

Перетворення і функції, які зберігають хвости E -зображення чисел

Олександр Барановський^{1,2} Микола Працьовитий^{2,1}

Міжнародна наукова конференція

«Сучасні проблеми механіки та математики — 2023»

Львів, 24 травня 2023 року

¹Інститут математики Національної академії наук України

²Український державний університет імені Михайла Драгоманова

Неформальний опис проблеми

Побудувати (і описати їхні властивості) неперервні перетворення $(0, 1]$ (взаємно однозначні відображення $(0, 1]$ на себе), які мають властивість «зберігати хвости E -зображення чисел»:

$$x = \Delta_{\dots g_k(x)g_{k+1}(x)\dots}^E \xrightarrow{f} y = \Delta_{\dots g_m(y)g_{m+1}(y)\dots}^E, \quad (1)$$

де

$$g_{k+n}(x) = g_{m+n}(y) \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Ряд Енгеля, E -зображення

Для будь-якого $x \in (0, 1]$ існує єдина така послідовність (g_n) , $g_n \in \mathbb{Z}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2 + g_1)(2 + g_1 + g_2) \dots (2 + g_1 + g_2 + \dots + g_n)} \quad (2)$$

$$\equiv \Delta_{g_1 g_2 \dots g_n \dots}^E \quad (3)$$

Ряд (2) називається *рядом Енгеля*

(або *E -представленням числа x*),

а скорочений символічний запис (3) — *E -зображенням числа x* ,

$g_n = g_n(x)$ — n -м символом (цифрою) цього зображення.



Engel F.

Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen //

Verh. d. 52. Versamml. dtsch. Philologen u. Schulmänner
Marburg 1913. — Leipzig: Teubner, 1914. — S. 190–191.



Sierpiński W.

O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi //

Sprawozdania z posiedzeń Towarzystwa Naukowego
Warszawskiego, Wydział III. — 1911. — Vol. 4. — P. 56–77.

Франц. переклад: Sur quelques algorithmes pour développer les
nombres réels en séries // Oeuvres choisies / Wacław Sierpiński. —
Warszawa: PWN, 1974. — T. 1: Bibliographie, théorie des nombres
et analyse mathématique. — P. 236–254.

Означення

Казатимемо, що функція f , яка визначена на $(0, 1]$ і набуває значень з $(0, 1]$, *зберігає хвости* E -зображення чисел, якщо для будь-якого

$$x = \Delta_{g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)\dots}^E \in (0, 1]$$

існують натуральні числа $k = k(x)$ і $m = m(x)$ такі, що

$$g_{k+n}(x) = g_{m+n}(f(x)) \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Хвостові множини (множини чисел, елементи яких мають однакові хвости зображень) відіграють важливу роль у вивченні розподілів випадкових величин, породжених дискретними розподілами цифр у їхньому зображенні.

У випадку дискретності розподілу його точковий спектр (множина атомів) є хвостовою множиною.

Це має місце для випадкових величин з незалежними цифрами у їхньому s -ковому зображенні, Q -зображенні, зображеннях, що ґрунтуються на розкладах чисел в елементарні ланцюгові дробу, додатні ряди Енгеля, Сильвестера, Люрота, а також знакопочережні ряди Остроградського 1-го і 2-го виду, Люрота тощо.



Працьовитий М. В., Барановський О. М.

**Властивості розподілів випадкових величин
з незалежними різницями послідовних елементів
ряду Остроградського //**

Теорія ймовір. та матем. статист. — 2004. — № 70. —
С. 131–143.



Гетьман Б. І., Працьовитий М. В., Барановський О. М.

**Про властивості однієї сім'ї множин канторівського
типу, що визначається умовами на елементи
розкладу в ряд Енгеля //**

Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1.
Фіз.-мат. науки. — 2010. — № 11. — С. 119–142.



Zhykharyeva Yu. I., Pratsiovytyi M. V.

Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers //

Algebra Discrete Math. — 2012. — Vol. 14, no. 1. — P. 145–160.



Pratsiovytyi M., Khvorostina Yu.

Topological and metric properties of distributions of random variables represented by the alternating Lüroth series with independent elements //

Random Oper. Stoch. Equ. — 2013. — Vol. 21, no. 4. — P. 385–401.



Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.
**Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні
застосування. —**

Київ: Наук. думка, 2013. — 288 с.



Працьовитий М. В.
**Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх
застосування. —**

Київ: Наук. думка, 2022. — 316 с.

Оператор зсуву цифр

Розглядається функція ω , коректно означена на $(0, 1]$ рівністю:

$$y = \omega(x) = \Delta_{g_2(x)g_3(x)\dots g_n(x)\dots}^E. \quad (4)$$

Теорема

Функція ω зростає на кожному з циліндричних інтервалів 1-го рангу $\Delta_{g_1}^E$.

Функція ω є неперервною в кожній точці циліндричного інтервалу 1-го рангу $\Delta_{g_1}^E$ і неперервною справа у точці $\Delta_{g_2(0)}^E$, яка є лівим кінцем цього інтервалу.

$\Delta_{g_1}^E = \{x \in (0, 1]: \text{1-й символ } E\text{-зображення числа } x \text{ дорівнює } g_1\}.$

Оператор «збільшення першої цифри»

Нехай i — фіксоване ціле невід'ємне число. Розглядається функція d_i , коректно означена рівністю:

$$y = d_i(x) = \Delta_{[i+g_1(x)]g_2(x)g_3(x)\dots g_n(x)\dots}^E \quad (5)$$

Теорема

Якщо $i > 0$, то d_i є неперервною строго зростаючою випуклою вгору функцією, яка набуває всіх значень з $\left(0, \frac{1}{i+1}\right]$, причому

$$d_i(\Delta_{j(0)}^E) = \Delta_{[i+j](0)}^E = \frac{1}{1+i+j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема

Нехай

$$x = \Delta_{g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)\dots}^E \in (0, 1],$$

i нехай i — фіксований натуральний параметр.

Перетворення $(0, 1]$, означене рівністю

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} d_i(x) = \Delta_{[i+g_1(x)]g_2(x)g_3(x)\dots g_n(x)\dots}^E, & \text{якщо } 0 < x \leq x_1, \\ \omega(x) = \Delta_{g_2(x)g_3(x)\dots g_n(x)\dots}^E, & \text{якщо } x_1 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де $x_1 \equiv \Delta_{0(i)}^E$, зберігає хвости E -зображення чисел.

Розв'язок рівняння $d_i(x) = \omega(x)$

Теорема

Нехай i — фіксоване ціле невід'ємне число. Рівняння $d_i(x) = \omega(x)$ має безліч розв'язків, загальний вигляд яких

$$x = \Delta_{j(j+i)}^E, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Теорема

Нехай G — множина всіх неперервних перетворень $(0, 1]$, які зберігають хвости E -зображення чисел і є строго зростаючими функціями. Множина G відносно операції композиції перетворень утворює нескінченну некомутативну групу.



Осауленко Р. Ю.

Група неперервних перетворень відрізка $[0; 1]$, які зберігають частоти цифр Q_s -зображення числа //

Мат. проблеми механіки та обчислюв. математики: 36. пр.
Ін-ту математики НАН України. — 2016. — Т. 13, № 3. —
С. 191–204.



Isaieva T. M., Pratsiovytyi M. V.

Transformations of $(0, 1]$ preserving tails of Δ^μ -representation of numbers //

Algebra Discrete Math. — 2016. — Vol. 22, no. 1. — P. 102–115.



Працьовитий М. В.

Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. —

Київ: Наук. думка, 2022. — 316 с.

Перетворення і функції, які зберігають хвости E -зображення чисел

Олександр Барановський, Микола Працьовитий

- Сконструйовано нескінченну сім'ю перетворень $(0, 1]$, які зберігають хвости E -зображення чисел.
- Конструкція ґрунтується на властивостях зображення чисел рядами Енгеля (E -зображення чисел) і на спеціальному компонуванні деяких функцій зі специфічними властивостями.

Ці слайди доступні за адресою

<https://www.imath.kiev.ua/~baranovskyi/talks/20230524mpmm2023.pdf>