

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

Жданов Ренат Зуфарович

ТЕОРЕТИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ТОЧНЫЕ
РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СПИНОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения
и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-матема-
тических наук, профес-
сор ФУЩИЧ В.И.



СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА I. СИММЕТРИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕ- НИЙ ДИРАКА	13
§1. Нелинейные обобщения уравнения Дирака, инвари- антные относительно алгебр $AP(I,3)$, $\tilde{AP}(I,3)$, $AC(I,3)$	13
§2. Редукция и точные решения нелинейного уравне- ния Дирака, инвариантного относительно расши- ренной группы Пуанкаре $\tilde{P}(I,3)$	25
2.1. Введение и постановка задачи	25
2.2. Сводка основных результатов	29
2.3. Анзатцы	32
2.4. Редуцированные уравнения	44
2.5. Решения редуцированных уравнений	48
§3. Симметрия редуцированных уравнений	54
§4. Последовательные редукции пуанкаре-инвариант- ного нелинейного уравнения Дирака	68
§5. О применении метода Ли-Бэклунда к исследованию симметричных свойств уравнения Дирака	93
ГЛАВА II. О СЕМЕЙСТВАХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СПИНОРНОГО, ВЕКТОРНОГО И СКА- ЛЯРНОГО ПОЛЕЙ	99
§1. Редукция и точные решения уравнений, описы- вающих взаимодействие спинорного и скалярного полей	99

§2. Частичная линеаризация классических уравне- ний электродинамики	I09
§3. Линеаризация и общее решение двумерных сис- тем Гейзенберга-Тирринга-Дирака и Максвелла- Дирака	II2
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	II8
ЛИТЕРАТУРА	I20

В В Е Д Е Н И Е

Целый ряд фундаментальных физических процессов имеет существенно нелинейный характер [2I, 3I] . Как следствие этого, математические модели, описывающие физические процессы, тоже являются нелинейными, то есть появляется необходимость изучения нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ). Возникающие при этом значительные сложности связаны с тем, что к нелинейным ДУ, как правило, неприменимы методы классической математической физики /метод разделения переменных, метод Фурье-преобразований и т.п./. Большая эффективность этих методов обеспечивается, в основном, линейностью уравнений математической физики.

То общее, что присуще линейным и нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных (ДУЧП) и обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) современной теоретической и математической физики — это широкая симметрия.

Основы теории симметрии дифференциальных уравнений заложил выдающийся норвежский математик Софус Ли [63] . Им же было положено начало использованию симметричных свойств ДУЧП для построения точных решений.

Применением теории С.Ли для построения частных решений волнового уравнения занимались такие математики как Бэклунд, Пуанкаре, Уиттекер, Бейтмен.

Важнейшие идеи по отысканию инвариантных решений ДУЧП были высказаны Седовым [29] , Биркгофом [I] , Морганом [67].

Итогом этого периода развития теоретико-групповых методов явилась монография Л.В.Овсянникова [23] , в которой на

современном языке изложена теория С.Ли, теория инвариантных решений и построенная им теория частично-инвариантных решений.

Обобщением классической симметрии С.Ли являются:

- нелокальная симметрия Ли-Бэклунда, получившая свою законченную формулировку в работах Н.Х.Ибрагимова [15,17] .
- негеометрическая симметрия систем линейных ДУЧП, теория которой была развита в [31,32] .

Интенсивно развиваемый метод обратной задачи рассеяния, позволивший получить аналитическое описание решений целого ряда двумерных нелинейных ДУЧП [23,30,68], также тесно связан с наличием у этих уравнений широкой симметрии /как правило нелокальной/ [15,23] .

Таким образом, знание симметричных свойств ДУЧП позволяет получать широкие классы его точных решений. Настоящая диссертация посвящена исследованию теоретико-алгебраических свойств и построению точных решений нелинейных многомерных систем спинорных ДУЧП.

Прежде чем перейти к более подробному изложению полученных результатов, сформулируем наиболее важные теоремы и определения.

Определение 0.1. Группа Ли преобразований вида

$$\begin{aligned} x'_\mu &= f_\mu(x, u, a), \\ u'_\nu &= g_\nu(x, u, a), \quad \mu = \overline{1, n}, \quad \nu = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $a = \{a_\alpha, \alpha = \overline{1, l}\}$,

называется группой инвариантности ДУ

$$U(x, u) = 0, \quad (0.2)$$

если множество решений уравнения (0.2) инвариантно по отношению к действию этой группы.

Определение 0.2. Алгеброй Ли группы (0.1) называется векторное пространство, базисом которого являются дифференциальные операторы вида

$$X_{\alpha} = \xi_{\alpha}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \eta_{\alpha}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}, \quad \alpha = \overline{1, \ell}, \quad (0.3)$$

где $\xi_{\alpha}^{\mu} = \left. \frac{\partial f_{\mu}}{\partial a_{\alpha}} \right|_{a=0}, \quad \eta_{\alpha}^{\nu} = \left. \frac{\partial g_{\nu}}{\partial a_{\alpha}} \right|_{a=0}, \quad \mu = \overline{1, n}, \quad \nu = \overline{1, m}.$

снабженное операцией коммутирования

$$X_{\alpha}, X_{\beta} \rightarrow [X_{\alpha}, X_{\beta}] = X_{\alpha} X_{\beta} - X_{\beta} X_{\alpha}.$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Согласно первой теореме Ли [26, 63] между группой Ли преобразований и ее алгеброй Ли существует однозначная связь. Для того, чтобы восстановить группу Ли по ее алгебре Ли, необходимо решить следующую задачу Коши

$$\frac{\partial f_{\mu}}{\partial a_{\alpha}} = \xi_{\alpha}^{\mu}(f, g), \quad \frac{\partial g_{\nu}}{\partial a_{\alpha}} = \eta_{\alpha}^{\nu}(f, g), \quad (0.4)$$

$$f_{\mu}|_{a=0} = x_{\mu}, \quad g_{\nu}|_{a=0} = u_{\nu}, \quad \mu = \overline{1, n}, \quad \nu = \overline{1, m}, \quad \alpha = \overline{1, \ell}.$$

(предполагается, что групповые параметры канонические).

Поскольку в диссертации рассматриваются уравнения первого и второго порядков, будем считать, что в (0.2) входят производные не выше второго порядка.

Сформулируем алгоритм Ли нахождения максимальной симметрии уравнения (0.2).

Теорема 0.1. Дифференциальный оператор

$$X = \xi^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^\nu(x, u) \frac{\partial}{\partial u_\nu} \quad (0.5)$$

принадлежит алгебре Ли инвариантности уравнения (0.2) если и только если

$$\left. X_2 U(u, x) \right|_{U(u, x)=0} = 0, \quad (0.6)$$

где

$$\begin{aligned} X_2 &= X + \zeta_\mu^\nu \frac{\partial}{\partial u_\mu^\nu} + \zeta_{\mu_1 \mu_2}^\nu \frac{\partial}{\partial u_{\mu_1 \mu_2}^\nu}, \\ \zeta_\mu^\nu &= D_\mu(\eta^\nu) - u_{\mu_1}^\nu D_\mu(\xi^{\mu_1}), \\ \zeta_{\mu_1 \mu_2}^\nu &= D_{\mu_2}(\zeta_{\mu_1}^\nu) - u_{\mu_1 \alpha}^\nu D_{\mu_2}(\xi^\alpha), \\ D_\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} + u_\mu^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{\mu \beta}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_\beta^\alpha}, \quad \nu = \overline{1, m}; \mu, \mu_1, \mu_2 = \overline{1, n}, \\ u_\beta^\alpha &= \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_\beta}, \quad u_{\beta_1 \beta_2}^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_{\beta_1} \partial x_{\beta_2}}, \quad \alpha = \overline{1, m}; \beta, \beta_1, \beta_2 = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Определение 0.3. Уравнение (0.6) называется определяющим уравнением для группы инвариантности уравнения (0.2).

Определение 0.4. Скалярная функция $F(x, u)$ называется абсолютным инвариантом группы (0.1), если

$$F(f_\mu(x, u, a), g_\nu(x, u, a)) = F(x, u). \quad (0.7)$$

Теорема 0.2. $F(x, u)$ является инвариантом группы (0.1) если и только если

$$\xi_\alpha^\mu \frac{\partial F}{\partial x_\mu} + \eta_\alpha^\nu \frac{\partial F}{\partial u_\nu} = 0, \quad (0.8)$$

где ξ_α^μ , η_α^ν определяются формулами (0.3).

В дальнейшем будут рассматриваться группы преобразования более частного вида, чем (0.1)

$$\begin{aligned} x'_\mu &= f_\mu(x, a), \quad \mu = \overline{1, n} \\ u'_\gamma &= \tilde{G}_\gamma^{\gamma_1}(x, a) u_{\gamma_1}, \quad \gamma = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (0.9)$$

Базисные операторы алгебры Ли группы (0.9) могут быть записаны в виде [37]

$$X_\alpha = \xi_\alpha^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta_\alpha(x), \quad \alpha = \overline{1, \ell}, \quad (0.10)$$

где $\xi_\alpha^\mu = \left. \frac{\partial f_\mu}{\partial a_\alpha} \right|_{a=0}$, $\eta_\alpha(x) - m \times m$ - матрица вида

$$\eta_\alpha(x) = \left\{ - \left. \frac{\partial \tilde{G}_\gamma^{\gamma_1}}{\partial a_\alpha} \right|_{a=0} \right\}_{\gamma, \gamma_1=1}^m.$$

Используя тот факт, что действие группы инвариантности уравнения переводит решения в другие решения того же уравнения, можно, исходя из частного решения, получать новые классы решений, (операция размножения решений).

Пусть $u_\mu = \phi_\mu(x)$ некоторое решение (0.2) с группой инвариантности (0.9). Тогда формулы

$$u_\mu = \tilde{G}_\mu^{-1} \phi_\gamma(f(x, a)), \quad (0.11)$$

где $\tilde{G}^{-1}$ - обратная к $\tilde{G}$ матрица, дают новое решение ДУ (0.2) [58].

Формулы (0.11) будем называть формулами размножения решений.

Определение 0.5. Решение уравнения (0.2) $u_\mu = \phi_\mu(x)$ будем называть инвариантным H - решением (или просто инвариантным решением), где H - подгруппа группы (0.9), если справедливо равенство

$$\tilde{G}_\mu^{-1\gamma} \phi_\gamma(f(x, b)) = \phi_\mu(x), \quad \mu = \overline{1, m}, \quad (0.12)$$

где $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_{\ell-k}\}$ - набор параметров, определяющих подгруппу H .

Теорема 0.3. Решение $u_\mu = \phi_\mu(x)$, $\mu = \overline{1, m}$ является инвариантным относительно группы H , алгебра Ли которой порождается базисными операторами вида

$$X_\beta = \xi_\beta^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta_\beta(x), \quad \beta = \overline{1, \ell-k}, \quad (0.13)$$

если и только если

$$\phi_\mu(x) = A_\mu^\gamma(x) \varphi_\gamma(\omega_1(x), \dots, \omega_{n-\ell+k}(x)), \quad (0.14)$$

где $\omega_i(x)$ - инварианты группы H , то есть выполнено равенство $\xi_\beta^\mu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\mu} = 0$, $\beta = \overline{1, \ell-k}$, $i = \overline{1, n-\ell+k}$, (0.15)

а $(m \times m)$ матрица $A(x)$ удовлетворяет системе ДУЧП вида

$$\xi_\beta^\mu \frac{\partial A(x)}{\partial x_\mu} + \eta_\beta(x) A(x) = 0, \quad \beta = \overline{1, \ell-k}, \quad (0.16)$$

$\varphi_\gamma(\vec{\omega})$ - произвольные дифференцируемые функции.

Фундаментальная роль в теории инвариантных решений принадлежит следующей теореме, доказательство которой можно найти в [25, 26].

Теорема 0.4. Пусть ДУЧП (0.2) инвариантно относительно группы H . Тогда подстановка в (0.2) решения (0.14), инвариантного относительно группы H , приводит к ДУЧП, в которое входят только

$$\omega_i, \varphi_\gamma(\vec{\omega}), \frac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \omega_i}, \frac{\partial^2 \varphi_\gamma}{\partial \omega_i \partial \omega_j}; \quad i, j = \overline{1, n-\ell+k}; \quad \gamma = \overline{1, m}$$

Следовательно, знание инвариантных решений позволяет уменьшать количество независимых переменных. Это обстоятель-

ство лежит в основе алгоритма построения частных решений систем ДУЧП, используемого в настоящей диссертационной работе.

Процедуру понижения размерности ДУ с помощью инвариантных решений будем называть редукцией ДУ, а получаемое в результате уравнение - редуцированным ДУ.

Широкие классы инвариантных решений были получены для уравнений газовой динамики [14, 39], многомерных нелинейных уравнений для скалярного [38, 55, 56, 66], векторного [35, 58] и спинорного полей [35, 42, 43, 57, 59].

Определение 0.6. Семейство решений уравнения (0.2) вида

$$\begin{aligned} u_{\mu}(x) &= \phi_{\mu}(x, \lambda), \quad \lambda = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r \}, \\ \Lambda_i(\lambda) &= 0, \quad i = \overline{1, r-k}, \quad \mu = \overline{1, m} \end{aligned} \quad (0.17)$$

называется G - неразмножаемым (или просто неразмножаемым), если справедливо равенство

$$\tilde{G}_{\mu}^{-1\gamma}(x, a) \phi_{\gamma}(x, \lambda) = \phi_{\mu}(x, \lambda(\lambda, a)), \quad (0.18)$$

причем $\Lambda_i(\lambda'(\lambda, a)) = 0, \quad i = \overline{1, r-k}$.

Замечание. Из определения следует, что неразмножаемое решение является инвариантным, если $\lambda'_i(\lambda, a) \equiv \lambda_i$. Однако, существуют примеры G - неразмножаемых решений, которые не являются инвариантными.

В дальнейшем будем предполагать, что греческие индексы $\mu, \gamma, \alpha, \beta$ изменяются от 0 до 3, а латинские a, b, c, ℓ, k - от 1 до 3.

Скалярное произведение в евклидовом пространстве с метрикой

$$\delta_{ab} = \begin{cases} 1, & a=b \\ 0, & a \neq b \end{cases}$$

будем обозначать $\vec{A} \cdot \vec{B} = \delta^{ke} A_k B_e$, а скалярное произведение в пространстве Минковского с метрикой

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0, \\ -1, & \mu = \nu = 1, 3, \\ 0, & \mu \neq \nu, \end{cases} \quad (0.19)$$

будем обозначать $a \cdot b = g^{\mu\nu} a_\mu a_\nu$.

Понятие спинора и спинорного представления ввел в математику Э.Картан [18] (см. также [5,13]). На решениях уравнения Дирака

$$[\gamma_\mu p^\mu + m] \psi(x) = 0, \quad (0.20)$$

где $p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}$, $\psi(x)$ - четырехкомпонентная функция, γ_μ - 4 x 4 - матрицы, удовлетворяющие алгебре Клиффорда-Дирака

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2 g_{\mu\nu} \quad (0.21)$$

реализуется спинорное представление группы Пуанкаре $P(1,3)$ [5,9,37], а при $m=0$ - конформной группы $C(1,3)$.

В дальнейшем, мы будем называть $\psi(x)$ четырехкомпонентным спинором, а уравнение (0.21) и его обобщения - системами спинорных лучей.

Определение 0.7. Операторы $\{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$ реализуют представление алгебры Ли $AP(1,3)$ группы Пуанкаре $P(1,3)$, если выполнены коммутационные соотношения

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\alpha} P_\beta - g_{\mu\beta} P_\alpha), \quad (0.22)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha}).$$

На решениях (0.20) реализуется следующее представление алгебры P (I,3)

$$\begin{aligned} P_\mu &= p_\mu, \\ J_{\mu\nu} &= x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (0.23)$$

где $S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$.

Определение 0.8. Операторы $\{P_\mu, J_{\alpha\beta}, D, K_\mu\}$ реализуют представление алгебры Ли конформной группы C (I,3), если выполнены коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = i(-g_{\mu\beta} P_\alpha + g_{\mu\alpha} P_\beta), \\ [K_\mu, K_\nu] &= 0, [K_\mu, J_{\alpha\beta}] = i(-g_{\mu\beta} K_\alpha + g_{\mu\alpha} K_\beta), \\ [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha}), \\ [P_\mu, D] &= i P_\mu, [K_\mu, D] = -i K_\mu, [J_{\mu\nu}, D] = 0, \\ [K_\mu, P_\nu] &= 2i(g_{\mu\nu} D - J_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (0.24)$$

На решениях (0.21) при $m=0$ реализуется следующее представление алгебры $AC(1,3)$

$$\begin{aligned} P_\mu &= p_\mu, J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \\ D &= x_\mu p^\mu + \frac{3}{2}i, K_\mu = 2x_\mu D - (x \cdot x) p_\mu + 2S_{\mu\nu} x^\nu. \end{aligned} \quad (0.25)$$

Расширенная алгебра Пуанкаре порождается операторами $\{P_\mu, J_{\alpha\beta}, D\}$. Коммутационные соотношения, определяющие $A\tilde{P}$ (I,3) можно получить из (0.24).

ГЛАВА I

СИММЕТРИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА

В этой главе получены нелинейные обобщения уравнений Дирака, инвариантные относительно конформной алгебры $AC(I,3)$ и ее подалгебр. Построены все неэквивалентные аназацы для спинорного поля, инвариантные относительно одномерных подгрупп расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(I,3)$, с помощью которых найдены многопараметрические семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака с нелинейностью вида $\lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}$. В четвертом параграфе осуществлена последовательная редукция нелинейного пуанкаре-инвариантного уравнения Дирака к системам ОДУ. Изучена нелокальная симметрия восьмикомпонентного уравнения Дирака в классе операторов, линейно зависящих от первых производных.

§ I. Нелинейные обобщения уравнений Дирака, инвариантные относительно алгебр $AP(I,3)$, $A\tilde{P}(I,3)$, $AC(I,3)$.

Хорошо известно, что максимальной группой симметрии уравнения Дирака с массой является группа Пуанкаре, дополненная трехпараметрической группой Паули-Тушека [7,16]. При массе равной нулю группа симметрии расширяется до конформной группы $C(I,3)$, дополненной семипараметрической группой преобразований в пространстве $(\psi^0, \psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^{0*}, \psi^{1*}, \psi^{2*}, \psi^{3*})$ [16]. Важно отметить, что локальная симметрия не исчерпывает

симметричных свойств уравнения Дирака, так как последнее обладает скрытой (нелокальной) симметрией, которая была исследована в [II, 34] .

В ряде работ [24, 61] рассмотрены нелинейные обобщения уравнения Дирака, сохраняющие релятивистскую инвариантность

- уравнение Дирака-Гейзенберга-Иваненко

$$[\gamma_\mu p^\mu + m + \lambda \gamma_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)] \psi(x) = 0, \quad (I.I.I)$$

- уравнение Дирака-Гюрши

$$[\gamma_\mu p^\mu + \lambda (\bar{\psi} \psi)^{1/3}] \psi(x) = 0, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0. \quad (I.I.2)$$

Уравнение (I.I.2), помимо группы Пуанкаре, допускает группу специальных конформных преобразований и однопараметрическую группу масштабных преобразований. Широкий класс конформно-инвариантных нелинейных уравнений типа Дирака отличных от (I.I.I), (I.I.2), был предложен в [8, 59] .

В этом параграфе описаны все нелинейные уравнения вида

$$\gamma_\mu p^\mu \psi + F(\bar{\psi}, \psi, x) = 0, \quad (I.I.3)$$

инвариантные относительно групп P (I,3), $\tilde{P}$ (I,3), C (I,3). Кроме того, исследованы теоретико-групповые свойства нелинейного спинорного уравнения вида

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) p_\mu \psi(x) = 0, \quad (I.I.4)$$

являющегося аналогом уравнения Эйлера для идеальной жидкости.

Введем обозначения

$$Q_{0a} = (S_{0a} \psi)^\alpha \partial_{\psi^\alpha} + (\bar{\psi} S_{0a})^\alpha \partial_{\bar{\psi}^\alpha},$$

где $S_{0a} = \frac{i}{2} \gamma_0 \gamma_a$, $(\psi)^\alpha$ - α -тая компонента спинора ψ ; ω_{0a} - полный набор инвариантов оператора Q_{0a} ; ω - полный набор инвариантов операторов $\{Q_{0k}, k = \overline{1,3}\}$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Предположим, что справедливо равенство

$$Q_{0a} [\tau_1(\bar{\psi}, \psi) f_1(\omega_{0b}) + \tau_2(\bar{\psi}, \psi) f_2(\omega_{0b})] = 0, a \neq b, \quad (*),$$

где τ_1, τ_2 - функционально независимые инварианты оператора Q_{0a} , не являющиеся инвариантами оператора Q_{0b} , то есть $\{\tau_1, \tau_2\} \notin \omega_{0b}$, f_1, f_2 - дифференцируемые скалярные функции.

Утверждение. Функции f_1, f_2 зависят только от общих для операторов Q_{0a}, Q_{0b} инвариантов.

Доказательство. Не умаляя общности, можно выбрать набор инвариантов оператора Q_{0a} в виде

$$\{\tau_1, \tau_2, \mathcal{R}\}, \quad \text{где} \quad \mathcal{R} \subset \omega_{0a} \cap \omega_{0b}.$$

Предположим, что утверждение неверно, то есть f_i зависят от $\sigma(\bar{\psi}, \psi) \notin \omega_{0a} \cap \omega_{0b}$. Тогда набор $\{\tau_1, \tau_2, \mathcal{R}, \sigma\}$ является базисом в пространстве скалярных функций от $\bar{\psi}, \psi$.

Перепишав условие (*) в эквивалентном виде

$$\tau_1 f_1(\omega_{0b}) + \tau_2 f_2(\omega_{0b}) = F(\tau_1, \tau_2, \mathcal{R})$$

и продифференцировав последнее равенство по ∇ , получаем

$$\tau_1 \frac{\partial f_1}{\partial \nabla} + \tau_2 \frac{\partial f_2}{\partial \nabla} = 0. \quad (**)$$

Если $\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} = 0$, то очевидно $\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} = 0$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, мы можем переписать (жж) в виде

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right) / \left(\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right) = -\tau_1 / \tau_2. \quad (\text{жж})$$

Но выражение в правой части является инвариантом оператора Q_{0a} , функционально независимым с инвариантами из набора ω_{0b} . Следовательно, равенство (жж) противоречиво. Источником противоречия является предположение о том, что $\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \neq 0$. Следовательно, $\frac{\partial f_1}{\partial \sigma} = 0$ откуда $\frac{\partial f_2}{\partial \sigma} = 0$. Лемма доказана.

Переходим к доказательству основного утверждения этого параграфа.

Теорема I.I.I. Уравнение (I.I.3) инвариантно относительно группы Пуанкаре P (I,3) тогда и только тогда, когда

$$F(\bar{\psi}, \psi, x) = [F_1(\omega) + F_2(\omega) \gamma_4 + F_3(\omega) \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_4 \gamma_\mu \psi) + F_4(\omega) S^{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma_4 S_{\mu\nu} \psi)] \psi, \quad (\text{I.I.5})$$

где F_1, F_2, F_3, F_4 - произвольные скалярные функции от $\omega = \{\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_4\psi\}$, $\gamma_4 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что уравнение (I.I.3), без умаления общности, может быть переписано в виде

$$[\gamma_\mu p^\mu + \Phi(\bar{\psi}, \psi, x)] \psi(x) = 0, \quad (\text{I.I.6})$$

где $\Phi(\bar{\psi}, \psi, x)$ - (4 x 4) - матрица.

Разложив матрицу Φ по базису γ - матриц с переменными коэффициентами, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\psi}, \psi, x) = & a(\bar{\psi}, \psi, x) I + b^{\mu}(\bar{\psi}, \psi, x) \gamma_{\mu} + C^{\mu\nu}(\bar{\psi}, \psi, x) S_{\mu\nu} + \\ & + d^{\mu}(\bar{\psi}, \psi, x) \gamma_4 \gamma_{\mu} + e(\bar{\psi}, \psi, x) \gamma_4. \end{aligned} \quad (I.I.7)$$

Далее воспользуемся инфинитезимальным методом С.Ли, изложенным во введении (см. также [26]). Из требования инвариантности относительно группы сдвигов сразу же следует, что

$$\frac{\partial a}{\partial x_{\mu}} = 0, \quad \frac{\partial b^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad \frac{\partial C^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial d^{\mu}}{\partial x_{\nu}} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial x_{\mu}} = 0.$$

Рассмотрим теперь ограничения, накладываемые на коэффициенты $a, b^{\mu}, \dots, e$ требованием инвариантности относительно группы Лоренца $O(1,3)$. Следуя методу С.Ли получаем определяющее уравнение вида

$$Q_{0e} a = 0, \quad Q_{0k} e = 0, \quad (I.I.8)$$

$$Q_{0k} b_{\mu} + b^{\alpha} (g_{\alpha 0} g_{\mu k} - g_{\alpha k} g_{\mu 0}) = 0, \quad (I.I.9)$$

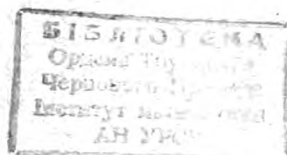
$$Q_{0k} d_{\mu} + d^{\alpha} (g_{\alpha 0} g_{\mu k} - g_{\alpha k} g_{\mu 0}) = 0, \quad (I.I.10)$$

$$\begin{aligned} Q_{0k} C_{\mu\nu} + C^{\alpha\beta} (g_{\alpha k} \delta_{\beta 0}^{\mu\nu} + g_{\beta 0} \delta_{\alpha k}^{\mu\nu} - g_{\alpha 0} \delta_{\beta k}^{\mu\nu} - \\ - g_{\beta k} \delta_{\alpha 0}^{\mu\nu}) = 0; \quad \delta_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = : \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu}. \end{aligned} \quad (I.I.11)$$

Таким образом, для того чтобы доказать теорему, необходимо найти общее решение системы линейных ДУЧП (I.I.8)-(I.I.11).

Из уравнений (I.I.8) сразу же следует, что

$$a = A(\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_4\psi), \quad e = E(\bar{\psi}\psi, \bar{\psi}\gamma_4\psi),$$



в силу того, что a , e являются инвариантами операторов $\{Q_{ok}, k=\overline{1,3}\}$, а множество функционально независимых инвариантов операторов $\{Q_{ok}, k=\overline{1,3}\}$ исчерпывается инвариантами $\bar{\psi}\psi$, $\bar{\psi}\gamma_4\psi$.

Из (I.I.9) получаем

$$Q_{ok} b_0 = b_k, Q_{ok} b_k = b_0, k = \overline{1,3}. \quad (\text{I.I.I2})$$

Общее решение (I.I.I2) может быть записано в виде

$$b_0 = \bar{\psi}\gamma_0\psi f_1(\omega_{ok}) + \bar{\psi}\gamma_0\gamma_4\psi f_2(\omega_{ok}), \quad (\text{I.I.I3})$$

$$b_k = \bar{\psi}\gamma_k\psi f_1(\omega_{ok}) + \bar{\psi}\gamma_k\gamma_4\psi f_2(\omega_{ok}),$$

где f_1, f_2 - произвольные дифференцируемые функции своих переменных. Из (I.I.9) следует, что $Q_{oe_1} b_k = Q_{oe_2} b_k = 0, k \neq i$, откуда согласно лемме, доказанной выше, получаем

$$f_i = f_i(\omega_{ok} \cap \omega_{oe_1} \cap \omega_{oe_2}) = B_i(\omega), i = \overline{1,2}.$$

Окончательно

$$b_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi B_1(\omega) + \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_4\psi B_2(\omega), \quad (\text{I.I.I4})$$

где $\{B_i, i=\overline{1,2}\}$ - произвольные дифференцируемые функции.

Так как коэффициенты d^μ удовлетворяют тем же уравнениям, что и b^μ , то можно сразу записать

$$d_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi D_1(\omega) + \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_4\psi D_2(\omega),$$

где $\{D_i, i=\overline{1,2}\}$ - произвольные дифференцируемые функции.

Из (I.I.II) следует, что

$$Q_{01} C_{02} = 2C_{12}, Q_{01} C_{12} = 2C_{02}.$$

Общее решение этих соотношений может быть записано в виде

$$C_{02} = \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_2 \psi f_1(\omega_{01}) + \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_2 \gamma_4 \psi f_2(\omega_{01}),$$

$$C_{12} = \bar{\psi} \gamma_1 \gamma_2 \psi f_1(\omega_{01}) + \bar{\psi} \gamma_1 \gamma_2 \gamma_4 \psi f_2(\omega_{01}).$$

Кроме того $Q_{02} C_{02} = 0$, откуда согласно лемме $f_i = f_i(\omega_{01} \cap \omega_{02})$.

Из (I.I.II) следует, что $Q_{13} C_{02} = 0$, действительно,

$$Q_{13} C_{02} = (Q_{01} Q_{03} - Q_{03} Q_{01}) C_{02} = 2(Q_{01} C_{32} - Q_{03} C_{12}) = 0,$$

откуда по лемме получаем $f_i = f_i(\omega)$.

Используя полученный результат и уравнения (I.I.II) найдем остальные коэффициенты

$$C_{01} = \frac{1}{2} Q_{02} C_{12} = \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_1 \psi f_1(\omega) + \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_1 \gamma_4 \psi f_2(\omega),$$

$$C_{32} = \frac{1}{2} Q_{03} C_{02} = \bar{\psi} \gamma_3 \gamma_2 \psi f_1(\omega) + \bar{\psi} \gamma_3 \gamma_2 \gamma_4 \psi f_2(\omega),$$

$$C_{03} = \frac{1}{2} Q_{02} C_{23} = \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_3 \psi f_1(\omega) + \bar{\psi} \gamma_0 \gamma_3 \gamma_4 \psi f_2(\omega),$$

$$C_{13} = \frac{1}{2} Q_{01} C_{03} = \bar{\psi} \gamma_1 \gamma_3 \psi f_1(\omega) + \bar{\psi} \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 \psi f_2(\omega).$$

Окончательно имеем $C_{\mu\nu} = \bar{\psi} S_{\mu\nu} \psi C_1(\omega) + \bar{\psi} \gamma_4 S_{\mu\nu} \psi C_2(\omega)$.

где $C_1(\omega)$, $C_2(\omega)$ — произвольные дифференцируемые функции. Мы доказали, что необходимым и достаточным условием того, что уравнение (I.I.3) инвариантно относительно группы P (I,3) является равенство

$$\begin{aligned} F(\bar{\psi}, \psi, x) = & [A(\omega)I + B_1(\omega) \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) + B_2(\omega) \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_4 \psi) + \\ & + C_1(\omega) S^{\mu\nu} (\bar{\psi} S_{\mu\nu} \psi) + C_2(\omega) S^{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma_4 S_{\mu\nu} \psi) + \\ & + D_1(\omega) \gamma_4 \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) + D_2(\omega) \gamma_4 \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_4 \gamma_\mu \psi) + E(\omega) \gamma_4] \psi, \end{aligned}$$

где $A, \dots, E$ — произвольные функции от $\bar{\psi} \psi$, $\bar{\psi} \gamma_4 \psi$. Покажем, что это выражение может быть переписано в виде

$$F = [F_1(\omega)I + F_2(\omega) \gamma_4 + F_3(\omega) \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_4 \gamma_\mu \psi) + F_4(\omega) S^{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma_4 S_{\mu\nu} \psi)] \psi,$$

что и завершит доказательство теоремы. Нетрудно убедиться, что следующие скаляры

$$(\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi)(\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi), (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi)(\bar{\psi} \gamma_4 \gamma^{\mu} \psi), (\bar{\psi} S_{\mu\nu} \psi)(\bar{\psi} S^{\mu\nu} \psi), \\ (\bar{\psi} S_{\mu\nu} \psi)(\bar{\psi} \gamma_4 S^{\mu\nu} \psi), (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_4 \psi)(\bar{\psi} \gamma^{\mu} \gamma_4 \psi)$$

являются инвариантами операторов $\{Q_{ok}, k = \overline{1,3}\}$. Следовательно, существуют такие функции $g_1, \dots, g_5$, что

$$(\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi)(\bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi) = g_1(\omega), (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi)(\bar{\psi} \gamma_4 \gamma^{\mu} \psi) = g_2(\omega), \\ (\bar{\psi} S_{\mu\nu} \psi)(\bar{\psi} S^{\mu\nu} \psi) = g_3(\omega), (\bar{\psi} S_{\mu\nu} \psi)(\bar{\psi} \gamma_4 S^{\mu\nu} \psi) = g_4(\omega), \\ (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_4 \psi)(\bar{\psi} \gamma^{\mu} \gamma_4 \psi) = g_5(\omega); \omega_1 = \bar{\psi} \psi, \omega_2 = \bar{\psi} \gamma_4 \psi.$$

Дифференцируя первое равенство по $\bar{\psi}^{\alpha}$ получаем

$$2 \gamma^{\mu} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi) \psi = (g_{\omega_1}^1 + g_{\omega_2}^1 \gamma_4) \psi$$

Аналогичным образом получаем равенства вида

$$\gamma^{\mu} (\bar{\psi} \gamma_4 \gamma_{\mu} \psi) \psi = (g_{\omega_1}^2 + g_{\omega_2}^2 \gamma_4) \psi - \gamma_4 \gamma^{\mu} (\bar{\psi} \gamma_{\mu} \psi) \psi, \\ 2 S^{\mu\nu} (\bar{\psi} S_{\mu\nu} \psi) \psi = (g_{\omega_1}^3 + g_{\omega_2}^3 \gamma_4) \psi, 2 \gamma_4 \gamma^{\mu} (\bar{\psi} \gamma_4 \gamma_{\mu} \psi) \psi = \\ = (g_{\omega_1}^5 + g_{\omega_2}^5 \gamma_4) \psi, S^{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma_4 S_{\mu\nu} \psi) = (g_{\omega_1}^4 + g_{\omega_2}^4 \gamma_4) \psi - \gamma_4 S^{\mu\nu} (\bar{\psi} S_{\mu\nu} \psi).$$

Подставляя полученные результаты в (I.I.14) получаем требуемое.

Теорема I.I.2. Уравнение (I.I.3) с $F(\bar{\psi}, \psi, x)$ вида (I.I.5) инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, то есть группы Пуанкаре, дополненной однопараметрической группой масштабных преобразований вида

$$x'_{\mu} = x_{\mu} e^{\theta}, \psi'(x') = \psi(x) e^{k\theta}, k, \theta = \text{const}, \quad (\text{I.I.15})$$

если и только если

$$F_i = (\bar{\psi}\psi)^{-1/2k} \tilde{F}_i, \quad i = \overline{1,2},$$

$$F_j = (\bar{\psi}\psi)^{-(1+2k)/2k} \tilde{F}_j, \quad j = \overline{3,4}, \quad (\text{I.I.I6})$$

где $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_4$ — произвольные функции от $\bar{\psi}\psi/\bar{\psi}\gamma_4\psi$.

Доказательство. Используя инфинитезимальный критерий инвариантности получаем, что пуанкаре-инвариантное уравнение (I.I.3) с $F(\bar{\psi}, \psi, x)$ вида (I.I.5) допускает группу (I.I.I5) если и только если выполнены условия

$$\omega_1 F_{\omega_1}^i + \omega_2 F_{\omega_2}^i = -\frac{1}{2k} F^i, \quad i = \overline{1,2},$$

$$\omega_1 F_{\omega_1}^j + \omega_2 F_{\omega_2}^j = \frac{1+2k}{2k} F^j, \quad j = \overline{3,4}; \quad \omega_1 = \bar{\psi}\psi, \quad \omega_2 = \bar{\psi}\gamma_4\psi.$$

Общее решение этих ДУЧП дается формулами

$$F^i = \omega_1^{-1/2k} \tilde{F}^i\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \quad F^j = \omega_1^{-(1+2k)/2k} \tilde{F}^j\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \quad i = \overline{1,2}, \quad j = \overline{3,4}.$$

что и завершает доказательство теоремы I.I.2.

Теорема I.I.3. Уравнение (I.I.3) инвариантно относительно конформной группы C (I,3) тогда и только тогда, когда $F(\bar{\psi}, \psi, x)$ имеет вид (I.I.5), (I.I.6) при $k = -3/2$.

Доказательство. Необходимость: Пусть уравнение (I.I.3) инвариантно относительно группы C (I,3), тогда оно инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре P (I,3) $\subset C$ (I,3) при $k = -3/2$. Отсюда, используя предыдущую теорему, получаем, что $F(\bar{\psi}, \psi, x)$ имеет вида (I.I.5), (I.I.I6) при $k = -3/2$.

Достаточность. Мы установим достаточность теоремы только для группы специальных конформных преобразований, так как инвариантность относительно остальных преобразований группы следует

из теоремы I.I.2. Для этого используем явный вид конечных преобразований группы специальных конформных преобразований [53]

$$\begin{aligned} x'_\mu &= (x_\mu - \theta_\mu x \cdot x) \sigma^{-1}(x), \quad \sigma(x) = 1 - 2\theta \cdot x + (\theta \cdot \theta)(x \cdot x), \\ \psi' &= \sigma(x) (1 - (\gamma \cdot \theta)(\gamma \cdot x)) \psi. \end{aligned} \quad (\text{I.I.I7})$$

Обозначим

$$G(\bar{\psi}, \psi, \psi_1) = \gamma_\mu p^\mu \psi - [(\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2 \gamma_4)(\bar{\psi} \psi)^{1/3} + (\tilde{F}_3 \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) + \tilde{F}_4 S^{\mu\nu} (\bar{\psi} \gamma_\mu S_{\nu\lambda} \psi))(\bar{\psi} \psi)^{-2/3}] \psi.$$

Тогда справедливо следующее тождество

$$G(\bar{\psi}', \psi', \psi'_1) = \sigma^2(x) [1 - (\gamma \cdot \theta)(\gamma \cdot x)] G(\bar{\psi}, \psi, \psi_1).$$

из которого следует, что уравнение $G = 0$ инвариантно относительно группы (I.I.I7). Теорема полностью доказана.

Замечание. Если в (I.I.I6) положить $k = -3/2$, $F_i = 0$, $F_4 = \text{Const}$, то мы получим конформно-инвариантное уравнение Дирака-Гюрши. Кроме того, в полученном классе уравнений содержится конформно-инвариантный аналог уравнения Дирака-Гейзенберга

$$[\gamma_\mu p^\mu + \lambda \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \{(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)\}^{-1/3}] \psi(x) = 0.$$

Перейдем к исследованию симметричных свойств системы нелинейных ДУЧП (I.I.4).

Теорема I.I.4. Максимальная (в смысле С.Ли) алгебра инвариантности системы (I.I.4) порождается операторами вида

$$X = \xi^\mu(x, \bar{\psi}, \psi) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^\alpha(x, \bar{\psi}, \psi) \frac{\partial}{\partial \psi^\alpha} + \bar{\eta}^\alpha(x, \bar{\psi}, \psi) \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}^\alpha}, \quad (\text{I.I.I8})$$

где
$$\xi_\mu = \phi_\mu(\omega, \bar{\psi}, \psi) + \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \phi(\bar{\psi}, \psi, x) - \bar{\psi}(\gamma \cdot x) \psi (\bar{\chi} \gamma_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu \chi) [(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)]^{-1},$$

$$y^\alpha = \chi^\alpha(\omega, \bar{\psi}, \psi), \quad \omega = \left\{ \omega_\mu = x_\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi) - \right. \\ \left. - (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \bar{\psi} (\gamma \cdot x) \psi, \mu = \overline{0, 3} \right\}.$$

$\phi_\mu, \phi, \chi^\alpha$ — произвольные функции своих аргументов.

Доказательство. Согласно методу С. Ли инфинитезимальный оператор симметрии системы ДУЧП (I.I.4) удовлетворяет следующей системе определяющих уравнений

$$X_1 [(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) p_\mu \psi] \Big|_{(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) p_\mu \psi = 0} = 0, \quad (\text{I.I.19})$$

откуда получаем

$$(\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \psi_{x_\mu}^\beta + (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \psi_{x_\mu}^\beta + (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) (y_\mu^\beta + y_{\psi^\alpha}^\beta \psi_{x_\mu}^\alpha + \\ + y_{\bar{\psi}^\alpha}^\beta \bar{\psi}_{x_\mu}^\alpha - \xi_\mu^\alpha \psi_{x_\alpha}^\beta - \psi_{x_\alpha}^\beta (\xi_{\psi^\beta}^\alpha \psi_{x_\mu}^{\beta_1} + \xi_{\bar{\psi}^{\beta_1}}^\alpha \bar{\psi}_{x_\mu}^{\beta_1})) = R (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \psi_{x_\mu}^\beta.$$

где

$$y_\mu^\beta = \frac{\partial y^\beta}{\partial x_\mu}, \quad y_{\psi^\alpha}^\beta = \frac{\partial y^\beta}{\partial \psi^\alpha}, \quad \xi_\mu^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x_\mu}.$$

Приравнявая коэффициенты при $\psi_{x_\beta}^\alpha, \bar{\psi}_{x_\beta}^\alpha$, получаем уравнения на $\xi^\mu, y^\alpha, \bar{y}^\alpha$.

$$\bar{y} \gamma_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma_\mu y - (\bar{\psi} \gamma_\alpha \psi) \xi_\mu^\alpha = 0, \quad (\text{I.I.20}) \\ (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) y_\mu^\beta = 0.$$

Общее решение соотношений (I.I.20) дается формулами (I.I.18), что и завершает доказательство.

Таким образом, уравнение (I.I.4) инвариантно относительно бесконечнопараметрической группы Ли. Это дает возможность строить широкие классы его решений, включающие произвольные функции.

Отметим, что подалгебрами алгебры инвариантности уравнения (I.I.4) являются

а) 20 - мерная алгебра Ли группы $IGL(4)$ с базисными элементами вида

$$P_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad Q_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) (\bar{\psi} \gamma^\nu \psi) + \\ + \left\{ (\gamma_\mu \gamma_\nu \psi)^\alpha \frac{\partial}{\partial \psi^\alpha} - (\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_\nu)^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}^\alpha} \right\}; \quad (I.I.21)$$

б) 4 - мерная алгебра Ли группы специальных преобразований $\tilde{C}(4)$ с базисными элементами

$$K_\mu = x_\mu x_\nu P^\nu - \frac{1}{4} (\bar{\psi} \psi)^{-1/2} (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi) \left[(\gamma \cdot x \psi)^\alpha \frac{\partial}{\partial \psi^\alpha} + (\bar{\psi} \gamma \cdot x)^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}^\alpha} \right]. \quad (I.I.22)$$

Важно отметить тот факт, что эти алгебры реализуют нелинейное представление алгебр Ли $AIGL(4)$, $A\tilde{C}(4)$.

Инвариантность относительно $AIGL(4)$ означает, что уравнение (I.I.4) инвариантно как относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$ (релятивистская инвариантность) так и относительно алгебры Галилея $AG(1,3)$ (нерелятивистская инвариантность) в силу того, что $AP(1,3)$, $AG(1,3)$ подалгебры алгебры $AIGL(4)$. Аналогичным свойством обладают уравнения Эйлера [34] и многомерное уравнение Монжа-Ампера [38].

§ 2. РЕДУКЦИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИРАКА, ИНВАРИАНТНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО РАСШИРЕННОЙ ГРУППЫ ПУАНКАРЕ $\tilde{P}$ (1,3).

2.1. Введение и постановка задачи.

Найти общее решение ДУЧП (даже линейного) удастся лишь в исключительных случаях. Поэтому, важной является задача построения широких классов частных решений, чтобы затем, накладывая на них дополнительные условия, выделять то или иное решение рассматриваемого ДУЧП. Интенсивно развиваемый метод обратной задачи рассеяния, позволил получить аналитическое описание специальных классов точных решений (солитонов) для целого ряда ДУЧП. Однако, уравнения, интегрируемые методом обратной задачи, в подавляющем большинстве случаев являются двумерными, что существенно сужает возможности метода для исследования ДУЧП, описывающих реальные физические процессы, таких как уравнения Максвелла, Дирака, Янга-Миллса и др. Поэтому возникает необходимость применения других алгоритмов для построения точных решений многомерных ДУЧП.

В настоящей работе решается задача построения многопараметрических семейств точных решений нелинейного уравнения Дирака

$$[\gamma_\mu p^\mu + \lambda (\bar{\psi}\psi)^{1/2k}] \psi(x) = 0, \quad (1.2.1)$$

где λ , k — константы, $k \neq 0$.

Отметим, что некоторые частные решения ДУЧП (1.2.1) были получены в [44,46,52,65] с помощью анзатца, предложенного Гейзенбергом [24]

$$\psi(x) = (\gamma^\mu x_\mu f(S) + i g(S)) \chi, \quad (I.2.2)$$

где f , g - скалярные функции, $S = x \cdot x$, χ - постоянный четырехкомпонентный спинор.

Анзатц (I.2.2) был использован для нахождения точных решений двумерного нелинейного уравнения Дирака [45], системы ДУЧП, описывающей взаимодействие спинорного и скалярного полей [47, 48]. Некоторые другие анзатцы были предложены в работах [20, 21, 49, 70, 71]. Все эти решения могут быть получены в рамках метода, излагаемого ниже.

В настоящей работе для нахождения точных решений системы нелинейных уравнений Дирака (I.2.1), используется анзатц вида (0.14), предложенный в [33, 35, 57].

$$\psi^\mu = A^{\mu\gamma}(x) \varphi_\gamma(\vec{\omega}) \quad (I.2.3)$$

или в матричной записи

$$\psi = A(x) \varphi(\vec{\omega}), \quad (I.2.4)$$

где $A(x)$ - (4 x 4) - матрица, $\varphi(\vec{\omega})$ - неизвестный спинор, зависящий от трех новых переменных $\vec{\omega} = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$.

Подставляя анзатц (I.2.4) в (I.2.1) получаем

$$\begin{aligned} & i \gamma_\mu A_{x_\mu} \varphi + i \gamma_\mu \omega_{x_\mu}^i A \varphi \omega_i + \\ & + \lambda (\bar{\varphi} \bar{A}(x) A(x) \varphi)^{1/2\kappa} A \varphi = 0. \end{aligned} \quad (I.2.5)$$

Требуя, чтобы в (I.2.5) входили только новые переменные $\vec{\omega}$, $\varphi(\vec{\omega})$, находим уравнения на $A(x)$, $\vec{\omega}(x)$

$$A^{-1} \gamma_{\mu} A_{x_{\mu}} = F(\vec{\omega}), \quad A^{-1} \gamma_{\mu} \omega_{x_{\mu}}^i A = F_i(\vec{\omega}), \quad (I.2.6)$$

$$\bar{A}(x) A(x) = G(\vec{\omega}),$$

где F , F_i , G - произвольные (4×4) - матрицы.

Если удастся найти частное решение

$$A = A(x), \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}(x)$$

этой системы ДУЧП, то для определения φ получаем уравнение, в которое входят три независимые переменные

$$i F(\vec{\omega}) \varphi + i F_k(\vec{\omega}) \varphi_{\omega_k} + \lambda (\bar{\varphi} G(\vec{\omega}) \varphi)^{1/2k} \varphi = 0$$

На первый взгляд, система ДУЧП (I.2.6) ничуть не проще, чем (I.2.I). Тем не менее, теоретико-алгебраические методы дают эффективный алгоритм для построения широких классов частных решений (I.2.6). Действительно, из теоремы 0.4 следует, что, если Q оператор симметрии уравнения (I.2.I) и решение (I.2.4) является инвариантным относительно группы, генерируемой оператором Q , то подстановка (I.2.4) в (I.2.I) дает уравнение, в которое входят только $\vec{\omega}$, $\varphi(\vec{\omega})$, φ_{ω_i} . Следовательно, достаточным условием того, чтобы $A(x)$, $\vec{\omega}(x)$ удовлетворяли (I.2.6) является выполнение равенств

$$Q A(x) \equiv (\xi^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \eta) A(x) = 0, \quad (I.2.7)$$

$$\xi^{\mu} \frac{\partial \omega^i}{\partial x_{\mu}} = 0, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (I.2.8)$$

Напомним, что (I.2.I) инвариантно относительно алгебры $A\tilde{P}(I, 3)$ с генераторами P_{μ} , $J_{\mu\nu}$, D из (0.25), а при $k=3/2$ - относительно конформной алгебры $AC(I, 3)$ вида (0.25).

Сформулируем теперь общую схему построения решений нелинейного уравнения Дирака (I.2.I). В качестве оператора Q выбираем линейную комбинацию базисных операторов алгебры $A\tilde{P}$ (I,3)

$$Q = C^{\mu\gamma} J_{\mu\gamma} + C^{00} D + C^{\mu} P_{\mu},$$

где $C^{\mu\gamma}$, C^{00} , C^{μ} - константы, $\mu, \gamma = \overline{0,3}$.

Решая систему ДУЧП (I.2.7), (I.2.8) находим анзатцы вида (I.2.4). Подстановка последних в (I.2.I) приводит к ДУЧП, зависящим от трех переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Решая полученные уравнения и подставляя результат в (I.2.4) находим точные решения исходного ДУЧП (I.2.I).

Таким образом, задача, построения точных решений нелинейного уравнения Дирака разбивается на 2 этапа. Содержанием первого из них является интегрирование ДУЧП (I.2.7), (I.2.8) и построение анзатцов (I.2.4). На втором этапе ищутся частные решения редуцированных ДУЧП.

Для реализации этой схемы нужно, прежде всего, построить в явном виде матрицы $A(x)$, удовлетворяющие уравнению (I.2.7), то есть найти частное решение линейной системы I6 ДУЧП первого порядка с переменными коэффициентами. Решить эту систему стандартными методами непросто. Поэтому, воспользовавшись инвариантностью (I.2.I) относительно группы P (I,3), сделаем в (I.2.7) замену

$$A'(x) = \exp \left\{ \sum \right\} A(x), \quad (I.2.9)$$

$$\text{где} \quad \sum = \theta^{\mu\gamma} J_{\mu\gamma} + \theta^{00} D + \theta^{\mu} P_{\mu}. \quad (I.2.10)$$

Причем $\sum$ выбирается таким образом, чтобы уравнение на $A'(x)$ имело наиболее простой вид (более подробно об этом в

пункте 2.3).

2.2. Сводка основных результатов.

Вначале мы приведем точные решения нелинейного уравнения (I.2.I), которые удалось получить описанным методом, а затем перейдем к подробному изложению процедуры их построения. Приводимые многопараметрические семейства решений нелинейного уравнения Дирака (I.2.I) являются неразмножаемыми, указываются только существенно новые решения.

$$I. \quad k \in \mathbb{R}^1,$$

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{\theta}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) \gamma \cdot x\right\} \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma \cdot a)[2a \cdot x + \theta(b \cdot x)^2]\right\} \chi, \quad (I.2.II)$$

χ - произвольный постоянный спинор, θ , θ_μ , a_μ , b_μ - произвольные константы, удовлетворяющие условиям

$$a \cdot a = -1, \quad b \cdot b = 0, \quad a \cdot b = 0. \quad (I.2.I2)$$

Неразмножаемость семейства (I.2.II) с помощью преобразований из группы сдвигов и группы масштабных преобразований вполне очевидна. Докажем, что это свойство выполнено и для группы Лоренца $O(1,3) \subset \tilde{P}(1,3)$. Формула размножения решений с помощью группы преобразований, порождаемой оператором J_{01} , имеет вид

$$\psi_2(x) = \exp\left\{\frac{\alpha}{2} \gamma_0 \gamma_1\right\} \psi_1(x'), \quad \alpha - Const$$

$$x'_0 = x_0 \cosh \alpha + x_1 \sinh \alpha, \quad x'_1 = x_1 \cosh \alpha + x_0 \sinh \alpha, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3$$

Применяя эту формулу, взяв в качестве $\psi_1(x)$ решение (I.2.II), после несложных преобразований получаем новое решение

$$\psi_2(x) = \exp\left\{\frac{\theta}{2}(\gamma \cdot a')(\gamma \cdot b') \gamma \cdot x\right\} \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}'\chi')^{1/2k}(\gamma \cdot a')[2a' \cdot x + \theta(b' \cdot x)^2]\right\} \chi,$$

где

$$a'_0 = a_0 \operatorname{ch} \alpha - a_1 \operatorname{sh} \alpha, a'_1 = a_1 \operatorname{ch} \alpha - a_0 \operatorname{sh} \alpha, a'_2 = a_2, a'_3 = a_3;$$

$$b'_0 = b_0 \operatorname{ch} \alpha - b_1 \operatorname{sh} \alpha, b'_1 = b_1 \operatorname{ch} \alpha - b_0 \operatorname{sh} \alpha, b'_2 = b_2, b'_3 = b_3$$

$$\chi' = \exp \left\{ \frac{\alpha}{2} \gamma_0 \gamma_1 \right\} \chi.$$

Нетрудно убедиться, что параметры a'_μ , b'_μ , θ удовлетворяют условиям (I.2.I2), то есть решение $\psi_2(x)$ вновь принадлежит семейству (I.2.II), что и требовалось доказать.

Инвариантность семейства (I.2.II) относительно других преобразований из группы $O(1,3)$ проверяется совершенно аналогично

2. $k \in \mathbb{R}^1$, $k \neq 1/2$

$$\psi(x) = [(a \cdot x)^2 + (b \cdot x)^2]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) \operatorname{arctg} \frac{a \cdot x}{b \cdot x} \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -i \frac{2k\lambda}{1-2k} (\gamma \cdot b)(\bar{\chi} \chi)^{1/2k} [(a \cdot x)^2 + (b \cdot x)^2]^{(1-2k)/4k} \right\} \chi, \quad (\text{I.2.I3})$$

причем

$$a \cdot a = -1, b \cdot b = -1, a \cdot b = 0, \quad (\text{I.2.I4})$$

$x_\mu = x_\mu + \theta_\mu$, θ_μ — произвольные постоянные, χ — произвольный постоянный спинор.

3. $k = 1/2$

$$\psi(x) = [(a \cdot x)^2 + (b \cdot x)^2]^{-1/4} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) \operatorname{arctg} \frac{a \cdot x}{b \cdot x} \right\} \times$$

$$\times \exp \left\{ -i \lambda \frac{\bar{\chi} \chi}{2(1+\theta^2)} (\gamma \cdot b + \theta \gamma \cdot a) \left[\ln((a \cdot x)^2 + (b \cdot x)^2) + 2\theta \operatorname{arctg} \frac{a \cdot x}{b \cdot x} \right] \right\} \chi, \quad (\text{I.2.I5})$$

$x_\mu = x_\mu + \theta_\mu$; a_μ , b_μ , θ , θ_μ — произвольные константы, удовлетворяющие условию (I.2.I4)

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{4} (\gamma \cdot c)(\gamma \cdot b) b \cdot x \right\} [(\gamma \cdot a + \beta \gamma \cdot b)(a \cdot x + \beta b \cdot x) +$$

$$+ \frac{1}{4} \gamma \cdot c [c \cdot x + (b \cdot x)^2]] \omega^{-1} \exp \left\{ -\frac{i\lambda(\bar{\chi} \chi)}{\beta_1^2 + \beta_2^2} (\beta_1 (\gamma \cdot a + \beta \gamma \cdot b) + \right. \quad (\text{I.2.I6})$$

$$+ \frac{1}{2} \beta_2 \gamma \cdot c) [\beta_1 (a \cdot x + \beta b \cdot x) + \frac{1}{2} \beta_2 (c \cdot x + (b \cdot x)^2)] \omega^{-1} \} \chi,$$

$$\omega = [(a \cdot x) + \beta (b \cdot x)]^2 + \frac{1}{4} [(c \cdot x) + (b \cdot x)^2]^2, \quad x_\mu = x_\mu + \theta_\mu,$$

$\theta_\mu, a_\mu, b_\mu, c_\mu, \beta, \beta_1, \beta_2$ - произвольные константы, удовлетворяющие условиям

$$a \cdot b = b \cdot c = c \cdot a = b \cdot b = 0, \quad a \cdot a = -1, \quad c \cdot c = -4. \quad (\text{I.2.I7})$$

4. $k < 0$

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{4} (\gamma \cdot c) (\gamma \cdot b) b \cdot x \right\} \left\{ [(\gamma \cdot a + \beta \gamma \cdot b) (a \cdot x + \beta b \cdot x) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \gamma \cdot c (c \cdot x + (b \cdot x)^2)] f(\omega) + i g(\omega) \right\} \chi, \quad (\text{I.2.I8})$$

$$g(\omega) = \pm \left(\frac{1+|k|}{|k|} \right)^{1/2} f(\omega) \omega^{1/2} = \mp \left(\frac{1+|k|}{k^2} \right)^{1/2} \left\{ \mp \frac{(k^2+|k|)^{1/2}}{2\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}} \right\}^k \omega^{-k/2},$$

$$\omega = (a \cdot x + \beta b \cdot x)^2 + \frac{1}{4} (c \cdot x + (b \cdot x)^2)^2, \quad x_\mu = x_\mu + \theta_\mu,$$

причем параметры $a_\mu, b_\mu, c_\mu, \theta_\mu, \theta$ удовлетворяют условию (I.2.I7), χ - произвольный постоянный спинор.

Остановимся теперь на специальном случае, когда в (I.2.I) $k = 3/2$. Уравнение (I.2.I) в этом случае инвариантно относительно конформной группы C (I,3) [6I] и, поэтому, используя операцию размножения с помощью группы специальных конформных преобразований, можно получить более широкое семейство решений уравнения (I.2.I) при $k = 3/2$. Соответствующие формулы имеют вид [59]

$$\psi_2(x) = \sigma^{-2}(x) [1 - (\gamma \cdot x)(\gamma \cdot \theta)] \psi_1(x'), \quad (\text{I.2.I9})$$

$$x' = \{ x'_\mu = (x_\mu - \theta_\mu x \cdot x) \sigma^{-1}(x) \}, \quad \sigma(x) = 1 - 2\theta \cdot x + (\theta \cdot \theta)(x \cdot x).$$

Используя в качестве $\psi_1(x)$ решения (I.2.II), (I.2.I3) при $k=3/2$, получаем новые решения конформно-инвариантного уравнения Дирака

$$\psi(x) = \sigma^{-2}(x) [1 - (\gamma \cdot x)(\gamma \cdot \theta)] \exp \left\{ \frac{\theta}{2} (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)(b \cdot x - (b \cdot \theta)(x \cdot x)) \right\} \sigma^{-1}(x) \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi} \chi)^{1/3} \gamma \cdot a [2(a \cdot x - (a \cdot \theta)(x \cdot x)) - (a \cdot \theta)(x \cdot x)] \sigma^{-2}(x) \right\} \chi, \quad (I.2.20)$$

$a_\mu, b_\mu, c_\mu, \theta_\mu$ - удовлетворяют (I.2.I7), χ - произвольный постоянный спинор.

$$\psi(x) = \sigma^{-1/2}(x) [1 - (\gamma \cdot x)(\gamma \cdot \theta)] [(a \cdot x - (a \cdot \theta)(x \cdot x))^2 + (b \cdot x - (b \cdot \theta)(x \cdot x))^2]^{-3/4} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b) \operatorname{arctg} \frac{a \cdot x - (a \cdot \theta)(x \cdot x)}{b \cdot x - (b \cdot \theta)(x \cdot x)} \right\} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{3i\lambda}{2} (\bar{\chi} \chi)^{1/3} [(a \cdot x - (a \cdot \theta)(x \cdot x))^2 + (b \cdot x - (b \cdot \theta)(x \cdot x))^2]^{-1/3} \sigma^{-2/3}(x) \right\} \chi, \quad (I.2.21)$$

a_μ, b_μ, θ_μ - удовлетворяют условию (I.2.I4), χ - произвольный постоянный спинор.

Можно непосредственной проверкой убедиться, что классы решений (I.2.20), (I.2.21) являются неразмножаемыми относительно преобразований из группы C (I,3)

2.3. Анзатцы.

Перейдем теперь к построению анзатцов для нелинейного уравнения Дирака (I.2.I). Прежде, чем решать систему ДУЧП (I.2.7), (I.2.8), упростим ее, используя ранее описанный прием. Для этого нам понадобится формула Кэмпбелла-Хаусдорфа

$$\exp \{ \theta Q_1 \} Q_2 \exp \{ -\theta Q_1 \} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \{ Q_1, Q_2 \}^k, \quad (I.2.22)$$

$$\{ Q_1, Q_2 \}^0 = Q_2, \quad \{ Q_1, Q_2 \}^n = [Q_1, \{ Q_1, Q_2 \}^{n-1}],$$

где Q_1, Q_2 - некоторые операторы.

Центральную роль будет играть следующая лемма.

Лемма. Оператор $Q = C^{\mu\nu} J_{\mu\nu} = A_k M_k + B_l N_l$, $A_k, B_l - \text{Const}$, где $M_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{k\ell m} J_{\ell m}$, $N_l = J_{0l}$ с помощью преобразования (I.2.9), (I.2.10) может быть приведен к виду

$$1) \quad Q' = \alpha J_{01} + \beta J_{23}, \quad \text{если } (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A}^2 - \vec{B}^2)^2 \neq 0,$$

$$2) \quad \propto (J_{01} + J_{12}), \quad \text{если } \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A}^2 - \vec{B}^2 = 0.$$

Доказательство. Введем новые операторы

$$J_a = \frac{i}{2} (M_a + i N_a), \quad K_a = \frac{i}{2} (M_a - i N_a).$$

Легко убедиться, что выполнены коммутационные соотношения

$$[J_a, J_b] = i \epsilon_{abc} J_c, [K_a, K_b] = i \epsilon_{abc} K_c, [J_a, K_b] = 0. \quad (\text{I.2.23})$$

Тогда $Q = a_k J_k + b_l K_l$, где

$$a_k = -B_k - i A_k, \quad b_l = B_l - i A_l.$$

Используя формулы (I.2.22), (I.2.23) получаем

$$Q' = W_1 Q W_1^{-1} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} J_1 + [(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2}]^* K_1 = \\ = \alpha J_{01} + \beta J_{23}, \quad \text{где}$$

$$W_1 = \exp\left\{-i \arctg \frac{a_2}{a_3} J_1\right\} \exp\left\{i \left(\arctg \frac{a_1}{\sqrt{a_2^2 + a_3^2}} + \frac{\pi}{2}\right) J_2\right\} \times \\ \times \exp\left\{-i \arctg \frac{b_2}{b_3} K_1\right\} \exp\left\{i \left(\arctg \frac{b_1}{\sqrt{b_2^2 + b_3^2}} + \frac{\pi}{2}\right) K_2\right\}. \quad (\text{I.2.24})$$

Очевидно, что эти формулы теряют смысл при $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$.

Если $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, то

$$(\vec{A}^2 - \vec{B}^2) - 2i(\vec{A} \cdot \vec{B}) = 0 \iff \vec{A}^2 = \vec{B}^2, \vec{A} \cdot \vec{B} = 0.$$

Следовательно, данный подход применим только для случая I).

Пусть теперь $\vec{A}^2 = \vec{B}^2$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. Из формулы Кэмпбелла-Хаусдорфа следует, что

$$\begin{aligned} \exp\{\theta M_a\} (\vec{A} \cdot \vec{M}) \exp\{-\theta M_a\} &= (\vec{A} \cdot \vec{M}) \cos \theta + A_a M_a (1 - \cos \theta) + \\ &+ \varepsilon_{akl} A_k M_l \sin \theta \quad (\text{по } a \text{ - нет суммирования}), \end{aligned} \quad (\text{I.2.25})$$

$$\begin{aligned} \exp\{\theta M_a\} (\vec{B} \cdot \vec{N}) \exp\{-\theta M_a\} &= (\vec{B} \cdot \vec{N}) \cos \theta + B_a N_a (1 - \cos \theta) + \\ &+ \varepsilon_{ake} B_k M_e \sin \theta, \quad (\text{по } a \text{ - нет суммирования}). \end{aligned} \quad (\text{I.2.26})$$

Используя тождества (I.2.25), (I.2.26), можно убедиться, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} Q' &= W_2 Q W_2^{-1} = W_2 (\vec{A} \cdot \vec{M} + \vec{B} \cdot \vec{N}) W_2^{-1} = \\ &= -(\vec{A} \cdot \vec{A})^{1/2} \text{sign } A_3 (J_{01} + J_{12}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W_2 &= \exp\{\text{arctg} \frac{A_1}{A_2} M_3\} \exp\{\text{arctg} \frac{(A_1^2 + A_2^2)^{1/2}}{A_3} M_1\} \times \\ &\times \exp\left\{\left[\text{arctg} \frac{B_2 (\vec{A} \cdot \vec{A})^{1/2}}{B_1 A_1 - A_2 B_1} + \pi \theta(B_1 A_2 - B_2 A_1)\right] M_3\right\}, \\ \text{sign } x &= \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

Перейдем к доказательству основного утверждения.

Теорема I.2.I. Оператор $Q = \vec{A} \cdot \vec{M} + \vec{B} \cdot \vec{N} + c^{00}D + c^{\mu\mu}P_{\mu}$ с помощью преобразования (I.2.9), (I.2.10) может быть приведен к одному из операторов вида

$$\text{I. } \vec{A} \cdot \vec{B} = 0, \vec{A}^2 = \vec{B}^2$$

$$1) \quad Q' = J_{01} + J_{12} - aD, \quad (\text{I.2.27})$$

$$2) \quad Q' = J_{01} + J_{12} + P_0 + \beta P_3, \quad (\text{I.2.28})$$

$$3) \quad Q' = J_{01} + J_{12} + \beta P_3; \quad (\text{I.2.29})$$

$$\text{II. } (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A}^2 - \vec{B}^2)^2 = 0$$

$$4) \quad Q' = J_{23} - aD, \quad (\text{I.2.30})$$

$$5) \quad Q' = J_{01} + bJ_{23} - aD, \quad (\text{I.2.31})$$

$$6) \quad Q' = J_{01} + bJ_{23} - D - \beta P_0, \quad (\text{I.2.32})$$

$$7) \quad Q = J_{01} + P_2, \quad (\text{I.2.33})$$

$$8) \quad Q' = J_{23} + \alpha P_0 + \alpha_2 P_1; \quad (\text{I.2.34})$$

$$\text{III. } \vec{A} = \vec{B} = \vec{0}$$

$$9) \quad Q' = D, \quad (\text{I.2.35})$$

$$10) \quad Q' = P_0 + P_1, \quad (\text{I.2.36})$$

$$\text{II)} \quad Q' = P_0, \quad (\text{I.2.37})$$

$$\text{I2)} \quad Q' = P_1. \quad (\text{I.2.38})$$

Доказательство. Пусть вначале $\vec{A} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$. Тогда из леммы следует, что существуют операторы W_1 , W_2 вида (I.2.9), (I.2.10) такие, что

$$\text{а) при } \vec{A} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{A} \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{B}$$

$$W_1 Q W_1^{-1} = \alpha (J_{01} + J_{12}) + \theta D + \theta^\mu P_\mu,$$

$$\text{б) при } (\vec{A} \cdot \vec{B})^2 + (\vec{A}^2 - \vec{B}^2)^2 \neq 0$$

$$W_2 Q W_2^{-1} = \alpha J_{01} + \beta J_{23} + \theta D + \theta^\mu P_\mu.$$

Из формул (I.2.7), (I.2.8) видно, что операторы Q и αQ , $\alpha \neq 0$ порождают одни и те же инвариантные решения, поэтому можно считать, что $\alpha = 1$.

Нам понадобятся в дальнейшем следующие формулы, справедливость которых устанавливается с помощью формулы Кэмпбелла-Хаусдорфа,

$$\exp\{i\lambda^\mu P_\mu\} J_{\alpha\beta} \exp\{-i\lambda^\mu P_\mu\} = J_{\alpha\beta} + (\lambda_\beta P_\alpha - \lambda_\alpha P_\beta), \quad (\text{I.2.39})$$

$$\exp\{i\lambda^\mu P_\mu\} D \exp\{-i\lambda^\mu P_\mu\} = D - \lambda^\mu P_\mu, \quad (\text{I.2.40})$$

$$\exp\{i\lambda^\mu P_\mu\} P_\alpha \exp\{-i\lambda^\mu P_\mu\} = P_\alpha. \quad (\text{I.2.41})$$

Рассматриваем случай а)

$$\begin{aligned} Q' \rightarrow Q'' &= \exp\{i\lambda^\mu P_\mu\} (J_{01} + J_{12} + \theta D + \theta^\alpha P_\alpha) \exp\{-i\lambda^\mu P_\mu\} = \\ &= J_{01} + J_{12} + \theta D + \theta^\mu P_\mu - \lambda_0 P_1 + \lambda_1 P_0 - \lambda_1 P_2 + \lambda_2 P_1 - \theta \lambda^\alpha P_\alpha. \end{aligned}$$

При $\theta \neq 0$ мы всегда можем выбрать λ_α так, чтобы

$$Q'' = J_{01} + J_{12} + \theta D,$$

а при $\theta = 0$ так, чтобы

$$Q'' = J_{01} + J_{12} + \beta P_3.$$

Если в последнем операторе $\alpha \neq 0$, то

$$\begin{aligned} Q''' &= \exp\{-i \ln |\alpha| D\} (J_{01} + J_{12} + \alpha P_0 + \beta P_3) \exp\{i \ln |\alpha| D\} = \\ &= J_{01} + J_{12} + (\operatorname{sign} \alpha) P_0 + \frac{\beta}{|\alpha|} P_3. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\alpha > 0$ приходим к оператору (I.2.28), если же $\alpha < 0$, применяем следующее преобразование

$$\begin{aligned} Q''' \rightarrow Q'''' &= \exp\{i\pi J_{13}\} (J_{01} + J_{13} - P_0 + \\ &+ \frac{\beta}{|\alpha|} P_3) \exp\{-i\pi J_{13}\} = -J_{01} - J_{12} - P_0 - \frac{\beta}{|\alpha|} P_3. \end{aligned} \quad (\text{I.2.42})$$

Умножив полученный оператор на -1 , получаем случай (I.2.28).

Перейдем к случаю (б), если $\alpha \neq 0$, то, разделив на α и преобразовав оператор Q согласно (I.2.39) - (I.2.41) получаем

$$\begin{aligned} Q' &= \exp\{i \lambda^\nu P_\nu\} (J_{01} + b J_{23} + \theta D + \theta^\mu P_\mu) \exp\{-i \lambda^\nu P_\nu\} = \\ &= J_{01} + (\lambda_1 P_0 - \lambda_0 P_1) + b J_{23} + b (\lambda_3 P_2 - \lambda_2 P_3) + \theta D - \theta \lambda^\mu P_\mu + \theta^\mu P_\mu. \end{aligned}$$

При $\theta = -a = \pm 1$ и $a^2 + b^2 \neq 0$ всегда можно выбрать λ_μ такие, что

$$Q' = J_{01} + b J_{23} - a D,$$

при $\theta = \pm 1$ можно выбрать λ_μ так, чтобы

$$Q' = J_{01} + b J_{23} \pm D - \beta P_0, \quad (\text{I.2.43})$$

при $\theta = b = 0$ существуют λ_μ такие, что

$$Q' = J_{01} + P_2.$$

Для того, чтобы из (I.2.43) получить (I.2.32) в случае $\theta = 1$, необходимо применить преобразование (I.2.42) с последующим умножением на $-I$.

При $\alpha = 0$, используя формулы (I.2.39)–(I.2.41), убеждаемся, что оператор Q может быть приведен к одному из операторов вида

$$Q' = J_{23} - aD, \text{ при } \theta \neq 0,$$

$$Q' = J_{23} + \alpha_1 P_0 + \alpha_2 P_1, \text{ при } \theta = 0$$

Нам осталось рассмотреть случай $\vec{A} = \vec{B} = \vec{0}$, то есть

$$Q = \theta D + \theta^\mu P_\mu.$$

Легко убедиться, что при $\theta \neq 0$

$$\exp\left\{\frac{i}{\theta} \theta^\mu P_\mu\right\} (\theta D + \theta^\mu P_\mu) \exp\left\{-\frac{i}{\theta} \theta^\mu P_\mu\right\} = \theta D$$

При $\theta = 0$, анализируя три возможных случая $\theta_\mu \theta^\mu = 0$, $\theta_\mu \theta^\mu < 0$, $\theta_\mu \theta^\mu > 0$, получаем операторы (I.2.36)–(I.2.38). Теорема доказана.

Замечание 1. Доказательство теоремы опирается только на коммутационные соотношения алгебры $A\tilde{P}$ (I,3) и не зависит от ее конкретного представления.

Замечание 2. Из доказательства видно, что решения, инвариантные относительно операторов (I.2.27)–(I.2.38), будучи размноженными с помощью конечных преобразований из расширенной группы Пуанкаре, исчерпывают собой множество $\tilde{P}$ (I,3) – инвариантных решений.

Доказанная теорема существенно облегчает задачу нахождения анзатцов, так как, вместо интегрирования системы (I.2.7), (I.2.8) с оператором Q общего вида (I.2.6), достаточно найти частное решение этой системы с операторами (I.2.27)-(I.2.38), что значительно проще.

Для примера рассмотрим уравнение (I.2.7) с оператором (I.2.30), то есть матрица $A(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(J_{23} - aD)A(x) = 0 \quad \text{или}$$

$$x_2 A_{x_3} - x_3 A_{x_2} + \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 A - a x_\mu A_{x_\mu} - a k A = 0. \quad (\text{I.2.44})$$

Частное решение (I.2.44) ищем в виде

$$A(x) = f(x) \exp \{ g(x) \gamma_2 \gamma_3 \}, \quad (\text{I.2.45})$$

Подставляя (I.2.45) в (I.2.44) получаем

$$x_2 f_{x_3} - x_3 f_{x_2} - a x_\mu f_{x_\mu} - a k f = 0,$$

$$x_2 g_{x_3} - x_3 g_{x_2} - a x_\mu g_{x_\mu} + \frac{1}{2} = 0.$$

Частное решение последней системы ДУЧП дается формулами

$$f(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-k/2}, \quad g(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}.$$

Окончательно $A(x) = (x_2^2 + x_3^2)^{-k/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\}.$

Подобным же образом находим матрицы $A(x)$, соответствующие всем операторам (I.2.27)-(I.2.38)

$$\text{I. } a \neq 0, \quad A(x) = (x_0 - x_2)^{-k} \exp \left\{ \frac{1}{2a} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) \ln(x_0 - x_2) \right\}, \quad (\text{I.2.46})$$

$$a = 0, \quad A(x) = \exp \left\{ \frac{x_1}{2(x_0 - x_2)} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) \right\}, \quad (\text{I.2.47})$$

$$2. \quad A(x) = \exp\left\{\frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) (x_2 - x_0)\right\}, \quad (\text{I.2.48})$$

$$3. \quad A(x) = \exp\left\{\frac{x_3}{2\beta} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0)\right\}, \quad (\text{I.2.49})$$

$$4. \quad A(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \arctg \frac{x_2}{x_3}\right\} (x_2^2 + x_3^2)^{-k/2}, \quad (\text{I.2.50})$$

$$5. \quad a \neq -1, \quad A(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \exp\left\{\frac{1}{2(a+1)} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \arctg \frac{x_2}{x_3}\right\}, \quad (\text{I.2.51})$$

$$a = -1, \quad A(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \exp\left\{-\frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 - x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \arctg \frac{x_2}{x_3}\right\}, \quad (\text{I.2.52})$$

$$6. \quad A(x) = (2x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2} \exp\left\{\frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_1 \ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \arctg \frac{x_2}{x_3}\right\}, \quad (\text{I.2.53})$$

$$7. \quad A(x) = \exp\left\{\frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1)\right\}, \quad (\text{I.2.54})$$

$$8. \quad A(x) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \arctg \frac{x_2}{x_3}\right\}, \quad (\text{I.2.55})$$

$$9. \quad A(x) = x_0^{-k} I, \quad (\text{I.2.56})$$

$$10. \quad A(x) = I, \quad (\text{I.2.57})$$

$$11. \quad A(x) = I, \quad (\text{I.2.58})$$

$$12. \quad A(x) = I. \quad (\text{I.2.59})$$

I - единичная (4 x 4) - матрица.

Для того, чтобы найти инвариантные переменные, необходимо проинтегрировать систему ДУЧП (I.2.8), где $\xi^{\mu}(x)$ - коэффициенты операторов (I.2.27)-(I.2.38). Интегрирование системы (I.2.8) проводится стандартными методами теории линейных ДУЧП, мы приводим результат в виде таблицы.

Таблица I.

н/п	$\omega_1(x)$	$\omega_2(x)$	$\omega_3(x)$
I.1.	$(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2)x_3^{-2}$	$(x_0 - x_2)x_3^{-3}$	$ax_1(x_0 - x_2)^{-1} \ln(x_0 - x_2)$
I.2.	$x_0 - x_2$	x_3	$x_0^2 - x_1^2 - x_3^2$
2.	$x_3 + \beta(x_0 - x_2)$	$2x_1 + (x_0 - x_2)^2$	$3x_3 + 3x_1(x_0 - x_2) + (x_0 - x_2)^3$
3.	$x_0 - x_2$	$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$	$\beta x_1 - (x_0 - x_2)x_3$
4.	$x_0 x_1^{-1}$	$\ln(x_2^2 + x_3^2) + 2 \arctg \frac{x_2}{x_3}$	$(x_2^2 + x_3^2)(x_0^2 - x_1^2)^{-1}$
5.1.	$(x_0^2 - x_1^2)^{-a-1} \times (x_0 + x_1)^{2a}$	$(x_0^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_3^2)^{-1}$	$b \ln(x_2^2 + x_3^2) + 2a \arctg \frac{x_2}{x_3}$
5.2.	$x_0 + x_1$	$(x_0^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_3^2)^{-1}$	$b \ln(x_2^2 + x_3^2) - 2 \arctg \frac{x_2}{x_3}$
5.3.	$x_0^2 - x_1^2$	$x_2^2 + x_3^2$	$b \ln(x_0 + x_1) + \arctg \frac{x_2}{x_3}$

И/П	$\omega_1(x)$	$\omega_2(x)$	$\omega_3(x)$
6.	$(2x_0+2x_1+\beta) \times$ $\times \exp\{2(x_1-x_0)\beta^{-1}\}$	$(2x_0+2x_1+\beta) \times$ $\times (x_2^2+x_3^2)^{-1}$	$b \ln(x_2^2+x_3^2) +$ $+ 2 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3}$
7.	$x_0^2 - x_1^2$	$\ln(x_0+x_1) - x_2$	x_3
8.	$x_0^2 + x_3^2$	$\operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} +$ $+ \beta_1 x_0 + \beta_2 x_1$	$\alpha_2 x_0 + \alpha_1 x_1$
9.	$x_1 x_0^{-1}$	$x_2 x_0^{-1}$	$x_3 x_0^{-1}$
10.	$x_0 + x_1$	x_2	x_3
11.	x_1	x_2	x_3
12.	x_0	x_1	x_3

$$-\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 1$$

Подставляя эти результаты в формулу (I.2.3) получаем набор $\tilde{P}$ (I,3) - инвариантных анзацтов для нелинейного уравнения Дирака (I.2.I)

$$I.1 \quad \psi(x) = (x_0 - x_2)^{-k} \exp\left\{\frac{1}{2a} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) \ln(x_0 - x_2)\right\} \cdot \psi(\vec{\omega}_{1.1}), \quad (I.2.60)$$

$$I.2. \quad \psi(x) = \exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0 - x_2)} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0)\right\} \psi(\vec{\omega}_{1.2}), \quad (I.2.61)$$

$$2. \quad \psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) (x_2 - x_0)\right\} \psi(\vec{\omega}_2), \quad (I.2.62)$$

$$3. \quad \psi(x) = \exp \left\{ \frac{x_3}{2\beta} \gamma_1 (\gamma_2 - \gamma_0) \right\} \varphi(\vec{\omega}_3), \quad (\text{I.2.63})$$

$$4. \quad \psi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} (x_2^2 + x_3^2)^{-k/2} \varphi(\vec{\omega}_4), \quad (\text{I.2.64})$$

$$5.1. \quad \psi(x) = \exp \left\{ \frac{\ln(x_0 + x_1)}{2(1+a)} \gamma_0 \gamma_1 - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \times \quad (\text{I.2.65}) \\ \times (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \varphi(\vec{\omega}_{5.1}),$$

$$5.2. \quad \psi(x) = (x_0^2 - x_1^2)^{-k/2} \exp \left\{ -\frac{\ln(x_0 - x_1)}{4} \gamma_0 \gamma_1 - \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \varphi(\vec{\omega}_{5.2}), \quad (\text{I.2.66})$$

$$5.3. \quad \psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \varphi(\vec{\omega}_{5.3}), \quad (\text{I.2.67})$$

$$6. \quad \psi(x) = (2x_0 + 2x_1 + \beta)^{-k/2} \exp \left\{ \frac{1}{4} \gamma_0 \gamma_1 \ln(2x_0 + 2x_1 + \beta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \varphi(\vec{\omega}_6), \quad (\text{I.2.68})$$

$$7. \quad \psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1 \ln(x_0 + x_1) \right\} \varphi(\vec{\omega}_7), \quad (\text{I.2.69})$$

$$8. \quad \psi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_3} \right\} \varphi(\vec{\omega}_8), \quad (\text{I.2.70})$$

$$9. \quad \psi(x) = x_0^{-k} \varphi(\vec{\omega}_9), \quad (\text{I.2.71})$$

$$10. \quad \psi(x) = \varphi(\vec{\omega}_{10}), \quad (\text{I.2.72})$$

$$11. \quad \psi(x) = \varphi(\vec{\omega}_{11}), \quad (\text{I.2.73})$$

$$12. \quad \psi(x) = \varphi(\vec{\omega}_{12}), \quad (\text{I.2.74})$$

где $\vec{\omega}_N$ — обозначает набор инвариантов из таблицы I, стоя-

щий под номером N .

Таким образом, задача построения $\tilde{P}$ (I,3) инвариантных анзатцов полностью решена.

2.4. Редуцированные уравнения.

Подстановка анзатцов (I.2.60)-(I.2.74) приводит к редукции числа независимых переменных на единицу, то есть полученные уравнения будут зависеть только от трех независимых переменных, а именно от ω_1 , ω_2 , ω_3 . Опуская довольно громоздкие выкладки, связанные с подстановкой выражений в уравнение (I.2.I), выпишем редуцированные уравнения

$$\begin{aligned} \text{I.I.} \quad & k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + [(\gamma_0 - \gamma_2)(\omega_1 + a^{-2}\omega_2^2\omega_3^2) + (\gamma_0 + \gamma_2)\omega_2^2 - \\ & - 2a^{-1}\gamma_1\omega_3\omega_2^2 - 2\gamma_3\omega_1\omega_2] \varphi_{\omega_1} + [(\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2 - \\ & - \gamma_3\omega_2^2] \varphi_{\omega_2} + [a\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_0)(\omega_3 + 1)] \varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \end{aligned} \quad (\text{I.2.75})$$

$$\begin{aligned} \text{I.2.} \quad & \frac{1}{2}\omega_1^{-1}(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi + (\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_2} + \\ & + [(\gamma_0 + \gamma_2)\omega_1 + (\gamma_0 - \gamma_2)\omega_3\omega_1^{-1}] \varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \end{aligned} \quad (\text{I.2.76})$$

$$\begin{aligned} 2. \quad & [\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)] \varphi_{\omega_1} + 2\gamma_1\varphi_{\omega_2} + \frac{3}{2}(2\gamma_2 + \\ & + (\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2) \varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \end{aligned} \quad (\text{I.2.77})$$

$$\begin{aligned} 3. \quad & \frac{1}{2\beta}\gamma_4(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + (\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + [(\gamma_0 + \gamma_2)\omega_1 - \frac{2}{\beta}\gamma_1\omega_3 + \\ & + (\gamma_0 - \gamma_2)(\beta^{-2}\omega_3^2 + \omega_2)\omega_1^{-1}] \varphi_{\omega_2} + (\beta\gamma_1 - \gamma_3\omega_1)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \end{aligned} \quad (\text{I.2.78})$$

$$4. \frac{1}{2}(1-2k)\gamma_3\varphi + (\omega_1\omega_3)^{1/2}(\gamma_0 - \gamma_1\omega_1)\varphi_{\omega_1} + 2(\gamma_3 + a\gamma_2)\varphi_{\omega_2} + \\ + [2\gamma_3 - (\gamma_0 + \gamma_1\omega_1)\omega_3^{1/2}\omega_1^{-1/2}]\omega_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.79)$$

$$5.1. [-k(\gamma_0 \operatorname{ch} \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \operatorname{sh} \ln \omega_1^{1/2(a+1)}) + \frac{1}{2(a+1)}(\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1^{-1/2(a+1)} + \\ + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_1^{1/2}]\varphi - 2(a+1)(\gamma_0 \operatorname{ch} \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \operatorname{sh} \ln \omega_1^{1/2(a+1)}) \times \\ \times \omega_1\varphi_{\omega_1} + 2[\omega_2(\gamma_0 \operatorname{ch} \ln \omega_1^{1/2(a+1)} - \gamma_1 \operatorname{sh} \ln \omega_1^{1/2(a+1)}) - \\ - \omega_2^{3/2}\gamma_3]\varphi_{\omega_2} + 2(a\gamma_2 + b\gamma_3)\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.80)$$

$$5.2. [-k(\gamma_0 \operatorname{ch} \ln \omega_1^{1/2} - \gamma_1 \operatorname{sh} \ln \omega_1^{1/2}) + \frac{1}{4}(\gamma_0 - \gamma_1)\omega_1^{1/2} + \\ + \frac{1}{2}\gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi + (\gamma_0 + \gamma_1)\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1} + 2\omega_2(\gamma_0 \operatorname{ch} \ln \omega_1^{1/2} - \\ - \gamma_1 \operatorname{sh} \ln \omega_1^{1/2} - 2\gamma_3\omega_2^{1/2})\varphi_{\omega_2} + 2\omega_2^{1/2}(b\gamma_3 - \gamma_2)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.81)$$

$$5.3. \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_3\omega_2^{-1/2})\varphi + [\gamma_0(\omega_1 + 1) + \gamma_1(\omega_1 - 1)]\varphi_{\omega_1} + \\ + 2\gamma_3\omega_2^{-1/2}\varphi_{\omega_2} + [b(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_2\omega_2^{-1/2}]\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.82)$$

$$6. \frac{1}{2}[(1-2k)(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_3\omega_2^{1/2}]\varphi + 2\omega_1[(\beta - 1)\gamma_0 + (\beta + 1)\gamma_1]\varphi_{\omega_1} + \\ + 2\omega_2(\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_3\omega_2^{1/2})\varphi_{\omega_2} + 2\omega_2^{1/2}(\gamma_2 + b\gamma_3)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.83)$$

$$7. \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + [\gamma_0(\omega_1 + 1) + \gamma_1(\omega_1 - 1)]\varphi_{\omega_1} + \\ + (\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2)\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.84)$$

$$8. \frac{1}{2}\gamma_3\omega_1^{-1/2}\varphi + 2\gamma_3\omega_1^{1/2}\varphi_{\omega_1} + (\beta_1\gamma_0 + \beta_2\gamma_1 + \gamma_2\omega_1^{-1/2})\varphi_{\omega_2} + \\ + (\alpha_2\gamma_0 + \alpha_1\gamma_1)\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.85)$$

$$9. \quad -k\gamma_0\varphi + (\gamma_a - \gamma_0\omega_a)\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.86)$$

$$10. \quad (\gamma_0 + \gamma_1)\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.87)$$

$$11. \quad \gamma_a\varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.88)$$

$$12. \quad \gamma_0\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}, \quad (I.2.89)$$

где $\varphi_{\omega_a} = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_a}$, $a = \overline{1,3}$.

Частное решение одного из уравнений (I.2.75)-(I.2.89) посредством формул (I.2.60)-(I.2.74) дает частное решение нелинейного уравнения Дирака (I.2.1). Для нахождения частных решений систем ДУЧП (I.2.75)-(I.2.89) мы осуществим (там где это возможно) прямую редукцию этих уравнений к системам ОДУ.

Положим в уравнении (I.2.75) $\varphi = \varphi(\omega_2)$, тогда имеем

$$k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + [(\gamma_0 - \gamma_2)\omega_2 - \gamma_3\omega_2^2]\varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.90)$$

Аналогично, если выбрать $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то

$$k(\gamma_2 - \gamma_0)\varphi + [\alpha\gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_0)(\omega_3 + 1)]\varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.91)$$

(I.2.90), (I.2.91) - это нелинейные системы ОДУ.

Уравнение (I.2.76) приводит к следующей системе ОДУ

$$(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi_{\omega_1} + \frac{1}{2}\omega_1^{-1}(\gamma_0 - \gamma_2)\varphi = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.92)$$

Из (I.2.77) получаем

$$[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)]\varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k}\varphi, \quad (I.2.93)$$

$$2\gamma_1 \varphi_{\omega_2} = i\lambda (\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.94)$$

Система (I.2.78) редуцируется к системе ОДУ вида

$$2\beta(\gamma_0 - \gamma_2) \varphi_{\omega_1} + \gamma_4(\gamma_2 - \gamma_0) \varphi = 2i\beta(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.95)$$

Уравнение (I.2.79) дает следующую систему ОДУ

$$\frac{1}{2}(1-2k)\gamma_3 \varphi + 2(\gamma_3 + a\gamma_2) \varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.96)$$

Уравнения (I.2.80), (I.2.81) к ОДУ редуцировать не удастся.

(I.2.82), (I.2.83) приводят к системам ОДУ вида

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_3 \omega_2^{-1/2}) \varphi + 2\gamma_3 \omega_2^{-1/2} \varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.97)$$

$$\frac{1}{2}[(1-2k)(\gamma_0 + \gamma_1) + \gamma_3 \omega_2] \varphi + 2\omega_2(\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_3 \omega_2^{1/2}) \varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.98)$$

Из (I.2.84) получаем

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1) \varphi + [(\gamma_0 + \gamma_1) \omega_1 + \gamma_0 - \gamma_1] \varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.99)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1) \varphi + (\gamma_0 + \gamma_1 - \gamma_2) \varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.100)$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1) \varphi + \gamma_3 \varphi_{\omega_3} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi. \quad (I.2.101)$$

(I.2.85) дает систему ОДУ вида

$$\frac{1}{2} \omega_1^{-1/2} \gamma_3 \varphi + 2\omega_1^{1/2} \gamma_3 \varphi_{\omega_1} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi. \quad (I.2.102)$$

Уравнения (I.2.86)–(I.2.89) редуцируются к следующим системам ОДУ

$$-k\gamma_0 \varphi + (\gamma_a - \gamma_0 \omega_a) \varphi_{\omega_a} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.103)$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1) \varphi_{\omega_1} = i\lambda (\bar{\varphi} \varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.104)$$

$$\gamma_a \varphi_{\omega_a} = i\lambda (\bar{\varphi} \varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.105)$$

$$\gamma_0 \varphi_{\omega_1} = i\lambda (\bar{\varphi} \varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (\text{по } a - \text{ нет суммирования}) \quad (I.2.106)$$

Таким образом, симметричные свойства нелинейного уравнения Дирака дают возможность свести задачу нахождения точных решений этого уравнения к существенно более простой задаче - интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для их решения могут быть применены различные (в том числе и численные) методы.

2.5. Решения редуцированных ОДУ.

Мы будем рассматривать только те системы ОДУ, решение которых удастся получить в явном виде.

Общее решение (I.2.94) имеет вид

$$\varphi(\omega_2) = \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} \gamma_1 \omega_2 \right\} \chi, \quad (I.2.107)$$

χ - произвольный постоянный спинор.

Подставляя полученный результат в формулу (I.2.62), получаем решение уравнения Дирака (I.2.1)

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} (\gamma_0 - \gamma_2) (x_0 - x_2) \right\} \exp \left\{ -\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} \gamma_1 [2x_1 + (x_0 - x_2)^2] \right\} \chi. \quad (I.2.108)$$

Обратимся теперь к уравнению (I.2.96)

$$\frac{1}{2} (1-2k) \gamma_3 \varphi + 2(\gamma_3 + a\gamma_2) \varphi_{\omega_2} = i\lambda (\bar{\varphi} \varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.2.109)$$

при $k = 1/2$ общее решение имеет вид

$$\varphi(\omega_2) = \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2(1+a^2)} \bar{\chi} \chi (\gamma_3 + a\gamma_2) \omega_2\right\} \chi, \quad (I.2.IIO)$$

χ - постоянный спинор.

При $k \neq 1/2$, $a \neq 0$ проинтегрировать уравнение не удастся. Пусть $a = 0$, тогда имеем следующую систему

$$\frac{1}{2} (1-2k) \gamma_3 \varphi + 2 \gamma_3 \varphi \omega_2 = i\lambda (\bar{\varphi} \varphi)^{1/2k} \varphi,$$

Делаем замену $\varphi = \phi(\omega_2) \exp\left\{\frac{2k-1}{4} \omega_2\right\}$, откуда

$$2 \exp\left\{\frac{1-2k}{4k} \omega_2\right\} \gamma_3 \phi \omega_2 = i\lambda (\bar{\phi} \phi)^{1/2k},$$

Общее решение последнего уравнения дается формулой

$$\phi = \exp\left\{\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} \frac{4k}{1-2k} \exp\left\{\frac{2k-1}{4k} \omega_2\right\} \gamma_3\right\} \chi,$$

χ - произвольный постоянный спинор.

Подставляя полученные результаты в (I.2.64), получаем следующие решения уравнения (I.2.I)

$$\begin{aligned} k = 1/2, \quad \psi(x) &= (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \arctg \frac{x_2}{x_3}\right\} \times \\ &\times \exp\left\{-i\lambda \frac{\bar{\chi} \chi}{2(1+a^2)} (\gamma_3 + a\gamma_2) \left[\ln(x_2^2 + x_3^2) + 2a \arctg \frac{x_2}{x_3}\right]\right\} \chi, \\ k \neq 1/2, \quad \psi(x) &= (x_2^2 + x_3^2)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \arctg \frac{x_2}{x_3}\right\} \times \\ &\times \exp\left\{\frac{2i\lambda k}{1-2k} (x_2^2 + x_3^2)^{\frac{2k-1}{4k}} \gamma_3\right\} \chi. \end{aligned} \quad (I.2.III)$$

Редуцированное уравнение (I.2.77) обладает тем интересным свойством, что оно допускает сведение к двумерному нелинейному уравнению Дирака. Этот факт можно использовать для получе-

ния новых нетривиальных классов решений исходного уравнения (I.2.I). Положим в (I.2.77) $\varphi = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, откуда

$$[\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)] \varphi_{\omega_1} + 2\gamma_1 \varphi_{\omega_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (\text{I.2.II2})$$

Сделав в (I.2.II2) замену $x_1 = \omega_1$, $x_2 = \frac{1}{2}\omega_2$ и обозначив $\Gamma_1 = \gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)$, $\Gamma_2 = \gamma_1$, получаем

$$\Gamma_1 \varphi_{x_1} + \Gamma_2 \varphi_{x_2} = i\lambda(\bar{\varphi}\varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (\text{I.I.II3})$$

причем $\Gamma_a \Gamma_b + \Gamma_b \Gamma_a = 2g_{ab}$, $a, b = 1, 2$.

1) Решение (I.2.II3) ищем в виде

$$\varphi(\vec{x}) = (\Gamma_a x_a f(x_b x_b) + ig(x_b x_b)) \chi, \quad (\text{I.I.II4})$$

где χ — постоянный спинор, f , g — неизвестные скалярные функции. Подстановка (I.2.II4) в (I.2.II3) приводит к следующей системе ОДУ

$$f + \omega \frac{df}{d\omega} = \frac{\lambda}{2} (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (g^2 - \omega f^2)^{1/2k} g, \\ \frac{dg}{d\omega} = \frac{\lambda}{2} (\bar{\chi}\chi)^{1/2k} (g^2 - \omega f^2)^{1/2k} g, \quad \omega = x_1^2 + x_2^2$$

частное решение которой при $k < 0$ дается формулой

$$f = |k|^{-1/2} \left(\mp \frac{(k^2 - k)^{1/2}}{\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}} \right)^k \omega^{-\frac{k+1}{2}}, \quad g = \mp \frac{(1-k)^{1/2}}{|k|} \left(\mp \frac{(k^2 - k)^{1/2}}{\lambda(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}} \right) \omega^{-k/2}. \quad (\text{I.2.II5})$$

2) Решение (I.2.II3) при $k = 1/2$ ищем в виде

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{\Gamma_a x_a}{x_b x_b} \phi(\omega), \quad \omega = \frac{\beta_a x_a}{x_b x_b}, \quad (\text{I.2.II6})$$

ϕ - четырехкомпонентный спинор, $\beta_a = \text{Const}$.

Подставляя (I.2.II6) в (I.2.II3), приходим к системе ОДУ для нахождения $\phi(\omega)$

$$(\Gamma_k \beta_k) \frac{d\phi}{d\omega} = i \lambda (\bar{\phi} \phi) \phi,$$

общее решение которой дается формулой

$$\phi(\omega) = \exp \left\{ - \frac{i \lambda (\bar{\chi} \chi)^{1/2k}}{\beta_1^2 + \beta_2^2} (\Gamma_k \beta_k) \omega \right\} \chi, \quad (\text{I.2.II7})$$

χ - произвольный постоянный спинор.

Используя формулы (I.2.77), (I.2.II4), (I.2.II5), (I.2.II6), (I.2.II7), получаем следующие семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака (I.2.I)

$$k < 0$$

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) (x_0 - x_2) \right\} \left\{ [(\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2))(x_3 + \right. \quad (\text{I.2.II8})$$

$$\left. + \beta(x_0 - x_2)) + \frac{1}{2} \gamma_1 (2x_1 + (x_0 - x_2)^2) \right] f(\omega) + i g(\omega) \right\} \chi,$$

где $\omega = [x_3 + \beta(x_0 - x_2)]^2 + \frac{1}{4} [2x_1 + (x_0 - x_2)^2]^2,$

$f(\omega), g(\omega)$ задаются формулами (I.2.II5).

$$k = 1/2$$

$$\psi(x) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2) (x_0 - x_2) \right\} [(\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2))(x_3 + \quad (\text{I.2.II9})$$

$$+ \beta(x_0 - x_2)) + \frac{1}{2} \gamma_1 (2x_1 + (x_0 - x_2)^2) \omega^{-1} \times$$

$$\times \exp \left\{ - \frac{i \lambda (\bar{\chi} \chi)}{\beta_1^2 + \beta_2^2} [\beta_1 (\gamma_3 + \beta(\gamma_0 - \gamma_2)) + \beta_2 \gamma_1] [\beta_1 (x_3 + \beta(x_0 - x_2)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \beta_2 (2x_1 + (x_0 - x_2)^2) \right] \omega^{-1} \right\} \chi,$$

$$\omega = [x_3 + \beta(x_0 - x_2)]^2 + \frac{1}{4} [2x_1 + (x_0 - x_2)^2]^2.$$

Существенным недостатком решений (I.2.I08), (I.2.III), (I.2.II8), (I.2.II9) является то обстоятельство, что переменные x_μ входят в них несимметричным образом, в то время как в уравнении (I.2.I) все переменные равноправны. Чтобы устранить этот недостаток, используем процедуру размножения решений с помощью преобразований из группы $\tilde{P}$ (I,3).

Применим к решению (I.2.I08) процедуру размножения с помощью конечных преобразований, порождаемых оператором J_{01}

$$\psi_2(x) = \exp\left\{-\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2)(x'_0 - x'_2)\right\} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} \gamma_1 [2x'_1 + (x'_0 - x'_2)^2]\right\} \chi,$$

где $x'_0 = x_0 \operatorname{ch} \theta + x_1 \operatorname{sh} \theta$, $x'_1 = x_1 \operatorname{ch} \theta + x_0 \operatorname{sh} \theta$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$.

Перепишем это выражение в эквивалентной форме

$$\psi_2(x) = \exp\left\{-\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1\right\} \exp\left\{\frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2)(x_0 \operatorname{ch} \theta + x_1 \operatorname{sh} \theta - x_2)\right\} \times \\ \times \exp\left\{\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1\right\} \exp\left\{-\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1\right\} \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2} (\bar{\chi} \chi)^{1/2k} \gamma_1 [2x_1 \operatorname{ch} \theta + 2x_0 \operatorname{sh} \theta + \right. \\ \left. + (x_0 \operatorname{ch} \theta + x_1 \operatorname{sh} \theta - x_2)^2]\right\} \exp\left\{\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1\right\} \exp\left\{-\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1\right\} \chi.$$

Принимая во внимание тождество

$$\exp\left\{-\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1\right\} \gamma_\alpha \exp\left\{\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1\right\} = \begin{cases} \gamma_0 \operatorname{ch} \theta + \gamma_1 \operatorname{sh} \theta, & \alpha=0, \\ \gamma_1 \operatorname{ch} \theta + \gamma_0 \operatorname{sh} \theta, & \alpha=1, \\ \gamma_\alpha, & \alpha=2,3. \end{cases}$$

окончательно получаем

$$\psi_2(x) = \exp\left\{\frac{1}{2} (\gamma_1 \operatorname{ch} \theta + \gamma_0 \operatorname{sh} \theta)(\gamma_0 \operatorname{ch} \theta + \gamma_1 \operatorname{sh} \theta - \gamma_2)(x_0 \operatorname{ch} \theta + x_1 \operatorname{sh} \theta - x_2)\right\} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2} (\bar{\tilde{\chi}} \tilde{\chi})^{1/2k} (\gamma_1 \operatorname{ch} \theta + \gamma_0 \operatorname{sh} \theta)[2x_1 \operatorname{ch} \theta + 2x_0 \operatorname{sh} \theta + \right. \\ \left. + (x_0 \operatorname{ch} \theta + x_1 \operatorname{sh} \theta - x_2)^2]\right\} \tilde{\chi}, \quad \tilde{\chi} = \exp\left\{-\frac{\theta}{2} \gamma_0 \gamma_1\right\} \chi.$$

Используя остальные преобразования из группы Лоренца $O(1,3) \subset \tilde{P}(1,3)$, получаем следующее семейство решений

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)b \cdot x\right\} \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma \cdot a)[2a \cdot x + (b \cdot x)^2]\right\} \chi, \quad (1.2.120)$$

причем параметры a_μ, b_μ - удовлетворяют условиям

$$a \cdot a = -1, \quad a \cdot b = b \cdot b = 0$$

Формула размножения решений с помощью группы масштабных преобразований имеет вид

$$\psi_2(x) = e^{-k\alpha} \psi_1(x'), \quad x'_\mu = e^\alpha x_\mu, \quad \alpha = \text{Const}. \quad (1.2.121)$$

Применяя (1.2.121) к семейству (1.2.120), получаем

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{\theta}{2}(\gamma \cdot a)(\gamma \cdot b)b \cdot x\right\} \exp\left\{-\frac{i\lambda}{2}(\bar{\chi}\chi)^{1/2k}(\gamma \cdot a)[2a \cdot x + \theta(b \cdot x)^2]\right\} \chi, \quad \theta = e^\alpha. \quad (1.2.122)$$

И, наконец, размножая семейство (1.2.122) с помощью группы сдвигов

$$\psi_2(x) = \psi_1(x'), \quad x'_\mu = x_\mu + \theta_\mu, \quad \theta_\mu = \text{Const},$$

получаем неразмножаемое семейство решений нелинейного уравнения Дирака (1.2.11), (1.2.12), в которое переменные x_μ входят симметричным образом.

Размножая аналогичным образом частные решения (1.2.111), (1.2.119), получаем неразмножаемые семейства (1.2.13), (1.2.15), (1.2.16), (1.2.18).

§ 3. Симметрия редуцированных уравнений

В силу того, что используемый алгоритм нахождения точных решений требует знания симметрии соответствующего уравнения, то следующим этапом после редукции нелинейного уравнения Дирака (I.2.1) к системам ДУЧП (I.2.75)–(I.2.89) должно быть исследование симметричных свойств последних. Но, в силу того, что системы (I.2.75)–(I.2.89) являются очень сложными, найти их максимальную симметрию, используя метод С.Ли весьма непросто. В связи с этим возникает вопрос о том, нельзя ли получить информацию о группе, допускаемой редуцированным уравнением, зная группу инвариантности исходного уравнения. Положительный ответ на этот вопрос может быть получен с помощью следующего утверждения, доказательство которого можно найти в [26] .

Теорема I.3.1. Пусть G – группа инвариантности некоторого ДУЧП, $H \in G$ – однопараметрическая подгруппа G , являющаяся нормальным делителем в G . Тогда фактор-группа G/H будет группой инвариантности уравнения, полученного редукцией исходного по H – инвариантным решениям.

Замечание. Теорема I.3.1 не гарантирует того, что G/H будет максимальной группой, допускаемой редуцированным уравнением.

Ниже будет приведен пример редуцированного уравнения, симметричные свойства которого намного шире, чем инвариантность относительно группы G/H .

В нашем случае $G = \tilde{P}(1,3)$, H – одна из подгрупп генерируемых операторами (I.2.27)–(I.2.38). Но эти подгруппы, вообще говоря, не являются нормальными делителями в $G = \tilde{P}(1,3)$.

Поэтому, прежде чем воспользоваться теоремой I.3.I, необходимо выделить нормализаторы групп $H_1 - H_{12}$, то есть найти максимальные подгруппы группы G , для которых группы $H_1 - H_{12}$ являются нормальными делителями.

Следующим шагом является построение фактор-групп $Nor H_i / H_i, \dots, Nor H_{12} / H_{12}$ где $\{ Nor H_i : i = \overline{1, 12} \}$ нормализаторы групп H_i , которые, согласно теореме I.3.I, будут группами симметрии соответствующих редуцированных уравнений.

Рассмотрим реализацию этой схемы на примере группы H_1 генерируемой оператором (I.2.27). Соответствующие вычисления удобнее вести на языке алгебр Ли. Из общей теории групп и алгебр Ли [26, 27] следует, что группа $G_1 \in \tilde{P}(1, 3)$ будет нормализатором группы H_1 если и только если выполнено условие

$$[Q, Q_i] = \alpha_i Q, \quad i = \overline{1, r_1},$$

где Q - генератор однопараметрической группы H_1 , Q_i - образующие алгебры Ли AG_1 группы G_1 , $[,]$ - коммутатор. Следовательно, элемент алгебры Ли $\tilde{AP}(1, 3)$ вида

$$\theta^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta^{00} D + \theta^\mu P_\mu,$$

принадлежит AG_1 если и только если

$$[Q, \theta^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta^{00} D + \theta^\mu P_\mu] = \alpha Q.$$

Вычисляя коммутатор в левой части с помощью коммутационных соотношений алгебры $\tilde{AP}(1, 3)$ и приравнивая нулю члены при линейно независимых слагаемых, получаем условия на коэффициенты $\theta^{\mu\nu}$, θ^0 , θ^μ .

$$a \neq 0 \quad \theta^{01} = \theta^{12}, \quad \theta^{03} = \theta^{32}, \quad \theta^{13} = \theta^{02} = 0,$$

$$\theta^0 = \theta^1 = \theta^2 = \theta^3 = 0;$$

$$a = 0 \quad \theta^{01} = \theta^{12}, \quad \theta^{03} = \theta^{32}, \quad \theta^0 = -\theta^2, \quad \theta^{13} = 0, \quad \theta^1 = 0.$$

Следовательно, алгебра Ли группы G_1 порождается следующими операторами

$$a \neq 0 \quad < J_{01} + J_{12}; J_{03} + J_{32}; D > ,$$

$$a = 0 \quad < J_{01} + J_{12}; J_{03} + J_{32}; P_0 - P_2; D; P_3 > .$$

Чтобы построить фактор-группу G_1/H_1 , найдем ее алгебру Ли, а затем, воспользовавшись теоремой С.Ли, устанавливающей однозначную связь между алгеброй Ли и группой Ли [26,64], получим группу G_1/H_1 .

Базис алгебры Ли группы G_1/H_1 состоит из линейно-независимых операторов, принадлежащих множеству

$$< A G_1, Q > ,$$

где Q - оператор, генерирующий группу H_1 .

Окончательно получаем, что группа G_1/H_1 генерируется следующими операторами

$$a \neq 0 \quad < J_{01} + J_{12}; J_{03} + J_{32} > \quad (I.3.I)$$

$$a = 0 \quad < J_{03} + J_{32}; J_{02}; P_0 - P_2; P_3, D > .$$

Воспользовавшись теоремой I.3.I, получаем, что линейные комбинации операторов (I.3.I) образуют алгебры симметрии уравнений (I.2.75), (I.2.76). Совершенно аналогичным образом полу-

чаем алгебры симметрии всех остальных уравнений (I.2.77) -

(I.2.89). Выпишем полученный результат

$$A_{1.1} = \langle J_{01} + J_{12}; J_{03} + J_{32} \rangle, \quad (I.3.2)$$

$$A_{1.2} = \langle J_{03} + J_{32}; J_{02}; P_0 - P_2; P_3; D \rangle, \quad (I.3.3)$$

$$A_2 = \langle J_{02} + \beta(J_{03} + J_{32}) - 2D + (\beta^2 - 1)P_1; P_0 - P_2; P_3 \rangle, \quad (I.3.4)$$

$$A_3 = \langle D - J_{02}; J_{03} + J_{32} + \beta P_1; P_0 - P_2; P_3 \rangle, \quad (I.3.5)$$

$$A_4 = \begin{cases} \langle J_{01}; D; P_0; P_1 \rangle, & a = 0, \\ \langle J_{01}; J_{23} \rangle, & a \neq 0, \end{cases} \quad (I.3.6)$$

$$A_{5.1} = \langle J_{01}; J_{23} \rangle, \quad (I.3.7)$$

$$A_{5.2} = \langle J_{01}; J_{23}; P_1 - P_0 \rangle, \quad (I.3.8)$$

$$A_{5.3} = \begin{cases} \langle J_{01}; D \rangle, & b \neq 0, \\ \langle J_{23}; D; P_2; P_3 \rangle, & b = 0, \end{cases} \quad (I.3.9)$$

$$A_6 = \langle P_0 + P_1; J_{23} \rangle, \quad (I.3.10)$$

$$A_7 = \langle P_2; P_3 \rangle, \quad (I.3.11)$$

$$A_8 = \begin{cases} \langle J_{23}; J_{01} \mp D; P_0 \rangle, & \alpha_1 = \pm \alpha_2, \\ \langle P_0; P_1 \rangle, & \alpha_1 \neq \pm \alpha_2, \end{cases} \quad (I.3.12)$$

$$A_9 = \langle J_{\mu\gamma} \rangle, \quad 0 \leq \mu, \gamma \leq 3, \quad (I.3.13)$$

$$A_{10} = \langle J_{02} - J_{21}; J_{03} - J_{31}; J_{01}; J_{23}; D; \quad (I.3.I4)$$

$$P_0 - P_1; P_2; P_3 \rangle,$$

$$A_{11} = \langle J_{ab}; D; P_c \rangle, \quad 1 \leq a, b, c \leq 3, \quad (I.3.I5)$$

$$A_{12} = \langle J_{02}; J_{03}; J_{23}; P_\mu; D \rangle, \quad 0 \leq \mu \leq 3. \quad (I.3.I6)$$

Но редуцированные уравнения зависят от переменных $\{\bar{\omega}, \varphi(\bar{\omega})\}$, следовательно, в (I.3.2)-(I.3.I6) необходимо перейти от переменных $\{x, \varphi(x)\}$ к переменным $\{\bar{\omega}, \varphi(\bar{\omega})\}$.

В результате получаем

$$A_{1.1} = \langle Q_1; Q_2 \rangle \quad (I.3.I7)$$

$$Q_1 = a \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2),$$

$$Q_2 = 2(\omega_1 \omega_2 - \omega_2) \partial_{\omega_1} + \omega_2^2 \partial_{\omega_2} + \frac{1}{2} \gamma_3 (\gamma_2 - \gamma_0);$$

$$A_{1.2} = \langle Q_1; Q_2; Q_3; Q_4; Q_5 \rangle \quad (I.3.I8)$$

$$Q_1 = \omega_1 \partial_{\omega_2} + 2\omega_1 \omega_2 \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2} \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_2),$$

$$Q_2 = \omega_1 \partial_{\omega_1} + \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_2,$$

$$Q_3 = \omega_1 \partial_{\omega_3},$$

$$Q_4 = \partial_{\omega_2},$$

$$Q_5 = \omega_1 \partial_{\omega_1} + \omega_2 \partial_{\omega_2} + 2\omega_3 \partial_{\omega_3} + k;$$

$$(I.3.I9)$$

$$A_2 = \langle Q_1; Q_2; Q_3 \rangle$$

$$Q_1 = -2\omega_1 \partial_{\omega_1} + 2(1 - \beta^2 - \omega_2) \partial_{\omega_2} - 3(\omega_3 + \beta \omega_1) \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2} [\gamma_0 \gamma_2 + \beta \gamma_3 (\gamma_2 - \gamma_0)],$$

$$Q_2 = \partial_{\omega_1}, \quad Q_3 = \partial_{\omega_3};$$

$$A_3 = \langle Q_1; Q_2; Q_3; Q_4 \rangle \quad (\text{I.3.20})$$

$$Q_1 = 2\omega_2 \partial_{\omega_2} + \omega_3 \partial_{\omega_3} + k - \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}_2 ,$$

$$Q_2 = 2\omega_3 \partial_{\omega_2} + (\omega_1^2 - \beta^2) \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2\beta} (\tilde{\gamma}_2 - \tilde{\gamma}_0) (\omega_1 \tilde{\gamma}_1 - \beta \tilde{\gamma}_3) ,$$

$$Q_3 = \omega_1 \partial_{\omega_2} ,$$

$$Q_4 = \beta \omega_1 \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_1 (\tilde{\gamma}_0 - \tilde{\gamma}_2) ;$$

$$A_4 = \begin{cases} \langle Q_1; Q_2 \rangle , & a \neq 0 , \\ \langle Q_1; Q_2; Q_3; Q_4 \rangle , & a = 0 \end{cases} \quad (\text{I.3.21})$$

$$a \neq 0$$

$$Q_1 = \partial_{\omega_2} ,$$

$$Q_2 = (\omega_1^2 - 1) \partial_{\omega_1} + (\omega_1 + \omega_1^{-1}) \omega_3 \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}_1 ,$$

$$a = 0$$

$$Q_1 = \partial_{\omega_2} ,$$

$$Q_2 = \omega_1^{-1/2} \omega_3^{1/2} e^{-\frac{\omega_2}{2}} (\omega_1 \partial_{\omega_1} + \omega_3 \partial_{\omega_3}) ,$$

$$Q_3 = \omega_1^{1/2} \omega_3^{1/2} e^{-\frac{\omega_2}{2}} (\omega_1 \partial_{\omega_1} + \omega_3 \partial_{\omega_3}) ,$$

$$Q_4 = (\omega_1^2 - 1) \partial_{\omega_1} + (\omega_1 + \omega_1^{-1}) \omega_3 \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}_1 ; \quad (\text{I.3.22})$$

$$A_{5.1} = \langle Q_1; Q_2 \rangle$$

$$Q_1 = \partial_{\omega_1} ,$$

$$Q_2 = -2\omega_1 \partial_{\omega_1} + \frac{1}{2(a+1)} \tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}_1 ;$$

$$A_{5.2} = \langle Q_1; Q_2; Q_3 \rangle \quad (\text{I.3.23})$$

$$Q_1 = \omega_1 \partial_{\omega_1} - \frac{1}{4} \tilde{\gamma}_0 \tilde{\gamma}_1 ,$$

$$Q_2 = \partial_{\omega_3} ,$$

$$Q_3 = \partial_{\omega_1} + \omega_2 \omega_1^{-1} \partial_{\omega_2} - \frac{k}{2} \omega_1^{-1};$$

$$A_{5,3} = \begin{cases} \langle Q_1; Q_2 \rangle, & b \neq 0, \\ \langle Q_1; Q_2; Q_3; Q_4 \rangle \end{cases} \quad (I.3.24)$$

$$b \neq 0$$

$$Q_1 = \partial_{\omega_3},$$

$$Q_2 = 2\omega_1 \partial_{\omega_1} + 2\omega_2 \partial_{\omega_2} + b \partial_{\omega_3} + k + \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1,$$

$$b = 0$$

$$Q_1 = \partial_{\omega_3},$$

$$Q_2 = 2\omega_1 \partial_{\omega_1} + 2\omega_2 \partial_{\omega_2} + k + \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1,$$

$$Q_3 = \omega_2^{-1/2} \cos \omega_3 (2\omega_2 \partial_{\omega_2} - \operatorname{tg} \omega_3 \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{tg} \omega_3),$$

$$Q_4 = \omega_2^{-1/2} \sin \omega_3 (2\omega_2 \partial_{\omega_2} + \operatorname{ctg} \omega_3 \partial_{\omega_3} - \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3 \operatorname{ctg} \omega_3);$$

$$A_6 = \langle Q_1; Q_2 \rangle \quad (I.3.25)$$

$$Q_1 = \omega_1 \partial_{\omega_1},$$

$$Q_2 = \partial_{\omega_3},$$

$$A_7 = \langle Q_1; Q_2 \rangle$$

$$(I.3.26)$$

$$Q_1 = \partial_{\omega_2},$$

$$Q_2 = \partial_{\omega_3};$$

$$A_8 = \begin{cases} \langle Q_1; Q_2; Q_3 \rangle, & \alpha_1 = \pm \alpha_2 \\ \langle Q_1; Q_2 \rangle, & \alpha_1 \neq \pm \alpha_2 \end{cases} \quad (I.3.27)$$

$$Q_1 = \partial_{\omega_2},$$

$$Q_2 = \mp 2\omega_1 \partial_{\omega_1} - (\beta_2 \pm \beta_1) \alpha_2^{-1} \omega_3 \partial_{\omega_2} \mp 2\omega_3 \partial_{\omega_3} \mp k + \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1,$$

$$Q_3 = \beta_1 \partial_{\omega_2} + \alpha_2 \partial_{\omega_3}$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2$$

$$Q_1 = \beta_1 \partial \omega_2 + \alpha_2 \partial \omega_3,$$

$$Q_2 = \beta_2 \partial \omega_1 + \alpha_1 \partial \omega_3;$$

$$A_9 = \langle Q_1; Q_2; Q_3; Q_4; Q_5; Q_6 \rangle \quad (\text{I.3.28})$$

$$Q_a = \omega_a \omega_b \partial \omega_b - \partial \omega_a - k \omega_a + \frac{1}{2} r_0 r_a,$$

$$Q_{a+3} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} (-\omega_b \partial \omega_c + \omega_c \partial \omega_b + \frac{1}{2} r_b r_c), \quad a = \overline{1, 3};$$

$$A_{10} = \langle Q_1; Q_2; Q_3; Q_4; Q_5; Q_6; Q_7; Q_8 \rangle \quad (\text{I.3.29})$$

$$Q_1 = \omega_1 \partial \omega_2 + \frac{1}{2} r_2 (r_0 + r_1);$$

$$Q_2 = \omega_1 \partial \omega_3 + \frac{1}{2} r_3 (r_0 + r_1),$$

$$Q_3 = \omega_1 \partial \omega_1 - \frac{1}{2} r_0 r_1,$$

$$Q_4 = \omega_2 \partial \omega_3 - \omega_3 \partial \omega_2 - \frac{1}{2} r_2 r_3,$$

$$Q_5 = \omega_a \partial \omega_a + k,$$

$$Q_6 = \partial \omega_1,$$

$$Q_7 = \partial \omega_2$$

$$Q_8 = \partial \omega_3,$$

$$A_{11} = \langle Q_1; Q_2; Q_3; Q_4; Q_5; Q_6; Q_7 \rangle \quad (\text{I.3.30})$$

$$Q_a = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} (-\omega_b \partial \omega_c + \omega_c \partial \omega_b + \frac{1}{2} r_b r_c),$$

$$Q_4 = \omega_a \partial \omega_a + k,$$

$$Q_{4+a} = \partial \omega_a, \quad a = \overline{1, 3};$$

$$A_{12} = \langle Q_1; Q_2; Q_3; Q_4; Q_5; Q_6; Q_7 \rangle \quad (\text{I.3.31})$$

$$Q_1 = \omega_1 \partial_{\omega_2} + \omega_2 \partial_{\omega_1} - \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_1,$$

$$Q_2 = \omega_1 \partial_{\omega_3} + \omega_3 \partial_{\omega_1} - \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3,$$

$$Q_3 = -\omega_2 \partial_{\omega_3} + \omega_3 \partial_{\omega_2} + \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3,$$

$$Q_4 = \omega_a \partial_{\omega_a} + k,$$

$$Q_{4+b} = \partial_{\omega_b}, \quad b = \overline{1,3};$$

где $\partial_{\omega_a} = \partial / \partial \omega_a$, $a = \overline{1,3}$.

В том, что алгебры $A_{1,1} - A_{12}$ действительно являются алгебрами симметрии редуцированных уравнений, можно убедиться непосредственной проверкой с помощью метода С.Ли. Нетрудно проверить, что они замкнуты относительно коммутатора, то есть выполнено соотношение

$$[Q_A, Q_B] = C_{ABC} Q_C, \quad (\text{I.3.32})$$

где C_{ABC} - структурные константы.

Вычисляя коммутаторы (I.3.32), получаем

$$A_9 \cong AO(1,3), \quad (\text{I.3.33})$$

$$A_{11} \cong A\tilde{E}(3), \quad (\text{I.3.34})$$

$$A_{12} \cong A\tilde{P}(1,2), \quad (\text{I.3.35})$$

где $O(1,3)$ - группа Лоренца, $\tilde{E}(3)$ - расширенная группа Евклида. Хорошо известно, что выполнены следующие включения

$$O(1,3) \subset \tilde{P}(1,3), \quad \tilde{E}(3) \subset P(1,3), \quad \tilde{P}(1,2) \subset \tilde{P}(1,3),$$

то есть $O(1,3)$, $\tilde{E}(3)$, $\tilde{P}(1,2)$ являются подгруппами группы

$\bar{P}(1,3)$. Поэтому представляется естественным, что алгебра симметрии редуцированного уравнения содержит алгебры вида (I.3.33)–(I.3.35).

Остальные алгебры имеют более сложную алгебраическую структуру, достойную отдельного рассмотрения.

Как уже было отмечено, алгебры Ли (I.3.17)–(I.3.37) в общем случае не являются максимальными алгебрами симметрии редуцированных ДУЧП. В качестве примера рассмотрим уравнение (I.2.87), максимальная симметрия которого значительно шире, чем симметрия относительно алгебры A_{10} , впервые установленная в работе [36].

Теорема I.3.2. Уравнение (I.2.87) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли с базисными операторами вида

$$k = 1$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1 &= \phi_1(\omega_1) \partial_{\omega_2} + \phi_2(\omega_1) \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}(\dot{\phi}_1(\omega_1) \gamma_2 + \dot{\phi}_2(\omega_1) \gamma_3)(\gamma_0 + \gamma_1), \\ \tilde{Q}_2 &= -\omega_2 \partial_{\omega_3} + \omega_3 \partial_{\omega_2} + \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3, \\ \tilde{Q}_3 &= \phi_0(\omega_1) \partial_{\omega_1} + \dot{\phi}_0(\omega_1)(\omega_2 \partial_{\omega_2} + \omega_3 \partial_{\omega_3}) + \dot{\phi}_0(\omega_1) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \ddot{\phi}_0(\omega_1)(\gamma_2 \omega_2 + \gamma_3 \omega_3)(\gamma_0 + \gamma_1), \\ \tilde{Q}_4 &= \phi_3(\omega_1) \gamma_4 (\gamma_0 + \gamma_1); \end{aligned} \tag{I.3.36}$$

$$k \neq 1$$

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1 &= \partial_{\omega_1}, \quad \tilde{Q}_2 = -\omega_2 \partial_{\omega_3} + \omega_3 \partial_{\omega_2} + \frac{1}{2} \gamma_2 \gamma_3, \\ \tilde{Q}_3 &= \phi_1(\omega_1) \partial_{\omega_2} + \phi_2(\omega_1) \partial_{\omega_3} + \frac{1}{2}(\dot{\phi}_1(\omega_1) \gamma_2 + \dot{\phi}_2(\omega_1) \gamma_3)(\gamma_0 + \gamma_1), \\ \tilde{Q}_4 &= \phi_3(\omega_1) \gamma_4 (\gamma_0 + \gamma_1), \\ \tilde{Q}_5 &= \omega_a \partial_{\omega_a} + k, \end{aligned} \tag{I.3.37}$$

где $\{\phi_\mu(\omega_1), \mu = \overline{0,3}\}$ – произвольные дифференцируемые функции, точ-

ка обозначает дифференцирование по ω_1 .

Доказательство, проводимое по методу С.Ли, очень громоздко, поэтому мы его опускаем.

Замечание 1. Теорема I.3.2 дает возможность с помощью операции разложения решений строить точные решения нелинейного уравнения Дирака (I.2.1), зависящие от трех (при $k=1$ от четырех) произвольных функций.

Замечание 2. Если в уравнении (I.2.87) положить $\varphi = \varphi(\omega_1, \omega_2)$, то полученное уравнение

$$(\gamma_0 + \gamma_1) \varphi_{\omega_1} + \gamma_2 \varphi_{\omega_2} = i\lambda (\bar{\varphi} \varphi)^{1/2k} \varphi, \quad (I.3.38)$$

также допускает бесконечномерную алгебру симметрии. Это позволяет построить его общее решение. Перепишем (I.3.38) в эквивалентном виде

$$\gamma_2 \varphi_{\omega_2} = i\lambda \frac{\partial f}{\partial \omega_2} \varphi + (\gamma_0 + \gamma_1) F(\omega_1, \omega_2), \quad (I.3.39)$$

$$(\bar{\varphi} \varphi)^{1/2k} = \frac{\partial f}{\partial \omega_2}, \quad (I.3.40)$$

$$\varphi_{\omega_1} = -F(\omega_1, \omega_2). \quad (I.3.41)$$

(I.3.39) — это линейная неоднородная система ОДУ, общее решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi = \exp \left\{ -i\lambda \gamma_2 f(\omega_1, \omega_2) \right\} & \left[\chi(\omega_1) + \gamma_2 (\gamma_0 + \gamma_1) \times \right. \\ & \times \left. \int_{\omega_2}^{\omega_2} \exp \left\{ -i\lambda \gamma_2 f(\omega_1, \omega_2) \right\} F(\omega_1, \omega_2) d\omega_2 \right]. \end{aligned} \quad (I.3.42)$$

Подставляя (I.3.42) в (I.3.40), (I.3.41) получаем общее решение (I.3.38) в виде

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = \exp\{-i\lambda f(\omega_1, \omega_2)\gamma_2\} [\chi(\omega_1) + \gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1) \times \\ \times \int_{\omega_2}^{\omega_1} \exp\{-i\lambda \gamma_2 f(\omega_1, \omega_2)\} d\omega_2 (\dot{\chi}(\omega_1) - i\lambda \frac{\partial f}{\partial \omega_1} \gamma_2 \chi(\omega_1))] , \quad (\text{I.3.43})$$

где скалярная функция $f = f(\omega_1, \omega_2)$ определяется из соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial \omega_1} = [a_0 + a_1 \int^{\omega_1} ch(2\lambda f) d\omega_1 + a_2 \int^{\omega_1} sh(2\lambda f) d\omega_1]^{1/2k},$$

$$b = \bar{\chi}\chi, a_1 = \bar{\chi}\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\dot{\chi} - \bar{\chi}\gamma_2(\gamma_0 + \gamma_1)\chi,$$

$$a_2 = i(\bar{\chi}(\gamma_0 + \gamma_1)\dot{\chi} - \dot{\chi}(\gamma_0 + \gamma_1)\chi),$$

$\chi = \chi(\omega_1)$ — четырехкомпонентный спинор, произвольным образом зависящий от ω_1 .

Из (I.3.45) по формуле

$$\psi(x) = \varphi(x_0 + x_1, x_2)$$

получаем решение уравнения (I.2.I), зависящее от 8 произвольных функций.

Замечание 3. Симметричные свойства системы (I.3.38) не исчерпываются локальной симметрией (I.3.36), (I.3.37). Непосредственной проверкой можно убедиться, что (I.2.87) допускает нелокальную группу симметрии вида

$$\psi' = \psi + (\gamma_0 + \gamma_1) E(\omega_1, \omega_2, \omega_3; \psi) \quad (\text{I.3.44})$$

где $E(\vec{\omega}, \psi)$ — произвольное решение линейной системы ДУЧП

$$[\gamma_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial \omega_3} - i\lambda(\bar{\psi}\psi)^{1/2k}] E = 0, \\ \bar{\psi}(\gamma_0 + \gamma_1) E - \bar{E}(\gamma_0 + \gamma_1) \psi = 0. \quad (\text{I.3.45})$$

Если, например, в (I.3.44) положить $\varphi(\vec{\omega}) = 0$, то мы получим

множество решений нелинейного уравнения (I.2.I) вида

$$\psi(x) = (\gamma_0 + \gamma_1) E(x_0 + x_1, x_2, x_3)$$

причем

$$\gamma_2 E_{x_2} + \gamma_3 E_{x_3} = 0.$$

Таким образом нелинейное уравнение Дирака, будучи редуцированным по $(P_0 + P_1)$ - инвариантным решениям, допускает бесконечную симметрию. Оказывается, что аналогичным свойством обладает очень широкий класс систем ДУЧП, а именно системы типа Баба [49]

$$[\beta_\mu \rho^\mu + m] \psi(x) = 0, \quad (I.3.46)$$

где $\psi = \{\psi^1, \dots, \psi^n\}$, $m = \text{Const}$,

$x = (x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1})$, $\ell \geq 3$, $\beta_\mu = (n \times n)$ - матрицы, удовлетворяющие условию

$$[\beta_\lambda, S_{\mu\gamma}] = i(q_{\mu\lambda} \beta_\gamma - q_{\gamma\lambda} \beta_\mu) \quad (I.3.47)$$

$$S_{\mu\gamma} = i(\beta_\mu \beta_\gamma - \beta_\gamma \beta_\mu), \quad 0 \leq \mu, \gamma, \lambda \leq \ell-1.$$

Редукция (I.3.46) по $(P_0 + P_{\ell-1})$ - инвариантным решениям приводит к системе уравнений вида

$$\left[i(\beta_0 + \beta_{\ell-1}) \frac{\partial}{\partial \omega_0} + \sum_{i=1}^{\ell-2} \beta_i \frac{\partial}{\partial \omega_i} + m \right] \psi(\omega) = 0. \quad (I.3.48)$$

Теорема I.3.3. Система ДУЧП (I.3.48) инвариантна относительно бесконечномерной алгебры Ли с базисными операторами вида

$$Q = \phi^i(\omega_0) \partial \omega_i + \frac{1}{2} \dot{\phi}^i(\omega_0) ([\beta_0, \beta_i] - [\beta_i, \beta_{\ell-1}]),$$

суммирование ведется от 1 до $\ell-2$, где $\phi^1(\omega_0), \dots, \phi^{\ell-2}(\omega_0)$ — произвольные дифференцируемые функции.

Доказательство. Для линейных уравнений справедливо следующее утверждение [37]. Оператор Q является оператором симметрии линейного уравнения

$$L(x) \psi = 0$$

если и только если существует матрица $R(x)$ такая, что

$$[Q, L] = R(x) L \quad (I.3.49)$$

Докажем, что в нашем случае

$$[Q, L] = 0. \quad (I.3.50)$$

Действительно

$$\begin{aligned} & [Q, i(\beta_0 + \beta_{\ell-1}) \frac{\partial}{\partial \omega_0} + i \sum_{k=1}^{\ell-2} \beta_k \frac{\partial}{\partial \omega_k} + m] = \\ & = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^{\ell-2} \ddot{\phi}_k(\omega_0) (\beta_0 + \beta_{\ell-1}) \{ [\beta_0, \beta_k] - [\beta_k, \beta_{\ell-1}] \}. \end{aligned}$$

Покажем, что $(\beta_0 + \beta_{\ell-1}) \{ [\beta_0, \beta_k] - [\beta_k, \beta_{\ell-1}] \} = 0$,

откуда и будет следовать формула (I.3.49). Выберем, например $k=1$

$$\begin{aligned} & (\beta_0 + \beta_{\ell-1}) \{ [\beta_0, \beta_1] - [\beta_1, \beta_{\ell-1}] \} = (\beta_0 + \beta_{\ell-1}) (\beta_0 \beta_1 - \beta_1 \beta_0 - \beta_1 \beta_{\ell-1} + \beta_{\ell-1} \beta_1) = \\ & = (\beta_0 \beta_0 \beta_1 - \beta_0 \beta_1 \beta_0) + (\beta_{\ell-1} \beta_{\ell-1} \beta_1 - \beta_{\ell-1} \beta_1 \beta_{\ell-1}) + \\ & + (\beta_{\ell-1} \beta_0 \beta_1 - \beta_0 \beta_1 \beta_{\ell-1}) + (\beta_0 \beta_{\ell-1} \beta_1 - \beta_{\ell-1} \beta_1 \beta_0) = \\ & = i \beta_1 - i \beta_1 = 0 \end{aligned}$$

Аналогично доказываем утверждение и для $k=2, 3, \dots, \ell-2$.

Теорема доказана.

§ 4. Последовательные редукции пуанкаре-инвариантного нелинейного уравнения Дирака.

В настоящем параграфе проведена последовательная редукция к системам ОДУ нелинейного уравнения Дирака

$$\gamma_{\mu} p^{\mu} \psi + F(\bar{\psi}, \psi) = 0,$$

где $F(\bar{\psi}, \psi)$ имеет вид (I.1.5).

Для этого существенно используются симметричные свойства системы ДУЧП (I.4.1) (инвариантность относительно группы

(I,3)) и алгоритм нахождения симметрии редуцированных уравнений, сформулированный в §2. Общая схема последовательных редукций может быть разбита на три этапа, содержанием каждого из которых является редукция системы ДУЧП по количеству независимых переменных.

I этап. Находим одномерные неэквивалентные подалгебры алгебры Пуанкаре $AP(I,3)$, строим анзатцы, инвариантные относительно них. Подставляя полученный результат в (I.4.1) получаем набор редуцированных уравнений. Затем, аналогично тому, как это было сделано в §3, по каждой подалгебре строим ее нормализатор и фактор-алгебру. Последняя является, согласно теореме I.3.1, алгеброй симметрии соответствующего редуцированного уравнения.

2 этап. Вновь находим одномерные неэквивалентные подалгебры каждой из полученных на первом этапе алгебр, строим инвариантные анзатцы, редуцируем с их помощью полученные на первом этапе уравнения к двумерным системам ДУЧП.

На 3 этапе, применяя аналогичную процедуру к уравнениям, полученным на втором этапе, приходим к системам ОДУ.

Достоинство этого подхода состоит в том, что требуется

знание только однопараметрических подгрупп группы симметрии рассматриваемого уравнения. Для реализации традиционного алгоритма построения инвариантных решений, предложенного Л.В.Овсянниковым [26], необходимо знание всех неэквивалентных подгрупп (одно-, дву-, трехмерных), нахождение которых является весьма непростой задачей (например, группа $P(1,4)$ содержит более 600 неэквивалентных подгрупп). Важно отметить, что чисто алгебраическая часть алгоритма (вычисление однопараметрических подгрупп, нормализаторов, фактор-групп) может быть реализована на ЭВМ.

Одномерные подалгебры алгебры $AP(1,3)$ были получены в [60], они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle J_{03} \rangle, A_2 = \langle J_{12} \rangle, A_3 = \langle J_{03} + \alpha J_{12} \rangle, A_4 = \langle J_{01} - J_{13} \rangle, \\ A_5 &= \langle P_0 \rangle, A_6 = \langle P_3 \rangle, A_7 = \langle P_0 + P_3 \rangle, A_8 = \langle J_{03} + \alpha P_1 \rangle, \\ A_9 &= \langle J_{12} + \alpha P_3 \rangle, A_{10} = \langle J_{12} + \alpha P_0 \rangle, A_{11} = \langle J_{12} + \alpha(P_0 + P_3) \rangle, \\ A_{12} &= \langle J_{01} - J_{13} + \alpha P_3 \rangle, A_{13} = \langle J_{01} - J_{13} + \alpha P_2 \rangle. \end{aligned} \quad (I.4.2)$$

Общий вид инвариантного решения следующий

$$\psi(x) = A(x) \varphi(\vec{\omega}), \quad (I.4.3)$$

где φ - четырехкомпонентный спинор, подлежащий определению, $A(x)$ - (4×4) - матрица, $\vec{\omega} = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$ - инвариантные переменные, алгоритм построения которых был описан в §3. Интегрируя уравнения (I.2.7), (I.2.8) для каждого из операторов (I.4.2) получаем набор анзатцов, который приводится в виде таблицы

Таблица 2

н/п	A (x)	$\omega_1(x)$	$\omega_2(x)$	$\omega_3(x)$
I.	$\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(x_0+x_3)\right\}$	$x_0^2 - x_3^2$	x_1	x_2
2.	$\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} x_1 x_2^{-1}\right\}$	x_0	$x_1^2 + x_2^2$	x_3
3.	$\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(x_0+x_3) - \right.$ $\left. - \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} x_1 x_2^{-1}\right\}$	$x_0^2 - x_3^2$	$x_1^2 + x_2^2$	$\alpha \ln(x_0+x_3) +$ $+ \operatorname{arctg} x_1 x_2^{-1}$
4.	$\exp\left\{\frac{x_1}{2(x_0+x_3)}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$	$x_0 + x_3$	$x_0^2 - x_1^2 -$ $- x_3^2$	x_2
5.	I	x_1	x_2	x_3
6.	I	x_0	x_1	x_2
7.	I.	$x_0 + x_3$	x_1	x_2
8.	$\exp\left\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln(x_0+x_3)\right\}$	$x_0^2 - x_3^2$	x_2	$\alpha \ln(x_0+x_3) - x_1$
9.	$\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} x_1 x_2^{-1}\right\}$	x_0	$x_1^2 + x_2^2$	$x_3 + \alpha \operatorname{arctg} x_1 x_2^{-1}$
10.	$\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} x_1 x_2^{-1}\right\}$	x_3	$x_1^2 + x_2^2$	$x_0 -$ $- \alpha \operatorname{arctg} x_1 x_2^{-1}$
11.	$\exp\left\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \operatorname{arctg} x_1 x_2^{-1}\right\}$	$x_0 + x_3$	$x_1^2 + x_3^2$	$x_0 - x_3 -$ $- 2\alpha \operatorname{arctg} x_1 x_2^{-1}$
12.	$\exp\left\{\frac{x_0+x_3}{2\alpha}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$	$(x_0+x_3)^2 -$ $- 2\alpha x_1$	x_2	$(x_0+x_3)^3 -$ $- 3\alpha x_1(x_0+x_3) +$ $+ 3\alpha^2 x_0$
13.	$\exp\left\{\frac{x_2}{2\alpha}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$	$x_0 + x_3$	$x_0^2 + x_1^2 -$ $- x_3^2$	$\alpha x_1 -$ $- (x_0+x_3)x_2$

Подстановка анзаца (I.4.3) в уравнение (I.4.1) приводит к уменьшению числа независимых переменных на I. После несложных, но довольно громоздких вычислений получаем следующий набор редуцированных систем ДУЧП

$$1. \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_1)\varphi + [\gamma_0(\omega_1 + 1) + \gamma_3(\omega_1 - 1)]\varphi_{\omega_1} + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + \gamma_2\varphi_{\omega_3} = iF(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (I.4.4)$$

$$2. \quad \frac{1}{2}\gamma_2\omega_2^{-1/2}\varphi + \gamma_0\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_2\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = iF(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (I.4.5)$$

$$3. \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3 + \gamma_2\omega_2^{-1/2})\varphi + [\gamma_0(\omega_1 + 1) + \gamma_3(\omega_1 - 1)]\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_2\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_2} + [\alpha(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_1\omega_2^{-1/2}]\varphi_{\omega_3} = iF(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (I.4.6)$$

$$4. \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\omega_1^{-1}\varphi + (\gamma_0 + \gamma_3)\varphi_{\omega_1} + [(\gamma_0 - \gamma_3)\omega_1 + (\gamma_0 + \gamma_3)\omega_2\omega_1^{-1}]\varphi_{\omega_2} + \gamma_2\varphi_{\omega_3} = iF(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (I.4.7)$$

$$5. \quad \gamma_1\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + \gamma_3\varphi_{\omega_3} = iF(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (I.4.8)$$

$$6. \quad \gamma_0\varphi_{\omega_1} + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + \gamma_2\varphi_{\omega_3} = iF(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (I.4.9)$$

$$7. \quad (\gamma_0 + \gamma_3)\varphi_{\omega_1} + \gamma_1\varphi_{\omega_2} + \gamma_2\varphi_{\omega_3} = iF(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (I.4.10)$$

$$8. \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\varphi + [\gamma_0(\omega_1 + 1) + \gamma_3(\omega_1 - 1)]\varphi_{\omega_1} + \gamma_2\varphi_{\omega_2} + [\alpha(\gamma_0 + \gamma_3) - \gamma_1]\varphi_{\omega_3} = iF(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (I.4.11)$$

$$9. \quad \frac{1}{2}\gamma_2\omega_2^{-1/2}\varphi + \gamma_0\varphi_{\omega_1} + 2\gamma_2\omega_2^{1/2}\varphi_{\omega_2} + (\gamma_3 + \alpha\gamma_1\omega_2^{-1/2})\varphi_{\omega_3} = iF(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (I.4.12)$$

$$\text{IO.} \quad \frac{1}{2} \gamma_2 \omega_2^{-1/2} \varphi + \gamma_3 \varphi_{\omega_1} + 2 \gamma_2 \omega_2^{1/2} \varphi_{\omega_2} + (\gamma_0 - \alpha \gamma_1 \omega_2^{-1/2}) \varphi_{\omega_3} = \\ = i F(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (\text{I.4.I3})$$

$$\text{II.} \quad \frac{1}{2} \gamma_2 \omega_2^{-1/2} \varphi + (\gamma_0 + \gamma_3) \varphi_{\omega_1} + 2 \gamma_2 \omega_2^{1/2} \varphi_{\omega_2} + (\gamma_0 - \gamma_3 - 2\alpha \gamma_1 \omega_2^{-1/2}) \times \\ \times \varphi_{\omega_3} = i F(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (\text{I.4.I4})$$

$$\text{I2.} \quad -2\alpha \gamma_1 \varphi_{\omega_1} + \gamma_2 \varphi_{\omega_2} + \frac{3}{2} [2\alpha^2 \gamma_0 + (\gamma_0 + \gamma_3) \omega_1] \varphi_{\omega_3} = \\ = i F(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (\text{I.4.I5})$$

$$\text{I3.} \quad \frac{1}{2\alpha} \gamma_4 (\gamma_0 + \gamma_3) \varphi + (\gamma_0 + \gamma_3) \varphi_{\omega_1} + [(\gamma_0 + \gamma_3) \omega_1 - 2\alpha^{-1} \gamma_1 \omega_3 + \\ + (\gamma_0 + \gamma_3) (\omega_2 + \omega_3^2 \alpha^{-2}) \omega_1^{-1}] \varphi_{\omega_2} + (\alpha \gamma_1 - \omega_1 \gamma_2) \varphi_{\omega_3} = i F(\bar{\varphi}, \varphi), \quad (\text{I.4.I6})$$

где $\varphi_{\omega_a} = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_a}$, $a = \overline{1, 3}$.

Используя алгоритм, описанный в § 3, вычисляем фактор-алгебры, соответствующие алгебрам $A_1, \dots, A_{13}$. Записав полученные алгебры в новых переменных $\{\bar{\omega}, \varphi(\bar{\omega})\}$, получаем алгебры инвариантности уравнений (I.4.4)-(I.4.I6)

$$\text{I.} \quad \langle -\omega_2 \partial_{\omega_3} + \omega_3 \partial_{\omega_2} + \frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2; \partial_{\omega_2}; \partial_{\omega_3} \rangle, \quad (\text{I.4.I7})$$

$$\text{2.} \quad \langle \omega_3 \partial_{\omega_1} + \omega_1 \partial_{\omega_3} - \frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3; \partial_{\omega_1}; \partial_{\omega_3} \rangle, \quad (\text{I.4.I8})$$

$$\text{3.} \quad \langle \partial_{\omega_3} \rangle, \quad (\text{I.4.I9})$$

$$4. \quad \langle 2\omega_1\omega_3\partial\omega_2 + \omega_1\partial\omega_3 - \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_2; -\omega_1\partial\omega_1 + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3; \omega_1\partial\omega_2; \partial\omega_3 \rangle, \quad (\text{I.4.20})$$

$$5. \quad \langle -\omega_a\partial\omega_b + \omega_b\partial\omega_a + \frac{1}{4}[\gamma_a, \gamma_b]; \partial\omega_c \rangle, \quad 1 \leq a, b, c \leq 3, \quad (\text{I.4.21})$$

$$6. \quad \langle \omega_1\partial\omega_2 + \omega_2\partial\omega_1 - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1; \omega_1\partial\omega_3 + \omega_3\partial\omega_1 - \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_2; -\omega_2\partial\omega_3 + \omega_3\partial\omega_2 + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2; \partial\omega_1; \partial\omega_2; \partial\omega_3 \rangle, \quad (\text{I.4.22})$$

$$7. \quad \langle \omega_1\partial\omega_2 - \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_1; \omega_1\partial\omega_3 - \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_2; -\omega_1\partial\omega_1 + \frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3; -\omega_2\partial\omega_3 + \omega_3\partial\omega_2 + \frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2; \partial\omega_1; \partial\omega_2; \partial\omega_3 \rangle, \quad (\text{I.4.23})$$

$$8. \quad \langle \partial\omega_2; \partial\omega_3 \rangle, \quad (\text{I.4.24})$$

$$9. \quad \langle \partial\omega_1; \partial\omega_3 \rangle, \quad (\text{I.4.25})$$

$$10. \quad \langle \partial\omega_1; \partial\omega_3 \rangle, \quad (\text{I.4.26})$$

$$11. \quad \langle \partial\omega_1; \partial\omega_3 \rangle, \quad (\text{I.4.27})$$

$$12. \quad \langle \partial\omega_2; \partial\omega_3 \rangle, \quad (\text{I.4.28})$$

$$13. \quad \langle 2\alpha\omega_1\partial\omega_3 - (\gamma_0 + \gamma_3)\gamma_1; 2\omega_3\partial\omega_2 + (\omega_1^2 - \alpha^2)\partial\omega_3 + \frac{1}{2\alpha}(\gamma_0 + \gamma_3)(\alpha\gamma_2 - \omega_1\gamma_1); \omega_1\partial\omega_2 \rangle. \quad (\text{I.4.29})$$

В дальнейшем мы будем приводить только анзацы и соответствующие им редуцированные уравнения, опуская вычисление факторалгебр и их одномерных подалгебр.

Общий вид инвариантного анзаца для уравнений (I.4.4)-(I.4.1) таков

$$\varphi(\vec{\omega}) = A(\vec{\omega}) \phi(\vec{W}), \quad (\text{I.4.30})$$

где $\phi(\vec{W})$ - четырехкомпонентный спинор, подлежащий определению, $A(\vec{\omega})$ - (4 x 4) - матрица, $\vec{W} = \{w_1(\vec{\omega}), w_2(\vec{\omega})\}$ - новые инвариантные переменные. Выражения для $A(\vec{\omega}), \vec{W}(\vec{\omega})$ приводим в виде таблицы

Таблица 3.

н/п	$A(\vec{W})$	$w_1(\vec{\omega})$	$w_2(\vec{\omega})$
I.1	$\exp\{-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_2 \arctg \omega_2 \omega_3^{-1}\}$	ω_1	$\omega_2^2 + \omega_3^2$
I.2	I	ω_1	ω_3
2.1	$\exp\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln(\omega_1 + \omega_3)\}$	$\omega_1^2 - \omega_3^2$	ω_2
2.2	I	ω_2	ω_3
2.3	I	ω_1	ω_2
2.4	I	$\omega_1 - \omega_3$	ω_2

3.I	I	ω_1	ω_2
4.I	$\exp\left\{-\frac{\omega_3}{2(\omega_1+\alpha)} r_2 (r_0+r_3)\right\}$	ω_1	$\omega_2(\omega_1+\alpha) - \omega_1 \omega_3^2$
4.2	$\exp\left\{\frac{1}{2} r_0 r_3 \ln \omega_1\right\}$	$\omega_3 - \alpha \ln \omega_1$	ω_2
4.3	I	ω_1	ω_2
4.4	I	ω_1	$\alpha \omega_2 - \omega_1 \omega_3$
5.I	$\exp\left\{-\frac{1}{2} r_1 r_2 \arctg \omega_1 \omega_2^{-1}\right\}$	$\omega_1^2 + \omega_2^2$	ω_3
5.2	I	ω_2	ω_3
5.3	$\exp\left\{-\frac{1}{2} r_1 r_2 \arctg \omega_1 \omega_2^{-1}\right\}$	$\omega_1^2 + \omega_2^2$	$\omega_3 + \alpha \arctg \omega_1 \omega_2^{-1}$
6.I	$\exp\left\{\frac{1}{2} r_0 r_2 \ln (\omega_1 + \omega_3)\right\}$	$\omega_1^2 - \omega_3^2$	ω_2
6.2	$\exp\left\{\frac{\omega_2}{2(\omega_1-\omega_3)} (r_0-r_2) r_1\right\}$	$\omega_1 - \omega_3$	$\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2$
6.3	$\exp\left\{-\frac{1}{2} r_1 r_2 \arctg \omega_2 \omega_3^{-1}\right\}$	ω_1	$\omega_2^2 + \omega_3^2$
6.4	I	ω_2	ω_3
6.5	I	$\omega_1 - \omega_3$	ω_2
6.6	I	ω_1	ω_3

6.7	$\exp\left\{\frac{1}{2} r_0 r_2 \ln(\omega_1 + \omega_3)\right\}$	$\omega_1^2 - \omega_3^2$	$\omega_2 - \alpha \ln(\omega_1 + \omega_3)$
6.8	$\exp\left\{\frac{\omega_3 - \omega_1}{2\alpha} (r_0 - r_2) r_1\right\}$	$2\alpha\omega_2 + (\omega_1 - \omega_3)^2$	$6\alpha^2\omega_1 + 2(\omega_1 - \omega_3)^2 + 6\alpha\omega_2(\omega_1 - \omega_3)$
6.9	$\exp\left\{-\frac{1}{2} r_1 r_2 \operatorname{arctg} \omega_2 \omega_3^{-1}\right\}$	$\omega_2^2 + \omega_3^2$	$\omega_1 - \alpha \operatorname{arctg} \omega_2 \omega_3^{-1}$
7.1	$\exp\left\{-\frac{1}{2} r_1 r_2 \operatorname{arctg} \omega_2 \omega_3^{-1}\right\}$	ω_1	$\omega_2^2 + \omega_3^2$
7.2	$\exp\left\{\frac{\ln \omega_1}{2} r_0 r_3 - \frac{1}{2} r_1 r_2 \operatorname{arctg} \omega_2 \omega_3^{-1}\right\}$	$\omega_2^2 + \omega_3^2$	$\ln \omega_1 + \alpha \operatorname{arctg} \omega_2 \omega_3^{-1}$
7.3	$\exp\left\{-\frac{1}{2} r_1 r_2 \operatorname{arctg} \omega_2 \omega_3^{-1}\right\}$	$\omega_2^2 + \omega_3^2$	$\omega_1 - 2\alpha \operatorname{arctg} \omega_2 \omega_3^{-1}$
7.4	$\exp\left\{\frac{1}{2} r_0 r_3 \ln \omega_1\right\}$	$\omega_2 + \alpha \ln \omega_1$	ω_3
7.5	$\exp\left\{\frac{1}{2} r_0 r_3 \ln \omega_1\right\}$	ω_2	ω_3
7.6	$\exp\left\{-\frac{\omega_1}{4} r_1 (r_0 + r_3)\right\}$	$4\omega_2 - \omega_1^2$	ω_3
7.7	I	ω_2	ω_3
7.8	$\exp\left\{-\frac{\omega_2}{2\omega_1} r_1 (r_0 + r_3)\right\}$	ω_1	ω_3
7.9	$\exp\left\{-\frac{\omega_2}{2\omega_1} r_1 (r_0 + r_3)\right\}$	$\omega_2 - \omega_1 \omega_3$	ω_1
7.10	I	ω_1	ω_3

8.1	I	ω_1	$\omega_3 - \beta \omega_2$
8.2	I	ω_1	ω_2
9.1	I	$\beta \omega_1 - \omega_3$	ω_2
9.2	I	ω_1	ω_2
10.1	I	$\beta \omega_1 - \omega_3$	ω_2
10.2	I	ω_1	ω_2
11.1	I	$\beta \omega_1 - \omega_3$	ω_2
11.2	I	ω_1	ω_2
12.1	I	ω_1	$\beta \omega_2 - \omega_3$
12.2	I	ω_1	ω_2
13.1	$\exp \left\{ \frac{\omega_3}{2\alpha\omega_1} (\gamma_0 + \gamma_3) \gamma_1 \right\}$	ω_1	ω_2
13.2	$\exp \left\{ \frac{\omega_3}{\alpha^2 + 2\alpha\beta\omega_1 - \omega_1^2} (\gamma_0 + \gamma_3) \times \right.$ $\left. \times \left[\frac{1}{2\alpha} (\beta\alpha - \omega_1) \gamma_1 + \frac{1}{2} \gamma_2 \right] \right\}$	ω_1	$(\omega_1^2 - 2\alpha\beta\omega_1 - \alpha^2) \omega_2 - \omega_3^2$
13.3	I	ω_1	ω_2

Подстановка (I.4.30) в уравнения (I.4.17)-(I.4.29)

(анзатц под номером N I., N2 следует подставлять в уравнение под номером N I, $1 \leq N1 \leq 13$) приводит к двумерным системам ДУЧП

$$\begin{aligned} \text{I.I} \quad & \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) \phi + [\gamma_0(w_1+1) + \gamma_3(w_1-1)] \phi_{w_1} + 2\gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_2 w_2^{-1/2} \phi = i F(\bar{\phi}, \phi), \end{aligned} \quad (\text{I.4.31})$$

$$\text{I.2} \quad \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) \phi + [\gamma_0(w_1+1) + \gamma_3(w_1-1)] \phi_{w_1} + \gamma_2 \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (\text{I.4.32})$$

$$\begin{aligned} \text{2.I} \quad & \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_3 + \gamma_2 w_2^{-1/2}) \phi + [\gamma_0(w_1+1) + \gamma_3(w_1-1)] \phi_{w_1} + \\ & + 2\gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \end{aligned} \quad (\text{I.4.33})$$

$$\text{2.2} \quad \frac{1}{2} \gamma_2 w_1^{-1/2} \phi + 2\gamma_2 w_1^{1/2} \phi_{w_1} + \gamma_3 \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (\text{I.4.34})$$

$$\text{2.3} \quad \frac{1}{2} \gamma_2 w_2^{-1/2} \phi + \gamma_0 \phi_{w_1} + 2\gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (\text{I.4.35})$$

$$\text{2.4} \quad \frac{1}{2} \gamma_2 w_2^{-1/2} \phi + (\gamma_0 - \gamma_3) \phi_{w_1} + 2\gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (\text{I.4.36})$$

$$\begin{aligned} \text{3.I} \quad & \frac{1}{2} [(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_2 w_2^{-1/2}] \phi + [\gamma_0(w_1+1) + \gamma_3(w_1-1)] \phi_{w_1} + \\ & + 2\gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \end{aligned} \quad (\text{I.4.37})$$

$$\begin{aligned} \text{4.I} \quad & (\gamma_0 + \gamma_3) \frac{2w_1 + \alpha}{2w_1(w_1 + \alpha)} \phi + (\gamma_0 + \gamma_3) \phi_{w_1} + [(\gamma_0 - \gamma_3)w_1 + \\ & + (\gamma_0 + \gamma_3)w_2(2w_1 + \alpha)w_1^{-1}(w_1 + \alpha)^{-1}] \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \end{aligned} \quad (\text{I.4.38})$$

$$4.2 \quad (\gamma_0 + \gamma_3) \phi + [\gamma_2 - \alpha(\gamma_0 + \gamma_3)] \phi_{W_1} + [(\gamma_0 + \gamma_3) W_2 + (\gamma_0 - \gamma_3)] \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.39)$$

$$4.3 \quad \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) W_1^{-1} \phi + (\gamma_0 + \gamma_3) \phi_{W_1} + [(\gamma_0 - \gamma_3) W_1 + (\gamma_0 + \gamma_3) W_2 W_1^{-1}] \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.40)$$

$$4.4 \quad \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) W_1^{-1} \phi + (\gamma_0 + \gamma_3) \phi_{W_1} + [(\gamma_0 + \gamma_3) W_2 W_1^{-1} + \alpha(\gamma_0 - \gamma_3) W_1 - \gamma_2 W_1] \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.41)$$

$$5.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_3 W_1^{-1/2} \phi + 2 W_2^{1/2} \gamma_3 \phi_{W_1} + \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.42)$$

$$5.2 \quad \gamma_2 \phi_{W_1} + \gamma_3 \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.43)$$

$$5.3 \quad \frac{1}{2} \gamma_3 W_1^{-1/2} \phi + 2 \gamma_3 W_1^{1/2} \phi_{W_1} + (\gamma_3 + \alpha W_1^{-1/2} \gamma_2) \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.44)$$

$$6.1 \quad \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_2) \phi + [\gamma_0 (W_1 + 1) + \gamma_2 (W_1 - 1)] \phi_{W_1} + \gamma_1 \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.45)$$

$$6.2 \quad \frac{1}{2} (\gamma_0 - \gamma_2) W_1^{-1} \phi + (\gamma_0 - \gamma_2) \phi_{W_1} + [(\gamma_0 + \gamma_2) W_1 + (\gamma_0 - \gamma_2) W_2 W_1^{-1}] \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.46)$$

$$6.3 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 W_2^{-1/2} \phi + \gamma_0 \phi_{W_1} + 2 \gamma_2 W_2^{1/2} \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.47)$$

$$6.4 \quad \gamma_1 \phi_{W_1} + \gamma_2 \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.48)$$

$$6.5 \quad (\gamma_0 - \gamma_2) \phi_{W_1} + \gamma_1 \phi_{W_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.49)$$

$$6.6 \quad \gamma_0 \phi_{w_1} + \gamma_2 \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi),$$

$$6.7 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_2)\phi + [\gamma_0(w_1 + 1) + \gamma_2(w_1 - 1)]\phi_{w_1} + [\gamma_1 - \alpha(\gamma_0 + \gamma_2)]\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.50)$$

$$6.8 \quad 2\alpha\gamma_1\phi_{w_1} + 3[2\alpha^2\gamma_0 + (\gamma_0 - \gamma_2)w_1]\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.51)$$

$$6.9 \quad \frac{1}{2}\gamma_2 w_1^{-1/2}\phi + 2w_1^{1/2}\gamma_2\phi_{w_1} + (\gamma_0 - \alpha\gamma_1 w_1^{-1/2})\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.52)$$

$$7.1 \quad \frac{1}{2}\gamma_2 w_2^{-1/2}\phi + (\gamma_0 + \gamma_3)\phi_{w_1} + 2w_2^{1/2}\gamma_2\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.53)$$

$$7.2 \quad \frac{1}{2}[(\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_2 w_1^{-1/2}]\phi + 2\gamma_2 w_1^{1/2}\phi_{w_1} + (\gamma_0 + \gamma_3 + \alpha\gamma_1 w_1^{1/2})\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.54)$$

$$7.3 \quad \frac{1}{2}\gamma_2 w_1^{-1/2}\phi + 2\gamma_2 w_1^{1/2}\phi_{w_1} + (\gamma_0 + \gamma_3 - 2\gamma_1 w_1^{1/2})\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.55)$$

$$7.4 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + [\gamma_1 + \alpha(\gamma_0 + \gamma_3)]\phi_{w_1} + \gamma_2\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.56)$$

$$7.5 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + \gamma_1\phi_{w_1} + \gamma_2\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.57)$$

$$7.6 \quad 4\gamma_1\phi_{w_1} + \gamma_2\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.58)$$

$$7.7 \quad \gamma_1\phi_{w_1} + \gamma_2\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.59)$$

$$7.8 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)w_1^{-1}\phi + (\gamma_0 + \gamma_3)\phi_{w_1} + \gamma_2\phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.60)$$

$$7.9 \quad \frac{1}{2} w_2^{-1} (\gamma_0 + \gamma_3) \phi + [(\gamma_0 + \gamma_3) w_1 w_2^{-1} + \gamma_1 - \gamma_2 w_2] \phi_{w_1} + \quad (I.4.61)$$

$$+ (\gamma_0 + \gamma_3) \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi),$$

(I.4.62)

$$7.10 \quad (\gamma_0 + \gamma_3) \phi_{w_1} + \gamma_2 \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi),$$

(I.4.63)

$$8.1 \quad \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) \phi + [\gamma_0 (w_1 + 1) + \gamma_3 (w_1 - 1)] \phi_{w_1} + [\alpha (\gamma_0 + \gamma_3) - \quad (I.4.64)$$

$$- \gamma_1 - \beta \gamma_2] \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi),$$

$$8.2 \quad \frac{1}{2} (\gamma_0 + \gamma_3) \phi + [\gamma_0 (w_1 + 1) + \gamma_3 (w_1 - 1)] \phi_{w_1} + \gamma_2 \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.65)$$

$$9.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 w_2^{-1/2} \phi + (\beta \gamma_0 - \gamma_3 - \alpha \gamma_1 w_2^{-1/2}) \phi_{w_1} + \quad (I.4.66)$$

$$+ 2 \gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi),$$

$$9.2 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 w_2^{-1/2} \phi + \gamma_0 \phi_{w_1} + 2 \gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.67)$$

$$10.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 w_2^{-1/2} \phi + (\beta \gamma_3 - \gamma_0 + \alpha \gamma_1 w_2^{-1/2}) \phi_{w_1} + \quad (I.4.68)$$

$$+ 2 \gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi),$$

$$10.2 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 w_2^{-1/2} \phi + \gamma_3 \phi_{w_1} + 2 \gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.69)$$

$$11.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 w_2^{-1/2} \phi + [\beta (\gamma_0 + \gamma_3) + \gamma_3 - \gamma_0 + 2 \alpha \gamma_1 w_2^{-1/2}] \phi_{w_1} + \quad (I.4.70)$$

$$+ 2 \gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi),$$

$$11.2 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 w_2^{-1/2} \phi + (\gamma_0 + \gamma_3) \phi_{w_1} + 2 \gamma_2 w_2^{1/2} \phi_{w_2} = i F(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.71)$$

$$I2.I \quad -2\alpha\gamma_1\phi_{w_1} + (\beta\gamma_2 - 3\alpha^2\gamma_0 - \frac{3}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)w_1)\phi_{w_2} = iF(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.72)$$

$$I2.2 \quad -2\alpha\gamma_1\phi_{w_1} + \gamma_2\phi_{w_2} = iF(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.73)$$

$$I3.I \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)w_1^{-1}\phi + [(\gamma_0 - \gamma_3)w_1 + (\gamma_0 + \gamma_3)w_2w_1^{-1}]\phi_{w_2} + \\ + (\gamma_0 + \gamma_3)\phi_{w_1} = iF(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.74)$$

$$I3.2 \quad (\gamma_0 + \gamma_3)(w_1 - \alpha\beta)(w_1^2 - 2\alpha\beta w_1 - \alpha^2)^{-1}\phi + (\gamma_0 + \gamma_3)\phi_{w_1} + \\ + [(\gamma_0 - \gamma_3)w_1(w_1^2 - 2\alpha\beta w_1 - \alpha^2) + (\gamma_0 + \gamma_3)w_2 \times \\ \times (w_1^{-1} + 2(w_1 - \alpha\beta)(w_1^2 - 2\alpha\beta w_1 - \alpha^2)^{-1})]\phi_{w_2} = iF(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.75)$$

$$I3.3 \quad \frac{1}{2\alpha}\gamma_4(\gamma_0 + \gamma_3)\phi + (\gamma_0 + \gamma_3)\phi_{w_1} + (\alpha\gamma_1 - w_1\gamma_2)\phi_{w_2} = \\ = iF(\bar{\phi}, \phi), \quad (I.4.76)$$

где $\phi_{w_i} = \frac{\partial \phi}{\partial w_i}$, $i = \overline{1, 2}$.

Осуществляя третий этап, получаем инвариантные анзацы вида

$$\phi(\vec{W}) = A(\vec{W})f(\tau), \quad (I.4.77)$$

где $f(\tau)$ — четырехкомпонентный спинор, подлежащий определению, $A(\vec{W})$ — 4 x 4 — матрица, $\tau = \tau(\vec{W})$ — новая инвариантная переменная.

Вид $A(\vec{W})$, $\tau(\vec{W})$ задается следующей таблицей

Таблица 4.

н/п	$A(\vec{W})$	$\tau(\vec{W})$
I.2.I	I	W_1
2.2.I	I	W_1
2.3.I	I	W_2
2.4.I	$\exp\{-\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_3 \ln w_1\}$	W_2
2.4.2	I	W_2
4.1.I	I	W_1
4.2.I	I	W_2
4.3.I	I	W_1
4.3.2	$\exp\{\frac{1}{2}\gamma_0\gamma_1 \ln w_1\}$	W_2
5.1.I	I	W_1
5.2.I	$\exp\{-\frac{1}{2}\gamma_2\gamma_3 \arctg w_1 w_2^{-1}\}$	$W_1^2 + W_2^2$
5.2.2	I	W_2

5.3.I	I	w_1
6.1.I	I	w_1
6.2.I	$\exp\left\{-\frac{1}{2} r_0 r_2 \ln w_1\right\}$	w_2
6.2.2	I	w_1
6.3.I	I	w_2
6.4.I	$\exp\left\{-\frac{1}{2} r_1 r_2 \arctg w_1 w_2^{-1}\right\}$	$w_1^2 + w_2^2$
6.4.2	I	w_2
6.5.I	$\exp\left\{-\frac{1}{2} r_0 r_2 \ln w_1\right\}$	$\delta \ln w_1 - w_2$
6.5.2	$\exp\left\{\frac{w_2}{2w_1} (r_0 - r_2) r_1\right\}$	w_1
6.5.3	I	$\delta w_1 - w_2$
6.5.4	I	w_1
6.6.I	$\exp\left\{\frac{1}{2} r_0 r_2 \ln(w_1 + w_2)\right\}$	$w_1^2 - w_2^2$
6.6.2	I	w_2

6.6.3	I	W_1
6.6.4	I	$W_1 - W_2$
6.7.I	I	W_1
6.8.I	I	W_1
6.9.I	I	W_1
7.1.1.	$\exp\left\{\frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln W_1\right\}$	W_2
7.1.2	I	W_2
7.2.I	I	W_2
7.3.I	I	W_1
7.4.I	I	$\delta W_1 - W_2$
7.4.2	I	W_1
7.5.I	$\exp\left\{-\frac{1}{2} \gamma_1 \gamma_2 \arctg W_1 W_2^{-1}\right\}$	$W_1^2 + W_2^2$
7.5.2	I	W_1

7.6.I	I	$W_2 - \delta W_1$
7.6.2	I	W_1
7.7.I	$\exp\left\{-\frac{1}{2} r_1 r_2 \operatorname{arctg} W_1 W_2^{-1}\right\}$	$W_1^2 + W_2^2$
7.7.2	I	W_2
7.8.I	$\exp\left\{\frac{1}{2} r_0 r_1 \ln W_1\right\}$	W_2
7.8.2	$\exp\left\{\frac{W_2}{2(\delta_1 - W_1)} (r_0 + r_3) \left(r_2 - \frac{\delta_2}{W_1} r_1\right)\right\}$	W_1
7.8.3	I	W_1
7.8.4	$\exp\left\{-\frac{W_2}{2\delta W_1} r_1 (r_0 + r_3)\right\}$	W_1
7.9.I	$\exp\left\{\frac{W_1}{2(\delta_2 W_2 - \delta_1 - W_2^2)} (r_0 + r_3) \times\right.$ $\left. \times (r_2 + \delta_1 W_2^{-1} r_1)\right\}$	W_2
7.9.2	$\exp\left\{\frac{W_1}{2W_2(\delta W_2 - 1)} (r_0 + r_3) r_1\right\}$	W_2
7.9.3	I	W_2
7.10.I	$\exp\left\{\frac{\delta W_1}{2} r_2 (r_0 + r_3)\right\}$	$2W_2 - \delta W_1^2$
7.10.2	I	W_1

7.I0.3	$\exp\left\{\frac{1}{2} \gamma_0 \gamma_3 \ln w_1\right\}$	$\delta \ln w_1 + w_2$
7.I0.4	$\exp\left\{\frac{w_2}{2\delta} \gamma_1 (\gamma_0 + \gamma_3)\right\}$	w_1
7.I0.5	$\exp\left\{\frac{w_2}{2w_1} (\gamma_0 + \gamma_3)(\gamma_2 + \delta \gamma_1)\right\}$	w_1
8.I.I	I	w_1
8.2.I	I	w_1
9.I.I	I	w_2
9.2.I	I	w_2
10.I.I	I	w_1
10.2.I	I	w_1
11.I.I	I	w_2
11.2.I	I	w_2
12.I.I	I	w_1
12.2.I	I	w_1
13.I.I	I	w_1

I3.2.I	I	W_1
I3.3.I	$\exp\left\{\frac{W_2}{2(\alpha^2+2\alpha\delta W_1-W_1^2)}(\gamma_0+\gamma_3) \times\right.$ $\left.\times\left[(2\delta-\frac{W_1}{\alpha})\gamma_1+\gamma_2\right]\right\}$	W_1
I3.3.2	$\exp\left\{\frac{W_2}{2\alpha W_1}(\gamma_0+\gamma_3)\gamma_1\right\}$	W_1

Подставляя анзатцы (I.4.76) в уравнения (I.4.3I)-(I.4.75) (анзатц под номером № I. № 2. № 3 следует подставлять в уравнение под номером № I. № 2), получаем следующие нелинейные системы ОДУ

$$I.2.I \quad \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_3)f + [\gamma_0(\tau+1)+\gamma_3(\tau-1)]\dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$2.2.I \quad \frac{1}{2}\gamma_2\tau^{-1/2}f + 2\gamma_2\tau^{1/2}\dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$2.3.I \quad \frac{1}{2}\gamma_2\tau^{-1/2}f + 2\gamma_2\tau^{1/2}\dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$2.4.I \quad \frac{1}{2}(\gamma_2\tau^{-1/2}+\gamma_0-\gamma_3)f + 2\gamma_2\tau^{1/2}\dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$2.4.2 \quad \frac{1}{2}\gamma_2\tau^{-1/2}f + 2\gamma_2\tau^{1/2}\dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$4.I.I \quad \frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma_3)\frac{2\tau+\alpha}{\tau(\tau+\alpha)}f + (\gamma_0+\gamma_3)\dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$4.2.I \quad (\gamma_0+\gamma_3)f + [\gamma_2-\alpha(\gamma_0+\gamma_3)]\dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$4.3.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3) \tau^{-1} f + (\gamma_0 + \gamma_3) \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$4.3.2 \quad (\gamma_0 + \gamma_3) f + [\gamma_0 - \gamma_3 + (\gamma_0 + \gamma_3) \tau] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$5.1.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_3 \tau^{-1/2} f + 2 \gamma_3 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$5.2.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_3 \tau^{-1/2} f + 2 \gamma_3 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$5.2.2 \quad \gamma_3 \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$5.3.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_3 \tau^{-1/2} f + 2 \gamma_3 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.1.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_2) f + [\gamma_0 - \gamma_2 + (\gamma_0 + \gamma_2) \tau] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.2.1 \quad (\gamma_0 - \gamma_2) f + [(\gamma_0 - \gamma_2) \tau + \gamma_0 + \gamma_2] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.2.2 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_2) \tau^{-1} f + (\gamma_0 - \gamma_2) \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.3.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 \tau^{-1/2} f + 2 \gamma_2 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.4.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 \tau^{-1/2} f + 2 \gamma_2 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.4.2 \quad \gamma_2 \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.5.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_2) f + [\delta(\gamma_0 - \gamma_2) - \gamma_1] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.5.2 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_2) \tau^{-1} f + (\gamma_0 - \gamma_2) \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.5.3 \quad [\delta(\gamma_0 - \gamma_2) - \gamma_1] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.5.4 \quad (\gamma_0 - \gamma_2) \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.6.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3) f + [\gamma_0 - \gamma_3 + (\gamma_0 + \gamma_3) \varepsilon] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.6.2 \quad \gamma_2 \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.6.3 \quad \gamma_0 \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.6.4 \quad (\gamma_0 - \gamma_2) \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.7.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3) f + [\gamma_0 - \gamma_3 + (\gamma_0 + \gamma_3) \varepsilon] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.8.1 \quad 2\alpha \gamma_1 \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$6.9.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 \varepsilon^{-1/2} f + 2 \gamma_2 \varepsilon^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$7.1.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_2 \varepsilon^{-1/2} + \gamma_0 + \gamma_3) f + (\gamma_0 + \gamma_3) \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$7.1.2 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 \varepsilon^{-1/2} f + 2 \gamma_2 \varepsilon^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$7.2.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3 + \gamma_2 \varepsilon^{-1/2}) f + 2 \gamma_2 \varepsilon^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$7.3.1 \quad \frac{1}{2} \gamma_2 \varepsilon^{-1/2} f + 2 \gamma_2 \varepsilon^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$7.4.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3) f + [\delta \gamma_1 - \gamma_2 + \alpha \delta(\gamma_0 + \gamma_3)] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$7.4.2 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)f + [\gamma_1 + \alpha(\gamma_0 + \gamma_3)]\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.5.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3 + \gamma_2 \tau^{-1/2})f + 2\gamma_2 \tau^{1/2}\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.5.2 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)f + \gamma_1\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.6.1 \quad (\gamma_2 - 4\delta\gamma_1)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.6.2 \quad 4\gamma_2\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.7.1 \quad \frac{1}{2}\gamma_2 \tau^{-1/2}f + 2\gamma_2 \tau^{1/2}\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.7.2 \quad \gamma_1\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.8.1 \quad (\gamma_0 + \gamma_3)f + \gamma_2\dot{f} = iF(\bar{f}, f).$$

$$7.8.2 \quad (\gamma_0 + \gamma_3)(\delta_1 - \delta_2\gamma_4)[2\tau(\delta_1 - \tau)]^{-1}f + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.8.3 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\tau^{-1}f + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.8.4 \quad \frac{1}{2\delta\tau}(\gamma_0 + \gamma_3)(\delta + \gamma_4)f + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.9.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3) \frac{\delta_1 + \tau(1 + \delta_1)\gamma_1\gamma_2}{\delta_1 - \delta_2\tau + \tau^2} f + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.9.2 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)(\delta - \gamma_1\gamma_2)(\delta\tau - 1)^{-1}f + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.9.3 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)f + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$7.10.1 \quad 2\gamma_2 \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$7.10.2 \quad (\gamma_0 + \gamma_3) \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$7.10.3 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3) \dot{f} + [\gamma_2 + \delta(\gamma_0 + \gamma_3)] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$7.10.4 \quad \frac{1}{2\delta} \gamma_4 (\gamma_0 + \gamma_3) \dot{f} + (\gamma_0 + \gamma_3) \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$7.10.5 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)(1 + \delta\gamma_1\gamma_2)\tau^{-1}\dot{f} + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$8.1.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3) \dot{f} + [\gamma_0 - \gamma_3 + (\gamma_0 + \gamma_3)\tau] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$8.2.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3) \dot{f} + [\gamma_0 - \gamma_3 + (\gamma_0 + \gamma_3)\tau] \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$9.1.1 \quad \frac{1}{2}\gamma_2 \tau^{-1/2} \dot{f} + 2\gamma_2 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$9.2.1 \quad \frac{1}{2}\gamma_2 \tau^{-1/2} \dot{f} + 2\gamma_2 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$10.1.1 \quad \frac{1}{2}\gamma_2 \tau^{-1/2} \dot{f} + 2\gamma_2 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$10.2.1 \quad \frac{1}{2}\gamma_2 \tau^{-1/2} \dot{f} + 2\gamma_2 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$11.1.1 \quad \frac{1}{2}\gamma_2 \tau^{-1/2} \dot{f} + 2\gamma_2 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$11.2.1 \quad \frac{1}{2}\gamma_2 \tau^{-1/2} \dot{f} + 2\gamma_2 \tau^{1/2} \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$12.1.1 \quad -2\alpha\gamma_1 \dot{f} = i F(\bar{f}, f),$$

$$12.2.1 \quad -2\alpha\gamma_1\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$13.1.1 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\tau^{-1}f + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$13.2.1 \quad (\gamma_0 + \gamma_3)(\tau - \alpha\beta)(\tau^2 - 2\alpha\beta\tau - \alpha^2)^{-1}\dot{f} + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$13.3.1 \quad (\gamma_0 + \gamma_3)(\tau - \alpha\beta)(\tau^2 - 2\alpha\beta\tau - \alpha^2)^{-1}\dot{f} + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

$$13.3.2 \quad \frac{1}{2}(\gamma_0 + \gamma_3)\tau^{-1}f + (\gamma_0 + \gamma_3)\dot{f} = iF(\bar{f}, f),$$

где $\dot{f} = \frac{df}{d\tau}$, $\alpha, \beta, \delta, \delta_1, \delta_2$ — произвольные константы.

Теперь для того, чтобы найти точное решение исходного уравнения (1.4.1), необходимо проинтегрировать одну из систем ОДУ, под номером № 1. № 2. № 3, подставить результат в анзац под номером № 1. № 2 и затем подставить полученный результат в анзац под номером № 1.

§ 5. О применении метода Ли-Бэклунда к исследованию симметричных свойств уравнения Дирака.

В настоящем параграфе с помощью метода Ли-Бэклунда изучается нелокальная симметрия уравнений Дирака

$$\begin{aligned} i\gamma_\mu \psi_{x_\mu} + m\psi &= 0, \\ i\bar{\psi}_{x_\mu} \gamma_\mu - m\psi &= 0, \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

$\psi(x)$ — четырехкомпонентный спинор, $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma_0$,
матрицы γ_μ выбраны в виде

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ \sigma_a & 0 \end{pmatrix}$$

$I, 0$ - двумерные, соответственно, единичная и нулевая матрицы, σ_a - матрицы Паули.

Эта задача полностью решена в классе операторов симметрии первого порядка, линейно зависящих от первых производных.

Новый метод исследования симметричных свойств дифференциальных уравнений, предложенный в работе [32], позволил установить, что уравнение (I.5.1), кроме хорошо изученной релятивистской инвариантности, обладает дополнительной нелокальной симметрией (смотри [II, 37]). Эта симметрия в принципе не может быть получена в рамках традиционного подхода С.Ли. Для установления нелокальной симметрии используется обобщенный метод С.Ли - метод Ли-Бэклунда (смотри [I7, 62]).

Перепишем (I.5.1) в эквивалентной форме

$$\begin{aligned} i \Gamma_\mu \psi_{x_\mu} + m \psi &= 0, \\ \Gamma_4 \Gamma_5 \psi + \Gamma_2 \psi^* &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.5.2})$$

где $\Gamma_\mu = \begin{pmatrix} \gamma_\mu & 0 \\ 0 & \gamma_\mu \end{pmatrix}$, $\psi(x)$ - восьмикомпонентный спинор,

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_4 \\ \gamma_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma_4 \\ -i\gamma_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_6 = \begin{pmatrix} \gamma_4 & 0 \\ 0 & -\gamma_4 \end{pmatrix}.$$

Операторы симметрии ищем в виде

$$X = \eta^\sigma(\psi, \psi_\mu) \partial_{\psi^\sigma} + \sum_{\substack{0 \leq \mu_i \leq 3 \\ 1 \leq i \leq k \\ k \geq 1}} (D_{\mu_1} D_{\mu_2} \dots D_{\mu_k} \eta^\sigma) \partial_{\psi_{\mu_1 \dots \mu_k}^\sigma}, \quad (\text{I.5.3})$$

где

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \psi_\mu^\sigma \partial_\psi^\sigma + \dots + \psi_{\mu\gamma_1 \dots \gamma_k}^\sigma \partial_{\psi_{\gamma_1 \dots \gamma_k}^\sigma} + \dots$$

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^\sigma = \frac{\partial^k \psi^\sigma}{\partial x_{\alpha_1} \dots \partial x_{\alpha_k}}, \quad \partial_{\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^\sigma} = \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha_1 \dots \alpha_k}^\sigma}, \quad \sigma = \overline{0,7},$$

(мы используем обозначения, принятые в [17]).

Из формулы (I.5.3) следует, что оператор X полностью определяется восьмикомпонентным спинором $\eta = \{\eta^\sigma, \sigma = \overline{0,7}\}$. Поэтому, для краткости, вместо (I.5.3) будем писать $X = \eta$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема I.5.I. Базис операторов симметрии уравнения (I.5.I) в классе (I.5.3) при $\eta = A_\mu \psi_\mu + \Phi(\psi)$, где A_μ — постоянные 8-рядные матрицы, $\Phi(\psi)$ — восьмикомпонентный спинор, составляют следующие операторы

- 1) $\hat{I} = \psi, \quad \hat{Q}_a = Q_a \psi,$
- 2) $P_\mu^{(0)} = \psi_\mu, \quad P_\mu^{(a)} = Q_a P_\mu^{(0)},$
- 3) $\sum_{\mu\gamma}^{(0)} = i(I - i\tilde{\Gamma}_4)(\Gamma^\mu \psi_\gamma - \Gamma^\gamma \psi_\mu) - 2im\Omega^{\mu\gamma}\psi, \quad (I.5.4)$
- 4) $\sum_{\mu\gamma}^{(a)} = Q_a \sum_{\mu\gamma}^{(0)},$
- 5) $\sum_{\mu}^{(0)} = \tilde{\Gamma}_4 \psi_\mu + im\Gamma^\mu \tilde{\Gamma}_4 \psi, \quad \sum_{\mu}^{(a)} = Q_a \sum_{\mu}^{(0)},$

где $Q_1 = \Gamma_4 \Gamma_5, \quad Q_2 = i\Gamma_5 \Gamma_6, \quad Q_3 = i\Gamma_4 \Gamma_6,$

$$\Gamma^\mu = g^{\mu\gamma} \Gamma_\gamma, \quad \Omega^{\mu\gamma} = \frac{1}{4}(\Gamma^\mu \Gamma^\gamma - \Gamma^\gamma \Gamma^\mu), \quad \tilde{\Gamma}_4 = \Gamma_0 \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3.$$

Доказательство. Действуя оператором (I.5.3) на уравнение (I.5.2), получаем определяющие уравнения для нахождения A_μ и

$$\left\{ \eta_{\psi\tau}^{\sigma} \right\}_{\sigma,\tau=0}^7 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ B_{\tau\tau} \right\}_{\sigma,\tau=0}^7$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\mu} B \Psi_{\mu} + \Gamma_{\mu} A_{\nu} \Psi_{\mu\nu} - im \eta \\ [i \Gamma_{\mu} \Psi_{\mu} + m \Psi = 0] \end{aligned} \right| = 0 \quad (\text{I.5.5})$$

где $\Gamma_4 \Gamma_5 \eta + \Gamma_2 \eta^* = 0$,
 $[i \Gamma_{\mu} \Psi_{\mu} + m \Psi = 0]$ — совокупность всех дифференциальных следствий уравнения.

Учитывая дифференциальные следствия, получаем из (I.5.5), что

$$\begin{aligned} & \Gamma_0 B (-\Gamma_0 \Gamma_a \Psi_a + im \Gamma_0 \Psi) + \Gamma_a B \Psi_a + \Gamma_0 A_0 (\Psi_{aa} - m^2 \Psi) + \\ & + (\Gamma_0 A_a + \Gamma_a A_0) (-\Gamma_0 \Gamma_b \Psi_{ba} + im \Gamma_0 \Psi_a) + \Gamma_a A_b \Psi_{ab} - im \eta = 0, \end{aligned} \quad (\text{I.5.6})$$

$$\Gamma_4 \Gamma_5 \eta + \Gamma_2 \eta^* = 0.$$

Расщепляя первое из уравнений (I.5.6) по независимым переменным Ψ_{ab} , получаем уравнения на A_{μ}

$$\begin{aligned} & -\Gamma_0 A_0 \Gamma_0 \Gamma_b - \Gamma_a A_0 \Gamma_0 \Gamma_b + \Gamma_a A_b + \Gamma_b A_a - \\ & - (\Gamma_0 A_b + \Gamma_b A_0) \Gamma_0 \Gamma_b = 0, \quad a \neq b, \\ & \Gamma_0 A_0 - (\Gamma_0 A_a + \Gamma_a A_0) + \Gamma_a A_a = 0. \end{aligned} \quad (\text{I.5.7})$$

(по a — не суммировать).

Чтобы решить систему алгебраических уравнений (I.5.7), представим матрицы A_{μ} в виде

$$A_{\mu} = \begin{pmatrix} A_{\mu}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A_{\mu}^{(2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{\mu}^{(3)} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{\mu}^{(4)} \end{pmatrix} \quad (\text{I.5.8})$$

и разложим четырехрядные матрицы $A_{\mu}^{(k)}$ по базису γ -матриц

(аналогично тому, как это было сделано в § I).

$$A_{\mu}^{(k)} = a^{\mu(k)} I + b_{\alpha}^{\mu(k)} \gamma^{\alpha} + C_{\alpha\beta}^{\mu(k)} S^{\alpha\beta} + d_{\alpha}^{\mu(k)} \gamma_4 \gamma^{\alpha} + e^{\mu(k)} \gamma_4.$$

Подставляя эти выражения в (I.5.7) и решая систему алгебраических уравнений относительно $a^{\mu(k)}$, $b_{\alpha}^{\mu(k)}$, $C_{\alpha\beta}^{\mu(k)}$, $d_{\alpha}^{\mu(k)}$, $e^{\mu(k)}$ получаем

$$\begin{aligned} b_0^{0(k)} &= -b_a^{a(k)}, \quad b_7^{\mu(k)} = -b_{\mu}^{\nu(k)}, \quad \mu \neq \nu, \\ d_0^{0(k)} &= -d_a^{a(k)}, \quad d_7^{\mu(k)} = -d_{\mu}^{\nu(k)}, \quad \mu \neq \nu, \\ C_{ab}^{a(k)} &= -C_{0b}^{0(k)}, \quad C_{0b}^{a(k)} = -C_{ab}^{0(k)}, \quad C_{bc}^{a(k)} = -C_{ac}^{b(k)}, \quad k = \overline{1,4}, \end{aligned} \quad (I.5.9)$$

Расщепляя (I.5.6) по независимым переменным ψ_a , имеем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_a B + im(\Gamma_0 A_a + \Gamma_a A_0) \Gamma_0 + im A_0 \Gamma_0 \Gamma_a - \Gamma_0 B \Gamma_0 \Gamma_a &= 0, \\ im \Gamma_0 B \Gamma_0 \psi - m^2 \Gamma_0 A_0 \psi - im \Phi + m^2 A_0 \Gamma_0 \psi &= 0, \\ \Gamma_4 \Gamma_5 \Phi + \Gamma_2 \Phi^* &= 0. \end{aligned} \quad (I.5.10)$$

Подставляя (I.5.8), (I.5.9) в (I.5.10) и решая полученные соотношения, находим, что операторы (I.5.4) исчерпывают собой множество линейно независимых решений уравнений (I.5.5). Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема I.5.2. Максимальный набор операторов симметрии уравнения (I.5.1) при $m=0$ вида $X = A_{\mu} \psi_{\mu} + \Phi(\psi)$,

$$\Phi = \{ \phi^{\sigma}(\psi), \quad \sigma = \overline{0,7} \}.$$

состоит из следующих операторов

$$1) \quad \hat{I} = \Psi, \quad \hat{Q}_a = Q_a \Psi,$$

$$2) \quad P_{\mu}^{(0)} = \Psi_{\mu}, \quad P_{\mu}^{(a)} = Q_a \Psi_{\mu},$$

$$3) \quad \sum_{\mu\nu}^{(0)} = i(I - \tilde{\Gamma}_4)(\Gamma^{\mu}\Psi_{\nu} - \Gamma^{\nu}\Psi_{\mu}),$$

$$\sum_{\mu\nu}^{(a)} = Q_a \sum_{\mu\nu},$$

$$4) \quad \sum_{\mu}^{(0)} = \tilde{\Gamma}_4 \Psi_{\mu}, \quad \sum_{\mu}^{(a)} = Q_a \sum_{\mu}^{(0)},$$

$$5) \quad \sum^{(0)} = i \tilde{\Gamma}_4 \Psi, \quad \sum^{(a)} = Q_a \sum^{(0)}, \quad a = \overline{1,6}.$$

где

$$Q_1 = \Gamma_4 \Gamma_5, \quad Q_2 = i \Gamma_5 \Gamma_6, \quad Q_3 = i \Gamma_4 \Gamma_6,$$

$$Q_4 = \Gamma_4, \quad Q_5 = \Gamma_5, \quad Q_6 = \Gamma_6.$$

Г Л А В А II

О СЕМЕЙСТВАХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СПИНОРНОГО, ВЕКТОРНОГО И СКАЛЯР- НОГО ПОЛЕЙ

Анзатцы, построенные в главе I для нахождения точных решений систем нелинейных спинорных уравнений, могут быть применены и для получения широких классов частных решений систем ДУЧП, описывающих взаимодействие спинорного поля со скалярным или электромагнитным полями.

В этой главе найдены семейства частных решений системы нелинейных ДУЧП, описывающей взаимодействие спинорного и комплексного скалярного полей и широкий класс точных решений классических уравнений электродинамики, зависящий от произвольных функций. Кроме того, с помощью метода нелокальной линеаризации получены общие решения двумерных систем Гейзенберга-Тирринга-Дирака и Максвелла-Дирака.

§ I. Редукция и точные решения уравнений, описывающих взаимодействие спинорного и скалярного полей.

В этом параграфе будут получены многопараметрические семейства точных решений системы нелинейных уравнений, описывающей взаимодействие спинорного поля $\psi(x) = \{\psi^0(x), \psi^1(x), \psi^2(x), \psi^3(x_0)\}$ с комплексным скалярным полем $u(x)$

$$\gamma_\mu p^\mu \psi = [\lambda_1 |u|^{k_1} + \lambda_2 (\bar{\psi}\psi)^{k_2}] \psi, \quad (2.1.1)$$

$$p_\mu p^\mu u = [\mu_1 |u|^{k_1} + \mu_2 (\bar{\psi}\psi)^{k_2}]^2 u,$$

где

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3), |u| = (u u^*)^{1/2},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, k_1, k_2$ — константы.

Отметим, что система (2.1.1) при $\lambda_1 = \mu_2 = 0$, $k_1 = k_2 = 0$ распадается на уравнение Дирака с массой λ_2 и уравнение Клейна-Гордона с массой μ_1 . При $\lambda_1 = \mu_2 = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1/3$ получаем нелинейные конформноинвариантные уравнения Дирака-Гюрги [67] и Даламбера [15, 66].

Симметричные свойства системы описываются следующими утверждениями.

Теорема 2.1.1. Система уравнений (2.1.1) при $k_1 k_2 \neq 0$ инвариантна относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}$ (1,3).

Доказательство. Релятивистская инвариантность (2.1.1) очевидна, поэтому достаточно доказать, что система (2.1.1) допускает группу специальных масштабных преобразований

$$x_{\mu}' = x_{\mu} e^{\theta}, \quad \psi' = e^{-\frac{\theta}{2k_2}} \psi, \quad u' = e^{-\frac{\theta}{k_1}} u, \quad \theta = \text{Const.} \quad (2.1.2)$$

Убедимся в этом прямой проверкой. Переходя в (1.2.1) к штрихованным переменным по формуле (2.1.2), получаем

$$\begin{aligned} & \{ \gamma_{\mu} p^{\mu} \psi' - [\lambda_1 |u'|^{k_1} + \lambda_2 (\bar{\psi}' \psi')^{k_2}] \psi' \} = \\ & = e^{-\theta(1+\frac{1}{2k_2})} \{ \gamma_{\mu} p^{\mu} \psi - [\lambda_1 |u|^{k_1} + \lambda_2 (\bar{\psi} \psi)^{k_2}] \psi \}, \\ & \{ p_{\mu}' p^{\mu} u' - [\mu_1 |u'|^{k_1} + \mu_2 (\bar{\psi}' \psi')^{k_2}]^2 u' \} = \\ & = e^{-\theta(2+\frac{1}{k_1})} \{ p_{\mu} p^{\mu} u - [\mu_1 |u|^{k_1} + \mu_2 (\bar{\psi} \psi)^{k_2}]^2 u \}, \end{aligned}$$

где

$$p_{\mu}' = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}'}$$

Следовательно, преобразования (2.1.2) переводят решение

(2.1.12) $\psi(x), u(x)$ в другое решение $\psi'(x'), u'(x')$, что и требовалось доказать.

Теорема 2.1.1. Система ДУЧП (2.1.1) инвариантна относительно конформной группы, если и только если $k_1 = 1$, $k_2 = 1/3$.

Доказательство. Необходимость. Пусть (2.1.1) допускает группу G (1,3), тогда оно, в частности, допускает группу преобразований вида (2.1.2) при $k_1 = 1$, $k_2 = 1/3$. Делая замену переменных в (2.1.1) согласно формул (2.1.2) и учитывая требование инвариантности, получаем

$$\lambda_1 |u|^{k_1} + \lambda_2 (\bar{\psi} \psi)^{k_2} \equiv \lambda_1 |u|^{k_1} e^{(k_1-1)\theta} + \lambda_2 (\bar{\psi} \psi)^{k_2} e^{(3k_2-1)\theta}, \quad (2.1.3)$$

$$\mu_1 |u|^{k_1} + \mu_2 (\bar{\psi} \psi)^{k_2} \equiv \mu_1 |u|^{k_1} e^{(k_1-1)\theta} + \mu_2 (\bar{\psi} \psi)^{k_2} e^{(3k_2-1)\theta},$$

Из (2.1.3) с необходимостью следует, что $k_1 = 1$, $k_2 = 1/3$. Достаточность. Конечные преобразования группы специальных конформных преобразований имеют вид [56,57]

$$x_\mu' = (x_\mu - c_\mu x \cdot x) \sigma^{-1}(x),$$

$$\psi' = \sigma(x) [1 - (\gamma \cdot c)(\gamma \cdot x)] \psi, \quad (2.1.4)$$

$$u' = \sigma(x) u(x), \quad \sigma(x) = 1 - 2c \cdot x + (c \cdot c)(x \cdot x).$$

Делая замену в (2.1.1) согласно (2.1.4) при $k_1 = 1$, $k_2 = 1/3$, получаем

$$\begin{aligned} & \{ \gamma_\mu p^\mu \psi' - [\lambda_1 |u'| + \lambda_2 (\bar{\psi}' \psi')^{1/3}] \psi' \} = \\ & = \sigma^2(x) [1 - (\gamma \cdot c)(\gamma \cdot x)] \{ \gamma_\mu p^\mu \psi - [\lambda_1 |u| + \lambda_2 (\bar{\psi} \psi)^{1/3}] \psi \}, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

$$\begin{aligned} & \{ p'_\mu p^\mu u' - [\mu_1 |u'| + \mu_2 (\bar{\psi}' \psi')^{1/3}]^2 u' \} = \\ & = \sigma^3(x) \{ p_\mu p^\mu u - [\mu_1 |u| + \mu_2 (\bar{\psi} \psi)^{1/3}]^2 u \}. \end{aligned}$$

Из (2.1.5) следует, что уравнения (2.1.1) инвариантны относительно группы (2.1.4). Инвариантность относительно остальных преобразований из группы C (1,3) проверяется аналогично. Замечание. Инвариантность системы (2.1.1) при $k_1 = 1$, $k_2 = 1/3$ относительно преобразований (2.1.4) дает возможность строить новые нетривиальные классы точных решений из уже известных с помощью формулы размножения решений [56,57]

$$\begin{aligned}\psi_2(x) &= \sigma^{-2}(x) [1 - (\gamma \cdot x)(\gamma \cdot c)] \psi_1(x'), \\ u_2(x) &= \sigma^{-1}(x) u_1(x'), \\ x' &= \{x_{\mu}' = (x_{\mu} - c_{\mu} x \cdot x) \sigma^{-1}(x)\}.\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

Для отыскания частных решений системы (2.1.1) используем следующий анзац

$$\begin{aligned}\psi(x) &= [ig_1(\omega) + g_2(\omega)\gamma_4 - (if_1(\omega) + \gamma_4 f_2(\omega))\gamma_{\mu} p^{\mu}\omega] \chi, \\ u(x) &= \phi(\omega),\end{aligned}\tag{2.1.7}$$

где g_1, g_2, f_1, f_2 — некоторые действительные функции, ϕ — комплексная функция; $\omega = \omega(x)$ — новая инвариантная переменная, χ — постоянный четырехкомпонентный спинор.

Подставляя (2.1.7) в (2.1.1) получаем, что необходимым и достаточным условием того, чтобы (2.1.7) было решением (2.1.1) является выполнение условий

$$\begin{aligned}p_{\mu} p^{\mu}\omega + A(\omega) &= 0, \\ (p_{\mu}\omega)(p^{\mu}\omega) + B(\omega) &= 0,\end{aligned}\tag{2.1.8}$$

где A, B — действительные функции от ω .

При этом функции g_1, g_2, f_1, f_2, ϕ удовлетворяют системе нелинейных ОДУ.

$$\begin{aligned} B \ddot{\phi} + A \dot{\phi} &= -\left\{ \mu_1 |\phi|^{k_1} + \tilde{\mu}_2 [g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^{k_2} \right\}^2 \phi, \\ B \dot{f}_1 + A f_1 &= \left\{ \lambda_1 |\phi|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2 [g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^{k_2} \right\} g_1, \\ \dot{g}_1 &= -\left\{ \lambda_1 |\phi|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2 [g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^{k_2} \right\} f_1, \\ \dot{g}_2 &= \left\{ \lambda_1 |\phi|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2 [g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^{k_2} \right\} f_2, \\ B \dot{f}_2 + A f_2 &= -\left\{ \lambda_1 |\phi|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2 [g_1^2 - g_2^2 + B(f_1^2 - f_2^2)]^{k_2} \right\} g_1, \\ \tilde{\lambda}_2 &= \lambda_2 (\bar{\chi} \chi)^{k_2}, \quad \tilde{\mu}_2 = \mu_2 (\bar{\chi} \chi)^{k_2}, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

точка обозначает дифференцирование по переменной ω .

Коллинз в работе [51] исследовал совместность системы (2.1.8) в случае, когда число независимых переменных равно трем и доказал, что (2.1.8) совместна, если и только если

- 1) $B(\omega) \equiv 0, \quad A(\omega) \equiv 0,$
- 2) $B(\omega) \equiv \pm 1, \quad A(\omega) \equiv N(\omega + \theta)^{-1}, \quad N = -1, 0, 1, 2.$

В каждом из этих случаев было построено общее решение системы (2.1.8).

Обобщив эти результаты на случай четырех переменных, мы получили следующие классы частных решений системы (2.1.8)

$$\begin{aligned} \text{I: } A(\omega) &= -m\omega^{-1}, \quad m = \overline{1, 2}; \quad B(\omega) = -1 \\ m &, \quad \omega = \left\{ (a \cdot y)^2 + (b \cdot y)^2 + (c \cdot y)^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

$$a \cdot a = b \cdot b = c \cdot c = -1, \quad a \cdot b = b \cdot c = a \cdot c = 0, \quad y_\mu = x_\mu + \theta_\mu,$$

$$m = 1, \quad \omega = \left\{ (a \cdot y)^2 + (b \cdot y)^2 \right\}^{1/2}; \quad (2.1.11)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad A(\omega) &= 0, \quad B(\omega) = -1 \\ \omega &= a \cdot y + F(b \cdot y), \\ a \cdot a &= -1, \quad b \cdot b = a \cdot b = 0, \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

$y_\mu = x_\mu + \theta_\mu$, F - произвольная дифференцируемая функция.

$$\begin{aligned} 3. \quad A(\omega) &= 0, \quad B(\omega) = 1 \\ \omega &= a \cdot y; \quad a \cdot a = 1, \quad y_\mu = x_\mu + \theta_\mu; \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

$$\begin{aligned} 4. \quad A(\omega) &= m\omega^{-1}, \quad B(\omega) = 1, \quad m = \overline{1, 3} \\ m &= 1, \quad \omega = [(a \cdot y)^2 - (b \cdot y)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

$$\begin{aligned} a \cdot a &= 1, \quad b \cdot b = -1, \quad a \cdot b = 0, \quad y_\mu = x_\mu + \theta_\mu, \\ m &= 2, \quad \omega = [(a \cdot y)(b \cdot y) - (c \cdot y)^2]^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

$$\begin{aligned} a \cdot a &= b \cdot b = c \cdot b = c \cdot a = 0, \quad a \cdot b = 2, \quad c \cdot c = -1, \quad y_\mu = x_\mu + \theta_\mu, \\ m &= 3, \quad \omega = [x \cdot x + 2\theta \cdot x + \theta \cdot \theta]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Общее решение системы нелинейных ОДУ (2.1.9) удается получить лишь при $A(\omega) = 0$, в остальных случаях получены частные решения. Приводим полученный результат, минуя промежуточные выкладки

$$\begin{aligned} A(\omega) &= -m\omega^{-1}, \quad B(\omega) = -1, \quad m = \overline{1, 2} \\ f_i(\omega) &= c_i \omega^{-1/2 k_2}, \quad g_k(\omega) = \mp (-1)^k (1 - 2k_2 m)^{1/2} c_k \omega^{-1/2 k_2}, \\ \phi(\omega) &= E \omega^{-1/k_1}, \quad i, k = \overline{1, 2}, \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

причем константы c_1 , c_2 , E удовлетворяют условиям

$$\left[(m-1)k_1 - 1 \right] k_1^{-2} + \left\{ \mu_1 |E|^{k_1} + \tilde{\mu}_2 [2mk_2(c_1^2 - c_2^2)]^{k_2} \right\}^2 = 0 \quad (2.I.I8)$$

$$\pm (1-2k_2m)^{1/2} - 2k_2 \left\{ \lambda_1 |E|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2 [2mk_2(c_1^2 - c_2^2)]^{k_2} \right\} = 0,$$

$$k_2 < 1/2m, \quad k_1 < 1/(m-1)$$

2. $A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = -1$

$$f_1 = c_1 \operatorname{ch} \left\{ -\lambda_1 \int |\phi(\omega)|^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (c_3^2 - c_1^2)^{k_2} \omega + c_2 \right\},$$

$$f_2 = c_3 \operatorname{ch} \left\{ \lambda_1 \int |\phi(\omega)|^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (c_3^2 - c_1^2)^{k_2} \omega + c_4 \right\}, \quad (2.I.I9)$$

$$g_1 = c_1 \operatorname{sh} \left\{ -\lambda_1 \int |\phi(\omega)|^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (c_3^2 - c_1^2)^{k_2} \omega + c_2 \right\},$$

$$g_2 = c_3 \operatorname{sh} \left\{ \lambda_1 \int |\phi(\omega)|^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (c_3^2 - c_1^2)^{k_2} \omega + c_4 \right\},$$

$$\phi(\omega) = \rho(\omega) \exp \{ i\theta(\omega) \}, \quad \text{причем}$$

$$\int_{\rho(\omega)}^{\rho(\omega)} [a_-(z) + c_6]^{-1/2} dz = \omega + c_5, \quad \theta(\omega) = \int \rho^{-1/2}(\omega) d\omega + c_8,$$

где

$$a_-(z) = \frac{\mu_1^2}{k_1+1} z^{2(k_1+1)} + \tilde{\mu}_2^2 (c_3^2 - c_1^2)^{2k_2} z^2 +$$

$$+ 4 \frac{\mu_1 \tilde{\mu}_2}{k_1+2} (c_3^2 - c_1^2)^{k_2} z^{k_1+2} + 2c_5^2 z;$$

3. $A(\omega) = 0, \quad B(\omega) = 1$

$$f_1 = c_1 \sin \left\{ \lambda_1 \int |\phi(\omega)|^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (c_1^2 - c_3^2)^{k_2} \omega + c_2 \right\},$$

$$f_2 = c_3 \cos \left\{ \lambda_1 \int |\phi(\omega)|^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (c_1^2 - c_3^2)^{k_2} \omega + c_4 \right\},$$

$$g_1 = c_1 \cos \left\{ \lambda_1 \int |\phi(\omega)|^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (c_1^2 - c_3^2)^{k_2} \omega + c_2 \right\}, \quad (2.II)$$

$$g_2 = c_3 \sin \left\{ \lambda_1 \int |\phi(\omega)|^{k_1} d\omega + \tilde{\lambda}_2 (c_1^2 - c_3^2)^{k_2} \omega + c_4 \right\}$$

$$\phi(\omega) = \rho(\omega) \exp \{ i\theta(\omega) \}, \quad \text{причем}$$

$$\int_{\rho(\omega)}^{\rho(\omega)} [a_+(z) + c_6]^{-1/2} dz = \omega + c_6, \quad \theta(\omega) = \int \rho^{1/2}(\omega) d\omega + c_8.$$

где

$$a_+(z) = -\frac{\mu_1^2}{k_1+1} z^{2(k_1+1)} - \tilde{\mu}_2^2 (c_1^2 - c_3^2)^{2k_2} z^2 - \\ - 4 \frac{\mu_1 \tilde{\mu}_2}{k_1+2} (c_1^2 - c_3^2)^{k_2} z^{k_1+2} + 2c_5 z$$

4. $A(\omega) = m\omega^{-1}$, $B(\omega) = 1$, $m = \overline{1, 3}$

$$f_i = c_i \omega^{-1/2k_2}, \quad (2.1.21)$$

$$g_k = \mp (-1)^k (2mk_2 - 1)^{1/2} c_k \omega^{-1/2k_2}, \quad i, k = \overline{1, 2},$$

$$\phi(\omega) = E \omega^{-1/k_1}, \quad c_1, c_2, E \quad \text{константы, удовлет-}$$

воряющие следующим условиям

$$(k_1+1)k_1^{-2} - mk_1^{-1} + \left\{ \mu_1 |E|^{k_1} + \tilde{\mu}_2 [2mk_2(c_1^2 - c_2^2)]^{k_2} \right\}^2 = 0, \\ \pm (2mk_2 - 1)^{1/2} - 2k_2 \left\{ \lambda_1 |E|^{k_1} + \tilde{\lambda}_2 [2mk_2(c_1^2 - c_2^2)]^{k_2} \right\} = 0, \quad (2.1.22)$$

$$k_1 > 1/(m-1), \quad k_2 > 1/2m$$

5. $A(\omega) = m\omega^{-1}$, $B(\omega) = 1$, $m = \overline{2, 3}$; $k_1 = 2(m-1)^{-1}$, $k_2 = m^{-1}$

$$f_k = (-1)^k \theta \omega g_k(\omega), \quad (2.1.23)$$

$$g_k = c_k (1 + \theta^2 \omega^2)^{-(m+1)/2}, \quad k = \overline{1, 2},$$

$$\phi = E (1 + \theta^2 \omega^2)^{(1-m)/2}, \quad \text{причем константы } c_1, c_2, E,$$

θ удовлетворяют следующим условиям

$$\theta^2(m^2 - 1) = \left\{ \mu_1 |E|^{2/(m-1)} + \tilde{\mu}_2 (c_1^2 - c_2^2)^{1/m} \right\}^2, \\ (m+1)\theta = \left\{ \lambda_1 |E|^{2/(m-1)} + \tilde{\lambda}_2 (c_1^2 - c_2^2)^{1/m} \right\}. \quad (2.1.24)$$

Теперь, чтобы получить точные решения нелинейной системы ДУЧ (2.1.1) необходимо подставить формулы (2.1.10)–(2.1.16), (2.1.17)–(2.1.24) в анзац (2.1.5). В результате получаем сле-

дующие многопараметрические семейства решений

$$k_1 < 1, \quad k_2 < 1/4$$

$$\psi(x) = \{ i g_1(\omega) + g_2(\omega) \gamma_4 + (f_1(\omega) - i \gamma_4 f_2(\omega)) \times \\ \times [(\gamma \cdot a)(a \cdot y) + (\gamma \cdot b)(b \cdot y) + (\gamma \cdot c)(c \cdot y)] \omega^{-1} \} \chi, \quad u(x) = \phi(\omega),$$

где $\omega(x)$ имеет вид (2.1.10); $\phi(\omega)$, $g_i(\omega)$, $f_i(\omega)$ имеют вид (2.1.17) при $m = 2$.

$$k_1 > 1, \quad k_2 > 1/4$$

$$\psi(x) = \{ i g_1(\omega) + g_2(\omega) \gamma_4 + (f_1(\omega) - i \gamma_4 f_2(\omega)) \times \\ \times [(\gamma \cdot a)(b \cdot y) + (\gamma \cdot b)(a \cdot y) - 2(\gamma \cdot c)(c \cdot y)] \omega^{-1} \} \chi, \\ u(x) = \phi(\omega)$$

где $\omega(x)$ имеет вид (2.1.15), $f_i(\omega)$, $g_i(\omega)$, $\phi(\omega)$ имеют вид (2.1.21), (2.1.22) при $m = 2$.

$$k_1 > 1/2, \quad k_2 > 1/6$$

$$\psi(x) = \{ i g_1(\omega) + g_2(\omega) \gamma_4 + (f_1(\omega) - i \gamma_4 f_2(\omega)) \times \\ \times (\gamma \cdot x + \gamma \cdot \theta) \omega^{-1} \} \chi \\ u(x) = \phi(\omega),$$

где $\omega(x)$ имеет вид (2.1.16), $f_i(\omega)$, $g_i(\omega)$, $\phi(\omega)$ имеют вид (2.1.21), (2.1.22) при $m = 3$.

$$k_1 = 2/(m-1), \quad k_2 = 1/m, \quad m = \overline{2, 3}$$

$$\psi(x) = \{ i g_1(\omega) + g_2(\omega) \gamma_4 + (f_1(\omega) - i \gamma_4 f_2(\omega)) \omega^{-1} \times \\ \times \begin{cases} [(\gamma \cdot a)(b \cdot y) + (a \cdot y)(\gamma \cdot b) - 2(\gamma \cdot c)(c \cdot x)], & m=2 \\ (\gamma \cdot x + \gamma \cdot \theta) & , m=3 \end{cases} \} \chi,$$

$$u(x) = \phi(\omega),$$

где $\omega(x)$ имеет вид (2.1.13) (при $m=2$) либо (2.1.14) (при $m=3$), f_i , g_i , ϕ имеют вид (2.1.23), (2.1.24)
 $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$

$$\psi(x) = \{ i g_1(\omega) + g_2(\omega) \gamma_4 + (f_1(\omega) - i \gamma_4 f_2(\omega)) \times \\ \times [\gamma \cdot a + F(b \cdot y) \gamma \cdot b] \} \chi,$$

$$u(x) = \phi(\omega),$$

где $\omega = a \cdot y + F(b \cdot y)$, $a \cdot a = -1$, $a \cdot b = b \cdot b = 0$, $y_\mu = x_\mu + \theta_\mu$,
 $g_i(\omega)$, $f_i(\omega)$, $\phi(\omega)$ имеют вид (2.1.19), F - произвольная дифференцируемая функция.

$$\psi(x) = \{ g_1(\omega) + g_2(\omega) \gamma_4 + (f_1(\omega) - i \gamma_4 f_2(\omega)) \gamma \cdot a \} \chi,$$

$$u(x) = \phi(\omega),$$

$$\omega = a \cdot y, \quad a \cdot a = 1, \quad y_\mu = x_\mu + \theta_\mu,$$

$$g_i(\omega), \quad f_i(\omega), \quad \phi(\omega) \quad \text{имеют вид (2.1.20).}$$

Замечание. Если положить в (2.1.7) $g_2 \equiv f_2 \equiv 0$, $\omega(x) = x \cdot x$, то мы получим анзац, предложенный Гейзенбергом в работе [24]

$$\psi(x) = \{ i g_1(x \cdot x) + \gamma \cdot x f_1(x \cdot x) \} \chi.$$

Замечание 2. Анзац (2.1.7) может быть использован для редукции нелинейных систем ДУЧП более общего вида, чем система (2.1.1), а именно

$$\begin{aligned}\gamma \cdot p \psi &= F_1(\bar{\psi} \psi, |u|) \psi, \\ p \cdot p u &= F_2(\bar{\psi} \psi, u),\end{aligned}\tag{2.1.25}$$

где F_1 , F_2 - произвольные скалярные функции. В частности, точные решения одной системы вида (2.1.24), построенные в [47, 48] могут быть получены с помощью анзатца (2.1.7).

§ 2. Частичная линейаризация классических уравнений электродинамики.

Будем искать точные решения классических уравнений электродинамики

$$\begin{aligned}[\gamma \cdot p + e \gamma \cdot A + m] \psi(x) &= 0, \\ p \cdot p A_\mu - p_\mu p \cdot A &= e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi,\end{aligned}\tag{2.2.1}$$

где $A_\mu = A_\mu(x)$ - потенциал электромагнитного поля, $\psi(x)$ - четырехкомпонентный спинор, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, e , m - константы.

Для этого используем следующий анзатц

$$\begin{cases} \psi(x) = \gamma \cdot c \varphi(\tilde{\omega}), \\ A_\mu(x) = c_\mu g(\tilde{\omega}), \end{cases}\tag{2.2.2}$$

где $\varphi(\tilde{\omega})$ - новый четырехкомпонентный спинор, $g(\tilde{\omega})$ - скалярная функция, подлежащие определению, $\tilde{\omega} = \{a \cdot x, b \cdot x, c \cdot x\}$,

причем

$$a \cdot a = \alpha_1 < 0, \quad b \cdot b = \alpha_2 < 0, \quad a \cdot c = b \cdot c = c \cdot c = 0. \quad (2.2.3)$$

Подставляя (2.2.2) в (2.2.1) получаем, что $\varphi = \varphi(\vec{\omega})$
и $g = g(\vec{\omega})$ удовлетворяют системе уравнений вида

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot a) \varphi_{\omega_1} + (\gamma \cdot b) \varphi_{\omega_2} + i m \varphi &= 0, \\ \alpha_1 g_{\omega_1 \omega_1} + \alpha_2 g_{\omega_2 \omega_2} &= 2 e \bar{\varphi} \varphi. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Пусть $\tilde{g} = \tilde{g}(\vec{\omega}; \varphi)$ - произвольное частное решение второго из уравнений (2.2.4), тогда сделав замену переменных

$$\begin{aligned} \phi(\vec{\omega}) &= \varphi(\vec{\omega}), \\ G(\vec{\omega}) &= g(\vec{\omega}) - \tilde{g}(\vec{\omega}; \varphi), \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

приходим к линейной незацепленной системе ДУЧП

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot a) \phi_{\omega_1} + (\gamma \cdot b) \phi_{\omega_2} + i m \phi &= 0, \\ \alpha_1 G_{\omega_1 \omega_1} + \alpha_2 G_{\omega_2 \omega_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Система (2.2.6) является линейной системой ДУЧП, то есть анзац (2.2.2) позволяет выделить подмножество решений ДУЧП (2.2.1), свойства которого аналогичны свойствам множества решений линейных уравнений. Этот факт дает возможность строить широкие классы многопараметрических решений системы (2.2.1).

Предположим, что в (2.2.4) $\varphi = \varphi(\omega_1)$, тогда для определения $\varphi(\omega_1)$ получаем систему ОДУ

$$(\gamma \cdot a) \varphi_{\omega_1} = -im \varphi,$$

общее решение которой имеет вид

$$\varphi = \exp \left\{ \frac{im}{\alpha_1} (\gamma \cdot a) \omega_1 \right\} \chi(\omega_3), \quad (2.2.7)$$

где $\chi(\omega_3)$ - четырехкомпонентный спинор, произвольным образом зависящий от ω_3 . Подставляя (2.2.7) во второе из уравнений (2.2.4), получаем

$$\alpha_1 g_{\omega_1 \omega_1} + \alpha_2 g_{\omega_2 \omega_2} = 2e \bar{\chi} \chi. \quad (2.2.8)$$

Общее решение (2.2.8) может быть записано в виде

$$g = f(\mathcal{Z}, \omega_3) + f(\mathcal{Z}^*, \omega_3) + \frac{e(\bar{\chi} \chi)}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \quad (2.2.9)$$

где $\mathcal{Z} = |\alpha_1|^{-1/2} \omega_1 + i |\alpha_2|^{-1/2} \omega_2$, f - произвольная аналитическая по первой переменной функция.

Подставляя полученные выражения в (2.2.2) получаем частное решение исходной системы ДУШ (2.2.1)

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \gamma \cdot c \exp \left\{ \frac{im}{\alpha_1} (\gamma \cdot a)(a \cdot x) \right\} \chi(c \cdot x), \\ A_\mu(x) &= C_\mu \left[f(\mathcal{Z}, c \cdot x) + f(\mathcal{Z}^*, c \cdot x) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e \bar{\chi} \chi}{2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)} ((a \cdot x)^2 + (b \cdot x)^2) \right], \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

где $\mathcal{Z} = |\alpha_1|^{-1/2} a \cdot x + |\alpha_2|^{-1/2} b \cdot x$, константы a_μ , b_μ , удовлетворяют условиям (2.2.3).

Полученное семейство решений включает 5 произвольных функций, причем константы ϵ , m входят аналитическим образом.

Отметим, что анзац вида (2.2.2) был с успехом использован для нахождения точных решений системы вида (2.2.1) при с нелинейным добавком вида $A_\mu (A \cdot A)$ в правой части уравнений Максвелла [35, 58].

§ 3. Линеаризация и общее решение двумерных систем Гейзенберга-Тирринга-Дирака и Максвелла-Дирака.

Одной из наиболее известных релятивистски инвариантных двумерных нелинейных систем ДУЧП, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, является модель, предложенная Тиррингом в [72] (см. также [19])

$$(\sigma_3 p_0 + \sigma_2 p_1) \psi = \lambda [i(\psi^\dagger \sigma_2 \psi) \sigma_2 - (\psi^\dagger \sigma_3 \psi) \sigma_3] \psi + m \psi, \quad (2.3.1)$$

где σ_2 , σ_3 - матрицы Паули, $\psi = \psi(x_0, x_1)$ - двухкомпонентный спинор.

Максимальной группой, допускаемой уравнением (2.3.1), является группа Пуанкаре $P(1,1)$ [53]. Оказывается, что при $m=0$, локальная группа инвариантности уже бесконечномерна, что и позволило построить общее решение (2.3.1) [69].

Подобными свойствами обладает двумерный аналог уравнения Дирака-Гейзенберга-Иванонко (I.I.I) при $m=0$, который мы будем называть уравнением Гейзенберга-Тирринга-Дирака [40]

$$i(\gamma_0 \psi_{x_0} + \gamma_1 \psi_{x_1}) = \lambda [(\bar{\psi} \gamma_0 \psi) \gamma_0 - (\bar{\psi} \gamma_1 \psi) \gamma_1] \psi, \quad (2.3.2)$$

где $\psi = \psi(x_0, x_1)$ — четырехкомпонентный спинор, λ — кон-
станта

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наряду с (2.3.2) будет проведена линеаризация и найдено
общее решение нелинейных уравнений Максвелла-Дирака

$$\begin{aligned} [\gamma_\mu p^\mu + e \gamma_\mu A^\mu + \lambda \gamma^\mu (\bar{\psi} \gamma_\mu \psi)] \psi &= 0, \\ p_\nu p^\nu A_\mu - p_\mu p^\nu A_\nu &= e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi, \quad \mu, \nu = \overline{0, 1}, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

где вектор-потенциал A_μ имеет две компоненты $A_0(x_0, x_1)$,
 $A_1(x_0, x_1)$.

В конусных переменных $\xi = x_0 - x_1$, $\eta = x_0 + x_1$ системы
(2.3.2), (2.3.3) имеют вид

$$i \partial_\xi \psi^0 = -\lambda (|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2) \psi^0, \quad i \partial_\eta \psi^1 = \lambda (|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2) \psi^1, \quad (2.3.4)$$

$$i \partial_\xi \psi^2 = -\lambda (|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2) \psi^2, \quad i \partial_\eta \psi^3 = \lambda (|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2) \psi^3,$$

$$i \partial_\xi \psi^0 = -\left[\frac{e}{2} (A_1 - A_0) + \lambda (|\psi^1|^2 + |\psi^2|^2) \right] \psi^0,$$

$$i \partial_\eta \psi^1 = \left[\frac{e}{2} (A_1 + A_0) + \lambda (|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2) \right] \psi^1,$$

$$i \partial_\xi \psi^2 = -\left[\frac{e}{2} (A_1 - A_0) + \lambda (|\psi^1|^2 + |\psi^2|^2) \right] \psi^2,$$

$$i \partial_\eta \psi^3 = \left[\frac{e}{2} (A_1 + A_0) + \lambda (|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2) \right] \psi^3,$$

$$(\partial_\xi - \partial_\eta) [\partial_\eta (A_0 + A_1) + \partial_\xi (A_1 - A_0)] =$$

(2.3.5)

$$= e (|\psi^0|^2 + |\psi^1|^2 + |\psi^2|^2 + |\psi^3|^2),$$

$$(\partial_\xi + \partial_\eta) [\partial_\eta (A_0 + A_1) + \partial_\xi (A_1 - A_0)] =$$

$$= e (-|\psi^0|^2 + |\psi^1|^2 - |\psi^2|^2 + |\psi^3|^2),$$

где

$$\partial_\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \partial_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad |\psi^i| = (\psi^{i*} \psi^i)^{1/2}.$$

Для отыскания решений системы (2.3.4), (2.3.5) воспользуемся методом нелокальной линеаризации [40], то есть укажем в явном виде обратимые нелокальные (интегральные) преобразования, которые приводят нелинейные уравнения (2.3.4), (2.3.5) к эквивалентным системам незацепленных уравнений.

Система (2.3.4) с помощью обратимой нелокальной замены

$$\begin{aligned} \psi^0 &= u^0(\xi, \eta) \exp \left\{ i\lambda \int (|u^3|^2 + |u^1|^2) d\xi \right\}, \\ \psi^1 &= u^1(\xi, \eta) \exp \left\{ -i\lambda \int (|u^0|^2 + |u^2|^2) d\eta \right\}, \\ \psi^2 &= u^2(\xi, \eta) \exp \left\{ i\lambda \int (|u^1|^2 + |u^3|^2) d\xi \right\}, \\ \psi^3 &= u^3(\xi, \eta) \exp \left\{ -i\lambda \int (|u^0|^2 + |u^2|^2) d\eta \right\}, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

сводится к незацепленной системе линейных уравнений первого порядка для функций $u^i(\xi, \eta)$

$$\partial_\xi u^0 = 0, \quad \partial_\eta u^1 = 0, \quad \partial_\xi u^2 = 0, \quad \partial_\eta u^3 = 0. \quad (2.3.7)$$

Общее решение системы (2.3.7) задается следующими формула-

ми

$$u^0 = w^0(\eta), \quad u^1 = w^1(\xi), \quad u^2 = w^2(\eta), \quad u^3 = w^3(\xi) \quad (2.3.8)$$

где w^μ — произвольные комплексные функции.

Подстановка (2.3.8) в (2.3.6) дает общее решение исходного уравнения (2.3.2)

$$\begin{aligned}\psi^0 &= w^0(x_0+x_1) \exp\left\{i\lambda \int_{x_0-x_1}^{x_0+x_1} (|w^1|^2 + |w^3|^2) d\xi\right\}, \\ \psi^1 &= w^1(x_0-x_1) \exp\left\{-i\lambda \int_{x_0+x_1}^{x_0-x_1} (|w^0|^2 + |w^2|^2) d\eta\right\}, \\ \psi^2 &= w^2(x_0+x_1) \exp\left\{i\lambda \int_{x_0-x_1}^{x_0+x_1} (|w^1|^2 + |w^3|^2) d\xi\right\}, \\ \psi^3 &= w^3(x_0+x_1) \exp\left\{-i\lambda \int_{x_0+x_1}^{x_0-x_1} (|w^0|^2 + |w^2|^2) d\eta\right\}.\end{aligned}\quad (2.3.9)$$

Возможность линеаризации двумерной системы типа Гейзенберга-Тирринга-Дирака связана с бесконечномерной симметрией, допускаемой этой системой. Более того, общее решение (2.3.9) может быть получено из чисто теоретико-групповых соображений. Для этого необходимо найти частное решение и применить к нему операцию размножения решений с помощью преобразований из группы симметрии уравнения.

Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (2.3.2) является [40]

$$G = O_\xi(4) \times O_\eta(4) \times A_\infty, \quad (2.3.10)$$

где A_∞ — бесконечнопараметрическая группа Ли преобразований вида

$$\begin{aligned}x'_0 &= \frac{1}{2} \left[\int_{x_0-x_1}^{x_0+x_1} f_1(\xi) d\xi + \int_{x_0+x_1}^{x_0-x_1} f_0(y) dy \right], \\ x'_1 &= \frac{1}{2} \left[\int_{x_0+x_1}^{x_0-x_1} f_0(y) dy - \int_{x_0-x_1}^{x_0+x_1} f_1(\xi) d\xi \right], \\ \psi^{0'} &= f_0(x_0+x_1) \psi^0, \quad \psi^{1'} = f_1(x_0-x_1) \psi^1, \\ \psi^{2'} &= f_0(x_0+x_1) \psi^2, \quad \psi^{3'} = f_1(x_0-x_1) \psi^3.\end{aligned}\quad (2.3.11)$$

f_0, f_1 - произвольные действительные функции.

O_ξ (4) - группа линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму

$$|\psi^1|^2 + |\psi^3|^2,$$

параметры которой являются произвольными функциями от $x_0 - x_1$,

O_η (4) - группа линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму

$$|\psi^0|^2 + |\psi^2|^2,$$

параметры которой являются произвольными функциями от $x_0 + x_1$.

Уравнения (2.3.5) линеаризуются с помощью обратимой замены вида

$$\begin{aligned} \psi^0 &= u^0(\xi, \eta) \exp \left\{ i \int \left[\lambda (|u^1|^2 + |u^3|^2) + \frac{e}{2} (A_1 - A_0) \right] d\xi \right\}, \\ \psi^1 &= u^1(\xi, \eta) \exp \left\{ i \int \left[\lambda (|u^0|^2 + |u^2|^2) + \frac{e}{2} (A_1 + A_0) \right] d\eta \right\}, \\ \psi^2 &= u^2(\xi, \eta) \exp \left\{ i \int \left[\lambda (|u^1|^2 + |u^3|^2) + \frac{e}{2} (A_1 - A_0) \right] d\xi \right\}, \\ \psi^3 &= u^3(\xi, \eta) \exp \left\{ i \int \left[\lambda (|u^0|^2 + |u^2|^2) + \frac{e}{2} (A_1 + A_0) \right] d\eta \right\}, \\ A^\mu &= B^\mu(\xi, \eta), \quad \mu = 0, 1. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Решая линейную систему ДУЧП, полученную в результате подстановки (2.3.12) в (2.3.5), и подставляя полученные выражения в (2.3.12), находим общее решение двумерной системы Максвелла-Дирака

$$A_0 = e \int_{x_0 - x_1}^{x_0 + x_1} \int_{\xi}^{\eta} (|u^0|^2 + |u^2|^2) d\eta d\xi + f x_0,$$

$$A_1 = -e \int_{x_0 - x_1}^{x_0 + x_1} \int_{\xi}^{\eta} (|u^1|^2 + |u^3|^2) d\xi d\eta - f x_1,$$

$$\psi^0 = u^0(x_0 + x_1) \exp \left\{ i \int_{x_0 - x_1}^{x_0 + x_1} [\lambda(|u^1|^2 + |u^3|^2) + \frac{e}{2}(A_1 - A_0)] d\xi \right\},$$

$$\psi^1 = u^1(x_0 - x_1) \exp \left\{ -i \int_{x_0 - x_1}^{x_0 + x_1} [\lambda(|u^0|^2 + |u^2|^2) - \frac{e}{2}(A_1 + A_0)] d\eta \right\},$$

$$\psi^2 = u^2(x_0 + x_1) \exp \left\{ i \int_{x_0 - x_1}^{x_0 + x_1} [\lambda(|u^1|^2 + |u^3|^2) + \frac{e}{2}(A_1 - A_0)] d\xi \right\},$$

$$\psi^3 = u^3(x_0 - x_1) \exp \left\{ -i \int_{x_0 - x_1}^{x_0 + x_1} [\lambda(|u^0|^2 + |u^2|^2) - \frac{e}{2}(A_1 + A_0)] d\eta \right\}.$$

где $u^0, \dots, u^3$ — произвольные комплексные функции,

$f = f(x_0, x_1)$ — произвольная действительная функция.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем результаты, полученные в диссертации.

В первой главе рассматриваются нелинейные спинорные ДУЧП, инвариантные относительно групп $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$, $C(1,3)$. Описаны широкие классы нелинейных уравнений типа Дирака, инвариантные относительно конформной группы и ее подгрупп. Среди этих ДУЧП обнаружено уравнение, допускающее бесконечнопараметрическую группу инвариантности. Построены все $\tilde{P}(1,3)$ -инвариантные анзатцы и с их помощью получены многопараметрические семейства точных решений нелинейного уравнения Дирака. Построены анзатцы, инвариантные относительно подгрупп группы Пуанкаре. С помощью полученных анзатцов проведены последовательные редукции нелинейного пуанкаре-инвариантного уравнения Дирака к трех-, дву- и одномерным (ОДУ) дифференциальным уравнениям. Пятый параграф посвящен применению метода Ли-Бэклунда к отысканию нелокальной симметрии уравнения Дирака. Описаны все операторы симметрии первого порядка, линейно зависящие от первых производных.

Вторая глава посвящена вопросам построения точных решений систем нелинейных ДУЧП для спинорного, скалярного и векторного полей.

В первом параграфе исследованы теоретико-групповые свойства одной нелинейной системы ДУЧП, описывающей взаимодействие спинорного и скалярного полей. С помощью редукции к системе ОДУ построены многопараметрические семейства неразмножаемых решений.

Во втором параграфе предложен анзатц, позволяющий свести задачу отыскания частных решений нелинейных уравнений электродинамики к задаче интегрирования системы, состоящей из двумерного уравнения Дирака и уравнения Пуассона. Это позволило построить широкие классы решений, включающие произвольные функции.

В третьем параграфе проведена линеаризация и построены общие решения нелинейных двумерных систем ДУЧП Гейзенберга-Тирринга-Дирака и Максвелла-Дирака.

Основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Построенные $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$ - анзатцы могут применяться для нахождения точных решений любых $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$ - инвариантных систем спинорных ДУЧП. Полученные нелинейные обобщения уравнения Дирака могут быть использованы для описания физических явлений в рамках теории, инвариантной относительно групп $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$, $C(1,3)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат. наук, профессору Фушичу В.И. за постоянное внимание к работе и постановку задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Гидродинамика. - М.: Из-во иностр. лит., 1963. - 400с.
2. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. - М.: Наука, 1984. - 588с.
3. Виноградов А.М., Красильщиков И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1986. - 336с.
4. Владимиров В.С., Волович И.В. Локальные и нелокальные токи для нелинейных уравнений // Теорет. и мат. физика. - 1985. - 62, №1. - С.3-29.
5. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. - М.: Физматгиз, 1958. - 368с.
6. Данилов Ю.А. Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье-Стокса. - М., 1967. - 15с. - (Препринт/АН СССР. Ин-т атомной энергии им. И.В.Курчатова).
7. Данилов Ю.А. Групповые свойства уравнений Дирака. - М., 1968. - 16с. - (Препринт/АН СССР. Ин-т атомной энергии им. И.В.Курчатова).
8. Данилов Ю.А. О нелинейных уравнениях Дирака, допускающих конформную группу // Теорет. и мат. физика. - 1970. - 2, №3. - С.40-45.
9. Дирак П. Принципы квантовой механики. - М.: Наука, 1979. - 480с.

10. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. - М.: Наука, 1976. - 760с.
11. Жданов Р.З. О применении метода Ли-Бэклунда к исследованию симметричных свойств уравнения Дирака // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С.70-73.
12. Желнорович В.А. Точные одномерные нестационарные решения уравнений Гейзенберга // Докл. АН СССР. - 1976. - 276, №3. - С.726-728.
13. Желнорович В.А. Теория спиноров и ее применения в физике и механике. - М.: Наука, 1982. - 272с.
14. Ибрагимов Н.Х. Классификация инвариантных решений уравнений двумерного нестационарного газа // Ж. прикл. мех. и техн. физ. - 1966. - №4. - С.19-22.
15. Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1967. - 57с.
16. Ибрагимов Н.Х. Об инвариантности уравнений Дирака // Докл. АН СССР. - 1969. - 185, №6. - С.1226-1228.
17. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. - М.: Наука, 1983. - 280с.
18. Картан Э. Теория спиноров. - М.: Из-во иностр. лит., 1947. - 223с.
19. Кузнецов Е.А., Михайлов А.В. О полной интегрируемости двумерной классической модели Тирринга // Теорет. и мат. физика. - 1977. - 30, №3. - С.303-314.

20. Кулиш П.П., Манаков С.В., Фаддеев Л.Д. Сравнение точных квантовых и квазиклассических ответов для нелинейного уравнения Шредингера // Теорет. и мат. физика. - 1976. - 78, №1. - С.38-45.
21. Курдгеладзе Д.Ф. Периодические решения нелинейно обобщенного уравнения Дирака // Ж. эксперим. и теор. физики. - 1958. - 34, №6. - С.1587-1592.
22. Ландау Л.Л., Лифшиц Е.М. Теория поля. - М.: Наука, 1973. - 422с.
23. Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. - М.: Наука, 1985. - 280с.
24. Нелинейная квантовая теория поля / Под ред. Д.Д. Иваненко. - М.: Из-во иностр. лит., 1959. - 383с.
25. Овсянников Л.В. Аналитические группы. - Новосибирск: Из-во НГУ. - 237с.
26. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400с.
27. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. - М.: Наука, 1984. - 520с.
28. Пухначев В.В. Групповые свойства уравнений Навье-Стокса в плоском случае // Ж. прикл. мех. и техн. физ. - 1960. - №1. - С.83-90.
29. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. - М.: Наука, 1980. - 440с.
30. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Гамильтонов подход в теории

- солитонов. - М.: Наука, 1986. - 528с.
31. Теория солитонов. Метод обратной задачи / Под ред. С.П. Новикова. - М.: Наука, 1980. - 320с.
32. Фушич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Докл. АН СССР. - 1979. - 246, №4. - С.846-850.
33. Фушич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исслед. в мат. физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. - С.5-29.
34. Фушич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С.4-23.
35. Фушич В.И., Жданов Р.З. Точные решения систем нелинейных дифференциальных уравнений для спинорного и векторного полей // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С.20-30.
36. Фушич В.И., Никитин А.Г. Нерелятивистские уравнения движения для частиц с произвольным спином // Физ. элем. частиц и атомного ядра. - 1981. - 12, вып.5. - С.1157-1219.
37. Фушич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. - Киев: Наукова думка, 1983. - 196с.
38. Фушич В.И., Серов Н.И. Симметрия и точные решения уравнения Монжа-Ампера // Докл. АН СССР. - 1983. - 273, №3. - С.24-26.

39. Фушич В.И., Серова М.М. О максимальной группе инвариантности и общем решении одномерных уравнений газовой динамики // Докл. АН СССР. - 1983. - 268, №5. - С.1102-1104.
40. Фушич В.И., Тычинин В.А., Жданов Р.З. Нелокальная линеаризация и точные решения некоторых уравнений Монжа-Ампера, Дирака. - Киев, 1985. - 27с. - (Препринт/АН УССР. Ин-т математики; 85.34).
41. Фушич В.И., Цифра И.М. О симметрии нелинейных уравнений электродинамики // Теорет. и мат. физика. - 1985. - 64, №1. - С.41-50.
42. Фушич В.И., Штеленъ В.М. Об инвариантных решениях уравнений Дирака // Докл. АН СССР - 1983. - 269, №1. - С.88-92.
43. Фушич В.И., Штеленъ В.М., Жданов Р.З. О новых конформно-инвариантных уравнениях для спинорных полей и их точных решениях // Теоретико-групповые методы в физике. - М.: Наука, 1986. - С.497-500.
44. Akdeniz K. G. On classical solutions of Gürsey's conformal invariant spinor model // Lett. Nuovo Cim. - 1982. - 33, №2. - P.40-44.
45. Akdeniz K.G., Smailagic A. Classical solutions for fermionic models // Nuovo Cim. - 1979. - 51A, №3. - P.345-357.
46. Akdeniz K.G., Smailagic A. Merons in a generality model with a Gürsey term // Lett. Math. Phys. - 1984. - 8, №3. - P.175-179.
47. Barut A.O., XU Bo-Wei New type of vacuum solutions of

- nonlinear conformally invariant coupled field equations
// Phys. Rev. D. - 1981. - 23, N°12. - P.3076-3077.
48. Barut A.O., XU Bo-Wei Meron-like solutions of conformally covariant coupled nonlinear field equation // Physica. - 1982. - 6D, N°1. - P.137-139.
49. Bhabha H.J. Relativistic wave equations for elementary particles // Rev. Mod. Phys. - 1945. - 17, N°2/3. - P.200-215.
50. Binegar B., Fronsdal C., Heidenreich W. Conformal QED // J. Math. Phys. - 1983. - 24, N°12. - P.2828-2845.
51. Collins G.B. Complex potential equations. I. A technique for solution // Proc. Cambr. Phil. Soc. - 1976. - 80, N°1. - P.165-171.
52. Cortel F. On some solutions of Gürsey's conformal-invariant spinor wave equations // Nuovo Cim. - 1956. - 4, N°2. - P.729-735.
53. David D. On the extension of the classical Thirring model // J. Math. Phys. - 1984. - 25, N°12. - P.3424-3432.
54. Finkelstein R., Fronsdal C., Kaust P. Nonlinear spinor field // Phys. Rev. - 1956. - 103, N°5. - P.365-369.
55. Fushchich W.I., Moskaliuk S.S. On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation in three spatial dimensions // Lett. Nuovo Cim. - 1981. - 31, N°16. - P.371-376.
56. Fushchich W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Allembert and eikonal equations // J. Phys. - 1983. - 16A, N°15. - P.3645-3655.

57. Fushchich W.I., Shtelen W.M. On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation // J. Phys. - 1983. - I6A, N°2. - P.271-277.
58. Fushchich W.I., Shtelen W.M. On some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics // Phys. Lett. - 1983. - I28B, N°3-4. - P.215-217.
59. Fushchich W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z. On the new conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions // Ibid. - 1985. - I59B, N°2-3. - P.189-191.
60. Grunland A., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. - 1984. - 25, N°4. - P.791-807.
61. Gürsey F. On a conformal-invariant spinor wave equation // Nuovo Cim. - 1956. - 3, N°5. - P.988-997.
62. Ibragimov N.H., Andersson R.L. Lie-Bäcklund tangent transformations // J. Math. Anal. Appl. - 1977. - 59, N°1. - P.145-162.
63. Lie S., Engel F. Theorie der Transformations gruppen: Bd. I-3. - Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893.
64. Lomont J.L. Conformal invariance of massless Dirac-like equations // Nuovo Cim. - 1961. - 22, N°4. - P.673-679.
65. Merwe P.T. Classical excitations of the conformally covariant Gürsey equation // Phys. Lett. - 1981. - I06B, N°6. - P.485-487.
66. Mitter H., Widder H. Classical solutions of a nonlinear field equation // J. Phys. - 1979. - I2A, N°11. - P.1981-1990.

67. Morgan A.G.A. The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations // Quart. J. Math. Oxford. - 1952. - 3, N°12. - P.250-259.
68. Rajamaran R. Solitons and instantons. - North Holland Publ. Comp., 1982. 416p.
69. Scarf F.L. Thirring model with variable interaction // Phys. Rev. - 1960. - 117, N°3. - P.693-694.
70. Steeb W.-H. Similarity solutions of nonlinear Dirac equations and conserved currents // J. Math. Phys. - 1982. - 23, N°1. - P.345-349.
71. Takahashi K. Soliton solutions of nonlinear Dirac equations // J. Math. Phys. - 1979. - 20, N°6. - P.1232-1238.
72. Thirring W.E. A soluble relativistic field theory // Ann. Phys. - 1958. - 3, N°3. - P.91-112.