Міністерство освіти і науки України
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

ФРАКТАЛИ І СУЧАСНА МАТЕМАТИКА

Матеріали
конференції «Фрактали і сучасна математика»,
присвяченої 50-річчю з дня народження
доктора фізико-математичних наук, професора
Миколи Вікторовича Працьовитого

НПУ імені М. П. Драгоманова

24 грудня 2009 р.

Київ ◦ 2009

Фрактали і сучасна математика.
Матеріали конференції «Фрактали і сучасна математика», Київ, 24 грудня 2009 р. / Упорядники: Ю. Г. Кондратьєв (відп. ред.) та ін. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. — 108 с.

Основу збірника складають тези доповідей, виголошених на конференції «Фрактали і сучасна математика», присвяченій 50-річчю з дня народження доктора фізико-математичних наук, професора Миколи Вікторовича Працьовитого, директора Фізико-математичного інституту Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, завідувача відділу фрактального аналізу Інституту математики НАН України і Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, яка проводилася у НПУ імені М. П. Драгоманова 24 грудня 2009 р. Також збірник містить коротку інформацію про життя і творчість ювіляра та вітання від колег і друзів.

Для фахівців з різних галузей математики, її застосувань та історії математики.

Упорядники: Ю. Г. Кондратьєв (відп. ред.), О. М. Барановський, Н. М. Василенко, Я. В. Гончаренко, О. Л. Лещинський, В. В. Луцак, Р. О. Нікіфоров, О. Б. Панасенко, Г. М. Торбін, О. В. Школьний.

© НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009

Про ювіляра

Працьовитий Микола Вікторович, народився 18 грудня 1959 року в селі Бахтин Муровано-Куриловецького району Вінницької області в сім'ї колгоспників: Працьовитого Віктора Васильовича та Працьовитої Ніни Олександрівни.

В 1975 р. з похвальною грамотою за відмінне навчання закінчив Долинянську восьмирічну школу і вступив до Немирівського педагогічного училища. В 1979 році з відзнакою закінчивши училище і отримавши кваліфікацію «вчитель початкових класів», вступив на фізико-математичний факультет Київського державного педагогічного інституту ім. О. М. Горького, який закінчив з відзнакою в 1983 р. і був рекомендований до аспірантури.

В аспірантурі навчався в Інституті математики НАН України в 1983–1986 рр. 5 травня 1987 р. захистив кандидатську дисертацію на тему «Сингулярні розподіли з фрактальними носіями канторівського і салемівського типів» зі спеціальності 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика. Науковим керівником дисертаційного дослідження був доктор фізико-математичних наук професор Турбін Анатолій Федорович.

В 1993–1996 р. перебував в докторантурі Інституту математики НАН України. Докторську дисертація на тема «Фрактальний підхід до дослідження сингулярних розподілів ймовірностей» (зі спеціальності 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика) захистив в квітні 1999 року.

Докторська дисертація М. В. Працьовитого присвячена вивченню класів функцій і розподілів ймовірностей зі складною (фрактальною) локальною будовою (в основному, це — чисті розподіли ймовірностей, в першу чергу, сингулярні, та недиференційовні функції, визначені перетворювачами нескінченних символьних зображень аргумента), заданих систематичними та ланцюговими дробами, знакоперемінними рядами Остроградського, поліосновними $\tilde{Q}$-представленнями тощо. В ній введено в розгляд ряд нових об'єктів: систем представлення (зображення дійсних чисел), розподілів випадкових величин, сингулярних, неперервних ніде не диференційованих функції тощо та розвинуто методологію їх дослідження, зокрема, вивчення їх фрактальних властивостей.

З 1986 року працює на кафедрі вищої математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (тоді КДПІ ім. О. М. Горького). Спочатку на посаді асистента, потім доцента, а з 1997 року — професора. З 1997 року очолює цю кафедру.

В 2003 р. М. В. Працьовитому присвоєно вчене звання професора (атестат ПР № 002166, Міністерство освіти і науки). В 2004 р. був обраний академіком Академії наук вищої освіти України (диплом № 74-2004).

Має наступні відзнаки та нагороди: Соросівський доцент (1995), Відмінник освіти України (1998), медаль М. Остроградського (2001), нагорода Київської міської адміністрації за вагомий особистий внесок у розвиток вітчизняної науки та зміцнення науково-технічного потенціалу столиці України (2004). В 2004 р. за особливі досягнення на освітянській ниві, за участь у розробці і впровадженні нових освітніх державних стандартів, творче використання новітніх педагогічних технологій, якісне оновлення змісту вищої освіти нагороджений почесною відзнакою НПУ імені М. П. Драгоманова — срібною медаллю «Михайло Петрович Драгоманов 1841–1895 рр.»

З 2000 по 2006 р. виконував обов'язки експерта та вченого секретаря експертної ради з математики ВАК України.

З 2000 року є членом спеціалізованої вченої ради Д 26.053.03 по захисту докторських і кандидатських дисертацій зі спеціальності 13.00.02 — теорія і методика навчання математики, фізики, інформатики. Неодноразово виступав в якості опонента по захисту дисертацій.

З 2007 року М. В. Працьовитий є членом спеціалізованої вченої ради Д 26.206.03 Інституту математики НАН України по захисту докторських і кандидатських дисертацій зі спеціальностей 01.01.06 — алгебра і теорія чисел та 01.01.04 — геометрія і топологія.

В 2008 році Працьовитий Микола Вікторович був обраний директором Фізико-математичного інституту НПУ імені М. П. Драгоманова.

В січні 2006 року з ініціативи ректора НПУ імені М. П. Драгоманова академіка АПН Андрущенка Віктора Петровича та директора Інституту математики НАН України академіка НАН України Самойленка Анатолія Михайловича було створено відділ (лабораторію) фрактального аналізу, який очолив Працьовитий Микола Вікторович.

З 1992 року М. В. Працьовитий керує семінаром з фрактального аналізу, який з 2002–2005 рр. регулярно (двічі на місяць) проводив об'єднані засідання з семінарами відділів математичної фізики, динамічних систем та функціонального аналізу Інституту математики НАН України. З 2006 року названий семінар став семінаром відділу фрактального аналізу.

М. В. Працьовитий є заступником головного редактора та ініціатором видання збірників наукових праць: «Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1, Фізико-математичні науки» (до 2005 р.: «Наукові записки. Фізико-математичні науки»), «Фрактальний аналіз та суміжні питання», головним редактором збірника студентських наукових робіт «Студентські фізико-математичні етюди», членом редакційної колегії збірника наукових праць «Дидактика математики: проблеми і дослідження. Міжнародний збірник наукових робіт».

Наукові інтереси М. В. Працьовитого лежать в області фрактального аналізу та фрактальної геометрії, метричної та ймовірнісної теорії чисел, теорії сингулярних розподілів ймовірностей, теорії неперервних ніде не диференційовних функцій, теорії динамічних систем тощо. Він є автором одних із перших в Україні фундаментальних результатів в дослідженнях тополого-метричних і фрактальних властивостей математичних об'єктів зі складною локальною будовою (сингулярних мір і розподілів ймовірностей, неперервних, в жодній точці недиференційовних функцій, динамічних систем з фрактальними атракторами і репелерами, асимптотичних властивостей динамічних систем з конфліктною взаємодією, перетворень простору, що зберігають фрактальну розмірність тощо), які проливають нове світло на фрактальну геометрію як науку і фрактальну природу математичних моделей реальних об'єктів, процесів і явищ, що є об'єктом сучасних наукових досліджень.

М. В. Працьовитий є автором 2 монографій та понад 260 наукових і науково-методичних публікацій. Його роботи добре відомі як в Україні, так і за її межами.

М. В. Працьовитий проводить велику роботу по розвитку наукових зв'язків між НПУ імені М.П.Драгоманова та іншими науковими центрами, організації та участі у спільних наукових проектах (3 проекти DFG — спільні українсько-німецькі, проект INTAS — загальноєвропейський проект, грант Державного фонду фундаментальних досліджень) та залученню творчої молоді до участі у науковій діяльності та наукових проектах.

Керує роботою аспірантів та докторантів. М. В. Працьовитий підготував 8 кандидатів та 1 доктора фізико-математичних наук. Ще 5 його учнів подали до захисту кандидатські дисертації.

М. В. Працьовитий веде активну просвітницьку та науково-популяризаційну діяльність. Керує науково-дослідницькими роботами членів МАН, читає лекції для учнів Фастівського природничо-математичного ліцею-інтернату, очолює журі конкурсів захистів науково-дослідницьких робіт Малої академії наук, є членом журі математичних олімпіад для школярів.

Науковий напрямок, основні наукові результати М. В. Працьовитого

Фрактальний аналіз — відносно молода і швидко прогресуюча галузь сучасної математики, яка засобами теорії мір дробових порядків, метричних розмірностей, операторів дробового інтегрування та диференціювання вивчає властивості математичних об'єктів зі складною локальною будовою (геометричних фігур, сингулярних мір і розподілів ймовірностей, неперервних в жодній точці недиференційовних функцій, динамічних систем з фрактальними атракторами і репелерами, асимптотичних властивостей динамічних систем з конфліктною взаємодією, перетворень простору, що зберігають фрактальну розмірність тощо).

Методи фрактального аналізу і фрактальної геометрії сьогодні широко використовуються в різних галузях науки. Спостерігається фрактальний бум в фізиці, хімії, матеріалознавстві, біології, геофізичній гідродинаміці, теорії протікання тощо. Виявлено тісні зв'язки деяких критичних показників складних систем з її фрактальними властивостями. Сьогодні нехтувати мікроструктурами і мікрофлуктуаціями реальних об'єктів, процесів і явищ — це, по меншій мірі, спотворювати істинну природу речей. А серйозно їх враховувати в математичних моделях допомагають фрактали, недиференційовні функції, сингулярні розподіли ймовірностей, нелінійні динамічні системи з хаотичними (фрактальними) аттракторами тощо. Названі об'єкти сьогодні об'єднують спільні проблеми, основною з яких є недостатній розвиток ефективних способів їх задання і вивчення. Частково подолати названі труднощі дозволяє широке використання різних систем числення та способів подання чисел, зокрема нетрадиційних (негапозиційні системи числення, позиційні системи числення з надлишковим набором цифр, системи з комплексною основою тощо). Їх використання дозволяє спростити формальний опис цілих класів фрактальних множин, функцій, розподілів ймовірностей та перетворень простору. З іншого боку, фрактальна геометрія стає ефективним інструментом дослідження після грунтовної розробки її аналітичних основ, яка протягом останнього десятиліття здійснюється в роботах Працьовитого Миколи Вікторовича та його учнів.

Основні результати, отримані в рамках досліджень наукової школи М. В. Працьовитого стосуються дослідження властивостей множин, функцій, динамічних систем, операторів, розподілів ймовірностей та їх згорток засобами фрактального аналізу, який грунтується на застосуванні до вказаних об'єктів методів теорії мір та розмірностей Хаусдорфа, Хаусдорфа–Безиковича і їх узагальнень. В роботах М. В. Працьовитого та його учнів закладаються основи групового погляду на фрактальну геометрію як науку про інваріанти групи перетворень простору, що зберігають фрактальну розмірність (DP-перетворень).

В роботах М. В. Працьовитого отримано фундаментальні математичні результати, розвинуто нові методи та закладено основи кількох напрямків наукових досліджень. Основними науковими здобутками є:

1. Створені нові методи вивчення фрактальних властивостей множин, сингулярних розподілів і недиференційовних функцій; дано нове узагальнююче означення фрактала і, на його основі, проведено класифікацію сингулярних розподілів; введено в розгляд аномально фрактальні та суперфрактальні множини та розподіли.
2. Досліджено класи ймовірнісних розподілів зі складною локальною будовою, розв'язана задача про їх структуру: знайдено критерії сингулярності та абсолютної неперервності відповідних ймовірнісних мір з використанням як класичних імовірнісних методів, так і методів геометричної теорії міри та інтегральних перетворень.
3. Закладено основи групового підходу до фрактальної геометрії на основі побудови загальної теорії перетворень, що зберігають розмірність Хаусдорфа–Безиковича. Створено на цій основі нові методи фрактального аналізу множин зі складною локальною будовою.
4. Створено та розвинено метричну та ймовірнісну теорії чисел:
   - для введених в розгляд нових систем зображення дійсних чисел (поліосновні Q-представлення, f-розклади, G^2_∞-розклади, A_2-ланцюгові дроби, циліндричні представлення та ін.);
   - для деяких існуючих систем представлення чисел: s-адичних розкладів, ланцюгових дробів, рядів Остроградського 1-го та 2-го видів, рядів Кантора, Люрота, Енгеля тощо.
5. Введено в розгляд і досліджено властивості класів неперервних ніде не диференційованих функцій, заданих перетворювачами цифр аргумента в цифри зображення функції.
6. Розвинуті методи досліджень застосовано до розв'язання ряду важливих задач:
   - теорії ймовірностей (розвиток теорії сингулярних розподілів, дослідження згорток Бернуллі та їх узагальнень, узагальнення та поглиблення теореми Джессена–Вінтнера);
   - теорії чисел (створення фрактальної та топологічної класифікації множин нормальних, квазінормальних, анормальних та суттєво ненормальних чисел);
   - спектральної теорії самоспряжених операторів (дослідження структури сингулярно неперервного спектру самоспряжених операторів);
   - теорії динамічних систем (дослідження фрактальних характеристик атракторів динамічних систем, що породжуються символьною динамікою; дослідження топологічних,

метричних та фрактальних властивостей атракторів динамічних систем, що породжуються певним класом конфліктних взаємодій).

Наукові результати, отримані в рамках досліджень школи, є фундаментальними і носять теоретичний характер. Вони вже використовуються і, безсумнівно, знайдуть подальше застосування в дослідженнях з теорії множин, теорії ймовірностей, теорії чисел, теорії динамічних систем, геометрії, теорії кодування і стиснення інформації; у фізиці для створення математичних моделей процесів і явищ навколишнього світу; викладачами у навчальному процесі при читанні відповідних спецкурсів, студентами при написанні курсових та дипломних робіт.

Наукові результати М. В. Працьовитого використовуються в наукових дослідженнях, які ведуться сьогодні в різних наукових центрах, зокрема, Боннському університеті, Інституті математики НАН України, Інституті прикладної математики і механіки НАН України, Національному університеті імені Тараса Шевченка, Національному технічному університеті України «КПІ», Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова, Одеському політехнічному інституті, Львівському та Донецькому університетах тощо. Зокрема, їх використовували в своїх роботах такі автори: С. Альбеверіо, В. Д. Кошманенко, А. Ф. Турбін, Л. П. Лісовик, В. В. Новиков, М. Й. Кулак, Я. Ф. Виннишин, А. Я. Оленко, А. А. Маляренко, Г. М. Торбін, О. Л. Лещинський, А. А. Литвинюк, О. В. Школьний, Я. В. Гончаренко, О. Ю. Шкаравська, А. А. Томусяк, Л. А. Вотякова, О. М. Барановський, С. О. Дмитренко, О. Ю. Фещенко та багато ін.

З січня 2006 року Микола Вікторович очолює відділ фрактального аналізу подвійного підпорядкування (НПУ імені М. П. Драгоманова та Інституту математики НАН України), основними напрямками діяльності якого є:

- розвиток фундаментальних досліджень фрактальних властивостей математичних об'єктів та координації таких досліджень з науковими програмами НАН України,
- розширення співробітництва між вищими навчальними закладами України та НАН України,
- розширення зв'язків між професорсько-викладацьким складом НПУ імені М. П. Драгоманова та співробітниками Інституту математики НАН України,
- сприяння розвитку міжнародного наукового співробітництва,
- впровадження результатів наукових досліджень в навчальний процес,
- широка популяризація наукових математичних знань,
- підтримка талановитої молоді.

Вельмишановний Миколо Вікторовичу!

Прийміть найсердечніші привітання з ювілеєм — 50-річчям з дня народження.

Поздоровляючи Вас, видатного вченого, блискучого педагога, мудрого організатора та керівника великого колективу, з цією вагомою і прекрасною датою, зичимо Вам невпинного руху вперед, успішного здійснення всіх планів та задумів.

Висловлюємо Вам щиру подяку за високий професіоналізм та відданість великій і почесній місії — запалювати вогонь освіти й науки в серцях і умах співвітчизників та нести його на службу людям. Бажаємо, щоб Ваші учні, вихованці створеної Вами наукової школи фрактального аналізу, продовжували Вашу справу, плідно працюючи на науковій та освітній ниві рідної України.

Бажаємо, щоб підґрунтям щасливого життя та плідної професійної діяльності були міцне здоров'я, серце, сповнене любові та добра, натхненні думки та щирі почуття. Нехай людська шана буде подякою Вам за плідну працю, чуйність, уміння творити добро!

Нехай щастя, благополуччя і злагода завжди будуть з Вами, Вашими рідними та близькими!

З повагою і за дорученням колективу
Ректор Національного педагогічного університету
імені М. П. Драгоманова
академік АПН України, член-кореспондент НАН України
В. П. Андрущенко
Перший проректор Національного педагогічного університету
імені М. П. Драгоманова
академік Української академії політичних наук
В. П. Бех

* * *

Вересень 1979 року, Київський державний педагогічний інститут імені Горького, аудиторія № 461. Саме тут я зустріла тебе вперше. І зараз перед очима бачу впевненого в собі юнака. Здавалося, що немає задач та дисциплін, з якими ти не міг би впоратися, які були тобі не під силу. Я думаю, що перші почуття до тебе зародилися в перші хвилини знайомства. Спочатку вони були підсвідомі, непевні. А вже наприкінці першого курсу переросли в справжнє кохання. І з тих пір ми, в горі чи в радості, постійно разом.

Нелегко нам було в житті: зазнали немало горя, доводилось жити в найманих квартирах, не мали належного матеріального становища. Проте, незважаючи на всі ці незгоди, ми виростили дітей, вивчили їх, а це — завдання № 1 кожної сімейної людини.

Ти завжди живеш заради людей: заради мене, дітей, родичів, учнів, студентів, друзів. Ти завжди віддаєш себе всього, до краплини, часто-густо нічого не отримуючи натомість. Ти ніколи не зупиняєшся на півдорозі, а на твоєму шляху орієнтиром є девіз: «Все велике складається з маленького». Ти неодноразового нагадував мені про ці слова, коли тобі вдавалося здійснити нездійсненне. Одним словом, ти — справжній...

Коля, я щиро бажаю тобі, в першу чергу, здоров'я, радості від дітей та навколишнього оточення. Хай життя тобі посміхається! Бережи себе! Ми дуже тебе любимо! Ти нам потрібний!

Наталія Миколаївна Працьовита

* * *

Ми з братом ще не дуже багато досягли в житті, але всім, що ми знаємо і вміємо на даний момент, ми завдячуємо нашим батькам, татові і мамі, які присвятили багато сил і часу для нашого виховання. Батько вчив нас кататися на ковзанах та лижах, грати в баскетбол і лазити по канату, збирати гриби, ловити рибу, логічно міркувати, розв'язувати не лише математичні, а й життєві задачі, любити людей, зокрема, і природу, в цілому, працювати на землі, бути патріотами своєї Батьківщини, цінувати те, що маємо... І все це він робив дуже професійно, глибоко педагогічно. Лише зараз я можу по-справжньому оцінити мудрість і глибину його думок і вчинків.

Мені пригадався такий випадок. У дитинстві ми з Сашком були дуже перебірливі в харчуванні. Батьки, розуміючи наскільки корисними є грецькі горіхи та мед, примушували нас їх їсти. Ми не любили ці продукти, тому батькам було досить непросто. І тоді тато вдався до хитрих дій. Він зробив нам домашню халву з горіхів і додав туди меду. Ми з братом наскільки вподобали цю смачну і нову для нас страву, що майже щодня просили тата приготувати нам її знову. Проте це не єдиний кулінарний шедевр, який вигадав тато, щоб ми вживали корисні продукти із задоволенням. Також він готував суп з ікрою, який назвав «суп з предикатами». Він був надзвичайно смачним, але ще більшу увагу привертала назва. Страва із смаженої риб'ячої називалась «смажені квантори». Саша і я ніколи раніше не чули таких слів, тому такі символічні назви діяли на нас магічно. Ми з насолодою та цікавістю куштували ці ексклюзивні страви. І лише тоді, коли я вступила до університету, я зрозуміла, звідки взялися такі чудернацькі назви. Здається, що це дрібничка, але насправді така вигадка — дуже ефективний педагогічний підхід.

Здається, що коли знаєш людину давно, бачив її в різних життєвих обставинах, у різних фізичних та психологічних станах, живеш з нею в одній квартирі, то вона стає для тебе передбачуваною. Цього не можна сказати про тата, бо передбачити його емоції, думки, вчинки, ідеї в більшості випадків неможливо. Тому він завжди був і залишається для нас людиною-загадкою, людиною-святом, людиною-сюрпризом. Ми вдячні долі за те, що маємо такого батька.

Кажуть, що все геніальне просте. Наш тато — геніальна людина і секрет його геніальності полягає в його простоті: простоті душі, простоті думок, простоті вчинків. . .

Ірина Миколаївна Працьовита

* * *

І мені хотілося б додати декілька штрихів до словесного портрету М. В. Працьовитого, як вченого і просто людини.

Впродовж багатьох років ми разом з такими ж опікувцями своїх аспірантів відкривали черговий навчальний рік в системі аспірантської освіти нашого навчального закладу. Пам'ятаю, пожартував, надаючи слово Миколі Вікторовичу: працьовитий доцент обов'язково буде професором. Сьогодні він справжній доктор і професор. І не перестає бути Працьовитим у всіх головних смислах — активно працює і має власне наукове ім'я.

Дякуючи Богу і батькам, Микола Вікторович не обділений талантами. Цей факт не потребує доведень. Завдяки власній обдарованості, Працьовитий отримав дар розпізнавати таланти інших. Особисто для мене, це підтверджують глибоко мені симпатичні Гриша Торбін, Яна Гончаренко, інші безумовно талановиті учні Працьовитого. Талант завжди індукує щиру симпатію, бо породжує нашу впевненість у порядності, щирості, захищеності від низьких спокус і підлостей того, хто несе в собі цю інколи нелегку ношу обдарованості, зобов'язуючої багато до чого.

Лише талановитий тягнеться до споріднених душ, з радістю приймаючи кожну. Пару років тому Микола Вікторович при мені розказав нашому ректорові, що на Олімпіаді в Харкові зустрів студента-математика, якого б хотів вчити у нас. Ректор тут же запропонував: переводьте до себе і вивчіть, матеріально хлопцеві спробуємо допомогти. На сьогодні цей хлопець вже магістр. Буде працьовитим, буде і професором.

Колись ще на початку мого проректорства Микола Вікторович познайомив мене з непересічно цікавою людиною, з доктором фізико-математичних наук, професором Кондратьєвим Юрієм Григоровичем, який професорствував у Мюнхені та Білефельді. Окрім іншого ми багато говорили тоді про лабораторію фрактального аналізу, про сумісництво в нашому університеті професора Кондратьєва. Але фінансова прірва таки справді виявилась найбільш глибокою з прірв. А обійшов її не хто інший, як Микола Вікторович. Так з'явилась унікальна наукова школа-лабораторія, так Юрій Григорович став нашим професором.

Сьогодні в університеті дві широковизнані наукові математичні школи. Всі їх глибоко поважають, хоча, зрозуміло, є між ними й відмінності. Керівник соліднішої за віком, той, що походить з с. Бурбине, не любить грибів і ніколи їх не їсть і не їв. Керівник більш молодої, з якого б прагнули брати приклад і Хаусдорф з Безиковичем, і Фібоначчі з Люротом, і Джессен з Вінтнером, любить збирати і їсти гриби. Навіть ті, про які Мінздрав попереджає: не їжте! І мене, зізнаюсь, привчив. Французькі математики його не можуть зрозуміти, хоча самі їдять таке…

То ж нових Вам успіхів, Миколо Вікторовичу, цвітіння таланту, особистого щастя і доброго здоров'я.

Григорій Іванович Волинка,
проректор з наукової роботи НПУ імені М. П. Драгоманова,
доктор філософських наук, професор,
академік Української академії політичних наук

Моє слово ювілярові!

Задумуючись над особливостями великих людей, можна помітити, що вони при житті, здається, нічим особливим не виділяються. Звичні, нормальні люди, озабочені щоденними турботами, закручені в колейдоскопі швидкоплинних подій, часто з далеко не раціональною витратою дорогоцінного, обмеженого часовими рамками, життя. Так вони сприймаються в реальному часі. Іншого сприйняття набувають вони часто лише з погляду майбутніх поколінь.

В той же час непересічні особистості виділяються тим, що в них із хаосу життя помітно виділяється приорітетний вектор раціонального результату. Він з часом акумулюється, множиться, відшліфовується в дорогоцінний скарб світової цивілізації і стає прикрасою національного здобутку. Це й підносить обдарованих богом, возвеличиних працею знаменитостей минулого і наших сучасників.

Вельмишановного ювіляра, щирого молодшого друга М. В. Працьовитого я трохи знав як студента, більше познайомився під час сільськогосподарських робіт в колгоспах Броварського району на самому початку його трудової діяльності в університеті. Вже тоді пам'ятаю, його турбували питання можливих варіантів просторового розміщення симетричних фігур і він часто заводив розмову на цю тему. Виявляється, то були ті струмочки думки, які пізніше збиралися в бурний потік широкої ріки нового наукового напрямку в математиці, що нині називають фрактальним аналізом, основи якого заклав і розвинув Микола Вікторович.

Зараз йому «легше», у нього є послідовники як у нас в Україні, так і в Європі та світі. Він створив потужну наукову школу, залучаючи до своїх ідей обдаровану молодь, у пошуках якої не знає втоми.

Я радий, що в нашій державі, в нашому університеті працює така вже на сьогодні визнана людина, що ми маємо змогу з ним зустрічатися, спілкуватися, відчувати його бурхливу емоціональну натуру, переймати його вміння завжди і скрізь встигати, виконувати неймовірно великий обсяг різноманітних завдань і в той же час бути доступним, коректним, уважним і щирим у спілкуванні, у ставленні до друзів, працівників інституту та студентів.

З роси і води Тобі, друже, все нових і великих здобутків у науці, світі, у повсякденному житті.

Іван Тихонович Горбачук,
голова профкому викладачів та співробітників
НПУ імені М. П. Драгоманова,
професор, академік Академії наук вищої освіти України,
завідувач кафедри методології та методики навчання
фізико-математичних дисциплін вищої школи

* * *

Хто б не писав про ювіляра, звичайно, буде писати про його працездатність і працелюбність. Бо, по-перше, це правда, це кидається в очі, а по-друге, — ну дуже добре нагадує про це його прізвище. Я собі дозволю відмітити ще одну якість Миколи Вікторовича, яка його вирізняє серед нас — його *терплячість*. За 30 років, які я його знаю, він терпів невизнаність, супротив реалізації своїх задумів, а то і відверту зневагу. Він і зараз продовжує терпіти тісняву і незручність приміських електричок! Микола Вікторович повинен би мати прізвище **Терплячий-Працьовитий**. Звучить он як!

Однак, якщо відкинути фантазії, час розставляє все на свої місця. І Микола Вікторович зараз на своєму місці. Доктор наук, фундаментальних наук, на яких стоїть цивілізація. Що може бути вище «вищої математики», від «мови природи», яка «розум до ладу приводить». Це дає йому певне право бути фундатором майбутнього інституту і університету. І, я вважаю, що моєму рідному факультету повезло, що Микола Вікторович став його директором.

Мені особисто симпатизує також те, що Микола Вікторович — творчо обдарована особистість. Очевидно, що це наслідки сімейного чи шкільного виховання нашого покоління, коли були створені достойні умови для «гармонійно розвинутої особистості». Він чудово декламує вірші, співає. Він прекрасний співрозмовник. А яке у нього почуття гумору! «Якщо талант, то — талановитий у всьому!»

Я не хочу тобі бажати щось із здоров'я — ти, на щастя, не в тому віці, коли розпочинати думати про збереження здоров'я. Я хотів би, щоб ти, мій друже, залишався таким **терплячим і працьовитим** ще багато років. Бо тобі ще багато чого треба зробити у цьому світі, на цій землі.

Анатолій Петрович Кудін,
проректор з дистанційної освіти та інноваційних технологій навчання
НПУ імені М. П. Драгоманова,
директор Інституту дистанційного навчання,
доктор фізико-математичних наук, професор

* * *

Ми теж випускники фізико-математичного факультету нашого університету і горді з того, що поруч з нами живе і працює молодий, закоханий в математику відомий вчений і талановитий педагог — Микола Вікторович Працьовитий.

Свій педагогічний шлях М. В. Працьовитий розпочав асистентом кафедри вищої математики. Минали роки. Наукові пошуки стали для молодого вченого і покликанням, і найбільшою радістю життя.

Кандидат фізико-математичних наук, а згодом доктор фізико-математичних наук — це результат невтомної, наполегливої та повсякденної праці, глибокого розуміння високого громадянського обов'язку перед державою.

Ви, Микола Вікторович, правильно говорите, що Вам нема коли жити, але ж Вам є заради чого жити. Тисячі студентів фізмату з гордістю називають Вас своїм вчителем. Надовго запам'ятаються їм Ваші чудові лекції з аналітичної геометрії та фрактального аналізу, бо вони несуть не тільки знання, а й радість пізнання. І ще тому, що весь свій педагогічний талант до останньої краплини Ви віддаєте людям.

Багато сил і вміння проф. М. В. Працьовитий віддає вихованню молодих вчених. Всі, кому пощастило бути його учнями, через все життя пронесуть почуття глибокої вдячності справедливому та вимогливому вчителю.

Ми глибоко шануємо Миколу Вікторовича, нашого товариша по роботі, за його невичерпну мудрість і чарівну посмішку, принциповість і вимогливість, за те, що він до всіх справ ставиться з високою відповідальністю.

Своє 50-річчя професор М. В. Працьовитий зустрічає у розквіті сил та творчих задумів. В день славного ювілею хочеться від щирого серця побажати йому доброго здоров'я, незгасної енергії, великих творчих успіхів на довгі роки.

Ми свято віримо в те, що Бог Вам допоможе.

Микола Іванович Шкіль,
радник ректора НПУ імені М. П. Драгоманова,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь
Тамара Всеволодівна Колесник,
професор кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь

Вітання шановному Миколі Вікторовичу від Інституту інформатики

Зима — всех праздников пора,
Гуляет долго вся страна.
Начало сказки — без сомненья —
Николая Викторовича день рождения.

Наш именинник, как всегда
Гостеприимен и тактичен,
Все умеет, знает. Симпатичен.
И сколько шарма, вкуса в нем.
Не описать нам все пером.

Мы можем долго восхвалять,
Достоинства перечислять.
Но, раз сегодня День рождения —
Примите наши поздравления.

Желаем Вам всего того,
Что нужно в жизни всем для счастья:
Заботы, теплоты, участия.
Любви такой, что всех невзгод сильней.
И до конца последних дней здоровье чтобы было крепким.
Никто не дергал чтобы нервы.
Пусть даже в самый серый день
Печали не коснется тень.
Тревоги все пускай уйдут.
Проблемы больше не гнетут.
Пусть полной чашей будет дом.
И пусть уютно будет в нем.
Богатства, радости, успеха,
Всех в жизни благ. Добра и смеха.
Желаем много лет прожить.
И никогда чтоб не тужить.

Коллег, родных Вы берегите, Всегда спокойствие храните.
Пусть медленно идут года…
Наш институт с Вами всегда!

Вітання молодому ювіляру! Відданість справі — фрактальної математики

Щиро вітаємо Миколу Вікторовича з нагоди дня народження і першого ювілею на посаді директора.

Я знаю Миколу Вікторовича з початку його роботи на кафедрі вищої математики нашого університету.

Але дружні і щирі стосунки у нас встановились під час роботи журі третього етапу Всеукраїнського конкурсу науково-дослідницьких робіт учнівської Малої академії наук в період 1989–1995 рр.

Микола Вікторович — це вимогливий педагог, знаний математик, але водночас і вихователь студентської і учнівської молоді. Адже Микола Вікторович і нині працює з талановитою молоддю у Фастівському ліцеї, передає знання основ математики юним дарованням і, звичайно, має надію на поповнення когорти студентів Фізико-математичного інституту.

Тож бажаю, Вам Миколо Вікторовичу подальшої довгої плідної праці, творчої долі, особистого щастя і всіляких гараздів.

Микола Іванович Шут,
завідувач кафедри загальної і прикладної фізики,
професор, доктор фізико-математичних наук,
член-кореспондент АПН України,
заслужений діяч науки і техніки

Колезі і товаришу Працьовитому Миколі Вікторовичу в день його першого п'ятдесятиріччя

Говорити, писати про Миколу Вікторовича можна довго і багато. Адже він — людина багатогранна і справді працьовита. За 50 років життя ці високі якості проявилися в різних іпостасях і проявляться, щиро надіюся, ще не раз. Та я хочу сказати про інше, про те, коли і як ми зустрілися вперше.

Було це понад двадцять п'ять років тому, коли юний випускник столичного педагогічного інституту імені О. М. Горького Микола Працьовитий прибув разом із дружиною, теж випускницею цього ж вузу, на роботу в Бородянську СШ № 2. Тоді ми й зустрілись, вперше, як суперники… На баскетбольному майданчику! Проходили районні змагання вчителів. Я грав в команді вчителів Немішаївської СШ, де працював учителем математики, а Микола Вікторович — в команді вчителів своєї школи. Працьовитий грав гарно, активно, вміло, але дуже швидко (не без допомоги судді) набрав фолів і був видалений з майданчика. Його переповнювали обурення, щирі емоції, образа за несправедливе рішення. Звідки йому, молодому, було знати, що причина не в його грі, а в тих давніх «добрих» стосунках, які панували між обома бородянськими школами № 2 і № 1. А суддею гри якраз і був учитель фізкультури з першої школи, який дуже не бажав успіху колегам з середньої школи № 2.

Я і нині покійний Михайло Григорович Комар, до речі вчитель математики Бородянської СШ № 1, підійшли до Миколи Вікторовича, почали заспокоювати його. Ми не були знайомі, але швидко (мабуть тому що всі троє математики) стали знайомими, прийшли до «спільного знаменника» і пройнялися щирою повагою, розумінням, симпатією один до одного. З цим і живемо всі ці роки.

Нині ми в багатьох питаннях однодумці, любимо математику, працю педагога, грибне полювання, вболіваємо за наш університет, фізмат і т.д.

Чи є питання які нас розділяють? Немає. Є лише ті, у вирішенні яких ми ще не прийшли до згоди. (Мабуть, їх вирішення ще не на часі.)

Свої щирі вітання та побажання колезі і товаришу Миколі Вікторовичу Працьовитому в день його першого п'ятдесятиріччя хочу виразити в дещо алегоричній формі.

Я виріс у мальовничому селі на Київщині. Мені дуже подобається йти в рідне село ґрунтовною польовою дорогою. По ній їздять підводи, вона м'ягка, злегка вкатана, не пилить, без ям і вибоїн. Обабіч ростуть спориш, подорожник та інші пахучі трави, біліють ромашки, з хлібного лану визирають зашарілі польові маки, синьоокі волошки, сокирки, ніжно шепоче на ланах безосте колосся. У небі бездонна синь, по якій пливуть гнані вітром, білі хмарки. Співає різноголосе птаство, а жайвори, піднявшись до хмар, шлють вітальні арії. Зустрічаються і дерева, кремезні та гіллясті, в тіні яких можна сховатися від спеки, посидіти і подумати над тим яке прекрасне життя.

Бажаю Вам, шановний Микола Вікторовичу, у наступному п'ятдесятиріччі саме такої життєвої дороги! З пахучими і ніжними квітами та травами, непідробним співом птаства, з тінистими деревами, які не затіняють, а захищають, з вагомим колоссям, з чистим небом над головою і хмарками, які не пригнічують, а веселять. Дороги, якою ідеш і хочеться йти, дороги довгої, радісної, з доброзичливими і товариськими подорожніми. Щасти Вам у всьому!

Василь Олександрович Швець,
професор, завідувач кафедри математики
і теорії та методики навчання математики

Від самоподібності до структурної подібності. Працьовитому Миколі Вікторовичу — 50

По Мандельброту фрактал має бути самоподібною множиною.

Київська школа фрактального аналізу, очолювана М. В. Працьовитим, істотно узагальнила поняття фрактальної множини.

Все почалося з Q-зображення точок на прямій лінії. Микола Вікторович, ще будучи студентом, напевно критично сприймаючи лекції з математичного аналізу професора Давидова, подумав: щоб вводити дробові числа типу $\frac{m}{n}$, а потім іраціональні $0.3141754\ldots$, не обов'язково розбивати відрізок $[0,1]$ на 10 чи на $n \geqslant 2$ рівних частин, а можна на частини взагалі різної довжини q_1, q_2, $\ldots$, q_n, $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$. Це згодом привело до введення зображення числа за допомогою послідовності Q-символів.

Згодом з'явилися ще більш цікаві узагальнення: Q^*-зображення, $\tilde{Q}$-зображення. Послідовний аналіз та застосування методу Q-зображеннь представлено в роботі [1].

Сильне враження від знайомства з побудовою множини Кантора також породило тривалий творчий процес. А якщо видаляти не третину, а відрізочок меншої пропорції, також з'явиться на границі множина нульвої міри Лебега?

Взагалі, ціпкий, дуже ретельний, навіть повільний задля надійності, розумовий аналіз, як елементарних математичних понять так і нових побудов — ця риса Миколи Вікторовича є головною у його творчому методі. Абстрактне мислення, як частина способу існування в умовах навчального процесу напруженого університетського життя — це засіб бути собою, бути особистістю, єдиною, унікальною, нести у собі і живити вічну потребу допитливості і пізнання, здатності наближатися і торкатися незбагненого джерела енергії Природи.

В теорію сингулярних множин Микола Вікторович ввів потужний класс фрактальних об'єктів, які мали значно цікавіші властивості, ніж самоподібні множини канторівського типу. Самоподібність, зокрема подібність множини при фіксованих стисках і їх повторені довільну кількість разів — цю фізично банальну властивість було замінено на можливість певних змін структури множини на кожному кроці повторення стиску. Так з'явилися структурноподібні фрактальні множини та сингулярні міри зосереджені на таких множинах. Терміни структурно-подібна множина та структурно-подібна міра було введено пізніше, див. роботу [5]. Величезним здобутком на цьому шляху виявився клас фрактальних розподілів, названий в роботі [3] P-типом (літера P означає Працьовитий). Нетривіальною проблемою була задача про визначення розмірності Хаусдорфа. Справа у тому, що для самоподібних множин існує простий алгебраїчний метод знаходження розмірності Хаусдорфа при виконанні так званої умови «open set condition». Цей метод практично не переноситься на структурно-подібні множини. Проблему блискуче розв'язав Григорій Торбін — учень Миколи Вікторовича, він придумав новий оригінальний метод для знаходження розмірності Хаусдорфа.

Неоціненним є вплив творчих дискусій з Миколою Вікторовичем на кафедрі вищої математики ще тоді Педагогічного Інституту, коли завідував цією кафедрою професор С. С. Левіщенко. Саме тоді зароджувалося розуміння важливої ролі теорії фрактального аналізу сингулярних розподілів в спектральній теорії динамічних систем конфлікту. Те, що міри можна трактувати, як спектральні міри гамільтоніанів фізичних систем — цей факт не новий, але те, що структура фізичного спектру дуже часто має фрактальні властивості і це є типовою рисою Природи — цей факт і досі мало сприйнятний. В той же час фрактальні структури виникають при математичній постановці задач в сучасних проблемах нелінійної динаміки, явищах синергетики, синхронізації, навіть в розділах фінансової математики та соціальних науках, дослідженнях структур самоорганізації та прийняття оптимального рішення, в актуальних для існування людського суспільства проблемах глобалізації, екології, клімату.

Отже, інтуїція Миколи Вікторовича Працьовитого щодо напрямку наукових досліджень спрацювала дуже точно. Надсучасною тенденцією стає запит на побудови адекватних моделей складних динамічних систем, в термінах яких, без сумніву, будуть присутні сингулярні розподіли по фрактальним множинам різноманітних типів.

І секрет творчого життєвого успіху Миколи Вікторовича Працьовитого не тільки в призначенні даним Богом, а і у грі Природи, яка обдарувала Миколу Вікторовича ще і поетичним відчуттям.

1. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* $\widetilde{Q}$-Representation of Real Numbers and Fractal Probability Distributions. — Bonn, 2002. — (Preprint of Bonn University; 12), arXiv:math.PR/0308007v1.
2. *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Spectral properties of image measures under infinite conflict interactions // Positivity. — 2006. — Vol. 10. — P. 39–49.
3. *Albeverio S., Koshmanenko V., Torbin G.* Fine structure of the singular continuous spectrum // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2003. — Vol. 9, no. 2. — P. 101–119.
4. *Koshmanenko V.* The theorem of conflict for probability measures // Math. Methods of Operations Research. — 2004. — Vol. 59, no. 2. — P. 303–313.
5. *Karataieva T., Koshmanenko V.* Origination of the singular continuous spectrum in the conflict dynamical systems // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 14, no. 1. — P. 309–319.

Володимир Дмитрович Кошманенко,
доктор фізико-математичних наук, професор

* * *

Я досить давно, років з 20 знаю Миколу Вікторовича. За чей час ми з ним стали близькими друзями. Мені з особливою приємністю згадуються часи нашої співпраці у ВАК України, де Микола Вікторович був секретарем експертної ради з математики. Специфіка роботи там така, що експертам інколи доводиться проводити експертизу робіт, що не мають зовсім прямого відношення до його безпосередньої спеціалізації, тому особливу цінність для ради мають «універсальні» експерти, спеціалісти, які швидко і професійно можуть розібратися в результатах з різних областей математичної науки. Таким «універсальним» експертом в нашій раді, без сумніву, був Микола Вікторович.

Мене не перестає вражати широта і глибина його математичної ерудиції. На мій погляд, він кваліфіковано може оцінити роботу з теорії ймовірностей, математичного і функціонального аналізу, топології, алгебри, диференціальних рівнянь, тобто майже з будь-якого розділу математики. Він відразу знаходив «родзинку» роботи, або вказував на причини, по яким цю роботу потрібно відхилити (останнє траплялося дуже рідко, бо Микола Вікторович — дуже добра людина).

Ще хотілося б згадати одну його рису, — це вміння знаходити компромісні виходи зі складних, конфліктних ситуацій, на мій погляд, це головна риса будь-якого керівника, тому, знаючи Миколу Вікторовича, я не дуже здивувався, що він став деканом у Педагогічному університеті.

Мені також імпонує його батьківське, тепле відношення до своїх учнів. Він вважає своїм обов'язком не тільки довести їх до захисту дисертацій, але й знайти їм пристойну роботу. Так, що аспірантура в Миколи Вікторовича завжди з обов'язковим працевлаштуванням, далеко не кожний науковий керівник ставить перед собою такі задачі, тому й здібна наукова молодь до нього тягнеться, а це значить, що наукова школа Миколи Вікторовича буде жити і процвітати.

Хочу побажати моєму другу міцного здоров'я, наснаги, талановитих учнів і творчих успіхів на науковій ниві.

Олександр Миколайович Станжицький,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри загальної математики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

* * *

С Н. В. Працевитым я познакомился осенью 1987 года, когда приехал на стажировку в Институт математики АН Украины. Поселили меня в общежитии аспирантов на улице Эжена Потье, где я прожил следующие 4 года вплоть до окончания аспирантуры в 1991 г. Случилось так, что поселили меня в комнату, находящуюся в одном блоке с комнатой, где жил Коля Працевитый — свежезащитившийся кандидат наук. Сдружились мы довольно быстро. Этому способствовали и почти одинаковый возраст, и то, что у нас был общий научный руководитель — профессор Анатолий Федорович Турбин. Часто вместе чаевничали, говорили обо всем: о математике, жизни, наших семьях, о бурных событиях, происходивших в стране в конце 80-х—начале 90-х годов.

Коля — невероятно интересный собеседник с искрящимся чувством юмора. Его умению шутить мог бы позавидовать любой. А еще он — оптимист по жизни. Не могу припомнить случая, когда бы он был зол, раздражен, сердит. А ведь жизнь часто дает немало поводов для подобных настроений. Особо хочу отметить его необычайную трудолюбивость и настойчивость в достижении цели. Эта черта его характера (удачно подчеркнутая даже в самой фамилии) может служить для многих ярким примером того, как трудолюбие и упорство непременно дают хороший результат. Особенно важно, что эти замечательные качества Николай Викторович смог привить своим ученикам.

Сейчас я со всей определенностью могу сказать, что знакомство с Колей Працевитым стало одним из самых приятных в моей жизни.

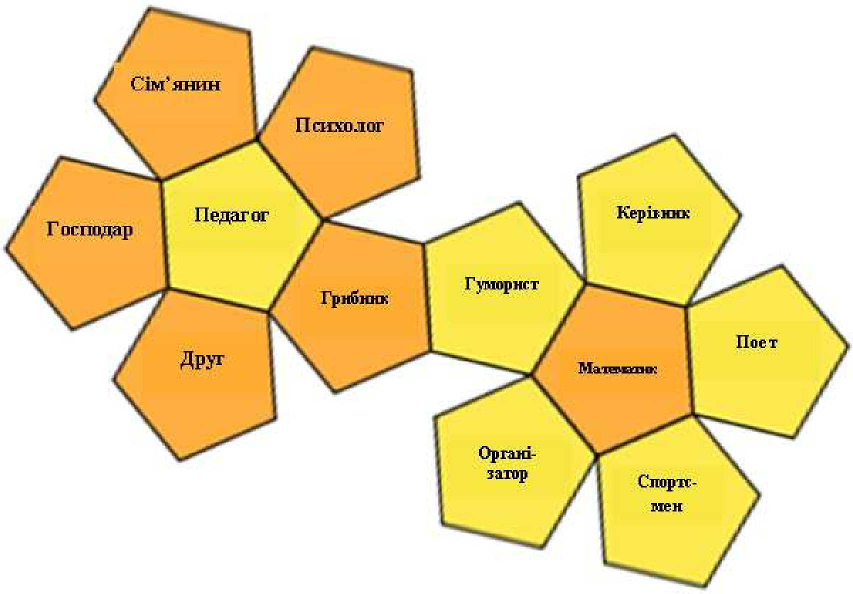
Олександр Дмитрович Колесник,
доктор, Інститут математики та інформатики
АН Республіки Молдова

Додекаедр Працьовитого

Багатогранність — та характеристика особистості, яка робить її цікавою для широкого кола людей. Опис особливо яскравих граней людини — задача складна, оскільки неможливо обійтися без тієї чи іншої міри суб'єктивності, яка залежить від багатьох чинників, включаючи залежність від особи, яка робить спробу такого опису. Безсумнівним є той факт, що Микола Вікторович — надзвичайно яскрава, багатогранна і водночас гармонійна людина. Не беручи на себе сміливість вибудовувати ієрархію яскравості всіх граней його особистості та таланту, я б виділив з них 12, гармонічно розташованих на відповідних гранях додекаедра, розгортка якого зображена нижче.

В геометричному додекаедрі в кожній вершині сходиться по три ребра і по три грані, а кожна грань межує лише з п'ятьма іншими. В додекаедрі ж Працьовитого всі «грані» мають нетривіальний перетин, формуючи в певній мірі цілісне уявлення про свого «власника» — Миколу Вікторовича Працьовитого.

50-річчя — це час максимального розквіту наукового, педагогічного, духовного та організаторського потенціалу людини, а тому, на мій погляд, сьогодні ще далеко не час (за висловом В. Васильєва — одного з улюблених письменників МВ) «їхати з ярмарку» і підводити підсумки такої багатогранної і успішної діяльності Миколи Вікторовича. Напевно, набагато природніше було б зробити такий (хоча і проміжний) підсумок під час святкування 60-річного ювілею. А оскільки для підведення (та оформлення) навіть проміжних підсумків такої плідної діяльності навряд чи вистачить однієї книги і зусиль однієї людини, було б цікаво (і я просив би учнів, друзів, родину і колег Миколи Вікторовича підтримати цю пропозицію) виготовити додекаедр Працьовитого (для власного використання) і щороку в період святкування дня народження Миколи Вікторовича — від 18 грудня (справжня дата народження) до 1 січня (офіційна дата народження) підкидати цей додекаедр хоча б один раз, фіксуючи отриману його грань, і записувати історію чи спогад, які пов'язані з зафіксованою гранню особистості та діяльності Миколи Вікторовича, надсилаючи їх електронною поштою за адресою `yan_a(at)ukr.net` (або на `torbin7(at)gmail.com`). В результаті, до святкування 60-річного ювілею ми всі разом зможемо створити «неофіційну», і тому особливо цікаву, біографію Миколи Вікторовича, іноді висвітлюючи одні і ті ж події з зовсім різних точок зору. Розпочну з себе.



Вперше я зустрівся і познайомився з Миколою Вікторовичем на початку вересня 1988 року. Будучи молодим асистентом кафедри вищої математики, він читав курс лекцій з аналітичної геометрії для студентів 1 МІ курсу фізико-математичного факультету КДПІ імені М. Горького та вів практичні заняття в 11 МІ групі. За 21 рік, який минув з того часу, я бачив і слухав багатьох блискучих лекторів, але жодному з них не вдавалося перевершити педагогічну майстерність 28-річного асистента Працьовитого, яка базувалась на гармонічному поєднанні глибокого розуміння предмету, почутті гумору, вмінні відчувати аудиторію і повазі до студента.

З цим курсом була пов'язана одна цікава майже гумористична історія. Екзамен з аналітичної геометрії 11 МІ группа здавала самою останньою на початку липня 1989 року. Під час консультації Микола Вікторович жартома запитав «хто завтра здасть іспит на „5"?», «хто здасть іспит на „4"?», «хто хоче здати іспит на „5"?», «хто хоче здати іспит на „4"?» і прямо під час консультації оголосив оцінку «відмінно» тому єдиному гумористу-зухвальцю, який підняв руку після першого запитання. Через багато років один знайомий розповідав моїй дружині цю історію про Миколу Вікторовича і був здивований її короткою ремаркою: «Тим студентом був мій чоловік. Перед цим він вже двічі „здавав" цей екзамен — готуючи до нього мою подругу Олесю і мене до екзамену з АГІЛА».

Початковий вибір професії Миколи Вікторовича був дещо далекий від математики: вчитель початкових класів — саме таку першу спеціальність отримав він в Немирівському педагогічному училищі і надзвичайно цінує здобуті там знання, вміння і навички. Але на щастя (для математики) наступні 30 років життя ювіляра були нерозривно пов'язані з МАТЕМАТИКОЮ, хоча і першому своєму вподобанню — ПЕДАГОГІЦІ він ніколи не зраджував. Навчання на фізико-МАТЕМАТИЧНОМУ факультеті Київського державного ПЕДАГОГІЧНОГО інституту імені М. Горького — вдалий консенсус між двома вподобаннями. Перші студентські наукові дослідження Миколи Вікторовича були пов'язані з теорією груп (антигрупи) під керівництвом Сергія Сергійовича Левіщенка. Були цікаві спроби довести гіпотезу про нескінченність множини простих чисел-близнят. Але все суттєво змінилося після зустрічі з Анатолієм Федоровичем Турбіним, який у 1982/83 навчальному році розпочав читати спецкурс з теорії фракталів для студентів-математиків КДПІ і куди (за порадою Сергія Сергійовича) записався студент 4 курсу Микола Працьовитий. З тих пір фрактали стали основним об'єктом наукових досліджень Миколи Вікторовича. Після блискучого захисту диплому та виступу на семінарі з теорії ймовірностей Інституту математики НАН України за рекомендацією академіка В. С. Королюка Микола Вікторович стає аспірантом відділу теорії ймовірностей та математичної статистики Інституту математики. В цей час він проводить дослідження сингулярних розподілів канторівського та салемівського типів, методів їх отримання та їх фрактальних властивостей, що приводить до успішного захисту кандидатської дисертації «Сингулярные распределения с фрактальными носителями канторовского и салемовского типов» у 1987 році. Ще один важливий напрям досліджень Миколи Вікторовича того часу — вивчення класів неперервних ніде недиференційовних функцій, з особливою увагою до спеціального классу таких функцій, названого ювіляром класом неперервних канторівських проекторів. Природнім підсумком першого десятиліття взаємного знайомства Миколи Вікторовича та фракталів стала їх спільна з Анатолієм Федоровичем монографія «Фрактальные множества, функции, распределения», яка була опублікована у 1992 році у видавництві «Наукова думка» і стала першою на теренах колишнього Радянського Союзу монографією, присвяченою фракталам. Саме на початок 90-років умовно можна віднести початок створення Київської школи теорії фракталів та їх застосування, засновниками якої можна вважати А. Ф. Турбіна та М. В. Працьовитого, а її будівничим, натхненником і багаторічним лідером — саме Миколу Вікторовича.

Мені пощастило навчатись в КДПІ і спілкуватись з Миколою Вікторовичем саме в цей час. У другому семестрі першого курсу за його дорученням я робив першу у своєму житті доповідь на студентському науковому гуртку, присвячену сингулярності функції Мінковського $?(x)$, а в кінці другого курсу (за порадою Людмили Степанівни Можарівської) я звернувся до МВ з запитанням про можливість наукової роботи у тому напрямку, який він розвивав. У призначений день під час розмови Микола Вікторович запропонував мені зайнятися деякими проблемами, які пов'язані з абсолютно неперервними функціями. Першим завданням (на літо) було ознайомлення з теорією функцій дійсної змінної (в те літо «Элементы теории функций и функционального анализа» А. М. Колмогорова і С. В. Фоміна та «Теорія функцій дійсної змінної» І. П. Натансона стали моїми настільними (чи наколінними — ввечері в будівельному загоні по побудові будинків чорнобильцям) книгами) і дослідженню масивності множини точок, в яких абсолютно неперервна функція розподілу має нулеву похідну. Друга задача стосувалась знаходження умов абсолютної неперервності суперпозиції двох абсолютно неперервних функцій. Саме цим проблемам і була присвячена моя курсова робота, яку я писав під керівництвом МВ у першому семестрі III курсу. Користуючись відносно простою («рукотворною») технікою (регулярний курс теорії функцій дійсної змінної саме у цьому семестрі нам читав професор М. О. Давидов) і достатніми умовами абсолютної неперервності, вдалось показати, що досліджувана множина може бути дуже масивною в топологічному розумінні (її доповнення може бути множиною першої категорії Бера) для певних абсолютно неперервних функцій. Користуючись сьогоднішньою термінологією, це були приклади абсолютно неперервних функцій розподілу, спектр яких є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега (функції Р-типу). Ці ж функції стали важливим мотиваційним аргументом для введення в розгляд та дослідження Q^*-представлення дійсних чисел (як узагальнення введенного Миколою Вікторовичем раніше Q-представлення) та ймовірнісних розподілів з незалежними Q^*-символами, оскільки такий підхід дозволяв формально просто задавати розподіли, спектр яких є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега, чого не можна було досягти в класі ймовірнісних розподілів з незалежними Q-символами. Більш того, критерії абсолютної неперервності ймовірнісних розподілів з незалежними Q-символами не працювали для нового більш широкого класу розподілів. Так почалось народження нашої першої спільної з Миколою Вікторовичем статті «Случайные величины с независимыми Q^*-знаками» (де були знайдені критерії дискретності, достатні умови абсолютної неперервності досліджуваних випадкових величин і повністю встановлена тополого-метрична структура їх спектрів), яка була опублікована в збірнику Інституту математики НАН України у 1992 році. Готуючи рукопис для подачі в редакцію (це тоді робилось в декількох екземплярах на друкарській машинці і робив це Микола Вікторович, а формули вписувались від руки чорною пастою і це вже був мій фронт робіт), Микола Вікторович поставив моє прізвище першим у списку авторів, що було дещо неприродним як за алфавітним принципом, так і за ієрархією «вчитель-учень». На мої зауваження з цього приводу він лише пожартував і сказав, що вважає так правильним. Цей дрібний епізод тоді дуже влучно підкреслив скромність, наукову і людську порядність Миколи Вікторовича, і його самодостатність як МАТЕМАТИКА і ПЕДАГОГА.

До моменту захисту дисертацій у 1999 році (я мав честь захищати кандидатську дисертацію в один день з докторською дисертацією Миколи Вікторовича) ми опублікували ще дві спільні статті: по суперфрактальності множини анормальних чисел (1995, УМЖ) та по дослідженню властивостей нескінченних згорток Бернуллі за допомогою розробленого апарату Q^*-представлення (1998, Доповіді НАН України). Вже в 21 столітті (за період з 2001 по 2009 рік) ми опублікували 20 спільних наукових статей в провідних українських математичних виданнях та в міжнародних журналах з солідною репутацією та високим імпакт-фактором, 12 препринтів та велику кількість тез доповідей на конференціях різних рівнів. Можна було б розповісти цікаву історію появи на світ кожної спільної роботи, але перша спільна стаття напевно залишиться особливо пам'ятною.

Микола Вікторович, безсумнівно, зіграв дуже важливу роль у моєму рішенні займатись математикою, виборі напряму досліджень і моєму становленні як науковця та педагога, за що я хотів би висловити ВЧИТЕЛЮ глибоку вдячність і побажати довгих років творчого життя з міцним здоров'ям; матеріального, духовного і сімейного благополуччя; гармонії в душі і тілі, сили і мудрості, між «хочу» та «можу», між суєтою та творчістю; несподіваних красивих математичних ідей та експромтів; талановитих і вдячних учнів; сміливості у виборі нових вершин і натхнення та везіння у їх підкоренні; і просто людського ЩАСТЯ!

Григорій Мирославович Торбін,
доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри вищої математики
НПУ імені М. П. Драгоманова

Десять принципів Миколи Працьовитого

Наближається ювілей нашого шановного Вчителя — доктора фіз.-мат. наук, професора, чудового викладача і прекрасної людини — *Миколи Вікторовича Працьовитого.* Ми, його учні, дякуємо долі за те, що вона звела нас із ним, дала можливість спілкуватися в різних сферах цього життя.

Микола Вікторович був, є і буде для нас, у певному розумінні, взірцем, тим орієнтиром, на який слід рівнятися тому, хто хоче досягти успіху, поваги та любові рідних, друзів та колег. Тому ми й вирішили в цьому ювілейному виданні поділитися нашими спостереженнями стосовно основних принципів життя нашого Вчителя.

Звичайно, хтось може не погодитися з наведеним списком, доповнити його, розширити аргументацію тощо. Але ми підкреслюємо, що це лише наше бачення, причому наведені принципи не розташовані у порядку зростання важливості, а також не являють собою ніякої «класифікації» особистісних рис Миколи Вікторовича, бо не є «розбиттям множини на підмножини, які не перетинаються та у об'єднанні дають всю множину» :). Навпаки, сформульовані принципи мають багато спільного, витікають один з одного і, поєднуючись разом, утворюють неповторну особистість нашого Вчителя.

Отже. . .

Принцип перший — патріотизм. Спілкуючись із Миколою Вікторовичем, не можна не помітити, яким він є великим Патріотом. Крізь усе його життя червоною ниткою проходить любов до великої і малої Батьківщини та до людей, які тут живуть. Це проявляється у тому, що він ніколи не соромився свого українського походження, завжди розмовляв українською, хоч добре знає й російську, і вивчав німецьку. Цей патріотизм нашого Вчителя поширюється також і на рідний університет та факультет, вірним якому він залишився і донині, не зважаючи на велику кількість принадливих пропозицій, від яких нібито не відмовляються.

Принцип другий — повага до старшого покоління. А що тут коментувати? Ті, хто добре знають Миколу Вікторовича, підтвердять наші слова. Він завжди з теплом і ніжністю згадував свою маму, чиїй пам'яті присвятив монографію, шанував батька, бабусю, дідуся, а також інших своїх численних родичів зі старших поколінь. Це саме стосується і його власних вчителів та старших колег, зокрема, він завжди підтримував і підтримує пенсіонерів, які колись працювали разом з ним, цікавиться їх життям і по можливості відвідує.

Принцип третій — любов та підтримка рідних, близьких та друзів. Ми можемо сказати одне — тим, хто має честь вважати себе другом Миколи Вікторовича, дуже пощастило в житті. Скільки разів можна було спостерігати, як він усіляко підтримував (морально, а якщо потрібно, то й матеріально) своїх родичів та друзів, навіть дуже далеких. Допомагав порадою і добрими справами, не відступаючи перед труднощами, а іноді й перед невдячністю.

Принцип четвертий — професіоналізм. На думку нашого Вчителя, будь-якою вартою чогось справою мають займатися лише професіонали: талановиті, освічені та завзяті. Тому, на наше переконання, Микола Вікторович завжди керувався в житті таким девізом: «Талант потрібно підтримувати, а інших — вчити.»

Принцип п'ятий — довіра до молоді. Вірити у здатність молодих звершувати великі справи — ось суть цього принципу! Тому завжди поруч із Миколою Вікторовичем молодь, якій він не боїться доручати найвідповідальнішу роботу, яку, можливо, міг би зробити й сам і значно краще. Це стосується, зокрема, і наукових досліджень. Бо якщо не давати молодому математику серйозних завдань, то він не буде зростати!

Принцип шостий — імператив добра. Суть цього принципу така: «Якщо можеш зробити добро — зроби його, не зважаючи на можливі негативні наслідки для себе самого». Цей принцип не новий, як і все у цьому світі, але наскільки ж важко йому слідувати! Для цього потрібно вміти прощати від усього серця навіть тих, хто заслуговує на покарання, а цей дар властивий далеко на кожному. Миколі Вікторовичу він властивий, що ми з приємністю й констатуємо.

Принцип сьомий — пріоритет роботи. На думку нашого Вчителя, чогось досягти можна лише наполегливою та постійною працею. Микола Вікторович цінує і у науці, і у житті тих, хто добивається успіху навіть більше за рахунок праці, ніж за рахунок природної обдарованості, підтверджуючи цим слова Едісона, що «геній — це лише 1% обдарованості, а 99% — праця».

Принцип восьмий — честі, чесності, порядності та відкритості. Спостерігаючи за Миколою Вікторовичем, не можна не відзначити його постійне прагнення до відкритих і чесних стосунків з усіма людьми. Навіть займаючи високі пости, йому вдалося не захворіти «зірковою хворобою», залишаючись із рідними, друзями та колегами максимально щирим.

Принцип дев'ятий — любов до математики. Микола Вікторович, не побоїмося цього слова, справжній фанат науки, яка зветься Математика. Саме так і тільки так — з великої літери. Цій науці наш Учитель присвятив своє життя, тільки її він вважає справжньою і вартою гідної уваги. Поважаючи роль і значимість інших наук, він усе таки є, перш за все, Математиком, теж з великої літери!

Принцип десятий — любов до викладання. Микола Вікторович — природжений викладач! Педагогічна діяльність наскрізно проходить через усе його життя: закінчив педучилище, педагогічний університет, працював і працює (!!!) в школі. Віддаючи пріоритет науці, наш Учитель ніколи не залишав викладання, оскільки прекрасно розумів, що зацікавити математикою — не менш важлива справа, ніж у ній щось відкрити. Саме тому Микола Вікторович, як сказав на його захисті академік Володимир Семенович Королюк, — «Божою милістю професор». Дякуючи саме любові до викладання, йому вдалося не лише зробити багато суто математичних відкриттів, а і створити наукову школу. І його численні учні, ми не сумніваємося в цьому, зроблять у математичну науку не менш важливий внесок, ніж він сам.

50 років для Миколи Вікторовича — багато це, чи мало? Судячи зі зробленого — дуже багато! А судячи з того, що йому ще призначено зробити — дуже й дуже мало! Тому ми і бажаємо йому довгих років життя, творчого натхнення й вічної молодості в душі!

Многая літа!

Олег Львович Лещинський,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, ПЕК НАУ
Олександр Володимирович Школьний,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
НПУ імені М. П. Драгоманова

Коле Працевитому

Ты еще в начале пути,
День сей — отдышаться лишь миг.
Удалось хоть столько найти,
Хоть уже не мало постиг.

И вершин твоих впереди,
Думаю что много еще.
С этой точки новый отсчет,
Хоть не мне, наверно, судить.

Ты всегда шел вверх и вперед,
За собою многих ведя,
Отрицал в познаньи обход,

Не жалел ни их ни себя.

На Олимпе трудно, увы
Воздух реже, нечем дышать,
Но я верю в силы Твои,
Не предать и не потерять.

Главное — зачем ты рожден,
Чтоб творить и делать добро.
На успех всегда обречен,
Потому что для Тебя серебро,

Так же как и золото не в звоне монет,
А в идеях, в том чем живешь,
И дороже этого нет,
И нужнее вряд ли найдешь.

Будь таким, каким Ты и был,
Не меняйся — жизнь не простит!
Счастья, вдохновенья и сил,
Для того, зачем стоит жить.

Олег Львович Лещинський,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, ПЕК НАУ

* * *

Справжні Математики — це люди, які дуже тонко відчувають красу в усіх її проявах. «Отримав красивий результат», «довів красиву теорему або формулу» — для математика це найвища похвала.

Крім абстрактної краси математичних теорій, Микола Вікторович дуже гарно відчуває красу навколишнього світу, красу природи. Напевно найкращий відпочинок для нього — це поїздка «на гриби».

Збирання грибів для Микола Вікторовича — це справа відповідальна і азартна, яку він робить так само як і інші свої справи — швидко, якісно і з вагомими результатами.

Шукати гриби разом з Миколою Вікторовичем дуже важко — навіть бігти за ним по лісі встигають не всі, а вже помічати при цьому гриби … та ще й дрібненькі … та ще й десь під он тими кущами метрів за двадцять… Але якраз завдяки тому, що розслабитись в лісі Микола Вікторович не дасть нікому, з пустими руками з лісу ви не повернетесь ніколи.

Уже виїзжаючи з лісу в сутінках, він може помітити гриб метрів за десять від дороги, вистрибуючи на ходу з машини, сказати: «Я на хвилинку», і зникнути на години півтори. Повернутись з відром білих грибів і щедро роздати їх менш «результативним» колегам.

Мы бежим за ним и в лес, и на работу,
Но не можем никогда догнать,
Бережем, как дикую природу,
Чтоб любить и просто созерцать.

На работе он — суров и грозен,
На природе он — совсем другой,
Дома он — спокоен, несерьезен,
В математике он очень деловой.

Он всегда перед тобой открытый,
Добрый, нежный, строгий, неземной,
Он грибник и математик видный,
Оставайся, Коля, вечно молодой.

Бажаємо Вам, Микола Вікторович, міцного здоров'я, особистого щастя, яскравих успіхів та здійснення найзаповітніших мрій. Нехай кожен день буде осяяний високим злетом душі, а добре самопочуття і гарний настрій стануть запорукою Вашого процвітання. Миру, злагоди, шани, любові та достатку у Вашому домі!

Володимир Іванович Баштовий,
начальник відділу організації наукових досліджень
НПУ імені М. П. Драгоманова,
доцент кафедри теорії та методики навчання фізики і астрономії
Яніна Володимирівна Гончаренко,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
докторант кафедри методології та методики навчання
фізико-математичних дисциплін вищої школи

* * *

Не пам'ятаю першу лекцію в університеті. Перші дні були настільки насичені новими емоціями і враженнями, що у мене зберігся лише загальний яскравий образ, і нічого конкретно. Але я добре пам'ятаю пізніші лекції з аналітичної геометрії, які нам читав Микола Вікторович. Пам'ятаю, що вони були дуже активними і живими. Це не було «наповнення» знаннями «порожніх» голів студентів. Це завжди був діалог між викладачем і студентами. Микола Вікторович завжди щось запитував під час лекції або ставив проблеми, над якими можна було подумати вдома. Наш курс був досить активним і допитливим. (Мені так здається; але порівняти я не маю з чим.) Але часто траплялося, що відповіді на якесь запитання ніхто не знав чи ніхто не міг швидко знайти. Аудиторія на мить завмирала: хтось напружено міркував, шукаючи відповідь, інший чекав, чи наважиться хтось говорити… У таких ситуаціях Микола Вікторович казав: є один, який знає. Студенти, що сиділи в перших рядах, звісно, оберталися, щоб побачити, що за розумник десь там ззаду підняв руку. Тоді Микола Вікторович повертався до дошки і читав лекцію далі. Він був єдиним, хто знав відповідь на це запитання.

Але він учив нас не тільки аналітичної геометрії. Ще інколи вчив нас «жити». Одного разу приходить на лекцію і відразу — писати на дошці. Зверху на тому, що хтось писав на попередньому занятті. А потім пояснив це дуже просто: викладач приходить на заняття, щоб розповісти студентам, що знає, а не для того, щоб витрачати свій час і час студентів(!) на другорядні речі. Але це була дружня порада, а не «вказівка від керівництва». Невимушено і ненав'язливо. Микола Вікторович завжди ставився до студентів як до рівних. Мабуть, тому люди до нього тягнуться.

Якось під час дискусії про університет, про студентів і про життя взагалі Микола Вікторович зізнався, що за весь час, поки вчився в університеті, він жодного разу не пропустив жодного заняття (без поважної причини). Я таким похвалитися не міг, тому трохи засмутився. Але тільки зараз зрозумів, чому це так важливо і як це насправді просто. Суцільна деградація в усіх сферах суспільного життя (можливо, це тільки мені таке ввижається?) має наслідком і те, що навчання в університеті, здається, перетворюється в обмін грошей на дипломи замість того, щоб бути спілкуванням студента з професором. Інтернет переповнений пропозиціями готових курсових робіт і навіть дисертацій, а диплом можна купити і в підземному переході. Нікому не потрібні знання, але всі хочуть мати диплом. Сумно... Якби кожен відповідально ставився до свого діла...

Мене завжди дивувала надзвичайна працездатність Миколи Вікторовича. Ні, не дивувала, а вражала і вражає. Як він встигає одночасно робити кілька справ? А особливо зараз, коли має так багато ще й адміністративних обов'язків: і завідувач відділу, і директор інституту... І де при такій завантаженості ще знайти час для науки? Так, у дорозі! Колись ми разом їздили з університету додому, наші напрямки збігалися. І завжди Микола Вікторович мав що обговорити. І завжди мав чистий папір, щоб розв'язувати задачі. Якщо я довів якісь хоч трохи цікаві теореми, то це було тоді, в дорозі, разом з Миколою Вікторовичем. Наука — це найбільша його пристрасть. І він намагається у будь-якій ситуації знайти час для науки, для математики.

Згадую своє перше відрядження в Бонн, в Інститут прикладної математики Боннського університету. Це лютий 2005 року. Невдовзі після Помаранчевої революції. То був час підйому сил, очікування нового. На цьому підйомі навіть теореми краще доводилися. А ще весна! Так сталося, що ми виїхали з Києва взимку, а приїхали до Бонна майже навесні, квіти починали цвісти... Микола Вікторович «підштовхував» мене до захисту дисертації, яким я не дуже переймався (бо це нецікаво). Він казав, що це потрібно для України. Я тихенько посміхався собі у вуса і вважав, що це дуже наївно — думати, що якась дисертація може щось означати для України. Лише згодом збагнув глибокий зміст цих слів! У справжнього науковця є лише одна пристрасть — наука. Але все, що він робить, він робить для Батьківщини. Без цього будь-яка діяльність є несправжньою, неприродною, а результати — дрібними і нецікавими.

Микола Вікторович саме такий. Справжній, щирий і відкритий! Миколо Вікторовичу, я дякую долі, яка колись нас познайомила, і дякую Вам за спілкування!

Олександр Миколайович Барановський,
науковий співробітник відділу фрактального аналізу
Інституту математики НАН України
і Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова,
кандидат фізико-математичних наук

* * *

Я можу назвати себе одним з тих щасливих людей, яким Ви, Микола Вікторович, даруєте оптимізм, віру в життя, наснагу, працелюбність. Завжди задавав собі питання: де Ви це все самі берете? Звідки здатність працювати 20 годин на добу і при цьому виглядати так, наче Ви щойно повернулись з вакації на Мальдівах. А після виявляється, що за той час Ви окрім того, що зробили купу роботи, ще й встигли вірша написати. Я ніколи в житті не писав вірші, але зараз вирішив — спробую. Вибачте за аматорство, бо це перший млин...

В житті, як в лісі за грибами,
Якщо проспав — не назбирав.
Якби не кафедра у Педі,
Микола б їх весь день шукав.

А тут висить нарада, тощо,
І треба всюди поспішати,
Пробігаєш весь день кругами,
Які гриби вже там збирати.

Отак и крутиться Микола
То інститут, сім'я, то ліс,
Та працьовитості такої
Аби всі люди удались!!!

Микола Вікторович, щиро вітаю Вас з ювілеєм! Бажаю щастя, здоров'я Вам і родині, успіхів, наснаги, терпіння, кохання, бажання... Я пишаюсь бути Вашим учнем.

В'ячеслав Володимирович Коваль,
науковий співробітник та викладач
університету м. Утрехт, Нідерланди

Микола Вікторович Працьовитий — мій науковий керівник

Нині я студент п'ятого курсу. Але ще пам'ятаю першу пару першого курсу, яка була лекцією з аналітичної геометрії. Цю лекцію читав нам Працьовитий Микола Вікторович.

За одну пару ми встигли поговорити про навчання взагалі, про навчання у ВНЗ, про вектори (тема лекції була «елементи векторної алгебри»), а також про «пучки різнокольорових олівців». Саме так Микола Вікторович розказував нам про класи еквівалентності (хоча від нього ми цієї назви не почули).

Пам'ятаю своє здивування після першої лекції: «Ти диви, а тут не так уже й важко!». І внутрішній голос мені відповів: «Нічого, далі буде важче...». Він був правий...

Ось це «важче» почалося із «завалу» нас інформацією у вигляді різних лекцій. Конспекти я тоді писав повільно і дуже боявся, що відстану від аудиторії, стану трієчником і буду у всіх просити конспекти. Але точно знав, що конспекти з аналітичної геометрії я просити не буду, бо лекції з цієї дисципліни роздруковувалися у невеличких паперових брошурках. На обкладинці такої брошурки було написано: «Аналітична геометрія. Лекція № n. М. В. Працьовитий».

А потім прийшло лихо — колоквіуми. Першим був саме колоквіум з аналітичної геометрії. Ми готувалися до нього за тиждень. А коли прийшли у вказаний час до вказаної аудиторії... Миколи Вікторовича там не було. Не було його і через 15 хвилин, і через годину. А з'явився наш викладач через три години після «офіційного» початку колоквіуму. Але все одно колоквіум не відмінив.

Саме таким було моє перше враження про Миколу Вікторовича. По-перше — це людина, яка дуже цікаво розповідає, дуже багато знає і від якої можна побачити справжню турботу. По-друге — це людина, яка може запізнитися на одну, дві або й більше годин.

Коли я писав курсову під керівництвом Працьовитого М.В., то це принесло додаткові розчарування. Я думав, мені буде дано великий список літератури, яку я прочитаю, розберуся в матеріалі та коротко і красиво його опишу. Якщо ж будуть якісь проблеми, то я зможу підійти до наукового керівника, і він мені все пояснить. Насправді все було трохи інакше.

У списку літератури, який Микола Вікторович мені дав, було всього дві книжки. Зате була ще одна аспірантка, яка виявилася кращою, ніж будь-який список літератури. На більшість моїх питань вона відповіла. Але потім ми з нею підійшли до такої задачі, яку ані вона, ані я розв'язати не змогли. Тоді я вирішив підійти до наукового керівника. На питання «коли до Вас можна підійти?» Микола Вікторович сказав «почекайте мене п'ять хвилин» і кудись пішов. Через дві години він повернувся. Але коли я почав розказувати суть проблеми, він сказав: «Саша, я ж не читав ту літературу і не розумію, про що ви говорите». Я задумався, як пояснити Миколі Вікторовичу детальніше. Тоді він запропонував: «Саша, ідіть додому і підготуйте доповідь на семінарі. Я її прослухаю, розберуся в проблемі і тоді будемо думати».

Ввечері я сів готувати доповідь. Захопившись процесом, не помітив, як настала ніч. Але разом з ніччю прийшло прозріння... Я зрозумів, як можна підійти до тієї задачі і почав працювати над курсовою роботою.

Наступний яскравий епізод був приблизно на рік пізніше. Тоді я вже вчився на третьому курсі і писав іншу курсову роботу — з математичного аналізу. Моїм науковим керівником фактично був також Микола Вікторович. Спочатку я мав уявлення про те, як мені працювати. Але поступово знову з'явилася задача, яку я не міг розв'язати.

Я підійшов до наукового керівника. Він сказав: «Саша, почекайте мене п'ять хвилин». Того дня я чекав його до 20 годин, але так і не дочекався. Наступного дня я також чекав і не дочекався. Аналогічна ситуація була третього та четвертого дня. П'ятого дня я прийшов чисто із упертості. Але ситуація не змінилася.

На наступному тижні у мене була страшенна образа на наукового керівника та на його ставлення до мене. Але на відсутність упертості я ніколи не жалівся, тож ходив на кафедру вищої математики і далі та «підстерігав» його. Щоб не гаяти часу, іноді я виконував на кафедрі домашні завдання або перечитував лекції. Одного разу я вирішив усе-таки спробувати самому попрацювати над тією задачею. Думав години чотири і з'явилася одна ідея. Але мені не вірилося, що вона приведе до результату... Через місяць ця ідея стала ключовою ідеєю моєю курсової роботи.

А Микола Вікторович примусив мене написати на основі цієї курсової статтю та послати її на Всеукраїнський конкурс студентських наукових робіт. Ця стаття була першою серйозною статтею в моєму житті. Близько двох тижнів я після пар приходив на кафедру вищої математики і Микола Вікторович читав варіанти статті, правив її, «полірував» та радив мені виправити окремі частини роботи.

Це було в кінці четвертого курсу. Ось тоді я й зрозумів, чому Миколу Вікторовича потрібно стільки чекати. Тому що Микола Вікторович хоче використовувати максимально продуктивно як свій час, так і час інших людей. Саме тому він дає студенту можливість попрацювати самому. Саме тому Микола Вікторович дає студенту не лише літературу, але й аспіранта. Саме тому Микола Вікторович дає аспіранту не лише літературу, а й студента :). А в ситуації, де допомогу може надати лише науковий керівник, Микола Вікторович зразу забуває свій прийом «піти на 5 хвилин» і може сидіти і працювати разом із студентом над його науковою роботою. Найчастіше це дає свої плоди.

Саме тому Микола Вікторович є гарним науковим керівником. Тому фразу «М. В. Працьовитий — мій науковий керівник» я вимовляю з гордістю.

Олександр Слуцький,
магістрант Фізико-математичного інституту
НПУ імені М. П. Драгоманова,
голова Студентського наукового товариства Інституту

* * *

Мені також хотілось би згадати деякі цікаві збіги, пов'язані з моїм знайомством та спілкуванням з Миколою Вікторовичем.

Першу пару 1 вересня 1991 року на нашому потоці вів саме Микола Вікторович Працьовитий. На другій лекції з аналітичної геометрії він перший раз задав питання студенту на парі — мені, щось про еквіполентні відрізки. Свій перший екзамен я складала Миколі Вікторовичу. До речі цей екзамен був наступного дня після мого дня народження. Але не зважаючи на це і на те, що на запитання Миколи Вікторовича: «Ну що у Вас спитати? Чого Ви не знаєте?», я занадто самовпевнено відповіла, що я знаю все :), він поставив мені відмінну оцінку. Напевно з його легкої руки інших оцінок в моїй заліковій не було (ну, якщо бути відвертою, то була єдина четвірка з політичної історії, але то ж не математика :)). Нажаль, Микола Вікторович викладав у нас тільки на першому курсі. Але його лекції завжди викликали ентузіазм навіть у тих студентів, для яких навчання було тяжкою і нудною справою. Деякі його жарти та вислови мої однокурсники можуть процитувати і сьогодні.

Микола Вікторович був моїм науковим керівником під час навчання в аспірантурі, разом з ним я підготувала свою першу доповідь на науковій конференції, першу наукову статтю, першу дисертацію. Завдяки йому я взяла участь в розробці кількох цікавих міжнародних наукових проектів.

Всі, хто спілкується з Миколою Вікторовичем, відзначають наскільки він притягує людей, вміє захопити молодь, допомагає розкритись талантам. Напевно все це відбувається тому, що він — надзвичайно потужний генератор ідей, він щедро віддає їх «в гарні руки», що, до речі, не є таким вже поширеним явищем серед науковців. Він просто запалює, заряджає оточуючих своєю енергією та оптимізмом.

Микола Вікторович, я бажаю Вам, щоб Ваша щедрість верталась сторицею, щоб шанували, любили і поважали колеги і учні, щоб зростала і примножувалась новими результатами створена Вами наукова школа.

Нехай в Вашій родині завжди буде злагода, любов і добробут.

Нехай очолювані Вами Фізико-математичний інститут та відділ фрактального аналізу успішно розвиваються і процвітають.

Бажаю, щоб завжди вистачало сил і часу на улюблені справи — спілкування з близькими людьми, заняття наукою, викладання, роботу з молодими науковцями, написання віршів, поїздки в ліс, збирання ожини.

Яніна Володимирівна Гончаренко,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
докторант кафедри методології та методики навчання
фізико-математичних дисциплін вищої школи

Про одну сингулярну функцію, пов'язану з рядами Остроградського 1-го та 2-го видів

О. М. Барановський, І. М. Працьовита, М. В. Працьовитий

Функції, які мають «особливості» в кожному, як завгодно малому, інтервалі області визначення, називається функціями зі складною локальною поведінкою (будовою) [1]. Цю доповідь присвячено одній з них.

Відомо, що кожне ірраціональне число $x \in (0,1)$ єдиним чином розкладається в знакозмінні ряди Остроградського 1-го та 2-го видів [2, 3, 4], а саме:

$$x = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_1 q_2 \ldots q_k} + \ldots \equiv \mathrm{O}^1(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots), \quad (1)$$

де $q_k + 1 \leqslant q_{k+1} \in \mathbb{N}$, і

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{a_k} + \ldots \equiv \mathrm{O}^2(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots), \quad (2)$$

де $a_k(a_k + 1) \leqslant a_{k+1} \in \mathbb{N}$.

Вираз (1) можна переписати в іншій формі:

$$x = \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_1(g_1 + g_2)} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{g_1(g_1 + g_2) \ldots (g_1 + g_2 + \ldots + g_k)} + \ldots \equiv$$
$$\equiv \bar{\mathrm{O}}^1(g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots),$$

де $g_1 = q_1$, $g_{k+1} = q_{k+1} - q_k$, $k = 1, 2, \ldots$, що називається $\bar{\mathrm{O}}^1$-зображенням числа x. Аналогічно, виразу (2) можна дати формально інше зображення — $\bar{\mathrm{O}}^2$-зображення:

$$\bar{\mathrm{O}}^2(d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots) = \mathrm{O}^2(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots),$$

де $d_1 = a_1$, $d_{k+1} = a_{k+1} - a_k(a_k + 1) + 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Основний об'єкт. Означимо функцію $y = F(x)$:

$$\bar{\mathrm{O}}^1(g_1, g_2, \ldots) = x \xrightarrow{F} y = \bar{\mathrm{O}}^2(g_1(x), g_2(x), \ldots).$$

Теорема 1. *Функція F є неперервною строго зростаючою функцією розподілу на $[0,1]$.*

Лема 1. *Рівняння $F(x) = x$ має зліченну множину раціональних коренів і жодного ірраціонального.*

Лема 2. *Для будь-якого $x \in [0,1]$ має місце рівність*

$$F(x) + F(1 - x) = 1.$$

Нехай $i \in \{1, 2\}$, $u = \bar{\mathrm{O}}^i(c_1, c_2, \ldots)$ — довільна точка $(0,1]$. Оператор φ_i зсуву символів $\bar{\mathrm{O}}^i$-зображення на $(0,1]$ означується рівністю

$$\varphi_i(u) = u' = \bar{\mathrm{O}}^i(c_2, c_3, \ldots).$$

Лема 3. *Функція F має властивість:*

$$F\left(\varphi_1(x)\right) = \varphi_2\left(F(x)\right),$$

де φ_i — оператор зсуву цифр $\bar{\mathrm{O}}^i$-зображення.

Теорема 2. *Функція F є чисто сингулярною функцією розподілу на $[0,1]$.*

Теорема 3. *Має місце рівність*

$$\int\limits_0^1 F(x)dx = \frac{1}{2}.$$

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
2. *Ремез Е. Я.* О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, № 5 (45). — С. 33–42.
3. *Барановсъкий О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 9. — С. 1155–1168.
4. *Працьовита І. М.* Про розклади чисел у знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1- та 2-го видів // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 7. — С. 958–968.

Інститут математики НАН України і Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
E-mail: baranovskyi(at)imath.kiev.ua, lightsoul2008(at)gmail.com, prats4(at)yandex.ru

Про теореми тауберового типу для просторів послідовностей

М. М. Білоцький

Відомо, що $c \subset m \subset s$, де c, m, s — метричні простори послідовностей:

$$c = \left\{ x = (x_n) : x_n \in \mathbb{C}\, \forall n \in \mathbb{N},\ \exists \lim_{n\to+\infty} x_n \right\}$$

з метрикою $\rho_c(x,y) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$,

$$m = \left\{ x = (x_n) : x_n \in \mathbb{C}\, \forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty \right\}$$

з метрикою $\rho_m(x,y) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$,

$$s = \left\{ x = (x_n) : x_n \in \mathbb{C}\, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

з метриками $\rho_s(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{|x_k-y_k|}{2^k(1+|x_k-y_k|)}$, де $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ — елементи відповідних просторів. Між елементами $x = (x_n) \in s$ і послідовністю елементів $x_{(p)} = (x_{1+p}, x_{2+p}, x_{3+p}, \ldots, x_{n+p}, \ldots) \in s$, $\forall p \in \mathbb{N}$, цього простору існує взаємно однозначна відповідність. Це дозволяє, вивчаючи властивості послідовностей $x_{(p)}$, вивчати властивості самих елементів $x = (x_n)$ відповідних метричних просторів. Наприклад, вважаючи простори m і c нормованими, відому теорему Вейерштрасса можна сформулювати як теорему тауберового типу:

якщо $x = (x_n) \in m$ і

$$\exists p \in \mathbb{N} : x_{(p+1)} - x_{(p)} \in \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{R},\, x_n \geqslant 0 \,\forall n \in \mathbb{N}\}$$
$$(\exists p \in \mathbb{N} : x_{(p+1)} - x_{(p)} \in \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{R},\, x_n \leqslant 0 \,\forall n \in \mathbb{N}\}),$$

тоді $x = (x_n) \in c$.

Справедливі наступні твердження тауберового типу.

Теорема 1. *Якщо* $x = (x_n) \in s$ *і* $\lim\limits_{m\in\mathbb{N}, p\to\infty} \rho(x_{(p+m)}, x_{(p)}) = 0$ *(тобто, послідовність* $(x_{(p)})$ *фундаментальна у просторі* s*), тоді* $x = (x_n) \in c$.

За допомогою нескінченної нижньої трикутної матриці $A = (a_{mn})$, де $a_{mn} \geqslant 0 \;\forall m \in \mathbb{N}\; \forall n \in \mathbb{N}$, але $a_{mn} = 0 \;\forall n > m$, $a_{nn} > 0$, з умовами на елементи:

1. $\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \sum\limits_{n=1}^{m} a_{mn} < +\infty$;
2. $\exists \lim\limits_{m\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} a_{mn} = 1$;
3. $\forall n \in \mathbb{N} \;\exists \lim\limits_{m\to+\infty} a_{mn} = 0$,

лінійний простір послідовностей з комплексними членами можна перетворити в нормований простір

$$A_m = \left\{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{C} \,\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{m\in\mathbb{N}} \left|\sum_{n=1}^{m} a_{mn}x_n\right| < +\infty\right\}$$

з нормою $\|x\|_A := \sup_{m\in\mathbb{N}} \left|\sum_{n=1}^{m} a_{mn}x_n\right|$ такий, що $c_0 \subset c \subset m \subset A_m$.

Теорема 2. *Якщо* $x = (x_n) \in A_m$ *і* $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}, p\to\infty} \|x_{(p+n)} - x_{(p)}\|_A = 0$ *(тобто, послідовність* $(x_{(p)})$ *фундаментальна у просторі* A_m*), тоді* $x = (x_n) \in c$.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

Finite state conjugation of linear functions on the ring of 2-adic integer numbers

Yu. V. Bodnarchuk, D. I. Morozov

Automorphisms of the one rooted infinite binary tree T_2 (the degree of all vertices except the root one equals 3) can be identified with bijections of the ring Z_2 of integer 2-adic numbers. For instance, so called the adding machine ϵ can be defined as the function $x \to x+1$, $x \in Z_2$. As well known (see [1]), the centralizer $C_{AutT_2}(\epsilon)$ is a closure of the cyclic group $< \epsilon >$ in the topology of projective limit on $AutT_2$ and consists of the functions $x \to x+p$, $p \in Z_2$, $C_{AutT_2}(\epsilon) \simeq Z_2^+$.

Here we investigate the conjugation problem for automorphisms of T_2, which can be realized as linear functions of the form $x \to ax+b$, $a \in Z_2^*$, $b \in Z_2$ in the finite state automorphisms group $FAutT_2$. Let $\mathbb{Q}$ be a field of the rational numbers then finite state automorphisms which are linear functions can be characterized in such a manner.

Lemma 1. *A linear function $f(x) = ax + b$ be a finite state automorphism if and only if $a \in Z_2^* \cap \mathbb{Q}$, $b \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$.*

Lemma 2. *Each automorphism of the form $f(x) = ax+p, c$ conjugate to $f(x) = ax + 1$ in $FAutT_2$.*

We say that automorphism has a maximal pro-order if it acts transitively on vertices which are equidistant from root one. Adding machine ϵ is an example of such an automorphism. As well known all maximal pro-order automorphisms are conjugate in $AutT_2$.

Lemma 3. *All linear functions which are maximal pro-order finite state automorphisms have the form $x \to (4k+1)x + p$, $k \in Z_2 \cap \mathbb{Q}$, $p \in Z_2^* \cap \mathbb{Q}$.*

Theorem 1. *Two maximal pro-order finite state automorphisms $f_1(x) = a_1x + b_1$, $f_2(x) = a_2x + b_2$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in Z_2^* \cap \mathbb{Q}$ which are linear functions are conjugate in $FAutT_2$, if and only if $a_1 = a_2$.*

In particulary, the maximal pro-order finite state automorphism $x \to 5x + 1$ doesn't conjugate to $\epsilon : x \to x + 1$. This phenomena can be explained in such a manner. It is easy to prove that if an equation

$$(x+1)^\chi = 5x+1 \tag{1}$$

have a solution $\chi \in FAutT_2$ then it have a solution $\chi_0 \in FAutT_2$ such that $0^\chi = 0, 0 \in Z_2$. One the other hand it is known (see [1]) that for maximal pro-order automorphisms $g_1, g_2 \in AutT_2$ for any pair of points $x, y \in Z_2$ there is exists $\chi \in AutT_2$ such that $g_1^\chi = g_2$ and $x^\chi = y$, moreover the last condition defines χ uniquely. Let $\chi_0 = \frac{5^x-1}{4}$ be a function which is defined for a natural x and extended by continuity on Z_2. It is easy to check that $\chi_0 \in AutT_2$, satisfies the equation (1) and $0^{\chi_0} = 0$ so it is unique solution (1) in $AutT_2$ which leaves immovable 0. But $\chi_0 : \frac{1}{3} \to \frac{\sqrt[3]{5}-1}{4}$ and we get that some periodic sequence of digits transforms to the aperiodic one, which implies that $\chi_0 \notin FAutT_2$.

Remark that linear functions $f(x) = 5x + 1$, $f^{-1}(x) = (1/5)(x - 1)$, are non conjugated in $FAutT_2$, so $FAutT_2$ is ambivalent in contrast to $AutT_2$. One can consider the XOR operation $\oplus$ on Z_2 and extend the notion of linear function. On this way we get

Theorem 2. *Automorphisms* $f_1(x) = (4k+1)x+1$ *and* $f_2(x) = -(4k+1)x \oplus 1$ *are conjugate in* $FAutT_2$.

1. *Bodnarchuk Yu. V., Morozov D. I.* Extended 2-adic number as centralizers of automorphisms of the regular rooted 2-tree // Naukovi zapiski NaUKMA. — 2006. — Vol. 51: Physics & Mathematics. — P. 4–7.

National University "Kyiv-Mohyla Academy", Kyiv, Ukraine
E-mail: yubod(at)ukma.kiev.ua
URL: http://www.ukma.kiev.ua/~yubod/

Про асимптотичні властивості корелограмних оцінок імпульсних перехідних функцій

В. В. Булдигін, І. П. Блажієвська

Нехай $(H(t), t \in \mathbb{R})$ — імпульсна перехідна функція однорідної лінійної системи. Припустимо, що вхідні сигнали $X_\Delta = (X_\Delta(t), t \in \mathbb{R})$, $\Delta \in (0, \infty)$ є стаціонарними центрованими гауссівськими процесами, які збігаються, в деякому сенсі, до білого шуму при $\Delta \to \infty$. Реакція системи на вхідний сигнал X_Δ має вид

$$Y_\Delta(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H(s) X_\Delta(t-s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо сумісну корелограму інтегрального типу [1]

$$\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{cT} \int\limits_0^T X_\Delta(t) Y_\Delta(t+\tau)\, dt, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

де c — деяка додатна стала й T — довжина інтервалу спостереження $[0, T]$.

У доповіді, при припущенні $H \in L_2(\mathbb{R})$, досліджуються умови, за яких емпіричний процес

$$\widehat{W}_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}\Big[\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) - H(\tau)\Big], \quad \tau \in \mathbb{R},$$

є асимптотично нормальним при $T, \Delta \to \infty$ в сенсі скінченновимірних розподілів, та умови його асимптотичної нормальності у просторі неперервних функцій $C[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$. При встановленні цих фактів використовується діаграмно-кумулянтний метод, властивості інтегралів з циклічним зачепленням ядер та класичні результати для збіжності процесів у функціональних просторах.

1. *Buldygin V. V., Fu Li* On asymptotical normality of an estimation of unit impulse responses of linear systems. I, II // Theory Probab. Math. Statist. — 1997. — Vol. 54. — P. 17–24; Vol. 55. — P. 29–36.

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
E-mail: `matan(at)ntu-kpi.kiev.ua`

Узагальнення теореми Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів

В. В. Булдигін, В. В. Павленков

У роботі узагальнюється теорема Карамати [1, 2] про асимптотичну поведінку інтегралів від регулярно змінних (RV) функцій.

Розглянемо функції виду
$$f(x) = x^{\rho}\ell(x)H(\ln x), \quad x \geqslant A > 0, \tag{1}$$
де $\rho \in \mathbf{R}$, $\ell = (\ell(x), x \geqslant A)$ — повільно змінна функція, $H = (H(u), u \in \mathbf{R})$ — додатна неперервна періодична функція, яку будемо називати *осциляційною компонентою* функції f. Клас функцій (1) позначимо Φ і зауважимо, що такі функції досліджувалися в [3].

Якщо φ — періодична функція, то через $S_{pper}(\varphi)$ позначимо множину додатних періодів функції φ. Величину $T(\varphi) = \inf S_{pper}(\varphi)$ будемо називати *осциляційною характеристикою функції* φ.

Наступні теореми узагальнюють теорему Карамати при $\rho > -1$.

Теорема 1 (Пряма теорема)**.** *Нехай $f \in \Phi$ — локально інтегровна функція з індексом $\rho > -1$, осциляційною компонентою H та осциляційною характеристикою $T(H) = T$. Тоді знайдеться така додатна неперервна періодична функція $D = (D(x), x \in \mathbf{R})$, яка залежить від ρ та H, що*
$$\int_A^x f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} xD(\ln x)f(x).$$
При цьому виконуються наступні твердження:

1)
$$T(DH) = T(D) = T(H) = T,$$
де $T(D)$ — осциляційна характеристика функції D та $T(DH)$ — осциляційна характеристика функції $DH = (D(x)H(x), x \in \mathbf{R})$;

2) *якщо f є RV функцією, тобто $H(x) \equiv 1$ та $T = 0$, то*
$$D(x) \equiv \frac{1}{\rho+1};$$

3) *якщо $T > 0$, то*
$$D(x) = \frac{\int_0^{T\{x/T\}} e^{(\rho+1)y}H(y)dy + C}{H(x)\exp\left(T(\rho+1)\{x/T\}\right)}, \quad x \geqslant 0,$$
де
$$C = \frac{\int_0^T e^{(\rho+1)y}H(y)dy}{e^{T(\rho+1)} - 1},$$
та $\{x/T\}$ — дробова частина числа x/T.

Теорема 2 (Обернена теорема)**.** *Нехай* $(f(x), x \geqslant A)$ *— додатна та локально інтегровна функція. Тоді, якщо знайдеться така додатна неперервна періодична функція* $B = (B(x), x \in \boldsymbol{R})$ *з осциляційною характеристикою* $T(B)$*, що*

$$\int\limits_A^x f(t)dt \underset{x\to\infty}{\sim} xB(\ln x)f(x),$$

то функція f *належить класу* Φ *і має індекс* $\rho > -1$ *та осциляційну компоненту* $H = (H(x), x \in \mathbf{R})$*. При цьому виконуються наступні твердження:*

1)

$$T(BH) = T(H) = T(B),$$

де $T(H)$ *— осциляційна характеристика функції* H *та* $T(BH)$ *— осциляційна характеристика функції* $BH = (B(x)H(x), x \in \mathbf{R})$*;*

2) *якщо* $T(B) = 0$*, тобто* $B(x) \equiv \beta > 0$*, то*

$$\rho = \frac{1}{\beta} - 1, \tag{2}$$

та $H(x) \equiv 1$*, тобто* f *є RV функцією з індексом* (2)*;*

3) *якщо* $T(B) > 0$*, то*

$$\rho = \frac{1}{T(B)} \int\limits_0^{T(B)} \frac{du}{B(u)} - 1$$

та

$$H(x) = \frac{B(0)}{B(x)} \exp\left(\int\limits_0^x \left(\frac{1}{B(t)} - (B^{-1})_{av} \right) dt \right), \quad x \geqslant 0,$$

де

$$(B^{-1})_{av} = \frac{B(0)}{T(B)} \int\limits_0^{T(B)} \frac{du}{B(u)}.$$

1. *Karamata J.* Sur un mode de croissance régulière des fonctions // Mathematica (Cluj). — 1930. — Vol. 4. — P. 38–53.
2. *Karamata J.* Sur un mode de croissance régulière. Théoremès fondamentaux // Bull. Soc. Math. France. — 1933. — Vol. 61. — P. 55–62.
3. *Buldygin V. V., Klesov O. I., Steinebach J. G.* On factorization representations for Avakumović–Karamata functions with nondegenerate groups of regular points // Anal. Math. — 2004. — Vol. 30. — P. 161–192.

Національний технічний університет України «КПІ», Київ, Україна
E-mail: `matan(at)ntu-kpi.kiev.ua`

Exponential sum on algebraic variety

P. D. Varbanets

Let $\mathbb{F}_q$ be a finite field and let $f_i(x,y)$ be quadratic polynomials over $\mathbb{F}_q$. We obtain a nontrivial estimates for the exponential sums

$$S(\alpha,\beta)=\sum_{(x,y,X,Y)\in V(\alpha,\beta)}\chi(rx_sy+rX+sY)$$

where the algebraic variety $V(\alpha,\beta)$ define for $\alpha,\beta\in\mathbb{F}_q$ by

$$V(\alpha,\beta):=\left\{(x,y,X,Y)\in\mathbb{F}_q^4\;\Big|\;\frac{\alpha}{f_1(x,y)}+\frac{\beta}{f_2(X,Y)}=1\right\}.$$

I. I. Mechnikov Odessa National University, Odessa, Ukraine
E-mail: `varb(at)sana.od.ua`

Про фрактальні множини в просторі послідовностей Фібоначчі

Н. М. Василенко, М. В. Працьовитий

Нехай $\mathcal{F}=\{(a_n):a_1,a_2\in R,\ a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, n\geqslant 3\}$ — множина всіх послідовностей Фібоначчі.

Нескладно переконатися, що множина $\mathcal{F}$ разом з операціями додавання та множення на скаляр, тобто математична структура $(\mathcal{F},+,\lambda(\cdot))$, є двовимірним векторним простором.

Нехай $1<s$ — фіксоване натуральне число. Дійснозначну функцію $\gamma\,(\cdot,\cdot)$ двох змінних, визначену рівністю

$$\gamma\,(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=\overrightarrow{x}\circ\overrightarrow{y}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_ny_n}{s^{2n}},$$

назвемо *скалярним добутком елементів* $\overrightarrow{x}$ *і* $\overrightarrow{y}$ *з* $\mathcal{F}$. Тоді норму в евклідовому просторі $(\mathcal{F},+,\lambda(\cdot),\circ)$ визначимо як функціонал

$$\|\overrightarrow{x}\|_s=\sqrt{\overrightarrow{x}\circ\overrightarrow{x}}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^2}{s^{2n}}}$$

і назвемо її *s-нормою.*

Метрику в евклідовому нормованому просторі $\mathcal{F}$ означимо рівністю

$$\rho(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})=\rho_s=\|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|_s=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x_n-y_n)^2}{s^{2n}}}$$

і назвемо її *s-метрикою.*

Метричний простір $(\mathcal{F}, \rho_s)$ є повним, як довільний скінченновимірний нормований простір [2, с. 174]. Тоді в ньому можна ввести поняття міри Хаусдорфа та розмірності Хаусдорфа–Безиковича, аналогічно тому як це робиться в довільному метричному просторі, та використовувати їх для дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою.

Теорема 1. *Якщо* $\overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{a} = (a_n)$ *— фіксований елемент простору* $\mathcal{F}$, r *і* m *— натуральні числа, причому* $1 < m < r$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\} \subset \{0, 1, \ldots, r-1\}$, $v_i < v_{i+1}$, $i = \overline{1, m-1}$,

$$C\,[r, V] = \left\{\lambda : \lambda = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{r^n} + \cdots,\ \alpha_n \in V\right\},$$

то множина

$$H = \{\overrightarrow{x} : \overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{a},\ \lambda \in C\,[r, V]\}$$

в метричному просторі $(\mathcal{F}, \rho_s)$ *є самоподібною і її самоподібна розмірність*

$$\alpha_\rho = \log_r |V|$$

співпадає з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича.

Теорема 2. *Якщо* $\overrightarrow{a} = (a_n)$, $\overrightarrow{b} = (b_n) \in \mathcal{F}$, *причому* $\overrightarrow{a}$ *і* $\overrightarrow{b}$ *неколінеарні, то множина*

$$H = \left\{\overrightarrow{x} : \overrightarrow{x} = \lambda_1\overrightarrow{a} + \lambda_2\overrightarrow{b},\ \text{де}\ \lambda_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha_k}{2^k},\ \lambda_2 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{2^k},\ \alpha_k + \beta_k \leqslant 1\right\}$$

є самоподібною досконалою множиною, самоподібна розмірність якої співпадає з розмірністю Хаусдорфа–Безиковича.

1. *Василенко Н. М., Працьовитий М. В.* Лінійний простір послідовностей Фібоначчі, його підпростори та структури в ньому [Електронний ресурс] // Український математичний конгрес–2009 (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова). — Режим доступу до ресурсу: `http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Vasylenko.pdf`.
2. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. — Москва: Наука, 1980. — 400 с.
3. *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия. — 3-е изд. — Москва: Физматлит, 2004. — 464 с.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва: Наука, 1972. — 496 с.
5. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
E-mail: `samkina_nata(at)mail.ru`

Основи аналізу функцій кватернарної змінної

Л. А. Вотякова

Незбагненна ефективність методів теорії функцій комплексної змінної при розв'язуванні самих різноманітних задач спонукає спроби побудови подібних теорій на інших алгебрах [1, 2], зокрема на алгебрах з дільниками нуля [3, 4].

Тут представлено варіант наділення топологічною структурою однієї з алгебр рангу 4.

Нехай $\boldsymbol{V} = \{x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \colon x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ наділено в стандартний спосіб структурою лінійного простору над полем $\mathbb{R}$. Наділимо цю множину операцією множення, яке виконується згідно таблички

	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_0$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$

$\boldsymbol{V}$ — комутативна алгебра з одиницею, елементи якої називаємо кватернарними числами. Для алгебри $\boldsymbol{V}$ має місце матричне подання (алгебра квадратних циклічних матриць). Для кватернарних чисел побудовано канонічне подання (в основі подання відповідної матриці через власні проектори):

$$\mathbf{v} = x_0\mathbf{e}_0 + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \frac{1}{4}\left(\lambda_0\mathbf{w}_0 + \lambda_1\mathbf{w}_1 + \lambda_2\mathbf{w}_2 + \lambda_3\mathbf{w}_3\right),$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0 &= \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, & \mathbf{w}_1 &= \mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{e}_0 + i\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_3, & \mathbf{w}_3 &= \mathbf{e}_0 - i\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_3, \\ \lambda_0 &= x_0 + x_1 + x_2 + x_3, & \lambda_1 &= x_0 - x_1 + x_2 - x_3, \\ \lambda_2 &= x_0 - ix_1 - x_2 + ix_3, & \lambda_3 &= x_0 + ix_1 - x_2 - ix_3. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^n &= \frac{1}{4}\left(\lambda_0^n\mathbf{w}_0 + \lambda_1^n\mathbf{w}_1 + \lambda_2^n\mathbf{w}_2 + \lambda_3^n\mathbf{w}_3\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\lambda_0^n + \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n\right)\mathbf{e}_0 + \frac{1}{4}\left(\lambda_0^n - \lambda_1^n + i\lambda_2^n - i\lambda_3^n\right)\mathbf{e}_1 + \\ &+ \frac{1}{4}\left(\lambda_0^n + \lambda_1^n - \lambda_2^n + \lambda_3^n\right)\mathbf{e}_2 + \frac{1}{4}\left(\lambda_0^n - \lambda_1^n - i\lambda_2^n + i\lambda_3^n\right)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Наділивши алгебру $\boldsymbol{V}$ нормою

$$\|\mathbf{v}\| = 2\left(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

маємо можливість побудувати основи теорії аналітичних функцій кватернарної змінної за Вейєрштрассом, в основі якої такий результат:

Теорема. *Якщо степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

збігається на інтервалі $(-r; r)$ *і* $S(x)$ *його сума, то ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{v}^n$$

збігається для всіх $\mathbf{v}$*, для яких* $\|\lambda_0\| < r$*,* $|\lambda_1| < r$*,* $|\lambda_2| < r$*,* $|\lambda_3| < r$*, і його сума*

$$\begin{aligned} S(\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\left(S(\lambda_0) + S(\lambda_1) + S(\lambda_2) + S(\lambda_3)\right)\mathbf{e}_0 + \\ + \frac{1}{4}\left(S(\lambda_0) - S(\lambda_1) + iS(\lambda_2) - iS(\lambda_3)\right)\mathbf{e}_1 + \\ + \frac{1}{4}\left(S(\lambda_0) + S(\lambda_1) - S(\lambda_2) - S(\lambda_3)\right)\mathbf{e}_2 + \\ + \frac{1}{4}\left(S(\lambda_0) - S(\lambda_1) - iS(\lambda_2) + iS(\lambda_3)\right)\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

1. *Садбери Э.* Кватернионный анализ // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — 2004. — Т. 1, № 2. — С. 130–157.
2. *Працьовитий М. В., Томусяк А. А.* Основи теорії аналітичних функцій кватерніонної змінної // Наук. часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 179–188.
3. *Вотякова Л. А.* Основи аналізу функцій дуальної змінної // Наук. часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 7. — С. 61–71.
4. *Вотякова Л. А.* Нормована алгебра тернарних чисел // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. — 2009. — № 1.

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

Стохастична модель ціноутворення фінансових активів

Я. В. Гончаренко, Л. В. Чабак

Ринкова ціна товару в широкому смислі (включаючи цінні папери, валюту тощо) змінюється з часом, і ці зміни, як правило, містять випадкові складові. В класичних моделях приріст ціни прийнято вважати випадковою величиною, яка не залежить від всіх її попередніх значень [3]. Перша стохастична модель зміни ринкових цін була запропонована в дисертації Л. Башельє [L. Bachelier « Theorie de la speculation », 1900], в якій модель ціни, як функції часу, була визначена як випадковий процес, пізніше названий вінерівським. Подальші дослідження статистики функціонування фондових ринків привели до уточнення цієї моделі: замість значення цін C_t доцільно моделювати логарифми цін $\log C_t$, моделлю яких є вінерівський процес. Але багато сучасних дослідників вважає, що «рівень апроксимації „броунівської" моделі не виправдовує покладених на неї сподівань» [4].

Відносний приріст ціни деякого товару $\rho_t = \frac{\Delta C_t}{C_{t-1}}$ називається *випадковою відсотковою ставкою* цього товару або *відносним прибутком* або *коефіцієнтом приросту*.

В доповіді пропонуються результати дослідження фрактальної моделі руху цін, в якій ρ_t розглядається як функція задана перетворювачем цифр Q-зображення аргумента (часу) в $\widetilde{Q}$-зображення функції [1, 2].

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
2. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.
3. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики (том 1, Факты и модели, том 2, Теория). — Москва: Изд-во ФАЗИС, 1998.
4. *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы. — Москва; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. — 256 с.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
E-mail: `yan_a(at)ukr.net`

Київська державна академія водного транспорту, Київ, Україна
E-mail: `lyuba_basai(at)mail.ru`

Особенности моделирования динамики реальных систем

В. А. Дубко

1. Математические модели реальных явлений всегда основываются на определенных ограничениях. Для моделей детерминированных процессов такие ограничения присутствуют, например, в форме законов сохранения. Для моделей открытых систем ограничения, в основном, формируют на основе некоторых средних показателей. Это приводит к тому, что принятие риска становится основой для нарушения этих ограничений с определенной вероятностью, позволяет рассматривать как неизбежность разрушение системы в непредсказуемый момент. Это тупиковый путь. Выход может заключаться в том, что ограничения для открытых систем должны быть связаны не только со средними характеристиками, а и с конкретными реализациями [1, 2].

2. Изменения реальных процессов, реальных сред, в том числе и стохастических, всегда связаны с ограничениями на их вариации. Но, например, канонические уравнения диффузии, основаны неявно на принятии того, что величины, локальные скорости изменения процессов, могут принимать сколь угодно большие значения [1].

3. В теории управления важен вопрос об определении управляющих переменных, связей, условий самоорганизации, обеспечивающих сохранение, устойчивость конкретных функционалов от управляемых переменных (существование притягивающих областей). В открытых системах возможно возникновение множества притягивающих областей, перемежаемых областями неустойчивости. Примером подобной устойчивости может служит способность природной среды не только возвращаться, но и находиться в области определенных показателей при постоянно действующих случайных возмущениях [2]. Кроме того, существуют глобальные закономерности рассматриваемые как данные — системные законы, мгновенно определяющие коррелятивность в свойствах и динамике пространственно разнесенных систем. Системные законы служат отправными (исходными) при изучении условий равновесия, принципов перехода от одного равновесного состояния в иное. Это позволяет отождествлять их с управляющими переменными.

4. Важный факт, который необходимо учитывать, это существования инвариантов в сложноорганизованных системах, оределяющих согласованность изменения масштабов явления при переходе, эволюционной экспансии от одних пространственно-временных масштабов к другим. Такие эффекты (самоподобия) наблюдаются и для усредненных характеристик в сложноорганизованных системах. В некоторых случаях, они допускают наглядную трактовку,

раскрывающую природу («физику») явления. Например, закон 2/3 Колмогорова для турбулентной среды описывает явление возрастания в ней относительной скорости «разбегания» частиц пассивной примеси с увеличением расстояния между ними. Этот эффект при наблюдении за облаком частиц в атмосфере проявляется в увеличении скорости его размывания в зависимости от времени наблюдения. Объясняется это тем, что при возрастании средних размеров облака в его расширении начинают участвовать вихревые образования больших размеров (масштабов) [2].

Примером из области геофизики может служить эмпирический закон Гутенберга–Рихтера о повторяемости (масштабной иерархии) землетрясений, который, в альтернативной форме предложенной М. В. Родкиным, имеет вид:

$$\ln N = p - q(\ln r),$$

где N число землетрясений с характерным размером очага не менее r, а p и q — эмпирические коэффициенты, причем среднее значение $q = 1{,}8$ [3].

Для экономических систем процесс самоорганизации, при росте масштабов экономических систем, приводит к закону подобному закону 2/3 Колмогорова для зависимости капитальных затрат K от мощности сооружения N:

$$\ln(p) = 2\ln N/3 - \ln K,$$

где p — коэффициент, связанный с конкретным объектом [2].

Отметим, что нецелые показатели степеней в законах для сложных систем появляются при переходе ситемы к новым, получившим название фрактальных, структурам. На Украине исследованию свойств математических моделей фрактальных структур посвящены работы Н. В. Працевитого, А. Ф. Турбина и др. [4].

1. *Дубко В. А.* Моделирование динамики реальных процессов // Эколого-географические проблемы природопользования нефтегазовых регионов. — Нижневартовск: Нижневарт. гос. гуманит. ун-т, 2006. — С. 16–20.
2. *Дубко В. А., Рянский Ф. Н. и др.* В поисках скрытого порядка. — Владивосток: Изд-во ДВО РАН, 1995. — 165 с.
3. *Рянский Ф. Н.* Фрактальная теория пространственно-временных размерностей: естественные предпосылки и общественные последствия. — Биробиджан: ИКАРП, 1992. — 45 с.
4. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

Национальный авиационный университет, Киев, Украина
E-mail: doobko(at)mail.i.com.ua

Використання знакододатних рядів Люрота для дослідження математичних об'єктів з фрактальними властивостями

Ю. І. Жихарєва, М. В. Працьовитий

Означення 1. *Числовим знакододатним рядом Люрота* називається вираз виду

$$\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)(d_3+1)}+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}+\cdots,$$

де (d_n) — фіксований нескінченний набір натуральних чисел.

Кожний ряд Люрота є збіжним, причому його сума належить півінтервалу $(0,1]$.

Якщо задано ряд Люрота і фіксовану підмножину M множини натуральних чисел, то число

$$x=x(M)=\sum_{n\in M\subset\mathbb{N}}\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}$$

називається його *неповною сумою* (*або підсумою*).

Теорема 1. *Множина S_L неповних сум* (*підсум*) *ряду Люрота є:*
1) *відрізком* $[0,1]$, *якщо* $d_n=1\ \forall\, n\in\mathbb{N}$;
2) *об'єднанням скінченної кількості двійкових циліндрів* (*відрізків*), *якщо $d_n=1$ для всіх n, більших n_0;*
3) *ніде не щільною, досконалою множиною нульової міри Лебега, якщо $d_n\neq 1$ для нескінченної множини значень n.*

Теорема 2. *Для будь-якого $x\in(0,1]$ існує послідовність натуральних чисел (d_n) така, що*

$$x=\frac{1}{d_1+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}. \quad (1)$$

Теорема 3. *Випадкова неповна сума довільного заданого ряду Люрота має сингулярний розподіл канторівського типу.*

Розклад числа $x\in(0,1]$ в ряд Люрота (1) називатимемо його L-зображенням і скорочено записуватимемо: $x=\Delta^L_{d_1\ldots d_n\ldots}$.

Означення 2. Нехай $(c_1,c_2,\ldots,c_m)$ — фіксований набір натуральних чисел. Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина

$$\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}:=\left\{x: x=\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m d_{m+1}d_{m+2}\ldots},\ d_{m+i}\in\mathbb{N}\right\}.$$

Лема 1. *Якщо* $\lambda(\cdot)$ — *міра Лебега, то має місце основне метричне відношення*

$$\frac{\lambda\left(\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m i}\right)}{\lambda\left(\Delta^L_{c_1c_2\ldots c_m}\right)} = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Лема 2. *Нехай маємо два набори натуральних чисел* $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, *де* $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$. *Міра Лебега множини чисел, які на* k_1 *місці мають цифру* c_1, *а на* k_2 *місці мають цифру* c_2 *і т.д., на* k_m *місці — цифру* c_m, *обчислюється за формулою*

$$\lambda\left(\Delta^{k_1k_2\ldots k_m}_{c_1c_2\ldots c_m}\right) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

Теорема 4. *Множина всіх чисел з обмеженими символами* L*-зображення має нульову міру Лебега.*

Теорема 5. *Нехай* V — *фіксована підмножина множини натуральних чисел. Якщо* V — *скінченна, то фрактальна розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини*

$$C[L,V] = \left\{x : x = \Delta^L_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\ a_i \in V,\ i \in \mathbb{N}\right\}$$

є розв'язком рівняння

$$\sum_{\nu \in V} \left[\nu(\nu+1)\right]^{-x} = 1.$$

Якщо V — *нескінченна, причому* $V = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots\}$, *де* $\nu_{n+1} > \nu_n$ *і* $V_n = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n\}$, *то*

$$\alpha_0\left(C[L,V]\right) = \sup\left\{x : \sum_{\nu \in V_n} \left[\nu(\nu+1)\right]^{-x} = 1\right\}.$$

Теорема 6. *Розподіл випадкової величини*

$$\xi = \Delta^L_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots},$$

де η_k — *незалежні однаково розподілені в.в. такі, що* $P\{\eta_k = i\} = p_i$, *є:*

1) *чисто дискретним, коли* $\exists\, p_{i_0} = 1$;
2) *чисто абсолютно неперервним, коли* $p_k = \frac{1}{k(k+1)}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$;
3) *чисто сингулярним, коли* $\max\limits_i\{p_i\} < 1$ *і для деякого* $k \in \mathbb{N}$ $p_k \neq \frac{1}{k(k+1)}$.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

Free dimonoids

A. V. Zhuchok

Jean-Louis Loday introduced the notion of a dimonoid [1]. One of the first results about dimonoids is the description of the free dimonoid generated by a given set [1]. With the help of the properties of free dimonoids it was described free dialgebras and investigated a cohomology of dialgebras [1]. Examples of different dimonoids were given in [1, 2].

Recall the definition of the free dimonoid.

Let X be an arbitrary nonempty set. Considering the disjoint union $D(X) = \coprod_{n \geqslant 1} \underbrace{(X^n \bigcup \ldots \bigcup X^n)}_{n \text{ copies}}$ and denoting by $x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_n$ an element in the i-th summand, define the operations $\prec$ and $\succ$ on $D(X)$ by

$$(x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k) \prec (x_{k+1} \ldots \breve{x}_j \ldots x_l) = x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_l,$$
$$(x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k) \succ (x_{k+1} \ldots \breve{x}_j \ldots x_l) = x_1 \ldots \breve{x}_j \ldots x_l$$

for all $x_1 \ldots \breve{x}_i \ldots x_k$, $x_{k+1} \ldots \breve{x}_j \ldots x_l \in D(X)$. Then $(D(X), \prec, \succ)$ is the free dimonoid on the set X (see [1]).

In this work we construct the dimonoid which is isomorphic to the free dimonoid. We also present the least semilattice congruence on the free dimonoid and use it to obtain a decomposition of the free dimonoid.

1. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operads. — Berlin: Springer, 2001. — P. 7–66. — (Lecture Notes in Math.; Vol. 1763).
2. *Zhuchok A. V.* Commutative dimonoids // Algebra Discrete Math. — 2009. — no. 2. — P. 116–127.

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
E-mail: zhuchok_a(at)mail.ru

The translational hull of the symmetric inverse 0-category

Y. V. Zhuchok

Let X be a non-empty set and $Map_b(A;B)$ be a set of all bijective mappings of A onto B. Through BS_X we denote the union of all sets $Map_b(A;B)$, where $A, B \subseteq X$, $A \neq \varnothing \neq B$.

We define the operation $*$ on the set $BS_X^0 = BS_X \cup \{0\}$ by the rule: if $\varphi \neq 0 \neq \psi$ and $Im\varphi = Dom\psi$, then $\varphi * \psi = \varphi \circ \psi$, where $\circ$ is the ordinary composition of mappings, otherwise $\varphi * \psi = 0$. The set BS_X^0 is a semigroup which respect to operation $*$. This semigroup is called a symmetric inverse 0-category on the set X.

Observe that non-zero elements of BS_X^0 are difunctional relations and the set of all difunctional relations on X with the operation introduced in [1] is a semigroup which generalizes the symmetric inverse semigroup.

We describe left (right, linked) translations (see e.g. [2]) of the semigroup BS_X^0. Besides we construct the semigroup which is isomorphic to the translational hull of the symmetric inverse 0-category.

1. *Vernitskii A.* A generalization of symmetric inverse semigroups // Semigroup Forum. — 2007. — Vol. 75. — P. 417–426.
2. *Clifford A. H, Preston G. B.* The algebraic theory of semigroups. — Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1961. — Vol. 1. — 285 p.

Luhansk Taras Shevchenko National University, Luhansk, Ukraine
E-mail: zhuchok_y(at)mail.ru

Відокремлення від нуля лінійної функції на множинах комплексного простору

В. С. Ільків, І. Я. Савка

При дослідженні розв'язності нелокальних крайових задач для рівнянь із частинними похідними виникає проблема малих знаменників [1], яка в ряді випадків полягає у встановленні відокремленості від нуля значень лінійної функції

$$L_k(z_0, z) = g_{0k}z_0 + g_{1k}z_1 + \ldots + g_{mk}z_m + f_k, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{1}$$

змінних $(z_0, z) = (z_0, z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^{m+1}$, де коефіцієнти $g_{0k}, \ldots, g_{mk}$, f_k утворюють комплексні послідовності, причому рівняння

$$|g_k| \equiv |g_{0k}| + \ldots + |g_{mk}| = 0$$

має лише скінченну множину $\mathbb{Z}^p_0$ розв'язків, де $\mathbb{Z}^p_0 \subset \mathbb{Z}^p$.

Для вирішення цієї проблеми (оцінювання малих знаменників знизу) застосовується метричний підхід, в рамках якого встановлюється відокремленість від нуля виразу $L_k(z_0, z)$ для всіх (z_0, z) на деякій множині повної міри.

Нехай $\Pi_m(\rho) = \{z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{C}^m \colon |z_j| \leqslant \rho,\ j = 1, \ldots, m\}$ — полікруг радіуса ρ.

У випадку незалежних змінних $z_0, z_1, \ldots, z_m$ справедливою є теорема.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^{m+1}$) векторів (z_0, z) із полікруга $\{z_0 \colon |z_0| \leqslant \rho\} \times \Pi_m(\rho)$ нерівність*

$$|L_k(z_0, z)| \geqslant \varepsilon_k > 0 \tag{2}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \mathbb{Z}^p_0} \big(\varepsilon_k / |g_k|\big)^2$$

є збіжним.

Множина векторів (z_0, z), для яких не виконується оцінка (2), є фрактальною множиною. Це об'єднання безлічі множин, міра кожної з яких не перевищує відповідно числа $\varepsilon_k/|g_k|$.

Нехай змінні $z_0, z_1, \ldots, z_m$ є залежними і задовольняють алгебричне рівняння степеня d, а саме

$$R(z_0, z) \equiv \sum_{j=0}^{d} A_j(z) z_0^{d-j} = 0, \tag{3}$$

Робота підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 28.1/010).

де

$$A_j(z) = \sum_{|s|\leqslant j} \alpha_{j,s} z_1^{s_1} \dots z_m^{s_m}, \quad s = (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{Z}_+^{m+1},$$

$\alpha_{j,s} \in \mathbb{C}$ — фіксовані числа, $\alpha_{0,0} = 1$. Оскільки теорема 1 не розрізняє множини нульової міри в просторі $\mathbb{C}^{m+1}$, то питання відокремлення від нуля функції $L_k(z_0, z)$ на множині $\{(z_0, z) \in \mathbb{C}^{m+1} : R(z_0, z) = 0\}$, яка є алгебричним многовидом, треба досліджувати окремо. Виникає задача [2, 3, 4] встановлення оцінок знизу для малих знаменників на алгебричних многовидах.

Нехай $D(z)$ — дискримінант многочлена $R(z_0, z)$ за змінною z_0, а

$$\theta(r, j) = (j, \underbrace{0, \dots, 0,}_{r-1} j, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^{m+1}, \quad r = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, d.$$

Теорема 2. *Нехай $R(z_0, z) = 0$. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^m$) векторів z із полікруга $\Pi_m(\rho)$ нерівність*

$$|L_k(z_0, z)| \geqslant \varepsilon_k \big((|z_0| + |z|)|g_k| + |f_k|\big)^{1-d} > 0 \tag{4}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $D(z) \not\equiv 0$ і збігається ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \mathbb{Z}_0^p} \Big(\varepsilon_k \Big/ \sum_{r=1}^{m} \Big| \sum_{j=0}^{d} (-1)^{d-j} \alpha_{\theta(r,j)} g_{0k}^{j} g_{rk}^{d-j} \Big|\Big)^{2/d}.$$

1. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — Київ: Наук. думка, 2002. — 216 с.
2. *Симотюк М. М.* Метричні оцінки дискримінанта многочлена, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій // Мат. вісник НТШ. — 2006. — Т. 3. — С. 149–156.
3. *Bernik V. I., Dodson M. M.* Metric Diophantine approximation on manifolds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. — xi+172 p. — (Cambridge tracts in mathematics; Vol. 137).
4. *Kleinbock D. Y., Margulis G. A.* Flow on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds // Ann. Math. — 1998. — Vol. 148. — P. 339–360.

Національний університет «Львівська Політехніка», Львів, Україна
E-mail: `ilkivv(at)i.ua`

Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: `s-i(at)ukr.net`

Метациклічні групи з доповнюваною власною надцентральною підгрупою

М. Г. Йолтуховський, Д. Я. Требенко, О. О. Требенко

Одним із основних питань в теорії груп є питання про вплив властивостей тих чи інших систем підгруп досліджуваної групи на будову її в цілому. Численні результати в цьому напрямку пов'язані із дослідженням груп, що мають широку в тому чи іншому розумінні систему доповнюваних підгруп.

Нагадаємо, що підгрупа A групи G називається доповнюваною в G, якщо в G існує така підгрупа B, що $G = AB$ і $A \cap B = 1$. Відома теорема Н. В. Чернікової [1] дає повний конструктивний опис груп, в яких доповнюється кожна підгрупа.

Природним узагальненням цього питання є задача опису груп, в яких знайдеться принаймні одна власна доповнювана підгрупа, що містить деяку фіксовану підгрупу H. В частинному випадку H може бути центром групи, комутантом, підгрупою Фраттіні тощо. Така задача навіть при дуже зручній підгрупі H є досить складною. Тому природно виникає необхідність її розв'язання для відомих конкретних класів груп.

В 1989 р. М. Ф. Кузенним і М. М. Семком (див. [3]) було подано конструктивний опис всіх метациклічних груп.

Назвемо підгрупу, що містить центр $Z(G)$ групи G, надцентральною. Авторами одержано повний опис метациклічних груп із доповнюваною власною надцентральною підгрупою. Відмітимо, що аналогічна задача розглядається в роботі [4] при умові, що H є комутантом групи.

Теорема 1. *Метациклічні p-групи з доповнюваною власною надцентральною підгрупою вичерпуються групами наступних типів:*

1. $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|a| = 2^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 2$, $|b| = 2$.
2. $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $b^{-1}ab = a^{-(1+2^k)}$, $|a| = 2^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 3$, $|b| = 2^{\beta}$, $2 \leqslant k < \alpha$, $1 \leqslant \beta \leqslant \alpha - k$.
3. $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 3$, $|b| = 2^{\beta}$, $b^{-1}ab = a^{1+2^k}$, $2 \leqslant k < \alpha$, $\alpha - k = \beta$.
4. $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $p > 2$, $\alpha \geqslant 2$, $|b| = p^{\beta}$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $1 \leqslant k < \alpha$, $\alpha - k = \beta$.
5. $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $\alpha \geqslant 2$, $|b| = 2^{\beta}$, $3 \leqslant \alpha < \beta$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}}\rangle = \langle b^{2^{\beta-1}}\rangle$.
6. $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $4 \leqslant \alpha < \beta$, $b^{-1}ab = a^{-(1+2^k)}$, $2 \leqslant k \leqslant \alpha - 2$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^{2^{\alpha-1}}\rangle = \langle b^{2^{\beta-1}}\rangle$.
7. $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = 2^{\alpha}$, $|b| = 2^{\beta}$, $4 \leqslant \alpha < \beta$, $b^{-1}ab = a^{1+2^k}$, $2 \leqslant k \leqslant \alpha - 2$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^{2^m}\rangle = \langle b^{2^n}\rangle$, $a^{2^m} = b^{s2^n}$, $(s, 2) = 1$, $k < m < \alpha$, $m = \alpha - k$.

8. $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, $|a| = p^{\alpha}$, $p > 2$, $\alpha \geqslant 3$ $|b| = p^{\beta}$, $b^{-1}ab = a^{1+p^k}$, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a^{p^m}\rangle = \langle b^{p^n}\rangle$, $a^{p^m} = b^{sp^n}$, $(s,p) = 1$, $1 \leqslant k < m < \alpha < \beta$, $m = \alpha - k$.

Теорема 2. *Метациклічні групи з доповнюваною власною надцентральною підгрупою вичерпуються групами наступних типів:*

1. G *— примарна метациклічна група одного з типів 1–8 теореми 1.*
2. $G = \prod_{i=1}^{n} P_i$, *де* P_i *— силовська* p_i*-підгрупа групи* G *типу 1–11 теореми 1.4* [3], *причому для деякого* j, $1 \leqslant j \leqslant n$, P_j *— група одного з типів 1–8 теореми 1.*
3. $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, *де* $b^{-1}ab = a^{-1}$, $|a| > 2$, *причому:*
   i. *якщо* $|a| < \infty$, *то силовська підгрупа групи* $\langle a\rangle$ *має порядок 2;*
   ii. *якщо* $|b| < \infty$, *то силовська підгрупа групи* $\langle b\rangle$ *має порядок 2;*
   iii. *якщо* $|a| = \infty$, *то підгрупа* $\langle b\rangle$ *— довільна.*
4. $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, *де* $\langle a\rangle = \prod_{i=1}^{n}\langle a_i\rangle$, $\langle b\rangle = \prod_{i=1}^{n}\langle b_i\rangle$, $|a_i| = p_i^{\alpha_i}$, $|b_i| = p_i^{\beta_i}$, $\alpha_i \geqslant 0$, $\beta_i \geqslant 0$, $\langle a_i\rangle\langle b_i\rangle$ *— силовська* p_i*-підгрупа групи* G, *яка є групою типів 1–11 теореми 1.4* [3], $p_i > p_{i+1}$, *при* $i < j$, $[a_i, b_j] = 1$, *хоча б для одного* i *знайдеться* j, $i > j$, $\alpha_i > 1$, *таке, що* $\langle [a_i, b_j]\rangle = \langle a_i\rangle$.
5. $G = \prod_{i=1}^{n}\langle a_i\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle$, *де* $n \geqslant 1$, b *— елемент нескінченного порядку,* $|a_i| = p_i^{\alpha_i}$, $\alpha_i \geqslant 1$, *існує таке число* t, $1 \leqslant t \leqslant r$, *для якого при* $i \leqslant t$, $\langle [a_i, b]\rangle = \langle a_i\rangle$, *при* $i > t$ *елементи* a_i *і* b *задовольняють співвідношення, які справедливі для елементів* a *і* b *в групах типу 1–5 теореми 1.4* [3].

1. *Баева* (*Черникова*) *Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 92, № 5. — С. 877–880.
2. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. — 1956. — Т. 39, № 3. — С. 273–292.
3. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение метациклических метагамильтоновых групп // Современный анализ и его приложения: Сб. научн. тр. / АН УССР. Ин-т математики. — Киев: Наук. думка, 1989. — С. 173–183.
4. *Требенко Д. Я., Требенко О. О.* Метациклічні групи, нерозщіплювані над комутантом // Наук. зап. НПУ імені М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 2002. — № 3. — С. 230–235.

Учень 11 класу Еколого-природничого ліцею № 116 м. Києва, Київ, Україна

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
E-mail: trebenko(at)gmail.com

Інтегральні та фрактальні властивості сингулярної строго зростаючої функції Салема–Такача

А. В. Калашніков

Нехай ρ — задане дійсне додатне число, $a_k = a_k(x)$ — номер $(k+1)$-ої відмінної від нуля двійкової цифри числа $x \in (0,1]$, тобто $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots$ — натуральні числа такі, що

$$x = \frac{1}{2^{a_0}} + \frac{1}{2^{a_1}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_k}} + \ldots = \sum_k 2^{-a_k}.$$

Зокрема в роботі [1] досліджується функція $T(x)$, яка означається рівністю

$$T(x) = \frac{1}{(1+\rho)^{a_0}} + \frac{\rho}{(1+\rho)^{a_1}} + \frac{\rho^2}{(1+\rho)^{a_2}} + \ldots + \frac{\rho^k}{(1+\rho)^{a_k}} + \ldots = \\ = \sum_k \rho^k (1+\rho)^{-a_k(x)},$$

причому $T(0) = 0$.

В [1] доведено, що функція $T(x)$ є строго зростаючою сингулярною функцією. У роботі [2] доведено, що вона є частковим випадком відомої строго зростаючої сингулярної функції Салема [3].

Нас цікавить еквівалентне означення функції Салема–Такача $T(x)$, її самоподібні та інтегральні властивості. Ми пропонуємо наступні дослідження.

Лема 1. *Для довільних $x \in [0,1]$ і $k \in N$ має місце наступна рівність*

$$T\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{(1+\rho)^k} T(x).$$

Лема 2. *Функція Салема–Такача задовольняє функціональне рівняння*

$$T\left(\frac{1+x}{2}\right) = \frac{1}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho} T(x).$$

На основі лем 1 і 2 доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Система функціональних рівнянь*

$$\begin{cases} T\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+\rho} T(x), \\ T\left(\dfrac{1+x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+\rho} + \dfrac{\rho}{1+\rho} T(x). \end{cases}$$

$\forall x \in [0,1]$, $T : [0,1] \to R$ в класі неперервних функцій має єдиний розв'язок.

Теорема 2. *Графік функції Салема–Такача* Γ *є самоафінною множиною простору* R^2*, причому*

$$\Gamma = f_1(\Gamma) \cup f_2(\Gamma),$$

де

$$f_1 : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x, \\ T(x') = \frac{1}{1+\rho}T(x). \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \\ T(x') = \frac{\rho}{1+\rho}T(x) + \frac{1}{1+\rho}. \end{cases}$$

Лема 3. *Самоафінна розмірність графіка функції Салема–Такача є розв'язком рівняння*

$$\left(\frac{1}{2+2\rho}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{\rho}{2+2\rho}\right)^{\frac{x}{2}} = 1.$$

Для леми 3 знайдено частковий розв'язок.

$$\rho = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1},$$

$$x = \log_{\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}} \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Також знайдено значення інтегралу функції Салема–Такача на відрізку $[0, 1]$.

Теорема 3. *Інтеграл функції Салема–Такача* $T(x)$ *на відрізку* $[0, 1]$ *визначається як*

$$\int_0^1 T(x)dx = \frac{1}{1+\rho}.$$

1. *Takacs L.* An increasing continuous singular function // Amer. Math. Monthly. — 1978. — Vol. 85. — P. 35–37.
2. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
3. *Salem R.* On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 53. — P. 423–439.
4. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

Socles of semiperfect rings

V. V. Kirichenko, L. Z. Mashchenko

Let A be an associative ring with $1 \neq 0$ and M an unitary right A-module. Recall that the socle of M ($soc\, M$) is the sum of all simple submodules of M. If there are no such submodules, then $soc\, M = 0$.

Let $A_A = P_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus P_s^{n_s}$ (resp.$A_A = Q_1^{n_1} \oplus \ldots \oplus Q_s^{n_s}$) be the decomposition of a semiperfect ring A into a direct sum of right (resp. left) pairwise non-isomorphic indecomposable projective A-modules, R the Jacobson radical of A.

Let M be a right A-module and N be a left A-module. We set $top\, M = M/MR$ and $top\, N = N/RN$.

The following definitions and theorem see in [1, vol. II, section 4.3].

Let A be a semiperfect ring and let $1 = f_1 = \ldots + f_s$ be a canonical decomposition of $1 \in A$ into a sum of pairwise orthogonal idempotents, i.e., $f_iA = P_i^{n_i}$ and $Af_i = Q_i^{n_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Let I be a two-sided ideal of A. Then $I = \bigoplus\limits_{i,j=1}^{s} f_iIf_j$ is called the canonical two-sided Peirce decomposition of I.

Definition. An ideal I of a semiperfect ring A is called *monomial* if each row and each column of the canonical two-sided Peirce decomposition of I contains exactly one nonzero Peirce component.

Definition. We say that a semiperfect ring A admits the *Nakayama permutation* $\nu(A) : i \to \nu(i)$ of $\{1, \ldots, s\}$ if the following conditions are satisfied:

(np1) $soc\ P_k = top\ P_{\nu(k)}$,

(np2) $soc\ Q_{\nu(k)} = top\ Q_k$.

Theorem. *Let A be a semiperfect ring such that the socles of all principal right A-modules and of all principal left A-modules are simple. Suppose furthermore, that if the socles of two principal right A-modules P and P' are isomorphic then $P \cong P'$. Then A satisfies the following conditions:*

(i) *$soc\ A_A = soc\ _AA = \mathcal{Z}$ and $\mathcal{Z}$ is a monomial ideal;*

(ii) *the ring A admits the Nakayama permutation $\nu = \nu(A)$ with $\nu(A) = \nu(\mathcal{Z})$.*

We consider more wide classes of semiperfect rings.

Definition. We say that a semiperfect ring A admits a right (resp. left) map $f_r(A) : i \to f_r(i)$ of $\{1, \ldots, s\}$ (resp. $f_l(A) : i \to f_l(i)$ of $\{1, \ldots, s\}$), if $soc\, P_i = top\, P_{f_r(i)}$ (resp. $soc\, Q_i = top\, Q_{f_l(i)}$).

Remark that an Artinian serial ring A admits the right map and the left map. Right serial rings admits the right map.

We study the properties of these rings.

1. *Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V. V.* Algebras, rings and modules. — Dordrecht: Springer, 2007. — Vol. 2. — xii+400 p. — (Mathematics and Its Applications (Springer); Vol. 586).

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
E-mail: vkir(at)mail.univ.kiev.ua

Kyiv National Commercial and Economic University, Kyiv, Ukraine

Параметризація самоподібних множин

В. М. Коваленко

В своїй праці [2] Дж. Хатчінсон ввів у розгляд поняття множини інваріантної відносно даної системи стискуючих перетворень повного метричного простору. А саме, множина Λ повного метричного простору M називається інваріантною відносно системи $F = \{f_0, \dots, f_{N-1}\}$ стискуючих перетворень цього простору, якщо вона задовольняє рівняння:

$$\Lambda = \bigcup_{i=0}^{N-1} f_i(\Lambda),$$

тобто є нерухомою «точкою» відображення $f(A) = \bigcup\limits_{i=0}^{N-1} f_i(A)$, заданого в повному метричному просторі (K, H), де K — множина всіх компактних підмножин простору M, H — метрика Хаусдорфа.

Зокрема, якщо всі перетворення в системі F є перетвореннями подібності, то множину Λ називають самоподібною.

В даній роботі нами запропоновано можливість аналітичного задання певного класу самоподібних множин (в сенсі означення Хатчінсона), як неперервних образів відрізка $[0, 1]$.

Отже, розглядається система з N стискуючих перетворень подібності простору $\mathbb{R}^n$, заданих в матричній формі:

$$f_k(X) = A_k X + B_k \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \tag{1}$$

де $A_k = \lambda_k O_k$, λ_k — дійсне число з інтервалу $(0, 1)$, O_k — ортогональна матриця n-го порядку, B_k, X — матриці-стовпці ($k = 0,\ 1,\ \dots,\ N-1$).

Самоподібна множина S, інваріантна відносно системи перетворень (1), може бути задана аналітично наступним чином:

$$S = \left\{ X \in \mathbb{R}^n \mid X = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{m=1}^{k-1} A_{i_m} \right) B_{i_k},\ i_k = 0, 1, \dots, N-1,\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Розглянемо наступну відповідність між точками відрізка $[0,1]$ та множини S:

$$\varphi\colon t \to \sum_{k=1}^{\infty}(\prod_{m=1}^{k-1} A_{i_m(t)})B_{i_k(t)},$$

де $i_k(t)$ — k-та N-адична цифра [1] числа $t \in [0,1]$.

Нами показано, що якщо виконуються умови:

$$\begin{cases} B_1 = (E - A_0 - A_1)(E - A_0)^{-1}B_0 + A_0(E - A_{s-1})^{-1}B_{s-1}; \\ B_2 = (E - A_0 - A_1 - A_2)(E - A_0)^{-1}B_0 \\ \qquad + (A_0 + A_1)(E - A_{s-1})^{-1}B_{s-1}; \\ \vdots \\ B_j = (E - \sum_{m=0}^{j} A_m)(E - A_0)^{-1}B_0 + \sum_{m=0}^{j-1} A_m(E - A_{s-1})^{-1}B_{s-1}; \\ \vdots \\ B_{s-1} = (E - \sum_{m=0}^{s-1} A_m)(E - A_0)^{-1}B_0 + \sum_{m=0}^{s-2} A_m(E - A_{s-1})^{-1}B_{s-1}, \end{cases}$$

то відповідність φ є неперервним відображенням відрізка $[0,1]$ на самоподібну множину S. Звідси, зокрема, випливає, що якщо ці умови виконуються, то множина S є зв'язною.

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
2. *Hutchinson J. E.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. — 1981. — Vol. 30. — P. 713–747.

Бердянський державний педагогічний університет, Бердянськ, Україна
E-mail: vmkovalenko(at)ukr.net

Мультимасштабні проблеми в теорії складних систем (від мікроскопічного опису до глобальних властивостей)

Ю. Г. Кондратьєв

Білефельдський університет, Білефельд, Німеччина
E-mail: kondrat(at)math.uni-bielefeld.de

Проблеми великих відхилень для випадкових еволюцій у схемі серій

В. С. Королюк

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Рівні функції частоти s-кової цифри числа

О. В. Котова

Подання числа x у вигляді ряду

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right],$$

де $\alpha_k \in \{0, 1, \dots, s-1\} = A$, $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{s-1}\}$ — задана множина чисел, що має властивості:

$$q_i > 0, \quad q_0 + q_1 + \ldots + q_{s-1} = 1,$$

$\beta_0 = 0$, $\beta_j = q_0 + q_1 + \ldots + q_{j-1}$, s — фіксоване натуральне число, більше 1, називається його s-символьним Q-представленням, яке символічно записується у вигляді $\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$ і називається s-символьним Q-зображенням числа x.

Частотою цифри «i» в s-символьному Q-зображенні числа x називається значення

$$\nu_i(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{N_i(x, n)}{n}$$

(якщо існує границя), де $i \in A$, $N_i(x, n) = \#\{k : \alpha_k(x) = i, k \leqslant n\}$.

Поняття частоти цифр зображення дійсного числа в s-адичному розкладі є продуктивним у різних відношеннях. В термінах частоти формулюються нормальні властивості чисел, формально просто задаються фрактали тощо. Функція частоти цифри є всюди розривною і має непросту локальну поведінку. Ще більш складною є динаміка на числовій прямій, породжена цією функцією.

Функція частоти цифри відносно часто фігурує в наукових дослідженнях останніх років, зокрема при вивченні фрактальних множин [2, 6], сингулярних функцій та мір [2], розподілів ймовірностей, зосереджених на нуль-множинах Лебега [1].

Сьогодні відомо [2, 3], що множина чисел, для яких частота принаймні однієї цифри не існує, є суперфрактальною, тобто розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої рівна розмірності простору. Більше того, суперфрактальною є і множина чисел, що не мають частоти жодної з цифр [4, 5]. Разом з цим, властивості функції частоти цифри числа досліджені ще недостатньо, а актуальність їх вивчення неодноразово підкреслювалася [2, 4, 5].

Теорема 1. *Якщо $\{\epsilon_n\}$ — довільна нескінченна послідовність нулів та одиниць, то число*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i}{3^{s_i}} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{e_j} \frac{\beta_{ij}}{3^{s_j+i}},$$

де

$$\beta_{in} = [(s_n + i)q] - [(s_n + i - 1)q],$$
$$s_n = (n+1)! + 1,$$
$$e_n = s_{n+1} - s_n - 1 = (n+2)! - (n+1)! - 1,$$

є розв'язком рівняння $\nu_1(x) = q$.

Наслідок 1. *Функція $\nu_i(x)$ набуває всіх значень з $[0;1]$. Кожне значення вона набуває в континуальній множині значень x.*

Зафіксуємо i та s.

Теорема 2. *Фрактальна розмірність множини*

$$K = \{x : \nu_i^s(x) = q, q \in [0,1]\}$$

є не меншою ніж

$$-\frac{\ln q^q (1-q)^{1-q}}{\ln s}.$$

1. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.
2. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
3. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 7. — С. 971–975.
4. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Topological and fractal properties of real numbers which are not normal // Bull. Sci. Math. — 2005. — Vol. 129, no. 8. — P. 615–630.
5. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 9. — С. 1163–1170.
6. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. — Москва: Мир, 1969. — 238 с.

Херсонський державний університет, Херсон, Україна

Спектр структурно-подібного оператора

В. Д. Кошманенко

Стверджується, що спектр структурно-подібного оператора має єдину компоненту: або чисто точкову, або чисто абсолютно неперервну, або чисто сингулярно неперервну. Цей результат продовжує дослідження роботи [1].

Означення. Самоспряжений простий оператор H в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ називаємо структурно-подібним, якщо для кожного $k = 1, 2, \ldots$ і деякого $2 \leqslant n < \infty$ мають місце нетривіальні ортогональні розклади

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \mathcal{H}_{i_1\ldots i_k}, \quad \mathcal{H}_{i_1\ldots i_k} = \bigoplus_{i_{k+1}=1}^{n} \mathcal{H}_{i_1\ldots i_k i_{k+1}}$$

$$H = \bigoplus_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} H_{i_1\ldots i_k}, \quad H_{i_1\ldots i_k} = \bigoplus_{i_{k+1}=1}^{n} H_{i_1\ldots i_k i_{k+1}},$$

де підпростори $\mathcal{H}_{i_1\ldots i_k}$ є інваріантними відносно дії операторів

$$H_{i_1\ldots i_k} = HP_{i_1\ldots i_k}$$

($P_{i_1\ldots i_k}$ — ортопроектор на $\mathcal{H}_{i_1\ldots i_k}$), які при кожному фіксованому k є подібними:

$$H_{i'_1\ldots i'_k} = \mathcal{U}_{i'_1\ldots i'_k, i_1\ldots i_k} H_{i_1\ldots i_k} \mathcal{U}^{-1}_{i'_1\ldots i'_k, i_1\ldots i_k},$$

($\mathcal{U}_{i'_1\ldots i'_k, i_1\ldots i_k} : \mathcal{H}_{i_1\ldots i_k} \to \mathcal{H}_{i'_1\ldots i'_k}$ — обмежені і бієктивні). При цьому вимагається, щоб спектр $\sigma(H)$ структурно-подібного оператора припускав розклад

$$\sigma(H) = \bigcup_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \sigma_{i_1\ldots i_k}, \quad \sigma_{i_1\ldots i_k} \equiv \sigma(H_{i_1\ldots i_k}) = \bigcup_{i_{k+1}=1}^{n} \sigma_{i_1\ldots i_k i_{k+1}},$$

де при кожному фіксованому k непорожні підмножини $\sigma_{i_1\ldots i_k}$, $\sigma_{i'_1\ldots i'_k}$ були геометрично подібними:

$$\sigma_{i'_1\ldots i'_k} = \mathcal{T}_{i'_1\ldots i'_k, i_1\ldots i_k} \sigma_{i_1\ldots i_k},$$

де $\mathcal{T}_{i'_1\ldots i'_k, i_1\ldots i_k}$ — перетворення подібності на $\mathbb{R}$.

Відзначимо, що тут не вимагається подібність операторів $H_{i_1\ldots i_k}$, $H_{i_1\ldots i_l}$ при $k \neq l$. Нетривіальність розкладів означає, що

$$\dim \mathcal{H}_{i_1\ldots i_k} = \infty$$

принаймні для пари підпросторів при кожному k. Наступний результат є аналогом теорем типу Джессена-Вінтнера з [2].

Теорема. *Спектр структурно-подібного оператора H має чистий тип, тобто справедлива лише одна з наступних рівностей:*

$$\sigma(H) = \sigma_{pp}(H), \quad \sigma(H) = \sigma_{ac}(H), \quad \sigma(H) = \sigma_{sc}(H).$$

1. *Albeverio S., Koshmanenko V., Torbin G.* Fine structure of the singular continuous spectrum // Methods Funct. Anal. Topology. — 2003. — Vol. 9, no. 2. — P. 101–119.
2. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

J-self-adjoint extensions of the Phillips symmetric operator

S. Kuzhel, O. Shapovalova

J-Self-adjoint extensions of the Phillips symmetric operator A_{sym} are studied. The concepts of stable and unstable C-symmetry are introduced in the extension theory framework. The main results are the following:

1. if A is a J-self-adjoint extension of A_{sym}, then either $\sigma(A) = \mathbb{R}$ or $\sigma(A) = \mathbb{C}$;
2. if A has a real spectrum, then A has a stable C-symmetry and A is similar to a self-adjoint operator;
3. there are no J-self-adjoint extensions of the Phillips operator A_{sym} with unstable C-symmetry.

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
E-mail: `kuzhel(at)imath.kiev.ua`

Drahomanov National Pedagogical University, Kyiv, Ukraine
E-mail: `oks2074(at)mail.ru`

Нерівноважна глауберова динаміка: існування та ергодичність

О. В. Кутовий

Білефельдський університет, Білефельд, Німеччина
E-mail: `kutoviy(at)math.uni-bielefeld.de`

Розподіли випадкових ланцюгових A_2-дробів та їх фрактальні властивості

Д. В. Кюрчев

Нагадаємо [3], що розподіл випадкової величини (в.в.) називається сингулярним, якщо він є неперервним і зосередженим на множині нульової міри Лебега. Інтерес до сингулярних розподілів в останній час обумовлюється значною мірою їх тісним зв'язком з фракталами [3]. Проте існують певні труднощі в заданні, вивченні та використанні таких розподілів. Для вирішення цієї проблеми використовують різні системи числення та способи кодування чисел, в тому числі зображення дійсних чисел за допомогою ланцюгових дробів. Ми ввели в розгляд новий спосіб представлення дійсних чисел ланцюговим дробом з двоелементним алфавітом $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, де $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ (див. [2]).

Нехай

$$\xi = \cfrac{1}{\eta_1 + \cfrac{1}{\eta_2 + \ldots}} \equiv [\eta_1, \eta_2, \ldots],$$

де η_k — незалежні випадкові величини, що мають розподіли $P\{\eta_k = \alpha_1\} = p_{\alpha_1 k} \geqslant 0$, $P\{\eta_k = \alpha_2\} = p_{\alpha_2 k} \geqslant 0$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $p_{\alpha_1 k} + p_{\alpha_2 k} = 1$.

Теорема 1. *Для того щоб при $\alpha_1\alpha_2 \geqslant \frac{1}{2}$ розподіл випадкової величини ξ був дискретним, необхідно і достатньо, щоб*

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{\alpha_1 k}, p_{\alpha_2 k}\} > 0. \tag{1}$$

У випадку дискретності точковий спектр розподілу випадкової величини ξ складається з тих чисел $x \in [\beta_1, \beta_2]$, що мають ланцюгове A_2-зображення, яке відрізняється від зображення числа

$$x_0 = [b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots], \tag{2}$$

де $P\{\eta_k = b_k\} = \max\{p_{\alpha_1 k}, p_{\alpha_2 k}\}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, не більш ніж скінченною кількістю елементів a_k, таких що $p_{a_k k} > 0$.

Наслідок 1. *Для того щоб при $\alpha_1\alpha_2 \geqslant \frac{1}{2}$ розподіл випадкової величини ξ був неперервним, необхідно і достатньо, щоб*

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{\alpha_1 k}, p_{\alpha_2 k}\} = 0.$$

Теорема 2. *Якщо $\alpha_1\alpha_2 > \frac{1}{2}$ і в.в. ξ розподілена неперервно, то розподіл ξ є сингулярним канторівського типу.*

Теорема 3. *Нехай в.в. ξ має неперервний розподіл, тобто $M = 0$, і $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Якщо кількість нулів в матриці $\|p_{ik}\|$ скінченна, то ξ має сингулярний розподіл салемівського типу (S-типу).*

Теорема 4. *Нехай в.в. ξ має неперервний розподіл, тобто $M = 0$ і $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$. Для того, щоб в.в. ξ мала сингулярний розподіл канторівського типу (C-типу), необхідно і достатньо, щоб матриця $\|p_{ik}\|$ містила нескінченну кількість нулів.*

Нехай
$$\xi = [\eta_1, \eta_2, \ldots],$$
де η_k — незалежні в.в. з розподілами $P\{\eta_k = \alpha_1\} = p_{\alpha_1} > 0$, $P\{\eta_k = \alpha_2\} = p_{\alpha_2} > 0$ $\forall k = 1, 2, \ldots$, де $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, $\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} = 1$.

Теорема 5. *Розмірність Хаусдорфа імовірнісної міри μ, породженої випадковою величиною ξ, задовільняє нерівність:*
$$\alpha_0(\mu) \leqslant -\frac{\ln p_{\alpha_1}^{p_{\alpha_1}} p_{\alpha_2}^{p_{\alpha_2}}}{2\ln \frac{\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i p_{\alpha_i} + \sqrt{(\sum\limits_{i=1}^{2}\alpha_i p_{\alpha_i})^2 + 4}}{2}}.$$

1. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. — Москва: Мир, 1969. — 238 с.
2. *Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В., Працьовитий М. В.* Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 4. — С. 452–463.
3. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
4. *Falconer K.* Techniques in fractal geometry. — Chichester: John Wiley & Sons, Ltd., 1997. — xviii+256 pp.
5. *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Random Oper. Stoch. Equ. — 2009. — Vol. 17, no. 1. — P. 91–101.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

E-mail: `d_kyurchev(at)ukr.net`

Циліндричне марковське зображення чисел і його застосування

В. В. Луцак, О. В. Слуцький

Нехай $2 \leqslant s$ — фіксоване натуральне число, $A = \{0, 1, \ldots, s-1\}$ — алфавіт, $\vec{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_{s-1})$ — стохастичний вектор ($q_i > 0$, $q_0 + q_1 + \ldots + q_{s-1} = 1$),

$$\|q_{ij}\| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0(s-1)} \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1(s-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{(s-1)0} & q_{(s-1)1} & \cdots & q_{(s-1)(s-1)} \end{pmatrix}$$

є стохастичною матрицею ($q_{i0} + q_{i1} + \ldots + q_{i,(s-1)} = 1$, $\forall i \in A$), що не містить нулів ($q_{ij} > 0$).

$$[0, 1] = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_{s-1},$$

де $\Delta_0 = [0, q_0]$, $\Delta_i = [q_0 + \ldots + q_{i-1}, q_0 + \ldots + q_{i-1} + q_i]$, $i = 1, \ldots, s-1$.

Визначимо систему відрізків n-го рангу $\Delta_{a_1 \ldots a_n}$, де $a_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ наступними умовами:

1. $\Delta_{a_1 \ldots a_n} = \Delta_{a_1 \ldots a_n 0} \cup \Delta_{a_1 \ldots a_n 1} \cup \ldots \cup \Delta_{a_1 \ldots a_n (s-1)}$;
2. $\max \Delta_{a_1 \ldots a_n i} = \min \Delta_{a_1 \ldots a_n (i+1)}$, $i = \overline{0, s-2}$;
3. $\frac{|\Delta_{a_1 \ldots a_n ij}|}{|\Delta_{a_1 \ldots a_n i}|} = q_{ij}$.

Відрізок $\Delta_{a_1 \ldots a_n}$ називатимемо циліндром рангу n з основою $a_1 \ldots a_n$. Інтервал з тими ж самими кінцями, що й $\Delta_{a_1 \ldots a_n}$ позначатимемо $\nabla_{a_1 \ldots a_n}$.

В даній роботі пропонуються наступні результати дослідження.

Лема 1. *Довжина циліндра $\Delta_{a_1 \ldots a_n}$ обчислюється за формулою*

$$|\Delta_{a_1 \ldots a_n}| = q_{a_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{a_i a_{i+1}}.$$

Наслідок 1. $|\Delta_{a_1 \ldots a_n}| \to 0$, *при* $n \to \infty$.

Теорема 1. *Для довільної послідовності (a_n), де $a_n \in A$, існує єдина точка $x \in [0, 1]$, така, що належить всім циліндрам послідовності*

$$\Delta_{a_1},\ \Delta_{a_1 a_2},\ \ldots,\ \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n}, \ldots,$$

тобто

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}.$$

Через $C = C[\Delta, (V_n)]$ будемо позначати множину всіх чисел з відрізка $[0,1]$, для яких n-й символ набуває значень з множини V_n, тобто

$$C = C[\Delta, (V_n)] = \{x : x = \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n, \ldots}, a_n \in V_n\},$$

де $V_n \subseteq A$.

Теорема 2. *Міра Лебега множини C обчислюється за формулами*

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})}\right), \tag{1}$$

де $F_0 = [0,1]$, F_n — об'єднання циліндрів рангу n, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, $\bar{F}_n = F_{n-1} \setminus F_n$.

Теорема 3. *Рівність $\lambda(C) = 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли послідовність (V_n) має властивість $V_n \neq A$ для нескінченної множини значень n.*

Наслідок 2. $\lambda(C[\Delta, V]) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли $V \neq A$, де $V = V_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.*

Нехай задана випадкова величина

$$\xi = \Delta_{\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n \ldots}$$

з незалежними символами η_k свого зображення. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 4. *Якщо $s > 2$, η_k — незалежні однаково розподілені та існує i таке, що $P\{\eta_k = i\} = 0$, то розподіл ξ є сингулярним розподілом канторівського типу.*

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
2. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

Stochastic differential equations involving fractional Brownian motion

Yu. Mishura

Many physical processes, economic, financial, social events have the property of long memory. Mathematically, this property is best modeled by the so-called fractional Brownian motion. It is defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ as follows.

Definition 1. The *fractional Brownian motion* (fBm) with Hurst index $H \in (0,1)$ is a Gaussian process $B^H = \{B^H_t, t \geqslant 0\}$ on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, having the properties

1. $B^H_0 = 0$,
2. $EB^H_t = 0$, $t \geqslant 0$,
3. $EB^H_t B^H_s = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$, $s, t \geqslant 0$.

By an analogy to usual diffusion process, it is natural to define a diffusion process with long memory as a solution to a stochastic differential equation involving fBm. The mixed model involving both standard and fractional Brownian motion is even more flexible and is under consideration now inside the various problems (see [1, 2], for example). The definition, however, has several caveats, because, firstly, there are several versions of a stochastic integral with respect to fBm, secondly, when we also consider mixed processes, the resulting solution must be integrable with respect to all the components. We discuss this and other problems related to diffusion processes with long memory. We continue the considerations from [3].

1. *Guerra J., Nualart D.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion. — `arXiv:0801.4963v1`.
2. *Bender C., Sottinen T., Valkeila E.* Pricing by hedging and no-arbitrage beyond semimartingales // Finance Stoch. — 2008. — Vol. 12, no. 4. — P. 441–468.
3. *Mishura Yu. S.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes. — Berlin: Springer, 2008. — xviii+393 p. — (Lecture Notes in Math.; 1929).

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
E-mail: `myus(at)univ.kiev.ua`

Анормальність чисел і Q_∞-зображення

Р. Нікіфоров, Г. Торбін

В роботах [2, 3] досліджувались фрактальні властивості підмножин множини анормальних дійсних чисел, записаних в s-адичних системах числення. В даній доповіді обговорюються властивості підмножин анормальних чисел, які задані за допомогою систем числення з нескінченним алфавітом.

Нехай $Q_\infty = (q_0, q_1, \dots, q_k, \dots)$ — стохастичний вектор, такий, що $q_i > 0$, і $-\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i \ln q_i < +\infty$. Відомо [1], що для довільного дійсного числа $x \in [0,1)$ існує єдина послідовність натуральних чисел $\{\alpha_k(x)\}$ така, що

$$x = \beta_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \beta_k(x) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)} =: \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)\dots}, \tag{1}$$

де $\beta_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} q_i$ і $\sum\limits_{i=0}^{-1} q_i := 0$.

Вираз (1) називається Q_∞-зображенням числа x.

Нехай $N_i(x,k)$ — кількість символів «i» серед перших k символів Q_∞-зображення числа x. Якщо границя

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} =: \nu_i^{Q_\infty}(x)$$

існує, то вона називається асимптотичною частотою символа «i» в Q_∞-зображенні числа x.

Означення 1. Множина

$$L(Q_\infty) = \left\{ x : \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k} \text{ не існує}, \forall i \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

називається множиною суттєво Q_∞-анормальних чисел.

Множина

$$P(Q_\infty) = \left\{ x :\ \exists i_1 : \lim_{k\to\infty} \frac{N_{i_1}(x,k)}{k} \text{ існує}, \right.$$
$$\left. \text{і } \exists i_2 : \lim_{k\to\infty} \frac{N_{i_2}(x,k)}{k} \text{ не існує} \right\}$$

називається множиною частково Q_∞-анормальних чисел.

Теорема 1. *Якщо*

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i \ln^2 q_i < \infty, \tag{2}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ln^2 q_i < \infty, \tag{3}$$

то множина суттєво Q_∞-анормальних чисел є суперфрактальною множиною, тобто її розмірність Хаусдорфа–Безиковича дорівнює 1.

Теорема 2. *Якщо*

$$\sum_{i=0}^{\infty} q_i \ln^2 q_i < \infty, \tag{4}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \ln^2 q_i < \infty, \tag{5}$$

то множина частково Q_∞-анормальних чисел є суперфрактальною множиною.

1. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.
2. *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. — 1995. — Т. 47, № 7. — С. 971–975.
3. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Topological and fractal properties of real numbers which are not normal // Bull. Sci. Math. — 2005. — Vol. 129, no. 8. — P. 615–630.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
E-mail: `rnikiforov(at)gmail.com`

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
E-mail: `torbin7(at)gmail.com`

Деякі розв'язані та відкриті проблеми теорії недиференційовних функцій

О. Б. Панасенко

Часи, коли неперервні та ніде не диференційовні функції вважались неприродними і «патологічними», давно минули. Зараз такі функції знаходять своє застосування в найрізноманітніших галузях людських знань.

В теорії недиференційовних функцій особливо гостро поставлена проблема їх аналітичного задання. На сьогоднішній день найпоширенішими підходами до означення непрервних функцій зі складною локальною поведінкою є подання їх сумою рівномірно збіжного ряду неперервних відображень (наприклад, функції Вейєрштрасса, Такаґі–Ван дер Вардена та ін.), а також атрактором системи ітерованих функцій (фрактальні інтерполяційні функції).

М. В. Працьовитий, розглядаючи відображення, для яких існує певний зв'язок між цифрами аргументу та цифрами відповідних значень, сконструював приклади неперервних ніде не диференційовних відображень, які в такий спосіб означаються (див. [1]).

Нехай для фіксованих $s > 2$, $r \in \{0, 1, \dots s-1\}$, $p \in \{0, 1\}$ та впорядкованого стохастичного набору $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{s-1}\}$ аргумент має Q-подання [2]

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\alpha_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j}\right] \equiv \Delta^{Q}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots},$$

$\beta_m = \sum\limits_{i=0}^{m-1} q_i$, а значення функції

$$f_{p,r}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta_k}{2^k} \equiv \Delta^{2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_k\ldots}, \tag{1}$$

де

$$\beta_1 = \begin{cases} p, & \text{якщо } \alpha_1 = r \\ 1-p, & \text{якщо } \alpha_1 \neq r, \end{cases}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k = \alpha_{k-1} \\ 1-\beta_{k-1}, & \text{якщо } \alpha_k \neq \alpha_{k-1}, \quad k > 1. \end{cases}$$

Теорема 1 ([3])**.** *Фрактальна клітинкова розмірність графіка функції* (1) *дорівнює d, де d — корінь рівняння* $\sum\limits_{k=0}^{s-1} q_k^{d-1} = 2$.

Відкритим залишається питання, якою є розмірність Хаусдорфа–Безиковича $\alpha_0(\Gamma_f)$ графіка функції (1). Ця задача розв'язана лише для випадку, коли $Q = \left\{\frac{1}{s}, \frac{1}{s}, \ldots, \frac{1}{s}\right\}$: в цьому випадку $\alpha_0(\Gamma_f) = \log_2\left(1 + (s-1)^{\log_s 2}\right)$ [4].

Функцію (1) можна далі модифікувати та узагальнити, використовуючи інші способи представлення дійсних чисел [5].

1. *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.
2. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
3. *Панасенко О. Б.* Фрактальна розмірність графіків неперервних канторівських проекторів // Наук. часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 124–132.
4. *Панасенко О. Б.* Розмірність Хаусдорфа–Безиковича однієї неперервної ніде не диференційовної функції // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 9. — С. 1225–1239.
5. *Панасенко О. Б.* Однопараметричний клас неперервних функцій, близьких до канторівських проекторів // Математичні студії. — 2009. — Т. 32, № 1. — С. 3–11.

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

E-mail: panasenko_alex(at)bigmir.net

Деякі прийоми побудови проблемних задач для учнів-членів Малої академії наук

М. Пихтар

Педагогічний процес у Малої академії наук (МАН) має свої особливості, які відрізняють його від навчання в школі. Перш за все це форми проведення занять, бо навчальні програми гуртків мають охоплювати такі проблемні питання, поетапне розв'язання яких ефективно впливало б на формування математичних здібностей учнів. Постає питання: як побудувати для учнів дослідницькі задачі, при поступовому розв'язанні яких відбувалося б збагачення математичною теорією та народжувалися нові методи?

Виходячи з досвіду роботи, виділимо положення щодо дослідницької задачі та її побудови:

1) побудувати дослідницьку задачу для учня важче, ніж для студента;
2) дослідження учня має починатися або з підручника, або з заняття;
3) формулювання дослідницької задачі не повинно вимагати від учня значної додаткової підготовки;
4) матеріал, необхідний для початкової роботи над проблемою є цілком доступним для учнів;
5) правильна постановка задачі і керування нею дозволяє учню досягти високих результатів.

Найкращими темами для учня в нашому досвіді (в плані реалізації дослідження) є ті теми, які виникли несподівано з деякої задачі на самому занятті гуртка або на уроці, бо вони пронизані атмосферою допитливості про невідоме. При цьому задача може бути вже розв'язаною в науці, тоді учень про це має знати і запропонувати свій шлях розв'язання та порівняти їх. Ось чому, ідучи на заняття гуртка викладач має мати в арсеналі задачі проблемного характеру з кожної запланованої теми. Такі задачі легко будуються завдяки:

1. *Додатковим питанням*, які поступово перетворюють навчальну задачу в пошукову, а потім в дослідницьку.

2. *Задачам-«двійникам»*. Приклад задачі-«двійника»: множина A складається з натуральних чисел, причому: 1) $1 \in A$, 2) якщо $a \in A$, то $2a + 1 \in A$, 3) якщо $3a + 1 \in A$, то $a \in A$. Чи вірно, що $8 \in A$?

Задача-«двійник»: множина A складається з натуральних чисел, причому: 1) $1 \in A$, 2) якщо $a \in A$, то $2a+1 \in A$, 3) якщо $3a+1 \in A$, то $a \in A$. Чи співпадає множина A з множиною натуральних чисел?

Розширення кола задач-«двійників» при вивченні математики на гуртках МАН позитивно впливає на відношення учнів до математики тому, що розв'язання цих задач: 1) підвищує мотивацію навчання; 2) виховує потребу в розширенні математичних знань; 3) підводить до узагальнення, а може й до «математичного відкриття»; 4) сприяє раціональному вибору теми для майбутнього дослідження, якщо навіть ця тема досліджувалася чи досліджується кимось з членів МАН.

3. *Узагальнення.* Діапазон задач, які узагальнюються, їх тематика, характер і складність можуть бути самими різними. Головне, щоб кожна така задача знайшла свого дослідника. Найкращим помічником — посібником задач, що узагальнюються для керівників гуртків МАН можуть стати задачі з ТЮМ — Турніру юних математиків, а також задачі з журналів «Квант», «У світі математики», «Математика у школі».

4. *Відкритим задачам.* Відкриті задачі можна умовно поділимо на:

- задачі *з відкритою умовою*, якщо невизначеність наявна в умові задачі, наприклад: чи є послідовність $x^x, x^{x^x}, \ldots (x > 1)$ обмеженою?;
- задачі *з відкритим твердженням*, якщо невизначеність в її твердженні, наприклад: дослідити властивості параболічного чотирикутника;
- задачі з найвищою формою «відкритості», у якій немає ні умови, ні твердження. Наприклад: «Дослідити властивості $(x]$ — найменшого цілого числа, яке не менше за x».

Результативні просування у розв'язуванні таких задач можуть послужити домінуючим фактором при виборі теми та її дослідженні у рамках МАН.

Національний технічний університет України «КПІ», Славутицька філія

Знаходження точних розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь із симетричною змінною матрицею другого порядку

Ю. П. Підченко

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$x' = A(t)x, \tag{1}$$

де

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$a_{ij}(t)$ — задані диференціальні функції для $\forall t \in [a, b]$.

Добре відоме широке застосування систем (1), (2), а також неоднорідних систем $x' = A(t)x + f(t)$ у фізиці і техніці. До них також зводяться лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами [1] та рівняння Ріккаті. Але, на жаль, не існувало теорії знаходження точних розв'язків таких систем. Під точним розв'язком будемо розуміти розв'язок у квадратурах.

Автор намагається розробити таку теорію. Ним опубліковано ряд робіт, присвячений цій тематиці (зокрема, [2, 3]).

В доповіді представляються результати, що є продовженням дослідження, розпочатого в [2], де досліджується випадок, коли добуток елементів побічної діагоналі матриці $A(t)$ є додатним. Зокрема, пропонується новий оригінальний спосіб побудови точного розв'язку такої системи.

Теорема 1. *Система рівнянь* (1)–(2) *із симетричною матрицею інтегрується у квадратурах.*

1. *Еругин Н. П., Штокало Й. З. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Высшая школа, 1974. — 472 с.
2. *Підченко Ю. П.* Знаходження точних розв'язків системи диференціальних рівнянь з матрицею другого порядку. I випадок // Наук. зап. НПУ імені М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 1999. — № 1. — С. 145–153.
3. *Підченко Ю. П.* Знаходження точних розв'язків лінійної системи диференціальних рівнянь з матрицею другого порядку. II випадок // Наук. зап. НПУ імені М. П. Драгоманова. Фіз.-мат. науки. — 2001. — № 2. — С. 246–255.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

Згасаючі еволюції в багатомірних просторах

А. О. Погоруй

Розглянемо приклад узагальнення згасаючої еволюції на площину. Нехай $\xi(t) = \max\{n \geqslant 0 : \tau_n \leqslant t\}$, $t \geqslant 0$, де $\tau_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \theta_k$, а $\theta_k \geqslant 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини з функцією розподілу $G_\theta(t)$.

Розглянемо процес

$$x(t) = \int\limits_0^t a^{\xi(t)} \exp\left\{i\frac{2\pi}{3}\xi(s)\right\} ds,$$

де $0 < a < 1$. Покладемо $\tau_k = \exp\{i\frac{2\pi(k-1)}{3}\}$, $k = 1, 2, 3$ і

$$\sigma = \int\limits_0^t a^{\xi(t)} \exp\left\{i\frac{2\pi}{3}\xi(s)\right\} ds.$$

Неважко переконатись, що $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{3} \eta_k \tau_k$, де $\eta_k = \sum\limits_{l=0}^{+\infty} a^{k-1+3l}\theta_{k-1+3l}$. Розподіли випадкових величин η_k є граничними розподілами відповідних згасаючих еволюцій на прямій. Такі розподіли вивчаються, наприклад, в [1] та у використаних там посиланнях. Розподіл σ є граничним розподілом двовимірної згасаючої еволюції $x(t)$.

Нехай $f_{\eta_i}(x)$ — щільність розподілу η_i, $i = 1, 2, 3$. Розподіл випадкової величини σ у множині $\{x_1\tau_1 + x_2\tau_2; x_1, x_2 \geqslant 0\}$ обчислюється так:

$$\begin{aligned}
&P\{\sigma \in (dx_1\tau_1 + dx_2\tau_2)\} = P\{\eta_1\tau_1 + \eta_2\tau_2 + \eta_3\tau_3 \in (dx_1\tau_1 + dx_2\tau_2)\} \\
&= P\{(\eta_1 - \eta_3) \in dx_1 + (\eta_2 - \eta_3) \in dx_2 \in (dx_1\tau_1 + dx_2\tau_2)\} \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} P\{(\eta_1 - u) \in dx_1, (\eta_2 - u) \in (dx_2)/\eta_3 = u\} P\{\eta_3 \in du\} \qquad (1) \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\eta_1}(x_1 + u) f_{\eta_2}(x_2 + u) f_{\eta_3}(u)\, du\, dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Аналогічно, для $\{x_1\tau_1 + x_3\tau_3; x_1, x_3 \geqslant 0\}$ маємо

$$P\{\sigma \in (dx_1\tau_1 + dx_3\tau_3)\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\eta_1}(x_1+u) f_{\eta_3}(x_3+u) f_{\eta_2}(u)\, du\, dx_1 dx_3 \quad (2)$$

і для $\{x_2\tau_2 + x_3\tau_3; x_2, x_3 \geqslant 0\}$ маємо

$$P\{\sigma \in (dx_2\tau_2+dx_3\tau_3)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\eta_2}(x_2+u)f_{\eta_3}(x_3+u)f_{\eta_1}(u)dudx_2dx_3, \quad (3)$$

де $f_{\eta_i}(x)$, щільність розподілу $\eta_i, i = 1, 2, 3$.

У роботі [2] інтеграли (1)–(3) називаються T-згорткою щільностей $f_{\eta_i}(x)$, $i = 1, 2, 3$, на площині. Використовуючи поняття T-згортки для багатомірних просторів можна узагальнити згасаючі еволюції на багатомірні простори.

1. *Погоруй А. О., Родрігес-Дагніно Р. М.* Граничні розподіли згасаючих еволюцій в деяких півмарковських середовищах // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 12.
2. *Pogorui A. A., Kovalenko D. O., Rodriguez-Dagnino R. M.* T-Convolution and its applications to n-dimensional distributions // Random Oper. Stoch. Equ. — 2009. — Vol. 17. — P. 349–363.

Розклади Остроградського другого виду: метрична, динамічна, ймовірнісна та розмірнісна точка зору

І. М. Працьовита, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін

Відомо, що довільне дійсне число x з одиничного інтервала можна представити у вигляді

$$x = \sum_k \frac{(-1)^{k-1}}{q_k(x)}, \quad \text{де} \quad q_k(x) \in \mathbb{N},\ q_{k+1}(x) \geqslant q_k(x)(q_k(x)+1). \quad (1)$$

Якщо x — ірраціональне, то таке представлення єдине. Кожне раціональне число $x \in (0,1)$ можна записати у вигляді (1) двома різними способами. Зображення числа у вигляді (1) називатимемо O^2-*зображенням* і будемо позначати $\mathrm{O}^2(q_1(x), \ldots, q_k(x), \ldots)$.

При зафіксованих перших k символах, $(k+1)$-й символ O^2-зображення не може набувати значень 1, 2, 3, 4, 5, …, $q_k(q_k+1)-1$, що робить символи O^2-зображення «нерівноправними». Нехай

$$d_1 = q_1 \quad \text{і} \quad d_{k+1} = q_{k+1} - q_k(q_k+1) + 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тоді попередній ряд можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} x = \sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{q_{k-1}(x)(q_{k-1}(x)+1) - 1 + d_k(x)} =: \\ =: \bar{\mathrm{O}}^2(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_k(x), \ldots). \end{aligned} \quad (2)$$

Вираз (2) називається $\bar{\mathrm{O}}^2$-розкладом (різницевим розкладом Остроградського другого виду, розкладом Остроградського другого виду з незалежними приростами), а число $d_k = d_k(x)$ — k-м $\bar{\mathrm{O}}^2$-символом числа x. В $\bar{\mathrm{O}}^2$-зображенні кожен із символів, незалежно від значення попереднього, може набувати всіх натуральних значень.

В доповіді висвітлюються особливості метричної та розмірнісної теорії $\bar{\mathrm{O}}^2$-розкладів дійсних чисел. Показано, що для розвитку метричної теорії та вивчення нормальних властивостей чисел, записаних за допомогою $\bar{\mathrm{O}}^2$-зображення, класичні методи ергодичної теорії динамічних систем непридатні. Обговорюються також результати досліджень властивостей розподілів випадкових величин з незалежними символами $\bar{\mathrm{O}}^2$-зображення, тобто випадкових величин виду

$$\eta = \bar{\mathrm{O}}^2(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k, \ldots), \quad (3)$$

$\bar{\mathrm{O}}^2$-символи η_k яких є незалежними випадковими величинами, що набувають значень 1, 2, …, m, … з ймовірностями p_{1k}, p_{2k}, …, p_{mk}, … .

Теорема 1. *Майже всі (в розумінні міри Лебега) числа* $(0,1]$ *у своєму* $\bar{\mathrm{O}}^2$*-зображенні містять скінченну кількість кожного з* $\bar{\mathrm{O}}^2$*-символів.*

Теорема 2. *Для майже всіх (в розумінні розмірності Хаусдорфа–Безиковича) чисел одиничного відрізка послідовність їх* $\bar{\mathrm{O}}^2$*-символів є необмеженою, тобто множина дійсних чисел з обмеженими* $\bar{\mathrm{O}}^2$*-символами є аномально фрактальною.*

Розглянемо динамічну систему, яка породжена наступним перетворенням T одностороннього зсуву по $\bar{\mathrm{O}}^2$-зображенню:

$$\forall\, x = \bar{\mathrm{O}}^2(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x), \ldots) \in [0,1],$$
$$T(x) = T(\bar{\mathrm{O}}^2(d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x), \ldots)) =$$
$$= \bar{\mathrm{O}}^2(d_2(x), d_3(x), \ldots, d_n(x), \ldots).$$

Нагадаємо, що множина A називається інваріантною або нерухомою відносно перетворення T, якщо $A = T^{-1}A$. Міра μ називається ергодичною відносно перетворення T, якщо довільна інваріантна множина $A \in \mathfrak{B}$ є множиною або нульової, або повної міри. Міра μ називається інваріантною відносно перетворення T, якщо для довільної множини $E \in \mathfrak{B}$ виконується рівність $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$.

Теорема 3. *Не існує ймовірнісних мір, які були б інваріантними і ергодичними відносно перетворення зсуву* T *по* $\bar{\mathrm{O}}^2$*-зображенню і одночасно абсолютно неперервними відносно міри Лебега.*

Теорема 4. *Якщо хоча б для одного символа* i_0 *ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} p_{i_0,m}$ *розбігається, то розподіл випадкової величини з незалежними символами* $\bar{\mathrm{O}}^2$*-зображення є сингулярним відносно міри Лебега.*

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
E-mail:
lightsoul2008(at)gmail.com,prats4(at)yandex.ru,torbin7(at)gmail.com

Геометрія і метрична теорія дійсних чисел

М. В. Працьовитий

Дійсне число — фундаментальне поняття математики, яке присутнє практично в усіх її галузях. Сьогодні крім загальної аксіоматичної теорії дійсних чисел, вивчаються різні її моделі. Існують геометричні та алгебраїчні теорії, а також теорії, побудовані на засобах аналізу. У кожній з теорій дійсне число «одягається» в ту чи іншу форму, зручну в одних відношеннях і навпаки в деяких інших. Традиційно множина дійсних чисел є розширенням множини раціональних чисел. Загальний принцип в побудові суттєво нового використовувати як будівельний матеріал уже освоєне працював при побудові класичних теорій Дедекінда, Кантора, Веєрштрасса. В сучасних теоріях дійсного числа істотну роль відіграють системи зображення числа (системи числення).

Під *системою числення* ми розуміємо сукупність засобів для подання (представлення, математичного вираження) та зображення (скороченого запису подання). Сьогодні в математиці і її застосуваннях широко використовуються різні системи числення. Кожна з них має свій алфавіт (набір символів (цифр) для зображення числа) і визначаючу нескінченно малу послідовність. Одні з них мають скінченний алфавіт, інші — нескінченний. В одних він постійний, в інших — змінний. Наприклад, класична s-адична (s-кова) система використовує алфавіт з s символів $\{0, 1, \dots, s-1\}$, а зображення чисел ланцюговими дробами має нескінченний алфавіт — множину всіх натуральних чисел. В зображенні чисел рядами Кантора алфавіт, взагалі кажучи, змінний, у кожного розряду він свій. Існують системи зображення чисел, у яких інша роль цифр, ніж в s-адичного зображення. Вони не відіграють ролі чисел, а відіграють, скажімо, роль індексів. Такими є Q-, Q^*-, $\widetilde{Q}$-зображення та інше. Наявність різних систем зображення чисел розширює можливості для розвитку різних галузей математики. В першу чергу, теорії функцій, теорії ймовірностей, фрактального аналізу, теорії динамічних систем та ін. Особливо корисними вони є при моделюванні та дослідженні математичних об'єктів зі складною локальною будовою (недиференційовних функцій, сингулярних розподілів ймовірностей, динамічних систем з домінуючими хаотичними траєкторіями тощо).

Геометрія дійсних чисел в тому чи іншому зображенні включає: геометричне тлумачення змісту цифр, властивості циліндрів та метричні відношення, породженні способом подання числа.

Основною задачею *метричної теорії дійсних чисел* є задача про міру множини чисел, які мають певну властивість, зокрема, зображення. Для багатьох систем числення метрична теорія є достатньо розвиненою. Це стосується, в першу чергу, s-адичних систем та ланцюгових дробів.

Кажуть, що система числення має *нульову надлишковість*, якщо в ній довільне дійсне число має не більше двох зображень. Причому сукупність чисел, які мають два зображення, є не більш ніж зліченною множиною. Нульову надлишковість мають s-адична система числення, зображення чисел ланцюговими дробами, зображення чисел рядами Енгеля, Кантора, Люрота, Остроградського та ін. Такою не є s-кова система з надлишковим набором цифр, фібоначчієва система тощо.

У питаннях, пов'язаних з неперервністю та складною локальною будовою об'єктів, головну роль відіграє дробова частина числа, яку ми далі розглядатимемо.

Нехай
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \cdots = L,$$
де $A_k = \{0, 1, \ldots\}$ — скінченна або нескінченна множина символів.

Сюр'єктивне відображення $f : L \to [0, 1]$ встановлює кодування чисел відрізка $[0, 1]$. Якщо f має властивість: не більше двох формально різних послідовностей з L відображаються в одне й те ж число з $[0, 1]$, то дана система кодування має нульову надлишковість.

Означення 1. Циліндром рангу m з основою $c_1 \ldots c_m$, де $c_i \in A_i$, $i = \overline{1, m}$, називається множина
$$\Delta_{c_1 \ldots c_m} = \{x : x \in [0, 1]\,,\ x = f\left((\alpha_n)\right),\ (\alpha_n) \in L\}\,,$$
причому $\alpha_1 = c_1, \ldots, \alpha_m = c_m$.

1. З означення циліндра випливає
$$\Delta_{c_1 \ldots c_m} = \bigcup_{i \in A_{m+1}} \Delta_{c_1 \ldots c_m i}.$$

2. Оскільки має місце нульова надлишковість, то циліндри не перекриваються.

3. Для міри Лебега виконується: $\lambda\left(\Delta_{c_1 \ldots c_m}\right) \to 0$ $(m \to \infty)$.

У доповіді мова йтиме про метричну теорію і різноманітні застосування f-кодування дійсних чисел, зокрема, при дослідженні фрактальних властивостей математичних об'єктів.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна
E-mail: prats4(at)yandex.ru

Системи числення зі змінною основою

М. В. Працьовитий, Ю. В. Ралко

Нехай (q_k) — фіксована послідовність натуральних чисел, більших або рівних 2, $A_k = \{0, 1, 2, \dots, q_k - 1\}$.

Означення 1. Рядом Кантора називається вираз виду

$$\frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{q_1 q_2 \dots q_n} + \dots, \tag{1}$$

де (ε_k) — фіксована послідовність чисел, $\varepsilon_n \in A_n$.

Якщо послідовність (q_n) — фіксована, то існує континуальна множина відповідних рядів Кантора. Кожен ряд Кантора є збіжним і його сума не перевищує $\frac{\varepsilon_1 + 1}{q_1}$.

Вираз $\sum\limits_{n \in M}^{m} a_n$, де M — скінченна або нескінченна підмножина множини натуральних чисел $\mathbb{N}$, називається підрядом ряду (1). Сума кожного підряду ряду (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \quad \text{де} \quad \{\varepsilon_n\} \in A^{\infty} = A_1 \times A_2 \times \dots,$$

називається неповною сумою ряду (1).

Кожне число x виду

$$x = x(M) = \sum_{k \in M \subset \mathbb{N}} \frac{\varepsilon_k}{q_1 \dots q_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k \delta_k}{q_1 \dots q_k},$$

де

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \in M, \\ 0, & \text{якщо } k \notin M \end{cases}$$

називається неповною сумою ряду (1).

Множина

$$E = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k \delta_k}{q_1 q_2 \dots q_k},\ \delta_k \in \{0, 1\} \right\}$$

називається *множиною неповних сум ряду Кантора* (1).

Пропонуються результати дослідження тополого-метричних та фрактальних властивостей множини неповних сум довільного заданого ряду Кантора, а також властивості розподілу випадкової неповної суми ряду Кантора з різними розподілами його доданків (при умовах незалежності та марковської залежності).

Теорема 1. *Якщо* (q_k) *— задана послідовність натуральних чисел, більших або рівних* 2, *то для довільного* $x \in [0;1)$ *існує послідовність цілих чисел* $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x)$ *така, що*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k} \qquad i \qquad 0 \leqslant \varepsilon_k \leqslant q_k - 1. \tag{2}$$

Розклад числа в ряд (2) називається зображенням його рядом Кантора (1). Якщо $q_k = \mathrm{const} = s$, то таке зображення є класичним s-адичним розкладом. Як виявилось, таке зображення чисел є частковим випадком Q^*-зображень, яке вперше описано в [2].

Доповідь присвячена застосуванням розкладів чисел в ряди Кантора для побудови метричної, ймовірнісної та фрактальної теорій дійсних чисел, використанню їх для задання та дослідження функцій та мір зі складною локальною будовою, для моделювання двовимірних фракталів та аналітичного опису фракталів, раніше побудованих конструктивно.

1. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
2. *Працевитый Н. В., Торбин Г. М.* Случайные величины с независимыми Q^*-знаками. — Киев: Ин-т матемитики АН Украины, 1992. — С. 95–104.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

Багатоточкові задачі з кратними вузлами інтерполяції для лінійних псевдодиференціальних рівнянь

Б. Й. Пташник, М. М. Симотюк

Позначимо: Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_p = (0,T)\times\Omega_p$, $x = (x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_p$, $D_x = (-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $(k,x) = k_1x_1+\ldots+k_px_p$; $G:\mathbb{Z}^p\to\mathbb{R}$ — така функція, що $G(k)\geqslant 1$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ і $\lim\limits_{\|k\|\to\infty} G(k)=\infty$; $W_{\alpha,\beta}(G)$ — простір, одержаний поповненням множини скінченних тригонометричних поліномів $g(x)=\sum g_k\exp(ik,x)$ за нормою

$$\|g, W_{\alpha,\beta}(G)\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|g_k|^2G^{2\alpha}(k)\exp(2\beta G(k))};$$

$S(G)$ — множина таких псевдодиференціальних операцій $A(D_x)$, дія яких на функцію $\varphi(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k\exp(ik,x)$ визначається рівністю $A(D_x)\varphi(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}A(k)\varphi_k\exp(ik,x)$, а $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\{|A(k)|G^{-1}(k)\}<\infty$.

Розглянемо таку задачу:

$$L_n\left(\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right)u \equiv \frac{\partial^n u}{\partial t^n}+\sum_{j=0}^{n-1}A_{n-j}(D_x)\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = F(t,x),\ (t,x)\in Q_p, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}&V_{j,q_j}[u(t,x)]\equiv \left.\frac{\partial^{q_j-1}u(t,x)}{\partial t^{q_j-1}}\right|_{t=t_j} = \varphi_{j,q_j}(x), \quad x\in\Omega_p,\\ &q_j=1,\ldots,r_j, \quad j=1,\ldots,l, \quad 2\leqslant l\leqslant n,\end{aligned} \quad (2)$$

де $0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_l\leqslant T$, $r_1+\ldots+r_l=n$, $A_j(D_x)\in S(G^{N_j})$, $N_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\ldots,n$. Нехай $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ — корені многочлена $L_n(\lambda,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$; $\gamma=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{N_j/j\}$, $M_1=\max\{0;\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\{\operatorname{Re}\lambda_j(k)G^{-\gamma}(k)\}\}$, $M_2=-\min\{0;\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\{\operatorname{Re}\lambda_j(k)G^{-\gamma}(k)\}\}$; $f_1(t,k),\ldots,f_n(t,k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, — така фундаментальна система розв'язків звичайного диференціального рівняння $L_n(d/dt,k)y(t)=0$, що $f_q^{(j-1)}(0,k)=\delta_{j,q}$, $j,q=1,\ldots,n$, де δ_{jq} — символ Кронекера;

$$\Delta(k)=\det\left\|V_{j,q_j}[f_q(t,k)]\right\|_{q_j=1,\ldots,r_j;j=1,\ldots,l}^{q=1,\ldots,n,}, \quad k\in\mathbb{Z}^p.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^n([0,T];W_{\alpha,\beta}(G^\gamma))$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k\in\mathbb{Z}^p \quad \Delta(k)\neq 0. \quad (3)$$

Робота підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 28.1/010).

Позначимо: $\alpha_0 = \gamma(n + \sum_{j=1}^{l} C_{r_j}^2)$, $\alpha_1 = \alpha_0 + \gamma \max\limits_{1\leqslant j\leqslant l} r_j$, $\beta_0 = nM_1T$, $\beta_1 = \beta_0 + M_1T$.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (3) *та існують сталі* $\omega, \delta \in \mathbb{R}$ *такі, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)| \geqslant G^{-\omega}(k) \exp(-\delta G^{\gamma}(k)). \tag{4}$$

Якщо $F \in C([0,T]; W_{\alpha+\alpha_1+\omega,\beta+\beta_1+\delta}(G^{\gamma}))$, $\varphi_{j,q_j} \in W_{\alpha+\alpha_0+\omega,\beta+\beta_0+\delta}(G^{\gamma})$, $q_j = 1,\ldots,r_j$, $j = 1,\ldots,l$, *то в просторі* $C^n([0,T]; W_{\alpha,\beta}(G^{\gamma}))$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який неперервно залежить від функцій* F *та* φ_{j,q_j}, $q_j = 1,\ldots,r_j$, $j = 1,\ldots,l$.

Теорема 3. *Якщо для деяких невід'ємних* λ, μ *функція* $G(k)$ *справджує умову* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} G^{-\lambda}(k) \exp(-\mu G(k)) < \infty$, *то для майже всіх* (*стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^l$) *векторів* $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_l) \in [0,T]^l$ *нерівність* (4) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *при* $\omega \geqslant \omega_0(\lambda,\gamma,n)$, $\delta \geqslant \delta_0(\mu,n,M_2,T)$, *де* $\omega_0(\lambda,\gamma,n)$, $\delta_0(\mu,n,M_2,T)$ — *певні конструктивні сталі, які визначаються даними задачі.*

Отримані результати узагальнюють результати статті [1] на випадок псевдодиференціальних рівнянь.

1. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 3. — С. 400–413.

Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
E-mail: ptashnyk(at)lms.lviv.ua

Квазі-неперервна та спінова апроксимації неперервних систем класичної статистичної механіки

О. Л. Ребенко

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: rebenko(at)voliacable.com

Многомерный пластинчатый симплекс I типа

Ю. С. Резникова

Определение 1 ([3, 4]). n-мерным срединно-усечённым симплексом, $n \geqslant 2$, называется n-мерный многогранник[1], представляющий собой выпуклую оболочку C_{n+1}^2 точек (вершин срединно-усечённого симплекса), являющихся серединами 1-граней произвольного n-мерного симплекса.

Рассмотрим метрическое пространство $\{V^n, \rho\}$, $n \geqslant 3$, где ρ — фиксированная метрика.

С точки зрения конструктивного объекта многомерный пластинчатый симплекс I типа является результатом счётной процедуры исключений в целом аналогичной процедуре построения таких конструктивных фрактальных множеств как, например, треугольные и квадратные салфетки Серпинского [1, 5]. В качестве изначального множества построения многомерного пластинчатого симплекса I типа выступает n-мерный симплекс, $n \geqslant 3$.

Определение 2. n-мерным $(n-1)$-мерно пластинчатым симплексом I типа, $n \geqslant 3$, называется ограниченное фрактальное множество, представляющее собой объединение $(n+1)$-й конгруэнтной и подобной целому части с коэффициентом подобия $1/2$, а также $(n+1)$-й соединяющей открытой средней части старших граней изначального n-мерного симплекса построения:

$$ {}_{ms}Simp_{/n-1}^{(n)} = \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i \right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} G_i \right), \tag{1} $$

$$ E_i \overset{1/2}{\sim} {}_{ms}Simp_{/n-1}^{(n)}, \quad E_i \bigcap E_j = \varnothing, \quad i \neq j,\ i,j = \overline{1, n+1}, $$

G_i — открытые $(n-1)$-мерные срединно-усечённые симплексы, $i = \overline{1, n+1}$.

Замечание 1. Очевидно, в двумерных аффинных пространствах n-мерный $(n-1)$-мерно пластинчатый симплекс I типа и треугольная салфетка Серпинского I типа [1, 5] являются эквивалентными геометрическими объектами.

Определение 3. $(n-1)$-мерным счётным каркасом I типа в n-мерном аффинном пространстве, $n \geqslant 3$, называется множество A, представляющее собой объединение старших граней ($(n-1)$-граней) изначального и промежуточных n-мерных симплексов построения n-мерного $(n-1)$-мерно пластинчатого симплекса I типа.

[1] В двумерном аффинном пространстве — многоугольник, а именно треугольник.

Множество A может быть представлено в виде *объединения счётного количества составляющих* $(n-1)$*-мерных симплексов* A_i, $i = \overline{1,\infty}$, размерности Хаусдорфа–Безиковича которых совпадают с топологическими и равны $(n-1)$. Отсюда $\alpha_0(A) = \sup\limits_i(\alpha_0(A_i)) = n-1$.

n-мерный $(n-1)$-мерно пластинчатый симплекс I типа, $n \geqslant 3$, можно рассматривать как объединение двух множеств:

- нигде не плотного в V^n, при этом плотного в себе, $(n-1)$-мерного счётного каркаса I типа A;
- нигде не плотного несчётного множества точек, не лежащих на указанном множестве A.

Многомерный пластинчатый симплекс I типа есть нигде не плотное в V^n совершенное множество, каждая точка которого есть точкой конденсации данного множества, имеющее мощность континуума.

Утверждение 1. *$\forall n \geqslant 3$ n-мерный $(n-1)$-мерно пластинчатый симплекс I типа вида* (1) *есть квазигиперфрактал* [1, 2], *т.е. его размерность Хаусдорфа-Безиковича положительна, совпадает с топологической размерностью и принимает значение на единицу меньше топологической размерности пространства:* $\alpha_0({}_{ms}Simp^{(n)}_{/n-1}) = n-1$.

1. *Працьовитий М. В.* Про означення фрактала та фрактальний підхід в дослідженнях розподілів ймовірностей // Фрактальний аналіз та суміжні питання: Зб. наук. праць. — Київ: Ін-т математики НАН Україні; НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — С. 5–26.
2. *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
3. *Резникова Ю. С.* Срединно-усечённые симплексы в аффинных пространствах произвольной мерности // Наук. часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2005. — № 6. — С. 235–242.
4. *Резникова Ю. С.* Срединно-усечённые симплексы в четырёхмерном аффинном пространстве // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 4. — С. 566–570.
5. *Федер Е.* Фракталы. — Москва: Мир, 1991. — 260 с.

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-mail: `yurss(at)mail.ru`

Discontinues solutions to a quasilinear equation with variable coefficients

V. Samoylenko, Yu. Samoylenko

We study problem of finding discontinuous solutions [1, 2] to the equation

$$a_0(x)u_t + b_0(x)uu_x = 0, \tag{1}$$

where $a_0(x)$, $b_0(x)$ are infinitely differentiable functions, $x \in \mathbf{R}^1$, $t \in [0;T]$. The problem appeares while determining main term of asymptotic one phase soliton type solutions for singularly perturbed Korteweg–de Vries with variable coefficients and small dispersion [3] of the following form

$$\varepsilon^2 u_{xxx} = a(x,\varepsilon)u_t + b(x,\varepsilon)uu_x, \tag{2}$$

where functions $a(x,\varepsilon)$, $b(x,\varepsilon)$ can be represented with asymptotic series as follows

$$a(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\varepsilon^k, \quad b(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x)\varepsilon^k,$$

$t \in [0;T]$, $a_k(x)$, $b_k(x) \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^1)$, $k \geqslant 0$.

Constructing asymptotic soliton type solutions for (2) is important problem since Korteweg–de Vries equation is known to have numerous applications in hydrodynamics [4].

Using implicit form of asymptotic one phase soliton type solution to the problem (2), the conditions of existing discontinuous solution to the problem (1) are obtained. Similar conditions for partial differential equations are known as Hugoniot conditions [5].

1. *Hopf E.* On the right weak solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation of first order // J. Math. Mech. — 1969. — Vol. 19, no. 6. — P. 483–487.
2. *Maslov V. P., Omelyanov G. A.* Asymptotic soliton-type solutions with small dispersion // Uspekhi mat. nauk. — 1981. — Vol. 36 (219), no. 2. — P. 63–124.
3. *Samoylenko V. Hr., Samoylenko Yu. I.* Asymptotic soliton-type solutions with small dispersion // Ukr. math. jour. — 2005. — Vol. 57, no. 1. — P. 111–124.
4. *Korteweg D. J., de Vries G.* On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves // Philos. Mag. — 1895. — no. 39. — P. 422–433.
5. *Dobrokhotov S. Yu.* Hugoniot-Maslov chains for solitary vortices of the shallow water equations // Russian J. Math. Phys. — 1999. — Vol. 6, no. 2. — P. 137–173.

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
E-mail: `vsam(at)univ.kiev.ua`

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
E-mail: `yusam(at)univ.kiev.ua`

Слабка збіжність марковської симетрійної випадкової еволюції у багатовимірному просторі

І. В. Самойленко

У просторі $\mathbf{R}^n$ розглянемо частинку, яка стартує в момент часу $t = 0$ з точки $x = (x_i, i = \overline{1,n})$. Початковий напрям руху обирається рівномірно на одиничній n-вимірній сфері S_n з центром в x та відбувається з незалежною від напряму руху швидкістю $v = c\varepsilon^{-1}$, де ε — малий параметр, $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$). Іншими словами, рух відбувається у напрямах векторів

$$s(\theta) = (\cos\theta_1, \sin\theta_1\cos\theta_2, \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3, \ldots,$$
$$\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}, \sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}),$$
$$\theta_{n-1} \in [0, 2\pi), \quad \theta_i \in [0, \pi), \quad i = \overline{1, n-2}.$$

Керуючим процесом є процес Пуасона з параметром $\lambda = \varepsilon^{-2}$. У момент настання пуасонівської події частинка випадковим чином обирає новий напрям руху, що має рівномірний розподіл на сфері S_n з центром в місці знаходження частинки.

Введемо множину $\Theta = \{\theta : s(\theta) \in S_n\}$. Будемо позначати керуючий процес Пуасона $\theta_t^\varepsilon \in \Theta$, марковська симетрійна випадкова еволюція $\xi_t^\varepsilon \in \mathbf{R}^n$ задається співвідношенням

$$\xi_t^\varepsilon := x + v\int_0^t s(\theta_\tau^\varepsilon)d\tau.$$

Теорема 1. *Марковська симетрійна випадкова еволюція ξ_t^ε слабо збігається до процесу ξ_t^0 при $\varepsilon \to 0$:*

$$\xi_t^\varepsilon \Rightarrow \xi_t^0,$$

причому вінерів процес $\xi_t^0 \in \mathbf{R}^n$ задається генератором

$$L^0\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{c^2}{n}\Delta\varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

де $\Delta\varphi(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

1. *Kolesnik A. D.* Weak convergence of the distributions of Markovian random evolutions in two and three dimensions // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. — 2003.— no. 3. — P. 41–52.
2. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. — Singapore: World Sci. Publ., 2005. — 332 p.
3. *Samoilenko I. V.* Markovian random evolution in $\mathbf{R}^n$ // Random Oper. Stoch. Equ. — 2001.— Vol. 9, no. 2. — P. 139–160.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: `isamoil(at)imath.kiev.ua`

Самоподібні множини, самоподібна розмірність і перетворення простору, що зберігають самоподібну розмірність

С. А. Сотникова

Самоподібні «конструкції» в математиці використовувались давно, починаючи від Кантора [2] та докладно вивчалися в роботах Морана та Хатчінсона [3, 4], але і сьогодні відсутня строга теорія самоподібних множин, в першу чергу, це стосується самоподібної розмірності та її властивостей. Доповідь присвячена теорії самоподібних множин та їх властивостей.

Розглядаються обмежені множини простору R^1. Найменший відрізок, що містить множину E, позначається $[E]$, $[E] = [\inf E, \sup E]$.

Означення 1. Множина E називається *самоподібною*, якщо існує скінченна множина перетворень подібності $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $(n \geqslant 2)$ таких, що

$$E = f_1(E) \cup f_2(E) \cup \ldots \cup f_n(E), \tag{1}$$

і при цьому відрізки $[f_i(E)]$ і $[f_j(E)]$ при $i \neq j$ не перекриваються.

Якщо множина E — самоподібна і має місце (1), то

$$\inf E = \inf f_1(E),\ \sup E = \sup f_n(E),\ \sup E_i \leqslant \inf E_{i+1},\ 1 \leqslant i < n.$$

Тоді в R^1 $f_i : x' = k_i x + b_i$, де $b_i = \inf f_i(E)$, $i = \overline{1, n}$, при цьому $k_i = \frac{d(E_i)}{d(E)}$, $E_i = f_i(E)$, $d(E)$ — діаметр множини E, $d(E_i)$ — діаметр i-ї множини. Оскільки $[f_i(E)]$ і $[f_j(E)]$ не перекриваються, то $d(f_i(E)) < d(E)$ і тому $\frac{d(f_i(E))}{d(E)} = k_i < 1$.

Означення 2. Якщо E — самоподібна множина, то найменше число n, при якому має місце рівність (1) називається *показником самоподібності*, при цьому розклад (1) називають *канонічним*, а праву частину рівності називають *структурою самоподібності* множини E.

Лема 1. *Якщо E — самоподібна множина і існує інтервал (a, b) такий, що $(a, b) \subset [E]$ і $(a, b) \cap E = \varnothing$, то канонічний розклад множини E единий.*

Теорема 1. *Якщо для самоподібної множини E, яка має розклад* (1), *існує інтервал (a, b) такий, що $(a, b) \subset [E]$ і $(a, b) \cap E = \varnothing$, то множина E є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.*

Лема 2. *Самоподібна множина не містить ізольованих точок.*

Означення 3. Якщо E — самоподібна множина, для якої має місце канонічний розклад

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n, \quad E \overset{k_i}{\sim} E_i, \quad i = \overline{1, n},$$

то число $\alpha_s(E)$, яке є розв'язком рівняння

$$k_1^x + k_2^x + \ldots + k_n^x = 1,$$

називається *самоподібною розмірністю* множини E.

Рівняння $k_1^x + k_2^x + \ldots + k_n^x = 1$ має єдиний дійсний корінь, причому він є додатним числом, не більшим 1.

Лема 3. *Якщо самоподібна множина E є щільною в $[E]$, то її самоподібна розмірність дорівнює одиниці.*

Самоподібна розмірність самоподібної множини простору R^1 співпадає з розмірністю Хаусторфа-Безиковича.

Означення 4. Перетворення простору (тобто бієктивне відображення простору на себе), яке переводить довільну самоподібну множину в самоподібну множину і при цьому самоподібні розмірності обох співпадають, називається перетворенням, що зберігає самоподібну розмірність.

Самоподібність в просторі R^n, при $n > 1$ є значно складнішою і вимагає детального вивчення.

В доповіді пропонуються результати дослідження перетворень, що зберігають самоподібну розмірність.

1. *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probality distributions and transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension // Ergodic Th. Dynam. Sys. — 2004. — Vol. 24, no. 1. — P. 1–16.
2. *Cantor G.* On the power of perfect sets of points (De la puissance des ensembles parfait de points) // Acta Math. — 1884. — Vol. 4. — P. 381–392.
3. *Moran P. A.* Additive functions of interval and Hausdorff measure // Proc. Cambridge Phill. Soc. — 1946. — Vol. 42. — P. 15–23.
4. *Hutchinson J. E.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. — 1981. — Vol. 30. — P. 713–747.

Краснодонська міська гімназія, Краснодон, Україна
E-mail: `Sotnikova_s(at)front.ru`

Асимптотична еквівалентність динамічних систем

О. М. Станжицький

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
E-mail: `stom(at)univ.kiev.ua`

Побудова функцій розподілу змішуванням зарядом

А. А. Томусяк

В основоположній роботі [1] було встановлено основний принцип побудови сумішей розподілів, а саме функція

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y)dH(y), \tag{1}$$

де $G(x,y)$ для кожного y функція розподілу за змінною x, вимірна функція за змінною y, $H(y)$ — функція розподілу. В [2] ослаблено вимоги на $H(y)$ (вимагається, щоб $H(y)$ була неспадною і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dH(y) = 1$) і останні формулюються як необхідні і достатні умови того, що (1) є функція розподілу. У подальшому узагальнені вимоги практично не використовувались (див., наприклад, [3, 4, 5]) при конструюванні сумішей.

Нами було виявлено, що сформульовані вище умови не є необхідними, а з допомогою формули (1) можна дістати функцію розподілу, коли $H(y)$ не є неспадною. Так коли

$$H(y) = \frac{1}{2-\sqrt{2}}\Big(E(y+1) - \sqrt{2}E(y) + E(y-1)\Big),$$

а $G(x,y)$ — сімейство нормальних розподілів з середнім y і стандартним відхиленням 2σ, тобто

$$G(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-y}{2\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \tag{2}$$

то за умови, що $4\sigma^2 \leqslant \log_2 e$, функція

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(2-\sqrt{2})}\left(\int_{-\infty}^{\frac{x+1}{2\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_{-\infty}^{\frac{x-1}{2\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)$$

є функцією розподілу.

Функцію $H(y)$, для якої $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dH(y) = 1$ будемо називати зарядовою фукнцією.

Якщо $G(x,y)$ — сімейство функцій розподілу додатних випадкових величин, диференційовне за змінною x, і $H(y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n E(y-y_n)$, де $0 < y_1 < \dots < y_n < \dots$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n = 1$, то за умови, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} G'_x(x, y_n) q_n \geqslant 0,$$

функція

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n G(x, y_n) \tag{3}$$

є функція розподілу.

Як приклад, для сімейства

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-xy}, & x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases} \tag{4}$$

і розподілу заряду $q_1, q_2, \dots, q_n$ у точках $0 < y_1 < \dots < y_n$, маємо розподіл

$$\bar{F}(t) = \sum_{k=1}^{n} q_k e^{-y_k x} \tag{5}$$

за умови, що $\sum\limits_{i=1}^{k} q_i y_i \geqslant 0$ $(k = \overline{1, n})$.

Якщо послідовності точок $(n\lambda)$ віднесено послідовність зарядів

$$(q_n) = \big((-1)^{n-1} p^{n-1}(1+p)\big) \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $\lambda > 0$, $|p| < 1$, то, скориставшись сімейством (4), дістанемо розподіл

$$\bar{F}(t) = \frac{(1+p)e^{-\lambda t}}{1 + pe^{-\lambda t}}, \tag{6}$$

а якщо послідовності точок $((n+1)\lambda)$ віднесено послідовність зарядів

$$(q_n) = \left((-1)^n \frac{e}{n!}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

де $\lambda > 0$, то дістанемо розподіл

$$\bar{F}(t) = \exp\{1 - \lambda t - e^{-\lambda t}\}. \tag{7}$$

Досить цікаві розподіли можна отримати, скориставшись сімейством (4) і неперервно диференційовними функціями $H(y)$, для яких $\int\limits_{0}^{+\infty} H'(y)dy = 1$. Для прикладу, скориставшись інтегралами

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \cos bx dx = \frac{\lambda}{\lambda^2 + b^2}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \sin bx dx = \frac{b}{\lambda^2 + b^2},$$

де $\lambda > 0$, $0 < b \leqslant \lambda$, дістанемо розподіли

$$\bar{F}_1(t) = \frac{(\lambda^2 + b^2)(t + \lambda)}{\lambda((t+\lambda)^2 + b^2)}, \quad \bar{F}_2(t) = \frac{\lambda^2 + b^2}{(t+\lambda)^2 + b^2}. \tag{8}$$

Перший з них має нескінченне математичне сподівання, а другий — нескінченну дисперсію.

1. *Robbins H.* Mixture of distributions // Ann. Math. Statistics. — 1948. — Vol. 19. — P. 260–269.
2. *Лукач Е.* Характеристические функции: Пер. с англ. — Москва: Наука, 1979. — С. 364–367.
3. *Robbins H.* Estimation and prediction for mixtures the exponential distribution // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1980. — Vol. 77, no. 5. — P. 2382–2383.
4. *Zaman M. R., Roy M. K., Akher N.* Chi-square mixture of Gamma distribution // J. App. Sci. — 2005. — Vol. 5, no. 9. — P. 1632–1635.
5. *Зорин В. А., Мухин В. И., Гаврина Е. В.* Об одном классе случайных величин // Мат. модел. оптим. упр. — 2009. — № 3. — С. 162–166.

Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського

On RN-groups with a finite supercomplemented subgroup

O. O. Trebenko

Recall that a subgroup A of the group G is called complemented in G if there exists such a subgroup $B \subseteq G$ that $G = AB$ and $A \cap B = 1$. Finite groups in which all subgroups are complemented were first considered by Ph. Hall in 1937. The complete constructive description of such arbitrary (finite and infinite) groups has been obtained noticeably later by N. V. Chernikova (1953). Note that, in view of N. V. Chernikova's Theorem, groups with all subgroups being complemented are solvable (more concretely, metabelian) and locally finite.

A subgroup H of the group G is called supercomplemented in G (V. A. Kreknin, 2005), if each subgroup of G containing H is complemented in G. In [1, 2] and [3, 4] locally graded p-groups and RN-groups with a supercomplemented cyclic p-subgroup respectively were considered. It turned out that such groups are also solvable and locally finite.

Recall also that a group is called locally graded if each its nonidentity finitely generated subgroup has a proper subgroup of finite index (S. N. Chernikov, 1970). RN-groups form a very important and wide subclass of the class of locally graded groups. For example, all solvable and locally solvable, radical (in sense of B. I. Plotkin) and locally radical groups, and also groups of all Kurosh-S. N. Chernikov classes of groups are locally graded.

Following investigations [1]–[4] author obtained the following result.

Theorem 1. *Let G be an RN-group with a finite supercomplemented subgroup H. Then:*

(i) *G is locally finite and solvable;*
(ii) *G is residually finite.*

Next Theorem shows that a requirement for a subgroup H to be of finite order in Theorem 1 is essential.

Theorem 2. *There exist nonsolvable RN-groups with an infinite supercomplemented subgroup.*

1. *Крекнін В. А.* Локально ступенчасті 2-групи з наддоповнюваною циклічною підгрупою // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2005. — Т. 2, № 3. — С. 137–209.
2. *Chernikov N. S., Kreknin V. A., Trebenko O. O.* A generalization of completely factorizable groups // Matematychni Studii. — 2005. — Vol. 23, no. 2. — P. 129–135.
3. *Chernikov N. S., Trebenko O. O.* RN-groups with a supercomplemented cyclic p-subgroup // Bull. Univ. Kiev. Ser. Phys. Math. — 2007. — no. 1. — P. 46–49.
4. *Trebenko O. O.* On groups with a supercomlemented cyclic p-subgroup // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2006. — Т. 3, № 4. — С. 153–164.

Drahomanov National Pedagogical University, Kyiv, Ukraine
E-mail: trebenko(at)gmail.com

Многомерные нелинейные дискретные динамические системы

А. Ф. Турбин, Ю. Д. Жданова

На комплексной плоскости C рассмотрим нелинейную дискретную динамическую систему

$$z_{n+1} = f(z_n) \in C. \tag{1}$$

Исследование репеллеров и аттракторов системы (1) приводит к поразительным по красоте компактным множествам с фрактальной границей.

Наиболее известны множества Г. Жюлиа и Б. Мандельброта [1, 2], когда отображение $f(z) : C \to C$ имеет вид:

$$f(z) = z^2 + c. \tag{2}$$

В докладе рассмотрены нетривиальные обобщения (1) и, в частности, (2), на пространства E^n, $n \geqslant 3$.

В E^4 и E^8 (по крайней мере, на первом этапе) поле комплексных кватернионов естественно заменить на тело (гамильтоновых) кватернионов и на алгебру октонионов Кэли [3, 4] соответственно.

Проблема визуализации решается конструктивно проектированием четырёх- или восьмимерного объекта на, например, любую (!)

плоскость или трёхмерное подпространство (многомерная томография).

Именно так одному из авторов (с участием аспиранта Д. Губайдуллина) в далеком Амурском государственном университете удалось увидеть плоские сечения кватернионных аналогов множеств Г. Жюлиа и Б. Мандельброта [5].

Вместо традиционной алгебраической структуры — поля комплексных чисел C мы рассматриваем в качестве базы n-мерную алгебру действительных гиперкомплексных чисел $\mathrm{Alg}_n\,(R,T)$, где T — структурный тензор алгебры.

Пусть V^n, $n \geqslant 2$, — n-мерное действительное векторное пространство, $\vec{\tau}_1,\ \vec{\tau}_2,\ \ldots,\ \vec{\tau}_n$ — фиксированный базис,

$$T = \left\{t_{ij}^k,\ i,j,k = 1,\ldots,n,\ t_{ij}^k \in R\right\}$$

— тензор валентной структуры $\binom{2}{1}$.

Тензор T вводит на V^n, $n \geqslant 2$, ассоциативное (не обязательно коммутативное) умножение векторов $\vec{x} = x_1\vec{\tau}_1 + x_2\vec{\tau}_2 + \ldots + x_n\vec{\tau}_n$ и $\vec{y} = y_1\vec{\tau}_1 + y_2\vec{\tau}_2 + \ldots + y_n\vec{\tau}_n$ равенством

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\vec{\tau}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\vec{\tau}_j\right) = \sum\sum\sum x_i y_j t_{ij}^k \vec{\tau}_k.$$

Предполагается существование (двусторонней) единицы $\vec{\tau}_0$:

$$\vec{\tau}_0\cdot\vec{x} = \vec{x}\cdot\vec{\tau}_0 = \vec{x}.$$

В алгебре $\mathrm{Alg}_n\,(R,T) = \{V^n(R),+,\cdot,T\}$ корректно определены степени векторов (гиперкомплексных чисел): $\vec{x}^m = \vec{x}\cdot\vec{x}\cdot\ldots\cdot\vec{x}$, а, значит, и полиномы $\vec{f}_m\,(\vec{z}) = \vec{z}^m + \vec{c}_1\cdot\vec{z}^{m-1} + \ldots + \vec{c}_{m-2}\cdot\vec{z}^2 + \vec{c}_{m-1}\cdot\vec{z} + \vec{c}_m$ и даже (при введении банаховой нормы) степенные ряды.

Отсюда имеем многомерный аналог нелинейной дискретной динамической системы (1):

$$\vec{z}_{n+1} = \vec{f}\,(\vec{z}_n) \in \mathrm{Alg}_n\,(R,T) \tag{3}$$

Проблема в том, что даже четырёхмерные алгебры до сих пор не классифицированы.

Препятствием к этому является теорема Фробениуса о конечномерных алгебрах действительных гиперкомплексных чисел с делением [3].

Гиперкомплексное число $\vec{x} = x_1\vec{\tau}_1 + x_2\vec{\tau}_2 + \ldots + x_n\vec{\tau}_n \in \mathrm{Alg}_n\,(R,T)$ назовем целым, если $x_i \in Z$.

В проблеме классификации конечномерных алгебр гиперкомплексных чисел решающую роль мы отдаем кольцам $\mathrm{Alg}_n\,(Z,T)$ целых гиперкомплексных чисел.

Определение 1. Алгебры $\mathrm{Alg}_n(R, T_1)$ и $\mathrm{Alg}_n(R, T_2)$ гиперкомплексных чисел назовём арифметически изоморфными, если они изоморфны как алгебры и кольца $\mathrm{Alg}_n(Z, T_1)$ и $\mathrm{Alg}_n(Z, T_2)$ изоморфны.

В [6] мы приводим двумерную алгебру (и даже поле) эллиптических чисел $Ell_2(R)$, арифметически неизоморфную полю C комплексных чисел, четырёхмерную алгебру (и даже тело) арифметически неизоморфную алгебре (гамильтоновых) кватернионов, и восьмимерную неассоциативную алгебру с делением (алгебру эллиптических октонионов) арифметически неизоморфную алгебре октонионов (чисел Кэли).

Визуализация множеств Г. Жюлиа и Б. Мандельброта показывает, что их группа симметрии — группа отражений, изоморфная группе C_2.

Визуализация эллиптических множеств Г. Жюлиа и Б. Мандельброта показывает, что их группа симметрии — группа, изоморфная группе C_3.

Красивая геометрическая иллюстрация того, что поле C комплексных чисел и поле $Ell_2(R)$ эллиптических чисел арифметически неизоморфны.

В докладе мы приводим двух- и трёхмерные проекции четырёх- и восьмимерных аналогов множеств Г. Жюлиа и Б. Мандельброта в алгебре эллиптических кватернионов и алгебре эллиптических октонионов соответственно.

1. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. — Ижевск: РХД, 2001. — 234 с.
2. *Falconer K. J.* Fractal geometry: Mathematical foundations and applications. — Chichester: John Wiley, 1990. — xxii+288 p.
3. *Курош А. Г.* Лекции по общей алгебре. — Москва: Наука, 1973. — 400 с.
4. *Okubo S.* Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics. — Cambridge Univ. Press, 2005. — 136 p.
5. *Турбин А. Ф.* Мультифрактальные методы сверхглубокой защиты информации // Фрактальний аналіз та суміжні питання: Зб. наук. праць. — Київ: Ін-т математики НАН України; НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — № 1. — С. 27–33.
6. *Турбин А. Ф., Жданова Ю. Д., Павлов Д. Г.* Классификация алгебр гиперкомплексных чисел малых размерностей. — В печати.

Институт математики НАН Украины, Киев, Украина
E-mail: `Turbin(at)imath.kiev.ua`

Государственный университет информационно-коммуникационных технологий, Киев, Украина
E-mail: `yuzhdanova(at)yandex.ru`

Еволюція кореляційних функцій в динаміці Глаубера

Д. Л. Фінкельштейн

Побудовано еволюцію кореляційних функцій, що відповідають динаміці Глаубера. Доведено існування відповідної сильно неперервної стискаючої напівгрупи у певному банаховому просторі. Побудовано еволюцію станів, досліджено їхні ергодичні властивості. Вивчено скейлінг власівського типу для таких систем.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: `fdl(at)imath.kiev.ua`

Асимптотичне розвинення розв'язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням і точками повороту

М. І. Шкіль

У доповіді розглядаються деякі задачі, пов'язані з асимптотичним інтегруванням систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з різного роду виродженням. Зокрема, наявності точок повороту, особливих точок тощо. З використанням «збуреного» характеристичного рівняння побудовано формальні розв'язки для окремих типів систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь і доведено, що ці розв'язки в околі точок повороту є асимптотичними зображеннями «точних» розв'язків розглядуваних систем. Досліджено вироджену систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь у випадку, коли виродженість настає в окремих точках. В околі цих точок побудовано асимптотичні формули для розв'язків зазначених систем, які методом «зшивання» можуть бути продовжені на увесь інтервал зміни аргументу.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

Вгадування відповідей до тестових завдань з математики

О. Школьний

Метою доповіді є прагнення розібратися в суті явища вгадування відповідей до тестових завдань з математики, причинах, які штовхають учнів до цього шляху, а також визначити основні способи якщо не повного подолання, то принаймні мінімізації прагнення розв'язати тестові завдання «нечесним» шляхом. Цікаво також дізнатися, чи є намагання вгадати відповідь закономірним явищем, притаманним усій системі тестування, чи все-таки це, скоріше, остання соломинка, за яку хапається «потопаючий» у морі тесту абітурієнт?

Усі ці запитання стали особливо актуальними у зв'язку з упровадженням МОН України зовнішнього незалежного оцінювання якості знань (далі ЗНО), яке проводить Український центр оцінювання якості освіти (далі УЦОЯО). Тест УЦОЯО покликаний, у першу чергу, адекватно оцінити рівень знань випускника з того чи іншого предмету, встановити градацію, шкалу, за якою можна було би проводити порівняння якості знань, зокрема, під час конкурсного відбору для вступу до вишу.

З моменту появи ЗНО з математики вчительськими і не лише вчительськими кулуарами почали блукати «крамольні» коментарі стосовно того, що оскільки перша та друга частини тесту УЦОЯО перевіряють лише результат розв'язування задачі, а не його процес, то таке тестування не може бути об'єктивним. Дійсно, нібито учень з низьким рівнем математичної підготовки за рахунок вгадування може запросто набрати більшу кількість балів, ніж гарно навчений учень. Буцім-то існують спеціальні «прийомчики», за допомогою яких «натасканий» репетитором двійочник може отримати чи не кращий результат за відмінника.

Насправді, якісна підготовка до тестування має багато складових. Зокрема, на мою думку, окрім змістової складової, слід виділити складову психологічну. Нехтування цією складовою часто є однією з причин низьких результатів навіть гарно навчених випускників під час ЗНО.

Однак, психологічний аспект підготовки до тестування розглядатиметься в доповіді дещо під іншим кутом. Взагалі кажучи, тестування — це своєрідне змагання, поєдинок між тим, хто складає тест і тим, хто його розв'язує. І, як у кожного змагання, дуже важливим (якщо не головним) у ньому є його результат, тобто своєрідна «перемога» над суперником. А для досягнення перемоги слід уміти використовувати не лише свою силу, а і слабкість суперника.

Іншими словами, під час тестування для досягнення максимального результату, тобто задля «перемоги», учень не лише може, а навіть повинен шукати «слабинки» у тестових завданнях з метою економії часу на розв'язування завдань, де таких «слабинок» немає. Це і є ті самі «прийомчики», про які йшлося вище. Тому, на мою думку, вгадування відповідей до тестових завдань є скоріше закономірним, ніж випадковим явищем, оскільки, як це не прикро визнавати, результат тестування для учня найчастіше є значно важливішим, ніж наявність у нього глибоких знань з того чи іншого предмету.

Звісно, тест УЦОЯО готується висококваліфікованими фахівцями, проходить кількаступеневу вичитку та рецензування, а тому завдань зі «слабинками» у ньому мінімальна кількість (принаймні автори в це щиро вірять). Та все одно, оскільки автор завдання і рецензент — люди, яким властиво іноді помилятися, хотілося би виділити основні, типові помилки при створенні тестових завдань, які ведуть до можливості вгадування правильної відповіді. Крім того, під час підготовки до ЗНО з математики вчителям нерідко доводиться самим створювати тренувальні тести, зокрема, для тематичного контролю знань учнів. Тому, на мою думку, зацікавленим слухачам буде тим більше корисно дізнатися про «прийомчики», за допомогою яких особливо кмітливим діткам вдається їх «обдурити» і цим самим спотворити реальні результати оцінювання якості знань.

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

Зміст