

Про перетворення і функції, які зберігають хвости E -зображення чисел

Олександр Барановський^{1,2} Микола Працьовитий^{2,1}

XIX Міжнародна наукова конференція
імені академіка Михайла Кравчука
Київ, 11 жовтня 2023 року

¹Інститут математики Національної академії наук України

²Український державний університет імені Михайла Драгоманова

Постановка проблеми I

Означення

Казатимемо, що функція f , яка визначена на $(0, 1]$ і набуває значень з $(0, 1]$, *зберігає хвости E -зображення чисел*, якщо для будь-якого

$$x = \Delta_{g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)\dots}^E \in (0, 1]$$

існують натуральні числа $k = k(x)$ і $m = m(x)$ такі, що

$$g_{k+n}(x) = g_{m+n}(f(x)) \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Постановка проблеми II

Побудувати (і описати їхні властивості) неперервні перетворення $(0, 1]$ (взаємно однозначні відображення $(0, 1]$ на себе), які зберігають хвости E -зображення чисел:

$$x = \Delta_{\dots g_k(x)g_{k+1}(x)\dots}^E \xrightarrow{f} y = \Delta_{\dots g_m(y)g_{m+1}(y)\dots}^E,$$

де

$$g_{k+n}(x) = g_{m+n}(y) \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Ряд Енгеля, E -зображення

Для будь-якого $x \in (0, 1]$ існує єдина така послідовність (g_n) , $g_n \in \mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2 + g_1)(2 + g_1 + g_2) \dots (2 + g_1 + g_2 + \dots + g_n)} \quad (1)$$

$$\equiv \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^E \quad (2)$$

Ряд (1) називається *рядом Енгеля*

(або *E -представленням числа x*),

а скорочений символічний запис (2) — *E -зображенням числа x* ,

$g_n = g_n(x)$ — n -м символом (цифрою) цього зображення.



Engel F.

Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen //

Verh. d. 52. Versamml. dtsch. Philologen u. Schulmänner
Marburg 1913. — Leipzig: Teubner, 1914. — S. 190–191.



Sierpiński W.

O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi //

Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego
Warszawskiego, Wydział III. — 1911. — Vol. 4. — P. 56–77.

Франц. переклад: Sur quelques algorithmes pour développer les
nombres réels en séries // Oeuvres choisies / Wacław Sierpiński. —
Warszawa: PWN, 1974. — T. 1: Bibliographie, théorie des nombres
et analyse mathématique. — P. 236–254.

Оператор зсуву цифр

Розглядається функція ω , коректно означена на $(0, 1]$ рівністю:

$$y = \omega(x) = \Delta_{g_2(x)g_3(x)\dots g_n(x)\dots}^E \quad (3)$$

Теорема

Функція ω зростає на кожному з циліндричних інтервалів 1-го рангу $\Delta_{g_1}^E$.

Функція ω є неперервною в кожній точці циліндричного інтервалу 1-го рангу $\Delta_{g_1}^E$ і неперервною справа у точці $\Delta_{g_2(0)}^E$, яка є лівим кінцем цього інтервалу.

$\Delta_{g_1}^E = \{x \in (0, 1]: \text{1-й символ } E\text{-зображення числа } x \text{ дорівнює } g_1\}.$

Оператор «збільшення першої цифри»

Нехай i — фіксоване ціле невід'ємне число. Розглядається функція d_i , коректно означена рівністю:

$$y = d_i(x) = \Delta_{[i+g_1(x)]g_2(x)g_3(x)\dots g_n(x)\dots}^E \quad (4)$$

Теорема

Якщо $i > 0$, то d_i є неперервною строго зростаючою випуклою вгору функцією, яка набуває всіх значень з $\left(0, \frac{1}{i+1}\right]$, причому

$$d_i(\Delta_{j(0)}^E) = \Delta_{[i+j](0)}^E = \frac{1}{1+i+j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Перетворення, що зберігає хвости

Теорема

Нехай

$$x = \Delta_{g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)\dots}^E \in (0, 1],$$

і нехай i — фіксований натуральний параметр.

Перетворення $(0, 1]$, означене рівністю

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} d_i(x) = \Delta_{[i+g_1(x)]g_2(x)g_3(x)\dots g_n(x)\dots}^E, & \text{якщо } 0 < x \leq x_1, \\ \omega(x) = \Delta_{g_2(x)g_3(x)\dots g_n(x)\dots}^E, & \text{якщо } x_1 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де $x_1 \equiv \Delta_{0(i)}^E$, зберігає хвости E -зображення чисел.

Розв'язок рівняння $d_i(x) = \omega(x)$

Теорема

Нехай i — фіксоване ціле невід'ємне число. Рівняння $d_i(x) = \omega(x)$ має безліч розв'язків, загальний вигляд яких

$$x = \Delta_{j(j+i)}^E, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$



Осауленко Р. Ю.

Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа //

Мат. проблеми механіки та обчислюв. математики: 36. пр.
Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 3. —
С. 191–204.



Isaieva T. M., Pratsiovytyi M. V.

Transformations of $(0, 1]$ preserving tails of Δ^μ -representation of numbers //

Algebra Discrete Math. — 2016. — Vol. 22, no. 1. — P. 102–115.



Працьовитий М. В.

Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. —

Київ: Наук. думка, 2022. — 316 с.

Хвостові множини (множини чисел, елементи яких мають однакові хвости зображень) відіграють важливу роль у вивченні розподілів випадкових величин, породжених дискретними розподілами цифр у їхньому зображенні.

У випадку дискретності розподілу його точковий спектр (множина атомів) є хвостовою множиною.

Це має місце для випадкових величин з незалежними цифрами у їхньому s -ковому зображенні, Q -зображенні, зображеннях, що ґрунтуються на розкладах чисел в елементарні ланцюгові дробу, додатні ряди Енгеля, Сильвестера, Люрота, а також знакопочережні ряди Остроградського 1-го і 2-го виду, Люрота тощо.

Про перетворення і функції, які зберігають хвости E -зображення чисел

Олександр Барановський, Микола Працьовитий

- Сконструйовано нескінченну сім'ю перетворень $(0, 1]$, які зберігають хвости E -зображення чисел.
- Конструкція ґрунтується на властивостях зображення чисел рядами Енгеля (E -зображення чисел) і на спеціальному компонуванні деяких функцій зі специфічними властивостями.

Ці слайди доступні за адресою

<https://www.imath.kiev.ua/~baranovskyi/talks/20231011kravchuk2023.pdf>