої $\mathrm{AG}_2(1,1) = \langle P_0, P_1, G, D, \Pi\rangle$. Питання ж про те, чи існують (і які саме) випадки більшого розширення ліївської симетрії, залишається відкритим. Не розглянуто поки і задачі повної групової класифікації в ширших ніж (4.2) класах рівнянь вигляду (4.1), зокрема, коли $F = F(u_{n-1}, u_n)$. Частинний результат отримано лише при $n = 2$, тобто $F = F(u_1, u_2)$; див. теорему 4.8. Цікаво також продовжити розпочате в [32] дослідження рівнянь, що містять квадрат оператора “матеріальної похідної”.

## 4.2. Лінійні оператори редукції лінійних диференціальних рівнянь

Для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними існують добре розвинуті методи побудови їх аналітичних розв’язків, зокрема метод розділення змінних, різноманітні інтегральні перетворення, ряди Фур’є та їх узагальнення. Водночас дослідження симетрій таких рівнянь є важливими насамперед для розвитку нових методів самого симетрійного аналізу.

У цьому параграфі доведено теорему про лінійні оператори редукції загальних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Необхідні для цього поняття та позначення наведено в розділі 2. Зауважимо, що у випадку одновимірних модулів редукції замість цих модулів зручно розглядати їх базисні елементи, які називають операторами редукції. Відношення еквівалентності на множині операторів редукції пов’язане з можливістю заміною базису в таких модулях. Додатково слід нагадати, що векторне поле $Q$ називають (*слабо*) *сингулярним* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$, якщо існують диференціальна функція $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$ порядку меншого за $r$ і ненульова диференціальна функція $\lambda = \lambda[u]$ порядку не вище за $r$ такі, що $L|_{\mathcal{Q}_{(r)}} = \lambda\tilde{L}|_{\mathcal{Q}_{(r)}}$. Інакше $Q$ є (*слабо*) *регулярним* векторним полем для $\mathcal{L}$. Векторне поле $Q$ *ультрасингулярне* для рівняння $\mathcal{L}$, якщо це рівняння задовольняє будь-який розв'язок характеристичного рівняння $Q[u] := \eta - \xi^i u_i = 0$. Див. [77, 180] та розділ 2 щодо властивостей сингулярних операторів редукції.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ $r$-го порядку

$$L[u] := \sum_{|\alpha|\leqslant r} a^\alpha(x)u_\alpha = 0$$

відносно невідомої функції $u$ незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$, де один із коефіцієнтів $a^\alpha$ з $|\alpha| = r$ є ненульовим.

Серед ліївських симетрій лінійних диференціальних рівнянь особливу роль відіграють симетрії, асоційовані з лінійними диференціальними операторами першого порядку, що діють на $u = u(x)$. Якщо $n \geqslant 2$ і $r \geqslant 2$ або $n = 1$ і $r \geqslant 3$, то із системи визначальних рівнянь $\mathrm{SDE}(\mathcal{L})$ на коефіцієнти векторних полів

$$Q = \xi^i(x,u)\partial_i + \eta(x,u)\partial_u$$

з максимальної алгебри ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ рівняння $\mathcal{L}$ випливає, що $\xi^i_u = 0$, $\eta_{uu} = 0$ [62]. Іншими словами, кожне таке векторне поле можна зобразити у вигляді

$$Q = \xi^i(x)\partial_i + (\eta^1(x)u + \eta^0(x))\partial_u, \tag{4.11}$$

причому із системи $\mathrm{SDE}(\mathcal{L})$ додатково випливає, що $\eta^0$ є довільним розв'язком рівняння $\mathcal{L}$. Векторні поля $\eta^0(x)\partial_u$, де $\eta^0$ пробігає множину розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, утворюють ідеал алгебри $\mathfrak{g}$ і генерують точкові перетворення, асоційовані з лінійним принципом суперпозиції. Якщо хоча б один із коефіцієнтів $\xi^i$ або $\eta^1$ є ненульовим, з точністю до еквівалентності в $\mathfrak{g}$, породженої приєднаними діями елементів із ідеалу, в (4.11) можна покласти $\eta^0 = 0$.

Метою подальшого розгляду є розширення останнього твердження на оператори редукції вигляду (4.11), які будемо називати *лінійними операторами редукції*. Варто зауважити, що загальні умови, за яких лінійне диференціальне рівняння допускає лише оператори редукції, еквівалентні лінійним, на сьогодні невідомі.

**Теорема 4.9.** *Нехай лінійне диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ має оператор редукції $Q$ вигляду* (4.11)*. Тоді коефіцієнт $\eta^0$ допускає представлення $\eta^0 = \xi^i\zeta^0_i - \eta^1\zeta^0$, де $\zeta^0 = \zeta^0(x)$ — розв'язок рівняння $\mathcal{L}$. Отже, з точністю до еквівалентності, породженої дією групи ліївських симетрій рівняння $\mathcal{L}$ на множині операторів редукції цього рівняння, коефіцієнт $\eta^0$ можна покласти рівним нулю. Будь-яке векторне поле вигляду*

$$\xi^i\partial_i + (\eta^1 u + \xi^i\zeta_i - \eta^1\zeta)\partial_u,$$

*де $\zeta = \zeta(x)$ — довільний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$, є оператором редукції рівняння $\mathcal{L}$.*

*Доведення.* Оскільки $Q$ є оператором редукції, то хоча б один із коефіцієнтів $\xi^i$ не є нульовим. Розглянемо векторне поле $\hat{Q} = \xi^i(x)\partial_i + \eta^1(x)u\partial_u$. Нехай $X^1(x)$, …, $X^{n-1}(x)$ — функціонально незалежні розв'язки рівняння $\xi^i v_i = 0$, $X^n(x)$ — частинний розв'язок рівняння $\xi^i v_i = 1$, а $U(x)$ ненульовий розв'язок рівняння $\xi^i v_i + \eta^1 v = 0$. Введемо позначення $X = (X^1, \dots, X^n)$. Компоненти набору $X$ та функція $U(x)u$ функціонально незалежними як функції змінних $(x, u)$. Це означає, що заміна змінних $\mathcal{T}$: $\tilde{x} = X(x)$, $\tilde{u} = U(x)u$ добре визначена.

Виконаємо цю заміну змінних і подамо всі об'єкти та співвідношення в нових змінних $(\tilde{x}, \tilde{u})$. Так, векторне поле $\hat{Q}$ співпадає з генератором зсувів за змінної $\tilde{x}_n$: $\hat{Q} = \partial_{\tilde{x}_n}$, звідки

$$Q = \partial_{\tilde{x}_n} + \tilde{\eta}^0(\tilde{x})\partial_{\tilde{u}},$$

де $\tilde\eta^0(\tilde x)=U(x)\eta^0(x)$, а характеристичне рівняння, асоційоване з векторним полем $Q$, у нових змінних має вигляд $\tilde u_{\tilde x_n}=\tilde\eta^0$. Заміна змінних $\mathcal T$ також зберігає лінійність рівняння $\mathcal L$, яке набуває вигляду

$$\tilde L[\tilde u]=\sum_{|\alpha|\leqslant r}\tilde a^\alpha(\tilde x)\tilde u_\alpha=0, \tag{4.12}$$

де кожен з коефіцієнтів $\tilde a^\alpha$ можна виразити через коефіцієнти $a^{\alpha'}$ з $|\alpha'|\geqslant|\alpha|$ та похідні функцій $X^i$ й $U$. Змінна $\tilde u_\alpha$ у просторі струменів $\mathrm J^r$ відповідає похідній $\partial^{|\alpha|}\tilde u/\partial\tilde x_1^{\alpha_1}\cdots\partial\tilde x_n^{\alpha_n}$. З точністю до ненульового множника деякий коефіцієнт $\tilde a^{\alpha^0}$ з $|\alpha^0|=r$ можна зробити тотожно рівним 1.

Позначимо первісну функції $\tilde\eta^0$ за змінною $\tilde x_n$ через $\tilde\zeta^0$: $\tilde\eta^0=\tilde\zeta^0_{\tilde x_n}$. Розглянемо окремо два випадки залежно від того, чи є оператор редукції $Q$ ультрасингулярним для рівняння $\mathcal L$, і покажемо, що в кожному з цих випадків існує первісна $\tilde\zeta^0$ функції $\tilde\eta^0$, яка задовольняє представлення (4.12) рівняння $\mathcal L$ у нових змінних, тобто $\tilde L[\tilde\zeta^0]=0$.

Припустимо, що оператор редукції $Q$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal L$. Оскільки властивість ультрасингулярності не залежить від заміни змінних, кожен розв'язок характеристичного рівняння $\tilde u_{\tilde x_n}=\tilde\eta^0$ задовольняє представлення $\tilde L[\tilde u]=0$ рівняння $\mathcal L$ у нових змінних, тобто

$$\sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq0}\tilde a^\alpha\tilde\eta^0_{\alpha-\delta_n}+\sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n=0}\tilde a^\alpha\tilde u_\alpha=0,$$

де похідні $\tilde u_\alpha$ з $\alpha_n=0$ не зв'язані. Розщеплюючи за ними, одержуємо систему рівнянь $\tilde a^\alpha=0$, де $\alpha$ пробігає множину мультиіндексів з $|\alpha|\leqslant r$ і $\alpha_n=0$, і рівняння на коефіцієнт $\tilde\eta^0$:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq0}\tilde a^\alpha\tilde\eta^0_{\alpha-\delta_n}:=\sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq0}\tilde a^\alpha\tilde\zeta^0_\alpha=0.$$

Отже, підсумовування у рівнянні (4.12) насправді йде лише за мультиіндексами $\alpha$, в яких $\alpha_n\neq0$, а тому функція $\tilde\zeta^0$ задовольняє це рівняння.

Припустимо тепер, що оператор редукції $Q$ не є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$. Оскільки $r$-те продовження векторного поля $Q$ визначають як

$$Q_{(r)} = \partial_{\tilde{x}_n} + \sum_{|\alpha|\leqslant r} \tilde{\eta}^0_\alpha(\tilde{x})\partial_{\tilde{u}_\alpha},$$

то в цьому випадку з критерію умовної інваріантності отримаємо

$$Q_{(r)}\tilde{L}[\tilde{u}] = \sum_{|\alpha|\leqslant r}(\tilde{a}^\alpha_{\tilde{x}_n}\tilde{u}_\alpha + \tilde{a}^\alpha\tilde{\eta}^0_\alpha) = 0 \tag{4.13}$$

для всіх точок простору струменів $\mathrm{J}^r$, де $\tilde{L}[\tilde{u}] = 0$ та $\tilde{u}_{\alpha'} = \tilde{\eta}^0_{\alpha'-\delta_n}$ при $|\alpha'| \leqslant r$ і $\alpha_n > 0$. Оскільки $\tilde{a}^{\alpha^0} = 1$, диференціальна функція $Q_{(r)}\tilde{L}[\tilde{u}]$ не залежить від похідної $\tilde{u}_{\alpha^0}$, а тому умова $\tilde{L}[\tilde{u}] = 0$ не є суттєвою при переході на многовид $\mathcal{L} \cap \mathcal{Q}_{(r)}$. Враховуючи, що похідні $\tilde{u}_\alpha$ з $\alpha_n = 0$ є незв'язаними, розщеплення за ними умови (4.13) дає систему рівнянь $\tilde{a}^\alpha_{\tilde{x}_n} = 0$, де $\alpha$ пробігає множину мультиіндексів з $|\alpha| \leqslant r$ і $\alpha_n = 0$, як необхідну умову того, що рівняння $\mathcal{L}$ допускає оператор редукції $Q$. Тоді на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ маємо

$$\begin{aligned}
Q_{(r)}\tilde{L}[\tilde{u}] &= \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n=0} \tilde{a}^\alpha_{\tilde{x}_n}\tilde{u}_\alpha + \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq 0} \tilde{a}^\alpha_{\tilde{x}_n}\tilde{u}_\alpha + \sum_{|\alpha|\leqslant r}\tilde{a}^\alpha\tilde{\eta}^0_\alpha \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq 0} \tilde{a}^\alpha_{\tilde{x}_n}\tilde{\eta}^0_{\alpha-\delta_n} + \sum_{|\alpha|\leqslant r}\tilde{a}^\alpha\tilde{\eta}^0_\alpha \\
&= \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n=0} \tilde{a}^\alpha_{\tilde{x}_n}\tilde{\zeta}^0_\alpha + \sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n\neq 0} \tilde{a}^\alpha_{\tilde{x}_n}\tilde{\zeta}^0_\alpha + \sum_{|\alpha|\leqslant r}\tilde{a}^\alpha\tilde{\zeta}^0_{\alpha+\delta_n} \\
&= \left(\sum_{|\alpha|\leqslant r}\tilde{a}^\alpha\tilde{\zeta}^0_\alpha\right)_{\tilde{x}_n} = 0.
\end{aligned}$$

Проінтегрувавши останню рівність за змінною $\tilde{x}_n$, отримаємо, що функція $\tilde{\zeta}^0 = \tilde{\zeta}^0(x)$ задовольняє неоднорідне лінійне рівняння

$$\tilde{L}[\tilde{\zeta}^0] := \sum_{|\alpha|\leqslant r}\tilde{a}^\alpha\tilde{\zeta}^0_\alpha = g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}) \tag{4.14}$$

для деякої гладкої функції $g = g(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})$. Оскільки в цьому випадку оператор редукції $Q$ не є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, то існує значення мультиіндекса $\alpha$ з $|\alpha| \leqslant r$ і $\alpha_n = 0$ таке, що $\tilde{a}^\alpha \neq 0$. Тоді рівняння (4.14) має частинний розв'язок $h$, який не залежить від змінної $\tilde{x}_n$: $h = h(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})$[4.1]. Функція $\tilde{\zeta}^0 - h$ також є первісною для $\tilde{\eta}^0$ за змінною $\tilde{x}_n$ і водночас задовольняє відповідне однорідне лінійне рівняння, тобто $\tilde{L}[\tilde{\zeta}^0 - h] = 0$. Таким чином, без обмеження загальності можна вважати, що сама первісна $\tilde{\zeta}^0$ є розв'язком рівняння (4.12), тобто $\tilde{L}[\tilde{\zeta}^0] = 0$.

Виконавши обернену заміну змінних у рівності $\tilde{\eta}^0 = \tilde{\zeta}^0_{\tilde{x}_n} = \hat{Q}\tilde{\zeta}^0$ і ввівши у розгляд функцію $\zeta^0 = \tilde{\zeta}^0/U$, яка задовольняє рівняння $\mathcal{L}$ у старих змінних $(x, u)$, отримаємо

$$U\eta^0 = \xi^i(U\zeta^0)_i = U\xi^i\zeta^0_i + (\xi^i U_i)\zeta^0 = U(\xi^i\zeta^0_i - \eta^1\zeta^0),$$

тобто $\eta^0 = \xi^i\zeta^0_i - \eta^1\zeta^0$. Тут враховано, що $\xi^i U_i = -\eta^1 U$. Відображення, породжене точковим перетворенням симетрії $\bar{x} = x$, $\bar{u} = u - \zeta^0(x)$ рівняння $\mathcal{L}$ на множині операторів редукції рівняння $\mathcal{L}$, переводить векторне поле $Q$ у векторне поле $\hat{Q}$, у якому коефіцієнт $\eta^0$ є нульовим. Це означає, що $\hat{Q}$ є оператором редукції рівняння $\mathcal{L}$. Застосовуючи аналогічне відображення, породжене перетворенням точкової симетрії $\bar{x} = x$, $\bar{u} = u + \zeta(x)$ з довільним розв'язком $\zeta = \zeta(x)$ рівняння $\mathcal{L}$, отримаємо, що будь-яке векторне поле вигляду $\xi^i\partial_i + (\eta^1 u + \xi^i\zeta_i - \eta^1\zeta)\partial_u$ є оператором редукції рівняння $\mathcal{L}$, що завершує доведення теореми. □

Анзац, побудований для невідомої функції $u$ за векторним полем $Q$, має вигляд

$$u = \frac{1}{U(x)}\varphi(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) + \zeta^0(x),$$

[4.1]Якщо $n > 2$, то для гарантованого існування класичних розв'язків необхідно припускати, що всі функції є аналітичними. У випадку $n = 2$ або для конкретних лінійних рівнянь можна вимагати меншу гладкість функцій.

де $\varphi$ — інваріантна залежна змінна, $\omega_1 = X^1(x)$, …, $\omega_{n-1} = X^{n-1}(x)$ — інваріантні незалежні змінні, введені у доведені теореми 4.9. Цей анзац призводить до такого редукованого рівняння:

$$\sum_{|\alpha|\leqslant r,\alpha_n=0} \tilde a^\alpha(\omega_1,\dots,\omega_{n-1})\frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial\omega_1^{\alpha_1}\cdots\partial\omega_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} = 0.$$

Очевидно, що вигляд редукованого рівняння не залежить від параметр-функції $\zeta^0(x)$, тобто підстановка будь-якого розв'язку рівняння $\mathcal L$ замість $\zeta^0(x)$ не змінює редуковане рівняння.

## 4.3. Ліївські, умовні та потенціальні симетрії лінійного рівняння стрижня

Проведено симетрійний аналіз (1+1)-вимірного лінійного рівняння стрижня зі сталими коефіцієнтами

$$u_{tt} + \lambda u_{xxxx} = 0, \quad \lambda > 0,$$

для невідомої функції $u$ двох незалежних змінних $t$ та $x$. Це рівняння описує поперечні коливання еластичного стрижня та є спеціальним випадком рівняння балки (рівняння Ейлера–Бернуллі). Ліївські симетрії та загальна проблема еквівалентності для класу рівнянь Ейлера–Бернуллі досліджувалися в роботах [208, 213, 280]. Без обмеження загальності, за допомогою масштабних перетворень за змінною $t$ (або $x$) можна покласти $\lambda = 1$, тобто достатньо розглядати рівняння

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0. \tag{4.15}$$

Деякі прості розв'язки цього рівняння наведено в [241, § 9.2.2]. Його максимальною алгеброю ліївської інваріантності є алгебра

$$\mathfrak g = \langle \partial_t,\, \partial_x,\, 2t\partial_t + x\partial_x,\, u\partial_u,\, h(t,x)\partial_u\rangle,$$

де $h = h(t,x)$ — довільний розв'язок рівняння (4.15).

Вивчення умовних симетрій (1+1)-вимірного лінійного рівняння стрижня ілюструє теорему 4.9 про лінійні оператори редукції лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Множину операторів редукції рівняння (4.15) природно розбити на дві підмножини — сингулярні та регулярні оператори редукції. Сингулярні оператори редукції цього рівняння вдається описати повністю, тоді як у регулярному випадку проблема розв'язана лише частково, хоча знайдено важливі оператори редукції, пов'язані з розділенням змінних у лінійному рівнянні стрижня.

Додатково досліджено зв'язок між рівнянням (4.15) й (1+1)-вимірним вільним рівнянням Шрьодінгера, що дозволило побудувати потенціальні симетрії рівняння (4.15). Також обговорено інші симетрійні властивості цього рівняння.

**Сингулярні оператори редукції рівняння стрижня.** Для лінійного рівняння стрижня (4.15) оператори редукції мають загальний вигляд

$$Q = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u,$$

де коефіцієнти $\tau$, $\xi$ та $\eta$ — гладкі функції змінних $(t,x,u)$, причому $(\tau,\xi) \neq (0,0)$. Аналогічно еволюційним рівнянням, векторне поле $Q$ сингулярне для рівняння (4.15) тоді й лише тоді, коли коефіцієнт $\tau$ тотожно рівний нулю. Зауважимо, що векторні поля, слабо сингулярні для цього рівняння, також є сильно сингулярними для нього. Тоді $\xi \neq 0$, а тому, зважаючи на звичайну еквівалентність операторів редукції, можна покласти $\xi = 1$. Іншими словами, для вичерпного опису сингулярних операторів редукції лінійного рівняння стрижня (4.15) достатньо розглянути векторні поля вигляду $Q = \partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$. Многовид $\mathcal{L} \cap \mathcal{Q}_{(4)}$ визначено рівняннями

$$u_x = \eta, \quad u_{xx} = \eta_x + \eta\eta_u, \quad u_{xxx} = (\partial_x + \eta\partial_u)^2\eta,$$
$$u_{xxxx} = (\partial_x + \eta\partial_u)^3\eta, \quad u_{tt} = -u_{xxxx} = -(\partial_x + \eta\partial_u)^3\eta.$$

З критерію умовної інваріантності (див. умову (C3) на с. 106) маємо, що

$$\eta_{tt} + 2\eta_{tu}u_t + \eta_{uu}u_t^2 - \eta_u(\partial_x + \eta\partial_u)^3\eta + (\partial_x + \eta\partial_u)^4\eta = 0.$$

Збираючи коефіцієнти при різних степенях незв'язаної похідної $u_t$ і розщеплюючи відносно них, отримаємо систему трьох визначальних рівнянь для коефіцієнта $\eta$:

$$\eta_{uu}=0,\quad \eta_{tu}=0,\quad \eta_{tt}-\eta_u(\partial_x+\eta\partial_u)^3\eta+(\partial_x+\eta\partial_u)^4\eta=0.$$

Таким чином, на відміну від (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь, для кожного з яких є лише одне визначальне рівняння на коефіцієнт $\eta$ сингулярних операторів редукції, еквівалентне у певному сенсі вихідному еволюційному рівнянню, знаходження операторів редукції для лінійного рівняння стрижня не є "no-go" проблемою. З рівнянь $\eta_{uu}=0$ і $\eta_{tu}=0$ для коефіцієнта $\eta$ маємо $\eta=\eta^1(x)u+\eta^0(t,x)$, де $\eta^1=\eta^1(x)$ і $\eta^0=\eta^0(t,x)$ — гладкі функції своїх аргументів. Згідно теореми 4.9, з точністю до еквівалентності, породженою групою точкових симетрії $G$ лінійного рівняння стрижня на множині операторів редукції цього рівняння, можна покласти $\eta^0=0$.

Покажемо це також за допомогою прямих обрахунків. Після підстановки виразу для $\eta$ в останнє визначальне рівняння і додаткового розщеплення за степенями $u$ отримаємо систему

$$\partial_x(\partial_x+\eta^1)^3\eta^1=0,\quad \eta^0_{tt}-\eta^1\eta^{03}+\eta^{04}=0,$$

де функції $\eta^{03}$ і $\eta^{04}$ визначено рекурентним співвідношенням

$$\eta^{00}:=\eta^0,\quad \eta^{0k}=\eta^{0,k-1}_x+\eta^0(\partial_x+\eta^1)^{k-1}\eta^1,\quad k=1,2,3,4.$$

Виконаємо диференціальну підстановку

$$\eta^1=\frac{\theta_x}{\theta},\quad \eta^0=\zeta_x-\frac{\theta_x}{\theta}\zeta,$$

де $\theta=\theta(x)$ та $\zeta=\zeta(t,x)$ — нові невідомі функції. Індукцією можна довести, що

$$\eta^{0k}=\frac{\partial^{k+1}\zeta}{\partial x^{k+1}}-\frac{\zeta}{\theta}\frac{\mathrm{d}^{k+1}\theta}{\mathrm{d}x^{k+1}},\quad k=1,2,\dots\,.$$

Отже, диференціальна підстановка зводить систему для $\eta^1$ та $\eta^0$ до системи для $\theta$ та $\zeta$:

$$\left(\frac{\theta_{xxxx}}{\theta}\right)_x = 0,$$
$$\zeta_{ttx} - \frac{\theta_x}{\theta}\zeta_{tt} - \frac{\theta_x}{\theta}\zeta_{xxxx} + \frac{\theta_x\theta_{xxxx}}{\theta^2}\zeta + \zeta_{xxxxx} - \frac{\theta_{xxxxx}}{\theta}\zeta = 0.$$

Інтегруючи один раз перше рівняння, отримаємо лінійне звичайне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами $\theta_{xxxx} = \kappa\theta$, де $\kappa$ — стала інтегрування. Друге рівняння можна записати як

$$\left(\frac{\zeta_{tt} + \zeta_{xxxx}}{\theta}\right)_x - \left(\frac{\theta_{xxxx}}{\theta}\right)_x \zeta = 0,$$

звідки

$$\left(\frac{\zeta_{tt} + \zeta_{xxxx}}{\theta}\right)_x = 0.$$

Інтегруючи останнє рівняння за $x$, отримаємо рівняння $\zeta_{tt}+\zeta_{xxxx} = \rho(t)\theta$, де $\rho$ — гладка функція змінної $t$. Функцію $\zeta$ визначено з точністю до перетворень $\tilde\zeta = \zeta + \sigma\theta$, де $\sigma$ — довільна гладка функція змінної $t$. Звідси $\tilde\zeta_{tt}+\tilde\zeta_{xxxx} = \rho\theta+\sigma_{tt}\theta+\sigma\kappa\theta = 0$, якщо $\sigma_{tt}+\kappa\sigma = -\rho$. Іншими словами, можна вважати, що функція $\zeta$ задовольняє лінійне рівняння стрижня (4.15). Тому відображення, породжене точковим перетворенням симетрії $\bar t = t$, $\bar x = x$, $\bar u = u-\zeta(t,x)$ рівняння (4.15) на множині операторів редукції цього рівняння, переводить векторне поле $Q$ у векторне поле такого самого вигляду, де $\zeta = 0$, тобто $\eta^0 = 0$.

**Твердження 4.10.** *З точністю до еквівалентності відносно перетворень точкової симетрії, пов'язаних з лінійним принципом суперпозиції, множину сингулярних операторів редукції лінійного рівняння стрижня вичерпують векторні поля вигляду* $Q_{\rm s} = \partial_x + \frac{\theta_x}{\theta}u\partial_u$, *де функція* $\theta = \theta(t,x)$ *задовольняє звичайне диференціальне рівняння* $\theta_{xxxx} = \kappa\theta$ *для деякої сталої* $\kappa$.

Анзац, побудований за оператором редукції $Q$, має вигляд $u=\theta(x)\varphi(\omega)$, де $\omega=t$ — інваріантна незалежна змінна, $\varphi$ — інваріантна залежна змінна. Цей анзац редукує рівняння (4.15) до рівняння $\varphi_{\omega\omega}+\kappa\varphi=0$. Зазначимо, що оператор редукції $Q_{\rm s}$ пов'язаний з розділенням змінних у лінійному рівнянні стрижня (4.15). Він еквівалентний деякому оператору ліївської симетрії лише за умови $\theta_x/\theta=\mathrm{const}$.

**Регулярні оператори редукції рівняння стрижня.** Для таких операторів коефіцієнт $\tau$ не є нульовим. З точністю до звичайної еквівалентності операторів редукції можна покласти $\tau=1$, тобто

$$Q=\partial_t+\xi(t,x,u)\partial_x+\eta(t,x,u)\partial_u.$$

Суттєвими серед рівнянь, що визначають многовид $\mathcal{L}\cap\mathcal{Q}_{(4)}$, є рівняння

$$\begin{aligned}&u_t=\eta-\xi u_x,\quad u_{tx}=\eta_x+\eta u_x-\xi_x u_x-\xi_u u_x^2-\xi u_{xx},\\&u_{tt}=-u_{xxxx}=\eta_t+\eta_u(\eta-\xi u_x)-(\xi_t+\xi_u(\eta-\xi u_x))u_x\\&\qquad-\xi(\eta_x+\eta u_x-\xi_x u_x-\xi_u u_x^2-\xi u_{xx}).\end{aligned}$$

Збираючи коефіцієнти при $u_{xx}u_{xxx}$ в умові, що випливає з критерію умовної інваріантності (див. умову (C3) на с. 106), отримаємо рівняння $\xi_u=0$. Інші члени з $u_{xxx}$ дають рівняння $\eta_{uu}=0$ і $\eta_{xu}=\frac32\xi_{xx}$. Таким чином, маємо

$$\xi=\xi(t,x),\quad \eta=\eta^1(t,x)u+\eta^0(t,x),$$

де $\eta^1:=\frac32\xi_x+\gamma(t)$, а $\gamma=\gamma(t)$ — гладка функція. Інші визначальні рівняння можна звести до вигляду

$$2\xi_t\xi+5\xi_{xxx}+4\xi^2\xi_x=0, \tag{4.16}$$

$$\xi_{tt}+\xi_{xxxx}+2(\eta^1\xi)_t+2\xi_t\xi_x-4\eta^1_{xxx}+8\xi\xi_x\eta^1-4\xi{\xi_x}^2=0, \tag{4.17}$$

$$\eta^1_{tt}+\eta^1_{xxxx}+2\eta^1\eta^1_t-2\xi_t\eta^1_x+4\xi_x(\eta^1_t+\eta^1\eta^1-\xi\eta^1_x)=0, \tag{4.18}$$

$$\eta^0_{tt}+\eta^0_{xxxx}+2\eta^0\eta^1_t-2\xi_t\eta^0_x+4\xi_x(\eta^0_t+\eta^1\eta^0-\xi\eta^0_x)=0, \tag{4.19}$$

де $\eta^1$ слід замінити на $\frac32\xi_x+\gamma(t)$.

Аналогічно сингулярним операторам редукції, з теореми 4.9 знову випливає, що з точністю до еквівалентності, породженої групою точкових симетрій $G$ лінійного рівняння стрижня на множині операторів редукції цього рівняння, можна покласти $\eta^0 = 0$.

Покажемо, що пряме доведення цього факту не є тривіальним. Дійсно, нехай функція $\zeta$ визначено співвідношенням $\eta^0 = \zeta_t + \xi\zeta_x - \eta^1\zeta$. Виконавши підстановку цього виразу для $\eta^0$ у рівняння (4.19) та врахувавши рівняння (4.16)–(4.18) і $\eta_{xu} = \frac{3}{2}\xi_{xx}$, отримаємо таке рівняння на функцію $\zeta$:

$$(\partial_t + \xi\partial_x - \eta^1 + 4\xi_x)(\zeta_{tt} + \zeta_{xxxx}) = 0,$$

тобто $\zeta_{tt} + \zeta_{xxxx} = h(t,x)$, де функція $h = h(t,x)$ задовольняє рівняння

$$h_t + \xi h_x + (-\eta^1 + 4\xi_x)h = 0.$$

Функцію $h = h(t,x)$ можна вважати рівною нулю. Дійсно, функцію $\zeta$ визначено з точністю до доданка, що є розв'язком рівняння $g_t + \xi g_x - \eta^1 g = 0$. Кожен такий розв'язок можна зобразити як $g = g^0(t,x)\varphi(\omega)$, де $g^0$ — фіксований розв'язок цього ж рівняння, $\varphi$ — довільна функція від $\omega$, а $\omega = \omega(t,x)$ — несталий розв'язок рівняння $\omega_t + \xi\omega_x = 0$. Тоді $\chi = {\omega_x}^4$ задовольняє рівняння $\chi_t + \xi\chi_x + 4\xi_x\chi = 0$. Таким чином, функція $h$ допускає представлення $h = g^0{\omega_x}^4\psi(\omega)$ з деякою гладкою функцією $\psi$ від $\omega$. З отриманих визначальних рівнянь випливає, що векторне поле $\partial_t + \xi\partial_x + \eta^1 u\partial_u$ є оператором редукції рівняння $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$. Звідки маємо

$$g_{tt} + g_{xxxx} = g^0{\omega_x}^4\varphi_{\omega\omega\omega\omega} + \cdots = g^0{\omega_x}^4(\varphi_{\omega\omega\omega\omega} + \cdots),$$

де вираз у дужках залежить лише від $\omega$, а через “$\cdots$” позначено члени, що містять похідні від $\varphi$ лише порядку менше за чотири. Це означає, що анзац $g = g^0(t,x)\varphi(\omega)$ редукує рівняння $g_{tt} + g_{xxxx} = h$ до звичайного диференціального рівняння $\varphi_{\omega\omega\omega\omega} + \cdots = \psi$, яке безперечно має деякий розв'язок $\varphi^0 = \varphi^0(\omega)$. Віднімаючи відповідну функцію $g = g^0\varphi^0$ від функції $\zeta$, занулимо функцію $h$.

Таким чином, без обмеження загальності можна вважати, що функція $\zeta$ задовольняє початкове рівняння (4.15). Тоді відображення, породжене точковим перетворенням симетрії $\bar{t} = t$, $\bar{x} = x$, $\bar{u} = u - \zeta(t,x)$ рівняння (4.15) на множині операторів редукції цього рівняння, переводить векторне поле $Q$ у векторне поле того ж вигляду, де $\zeta = 0$, а тому $\eta^0 = 0$.

Отже, вивчення регулярних операторів редукції лінійного рівняння стрижня (4.15) зведено до розв'язання перевизначеної системи нелінійних диференціальних рівнянь (4.16)–(4.18) для функцій $\xi = \xi(t,x)$ і $\gamma = \gamma(t)$. (Нагадаємо, що $\eta^1 := \frac{3}{2}\xi_x + \gamma(t)$.) Побудова загального розв'язку цієї системи виявилася непередбачувано складною задачею. Тому нижче розглянуто лише частинні випадки регулярних операторів редукції, що виникають при накладенні додаткових обмежень на функції $\xi$ і $\gamma$. Зокрема, складні й громіздкі обчислення в `Maple` показали, що кожен регулярний оператор редукції рівняння (4.15) з $\gamma = 0$ еквівалентний оператору ліївської симетрії цього рівняння. Аналогічний результат справедливий і за сукупності обмежень $\xi_{xx} = 0$, $\xi \neq 0$. Регулярних операторів редукції, для яких $\xi_t = 0$ та $\xi_x \neq 0$, взагалі немає.

Припустимо, що $\xi = 0$. Тоді рівняння (4.16) і (4.17) стають тотожностями, а $\eta^1 = \gamma(t)$. З рівняння (4.18) отримаємо єдине звичайне диференціальне рівняння $\gamma_{tt} + 2\gamma\gamma_t = 0$ для функції $\gamma$, проінтегрувавши яке один раз, знаходимо $\gamma_t + \gamma^2 = -\kappa$, де $\kappa$ — стала інтегрування. Звідки $\gamma = \varphi_t/\varphi$, де $\varphi = \varphi(t)$ — розв'язок лінійного звичайного диференціального рівняння $\varphi_{tt} + \kappa\varphi = 0$. Відповідний оператор редукції

$$Q_\mathrm{r} = \partial_t + \frac{\varphi_t}{\varphi}u\partial_u$$

дає анзац $u = \varphi(t)\theta(\omega)$, де $\omega = x$ — інваріантна незалежна змінна, а $\theta$ — інваріантна залежна змінна. Відповідне редуковане рівняння має вигляд $\theta_{\omega\omega\omega\omega} = \kappa\theta$, тобто, як і для сингулярного оператора редукції $Q_\mathrm{s}$ з твердження 4.10, регулярний оператор редукції $Q_{\rm r}$ пов'язаний з розділенням змінних у лінійному рівнянні стрижня (4.15). Цей оператор можна розглядати як відповідник оператора $Q_{\rm s}$ серед регулярних операторів редукції. Регулярний оператор редукції $Q_{\rm r}$ еквівалентний деякому оператору ліївської симетрії лише за умови $\varphi_t/\varphi=\mathrm{const}$.

**Деякі потенціальні симетрії рівняння стрижня.** Вивчимо зв'язок між рівнянням стрижня (4.15) і (1+1)-вимірним вільним рівнянням Шрьодінгера.

Лінійний диференціальний оператор $L:=\partial_t^2+\partial_x^4$, пов'язаний з рівнянням (4.15), можна факторизувати в добуток вільного оператора Шрьодінгера та формально спряженого до нього:

$$L=(i\partial_t+\partial_x^2)(-i\partial_t+\partial_x^2).$$

Це вказує на те, що розв'язки рівняння (4.15) тісно пов'язані з розв'язками (1+1)-вимірного вільного рівняння Шрьодінгера

$$i\psi_t+\psi_{xx}=0. \tag{4.20}$$

Щоб пояснити цей зв'язок в інший спосіб, розглянемо потенціальну систему, побудовану для рівняння (4.15) за законом збереження з характеристикою 1:

$$v_x=u_t,\quad v_t=-u_{xxx}. \tag{4.21}$$

Друге рівняння в (4.21) має збережну форму, що дозволяє ввести потенціал $w$, визначений умовами

$$w_x=v,\quad w_t=-u_{xx}. \tag{4.22}$$

Виключаючи $v$ з об'єднаної системи (4.21)–(4.22), отримаємо систему

$$u_t=w_{xx},\quad w_t=-u_{xx}. \tag{4.23}$$

Максимальною алгеброю ліївською інваріантності системи (4.23) є алгебра

$$\mathfrak g_1=\langle\partial_t,\,\partial_x,\,2t\partial_t+x\partial_x,\,w\partial_u-u\partial_w,\,2t\partial_x+xw\partial_u-xu\partial_w,$$

$$
\begin{aligned}
&4t^2\partial_x + 4tx\partial_x + \big(x^2w - 2tu\big)\partial_u - \big(x^2u + 2tw\big)\partial_w,\\
&u\partial_u + w\partial_w,\ \beta(t,x)\partial_u + \gamma(t,x)\partial_w\rangle,
\end{aligned}
$$

де $(\beta(t,x),\gamma(t,x))$ — пробігає множину розв'язів цієї системи.

Оскільки систему (4.23) можна інтерпретувати як потенціальну систему для рівняння (4.15), то алгебра $\mathfrak{g}_1$ є алгеброю потенціальних симетрій цього рівняння. Порівняння алгебри $\mathfrak{g}_1$ з максимальною алгеброю $\mathfrak{g}$ ліївської інваріантності рівняння (4.15) показує, що векторні поля

$$
\begin{aligned}
&w\partial_u - u\partial_w, \quad 2t\partial_x + xw\partial_u - xu\partial_w,\\
&4t^2\partial_x + 4tx\partial_x + \big(x^2w - 2tu\big)\partial_u - \big(x^2u + 2tw\big)\partial_w,
\end{aligned}
$$

алгебри $\mathfrak{g}_1$ не індуковані елементами алгебри $\mathfrak{g}$. Отже, будь-які елементи алгебри $\mathfrak{g}_1$, що містять ці оператори, є чисто потенціальними симетріями рівняння (4.15).

З системи (4.23) випливає, що комплекснозначна функція $\psi = w + iu$ змінних $t$ та $x$ задовольняє рівняння (4.20), а функція $w$ є розв'язком рівняння (4.15). Отже, має місце таке твердження.

**Твердження 4.11.** *Функція $u = u(t,x)$ є розв'язком рівняння* (4.15) *тоді й лише тоді, коли вона є дійсною* (*або уявною*) *частиною розв'язку* (1+1)-*вимірного вільного рівняння Шрьодінгера $i\psi_t + \psi_{xx} = 0$.*

Фіксований розв'язок рівняння (4.15) відповідає множині розв'язків рівняння (4.20), які відрізняються на доданки вигляду $C_1x + C_0$, де $C_0$ і $C_1$ — довільні дійсні сталі. Для рівняння (4.20) відомі широкі класи точних розв'язків. Тому твердження 4.11 дає простий спосіб побудови точних розв'язків рівняння (4.15).

**Про розширений симетрійний аналіз рівняння стрижня.** Незважаючи на те, що рівняння стрижня (4.15) є лінійним і має лише очевидні ліївські симетрії, воно цікаве, оскільки володіє низкою інших, нетривіальних з точки зору симетрійного аналізу властивостей. Наведемо деякі з них.

– Рівняння (4.15) має як регулярні, так і сингулярні умовні симетрії, які нееквівалентні ліївським симетріям та пов'язані з розділенням змінних.

– Одна з потенціальних систем рівняння стрижня (4.15) співпадає з (1+1)-вимірним вільним рівнянням Шрьодінгера, а тому рівняння (4.15) має чисто потенціальні та умовні потенціальні симетрії.

– Гладка функція змінних $t$, $x$ є розв'язком рівняння стрижня (4.15) тоді й лише тоді, коли вона є дійсною (або уявною) частиною деякого розв'язку (1+1)-вимірного вільного рівняння Шрьодінгера. Це дозволяє побудувати нові сім'ї точних розв'язків рівняння (4.15).

– Рівняння (4.15) допускає нелокальний оператор рекурсії, дія якого на локальні симетрії цього рівняння (що обов'язково є афінними за похідних від $u$) дає нетривіальні локальні симетрії вищого порядку. Отже, для довільного фіксованого порядку (за винятком порядку два) рівняння (4.15) має локальні симетрії цього порядку, які не належать до обгортуючих алгебр локальних симетрій нижчих порядків.

– Оскільки лінійний диференціальний оператор, пов'язаний з рівнянням (4.15), є формально самоспряженним, то простір косиметрій цього рівняння та простір характеристик його локальних симетрій співпадають. Це означає, що рівняння (4.15) має закони збереження як завгодно високого порядку.

## 4.4. Потенціальні закони збереження лінійних еволюційних рівнянь з одним потенціалом

Поняття потенціальних законів збереження диференціальних рівнянь виникло як природне узагальнення поняття локальних законів збереження. *Потенціальним законом збереження* системи $\mathcal{S}$ диференціальних рівнянь називають будь-який локальний закон збереження потенціальної системи, яка побудована з системи $\mathcal{S}$ через введення потенціалів з використанням локальних законів збереження системи $\mathcal{S}$ [250]. Цей термін вперше використано в роботі [65]. Потенціальні закони збереження можуть бути тривіальними в тому сенсі, що їх індуковано локальними законами збереження вихідної системи, див. [178, 250]. Ідею ітеративного введення потенціалів за допомогою локальних законів збереження потенціальних систем, побудованих на попередньому кроці, вперше запропоновано у відомій статті [285] і пізніше формалізовано у вигляді поняття *універсального абелевого накриття* диференціальних рівнянь у роботах [66, 266]. Незважаючи на те, що потенціальні закони збереження диференціальних рівнянь є цікавими і важливими об'єктами для вивчення в рамках симетрійного аналізу, нетривіальні та вичерпні результати щодо них отримано лише для декількох класів диференціальних рівнянь (див. відповідні огляди літератури та посилання у роботах [63, 178, 250]).

Узагальнюючи результати з [250] щодо лінійного рівняння теплопровідності, у статті [252] доведено, що всі потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку є тривіальними. Локальні закони збереження цих рівнянь добре відомі. А саме, їх простори утворено лінійними законами збереження, характеристики яких залежать лише від незалежних змінних і є розв'язками відповідних спряжених рівнянь. Таким чином, задачу опису потенціальних законів цих рівнянь повністю розв'язано.

У цьому параграфі результати роботи [252] щодо найпростіших потенціальних законів збереження (тобто таких, що включають один потенціал) (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку поширено на випадок рівнянь довільного порядку. Якщо порядок парний, то узагальнення є прямим і вичерпним. Для рівнянь непарних порядків досліджено лише найпростіші потенціальні системи, побудовані за допомогою лінійних законів збереження.

Розглянемо довільне лінійне еволюційне рівняння порядку $n$ з двома незалежними змінними $t$, $x$ та однією залежною змінною $u$:

$$u_t = \sum_{i=0}^{n} A^i u_i, \tag{4.24}$$

де $A^i = A^i(t,x)$ — довільні достатньо гладкі функції, $A^n \neq 0$, $n \in \{2,3,4,\dots\}$, символи $u_t$ та $u_i$ позначають похідні невідомої функції $u = u(t,x)$, тобто $u_t = \partial u/\partial t$, $u_i \equiv \partial^i u/\partial x^i$, $i = 1,\dots,n$, а також $u_0 \equiv u$. У разі необхідності будемо також використовувати такі позначення: $u_x = u_1$, $u_{xx} = u_2$, $u_{xxx} = u_3$. Символи $D_t$ і $D_x$ відповідно позначають оператори повної похідної за змінними $t$ та $x$, а Div — повну дивергенцію: $\mathrm{Div}\,\mathcal{V} = D_tF + D_xG$ для набору $\mathcal{V} = (F,G)$ диференціальних функцій $F$ та $G$. Див. [23, 252] щодо інших пов'язаних означень та позначень.

Нижче у п. 1 зроблено короткий огляд результатів з [253] щодо локальних законів збереження для рівнянь вигляду (4.24), а найпростіший потенціальний фрейм, побудований у [252] для (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, узагальнено на випадок рівнянь довільного порядку. Аналогічне узагальнення дуальних перетворень Дарбу проведено в п. 2. Найпростіші потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь парного та непарного порядків відповідно досліджено у пп. 3 і 4.

**1. Локальні закони збереження та найпростіший потенціальний фрейм.** Добре відомо, що будь-яке лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними $\mathcal{L}$ допускає косиметрії, які є функціями лише незалежних змінних і задовольняють спряжене рівняння $\mathcal{L}^\dagger$, причому кожен розв'язок рівняння $\mathcal{L}^\dagger$ є косиметрією рівняння $\mathcal{L}$. Більш того, кожна така косиметрія є характеристикою закону збереження рівняння $\mathcal{L}$ зі збережним вектором, лінійним за залежною змінною та її похідними. Згідно з [23, § 5.3], назвемо такі закони збереження *лінійними*.

Виявляється, що для будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку його простір законів збереження вичерпують лінійні закони збереження, а тому цей простір ізоморфний простору розв'язків відповідного спряженого рівняння (див. [253]). Іншими словами, будь-яка факторизована косиметрія рівняння (4.24) не залежить від похідних функції $u$, а функція $\alpha = \alpha(t,x)$ є косиметрією рівняння (4.24) тоді й лише тоді, коли вона є розв'язком спряженого рівняння

$$\alpha_t + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(A^i\alpha)_i = 0. \tag{4.25}$$

Кожна така косиметрія є характеристикою лінійного закону збереження рівняння (4.24) з канонічним збережним вектором $\mathcal{V} = (F, G)$, де

$$F = \alpha u, \qquad G = \sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i u_i, \tag{4.26}$$

а коефіцієнти $\sigma^i = \sigma^i(t,x)$ знаходяться з рекурентних співвідношень

$$\sigma^{n-1} = -\alpha A^n, \qquad \sigma^i = -\alpha A^{i+1} - \sigma^{i+1}_x, \qquad i = n-2, \dots, 0. \tag{4.27}$$

Для будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку простір його законів збереження породжено лінійними та квадратичними законами збереження [253]. Серед рівнянь цього типу існують і такі, що допускають нескінченні серії квадратичних законів збереження як завгодно високого порядку, і такі, які взагалі не мають квадратичних законів збереження. Для того, щоб формули та твердження, одержані для рівнянь парного порядку, були справедливими й у випадку непарного порядку, необхідно обмежитися розглядом лінійних локальних законів збереження, відповідних (лінійних) потенціальних систем та їхніх лінійних законів збереження.

Аналогічно роботі [252] вивчимо об'єкти, пов'язані з найпростішими потенціальними системами рівняння (4.24), а саме потенціальними системами, породженими окремими локальними законами збереження [250]. При цьому важливим є використання перетворень Дарбу лінійних еволюційних рівнянь [203]. Докладне вивчення найпростіших потенціальних систем є необхідним для розуміння загального випадку, оскільки такі системи є складовими загальних потенціальних систем.

Вводячи *потенціал* $v$ по нетривіальному канонічному збережному вектору (4.26), асоційованому з характеристикою $\alpha = \alpha(t,x) \neq 0$, отримаємо потенціальну систему

$$v_x = \alpha u, \quad v_t = -\sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i u_i. \tag{4.28}$$

Вихідне рівняння (4.24) для $u$ є диференціальним наслідком системи (4.28). Іншим диференціальним наслідком системи (4.28) є рівняння

$$v_t = -\sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i \left(\frac{v_x}{\alpha}\right)_i \tag{4.29}$$

на потенціальну залежну змінну $v$, яке називають *потенціальним рівнянням*, асоційованим з рівнянням (4.24) і характеристикою $\alpha$. Існує бієкція між розв'язками потенціальної системи і потенціального рівняння завдяки, з одного боку, проекції $(u,v) \to v$ та, з іншого боку, співвідношенню $u = v_x/\alpha$, див. [252]. Відповідність між розв'язками вихідного рівняння та потенціальної системи є взаємооднозначною лише з точністю до сталого доданку до $v$.

Для подальшого розгляду зручно використовувати іншу залежну змінну $w = \psi v$ замість $v$, де $\psi = 1/\alpha$. Функцію $w$ називають *модифікованим потенціалом*, асоційованим з характеристикою $\alpha = 1/\psi$. Потенціальна система (4.28) і потенціальне рівняння (4.29), переписані в термінах $w$ та $\psi$ замість $v$ та $\alpha$, відповідно набувають вигляду

$$w_x - \frac{\psi_x}{\psi} w = u, \quad w_t - \frac{\psi_t}{\psi} w = -\psi \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i u_i, \tag{4.30}$$

$$w_t = -\psi \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i \left(w_x - \frac{\psi_x}{\psi} w\right)_i + \frac{\psi_t}{\psi} w =: \sum_{i=0}^{n} B^i w_i. \tag{4.31}$$

Тут

$$B^i = -\psi\sigma^{i-1} + \psi\sum_{j=i}^{n-1}\binom{i}{j}\sigma^j\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)_{j-i}, \qquad i = n, n-1, \dots, 1,$$

$$B^0 = \frac{\psi_t}{\psi} + \psi\sum_{j=0}^{n-1}\sigma^j\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)_j.$$

Зокрема,

$$B^n = A^n, \qquad B^{n-1} = A^{n-1} - A^n_x.$$

Систему (4.30) і рівняння (4.31) називають *модифікованою потенціальною системою* і *модифікованим потенціальним рівнянням*, асоційованими з характеристикою $\alpha$. Такі представлення потенціальної системи та потенціального рівняння більш зручні для досліджень у рамках симетрійного аналізу.

Оскільки функція $v = 1$ є очевидним розв'язком рівняння (4.29), функція $w = \psi$ є розв'язком рівняння (4.31). Таким чином, перше рівняння системи (4.30) є насправді перетворенням Дарбу [203] рівняння (4.31) в рівняння (4.24).

**2. Дуальні перетворення Дарбу.** "Коваріантність" (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь будь-якого порядку відносно перетворення Дарбу вперше встановлено в статті [202]; див. також [203, с. 17]. На відміну від попереднього пункту надалі для зручності викладу вважаємо, що вихідним об'єктом розгляду є рівняння (4.31), записане у вигляді

$$w_t = \sum_{i=0}^{n} B^i w_i, \tag{4.32}$$

яке трактуємо як довільний представник класу лінійних еволюційних рівнянь.

Позначимо через $\mathrm{DT}[\varphi]$ перетворення Дарбу, побудоване за ненульовим розв'язком $\varphi$ рівняння (4.32):

$$\mathrm{DT}[\varphi](w) = w_x - \frac{\varphi_x}{\varphi}w.$$

Перетворення Дарбу має корисну властивість дуальності. Сформулюємо її аналогічно роботі [252] у дещо відмінному від [203, § 2.4] вигляді.

**Лема 4.12.** *Нехай* $w^0$ *— фіксований ненульовий розв'язок рівняння* (4.32)*, а перетворення Дарбу* $\mathrm{DT}[w^0]$ *відображає рівняння* (4.32) *в рівняння* (4.24)*. Тоді* $\alpha^0 = 1/w^0$ *є розв'язком рівняння* (4.25)*, спряженого до* (4.24)*, причому* $\mathrm{DT}[\alpha^0]$ *відображає рівняння* (4.25) *в рівняння спряжене до* (4.32)*, тобто*

$$
\begin{array}{ccc}
u_t = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} A^i u_i & \xleftarrow{\mathrm{DT}[w^0]} & w_t = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} B^i w_i, \\
 & \Updownarrow & \\
\alpha_t + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (A^i \alpha)_i = 0 & \xrightarrow{\mathrm{DT}[\alpha^0]} & \beta_t + \displaystyle\sum_{i=0}^{n} (-1)^i (B^i \beta)_i = 0.
\end{array}
$$

**Зауваження 4.13.** Аналогічно [252] перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[\alpha^0]$ назвемо *дуальним* до перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[w^0]$. Оскільки двічі спряжене рівняння співпадає з вихідним, то двічі дуальне перетворення Дарбу є не чим іншим як вихідне перетворення Дарбу. Це означає, що "тоді" у лемі 4.12 можна замінити на "тоді й лише тоді".

**Зауваження 4.14.** Перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[w^0]$ з леми 4.12 є лінійним відображенням простору розв'язків рівняння (4.32) у простір розв'язків рівняння (4.24). Ядро цього відображення співпадає з $\langle w^0 \rangle$. Його образом є весь простір розв'язків рівняння (4.24). Дійсно, для будь-якого розв'язку $u$ рівняння (4.24) можна знайти розв'язок $w$ рівняння (4.32), що відображається в $u$. Для цього потрібно проінтегрувати систему (4.30) відносно $w$. Згідно теореми Фробеніуса система (4.30) є сумісною внаслідок рівняння (4.24). Тому $\mathrm{DT}[w^0]$ є бієкцією між простором розв'язків рівняння (4.32), факторизованим по $\langle w^0 \rangle$, та простором розв'язків рівняння (4.24).

У випадку парного порядку $n$ лему 4.12 разом з зауваженням 4.14 можна переформулювати у термінах характеристик законів збереження.

**Лема 4.15.** *Нехай* $w^0$ *— ненульовий розв'язок рівняння* (4.32), *а перетворення Дарбу* $\mathrm{DT}[w^0]$ *відображає рівняння* (4.32) *у рівняння* (4.24). *Тоді* $\alpha^0 = 1/w^0$ *є характеристикою рівняння* (4.24), *причому перетворення Дарбу* $\mathrm{DT}[\alpha^0]$ *відображає простір характеристик рівняння* (4.24) *у простір характеристик рівняння* (4.32).

**Зауваження 4.16.** За умов леми 4.15 оператор, асоційований з $\mathrm{DT}[w^0]$, є розщеплюючим для пари операторів, асоційованих з рівняннями (4.24) і (4.32), тобто

$$\left(\partial_t - \sum_{i=0}^{n} A^i \partial_x^i\right)\mathrm{DT}[w^0] = \mathrm{DT}[w^0]\left(\partial_t - \sum_{i=0}^{n} B^i \partial_x^i\right).$$

**3. Найпростіші потенціальні закони збереження: парний порядок.** Якщо потенціальну систему побудовано шляхом введення потенціалу $v$ за законом збереження рівняння (4.24), то кожен її локальний закон збереження є *найпростішим потенціальним законом збереження* рівняння (4.24). Будемо казати, що найпростіший потенціальний закон збереження $\bar{\mathcal{F}}$ рівняння (4.24) *індуковано* локальним законом збереження $\mathcal{F}$ рівняння (4.24), якщо $\bar{\mathcal{F}}$ включає збережний вектор, який є підняттям збережного вектора з $\mathcal{F}$ відносно проекції

$$\varpi\colon \mathrm{J}^\infty(t,x\,|\,u,v) \to \mathrm{J}^\infty(t,x\,|\,u),$$

де $\mathrm{J}^\infty(t,x\,|\,u,v)$ (відповідно $\mathrm{J}^\infty(t,x\,|\,u)$) позначає простір струменів з незалежними змінними $t$, $x$ та залежними змінними $u$, $v$ (відповідно з залежною змінною $u$). Внаслідок твердження 2 з [178] це еквівалентно тому, що закон збереження $\bar{\mathcal{F}}$ містить збережний вектор, який залежить від $t$, $x$ та похідних функції $u$.

**Теорема 4.17.** *Кожен найпростіший потенціальний закон збереження будь-якого* (1+1)*-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальним законом збереження цього рівняння.*

*Доведення.* Потенціали $v$ та $\tilde{v}$, які введено по еквівалентним збережним векторам, пов'язані перетворенням $\tilde{v} = v + f[u]$, де $f[u]$ є функцією змінних $t$, $x$ і похідних від $u$. Це перетворення зберігає властивість індукованості найпростіших потенціальних законів збереження локальними. Тому для вичерпного дослідження найпростіших потенціальних законів збереження рівнянь вигляду (4.24) з парним $n$ достатньо вивчити локальні закони збереження потенціальних систем вигляду (4.28), асоційованих з канонічними збережними векторами (4.26).

Зафіксуємо рівняння з класу (4.24) та його характеристику $\alpha$ і розглянемо відповідну потенціальну систему (4.28). Оскільки звичайний потенціал $v$ пов'язаний з модифікованим потенціалом $w$ точковим перетворенням, то можна вивчати закони збереження модифікованої потенціальної системи (4.30) замість системи (4.28). З точністю до еквівалентності збережних векторів на множині розв'язків системи (4.30) похідні від $u$ можна виключити з будь-якого збережного вектора системи (4.30). Іншими словами, кожний локальний закон збереження $\bar{\mathcal{F}}$ модифікованої потенціальної системи (4.30) має збережний вектор, який залежить лише від $t$, $x$ та похідних потенціалу $w$, а тому його індуковано локальним законом збереження модифікованого потенціального рівняння (4.31).

Оскільки рівняння (4.31), як і вихідне, є (1+1)-вимірним лінійним еволюційним рівнянням парного порядку, то його простір законів збереження вичерпують лінійні закони збереження. Довільна характеристика $\beta$ системи (4.31) залежить лише від $t$ та $x$ і задовольняє рівняння, спряжене до (4.31). Згідно леми 4.15 існує характеристика $\tilde{\alpha}$ рівняння (4.24) така, що $\beta = \mathrm{DT}[\alpha]\tilde{\alpha}$.

Нехай $\mathcal{V}^1$, $\mathcal{V}^2$ — збережні вектори модифікованої потенціальної системи, які є підняттями канонічних збережних векторів вихідного рівняння (4.24) та модифікованого потенціального рівняння (4.31) і відповідно асоційовані з характеристиками $\tilde{\alpha}$, $\beta$. Сума їх густин дорівнює

$$\beta w + \tilde{\alpha} u = \Big(\tilde{\alpha}_x - \frac{\alpha_x}{\alpha}\tilde{\alpha}\Big) w + \tilde{\alpha}\Big(w_x + \frac{\alpha_x}{\alpha} w\Big) = D_x(\tilde{\alpha} w).$$

Позначимо через $\mathcal{V}^0$ тривіальний збережний вектор $(-D_x(\tilde{\alpha}w), D_t(\tilde{\alpha}w))$. Збережний вектор $\mathcal{V}^0 + \mathcal{V}^1 + \mathcal{V}^2$ системи (4.30) має нульову густину, а тому є тривіальним збережним вектором (або, насправді, нульовим). Це означає, що збережні вектори $-\mathcal{V}^1$ і $\mathcal{V}^2$ еквівалентні.

Таким чином, доведено, що будь-який найпростіший потенціальний закон збереження рівняння (4.24) має збережний вектор, який є підняттям локального збережного вектора рівняння (4.24). □

**Зауваження 4.18.** Явну побудову локального збережного вектора, еквівалентного вектору $\mathcal{V}^2$, у доведенні можна замінити аргументами, які базуються на критерії індукованості потенціальних законів збереження локальними; див. твердження 8 з [178]. Дійсно, канонічний збережний вектор модифікованої потенціальної системи (4.31) (тривіальна проекція $\mathcal{V}^2$) асоційований з характеристикою $\beta = \beta(t, x)$. Тому

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Div}\mathcal{V}^2 &= \beta\left(w_t - \sum_{i=0}^{n} B^i w_i\right) \\
&= \beta\left(w_t - \frac{\psi_t}{\psi}w + \psi\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i u_i + \psi\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i D_x^i\left(w_x - \frac{\psi_x}{\psi}w - u\right)\right) \\
&= \psi\beta\left(v_t + \sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i u_i\right) \\
&+ \psi\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-D_x)^i(\psi\sigma^i\beta)\right)(v_x - \alpha u) + D_x\Phi
\end{aligned}
$$

для деякої диференціальної функції $\Phi$ від $u$ та $v$, явний вигляд якої не є істотним. (Це лінійна функція похідних від $u$ та $v$ з коефіцієнтами, залежними від $t$, $x$.) Іншими словами, збережний вектор $\mathcal{V}^2$ відповідає закону збереження $\bar{\mathcal{F}}$ потенціальної системи (4.28) з характеристикою, що має компоненти

$$
\psi\beta, \quad \psi\sum_{i=0}^{n-1}(-D_x)^i(\psi\sigma^i\beta).
$$

Ця характеристика є повністю зведеною, оскільки не залежить від похідних функцій $u$, $v$. Зокрема, вона не залежить від $v$. Згідно твердження 8 з [178] асоційований закон збереження $\bar{\mathcal{F}}$ потенціальної системи (4.28) індуковано локальним законом збереження вихідного рівняння (4.24).

**4. Найпростіші потенціальні закони збереження: непарний порядок.** Теорему 4.17 не можна прямо поширити на випадок (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь непарного порядку, оскільки додатково до лінійних такі рівняння можуть мати квадратичні закони збереження. Тому обмежимося лише лінійними потенціальними структурами.

**Теорема 4.19.** *Кожен лінійний найпростіший потенціальний закон збереження* (1+1)*-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку, пов'язаний з лінійною потенціальною системою, індуковано локальним законом збереження цього рівняння.*

(1+1)-вимірне лінійне еволюційне рівняння $\mathcal{L}$ непарного порядку може також мати ще два типи найпростіших потенціальних законів збереження: 1) закони збереження потенціальних систем, побудованих за квадратичними збережними векторами рівняння $\mathcal{L}$, та 2) квадратичні закони збереження найпростіших лінійних потенціальних систем.

Дослідження потенціальних законів збереження першого типу є складним. Так, на відміну від лінійного випадку, відповідні потенціальні системи, як правило, не мають аналогів потенціальних рівнянь. Судячи з усього, є лише одна можливість вивчення законів збереження таких систем — через пряме застосування загальних методів (див., наприклад, [63, 66, 250]).

Існує простий критерій перевірки, коли потенціальний закон збереження другого типу індуковано локальним законом збереження вихідного рівняння (4.24).

**Теорема 4.20.** *Нехай* $\alpha = \alpha(t,x)$ *— ненульова характеристика* (1+1)*-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку* (4.24), *а*

$$\gamma = \Gamma w, \qquad \text{де} \quad \Gamma = \sum_{k=0}^{r} g^k(t,x) D_x^k, \qquad g^r \neq 0,$$

*є характеристикою відповідного модифікованого потенціального рівняння* (4.31). *Тоді закон збереження потенціальної системи* (4.28), *асоційований з* $\gamma$, *індуковано локальним законом збереження рівняння* (4.24) *тоді й лише тоді, коли розв'язок* $\psi = 1/\alpha$ *рівняння* (4.31) *належить ядру оператора* $\Gamma$, *тобто* $\Gamma\psi = 0$.

*Доведення.* Позначимо через $\mathcal{V}$ збережний вектор потенціальної системи (4.28), який отримано підняттям канонічного збережного вектора модифікованого потенціального рівняння (4.31), асоційовного з характеристикою $\gamma$, і подальшим перетворенням $v = \alpha w$. Аналогічно зауваженню 4.18 маємо, що

$$\begin{aligned}
\operatorname{Div}\mathcal{V} &= \gamma\Bigg(w_t - \sum_{i=0}^{n} B^i w_i\Bigg) \\
&= (\Gamma w)\Bigg(w_t - \frac{\psi_t}{\psi}w + \psi\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i u_i + \psi\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i D_x^i\bigg(w_x - \frac{\psi_x}{\psi}w - u\bigg)\Bigg) \\
&= \psi\Gamma(\psi v)\Bigg(v_t + \sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i u_i\Bigg) \\
&\qquad + \psi\Bigg(\sum_{i=0}^{n-1}(-D_x)^i\big(\psi\sigma^i\Gamma(\psi v)\big)\Bigg)(v_x - \alpha u) + D_x\Phi
\end{aligned}$$

для деякої диференціальної функції $\Phi$ змінних $u$, $v$, явний вигляд якої знову не є суттєвим. (Це квадратична функція похідних від $u$ та $v$ з коефіцієнтами, що залежать від $t$ і $x$.) Отже, збережний вектор $\mathcal{V}$ відповідає закону збереження потенціальної системи (4.28) з характеристикою $\lambda$, яка має компоненти

$$\psi\Gamma(\psi v), \qquad \psi\Bigg(\sum_{i=0}^{n-1}(-D_x)^i\big(\psi\sigma^i\Gamma(\psi v)\big)\Bigg).$$

Для того, щоб характеристика $\lambda$ була повністю зведеною, необхідно виключити з неї всі похідні $v_k$, $k = 1, \dots, r+n-1$, використовуючи диференціальні наслідки рівняння $v_x = \alpha u$. Зведений вигляд $\lambda$ залежить від потенціалу $v$ тоді й лише тоді, коли $\Gamma\psi \neq 0$. Таким чином, доведення випливає з критерію індукованості потенціальних законів збереження локальними, запропонованого в [178, твердження 8]. $\square$

**Приклад 4.21.** Побудуємо приклад, розпочинаючи з відповідного модифікованого потенціального рівняння з відомим простором квадратичних законів збереження. Розглянемо "лінійне рівняння Кортевега–де Фріза"

$$w_t = w_{xxx}, \tag{4.33}$$

яке співпадає зі своїм спряженим. Як доведено в [253], простір його квадратичних законів збереження породжено законами збереження з характеристиками $\Gamma_{ml}w$, де

$$\Gamma_{ml} = D_x^m(3tD_x^2 + x)^l D_x^m, \qquad l, m = 0, 1, 2, \dots .$$

У якості розв'язку $\psi$ модифікованого потенціального рівняння виберемо функцію $w = x$. Перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[x]$ відображає рівняння (4.33) у "вихідне" рівняння

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{x^2}u_x + \frac{3}{x^3}u, \tag{4.34}$$

яке також співпадає зі своїм спряженим. Розв'язком $\alpha$ рівняння (4.34), дуальним до $\psi$, є $u = 1/\psi = 1/x$. Потенціальна система, побудована за законом збереження рівняння (4.34) з характеристикою $\alpha = 1/x$, має вигляд

$$v_x = \frac{u}{x}, \qquad v_t = \frac{u_{xx}}{x} + \frac{u_x}{x^2} - \frac{u}{x^3}.$$

$\Gamma_{ml}\psi = 0$ тоді й лише тоді, коли $m \geqslant 2$ або $(m; l) = (1; 0)$. Тому повну множину незалежних найпростіших чисто потенціальних законів збереження рівняння (4.34), одержаних через введення потенціалу $\alpha = 1/x$, вичерпують квадратичні закони збереження, побудовані підняттям законів збереження відповідного модифікованого потенціального рівняння (4.33), які мають характеристики $\Gamma_{ml}w$, де або $m = 0$ та $l = 0, 1, 2, \dots$ або $m = 1$ та $l = 1, 2, \dots$.

Таким чином, у цьому параграфі вивчено найпростіші потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь, пов'язаних з введенням одного потенціалу за лінійними законами збереження. Такі закони збереження є повністю тривіальними у випадку рівнянь парного порядку: всі найпростіші потенціальні закони збереження будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальними законами збереження цього рівняння, а простір його локальних законів збереження вичерпують лінійні закони збереження. Аналогічні результати щодо рівнянь непарного порядку значно складніші. Усі найпростіші лінійні потенціальні закони збереження для цих рівнянь індуковано локальними законами збереження, але це не так у випадку квадратичних законів збереження. Одержано ефективний критерій, що дозволяє легко перевірити, коли квадратичний закон збереження найпростішого модифікованого потенціального рівняння призводить до чисто потенціального закону збереження вихідного рівняння: це має місце тоді й лише тоді, коли характеристика цього закону збереження не дорівнює нулю для значення $w = 1/\alpha$ модифікованого потенціалу $w$, де $\alpha$ є характеристикою лінійного закону збереження вихідного рівняння, який використано для введення потенціалу.

Попередній аналіз показує, що одержані результати для найпростіших законів збереження можна поширити на випадок довільної кількості потенціалів, введених за лінійними законами збереження. Першим кроком у цьому має бути побудова всього лінійного потенціального фрейму для класу (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь довільного порядку, як це реалізовано для рівнянь другого порядку в роботі [252]. Очевидно, що лінійний потенціальний фрейм співпадає з усім потенціальним фреймом у випадку рівнянь парного порядку. Розгляд нелінійних потенціальних систем, побудованих для рівнянь непарного порядку за квадратичними законами збереження, вимагає розвитку нових методів, відмінних від тих, що використано при вивчені лінійних потенціальних систем.

## 4.5. Рівняння неперервності в квантовій механіці та принцип відносності Галілея

Опишемо нелінійні рівняння типу Шрьодінгера, які сумісні з принципом відносності Галілея та розв'язки яких задовольняють рівняння неперервності. Ці результати базуються на статтях [69, 136]. Рівняння неперервності

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{4.35}$$

є одним з фундаментальних рівнянь квантової механіки. Залежно від визначення густини $\rho$ і струму $\vec{j} = (j^1, \ldots, j^n)$ можна побудувати принципово різні моделі квантової механіки з рівняннями руху, які відмінні від класичних лінійних рівнянь Шрьодінгера, Клейна–Гордона–Фока та Дірака.

**1.** Вивчимо спочатку симетрійні властивості рівняння неперервності, розглядаючи $(\rho, \vec{j})$ як залежні змінні, пов'язані рівнянням (4.35).

Позначимо $j^0 := \rho$, $x_0 := t$, $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, індекси $\mu$, $\nu$, $\kappa$ пробігають значення від 0 до $n$, а індекси $a$, $b$ — від 1 до $n$.

**Теорема 4.22.** *Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ рівняння (4.35) є нескінченновимірною та її утворено векторними полями:*

$$X = \xi^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x_\mu} + \big(a^{\mu\nu}(x)j^\nu + b^\mu(x)\big)\frac{\partial}{\partial j^\mu}, \tag{4.36}$$

*де $\xi^\mu(x)$ — довільні гладкі функції, $a^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial\xi^\mu}{\partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu}\big(\frac{\partial\xi^\kappa}{\partial x_\kappa} + C\big)$, $C$ — довільна стала, $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера, $\big(b^0(x), b^1(x), \ldots, b^n(x)\big)$ — довільний розв'язок рівняння* (4.35).

**Наслідок 4.23.** *Узагальнена алгебра Галілея* [144]

$$\mathrm{AG}_2(1,n) = \langle P_\mu, J_{ab}, G_a, D^{(1)}, A\rangle \tag{4.37}$$

*та конформна алгебра* [144]

$$\mathrm{AP}_2(1,n) = \mathrm{AC}(1,n) = \langle P_\mu, J_{ab}, J_{0a}, D^{(2)}, K_\mu\rangle \tag{4.38}$$

*є підалгебрами алгебри* $\mathfrak{g}$.

Тут використано такі позначення:

$$\begin{aligned}
&P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + j^a\partial_{j^b} - j^b\partial_{j^a}, \quad a<b,\\
&G_a = x_0\partial_a + \rho\partial_{j^a}, \quad J_{0a} = x_a\partial_0 + x_0\partial_a + j^a\partial_\rho + \rho\partial_{j^a},\\
&D^{(1)} = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - n\rho\partial_\rho - (n+1)j^a\partial_{j^a},\\
&D^{(2)} = x_\mu\partial_\mu - n\rho\partial_\rho - nj^a\partial_{j^a},\\
&A = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a - nx_0\rho\partial_\rho + (x_a\rho - (n+1)x_0j^a)\partial_{j^a},\\
&K_\mu = 2x_\mu D^{(2)} - x_\nu x^\nu g_{\mu\kappa}\partial_\kappa - 2x^\nu S_{\mu\nu}, \quad S_{\mu\nu} = g_{\mu\kappa}j^\nu\partial_{j^\kappa} - g_{\nu\kappa}j^\mu\partial_{j^\kappa},\\
&g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu=\nu=0,\\ -1, & \mu=\nu\neq 0,\\ 0, & \mu\neq\nu.\end{cases}
\end{aligned}$$

**Наслідок 4.24.** *Рівняння неперервності задовольняє як принцип відносності Галілея, так і принцип відносності Лоренца–Пуанкаре–Ейнштейна.*

Оскільки накладання додаткових зв'язків на $\rho$ та $\vec{j}$ у рівнянні (4.35), як правило, звужує алгебру ліївської інваріантності отриманої системи порівняно з алгеброю $\mathfrak{g}$, то варіюючи вигляд виразів для $\rho$ та $\vec{j}$ можна побудувати як чисто галілей-інваріантні, так і чисто пуанкаре-інваріантні моделі квантової механіки.

**2.** Розглянемо скалярну комплекснозначну хвильову функцію $u$ і визначимо $\rho$ та $\vec{j}$ як

$$\begin{aligned}
&\rho = f(uu^*),\\
&j^a = -\frac{i}{2}g(uu^*)\left(\frac{\partial u}{\partial x_a}u^* - u\frac{\partial u^*}{\partial x_a}\right) + \frac{\partial\varphi(uu^*)}{\partial x_a},
\end{aligned} \tag{4.39}$$

де $f$, $g$, $\varphi$ — довільні гладкі функції, причому $f \neq \mathrm{const}$, $g \neq 0$. Не обмежуючи загальності можна покласти $f(uu^*) \equiv uu^*$.

Опишемо значення параметр-функції $g(uu^*)$, $\varphi(uu^*)$, при яких рівняння на $u$, задане формулами (4.35) разом з (4.39), буде сумісним з принципом відносності Галілея, визначеним перетвореннями

$$t \to t' = t, \quad x_a \to x'_a = x_a + v_a t.$$

Вигляд компоненти перетворень для хвильової функції $u$ не фіксуємо.

**Теорема 4.25.** *Якщо $\rho$ та $\vec{j}$ визначено формулами* (4.39)*, то рівняння неперервності* (4.35) *буде галілей-інваріантним тоді й лише тоді, коли*

$$\begin{aligned} &\rho = uu^*, \\ &j^a = -\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_a}u^* - u\frac{\partial u^*}{\partial x_a}\right) + \frac{\partial \varphi(uu^*)}{\partial x_a}. \end{aligned} \tag{4.40}$$

*Генератори відповідних галілеївських перетворень мають вигляд*

$$G_a = x_0\partial_a + ix_a\left(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}\right).$$

Рівняння (4.35), де вирази для $\rho$ й $\vec{j}$ визначено (4.40), причому

$$\varphi = \lambda uu^*, \quad \lambda = \mathrm{const}, \quad \lambda \neq 0, \tag{4.41}$$

співпадає з рівнянням

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \lambda\Delta\rho = 0, \tag{4.42}$$

де

$$\rho = uu^*, \quad j^a = -\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_a}u^* - u\frac{\partial u^*}{\partial x_a}\right), \tag{4.43}$$

вперше розглянуто у роботах [125, 140].

Розглянемо ліївські симетрії нелінійних рівнянь Шрьодінгера вигляду

$$iu_0 + \frac{1}{2}\Delta u + i\frac{\Delta\varphi(uu^*)}{2uu^*}u = F\big(uu^*, (\vec{\nabla}(uu^*))^2, \Delta(uu^*)\big)u, \tag{4.44}$$

де $F$ — довільна дійсна гладка функція своїх аргументів.

Розв'язки рівняння (4.44) задовольняють рівняння (4.35) за умови (4.40) і сумісні з принципом відносності Галілея. Рівняння Шрьодінгера вигляду (4.44) з $\varphi(uu^*) = \lambda uu^*$ для деяких фіксованих значень параметр-функції $F$ розглянуто, зокрема, у роботах [125, 137–140, 144, 260, 278].

У термінах амплітуди $R$ та фази $\Theta$, тобто $u = R\exp(i\Theta)$, рівняння (4.44) еквівалентне системі

$$\begin{aligned} &R_0 + \vec{\nabla}R\cdot\vec{\nabla}\Theta + \frac{1}{2}R\Delta\Theta + \frac{1}{2R}\Delta\varphi\big(R^2\big) = 0,\\ &\Theta_0 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Theta)^2 - \frac{1}{2R}\Delta R + F\big(R^2, \big(\vec{\nabla}\big(R^2\big)\big)^2, \Delta R^2\big) = 0. \end{aligned} \tag{4.45}$$

**Теорема 4.26.** *При* $F = 0$ *максимальною алгеброю ліївської інваріантності системи* (4.45) *є:*

$$\langle P_\mu, J_{ab}, Q, G_a, D\rangle, \tag{4.46}$$

*якщо* $\varphi$ *— довільна функція;*

$$\langle P_\mu, J_{ab}, Q, G_a, D, I, A\rangle, \tag{4.47}$$

*якщо* $\varphi = \lambda R^2$ *з деякою ненульовою сталою* $\lambda$.

Тут використано такі позначення:

$$\begin{aligned} &P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a}, \quad a < b, \quad Q = \partial_\Theta,\\ &G_a = x_0\partial_{x_a} + ix_a\partial_\Theta, \quad D = 2x_0\partial_{x_0} + x_a\partial_{x_a},\\ &I = R\partial_R, \quad A = x_0^2\partial_{x_0} + x_0x_a\partial_{x_a} - \frac{n}{2}x_0R\partial_R + \frac{1}{2}x_a^2\partial_\Theta. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Алгебра (4.47) співпадає з суттєвою частиною [181] алгебри ліївської інваріантності вільного рівняння Шрьодінгера.

**Наслідок 4.27.** *Система* (4.45)*, де* $\varphi = \lambda R^2$ *з деякою ненульовою сталою* $\lambda$*, інваріантна відносно алгебри* (4.47) *тоді й лише тоді, коли*

$$F = R^{-1}\Delta R\Phi\left(\frac{R\Delta R}{(\vec{\nabla}R)^2}\right),$$

*де* $\Phi$ *— довільна дійсна гладка функція свого аргументу.*

**3.** Розглянемо узагальнення системи (4.44) вигляду

$$iu_0 + \frac{1}{2}\Delta u = (F_1 + iF_2)u, \tag{4.49}$$

де $F_m = F_m\big(uu^*, (\vec{\nabla}(uu^*))^2, \Delta(uu^*)\big)$, $m = 1, 2,$ — довільні дійсні гладкі функції своїх аргументів. Вигляд цих функцій визначимо з вимоги галілей-інваріантності рівняння (4.49).

У термінах амплітуди і фази рівняння (4.49) еквівалентне системі

$$\begin{aligned} &R_0 + \vec{\nabla}R \cdot \vec{\nabla}\Theta + \frac{1}{2}R\Delta\Theta - RF_2 = 0, \\ &\Theta_0 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Theta)^2 - \frac{1}{2R}\Delta R + F_1 = 0, \end{aligned} \tag{4.50}$$

де $F_m = F_m(R^2, (\vec{\nabla}(R^2))^2, \Delta R^2)$, $m = 1, 2$.

**Теорема 4.28.** *Система* (4.50) *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея* $\mathrm{AG}_2(1, n) = \langle P_\mu, J_{ab}, G_a, Q, \widetilde{D}, A \rangle$, *якщо вона має вигляд*

$$R_0 + \vec{\nabla}R \cdot \vec{\nabla}\Theta + \frac{1}{2}R\Delta\Theta - R^{1+4/n}\Psi\left(\frac{(\vec{\nabla}R)^2}{R^{2+4/n}}, \frac{\Delta R}{R^{1+4/n}}\right) = 0,$$

$$\Theta_0 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Theta)^2 - \frac{1}{2R}\Delta R + R^{4/n}\Phi\left(\frac{(\vec{\nabla}R)^2}{R^{2+4/n}}, \frac{\Delta R}{R^{1+4/n}}\right) = 0,$$

*де* $\Phi$, $\Psi$ *— довільні дійсні гладкі функції своїх аргументів. Базисні оператори алгебри* $\mathrm{AG}_2(1, n)$ *визначено в* (4.48), $\widetilde{D} = D - \frac{n}{2}I$.

**Теорема 4.29.** *Система* (4.50) *інваріантна відносно алгебри* (4.47), *якщо вона має вигляд*

$$\begin{aligned} &R_0 + \vec{\nabla}R \cdot \vec{\nabla}\Theta + \frac{1}{2}R\Delta\Theta - \Psi\left(\frac{R\Delta R}{(\vec{\nabla}R)^2}\right)\Delta R = 0, \\ &\Theta_0 + \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Theta)^2 - \frac{1}{2R}\Delta R + \Phi\left(\frac{R\Delta R}{(\vec{\nabla}R)^2}\right)\frac{\Delta R}{R} = 0, \end{aligned} \tag{4.51}$$

*де* $\Phi$, $\Psi$ *— довільні дійсні гладкі функції свого аргументу.*

Система (4.51) у термінах хвильової функції набуває вигляду

$$iu_0 + \frac{1}{2}\Delta u = \frac{\Delta|u|}{|u|}\left(\Phi\left(\frac{|u|\Delta|u|}{(\vec{\nabla}|u|)^2}\right) + i\Psi\left(\frac{|u|\Delta|u|}{(\vec{\nabla}|u|)^2}\right)\right)u, \tag{4.52}$$

або еквівалентно

$$iu_0 + \frac{1}{2}\Delta u = \frac{\Delta(uu^*)}{uu^*}\left(\tilde{\Phi}\left(\frac{uu^*\Delta(uu^*)}{(\vec{\nabla}(uu^*))^2}\right) + i\tilde{\Psi}\left(\frac{uu^*\Delta(uu^*)}{(\vec{\nabla}(uu^*))^2}\right)\right)u.$$

Отже, рівняння (4.51) при довільних значеннях параметр-функцій $\Psi$ і $\Phi$ допускає алгебру ліївської інваріантності, що співпадає з суттєвою частиною алгебри ліївської інваріантності вільного рівняння Шрьодінгера.

За певних фіксованих $\Psi$ і $\Phi$ симетрія системи (4.51) може суттєво розширятися. Так, наприклад, якщо в (4.51) $\Phi = \frac{1}{2}$, то друге рівняння системи (рівняння для фази) буде рівнянням Гамільтона–Якобі [139].

Розглянемо деякі вигляди рівняння неперервності (4.35) для (4.51).

*Випадок 1.* Якщо $\Psi = 0$, то розв'язки рівняння (4.51) задовольняють рівняння неперервності (4.35) з густиною і струмом, які визначено стандартним чином (4.43).

*Випадок 2.* Якщо

$$\Psi\Delta R = -\lambda\left(\Delta R + \frac{(\vec{\nabla}R)^2}{R}\right),$$

то розв'язки рівняння (4.51) задовольняють рівняння неперервності (4.35) з умовами (4.40) і (4.41) (або рівняння (4.42) з умовою (4.43)).

Таким чином, знайдено класи нелінійних рівнянь Шрьодінгера, які інваріантні відносно алгебри (4.47) (що співпадає з суттєвою частиною алгебри ліївської інваріантності вільного рівняння Шрьодінгера) і розв'язки яких задовольняють рівняння неперервності (4.35).

Необхідні та достатні умови лоренцевської інваріантності рівняння неперервності для електромагнітного поля отримано в роботах [9, 147].

# Основні результати та висновки

Основну увагу в дисертації зосереджено на проблемах, пов'язаних з узагальненими операторами Казіміра та реалізаціями алгебр Лі, ліївськими симетріями та модулями редукції диференціальних рівнянь. Основні результати дисертації можна сформулювати таким чином:

- Розроблено оригінальний метод знаходження фундаментального базису інваріантів (узагальнених операторів Казіміра) алгебр Лі, що використовує картанівський метод рухомих реперів у версії Фелса–Олвера. З метою тестування методу, демонстрації його переваг і пояснення процедури нормалізації заново обчислено інваріанти дійсних низькорозмірних алгебр Лі. При цьому виправлено ряд неточностей та помилок у попередніх результатах, наведених у літературі. Крім того, у багатьох випадках відповідні базиси інваріантів вдалося побудувати у компактнішій формі.
- Уперше отримано вичерпні описи базисів інваріантів серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, зокрема майже абелевих алгебр Лі, розв'язних алгебр Лі, нільрадикали яких є ниткоподібними майже абелевими алгебрами, нільпотентних алгебр строго верхньотрикутних матриць та розв'язних алгебр Лі з трикутними нільрадикалами й діагональними нільнезалежними елементами. У літературі наведено лише часткові результати або гіпотези щодо таких базисів, і лише в рамках запропонованого алгебраїчного підходу їх вдалося повністю описати.
- Введено строге означення модулів редукції диференціальних рівнянь, що дало змогу переглянути та наново побудувати теорію не-

класичних симетрій диференціальних рівнянь. Запропоновано поняття сингулярних модулів редукції диференціальних рівнянь та проведено детальне дослідження властивостей таких модулів.

- Досліджено сингулярні модулі редукції еволюційних рівнянь і квазілінійних рівнянь другого порядку. Також вивчено редукції диференціальних рівнянь до алгебраїчних рівнянь та звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Це дозволило впорядкувати й узагальнити всі раніше відомі "no-go" результати щодо некласичних симетрій диференціальних рівнянь.
- Доведено узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень без обмеження щодо кількості незалежних і залежних змінних. А саме, показано, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку такої групи можна побудувати за допомогою однієї квадратури та диференціювання. Детально проаналізовано зв'язок між знаходженням диференціальних інваріантів першого порядку для однопараметричних груп та інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті.
- Прокласифіковано максимальні алгебри ліївської інваріантності систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з комутуючими сталими матрицями коефіцієнтів без обмежень щодо кількості рівнянь і вигляду цих матриць. Отримано точні нижні та верхні оцінки розмірностей таких алгебр.
- Досліджено групоїд еквівалентності класу лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку, а також групоїди еквівалентності його підкласів, пов'язаних з раціональною формою, формою Лагера–Форсайта, першою та другою формами Арнольда. Це дозволило прокласифікувати ліївські симетрії лінійних звичайних диференціальних рівнянь алгебраїчним методом у три різні

способи. Нормалізаційні властивості ненормалізованих класів таких рівнянь покращено через їх репараметризацію. У результаті вперше побудовано приклади розширених узагальнених груп еквівалентності.

- Проведено повну групову класифікацію нелінійних галілей-інваріантних узагальнень рівнянь Бюргерса і Кортевега–де Фріза довільного порядку.
- Доведено теорему про лінійні оператори редукції загального лінійного диференціального рівняння з частинними похідними. Як приклад, що ілюструє цю теорему, досліджено сингулярні та регулярні оператори редукції лінійного рівняння стрижня. Додатково вивчено зв'язок між цим рівнянням та (1+1)-вимірним вільним рівнянням Шрьодінгера, що дозволило побудувати потенціальні симетрії рівняння стрижня.
- Вивчено найпростіші потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь, пов'язані з введенням одного потенціалу за лінійними законами збереження. Завдяки використанню дуального перетворення Дарбу доведено, що всі найпростіші потенціальні закони збереження будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальними законами збереження цього рівняння. Одержано ефективний критерій, який дозволяє легко перевірити, коли квадратичний закон збереження найпростішого потенціального рівняння є чисто потенціальним законом збереження відповідного (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку.
- Описано класи нелінійних рівнянь Шрьодінгера, які інваріантні відносно суттєвої частини максимальної алгебри ліївської симетрії вільного рівняння Шрьодінгера і розв'язки яких задовольняють рівняння неперервності.

# СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


1. Аксенов А.В., Нахождение дифференциальных инвариантов группы обыкновенного дифференциального уравнения без использования продолженного оператора, Тезисы докладов IX Коллоквиума “Современный групповой анализ. Методы и приложения”, Нижний Новгород, 1992, С. 4.

2. Беркович Л.М., Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения, РХД, Москва, 2002.

3. Бойко В.М., Редукція диференціальних рівнянь до алгебраїчних, *Доп. НАН України* (2014), no. 3, 7–12.

4. Бойко В.М., Попович В.О., Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь, *Праці Інституту математики НАН України* **36** (2001), 45–50.

5. Бойко В.М., Попович Р.О., Про диференціальні інваріанти в просторі двох змінних, *Доп. НАН України* (2001), no. 5, С. 7–10.

6. Бойко В.М., Попович Р.О., Диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі, *Праці Інституту математики НАН України* **36** (2001), 51–62.

7. Бойко В.М., Попович Р.О., Потенціальні закони збереження лінійних еволюційних рівнянь з одним потенціалом, *Доп. НАН України* (2012), no. 4, 7–14.

8. Бойко В.М., Попович Р.О., Умовні симетрії лінійного рівняння стрижня, *Доп. НАН України* (2013), no. 9, 7–15.

9. Бойко В.М., Цифра І.М., Лоренц-інваріантні рівняння неперервності для електромагнітного поля, *Праці Інституту математики НАН України* **19** (1998), 43–47.

10. Василенко О.Ф., Попович Р.Е., О классе редуцирующих операторов и решениях эволюционных уравнений, *Вестник Приазовского гостехуниверситета* (1999), no. 8, 269–273.

11. Гапонова О.В., Нестеренко М.О., Системи ЗДР другого порядку, інваріантні відносно низь- корозмірних алгебр Лі, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **3** (2006), № 2, 71–91.

12. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли), *Усп. мат. наук.* **47** (1992), no. 4, 83–144.

13. Корнєва І.П., Попович Р.О., Про $Q$-умовну симетрію лінійного $n$-вимірного рівняння теплопровідності *Праці Інституту математики НАН України* **19** (1998), 200–211.

14. Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И., Симметрийный анализ уравнений эволюционного типа, Москва–Ижевск, РХД, 2004, 392 с.

15. Лутфуллін М.В., Реалізації алгебр Лі невисоких розмірностей та інваріантні системи нелінійних диференціальних рівнянь, Дис. …канд. фіз.-мат. наук, Київ, 2004.

16. Магадеев Б.А., О групповой классификации нелинейных эволюционных уравнений, *Алгебра и анализ* **3** (1993), 141–156.

17. Морозов В.В., Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка, *Изв. высш. учеб. завед. Математика* (1958), no. 4 (5), 161–171.

18. Мубаракзянов Г.М., О разрешимых алгебрах Ли, *Изв. высш. учеб. завед. Математика* (1963), no. 1 (32), 114–123.

19. Мубаракзянов Г.М., Классификация вещественных структур алгебр Ли пятого порядка, *Изв. высш. учеб. завед. Математика* (1963), no. 3 (34), 99–106.

20. Нестеренко М.О., Контракції та реалізації алгебр Лі, Дис. …канд. фіз.-мат. наук, Київ, 2007.

21. Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера, *Укр. мат. журн.* **53** (2001), 1053–1060; arXiv:math-ph/0301009.

22. Овсянников Л.В., Групповой анализ дифференциальных уравнений, Москва, Наука, 1978, 400 с.

23. Олвер П., Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям, Москва, Мир, 1989, 639 с.

24. Петров А.З., Новые методы в общей теории относительности, Наука, Москва, 1966.

25. Попович Р.О., Про симетрію та точні розв'язки одного рівняння переносу, *Укр. мат. журн.* **47** (1995), 121–125.

26. Попович Р.О., Про клас $Q$-умовних симетрій та розв'язки еволюційних рівнянь, *Пр. Інституту математики НАН України* **19** (1998), 194–199.

27. Попович Р.О., Класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь, Дис. …док. фіз.-мат. наук, Київ, 2009.

28. Попович Р.Е., Бойко В.Н., Дифференциальные инварианты однопараметрической группы локальных преобразований и интегрируемые уравнения Риккати, *Вест. Самар. гос. ун-та.* **18** (2000), no. 4, 49–56.

29. Попович Р.О., Бойко В.М., Про групову класифікацію галілей-інваріантних еволюційних рівнянь другого порядку, Український математичний конгрес–2001. Тези доповідей. Секція № 5 (математична фізика), Київ, Інститут математики НАН України, 2001, 25–26.

30. Попович Р.О., Бойко В.М., Диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень: одна незалежна змінна, *Нелінійні коливання* **5** (2002), 218–223.

31. Ревенко І.В., Бойко В.М., Симетрія і деякі інтегровні випадки рівняння Абеля другого роду, *Доп. НАН України* (1995), no. 7, 16–18.

32. Фущич В.І., Бойко В.М., Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега–де Фріза високого порядку, *Укр. мат. журн.* **48** (1996), no. 12, 1589–1601.

33. Фущич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, Москва, Наука, 1990, 400 с.

34. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И., Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Киев, Наук. думка, 1989, 336 с.

35. Шаповал Н.М., Група точкових симетрій системи вільних рівнянь другого порядку, *Доп. НАН України* (2014), no. 6, 32–36.

36. Abel N.H., Oeuvres Complétes II, Editors S. Lie and L. Sylow, Christiana, 1839.

37. Abellanas L., Martinez Alonso L., A general setting for Casimir invariants, *J. Math. Phys.* **16** (1975), 1580–1584.

38. Abellanas L., Martinez Alonso L., Invariants in enveloping algebras under the action of Lie algebras of derivations, *J. Math. Phys.* **20** (1979), 437–440.

39. Abraham-Shrauner B., Hidden symmetries and non-local group generators for ordinary differential equations, *IMA J. Appl. Math.* **56** (1996), 235–252.

40. Abraham-Shrauner B., Hidden symmetries, first integrals and reduction of order of nonlinear ordinary differential equations, *J. Nonlinear Math. Phys.* **9** (2002), suppl. 2, 1–9.

41. Abraham-Shrauner B., Guo A., Hidden symmetries associated with the projective group of nonlinear first-order ordinary differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** (1992), 5597–5508.

42. Adam A.A., Mahomed F.M., Non-local symmetries of first-order equations, *IMA J. Appl. Math.* **60** (1998), 187–198.

43. Adam A.A., Mahomed F.M., Kara A.H., New solutions of the Abel equation, *Lie Groups Appl.* **1** (1994), 1–10.

44. Aminova A.V., Aminov N.A.-M., Projective geometry theory of systems of second-order differential equations: straightening and symmetry theorems, *Sb. Math.* **201** (2010), 631–643.

45. Ancochea J.M., Campoamor-Stursberg R., Garcia Vergnolle L., Solvable Lie algebras with naturally graded nilradicals and their invariants, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), 1339–1355.

46. Anderson R.L., Davison S.M., A generalization of Lie's "counting" theorem for second-order ordinary differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **48** (1975), 301–315.

47. Arrigo D.J., Broadbridge P., Hill J.M., Nonclassical symmetry solutions and the methods of Bluman–Cole and Clarkson–Kruskal, *J. Math. Phys.* **34** (1993), 4692–4703.

48. Arrigo D.J., Hill J.M., Broadbridge P., Nonclassical symmetry reductions of the linear diffusion equation with a nonlinear source, *IMA J. Appl. Math.* **52** (1994), 1–24.

49. Arrigo D.J., Hickling F., On the determining equations for the nonclassical reductions of the heat and Burgers' equation, *J. Math. Anal. Appl.* **270** (2002), 582–589.

50. Arnold V.I., Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Vol. 250, Springer-Verlag, New York, 1988.

51. Ayub M., Sadique S., Mahomed F.M., Singular invariant structures for Lie algebras admitted by a system of second-order ODEs, *Appl. Math. Comput.* **281** (2016), 137–147.

52. Bagderina Yu.Yu., Linearization criteria for a system of two second-order ordinary differential equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010), 465201, 14 pages.

53. Barannyk L.F., Fushchych W.I., Casimir operators of the generalised Poincaré and Galilei groups, in *Group theoretical methods in physics (Yurmala, 1985)*, Vol. II, VNU Sci. Press, Utrecht, 1986, 275–282.

54. Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations, *Acta Appl. Math.* **69** (2001), 43–94.

55. Beloshapka V.K., Kossovskiy I.G., Classification of homogeneous CR-manifolds in dimension 4, *J. Math. Anal. Appl.* **374** (2011), 655–672.

56. Beltrametti E.G., Blasi A., On the number of Casimir operators associated with any Lie group, *Phys. Lett.* **20** (1966), 62–64.

57. Berth M., Czichowski G., Using invariants to solve the equivalence problem for ordinary differential equations, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **11** (2001), 359–376.

58. Biggs R., Remsing C.C., On the classification of real four-dimensional Lie groups, *J. Lie Theory* **26** (2016), 1001—1035.

59. Biggs R., Remsing C.C., Quadratic Hamilton–Poisson systems in three dimensions: equivalence, stability, and integration, *Acta Appl. Math.* **148** (2017), 1–59.

60. Biggs R., Remsing C.C., Invariant control systems on Lie groups, in Lie Groups, Differential Equations, and Geometry, Berlin, Springer, 2017, 127–181.

61. Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Popovych R.O., Complete group classification of a class of nonlinear wave equations, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 123515, 32 pp.; arXiv:1106.4801.

62. Bluman G., Simplifying the form of Lie groups admitted by a given differential equation, *J. Math. Anal. Appl.* **145** (1990), 52–62.

63. Bluman G.W., Cheviakov A.F., Anco S.C., Applications of symmetry methods to partial differential equations, Springer, New York, 2010, 398 p.

64. Bluman G.W., Cole J.D., The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. Mech.* **18** (1969), 1025–1042.

65. Bluman G., Doran-Wu P., The use of factors to discover potential systems or linearizations. Geometric and algebraic structures in differential equations, *Acta Appl. Math.* **41** (1995), 21–43.

66. Bocharov A.V., Chetverikov V.N., Duzhin S.V. et al., Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics, Amer. Math. Soc., Providence, 1999, 333 p.

67. Bocharov A.V., Sokolov V.V., Svinolupov S.I., On some equivalence problems for differential equations, Preprint ESI 54, The Erwin Schrödonger International Institute for Mathematical Physics, Wien, Austria, 1993, 12 p.

68. Boyko V.M., On new generalizations of the Burgers and Korteweg–de Vries equations, in Proceedings of the Second International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics. Memorial Prof. W. Fushchych Conference”, Kyiv, Institute of Mathematics, 1997, Vol. 1, 122–129.

69. Boyko V.M., On Galilei invariance of the continuity equation, *Праці Інституту математики НАН України* **30** (2000), ч. 1, 99–102.

70. Boyko V.M., Nonlocal symmetry and integrable classes of Abel equation, *Праці Інституту математики НАН України* **50** (2004), ч. 1, 47–51.

71. Boyko V.M., Symmetry, equivalence and integrable classes of Abel equations, Sixth International Conference Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, June 20–26, 2005), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2005, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2005/Boyko.html`.

72. Boyko V.M., Symmetry, equivalence and integrable classes of Abel equations, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **3** (2006), № 2, 39–48; arXiv:nlin.SI/0404020.

73. Boyko V.M., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, Seven International Conference Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, June 24–30, 2007), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2007, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2007/Boyko.html`.

74. Boyko V.M., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, Fourth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, October 26–30, 2008), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2008, p. 11, `http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Talks08/Boyko.pdf`.

75. Boyko V.M., Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients, Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 17–21, 2012), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2012, p. 14, `http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abstracts2012/Boyko.pdf`.

76. Boyko V.M., Fushchych W.I., Lowering of order and general solutions of some classes of PDEs, *Reports Math. Phys.* **42** (1998), 311–318.

77. Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, *J. Math. Phys.* **57** (2016), 101503, 34 pp.; arXiv:1201.3223.

78. Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, International workshop in honor of Wilhelm Fushchych "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 17–20, 2016), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2016/Boyko_Kunzinger_Popovych.html`.

79. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), 5749–5762; arXiv:math-ph/0602046v2.

80. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames, 2010, arXiv:math-ph/0602046v3, 17 pp. (essentially extended version of [79]).

81. Boyko V.O., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras with fixed structure of nilradicals, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007), 113–130; arXiv:math-ph/0606045.

82. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of triangular Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **40** (2007), 7557–7572; arXiv:0704.0937.

83. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of triangular Lie algebras with one nilindependent diagonal element, *J. Phys. A: Math. Gen.* **40** (2007), 9783–9792; arXiv:0705.2394.

84. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of solvable Lie algebras with triangular nilradicals and diagonal nilindependent elements, *Linear Algebra Appl.* **428** (2008), 834–854; arXiv:0706.2465.

85. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras via moving frames, in Proceedings of 4th Workshop "Group Analysis

of Differential Equations and Integrable Systems" (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus), University of Cyprus, Nicosia, 2009, 36–44; arXiv:0904.4462.

86. Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras via moving frames, Eighth International Conference Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, June 21–27, 2009), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2009, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2009/Boyko.html`.

87. Boyko V.M., Popovych R.O., Differential invariants and integration of Riccati-type systems, Fourth International Conference Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, July 9–15, 2001), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2001, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/abstracts/Boyko.html`.

88. Boyko V.M., Popovych R.O., Simplest potential conservation laws of linear evolution equations, in Proceedings of 5th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (June 6–10, 2010, Protaras, Cyprus), University of Cyprus, Nicosia, 2011, 28–39; arXiv:1008.4851.

89. Boyko V.M., Popovych R.O., Reduction operators of the linear rod equation, *Proceedings of the Sixth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Protaras, Cyprus, June 17–21, 2012)*, University of Cyprus, Nicosia, 2013, 17–29.

90. Boyko V.M., Popovych R.O., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification, International workshop in honor of 70th birthday of Anatoly Nikitin "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 27–28, 2015), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/Abstracts2015/BoykoPopovych.html`.

91. Boyko V.M., Popovych R.O., Algebraic approach and group classification of classes of linear ordinary differential equations, Eighth International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 12–17, 2016), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2016, p. 18, `http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abs2016/Boyko.html`.

92. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Symmetries of system of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients, International workshop in honor of Prof. Wilhelm Fushchych "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 18–19, 2011), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2011, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/Boyko.html`.

93. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Lie symmetries of systems of second-order linear ordinary differential equations with constant coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* **397** (2013), 434–440; arXiv:1203.0387.

94. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids and group classification of classes of linear ordinary differential equations, Seventh International Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (Larnaca, Cyprus, June 15–19, 2014), Abstract, Nicosia, University of Cyprus, 2014, p. 15, `http://www.mas.ucy.ac.cy/~symmetry/Abs2014/Boyko.html`.

95. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classification, *J. Phys. Conf. Ser.* **621** (2015), 012002, 17 pp. arXiv:1403.6062v1.

96. Boyko V.M., Popovych R.O., Shapoval N.M., Equivalence groupoids of classes of linear ordinary differential equations and their group classi-

fication, 2015, arXiv:1403.6062v2, 22 pp. (essentially extended version of [95]).

97. Boyko V.M., Shapoval N.M., Extended symmetry analysis of a "non-conservative Fokker–Plank equation", in Proceedings of 5th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (June 6–10, 2010, Protaras, Cyprus), University of Cyprus, Nicosia, 2011, 40–46; arXiv:1008.1405.

98. Boyko V.M., Shapoval N.M., Symmetries of linear ordinary differential equations, International workshop in honor of Prof. Wilhelm Fushchych "Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics" (Kyiv, December 22–23, 2013), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2013, `https://www.imath.kiev.ua/~appmath/AbstractsWIF/BoykoShapoval2013.html`.

99. Campoamor-Stursberg R. Invariants of solvable rigid Lie algebras up to dimension 8, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002), 6293–6306

100. Campoamor-Stursberg R., On the invariants of some solvable rigid Lie algebras, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 771–784

101. Campoamor-Stursberg R., The structure of the invariants of perfect Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 6709–6723; Corrigendum, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 7977.

102. Campoamor-Stursberg R., The structure of the invariants of perfect Lie algebras II, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), 3627–3643.

103. Campoamor-Stursberg R., An extension based determinantal method to compute Casimir operators of Lie algebras, *Phys. Lett. A* **312** (2003), 211–219.

104. Campoamor-Stursberg R. An alternative interpretation of the Beltrametti–Blasi formula by means of differential forms, *Phys. Lett. A.* **327** (2004), 138–145.

105. Campoamor-Stursberg R., A new matrix method for the Casimir operators of the Lie algebras $w\mathfrak{s}p(N,\mathbb{R})$ and $I\mathfrak{s}p(2N,\mathbb{R})$, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005), 4187–4208.

106. Campoamor-Stursberg R., Some remarks concerning the invariants of rank one solvable real Lie algebras, *Algebra Colloq.* **12** (2005), 497–518.

107. Campoamor-Stursberg R., Application of the Gel'fand matrix method to the missing label problem in classical kinematical Lie algebras, *SIGMA* **2** (2006), 028, 11 pp.

108. Campoamor-Stursberg R., Affine Lie algebras with non-compact rank one Levi subalgebra and their invariants, *Acta Phys. Polon. B.* **38** (2007), 3–20.

109. Campoamor-Stursberg R., Solvable Lie algebras with an $\mathbb{N}$-graded nilradical of maximal nilpotency degree and their invariants, *J. Phys. A: Math. Gen.* **43** (2010), 145202, 18 pp.

110. Campoamor-Stursberg R., Systems of second-order linear ODE's with constant coefficients and their symmetries, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **16** (2011), 3015–3023.

111. Campoamor-Stursberg R., Systems of second-order linear ODE's with constant coefficients and their symmetries. II. The case of non-diagonal coefficient matrices, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** (2012), 1178–1193.

112. Cao Y., Tan Z., Automorphisms of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over a commutative ring, *Linear Algebra Appl.* **360** (2003), 105–122.

113. Cartan É., La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus, et les espaces généralisés, Exposés de géométrie No. 5, Hermann, Paris, 1935.

114. Cartan É., La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile, Cahiers scientifiques 18, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

115. Casimir H.B.G., Über die Konstruktion einer zu den irreduzibelen Darstellungen halbeinfacher kontinuierlicher Gruppen gehörichen Differentialgleichung, *Proc. R. Acad. Amsterdam* **34** (1931), 844–846.

116. Cerquetelli N., Ciccoli N., Nucci M.C. Four dimensional Lie symmetry algebras and fourth order ordinary differential equations, *J. Nonlinear Math. Phys.* **9** (2002), supl. 2, 24–35.

117. Chaichian M., Demichev A.P., Nelipa N.F., The Casimir operators of inhomogeneous groups, *Comm. Math. Phys.* **90** (1983), 353–372.

118. Cheb-Terrab E.S., A connection between Abel and ${}_pF_q$ hypergeometric differential equations, *European J. Appl. Math.* **15** (2004), 1–11, math-ph/0402040.

119. Cheb-Terrab E.S., Kolokolnikov T., First-order ordinary differential equations, symmetries and linear transformations, *European J. Appl. Math.* **14** (2003), 231–246, math-ph/0007023.

120. Cheb-Terrab E.S., Roche A.D., Abel ODEs: equivalence and integrable classes, *Comp. Phys. Comm.* **130** (2000), 204–231, math-ph/0001037.

121. Cheb-Terrab E.S., Roche A.D., An Abel ordinary differential equation class generalizing known integrable classes, *European J. Appl. Math.* **14** (2003), 217–229, math.GM/0002059.

122. Clarkson P.A., Kruskal M.D., New similarity solutions of the Boussinesq equation, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 2201–2213.

123. Clarkson P.A., Mansfield E.L., Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations, *Phys. D* **70** (1993), 250–288.

124. Clarkson P.A., Mansfield E.L., Algorithms for the nonclassical method of symmetry reductions, *SIAM J. Appl. Math.* **54** (1994), 1693–1719.

125. Doebner H.-D., Goldin G.A., Properties of nonlinear Schrödinger equations associated with diffeomorphism group representations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994), 1771–1780.

126. Edelstein R.M., Govinder K.S., Mahomed F.M., Solution of ordinary differential equation via nonlocal transformations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001), 1141–1152.

127. Euler N., Euler M., Sundman symmetries of nonlinear second-order and third-order ordinary differential equations, *J. Nonlinear Math. Phys.* **11** (2004), 399–421.

128. Euler N., Wolf T., Leach P.G.L., Euler M., Linearisable third-order ordinary differential equations and generalised Sundman transformations: the case $X''' = 0$, *Acta Appl. Math.* **76** (2003), 89–115.

129. Fels M., Some applications of Cartan's method of equivalence to the geometric study of ordinary and partial differential equations, Ph.D. Thesis, McGill University, Montreal, 1993.

130. Fels M., The equivalence problem for systems of second-order ordinary differential equations, *Proc. London Math. Soc. (3)* **71** (1995), 221–240.

131. Fels M., Olver P., Moving coframes: I. A practical algorithm, *Acta Appl. Math.* **51** (1998), 161–213.

132. Fels M., Olver P., Moving coframes: II. Regularization and theoretical foundations, *Acta Appl. Math.* **55** (1999), 127–208.

133. Fialowski A., Penkava M., Deformations of four-dimensional Lie algebras, *Commun. Contemp. Math.* **9** (2007), 41—79.

134. Fialowski A., Penkava M., Moduli spaces of low dimensional real Lie algebras, *J. Math. Phys.* **49** (2008), 073507, 16 pp.

135. Forsyth A.R., Invariants, covariants and quotient-derivatives associated with linear differential equations, *Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A* **179** (1888), 377–489.

136. Fushchych W.I., Boyko V.M., Continuity equation in nonlinear quantum mechanics and the Galilei relativity principle, *J. Nonlinear Math. Phys.* **4** (1997), 124–128; arXiv:math-ph/0208016.

137. Fushchych W.I., Cherniha R.M., Galilei-invariant nonlinear equations of the Schrödinger-type and their exact solutions I, II, *Ukrainian Math. J.* **41** (1989), 1349–1357 1687–1694.

138. Fushchych W.I., Cherniha R.M., Galilei-invariant systems of nonlinear systems of evolution equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **28** (1995), 5569–5579.

139. Fushchych W., Cherniha R., Chopyk V., On unique symmetry of two nonlinear generalizations of the Schrödinger equation, *J. Nonlinear Math. Phys.* **3** (1996), 296–301.

140. Fushchych W.I., Chopyk V., Nattermann P., Scherer W., Symmetries and reductions of nonlinear Schrödinger equations of Doebner–Goldin type, *Reports on Math. Phys.* **35** (1995), 129–138.

141. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of Maxwell's equations, Dordrech, D. Reidel, 1987, 220 pp.

142. Fushchych W.I., Nikitin A.G., Symmetries of equations of quantum mechanics, New York, Allerton Press Inc., 1994, 480 pp.

143. Fushchych W.I., Popowych R.O., Symmetry reduction and exact solution of the Navier–Stokes equations. I, *J. Nonlinear Math. Phys* **1** (1994), 75–113; arXiv:math-ph/0207016.

144. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathimatical physics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

145. Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I., Popovych R.O., $Q$-conditional symmetry of the linear heat equation, *Proc. Acad. Sci. Ukraine* (1992), no. 12, 28–33.

146. Fushchych W.I., Tsyfra I.M., On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry, *J. Phys. A: Math. Gen.* **20** (1987), L45–L48.

147. Fushchych W.I., Tsyfra I.M., Boyko V.M., Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **1** (1994), 210–221; math-ph/0207024.

148. Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Conditional symmetry and reduction of partial differential equations, *Ukrainian Math. J.* **44** (1992), 875–886.

149. Gainetdinova A.A., Gazizov R.K., Integrability of systems of two second-order ordinary differential equations admitting four-dimensional Lie algebras, *Proc. A* **473** (2017), 20160461, 13 pp.

150. Gantmacher F.R., The theory of matrices, Vol. 1, Chelsea Publishing Co., New York, 1959.

151. Gelfand I.M. Centre of infinitesimal group ring, *Mat. Sb.* **26** (1950), 103–112.

152. Gubbiotti G., Nucci M.C., Are all classical superintegrable systems in two-dimensional space linearizable? *J. Math. Phys.* **58** (2017), 012902, 14 pp.

153. González-Gascón F., González-López A., Symmetries of differential equations. IV, *J. Math. Phys.* **24** (1983), 2006–2021.

154. González-Gascón F., González-López A., New results concerning systems of differential equations and their symmetry vectors, *Phys. Lett. A* **108** (1985), 319–321. Errata: *Phys. Lett. A* **109** (1985), 465.

155. González-Gascón F., González-López A., The inverse problem concerning symmetries of ordinary differential equations, *J. Math. Phys.* **29** (1988), 618–621.

156. González-López A., Symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations, *J. Math. Phys.* **29** (1988), 1097–1105.

157. Gonzáles-López A., Kamran N., Olver P., Lie algebras of vector fields in the real plane, *Proc. London Math. Soc. (3)* **64** (1992), 339–368.

158. Grundland A.M., Tafel J., On the existence of nonclassical symmetries of partial differential equations, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 1426–1434.

159. Halphen G.H., *Sur les invariants différentielles*, Thése présentée à la Faculté de Sciences de Paris, 1878.

160. Hernádez Heredero R., Olver P.J. Classification of invariant wave equations, *J. Math. Phys.* **37** (1996), 6419–6438.

161. Hrivnák J., Novotný P., Twisted cocycles of Lie algebras and corresponding invariant functions, *Linear Algebra Appl.* **430** (2009), 1384—1403.

162. Ibragimov N.H., Elementary Lie group analysis and ordinary differential equations, *Wiley Series in Mathematical Methods in Practice*, Vol. 4, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1999, xviii+347 pp.

163. Ibragimov N.H., Gainetdinova A.A., Three-dimensional dynamical systems with four-dimensional Vessiot–Guldberg–Lie algebras, *J. Appl. Anal. Comput.* **7** (2017), 872–883.

164. Ibragimov N.H., Gainetdinova A.A., Classification and integration of four-dimensional dynamical systems admitting non-linear superposition, *Internat. J. Non-Linear Mech.* **90** (2017), 50–71.

165. Ibragimov N.H., Magri F., Geometric proof of Lie's linearization theorem, *Nonlinear Dynamics* **36** (2004), 41–46.

166. Ibragimov N.H., Meleshko S.V., Linearization of third-order ordinary differential equations by point transformations, *Archives of ALGA* **1** (2004), 71–93.

167. Jacobson N., Lie algebras, Dover Publications, Inc., New York, 1962.

168. Kamke E., Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, New York, Chelsea Publishing, 1959.

169. Kaneta H., The invariant polynomial algebras for the groups IU($n$) and ISO($n$), *Nagoya Math. J.* **94** (1984), 43–59.

170. Kaneta H., The invariant polynomial algebras for the groups ISL($n$) and ISp($n$), *Nagoya Math. J.* **94** (1984), 61–73.

171. Kingston J.G., On point transformations of evolution equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** (1991), L769–L774.

172. Kirillov A.A., Elements of the theory of representations, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 220, Berlin – New York, Springer-Verlag, 1976.

173. Kozlov R., Symmetries of systems of stochastic differential equations with diffusion matrices of full rank, *J. Phys. A: Math. Theor.* 43 (2010), 245201, 16 pp.

174. Krause J., Michel L., Classification of the symmetries of ordinary differential equations, in Group Theoretical Methods in Physics (Moscow, 1990), *Lecture Notes in Phys.*, Vol. 382, Springer, Berlin, 1991, 251–262.

175. Kruchkovich G.I. Classification of three-dimensional Riemannian spaces according to groups of motions, *Uspehi Matem. Nauk* **9** (1954), no. 1, 3–40.

176. Kruchkovich G.I. On motions in semi-reducible Riemann spaces, *Uspehi Matem. Nauk* **12** (1957), no. 6, 149–156.

177. Kruchkovich G.I. Lectures on groups of motions, Erevan, Erevan. Univ., 1977.

178. Kunzinger M., Popovych R.O., Potential conservation laws, *J. Math. Phys.* **49** (2008), 103506, 34 p.

179. Kunzinger M., Popovych R.O., Is a nonclassical symmetry a symmetry?, in Proceedings of 4th Workshop "Group Analysis of Differential Equati-

ons and Integrable Systems" (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus), 2009, 107–120; arXiv:0903.0821.

180. Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction operators in two dimensions, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 505201, 24 pp.; arXiv:0808.3577.

181. Kurujyibwami C., Basarab-Horwath P., Popovych R.O., Algebraic method for group classification of (1+1)-dimensional linear Schrödinger equations, arXiv:1607.04118, 30 pp.

182. Laguerre E., Sur les équations différentielles linéaires du troisième ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris* **88** (1879), 116–119.

183. Lemke J., Ne'eman Y., Pecina-Cruz J., Wigner analysis and Casimir operators of $\overline{\mathrm{SA}}(4,\mathbf{R})$, *J. Math. Phys.* **33** (1992), 2656–2659.

184. Levi D., Winternitz P., Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989), 2915–2924.

185. Lie S. Theorie der Transformationsgruppen, *Math. Ann.* **16** (1880), 441–528; Gesammetle Abhandlungen, Vol. 6, Leipzig, B.G. Teubner, 1927, 1–94.

186. Lie S., Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen $xy$, die eine Gruppe von Transformationen gestatten, *Math. Ann.* **32** (1888), 213–281.

187. Lie S., *Theorie der Transformationsgruppen*, Bds. 1–3, B.G. Teubner, Leipzig, 1888, 1890, 1893.

188. Lie S., Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen, Leipzig: Teubner, 1891, 582 c.

189. Lie S., Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Adwendungen, Teubner, Leipzig, 1893.

190. Lisle I.G., *Equivalence transformations for classes of differential equations*, Ph.D. Thesis, University of British Columbia, Vancouver, 1992.

191. Lutfullin M.V., Popovych R.O., Realizations of real 4-dimensional solvable decomposable Lie algebras, *Праці Інституту математики НАН України*, **43** (2002), Part 2, 466–468.

192. MacCallum M.A.H., On the enumeration of the real four-dimensional Lie algebras, in *On Einstein's Path: essays in honor of Engelbert Schucking*, Editor A.L. Harvey, New York, Springer Verlag, 1999, 299–317 (first version circulated as a preprint in 1979).

193. Magazev A.A., Mikheyev V.V., Shirokov I.V., Computation of composition functions and invariant vector fields in terms of structure constants of associated Lie algebras, *SIGMA* **11** (2015), 066, 17 pp.

194. Mahomed F.M., Symmetry group classification of ordinary differential equations: survey of some results, *Math. Methods Appl. Sci.* **30** (2007), 1995–2012.

195. Mahomed F.M., Leach P.G.L., Lie algebras associated with scalar second-order ordinary differential equations, *J. Math. Phys.* **30** (1989), 2770–2777.

196. Mahomed F.M., Leach P.G.L., Symmetry Lie algebras of $n$th order ordinary differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **151** (1990), 80–107.

197. Makaruk H. Real Lie algebras of dimension $d \leq 4$ which fulfil the Einstein equations, *Rep. Math. Phys.* **32** (1993), 375–383.

198. Makedonskyi Ie.O., Petravchuk A.P., On nilpotent and solvable Lie algebras of derivations, *J. Algebra* **401** (2014), 245—257.

199. Manganaro N., Pavlov M.V., The constant astigmatism equation. New exact solution, *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** (2014), 075203, arXiv:1311.1136.

200. Mansfield E.L., The nonclassical group analysis of the heat equation, *J. Math. Anal. Appl.* **231** (1999), 526–542.

201. Markus L., *Group theory and differential equations*, Lecture Notes, University of Minnesota, 1959–1960.

202. Matveev V.B., Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtcev–Petviaschvily equation, depending on functional parameters, *Lett. Math. Phys.* **3** (1979), 213–216.

203. Matveev V.B., Salle M.A., Darboux transformations and solitons, Berlin, Springer-Verlag, 1991, 120 p.

204. Meleshko S.V., Group classification of equations of two-dimensional gas motions, *J. Appl. Math. Mech.* **58** (1994), 629–635.

205. Meleshko S., Comment on "Symmetry breaking of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **16** (2011), 3447–3450.

206. Mellin C.M., Mahomed F.M., Leach P.G.L., Solution of generalized Emden–Fowler equations with two symmetries, *Internat. J. Non-Linear Mech.* **29** (1994), 529–538.

207. Merker J., Characterization of the Newtonian free particle system in $m \geqslant 2$ dependent variables, *Acta Appl. Math.* **92** (2006), 125–207.

208. Morozov O.I., Wafo Soh C., The equivalence problem for the Euler–Bernoulli beam equation via Cartan's method, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 135206, 14 p.

209. Moyo S., Meleshko S.V., Oguis G.F., Complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18** (2013), 2972–2983.

210. Ndogmo J.C., Invariants of solvable Lie algebras of dimension six, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** (2000), 2273–2287.

211. Ndogmo J.C., Properties of the invariants of solvable Lie algebras, *Canad. Math. Bull.* **43** (2000), 459–471.

212. Ndogmo J.C., Invariants of a semi-direct sum of Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004), 5635–5647.

213. Ndogmo J.C., Equivalence transformations of the Euler–Bernoulli equation, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **13** (2012), 2172–2177; arXiv:1110.6029.

214. Ndogmo J.C., Winternitz P., Generalized Casimir operators of solvable Lie algebras with Abelian nilradicals, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994), P. 2787–2800.

215. Nesterenko M.O., Transformation groups on real plane and their differential invariants, *Int. J. Math. Math. Sci.* (2006), Art. ID 17410, 17 pp.; arXiv:math-ph/0512038.

216. Nesterenko M.O., Boyko V.M., Realizations of indecomposable solvable 4-dimensional real Lie algebras, *Праці Інституту математики НАН України* **43** (2002), ч. 1, 474–477.

217. Nesterenko M.O., Popovych R.O., Realizations of real unsolvable low-dimensional Lie algebras, *Праці Інституту математики НАН України*, **55** (2005), 163–168; arXiv:math-ph/0510015.

218. Nesterenko M.O., Popovych R.O., Contractions of low-dimensional Lie algebra, *J. Math. Phys.* **47** (2006), 123515, 45 pp.; arXiv:math-ph/0608018.

219. Novotný P., Hrivnák J., On $(\alpha,\beta,\gamma)$-derivations of Lie algebras and corresponding invariant functions, *J. Geom. Phys.* **58** (2008), 208—217.

220. Olver P.J., Applications of Lie groups to differential equations, 2nd ed., *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 107, Springer-Verlag, New York, 1993, xxviii+513 pp.

221. Olver P.J., Direct reduction and differential constraints, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **444** (1994), 509–523.

222. Olver P.J., Differential invariants and invariant differential equations, *Lie Groups and their Appl.* **1** (1994), 177–192.

223. Olver P.J., Differential invariants, *Acta Appl. Math.* **41** (1995), 271–284.

224. Olver P.J., Equivalence, invariants, and symmetry, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xvi+525 pp.

225. Olver P.J., Pseudo-stabilization of prolonged group actions. I. The order zero case, *J. Nonlin. Math. Phys.* **4** (1997), 271–277.

226. Olver P.J., Lectures on moving frames, Preprint, University of Minnesota, 2008.

227. Olver P.J., Pohjanpelto J., Moving frames for Lie pseudo-groups, *Canad. J. Math.* **60** (2008), 1336–1386.

228. Olver P.J., Rosenau P., Group-invariant solutions of differential equations, *SIAM J. Appl. Math.* **47** (1987), 263–278.

229. Olver P.J., Vorob'ev E.M., Nonclassical and conditional symmetries, in *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 3, Editor N.H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1996, 291–328.

230. Ovsiannikov L.V., *Group analysis of differential equations*, Academic Press, New York, 1982.

231. Pandey S.N., Bindu P., Senthilvelan M., Lakshmanan M., A group theoretical identification of integrable cases of the Lienard-type equation $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$. I. Equations having nonmaximal number of Lie point symmetries, *J. Math. Phys.* **50** (2009), 082702, 19 pp.

232. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Invariants of real low dimension Lie algebras *J. Math. Phys.* **17** (1976), 986–994.

233. Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H., Subgroups of the Poincaré group and their invariants, *J. Math. Phys.* **17** (1976), 977–985.

234. Patera J., Winternitz P., Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.* **18** (1977), 1449–1455.

235. Pauri M., Prosperi G.M., On the construction of the invariants operators for any finite-parameter Lie group, *Nuovo Cimento A* **43** (1966), 533–537.

236. Pecina-Cruz J.N., An algorithm to calculate the invariants of any Lie algebra, *J. Math. Phys.* **35** (1994), 3146–3162.

237. Perelomov A.M., Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras, Birkhauser Verlag, Basel, 1990.

238. Perroud M., The fundamental invariants of inhomogeneous classical groups, *J. Math. Phys.* **24** (1983), 1381–1391.

239. Pocheketa O.A., Popovych R.O., Reduction operators and exact solutions of generalized Burgers equations, *Phys. Lett. A* **376** (2012), 2847–2850; arXiv:1112.6394.

240. Pocheketa O.A., Popovych R.O., Reduction operators of Burgers equation, *J. Math. Anal. Appl.* **398** (2013), 270–277; arXiv:1208.0232.

241. Polyanin A.D., Handbook of linear partial differential equations for engineers and scientists, Boca Raton, Chapman & Hall/CRC, 2002, 781 p.

242. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Handbook of exact solutions for ordinary differential equations, Boca Raton, CRC Press, 1995.

243. Popovych R.O., Classification of admissible transformations of differential equations, *Збірник праць Інституту математики НАН України* **3** (2006), № 2, 239–254.

244. Popovych R.O., Reduction operators of linear second-order parabolic equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008), 185202, 31 pp.; arXiv:0712.2764.

245. Popovych R.O., Bihlo A., Symmetry preserving parameterization schemes, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 073102, 36 pp.; arXiv:1010.3010.

246. Popovych R.O., Boyko V.M., Differential invariants and application to Riccati-type systems, *Праці Інституту математики НАН України* **43** (2002), ч. 1, 184–193; arXiv:math-ph/0112057.

247. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 7337–7360.

248. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of low-dimensional Lie algebras, Fifth International Conference Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics (Kyiv, June 23–29, 2003), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, 2003, `https://www.imath.kiev.ua/~snmp2003/abstract2003/Popovych-Boyko.html`.

249. Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, 2005, arXiv:math-ph/0301029v7, 39 pp. (essentially extended version of [247]).

250. Popovych R.O., Ivanova N.M., Hierarchy of conservation laws of diffusion-convection equations, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 043502, 22 p.

251. Popovych R.O., Kunzinger M., Eshraghi H., Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **109** (2010), 315–359; arXiv:math-ph/0611061.

252. Popovych R.O., Kunzinger M., Ivanova N.M., Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations, *Acta Appl. Math.* **100** (2008), 113–185; arXiv:0706.0443.

253. Popovych R.O., Sergyeyev A., Conservation laws and normal forms of evolution equations, *Phys. Lett. A.* **374** (2010), 2210–2217.

254. Popovych R.O., Vaneeva O.O., Ivanova N.M., Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation, *Phys. Lett. A* **362** (2007), 166–173; arXiv:math-ph/0506067.

255. Pucci E., Saccomandi G., On the weak symmetry groups of partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **163** (1992), 588–598.

256. Racah G., Sulla caratterizzazione delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi semisemplici di Lie, *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)* **8** (1950), 108–112.

257. Roth W.E., The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices, *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 392–396.

258. Rubin J.L., Winternitz P., Solvable Lie algebras with Heisenberg ideals, *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993), 1123–1138.

259. Schmucker A., Czichowski G. Symmetric algebras and normal forms of third order ordinary differential equations, *J. Lie Theory*, 1998, V.8, N 1, 129–137.

260. Schuh D., Chung K.-M., Hartman H.N., Nonlinear Schrödinger-type field equation for the description of dissipative systems. I. Derivation of the nonlinear field equation and one-dimensional example, *J. Math. Phys.* **24** (1983), 1652–1660.

261. Schwarz F., Symmetry analysis of Abel's equation, *Studies in Appl. Math.* **100** (1998), 269–294.

262. Schwarz F., Algorithmic solution of Abel's equation, *Computing* **61** (1998), 39–46.

263. Schwarz F., Solving second-order differential equations with Lie symmetry, *Acta Appl. Math.* **60** (2000), 39–113.

264. Schwarz F., Algorithmic Lie theory for solving ordinary differential equations, *Pure and Applied Mathematics*, Vol. 291, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.

265. Seiler W.M., Involution. The formal theory of differential equations and its applications in computer algebra, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.

266. Sergyeyev A., On recursion operators and nonlocal symmetries of evolution equations, in Proceedings of the Seminar on Differential Geometry, Silesian University in Opava, Opava, 2000, 159–173.

267. Šnobl L., Karásek D., Classification of solvable Lie algebras with a given nilradical by means of solvable extensions of its subalgebras, *Linear Algebra Appl.* **432** (2010), 1836–1850.

268. Šnobl L., Winternitz P., A class of solvable Lie algebras and their Casimir invariants, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005), 2687–2700.

269. Šnobl L., Winternitz P., All solvable extensions of a class of nilpotent Lie algebras of dimension $n$ and degree of nilpotency $n-1$, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), 105201, 16 pp.

270. Šnobl L., Winternitz P., Classification and identification of Lie algebras, *CRM Monograph Series*, Vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, xii+306 pp.

271. Stäckel P., Über Transformationen von Differentialgleichungen, *J. Reine Agnew. Math.* **111** (1893), 290–302.

272. Suksern S., Moyo S., Meleshko S.V., Application of group analysis to classification of systems of three second-order ordinary differential equations, *Math. Methods Appl. Sci.* **38** (2015), 5097–5113; arXiv:1310.5203.

273. Tremblay S., Winternitz P., Invariants of the nilpotent and solvable triangular Lie algebras, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001), 9085–9099.

274. Tresse A., Sur les invariant différentiels des groupes continus de transformations, *Acta Math.* **18** (1894), 1–88.

275. Turkowski P., Solvable Lie algebras of dimension six, *J. Math. Phys.*, 1990, V.31, 1344–1350.

276. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion

equations with a power source, *Acta Appl. Math.* **106** (2009), 1–46; arXiv:0708.3457.

277. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Equivalence transformations in the study of integrability, *Phys. Scr.* **89** (2014), 038003, 9 pp.; arXiv:1308.5126.

278. Vigier J.-P., Particular solutions of a nonlinear Schrödinger equation carrying particle-like singularities represent possible models of de Broglie's double theory, *Phys. Lett. A* **135** (1989), 99–105.

279. Vorob'ev E.M., Reduction and quotient equations for differential equations with symmetries, *Acta Appl. Math.* **51** (1991), 1–24.

280. Wafo Soh C., Euler–Bernoulli beams from a symmetry standpoint – characterization of equivalent equations, *J. Math. Anal. Appl.* **345** (2008), 387–395; arXiv:0709.1151.

281. Wafo Soh C., Symmetry breaking of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** (2010), 139–143.

282. Wafo Soh C., Mahomed F.M., Symmetry breaking for a system of two linear second-order ordinary differential equations, *Nonlinear Dynam.* **22** (2000), 121–133.

283. Wafo Soh C., Mahomed F.M., Canonical forms for systems of two second-order ordinary differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001) 2883–2911.

284. Wafo Soh C., Mahomed F.M., Linearization criteria for a system of second-order ordinary differential equations, *Internat. J. Non-Linear Mech.* **36** (2001), 671–677.

285. Wahlquist H.D., Estabrook F.B., Prolongation structures of nonlinear evolution equations, *J. Math. Phys.* **16** (1975), 1–7.

286. Webb G.M., Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers-heat equation system, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** (1990), 3885–3894.

287. Wilczynski E.J., *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, B.G. Teubner, Leipzig, 1906.

288. Yumaguzhin V.A., Classification of linear ordinary differential equations. I, *Differ. Equ.* **38** (2002), 1132–1139.

289. Yumaguzhin V.A., Classification of linear ordinary differential equations. II, *Differ. Equ.* **38** (2002), 1724–1730.

290. Yumaguzhin V.A., Contact classification of linear ordinary differential equations. I, *Acta Appl. Math.* **72** (2002), 155–181.

291. Zassenhaus H., On the invariants of a Lie group. I, in Computers in Nonassociative Rings and Algebras (Special Session, 82nd Annual Meeting Amer. Math. Soc., San Ontario, 1976), Editors R.E. Beck and B. Kolman, New York, Academic Press, 1977, 139–155.

292. Zhdanov R.Z., Lahno V.I., Conditional symmetry of a porous medium equation, *Phys. D* **122** (1998), 178–186.

293. Zhdanov R.Z., Lahno V.I., Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999), 7405–7418.

294. Zhdanov R.Z., Tsyfra I.M., Popovych R.O., A precise definition of reduction of partial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **238** (1999), 101–123; arXiv:math-ph/0207023.