Т 934 1

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ТЫЧИНИН Валентин Анатольевич

УДК 517.9:519.46

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

01.01.02 - дифференциальные уравнения
и математическая физика

Диссертация на соискание
ученой степени кандидата
физико-математических наук.

Научный руководитель -
профессор, доктор физико-
математических наук
ФУЩИЧ В.И.

Киев - 1983

О Г Л А В Л Е Н И Е

Стр.

В В Е Д Е Н И Е 4

Г Л А В А I. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ ПОМОЩИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ I4

§ I. Линеаризация и точные решения уравнений с двумя независимыми переменными I4

I°. Уравнение Лиувилля и связанные с ним уравнения I4

2°. Уравнение $z_{xt}^2 = 4\lambda(xt)z_x z_t$. 20

3°. Уравнения Монжа-Ампера специального вида . . 2I

4°. Уравнения Эйлера-Лагранжа и Борна-Инфельда . 24

§ 2. Линеаризация многомерных уравнений 27

§ 3. Групповые свойства уравнений, допускающих линеаризацию 30

I°. Уравнения, допускающие бесконечную группу Ли 30

2°. Уравнения, инвариантные относительно конечномерных групп Ли 33

Г Л А В А II. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ ПОМОЩИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ 38

§ I. Линеаризация и точные решения уравнений с двумя независимыми переменными 38

I°. Уравнения, линеаризуемые точечными и нелокальными заменами переменных 39

2°. Линеаризация уравнений $V_t V_{xx} + 1 = 0$ и $U_{xx} = U_t U_x^2 U^{-2}$ 4I

3°. Уравнения $U_{xx} = U_t U^{-2}$, $U_t = 1 - \frac{U_x^2}{U_x^2 + U_{xx}}$, и $U_{xx} = U_t U^{-2}[1 + U_x]^2$ 42

Стр.

§ 2. Линеаризация многомерных уравнений 46

§ 3. Групповые свойства уравнений, допускающих линеаризацию 47

Г Л А В А III. ПОСТРОЕНИЕ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЮ 53

§ I. Классы линеаризуемых уравнений гиперболического типа 53

§ 2. Классы параболических уравнений, допускающих линеаризацию 66

Г Л А В А IУ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ, SIN-ГОРДОНА, КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА 77

§ I. Нелокальные преобразования и преобразования Бэклунда приводимых уравнений 77

§ 2. Построение преобразований Бэклунда для уравнений Лиувилля, sin-Гордона, Кортевега-де Фриза 85

I°. Уравнение Лиувилля 85

2°. Уравнение sin-Гордона 89

3°. Уравнение Кортевега-де Фриза 93

З А К Л Ю Ч Е Н И Е 97

Л И Т Е Р А Т У Р А 98

П Р И Л О Ж Е Н И Я I08

В В Е Д Е Н И Е

Нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных (ДУЧП) второго порядка гиперболического и параболического типов часто встречаются в прикладных вопросах. Отсутствие теории и общих методов решения нелинейных ДУЧП создаёт трудности при их изучении. Важную информацию о свойствах нелинейного уравнения даёт исследование некоторых классов его точных решений. В книге "Некоторые классы уравнений в частных производных" [4] А.В.Бицадзе отмечает:"В теории нелинейных уравнений в частных производных одним из центральных вопросов является изучение влияния характера нелинейности на разрешимость классических линейных задач для рассматриваемого нелинейного уравнения. При этом особый интерес представляют собой уравнения и задачи, не удовлетворяющие стандартным условиям существования и единственности решения. Поскольку даже правильная постановка задач для этих уравнений связана с принципиальными трудностями, большое значение приобретает построение широких классов точных решений." ([4], стр. 387).

Обзор и классификация методов построения точных решений нелинейных ДУЧП изложены в монографиях Форсайта [78] и Эймса [64, 65]. Линеаризации ДУЧП второго порядка с двумя независимыми переменными при помощи точечного преобразования зависимой переменной посвящены исследования С.В.Валландера [7] и Л.В.Овсянникова [37].

В основе большинства методов построения точных решений линейных и нелинейных уравнений лежит одна из самых плодотворных и эффективных идей в теории дифференциальных уравнений - преобразование независимых и зависимых переменных, т.е.

преобразование исходного уравнения к простейшему виду. Чаще всего при этом используются локальные преобразования независимых и зависимых переменных. Такие преобразования наиболее полно изучены, когда их совокупность образует группу Ли.

Идея использования групповых свойств для интегрирования дифференциальных уравнений восходит к Софусу Ли (I88I-I885). К ней неоднократно обращались в своих исследованиях многие математики прошлого. Эта идея стимулирует развитие математики и в наши дни. Например, в работе Диксона [77] по данным обыкновенному и дифференциальному инвариантам построены некоторые классы интегрируемых обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого и второго порядков. Развитию и современному изложению теории Ли посвящены работы Л.В.Овсянникова [38, 39]. Введенное им понятие частично инвариантного решения [39] позволило на основании групповых свойств уравнения находить решения типа распространяющихся волн [47].

Эффективный метод решения уравнений, обладающих нетривиальной симметрией, предложен в [58]. Решение представлено в виде определённой функции от независимых переменных и инвариантов группы симметрии. При этом исходная задача построения решения нелинейного уравнения заменяется решением системы ОДУ. Для большого числа уравнений указанным методом построены точные решения [58, 60].

Обобщение теоретико-группового метода получено путём привлечения нелокальных преобразований переменных (Р.Л.Андерсон, Н.Х.Ибрагимов, В.И.Фущич и другие). Групповой метод позволил дать описание бесконечной коммутативной группы преобразований Ли-Бэклунда, допускаемой уравнением Кортевега-де Фриза (КдФ)

[21]. На основании вычисленных групп Ли-Бэклунда были также указаны некоторые интегрируемые уравнения типа Клейна-Гордона и Лиувилля [15, 16]. С помощью нелокальных преобразований удалось обнаружить новые симметрии уравнений Дирака, Максвелла, Шредингера [56].

В отличие от точечных преобразований, преобразований Эйлера, Лежандра и касательного преобразования Ли, существенно нелокальное преобразование не сохраняет порядок производной. Классическим примером таких преобразований служит известная подстановка Коула-Хопфа [54]

$$U = -2\nu W_x W^{-1}, \qquad (1)$$

осуществляющая линеаризацию уравнения Бюргерса

$$U_t + UU_x - \nu U_{xx} = 0. \qquad (2)$$

Нелокальное преобразование $U = V_x$ уравнения (2) и последующее интегрирование по x приводят к уравнению

$$V_t + \frac{1}{2} V_x^2 - \nu V_{xx} = 0. \qquad (3)$$

Точечная замена зависимой переменной $V = -2\nu \ln W$ сводит уравнение (3) к линейному [54]

$$W_t - \nu W_{xx} = 0.$$

В результате ряда исследований, выполненных Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой [79], Лаксом [29], В.Е.Захаровым и Л.Д.Фаддеевым [18], А.Б.Шабатом и другими была разработана методика, позволяющая трансформировать исходную задачу к решаемой обратной задаче теории рассеяния (ОЗР). Систематическое изложение метода ОЗР содержится в [17]. Этот метод эффективен при решении одномерных нелинейных уравнений специального типа. Распространение его на уравнения с числом независимых переменных больше двух связано с серьёзными трудностями.

Между тем, при решении задач прикладного характера чаще всего приходится рассматривать многомерные уравнения.

Таким образом, разработка и исследование новых методов построения точных решений нелинейных уравнений является одной из актуальных задач современной теории ДУЧП и математической физики.

Знание группы Ли, допускаемой тем или иным дифференциальным уравнением, в ряде случаев позволяет установить вид эффективных замен, осуществляющих его линеаризацию. Например, если нелинейное волновое уравнение

$$\Box u = F(x, \frac{\partial u}{\partial x}) \qquad (4)$$

инвариантно относительно конформной группы, то существует невырожденная локальная замена $W = \psi(u)$, приводящая (4) к линейному волновому уравнению $\Box W = 0$ [60].

Очевидно, зная решения линейного уравнения и явный вид замены, можно найти решения исходного нелинейного уравнения. На этой идее и построено наше дальнейшее исследование. При этом нами рассматриваются в основном нелокальные преобразования переменных.

Диссертационная работа имеет целью:

- построить классы нелинейных уравнений гиперболического и параболического типов и осуществить их линеаризацию с помощью нелокальных преобразований переменных;

- построить точные решения некоторых нелинейных ДУЧП с двумя независимыми переменными и многомерных;

- исследовать групповые свойства линеаризованных уравнений, а также связь между нелокальными преобразованиями, осуществляющими приведение каких-либо уравнений, и преобразова-

ниями Бэклунда.

Рассмотрим совокупность переменных $x=\{x_i\}$, $u=\{u^\alpha\}$,

$$u_1=\left\{\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i}\right\},\quad u_2=\left\{\frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_i\partial x_j}\right\},\ \ldots,(i,j=\overline{0,N};\ \alpha=\overline{1,M}).$$

Неособое преобразование

$$\tau:\quad \begin{aligned} x'_i &= \xi^i(x,u,u_1,\ldots,u_l),\\ u^{\alpha'} &= \mathcal{Z}^\alpha(x,u,u_1,\ldots,u_k)\end{aligned} \tag{5}$$

производной u'_m в пространстве переменных $(x,u,u_1,\ldots,u_s)$ имеет вид

$$u'_m=\phi(x,u,u_1,\ldots,u_s).$$

О п р е д е л е н и е I. Замену переменных (5) назовём нелокальным преобразованием порядка n, если $s=m+n$.

В случае замены переменных (5) производную $u^{\alpha'}_{x'_i}$ вычисляем по формуле

$$\begin{aligned} u^{\alpha'}_{x'_i} &= \sum_j(\partial_{x_j}\mathcal{Z}^\alpha)\,x^j_{x'_i}+\sum_\beta\sum_j(\partial_{u^\beta}\mathcal{Z}^\alpha)\,u^\beta_{x_j}x^j_{x'_i}+\\ &+\sum_\beta\sum_k\sum_j(\partial_{u^\beta_{x_k}}\mathcal{Z}^\alpha)\,u^\beta_{x_kx_j}\,x^j_{x'_i}+\ldots\ .\end{aligned} \tag{6}$$

По повторяющимся индексам выполняем суммирование. Оператор полного дифференцирования

$$D_i=\partial_{x_i}+\sum_\alpha u^\alpha_i\,\partial_{u^\alpha}+\sum_\alpha\sum_k u^\alpha_{ki}\,\partial_{u^\alpha_k}+\ldots$$

позволяет записать (6) иначе

$$D_j\mathcal{Z}^\alpha=u^{\alpha'}_{x'_i}\cdot D_j x'_i\ .$$

Пусть функция u зависит от двух независимых переменных x и t. Тогда преобразование переменных (5) примет вид

$$\begin{aligned} \xi\equiv x' &= \mathfrak{E}(x,t,u,u_1,\ldots,u_m),\\ \eta\equiv t' &= \mathfrak{X}(x,t,u,u_1,\ldots,u_n),\\ z\equiv u' &= \mathcal{Z}(x,t,u,u_1,\ldots,u_k).\end{aligned} \tag{7}$$

В соответствии с (6) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$D_x\mathcal{Z}=u'_{x'}\cdot D_x\mathfrak{E}+u'_{t'}\cdot D_x\mathfrak{X}\ ,$$

$$D_t \mathcal{Z} = U'_{x'} \cdot D_t \mathfrak{E} + U'_{t'} \cdot D_t \mathfrak{X} .$$

Если определитель системы δ не равен нулю, то её решение имеет вид

$$U'_{x'} = \frac{D_x \mathcal{Z} D_t \mathfrak{X} - D_t \mathcal{Z} D_x \mathfrak{X}}{D_x \mathfrak{E} D_t \mathfrak{X} - D_t \mathfrak{E} D_x \mathfrak{X}} = \frac{H}{\delta} ,$$
$$U'_{t'} = \frac{D_t \mathcal{Z} D_x \mathfrak{E} - D_x \mathcal{Z} D_t \mathfrak{E}}{D_x \mathfrak{E} D_t \mathfrak{X} - D_t \mathfrak{E} D_x \mathfrak{X}} = \frac{-K}{\delta} . \qquad (8)$$

Для производных второго порядка из (6) находим соотношения

$$D_{jk} \mathcal{Z}^{\alpha} = U^{\alpha'}_{i'\ell'} D_k \mathfrak{E}^{\ell} D_j \mathfrak{E}^{i} + U^{\alpha'}_{i'} D_{jk} \mathfrak{E}^{i} .$$

Решая систему трёх линейных алгебраических уравнений относительно $U^{\alpha'}_{i'j'}$ с учётом (8), приходим к следующим формулам:

$$\delta D_{xx} \mathcal{Z} - H D_{xx} \mathfrak{E} + K D_{xx} \mathfrak{X} \equiv P ,$$
$$\delta D_{tt} \mathcal{Z} - H D_{tt} \mathfrak{E} + K D_{tt} \mathfrak{X} \equiv Q ,$$
$$\delta D_{xt} \mathcal{Z} - H D_{xt} \mathfrak{E} + K D_{xt} \mathfrak{X} \equiv R ,$$
$$U'_{x'x'} = [P(D_t \mathfrak{X})^2 + Q(D_x \mathfrak{X})^2 - 2R D_x \mathfrak{X} D_t \mathfrak{X}] \cdot \delta^{-3} , \qquad (9)$$
$$U'_{x't'} = [P D_t \mathfrak{X} D_t \mathfrak{E} + Q D_x \mathfrak{X} D_x \mathfrak{E} - R \, {}_D[\mathfrak{E}, \mathfrak{X}]^{+}_{x,t}] \cdot \delta^{-3} ,$$
$$U'_{t't'} = [P(D_t \mathfrak{E})^2 + Q(D_x \mathfrak{E})^2 - 2R D_x \mathfrak{E} D_t \mathfrak{E}] \cdot \delta^{-3} ,$$
$${}_D[\mathfrak{E}, \mathfrak{X}]^{+}_{x,t} \equiv D_x \mathfrak{E} D_t \mathfrak{X} + D_t \mathfrak{E} D_x \mathfrak{X} .$$

Многообразие $\mathfrak{M} f$ в пространстве $(x, u, u_1, \ldots, u_s)$ зададим уравнением $f = 0$ и его дифференциальными следствиями.

О п р е д е л е н и е 2. Уравнение $f_1 = 0$ назовём приводимым к уравнению $f_2 = 0$, если существует нетривиальное решение хотя бы одного из соотношений

$$\tau_i f_i \Big|_{\mathfrak{M} f_j} \equiv 0 , \quad (i, j = 1, 2 ; \; i \neq j) . \qquad (10)$$

Связь между уравнениями $f_i = 0, (i = 1,2)$ может быть выражена при помощи операторов $\hat{P}_i$

$$\tau_i f_i = \hat{P}_i f_j , \quad (i,j = 1,2; \ i \neq j) . \qquad (II)$$

Приведение нелинейного уравнения $f = 0$ к линейному при помощи нелокального преобразования переменных является нелокальной линеаризацией этого уравнения.

Методическую основу диссертационной работы составляют метод нелокальных преобразований и теоретико-групповой метод Ли.

В диссертационной работе построены некоторые классы нелинейных уравнений гиперболического и параболического типов с двумя независимыми переменными, допускающих линеаризацию с помощью нелокальных преобразований переменных. Линеаризованы некоторые ДУЧП второго порядка гиперболического и параболического типов с двумя независимыми переменными и многомерные, найдены точные решения этих уравнений. В частности, линеаризованы многие уравнения, рассмотренные в известных книгах Форсайта [78] и Эймса [64, 65]. Исследованы групповые свойства линеаризованных уравнений с двумя независимыми переменными, по найденным конечным преобразованиям групп инвариантности уравнений получены формулы "размножения" решений. Установлена связь между нелокальными преобразованиями, осуществляющими приведение уравнений

$$\tau_{i+1}^{-1} : \ f_i \longrightarrow f_{i+1} , \quad (i = \overline{0,3})$$

и преобразованиями Бэклунда. Осуществлена линеаризация уравнения Лиувилля (f_3) и приведение уравнений sin-Гордона и КдФ (f_0) к уравнениям (f_3), совпадающим с исходными. Найденные нелокальные подстановки использованы для построения преобразований Бэклунда.

Полученные результаты являются новыми и могут быть применены при решении многих прикладных задач.

На защиту выносятся:

- построение классов нелинейных уравнений гиперболического и параболического типов и их линеаризация с помощью нелокальных преобразований;

- построение точных решений некоторых нелинейных ДУЧП с двумя независимыми переменными и многомерных;

- исследование групповых свойств линеаризованных уравнений гиперболического и параболического типов с двумя независимыми переменными;

- доказательство теорем, устанавливающих связь между нелокальными преобразованиями, осуществляющими приведение уравнений

$$\tau^{-1}_{i+1}: f_i \longrightarrow f_{i+1}, \quad (i = \overline{0,3})$$

и преобразованиями Бэклунда;

- линеаризация уравнения Лиувилля (f_3) и приведение уравнений sin-Гордона и КдФ (f_0) к уравнениям, совпадающим с исходными; построение преобразований Бэклунда для этих уравнений при помощи найденных нелокальных подстановок.

Диссертационная работа общим объёмом 98 стр. машинописного текста состоит из четырёх глав, заключения, списка использованной литературы 91 наименования и приложений.

В <u>первой главе</u> показано, что многочисленные нелинейные ДУЧП с двумя независимыми переменными, широко встречающиеся в математической физике, могут быть линеаризованы посредством точечных или нелокальных преобразований переменных. В первом параграфе получены в явном виде нелокальные преобразования,

осуществляющие линеаризацию следующих гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными: уравнений типа Лиувилля, уравнений Монжа-Ампера специального вида, уравнения для минимальной поверхности (называемого также уравнением Эйлера-Лагранжа или Плато), Борна-Инфельда и других. Во втором параграфе линеаризованы многомерные нелинейные уравнения в частных производных гиперболического типа. В третьем параграфе установлено, что большинство уравнений, линеаризуемых посредством точечных преобразований переменных или нелокальным преобразованием одной переменной, допускают бесконечномерные алгебры Ли. Найдена максимальная группа инвариантности уравнений Эйлера-Лагранжа и Борна-Инфельда. Получены формулы "размножения" решений.

Во второй главе в первом параграфе получены нелокальные подстановки, линеаризующие ДУЧП с двумя независимыми переменными параболического типа, найдены их точные решения. Линеаризации и построению решений многомерных уравнений посвящён параграф второй. В третьем параграфе исследованы групповые свойства линеаризованных параболических уравнений. Конечные преобразования групп инвариантности в ряде случаев использованы для построения формул "размножения" решений.

Третья глава посвящена построению классов нелинейных ДУЧП с двумя независимыми переменными, допускающих линеаризацию с помощью нелокальных преобразований. Рассмотренные в § I гл. I и § I гл. II уравнения оказываются представителями таких классов. В первом параграфе рассматриваются гиперболические уравнения. Второй параграф посвящён уравнениям параболического типа.

В четвёртой главе доказаны теоремы, устанавливающие связь

между нелокальными преобразованиями, которые осуществляют приведение каких-либо двух ДУЧП и преобразованиями Бэклунда. Во втором параграфе получены нелокальные подстановки, которые линеаризуют уравнение Лиувилля и приводят уравнения sin-Гордона и КдФ к совпадающим с исходными. Приведение осуществляется посредством введения вспомогательных уравнений f_1, f_2.

Некоторые дополнительные результаты по линеаризации уравнений гиперболического и параболического типов даны в приложениях I и II. В приложении III приведены некоторые данные по линеаризации ОДУ специального вида [48, 49].

Нумерация формул в пределах каждой главы - независимая. Первая цифра в номере каждой формулы обозначает параграф, вторая соответствует номеру раздела (подпункта), третья указывает порядковый номер формулы. При ссылке на формулу другой главы указывается номер последней.

Номера теорем, следствий, замечаний и т.п. также состоят из трёх цифр. Первая цифра обозначает номер главы, вторая - номер параграфа, последняя - порядковый номер в пределах параграфа.

Автор признателен доктору физико-математических наук, профессору В.А.Остапенко за поддержку и содействие, оказанные на первом этапе исследований.

Автор выражает благодарность научному руководителю диссертации, доктору физико-математических наук, профессору В.И.Фущичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Г Л А В А I. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ ПОМОЩИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В данной главе уравнения рассматриваются в таком порядке, чтобы каждое последующее допускало алгебру Ли меньшей размерности. Этот принцип сохраняется в последующих главах. Полученные результаты подробно изложены в работе [6I].

§ I. Линеаризация и точные решения уравнений с двумя независимыми переменными

Построим нелокальные преобразования, осуществляющие линеаризацию уравнений с двумя независимыми переменными. В число таких уравнений попадают уравнение Лиувилля и связанные с ним уравнения, уравнения Монжа-Ампера специального вида, уравнение для минимальной поверхности, называемое также уравнением Эйлера-Лагранжа (Плато [64]), уравнение Борна-Инфельда. В скобках показаны номера уравнений, соответствующие нумерации в книге [64].

I°. Уравнение Лиувилля и связанные с ним уравнения

Рассмотрим уравнение Лиувилля и уравнения, приводимые к нему с помощью простых нелокальных замен переменных.

I.I. (№2) $$z_{xt} + k \exp z = 0 \qquad (I.I.0)$$

Уравнение Лиувилля [26, 64] преобразованием зависимой переменной $z = \mathcal{Z}(u, u_1)$ приведём к линейному волновому уравнению $u_{xt} = 0$. Определяющее соотношение (I0) имеет вид

$$\tau (1.1.0)\Big|_{u_{xt}=0} \equiv 0 .$$

Выполним расщепление этого соотношения по производным второго порядка u_2 . Приходим к системе уравнений

$$\mathcal{Z}_{uu_x} = 0, \quad \mathcal{Z}_{uu_t} = 0, \quad \mathcal{Z}_{u_x u_t} = 0 ,$$

$$u_x u_t \mathcal{Z}_{uu} + k \exp \mathcal{Z} = 0 .$$

В [6I] построены следующие решения этой системы уравнений:

$$\mathcal{Z}_{1,2} = \ln\left[\pm \frac{b^2}{a^2} u_x u_t \left\{1 - \frac{th^2}{cth^2}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_4)\right]\right\}\right], \; c = b^2 > 0 ,$$

$$\mathcal{Z}_3 = \ln\left[\frac{\mp 2 u_x u_t}{a^2 (u + c_3)^2}\right], \; c = b^2 = 0 , \qquad \text{(I.I.I)}$$

$$\mathcal{Z}_{4,5} = \ln\left[\mp \frac{b^2}{a^2} u_x u_t \left\{1 + \frac{tg^2}{ctg^2}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(u - c_4)\right]\right\}\right], \; c = -b^2 < 0 .$$

Верхний знак отвечает значениям $k = a^2 > 0$, нижний – значениям $k = -a^2 < 0$. $a, b, c_i, (i = \overline{1,4})$ – произвольные постоянные.

Решения уравнения (I.I.0) получаем из (I.I.I) заменой

$$u = \phi(x) + \psi(t).$$

Эти решения имеют вид

$$z_{1,2} = \ln\left[\pm \frac{b^2}{a^2} \phi' \psi' \left\{1 - \frac{th^2}{cth^2}\left[-\frac{b}{\sqrt{2}}(\phi + \psi - c_4)\right]\right\}\right] ,$$

$$z_3 = \ln\left[\frac{\mp 2 \phi' \psi'}{a^2 (\phi + \psi + c_3)^2}\right] , \qquad \text{(I.I.2)}$$

$$z_{4,5} = \ln\left[\mp \frac{b^2}{a^2} \phi' \psi' \left\{1 + \frac{tg^2}{ctg^2}\left[\frac{b}{\sqrt{2}}(\phi + \psi - c_4)\right]\right\}\right] .$$

Т Е О Р Е М А I.I.I. Уравнение Лиувилля (I.I.0) приводится к линейному волновому уравнению $u_{xt} = 0$ нелокальным преобразованием зависимой переменной $z = \mathcal{Z}(u, u_1)$, если $\mathcal{Z}$ имеет вид (I.I.I).

Решения этого уравнения определены соотношениями (I.I.2).

I.2. (№I) $\qquad z_{xt} + z z_x = 0 \qquad$ (I.2.0)

З а м е ч а н и е I.I.I. Уравнение (I.2.0) связано с уравнением Лиувилля

$$u'_{xt} + \exp u' = 0$$

нелокальной подстановкой

$$u' = \ln z_x , \quad (z \neq \text{const}). \qquad (I.2.I)$$

Поэтому для произвольного решения уравнения (I.2.0) может быть построено соответствующее решение уравнения Лиувилля по формуле

$$u_0' = \ln z_x^0 .$$

Обратное нелокальное преобразование, осуществляющее приведение уравнения (I.2.0) к уравнению Лиувилля, имеет вид

$$z = \int \exp u' dx .$$

Найдём нелокальные преобразования τ вида $z = \mathcal{Z}(u, u_t, u_{tt})$, осуществляющие линеаризацию уравнения (I.2.0). Решения определяющего соотношения

$$\tau(1.2.0)\Big|_{u_{xt}=0} \equiv 0$$

получены в [6I]:

$$\mathcal{Z}_{1,2} = -u_t^{-1}\left\{2a u_t^2 \begin{matrix} th \\ cth \end{matrix}[-(au + c_1)] + u_{tt}\right\}, \quad \gamma = -\frac{a^2}{\alpha^2} < 0,$$

$$\mathcal{Z}_3 = 2\frac{u_t}{u + c_3} - \frac{u_{tt}}{u_t}, \quad \gamma = 0, \qquad (I.2.2)$$

$$\mathcal{Z}_{4,5} = -u_t^{-1}\left\{\pm 2b u_t^2 \begin{matrix} tg \\ ctg \end{matrix}(bu + c_4) + u_{tt}\right\}, \quad \gamma = \frac{b^2}{\alpha^2} > 0 .$$

Решения уравнения (I.2.0) построим на основании формул (I.2.2) при $u = \phi(x) + \psi(t)$:

$$z_{1,2} = -(\psi')^{-1}\left\{2a(\psi')^2 \begin{matrix} th \\ cth \end{matrix}[-a(\phi + \psi) + c_1] + \psi''\right\},$$

$$z_3 = \frac{2\psi'}{\phi + \psi + c_3} - \frac{\psi''}{\psi'}, \qquad (I.2.3)$$

$$z_{4,5} = -(\psi')^{-1}\left\{\pm 2b(\psi')^2 \begin{matrix} tg \\ ctg \end{matrix}[b(\phi + \psi) + c_4] + \psi''\right\}.$$

Уравнение (I.2.0) может быть проинтегрировано иначе. Заметим, что оно допускает запись

$$\frac{\partial}{\partial x}[2z_t + z^2] = 0 .$$

Интегрируя, получаем

$$2z_t + z^2 = F(t) . \qquad (I.2.4)$$

Если $z_0(t)$ - частное решение уравнения (I.2.4), то

$$z(x,t) = \frac{2\exp(-\int z_0 dt)}{\phi(x) + \int \exp(-\int z_0 dt)dt} + z_0 . \qquad (I.2.5)$$

Введём обозначение

$$\int \exp(-\int z_0 dt)dt \equiv \psi(t) .$$

Это позволяет записать (I.2.5) в виде z_3 из (I.2.3).

Указанное решение может быть сформулировано, как задача нелокальной линеаризации: пусть многообразие задано уравнением (I.2.0) и следует найти преобразование τ, приводящее уравнение $W_x = 0$ к (I.2.0). Определяющее соотношение запишем в виде

$$\tau W_x \Big|_{(1.2.0)} \equiv 0, \quad W = \mathcal{Z}(z, z_t).$$

Его решение оказывается следующим:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{F}[2z_t + z^2] , \qquad (I.2.6)$$

где $\mathcal{F}$ - произвольная дифференцируемая функция. Решение уравнения $W_x = 0$ известно: $W = F(t)$. Это позволяет найти из (I.2.6) решение z_3, называемое общим решением [64].

Таким образом, уравнение (I.2.0) приводится к линейному волновому уравнению $u_{xt} = 0$ нелокальными преобразованиями зависимой переменной (I.2.2) и к уравнению $W_x = 0$ - подстановкой (I.2.6).

Решения уравнения (I.2.0) определены соотношениями (I.2.3).

I.3. (№4) $$z_{xt} + \frac{\partial}{\partial x}[g(x)\exp z] = 0 \qquad (I.3.0)$$

Приведём уравнение (I.3.0) к линейному

$$u_{xt} - g'g^{-1}u_t = 0, \qquad (I.3.I)$$

решением которого является функция $u_0 = \psi(x) + \phi(t)\cdot g(x)$.

Рассмотрим преобразование зависимой переменной $z = \mathcal{Z}(x,t,u,u_1)$.

Расщепление определяющего соотношения

$$\tau(1.3.0)\Big|_{(1.3.1)} \equiv 0$$

на многообразии (I.3.I) по $u_{xx}u_{tt}, u_{xx}, u_{tt}$ даёт следующую систему уравнений:

$$\mathcal{Z}_{u_x u_t} = 0,$$

$$\mathcal{Z}_{tu_x} + u_t\mathcal{Z}_{u_x u} + g'g^{-1}u_t\mathcal{Z}_{u_x u_x} + g\mathcal{Z}_{u_x}\exp z = 0,$$

$$\mathcal{Z}_{xu_t} + u_x\mathcal{Z}_{uu_t} + g'g^{-1}(u_t\mathcal{Z}_{u_t u_t} + \mathcal{Z}_{u_t}) = 0.$$

Линеаризующие подстановки найдены в [6I]:

$$\mathcal{Z}_1 = \ln\frac{c_1 u_t}{c_3(x)\exp(\alpha g^{-1}u) - c_1 g^2\alpha^{-1}}, \qquad (I.3.2)$$

$$\mathcal{Z}_2 = \ln c_1 u_t - \ln[c_1 g u + c_4]. \qquad (I.3.3)$$

Соответствующие им решения (I.3.0) имеют вид

$$z_1 = \ln\frac{c_1\phi' g}{c_3(x)\exp(\alpha g^{-1}[\psi+\phi g] - \alpha^{-1}g^2 c_1}, \qquad (I.3.4)$$

$$z_2 = \ln[c_1\phi' g] - \ln[c_1 g(\psi+\phi g) + c_4] \qquad (I.3.5)$$

З а м е ч а н и е I.I.2. Уравнение (I.3.0) может быть проинтегрировано иначе. Для этого запишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}[z_t + g(x)\exp z] = 0$$

и выполним интегрирование по x. Получаем

$$z_t + g(x)\exp z = G'(t), \qquad (I.3.6)$$

где $G'(t)$ - произвольная дифференцируемая функция. Выполняя замену $z = u + G(t)$ в (I.3.6), приходим к уравнению

$$u_t + g(x)\exp G(t)\cdot\exp u = 0 .$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\exp(-u) = g(x)\int \exp G(t)dt + \phi(x).$$

Введём обозначение $\int \exp G(t)dt \equiv F(t)$. Тогда

$$u = -\ln[g(x)F(t) + \phi(x)],$$

чему соответствует такое решение уравнения (I.3.0):

$$z = \ln F'(t) - \ln[g(x)F(t) + \phi(x)]. \qquad (I.3.7)$$

$F(t)$ и $\phi(x)$ - произвольные дифференцируемые функции.

Данному решению отвечает следующая задача приведения: для уравнения $W_x = 0$ следует найти нелокальную подстановку $W = \mathcal{Z}(x, z, z_t)$, которая осуществляет приведение его к (I.3.0)

$$\tau\ W_x \Big|_{(1.3.0)} \equiv 0 .$$

Решая эту задачу, находим подстановку

$$W = z_t + g(x)\cdot\exp z . \qquad (I.3.8)$$

Так как $W = G'(t)$, то z можно выразить как функцию от W из соотношения (I.3.8).

Т Е О Р Е М А I.I.2. Уравнение (I.3.0) приводится к линейным уравнениям с помощью подстановок (I.3.2), (I.3.3), (I.3.8) и имеет решения, определяемые соотношениями (I.3.4), (I.3.5), (I.3.7).

З а м е ч а н и е I.I.3. Линеаризация большого числа уравнений гиперболического типа, данных в таблице I приложения I, осуществляется с помощью точечных замен переменных в [6I]. Некоторые из уравнений допускают линеаризацию как с помощью нелокальных преобразований, так и точечными заменами переменных. Например, уравнение

$$Z_t Z_{xx} = Z_x Z_{xt}$$

приводится: I) к виду $U_{\xi\eta}=0$ точечной заменой $U=X$, $\xi=Z$, $\eta=t$; 2) к уравнению

$$U_x - [\psi'(t)]^{-1}\cdot U_t = 0$$

подстановкой $Z=\Phi(U)$; 3) к уравнению $W_x=0$ с помощью нелокальной замены зависимой переменной $W=\int[Z_x\cdot Z_t^{-1}]$; 4) к $V_\nu=0$ подстановкой $V=Z$, $\mu=Z_x$, $\nu=t$, где $V=V(\mu,\nu)$.

2^0. Уравнение $Z_{xt}^2 = 4\lambda(x,t)Z_x Z_t$

Указанное уравнение линеаризуется интегродифференциальной заменой зависимой переменной. Оно допускает очень "узкую" группу Ли. Причиной этого, по-видимому, является то обстоятельство, что соответствующее линейное уравнение с переменным коэффициентом обладает таким же свойством.

I.4. (№7) $$Z_{xt}^2 - 4\lambda(x,t)Z_x Z_t = 0 \qquad (I.4.0)$$

Построим нелокальное преобразование вида

$$\mathcal{Z} = \int f(x,t,u,u_1)dx + \int \phi(x,t,u,u_1)dt ,$$

осуществляющее приведение уравнения (I.4.0) к линейному

$$U_{xt} - \tfrac{1}{2}\lambda_x\lambda^{-1}U_t - \lambda U = 0 , \qquad (I.4.I)$$

$$\tau(1.4.0)\Big|_{(1.4.1)} \equiv 0 . \qquad (I.4.2)$$

Выполним расщепление (I.4.2) по u_2 . Получим $f_{ut}=0$, $\phi_{ux}=0$. Исходя из наличия интегралов в (I.4.2), потребуем выполнения на многообразии условия

$$\phi_\lambda\lambda_x + U_x\phi_u + \tfrac{1}{2}\lambda_x\lambda^{-1}\phi_{ut} + \lambda U\phi_{ut} = \frac{\partial}{\partial t}\psi(\lambda,U,u_1) =$$

$$= \psi_\lambda\lambda_t + \psi_u U_t + \psi_{ux}U_{xt} + \psi_{ut}U_{tt} . \qquad (I.4.3)$$

Расщепление по u_2 даёт $\psi_{ux}=0$, $\phi_{ut}=0$, а по U_x и $\lambda_t - \phi_u = 0$, $\psi_\lambda = 0$. Остаётся соотношение, связывающее ϕ и ψ ,

$$\phi_\lambda \lambda_x + (2\lambda)^{-1} \cdot \phi_{ut} \lambda_x + \phi_{ut} \lambda u = \psi_u u_t . \quad (I.4.4)$$

Пусть $\phi = \omega(\lambda) u_t^2$, тогда $\lambda_x \phi_\lambda = \omega_\lambda \lambda_x u_t^2$ и (I.4.4) приобретает вид

$$\omega_\lambda \lambda_x u_t^2 + \lambda_x \lambda^{-1} u_t^2 + 2 \lambda u u_t = \psi_u u_t .$$

Отсюда находим $\omega = \lambda^{-1}$, $\psi_u = -2u$, $\psi = -u^2$. Следовательно,

$$\phi = \lambda^{-1} u_t^2 .$$

Теперь определяющее соотношение можем записать так:

$$[f_t + u_t f_u + f_{ux}(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_t + \lambda u)]^2 + 4[f_t + u_t f_u + f_{ux}(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_t + \lambda u)] \cdot u u_t +$$
$$+ (2uu_t)^2 - 4\lambda [f + u^2] \cdot \int [f_t + u_t f_u + f_{ux}(\frac{\lambda_x}{2\lambda} u_t + \lambda u)] dx \equiv 0 .$$

В последнем слагаемом интегральный сомножитель не может обращаться в ноль, что вело бы к противоречию. Поэтому обращение в ноль последнего слагаемого оказывается возможным при $f = -u^2$. Найденное f удовлетворяет определяющему соотношению. При этом

$$\mathcal{Z} = -\int u^2 dx + \int \lambda^{-1} u_t^2 dt . \quad (I.4.5)$$

Решение уравнения (I.4.0) получаем подстановкой решения уравнения (I.4.I) в (I.4.5).

Т Е О Р Е М А I.I.3. Уравнение (I.4.0) приводится к виду (I.4.I) нелокальным преобразованием зависимой переменной (I.4.5).

Решения уравнения (I.4.0) получаются подстановкой решений уравнения (I.4.I) в правую часть формулы (I.4.5).

3°. Уравнения Монжа-Ампера специального вида

Общее уравнение Монжа-Ампера, как известно [4I], имеет вид

$$a[u_{xx} u_{tt} - u_{xt}^2] + b u_{xx} + c u_{tt} + d u_{xt} + f = 0 ,$$

где коэффициенты - функции от x, t, u, u_1. Рассмотрим некоторые частные случаи этого уравнения. Линеаризация таких уравнений осуществляется с помощью нелокальных преобразований зависимой и независимых переменных.

I.5. $$Z_{xx}Z_{tt} - Z_{xt}^2 = 0 \qquad (I.5.0)$$

Т Е О Р Е М А I.I.4. Уравнение Монжа-Ампера [28] (I.5.0) приводится к виду

$$U_\eta = 0\,, \quad U_0 = \phi(\xi)\,, \qquad (I.5.I)$$

с помощью нелокальной замены переменных

$$\xi = Z_t\,, \quad \eta = x\,, \quad U = Z_x\,. \qquad (I.5.2)$$

Решения уравнения $Z_x = \phi(Z_t)$ удовлетворяют (I.5.0).

Доказательство. В соответствии с формулами (9) получаем

$$D_x\xi = Z_{xt}, \quad D_x\eta = 1\,, \quad D_x U = Z_{xx}\,,$$

$$D_t\xi = Z_{tt}, \quad D_t\eta = 0\,, \quad D_t U = Z_{xt}\,.$$

Производную U_η вычислим по формуле (8)

$$U_\eta = -K\cdot\delta^{-1} = -Z_{tt}^{-1}[Z_{xt}^2 - Z_{xx}Z_{tt}]\,, \ (Z_{tt}\neq 0). \qquad (I.5.3)$$

Из соотношений (I.5.I) и (I.5.3) следует (I.5.0).

I.6. (№IO) $$Z_{xx}Z_{tt} - Z_{xt}^2 - Z_{xt} = 0 \qquad (I.6.0)$$

Найдём линейное по U, U_1 преобразование

$$\begin{aligned} Z = \mathcal{Z} &= a_1U_\xi + b_1U_\eta + d_1U + c_1\,,\\ x = \mathcal{E} &= a_2U_\xi + b_2U_\eta + d_2U + c_2\,,\\ t = \mathcal{H} &= a_3U_\xi + b_3U_\eta + d_3U + c_3\,. \end{aligned} \qquad (I.6.I)$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i, d_i - дифференцируемые функции ξ, η. Приведение (I.6.0) к уравнению $U_{\xi\eta}=0$ осуществлено в [6I]. Решение определяющего соотношения

$$\tau\,(1.6.0)\,\Big|_{U_{\xi\eta}=0} \equiv 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \xi\eta + \xi U_\xi + \eta U_\eta - U + c_1\,,\\ \mathcal{E} &= U_\xi + \eta + c_2\,, \quad \mathcal{H} = U_\eta + \xi + c_3\,. \end{aligned} \qquad (I.6.2)$$

Здесь $c_i, (i=\overline{1,3})$ - постоянные интегрирования.

Покажем, что найденная подстановка осуществляет приведение уравнений. Для замены (I.6.2) в соответствии с (7)-(9) находим

$$D_\zeta \mathcal{Z} = \eta + \zeta U_{\zeta\zeta}, \quad D_{\zeta\zeta} \mathcal{Z} = U_{\zeta\zeta} + \zeta U_{\zeta\zeta\zeta}, \quad D_{\zeta\eta} \mathcal{Z} = 1,$$
$$D_\eta \mathcal{Z} = \zeta + \eta U_{\eta\eta}, \quad D_{\eta\eta} \mathcal{Z} = U_{\eta\eta} + \eta U_{\eta\eta\eta},$$
$$D_\zeta \mathcal{E} = U_{\zeta\zeta}, \quad D_\eta \mathcal{E} = 1, \quad D_{\zeta\zeta} \mathcal{E} = U_{\zeta\zeta\zeta}, \quad D_{\zeta\eta} \mathcal{E} = D_{\eta\eta} \mathcal{E} = 0,$$
$$D_\zeta \mathcal{X} = 1, \quad D_\eta \mathcal{X} = U_{\eta\eta}, \quad D_{\eta\eta} \mathcal{X} = U_{\eta\eta\eta}, \quad D_{\zeta\eta} \mathcal{X} = D_{\zeta\zeta} \mathcal{X} = 0,$$
$$\delta = U_{\zeta\zeta} U_{\eta\eta} - 1, \quad K = -\eta \cdot \delta, \quad H = \zeta \cdot \delta,$$
$$P = U_{\zeta\zeta} \cdot \delta, \quad Q = U_{\eta\eta} \cdot \delta, \quad R = \delta.$$

Теперь вычисляем значения $\mathcal{Z}_2$

$$\mathcal{Z}_{xx} = U_{\eta\eta} \cdot \delta^{-1}, \quad \mathcal{Z}_{tt} = U_{\zeta\zeta} \cdot \delta^{-1}, \quad \mathcal{Z}_{xt} = \delta^{-1}.$$

Подставляя их в (I.6.0) на многообразии, находим

$$(U_{\eta\eta} U_{\zeta\zeta} \cdot \delta^{-2} - \delta^{-2}) - \delta^{-1} \equiv 0.$$

Решения уравнения (I.6.0) получаем из (I.6.2) заменой $U = \phi + \psi$

$$\mathcal{Z} = \zeta\eta + \zeta\phi' + \eta\psi' - \phi - \psi + c_1,$$
$$x = \phi' + \eta + c_2, \quad t = \psi' + \zeta + c_3. \qquad \text{(I.6.3)}$$

Таким образом, уравнение (I.6.0) допускает приведение к линейному уравнению $U_{\zeta\eta} = 0$ нелокальной заменой переменных (I.6.2).

I.7. (№22) $$\mathcal{Z}_{xx}\mathcal{Z}_{tt} - \mathcal{Z}_{xt}^2 + t^{-1}\mathcal{Z}_t\mathcal{Z}_{xx} + \mathcal{Z}_{tt} \qquad \text{(I.7.0)}$$
$$+ t^{-1}(\mathcal{Z}_x + x)\mathcal{Z}_{xt} + t^{-1}\mathcal{Z}_t = 0$$

Осуществим приведение уравнения (I.7.0) к линейному

$$W_{tt} + \zeta t^{-1} W_{\zeta t} + t^{-1} W_t = 0 \qquad \text{(I.7.I)}$$

с помощью нелокальной замены переменных.

Найдём решения уравнения (I.7.I). Для этого приведём его к линейному виду $U_{\zeta\eta} = 0$ следующей подстановкой

$\eta = \mathcal{X}_1(\zeta, t, W) = \zeta \cdot t^{-1}$, $\zeta = \mathcal{E}_1(\zeta, t, W) = \zeta$, $U = \mathcal{Z}_1(\zeta, t, W) = W$,
$\delta_1 = -\zeta \cdot t^{-2}$, $K_1 = -W_t$, $H_1 = -t^{-1} \cdot (\zeta t^{-1} \cdot W_\zeta + W_t)$,

$P_1 = -\zeta t^{-2}\cdot W_{\zeta\zeta}$, $Q_1 = \delta(W_{tt} + \zeta t^{-1}\cdot W_t)$, $R_1 = \delta(W_{\zeta t} - \zeta^{-1} W_t)$.

При этом решение (I.7.I) записываем в виде

$$W = \phi(\zeta) - \psi(\zeta\cdot t^{-1}), \qquad (I.7.2)$$

где $U_0 = \phi(\zeta) - \psi(\eta)$.

Приведение (I.7.0) к (I.7.I) осуществляем преобразованием

$$\mathcal{Z} = -\zeta\cdot W_\zeta - \frac{1}{2} W_\zeta^2 + W + C_1,$$
$$\mathcal{E} = -W_\zeta, \quad \mathcal{X} = t. \qquad (I.7.3)$$

Вспомогательные величины на многообразии принимают значения

$$\delta = -W_{\zeta\zeta}, \qquad H = \delta(\zeta + W_\zeta),$$
$$K = -\delta(2^{-1} W_{\zeta t}\cdot W_\zeta + W_t),$$
$$P = -\delta\cdot W_{\zeta\zeta}^2, \qquad R = \delta^2\cdot W_{\zeta t},$$
$$Q = \delta\{-2^{-1}\cdot W_\zeta^2 + 2^{-1} W_\zeta(2t^{-1} W_{\zeta t} + \zeta t^{-1}\cdot W_{\zeta\zeta t}) - \zeta t^{-1}\cdot W_{\zeta t} - t^{-1}\cdot W_t\}.$$

Подстановка этих значений в уравнение (I.7.0) обращает последнее в тождество. Его решение имеет вид

$$Z = -\zeta\cdot X - \frac{1}{2} X^2 + \phi(\zeta) - \psi(\zeta\cdot t^{-1}) + C_1,$$
$$X = -(\phi' - \psi' t^{-1}), \quad t = t. \qquad (I.7.4)$$

Следовательно, нелокальная линеаризация уравнения (I.7.0) осуществляется с помощью подстановки (I.7.3).

4°. Уравнения Эйлера-Лагранжа и Борна-Инфельда

Линеаризация этих уравнений осуществляется также с помощью нелокальных преобразований зависимой и независимых переменных.

I.8. (№20) $(1+Z_t^2)Z_{xx} = 2Z_x Z_t Z_{xt} - (1+Z_x^2)Z_{tt}$ (I.8.0)

Уравнение Эйлера-Лагранжа известно как уравнение для минимальных поверхностей. Иногда в литературе оно называется уравнением Плато [28, 64].

Покажем, что преобразование (подстановка Монжа) [64]

$$\mathcal{Z} = i\int[1+u_\xi^2]^{\frac{1}{2}}d\xi + i\int[1+u_\eta^2]^{\frac{1}{2}}d\eta + c_1,$$
$$\mathcal{E} = \xi + \eta + c_2,$$
$$\mathcal{X} = u + c_3, \quad c_i, (i=\overline{1,3}) - \text{const}. \quad (I.8.I)$$

осуществляет приведение (I.8.0) к уравнению $u_{\xi\eta}=0$, $u=\phi(\xi)+\psi(\eta)$. Определяющее соотношение имеет вид

$$\tau(1.8.0)\Big|_{u_{\xi\eta}=0} \equiv 0. \quad (I.8.2)$$

Вычислим значения на многообразии вспомогательных величин

$$D_\xi\mathcal{E}=1, \quad D_\eta\mathcal{E}=1, \quad D_{ij}\mathcal{E}=0,$$
$$D_\xi\mathcal{X}=u_\xi, \quad D_\eta\mathcal{X}=u_\eta, \quad D_{ij}\mathcal{X}=0,$$
$$D_\xi\mathcal{Z}=i(1+u_\xi^2)^{\frac{1}{2}}, \quad D_{\xi\xi}\mathcal{Z}=iu_\xi u_{\xi\xi}(1+u_\xi^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (i,j=\xi,\eta),$$
$$D_\eta\mathcal{Z}=i(1+u_\eta^2)^{\frac{1}{2}}, \quad D_{\eta\eta}\mathcal{Z}=iu_\eta u_{\eta\eta}(1+u_\eta^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad D_{\xi\eta}\mathcal{Z}=0,$$
$$\delta = u_\eta - u_\xi, \quad K = i(1+u_\xi^2)^{\frac{1}{2}} - i(1+u_\eta^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$R=0, \quad H = i(1+u_\xi^2)^{\frac{1}{2}}u_\eta - i(1+u_\eta^2)^{\frac{1}{2}}\cdot u_\xi,$$
$$P = i\delta u_\xi u_{\xi\xi}(1+u_\xi^2)^{-\frac{1}{2}} + iu_{\xi\xi}[(1+u_\xi^2)^{\frac{1}{2}} - (1+u_\eta^2)^{\frac{1}{2}}],$$
$$Q = i\delta u_\eta u_{\eta\eta}(1+u_\eta^2)^{-\frac{1}{2}} + iu_{\eta\eta}[(1+u_\xi^2)^{\frac{1}{2}} - (1+u_\eta^2)^{\frac{1}{2}}]. \quad (I.8.3)$$

Соотношение (I.8.2) на многообразии принимает следующую форму:

$$[1+K^2\delta^{-2}]\cdot[Pu_\eta^2 + Qu_\xi^2] + 2KH\delta^{-2}[Pu_\eta + Qu_\xi] +$$
$$+[1+H^2\delta^{-2}]\cdot[P+Q]\Big|_{u_{\xi\eta}=0} \equiv 0. \quad (I.8.4)$$

Подставляя в (I.8.4) полученные выше значения δ, H, K, P, Q из (I.8.3), убеждаемся в справедливости тождества (I.8.2). Решение уравнения (I.8.0) определяются соотношениями

$$\mathcal{Z} = i\int(1+\phi'^2)^{\frac{1}{2}}d\xi + i\int(1+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}d\eta + c_1,$$
$$X = \xi + \eta + c_2, \quad t = \phi(\xi) + \psi(\eta) + c_3. \quad (I.8.5)$$

Т Е О Р Е М А I.I.5. Уравнение Эйлера-Лагранжа приводится к виду $u_{\xi\eta}=0$ нелокальной заменой переменных (I.8.I).

I.9. $(1-Z_y^2)Z_{xx}+2Z_xZ_yZ_{xy}-(1+Z_x^2)Z_{yy}=0$ (I.9.0)

Уравнение Борна-Инфельда [54] связано с уравнением Эйлера-Лагранжа заменой независимой переменной

$$t=i\nu\,,\quad (i=\sqrt{-1})\,. \tag{I.9.I}$$

Это позволяет по найденным решениям уравнения (I.8.0) строить решения уравнения (I.9.0) по формулам

$$Z=i\int(1+\phi'^2)^{\frac{1}{2}}d\xi+i\int(1+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}d\eta+c_1,$$
$$x=\xi+\eta+c_2,\quad \nu=-i(\phi+\psi+c_3)\,.$$

З а м е ч а н и е I.I.4. В работе [6I] нами даны примеры других уравнений, линеаризация которых осуществляется с помощью нелокальных преобразований зависимой и независимых переменных. Показано, например, что уравнение

$$(Z_{xx}-Z_xZ_{tt})^2=Z_t^2Z_{xx}Z_{tt} \tag{I.I0.I}$$

допускает приведение к системе $U_\xi=0$, $V_\eta=0$ подстановкой

$$\mathcal{Z}=\tfrac{1}{3}(2\eta-\xi^3)U'-\tfrac{2}{3}U+\int\xi^4V'd\xi+c_1,$$
$$x=\xi^{-1}U'+V+c_2,\quad (c_i-\text{const}),$$
$$t=\xi U'-\int\xi^2V'd\xi+c_3,\ (i=\overline{1,3}),$$

а уравнение

$$Z_{xx}+Z_xZ_{tt}\mp Z_tZ_{xt}=0 \tag{I.I0.2}$$

приводится к виду $U_{\xi\eta}=0$ заменой переменных

$$\mathcal{Z}=\xi^2U_{\xi\xi}-2\xi U_\xi+2U+\eta^2U_{\eta\eta}-2\eta U_\eta+c_1,$$
$$x=-(U_{\xi\xi}+U_{\eta\eta})+c_2,$$
$$t=\pm(\xi U_{\xi\xi}-U_\xi+\eta U_{\eta\eta}-U_\eta)+c_3\,.$$

Полученные результаты свидетельствуют об эффективности метода нелокальной линеаризации при решении многих нелинейных уравнений математической физики с двумя независимыми переменными.

§ 2. Линеаризация многомерных уравнений

Рассмотрим многомерные обобщения двумерных нелинейных уравнений. Воспользуемся произвольными функциями и постоянными интегрирования в полученных решениях двумерных нелинейных уравнений для отыскания решений их многомерных обобщений. При этом возможны два случая. Первый – когда линеаризация уравнения осуществляется непосредственно нелокальной подстановкой определённого вида. И второй – когда линеаризация оказывается возможной лишь при выполнении дополнительных условий, которым подчинено многообразие.

Рассмотрим пример, соответствующий первому из указанных случаев.

$$2.I.\quad Z_{xy} + Z_{xt} + \frac{\partial}{\partial x}[g(x)\exp Z] = 0 \qquad (2.I.0)$$

Это уравнение является многомерным обобщением уравнения (I.3.0). Зададим многообразие линейным уравнением

$$U_{xt} + U_{xy} = g'g^{-1}(U_y + U_t), \qquad (2.I.I)$$

решением которого является функция

$$U = \phi(x) + g(x)[\psi(y) + \omega(t)].$$

Рассмотрим многомерное обобщение подстановок (I.3.2), (I.3.3), линеаризующих уравнение (I.3.0)

$$Z_1 = \ln \frac{c_1(U_y + U_t)}{c_3(x)\cdot\exp(\alpha g^{-1}U) - c_1\alpha^{-1}g^2}, \qquad (2.I.2)$$

$$Z_2 = \ln \frac{U_y + U_t}{g\cdot U}. \qquad (2.I.3)$$

В процессе решения задачи нелокальной линеаризации не возникает дополнительных ограничений на многообразие. Соответствующие решения уравнения (2.I.0) имеют вид

$$Z_1 = \ln \frac{c_1(\phi' + \omega')\cdot g}{c_3(x)\cdot \exp \alpha g^{-1}[\psi + g(\phi+\omega)] - c_1 \alpha^{-1} g^2},$$

$$Z_2 = \ln \frac{\phi' + \omega'}{\psi + g(\phi+\omega)}.$$

Возможность распространения этого метода на большее число независимых переменных очевидна.

Т Е О Р Е М А I.2.I. Многомерное уравнение (2.I.0) приводится к (2.I.I) с помощью нелокальных преобразований зависимой переменной $Z = \mathcal{Z}(x,t,u,u_1)$, если $\mathcal{Z}$ имеет вид (2.I.2), (2.I.3).

Решения этого уравнения определяются соотношениями (2.I.4) и (2.I.5).

Рассмотрим второй случай.

2.2. $$Z_{xy} + Z_{xt} + Z Z_x = 0 \qquad (2.2.0)$$

Заметим, что уравнения

$$\hat{Z}_{xy} + \hat{Z}\hat{Z}_x = 0, \quad \check{Z}_{xt} + \check{Z}\check{Z}_x = 0$$

приведены к линейным $\hat{u}_{xy}=0$ и $\check{u}_{xt}=0$ подстановками (I.2.2). Предположим, что линеаризация многомерного обобщения уравнения (I.2.0) может быть осуществлена с помощью некоторого многомерного обобщения подстановок (I.2.2)

$$\mathcal{Z}_{1,2} = -2b(u_y + u_t)\,\underset{\operatorname{cth}}{\overset{\operatorname{th}}{}}[-(bu + c_1)] - \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_{tt}}{u_t},$$

$$\mathcal{Z}_3 = 2\frac{u_y + u_t}{u + c_3} - \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_{tt}}{u_t}, \qquad (2.2.I)$$

$$\mathcal{Z}_{4,5} = \mp 2b(u_y + u_t)\,\underset{\operatorname{ctg}}{\overset{\operatorname{tg}}{}}[bu + c_4] - \frac{u_{yy}}{u_y} - \frac{u_{tt}}{u_t}.$$

Полученные подстановки осуществляют линеаризацию уравнения (2.2.0), если при этом выполнены некоторые дополнительные условия на многообразие. Определим эти условия.

Многообразие зададим системой уравнений

$$U_{xy} = U_{xt} = U_{yt} = 0 . \qquad (2.2.2)$$

Вычислим производные на многообразии для каждого из преобразований (2.2.I) и подставим найденные значения в уравнение (2.2.0). Обращение определяющего соотношения в тождество возможно, если

$$U_{tt} U_t^{-2} + U_{yy} U_y^{-2} = 0 . \qquad (2.2.3)$$

Из (2.2.2) следует, что $U = \phi(y) + \psi(t) + \omega(x)$. При этом получаем из (2.2.3) уравнения

$$\phi'' = \lambda \phi'^2, \quad \psi'' = -\lambda \psi'^2, \ (\lambda = const).$$

Интегрируя эти уравнения, находим

$$\phi = -\lambda^{-1}\{\ln[-(\lambda y + A_2)] + A_1\},$$
$$\psi = \lambda^{-1}\{\ln[\lambda t - A_4] + A_3\}.$$

Здесь $A_i, (i = \overline{1,4})$ - произвольные постоянные. Соответствующие решения уравнения (2.2.0) имеют вид

$$Z_{1,2} = \lambda\left[\frac{1}{\lambda y + A_2} + \frac{1}{A_4 - \lambda t}\right]\left\{\frac{2b}{\lambda}\ \underset{cth}{th}\left[\ln\left|\frac{\lambda t - A_4}{-\lambda y - A_2}\right|^{-\frac{b}{\lambda}} + \omega_1(x) + c_1\right] + 1\right\},$$

$$Z_3 = \lambda\left[\frac{1}{\lambda y + A_2} + \frac{1}{A_4 - \lambda t}\right]\left\{-2\lambda^{-1}\left[\ln\left|\frac{\lambda t - A_4}{-\lambda y - A_2}\right|^{\frac{1}{\lambda}} + \omega_3(x) + c_3\right]^{-1} + 1\right\}, \qquad (2.2.4)$$

$$Z_{4,5} = \lambda\left[\frac{1}{\lambda y + A_2} + \frac{1}{A_4 - \lambda t}\right]\left\{\frac{2b}{\pm\lambda}\ \underset{ctg}{tg}\left[\ln\left|\frac{\lambda t - A_4}{-\lambda y - A_2}\right|^{\frac{b}{\lambda}} + \omega_4(x) + c_4\right] + 1\right\}.$$

Т Е О Р Е М А I.2.2. Приведение уравнения (2.2.0) к системе (2.2.2) осуществляется с помощью нелокальных подстановок (2.2.I), если на многообразии выполнено условие (2.2.3).

Примеры нелокальной линеаризации других многомерных уравнений рассмотрены в [6I] .

Таким образом, рассмотренные случаи показывают, что метод нелокальных преобразований эффективен и при решении многомер-

ных уравнений.

§ 3. Групповые свойства уравнений, допускающих линеаризацию

Исследование групповых свойств уравнений с двумя независимыми переменными выполняется по стандартной методике Ли–Овсянникова. Поэтому промежуточные вычисления нами опущены. Полученные результаты сформулированы в виде теорем. Вначале рассмотрены уравнения, для которых алгебры Ли инвариантности бесконечномерны, а затем – уравнения, допускающие конечномерные группы Ли.

I°. Уравнения, допускающие бесконечную группу Ли

Введём обозначения:

$$t = x_0,\ x = x_1,\ u = x_2,\ p_\alpha = i g_{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\mu},\ (\alpha = 0,1,2),$$

$g_{\mu\alpha}$ – метрический тензор. X – инфинитезимальный оператор локальной однопараметрической группы G_1 [38, 39].

$$X = \xi^0\frac{\partial}{\partial x_0} + \xi^1\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi^2\frac{\partial}{\partial x_2} = \xi^\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Второе продолжение оператора X обозначим

$$\widetilde{X} = X + \omega^0\frac{\partial}{\partial z_0} + \omega^1\frac{\partial}{\partial z_1} + \rho^{00}\frac{\partial}{\partial z_{00}} + \rho^{10}\frac{\partial}{\partial z_{10}} + \rho^{11}\frac{\partial}{\partial z_{11}}.$$

Необходимое и достаточное условие инвариантности уравнения $\mathfrak{M}: F(z) = 0$ относительно группы G_1 записываем в виде определяющего соотношения

$$\widetilde{X}\,F(z)\Big|_{\mathfrak{M}F} \equiv 0.$$

Сделаем несколько замечаний.

З а м е ч а н и е I.3.I. Линейные уравнения

$$u_{xx} = 0, \qquad u_{xx} - k u_x = 0,$$
$$u_{xt} = 1, \qquad u_{xt} - t^{-1}u_x = 0,$$
$$u_t - \phi(x)u_x = 0,$$

к которым осуществлено приведение ряда нелинейных уравнений в

§ I, допускают бесконечную группу преобразований.

З а м е ч а н и е I.3.2. В работе [26] получена бесконечномерная алгебра инвариантности уравнения Лиувилля (I.I.0).

Рассмотрим уравнение

$$z_{xt} + z\,z_x = 0 \qquad (3.I.0)$$

Т Е О Р Е М А I.3.I. Уравнение (3.I.0) допускает бесконечную группу, алгебра Ли которой состоит из операторов вида

$$X = \phi(x_1)p_1 + \psi(x_0)p_0 + (\psi''(x_0) - \psi'(x_0)\cdot x_2)p_2 . \qquad (3.I.I)$$

Доказательство. Расщеплением определяющего соотношения

$$\rho^{10} + \xi^2 z_1 + z\cdot\omega^1\big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0$$

получаем систему уравнений

$$\xi^0_1 = \xi^0_2 = \xi^1_2 = 0, \quad \xi^2_{2\alpha} = 0, \ (\alpha = 1,2),$$
$$\xi^2_{20} + z\,\xi^0_0 + \xi^2 = 0, \quad \xi^2_{10} + z\cdot\xi^2_1 = 0 .$$

Интегрируя эту систему, находим решение

$$\xi^0 = \psi(x_0), \ \xi^1 = \phi(x_1), \ (p_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}),$$
$$\xi^2 = -\psi'\cdot z + \psi'', \ (\mu = 0,1,2),$$

где ϕ и ψ - произвольные дифференцируемые функции.

Воспользуемся оператором (3.I.I) для "размножения" решений уравнения (3.I.0). Выберем $\phi = 0$, функцию ψ положим равной e^t. Конечные преобразования группы - решения следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial z'}{\partial a}\Big|_{a=0} = e^t\cdot(1-z), \quad z'\big|_{a=0} = z^0,$$
$$\frac{\partial t'}{\partial a}\Big|_{a=0} = e^t, \qquad t'\big|_{a=0} = t^0 .$$

Приходим к такому результату:

$$t' = \ln\frac{(1-z^0)\exp t^0}{1 - a(1-z^0)\exp t^0 - z^0} ,$$

$$z' = z^\circ + a(1-z^\circ)\cdot \exp t^\circ .$$

Следовательно, для всякого решения уравнения (3.I.0) формула "размножения" имеет вид $(z' = \Lambda(x', t'))$

$$z + a(1-z)\cdot e^t = \Lambda\left[x; \ln \frac{(1-z)\exp t}{1-a(1-z)\cdot \exp t - z}\right]. \quad (3.I.2)$$

3.2. $$z_{xt} + \frac{\partial}{\partial x}[g(x)\exp z] = 0 \quad (3.2.0)$$

Т Е О Р Е М А I.3.2. Уравнение (3.2.0) допускает бесконечномерную алгебру Ли, операторы которой имеют вид

$$X = \phi(x_1)p_1 + \psi(x_0)p_0 - [\psi'(x_0) + g'g^{-1}\phi(x_1)]p_2 . \quad (3.2.I)$$

Доказательство. Расщеплением определяющего соотношения получаем систему уравнений

$$f^\circ_1 = f^\circ_2 = 0, \quad f^1_0 = f^1_2 = 0, \quad \left(p_\beta = \frac{\partial}{\partial x_\beta}\right),$$
$$f^2_{10} = 0, \quad f^2_{2\beta} = 0, \quad (\beta = 0,1,2),$$
$$f^1\cdot g' + f^2\cdot g + f^\circ_0\cdot g = 0,$$
$$f^1\cdot g'' + f^2_1\cdot g + f^2\cdot g' - f^2_2\cdot g' + g'(f^\circ_0 + f^1_1) = 0.$$

Решая последнюю, находим координаты оператора

$$f^\circ = \psi(x_0), \qquad f^1 = \phi(x_1),$$
$$f^2 = -\psi'(x_0) - g'g^{-1}\cdot\phi(x_1).$$

З а м е ч а н и е I.3.3. Уравнение

$$z_t z_{xx} = z_x z_{xt} \quad (3.3.0)$$

получается из линейного $u_{\xi\eta} = 0$ точечной заменой переменных (замечание I.I.3.). Последнее допускает бесконечную группу Ли. При точечных заменах переменных координаты инфинитезимального оператора группы Ли преобразуются как координаты контравариантного вектора [38, 39]. Следовательно, уравнение (3.3.0) также допускает бесконечную группу Ли.

На основании полученных результатов приходим к теореме.

Т Е О Р Е М А I.3.3. Уравнения (I.I.0), (3.I.0), (3.2.0),

(3.3.0) и приведенные в таблице I приложения I допускают бесконечномерные алгебры Ли.

З а м е ч а н и е I.3.4. Уравнения, данные в таблице I приложения I и уравнение (3.3.0) линеаризуются точечными заменами переменных, а уравнения (I.I.0), (3.I.0), (3.2.0) - с помощью нелокальных преобразований одной переменной. При этом соответствующие линейные уравнения также инвариантны относительно бесконечной группы Ли.

2°. Уравнения, инвариантные относительно конечномерных групп Ли

3.4. $$U_{xt}^{2} - 4\lambda(x,t)U_xU_t = 0 \qquad (3.4.0)$$

Определяющее соотношение записываем в виде

$$4\sqrt{\lambda U_1U_0}\,\rho^{10} - 4U_1U_0(\lambda_1 f^1 + \lambda_0 f^0) - \\ - 4\lambda(\omega^1 U_0 + \omega^0 U_1)\,\Big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0 .$$

Соответствующая система определяющих уравнений

$$f_1^0 = f_2^0 = 0, \quad f_0^1 = f_2^1 = 0,$$
$$f_0^2 = f_1^2 = f_{22}^2 = 0,$$
$$f_0^0 + f_1^1 + \lambda_1\lambda^{-1}f^1 + \lambda_0\lambda^{-1}f^0 = 0$$

имеет решение

$$f^0 = 0, \quad f^1 = 0, \quad f^2 = c_1U + c_2, \ (c_i = \mathrm{const}).$$

Т Е О Р Е М А I.3.4. Уравнение (3.4.0) допускает алгебру Ли операторов, которые имеют вид

$$X_1 = x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}. \qquad (3.4.1)$$

З а м е ч а н и е I.3.5. Уравнение

$$U_{xt} - (2\lambda)^{-1}\lambda_x U_t - \lambda U = 0,$$

к которому приведено уравнение (3.4.0), допускает оператор

$$X = x_2\frac{\partial}{\partial x_2}. \qquad (3.4.2)$$

3.5. $$U_{xx}U_{tt} - U_{xt}^2 = 0 \qquad (3.5.0)$$

Т Е О Р Е М А I.3.5. Базисные операторы алгебры Ли инвариантности уравнения Монжа-Ампера (I.5.0) имеют вид

$$p_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \quad J_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta, \quad K_\alpha = x_\alpha x_\beta p_\beta,$$
$$(\alpha,\beta = 0,1,2), \quad x_\alpha p_\alpha = x_0 p_0 + x_1 p_1 + x_2 p_2.$$

Доказательство. Определяющее соотношение

$$\rho^{11}U_{00}^2 + \rho^{00}U_{10}^2 - 2\rho^{10}U_{10}U_{00} \Big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0$$

после расщепления даёт такую систему уравнений:

$$f_{ij}^\gamma = 0, \ (i,j,\gamma = 0,1,2), (\gamma \neq i, \ \gamma \neq j),$$
$$f_{\beta\beta}^\beta = 2 f_{\alpha\beta}^\alpha, \ (\alpha,\beta = 0,1,2; \ \alpha \neq \beta).$$

Здесь по α и β суммирования нет. Интегрируя, получаем решение этой системы

$$f^\alpha = c_\mu x_\mu x_\alpha + c_{\alpha\gamma} x_\gamma + A_\alpha, (\alpha,\gamma,\mu = 0,1,2),$$

A_α, c_μ, $c_{\alpha\gamma}$ - произвольные параметры.

Алгебра Ли операторов - очевидна.

Для оператора

$$K_2 = x_2 x_\mu p_\mu, \ (\mu = 0,1,2)$$

построим конечные преобразования группы Ли. Решение задачи

$$\frac{\partial x'_\alpha}{\partial a}\Big|_{a=0} = x_2 x_\alpha, \quad x'_\alpha\Big|_{a=0} = x^\circ_\alpha, (\alpha = 0,1,2),$$

имеет вид

$$x' = x^\circ[1 - a u^\circ]^{-1}, \ t' = t^\circ[1 - a u^\circ]^{-1},$$
$$u' = u^\circ[1 - a u^\circ]^{-1}.$$

Формула "размножения" решений оказывается такой:

$$\frac{u}{1 - au} = \Phi\left[\frac{x}{1-au}; \frac{t}{1-au}\right].$$

Здесь $\Phi(x',t')$ - решение уравнения (3.5.0).

3.6. $$u_{xx}u_{tt} - u_{xt}^2 - u_{xt} = 0 \qquad (3.6.0)$$

Определяющему соотношению

$$\rho^{01}(1+2u_{10}) - \rho^{11}u_{00} - \rho^{00}u_{11} \Big| \mathfrak{M} \equiv 0$$

отвечает система уравнений

$f_i^0 = 0$, $(i=1,2)$, $f_{\alpha\alpha}^1 = 0$, $(\alpha = 0,1,2)$, $f_{2\beta}^1 = 0$, $(\beta = 0,1)$,
$f_{11}^2 = 0$, $f_{1\gamma}^2 = 0$, $(\gamma = 0,2)$, $f_{00}^2 = -f_0^1$, $f_{20}^2 = f_{10}^1$,
$f_2^1 = f_{00}^0 - 2f_{20}^2$, $f_{20}^2 - f_2^1 - f_{10}^1 = 0$,
$2f_{10}^2 + f_1^1 + f_0^0 - f_2^2 = 0$.

Решение имеет вид

$$f^1 = c_1x_0 + c_2x_1 + c_3, \quad f^0 = c_4x_0 + c_5,$$
$$f^2 = (c_2+c_4)x_2 + c_6x_1 - \frac{1}{2}c_1x_0^2 + c_7x_0 + c_8.$$

c_i, $(i=\overline{1,8})$ - параметры. Таким образом, нами установлена

Т Е О Р Е М А I.3.6. Уравнение (3.6.0) допускает алгебру Ли операторов, которые имеют вид

$$p_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \ (\alpha = 0,1,2), \ X_{2\mu} = x_\mu p_2, \ (\mu = 0,1),$$
$$D_\gamma = x_\alpha p_\alpha, \ (\gamma = 1,2; \alpha \neq \gamma), \ X = 2x_0p_1 - x_0^2p_2. \qquad (3.6.I)$$

Построим параметрическое семейство решений (3.6.0) по X. Пусть $\Omega(x,t)$ - известное решение этого уравнения. Решение задачи Коши

$$\frac{\partial x'}{\partial a}\Big|_{a=0} = x_0, \qquad x'|_{a=0} = x^0,$$
$$\frac{\partial u'}{\partial a}\Big|_{a=0} = -\frac{1}{2}x_0^2, \quad u'|_{a=0} = u^0,$$

имеет вид

$$x' = x^0 + at, \quad u' = u^0 - \frac{1}{2}at^2.$$

Следовательно, новые решения уравнения (3.6.0) будут такими

$$u = \Omega[x+at; t] + \frac{1}{2}at^2. \qquad (3.6.2)$$

Здесь a - параметр группы Ли.

3.7. $(1+u_t^2)u_{xx} - 2u_x u_t u_{xt} + (1+u_x^2)u_{tt} = 0$ (3.7.0)

Обратимся к исследованию групповых свойств уравнения Эйлера–Лагранжа (Плато) (I.8.0). Определяющее соотношение

$$(1+u_0^2)\rho^{11} + (1+u_1^2)\rho^{00} - 2u_0u_1\rho^{10} + 2\omega^0 u_0 u_{11} - \\ - 2[\omega^1 u_0 + \omega^0 u_1]u_{10} + 2\omega^1 u_1 u_{00} \Big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0$$

после расщепления даёт систему уравнений

$$f_0^0 = f_1^1 = f_2^2 , \quad f_\beta^\alpha = -f_\alpha^\beta , \ (\alpha,\beta = 0,1,2 ; \alpha \neq \beta),$$
$$f_{\alpha\alpha}^\gamma = 0 , \ (\gamma = 0,1,2 ; \alpha \neq \gamma) , \quad f_{12}^0 + f_{02}^1 + f_{01}^2 = 0 ,$$
$$f_{\beta\beta}^0 = f_{\alpha\alpha}^1 = 2f_{10}^1 , \ (\alpha = 1,2 ; \beta = 0,2) ,$$
$$f_{\nu\nu}^\beta = 2f_{2\alpha}^2 , \ (\alpha,\beta,\nu = 0,1,2 ; \alpha \neq \beta) ,$$
$$f_{\gamma\gamma}^2 = 2f_{12}^1 , \ (\gamma = 0,2), \quad f_{\mu\mu}^2 = 2f_{02}^0 , \ (\mu = 1,2).$$

Решая эту систему, находим

$$f^\alpha = c_\mu^\alpha x_\mu + A^\alpha , \quad c_\beta^\alpha = -c_\alpha^\beta , \ (\alpha,\beta,\mu = 0,1,2 ; \alpha \neq \beta).$$

c_μ^α , A^α – произвольные параметры.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Т Е О Р Е М А I.3.7. Максимальной алгеброй Ли инвариантности уравнения Эйлера–Лагранжа (I.8.0) является алгебра с базисными операторами, которые имеют вид

$$p_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} , \ D = x_\alpha p_\alpha , \ J_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha ,$$
$$(\alpha,\beta = 0,1,2), \ x_\alpha p_\alpha = x_0 p_0 + x_1 p_1 + x_2 p_2 . \quad (3.7.I)$$

3.8. $(1-u_y^2)u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} - (1+u_x^2)u_{yy} = 0$ (3.8.0)

Преобразование независимой переменной (I.9.I), осуществляющее связь уравнения Борна–Инфельда (3.8.0) с уравнением Эйлера–Лагранжа (3.7.0), является точечным. Это позволяет воспользоваться известной [38, 39] леммой о преобразовании координат

операторов алгебры Ли. Полный набор операторов алгебры инвариантности уравнения (3.8.0) находим по операторам (3.7.I).

$$x_0 = v\,,\ x_1 = x\,,\ x_2 = u\,,\ p_0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}\,,\ p_1 = -i\frac{\partial}{\partial x_1}\,,\ p_2 = -i\frac{\partial}{\partial x_2}\,,$$

$$D = x_\alpha p_\alpha = x_0 p_0 - x_1 p_1 - x_2 p_2\,,$$

$$J_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha\,,\ (\alpha,\beta = 0,1,2). \qquad (3.8.I)$$

Построим формулу, осуществляющую "размножение" решений уравнения Борна-Инфельда. Рассмотрим оператор

$$J_{02} = x_0 p_2 - x_2 p_0\,. \qquad (3.8.2)$$

Решая задачу Коши

$$\frac{\partial x'_\alpha}{\partial a}\Big|_{a=0} = x_\beta\,,\quad x'_\alpha\Big|_{a=0} = x^\circ_\alpha\,,\ (\alpha,\beta = 0,2;\ \alpha \neq \beta),$$

получаем конечные преобразования группы Ли

$$v' = v^\circ \operatorname{ch} a + u^\circ \operatorname{sh} a\,,$$

$$u' = v^\circ \operatorname{sh} a + u^\circ \operatorname{ch} a\,.$$

Введём новое обозначение

$$V = \operatorname{th} a\,,\ (\operatorname{ch} a = [1-V^2]^{-\frac{1}{2}}\,,\ \operatorname{sh} a = V\cdot[1-V^2]^{-\frac{1}{2}})\,.$$

При этом решение можем записать в форме

$$v' = \frac{v^\circ + u^\circ V}{\sqrt{1-V^2}}\,,\qquad u' = \frac{v^\circ V + u^\circ}{\sqrt{1-V^2}}\,.$$

Построенные конечные преобразования группы подставим в известное решение уравнения (3.8.0) $\Phi(v', x')$. Множество решений уравнения (3.8.0), зависящих от произвольного параметра, описывается формулой

$$\frac{vV + u}{\sqrt{1-V^2}} = \Phi\left[\frac{v + uV}{\sqrt{1-V^2}}\,;\ x\right]\,.$$

З а м е ч а н и е I.3.6. Уравнение (I.IO.I) допускает четырёхмерную алгебру Ли:

$$X_\alpha = p_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,,\ (\alpha = 0,1,2),$$

$$X_3 = 2x_1 p_1 + 3x_0 p_0 + 4x_2 p_2\,.$$

а уравнение (I.IO.2) инвариантно относительно группы Ли, алгебра которой пятимерна:

$$X_\alpha = p_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,,\ (\alpha = 0,1,2),$$
$$X_3 = x_1 p_1 - x_2 p_2\,,\ X_4 = x_0 p_0 - 2x_2 p_2\,.$$

Таким образом, исследование групповых свойств рассмотренных уравнений показывает, что если они допускают более "широкую" группу Ли, то их линеаризация осуществляется с помощью преобразований более простого вида.

Г Л А В А II. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ПРИ ПОМОЩИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В явном виде построим нелокальные подстановки, линеаризующие многочисленные уравнения параболического типа. Это позволит по решению линейного параболического уравнения записать соответствующие решения нелинейных уравнений. В качестве исходного можно, например, выбрать "общее решение" [54] уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$

$$u = [4\pi t]^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{4t}\right] d\eta$$

или его фундаментальное решение

$$u = t^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-(4t)^{-1} x^2\right].$$

Вначале рассмотрим уравнения с двумя независимыми переменными, линеаризацию и построение решений многомерных параболических уравнений, а затем покажем результаты исследования групповых свойств уравнений с двумя независимыми переменными.

§ I. Линеаризация и точные решения уравнений с двумя независимыми переменными

Рассмотрим несколько уравнений, линеаризация которых осу-

ществляется при помощи точечных замен переменных. Покажем, что многие из них допускают также нелокальную линеаризацию. Их точные решения играют существенную роль при решении других уравнений.

I°. Уравнения, линеаризуемые точечными и нелокальными заменами переменных

З а м е ч а н и е 2.I.I. Точечное преобразование зависимой переменной

$$u' = \phi(u), \quad (u = \psi(u')), \tag{I.0.0}$$

выполненное в уравнении теплопроводности

$$u'_{xx} = u'_t, \quad (u' = \Phi(x,t)), \tag{I.0.I}$$

как известно [64, 65], позволило получить нелинейное уравнение

$$u_{xx} + \phi''(\phi')^{-1}u_x^2 - u_t = 0, \tag{I.0.2}$$

решение которого имеет вид

$$u = \psi[\Phi(x,t)].$$

Здесь функция ψ - обратная по отношению к ϕ из (I.0.2).

Рассмотрим уравнение

I.I. $$a^2 z_t = z_x^{-2} z_{xx} \tag{I.I.0}$$

Т Е О Р Е М А 2.I.I. Уравнение (I.I.0) приводится к линейному

$$u_{\xi\xi} = u_\eta \tag{I.I.I}$$

при помощи неособой $(z_x \neq 0)$ точечной замены

$$u = x, \quad \xi = az, \quad \eta = t. \tag{I.I.2}$$

Доказательство. Воспользовавшись формулами (8), (9) введения, находим значения производных в переменных x, t, z:

$$u_\eta = -z_t \cdot z_x^{-1}, \quad u_\xi = a^{-1} \cdot z_x^{-1},$$
$$u_{\xi\xi} = -a^{-2} z_x^{-3} \cdot z_{xx}.$$

Подстановкой их в (I.I.I) получаем (I.I.0). Если $\Phi(\xi,\eta)$- реше-

ние уравнения (I.I.I), то решение уравнения (I.I.0) определяется соотношением

$$\Phi(az;t) = x . \qquad (I.I.3)$$

Уравнения, линеаризованные с помощью точечных подстановок, помещены в таблицах I, 2 приложения II.

I.2. $$u_{xx} - k u^{-1} u_x^2 - u_t = 0 \qquad (I.2.0)$$

Как частный случай (I.0.2), данное уравнение линеаризуется точечной заменой (I.0.0). При этом

$$u' = \phi(u) = c_1 (k+1)^{-1} u^{k+1} + c_2 \qquad (I.2.I)$$

и решение уравнения (I.2.0) имеет вид

$$u = \left\{ c_1^{-1} (k+1) [\Phi(x,t) - c_2] \right\}^{\frac{1}{k+1}} . \qquad (I.2.2)$$

Т Е О Р Е М А 2.I.2. Уравнение (I.2.0) приводится к линейному (I.0.I) с помощью нелокальных подстановок

$$u' = u^{-1} u_x , \qquad (I.2.3)$$

$$u = \exp u'_t . \qquad (I.2.4)$$

Если $\Phi(x,t)$ - решение уравнения (I.0.I), то соответствующие этим подстановкам решения имеют вид

$$u_1 = c \exp \int \Phi(x,t)\, dx , \qquad (I.2.5)$$

$$u_2 = \exp \Phi'_t . \qquad (I.2.6)$$

Теорема доказывается прямым вычислением [5I].

I.3. $$u_{xx} - k u_x^2 - u_t = 0 \qquad (I.3.0)$$

Уравнение (I.3.0) также приводится к линейному (I.0.I) точечной заменой (I.0.0)

$$u' = c \exp(-k u) . \qquad (I.3.I)$$

Оно имеет решение

$$u = -k^{-1} \ln(c^{-1} \cdot \Phi(x,t)) . \qquad (I.3.2)$$

Т Е О Р Е М А 2.I.3. Уравнение (I.3.0) приводится к ли-

нейному (I.0.I) с помощью нелокальных замен

$$u = \ln u'_t, (k=1), \qquad (I.3.3)$$

$$u' = (1 \mp u_x)\exp(\mp u), (k = \pm 1). \qquad (I.3.4)$$

Соответствующие им решения имеют вид

$$u_1 = \ln \Phi_t , \qquad (I.3.5)$$

$$u_{2,3} = \pm\left\{\ln[c(t) + \int \Phi \cdot \exp x \, dx] - x\right\}, \qquad (I.3.6)$$

$c(t)$ - произвольная дифференцируемая функция, $\Phi(x,t)$ - решение уравнения (I.0.I).

Доказательство. Первая часть теоремы доказывается решением следующих задач приведения:

$$\tau_1 (1.3.0)\Big|_{u_{xx} = u_t} \equiv 0 ,$$

$$\tau_2 (u'_{xx} - u'_t)\Big|_{(1.3.0)} \equiv 0 .$$

Построим решения (I.3.0) в случае подстановки (I.3.4). Заменяя в ней u' решением линейного уравнения, находим

$$u_x = \Phi \cdot \exp(-u) - 1 .$$

Преобразованием зависимой переменной $z = \exp u, (k=-1)$, получаем уравнение

$$z_x + z = \Phi(x,t).$$

Его решение имеет вид

$$z = [c(t) + \int \Phi(x,t) \cdot \exp x \, dx] \cdot \exp(-x) .$$

Тем самым получаем решение (I.3.6). Теорема доказана.

2°. Линеаризация уравнений $V_t V_{xx} + 1 = 0$ и

$$u_{xx} = u_t u_x^2 u^{-2}$$

Рассмотрим уравнение

I.4. $$V_t V_{xx} + 1 = 0 \qquad (I.4.0)$$

В уравнении (I.I.0) выполним подстановку $u = V_x$. Про-

интегрировав по x полученное уравнение, приходим к (I.4.0).

Т Е О Р Е М А 2.I.4. Уравнение (I.4.0) с помощью нелокальных преобразований приводится к уравнению (I.I.0).

I.5. $$u_{xx} - u_t u_x^2 u^{-2} = 0 \qquad (I.5.0)$$

Рассмотрим задачу приведения уравнения (I.5.0) к виду

$$u'_{xx} - u'_t (u')^{-2} = 0 \qquad (I.5.I)$$

при помощи подстановок $u' = \mathcal{Z}(u, u_x)$. Решение определяющего соотношения

$$\tau\,(1.5.1)\Big|_{(1.5.0)} \equiv 0$$

имеет вид

$$u' = u\,u_x^{-1} \qquad (I.5.2)$$

Обозначим $\Omega(x,t)$ решение уравнения (I.5.I). Находим соответствующие решения (I.5.0), интегрируя (I.5.2):

$$\Omega(x,t) = u\,u_x^{-1}.$$

Т Е О Р Е М А 2.I.5. Уравнение (I.5.0) приводится к (I.5.I) с помощью нелокальной подстановки $u' = \mathcal{Z}(u, u_x)$, если $\mathcal{Z}$ имеет вид (I.5.2). Его решение выражается формулой

$$u = c(t)\cdot \exp \int \Omega^{-1}(x,t)\,dx\,.$$

c – произвольная дифференцируемая функция.

В последующем мы осуществим линеаризацию уравнения (I.5.I), а также покажем его точные решения.

3°. Уравнения $u_{xx} = u_t u^{-2}$, $u_t = 1 - \dfrac{u_x^2}{u_x^2 + u_{xx}}$ и

$$u_{xx} = u_t u^{-2}\cdot(1 + u_x)^2$$

Эти уравнения допускают более "узкие" группы Ли, чем рассмотренные нами ранее. Все они тесно связаны между собой.

Рассмотрим первое из указанных уравнений.

I.6. $$u_{xx} - u_t u^{-2} = 0 \qquad (I.6.0)$$

К этому уравнению нами было приведено уравнение (I.5.0). Задача заключалась в том, чтобы линеаризовать уравнение (I.6.0).

Л Е М М А 2.I.I. Уравнение (I.6.0) приводится к виду

$$z_{xx} - z_x^2 z_t = 0 \qquad (I.6.I)$$

с помощью нелокальной подстановки

$$u = z_x^{-1} . \qquad (I.6.2)$$

Решение уравнения (I.6.0) определяется соотношением

$$u = [\psi_x(x,t)]^{-1}, \qquad (I.6.3)$$

где $\psi(x,t)$ - решение (I.6.I).

Доказательство. Расщеплением определяющего соотношения

$$\tau\,(1.6.0)\Big|_{(1.6.1)} \equiv 0$$

получаем уравнение

$$z_x^2 \mathcal{Z}_{z_x} = \mathcal{Z}^{-2} \cdot \mathcal{Z}_{z_x} .$$

При $\mathcal{Z}_{z_x} \neq 0$ находим

$$u = \pm z_x^{-1} .$$

Заменяя в этой формуле z решением $\psi(x,t)$, приходим к (I.6.3).

Т Е О Р Е М А 2.I.6. Уравнение

$$u_t' = (u')^m \cdot u_{xx}' \qquad (I.6.4)$$

тогда и только тогда приводится к виду (I.6.I)

$$\tau\,(1.6.4)\Big|_{(1.6.1)} \equiv 0 \qquad (I.6.5)$$

подстановками $u' = \mathcal{Z}(u_x)$, когда $m = 2$.

Доказательство. Пусть уравнение (I.6.4) приводимо к (I.6.I) подстановкой $u' = \mathcal{Z}(u_x)$. Расщеплением определяющего соотношения (I.6.5) по производным z_{xt} получаем систему двух уравнений. Первое

$$z_x^2 \mathcal{Z}^m = 1 .$$

Его решение имеет вид

$$\mathcal{Z} = z_x^{-\frac{2}{m}} . \qquad (I.6.6)$$

Во второе уравнение

$$z_x^4 \mathcal{Z}_{z_x z_x} + 2 z_x^3 \mathcal{Z}_{z_x} = 0$$

подставим $\mathcal{Z}$ из (I.6.6). Приходим к следующему результату:

$$(2m^{-1} + 1) = 2 ,$$

откуда следует, что $m = 2$.

Пусть в уравнении (I.6.4) $m = 2$, тогда выполнены условия леммы 2.I.I. и уравнение (I.6.4) приводится к виду (I.6.I).

I.7. $$u_t = 1 - \frac{u_x^2}{u_x^2 + u_{xx}} \qquad (I.7.0)$$

Указанное уравнение может быть записано иначе, а именно:

$$u_{xx} = u_x^2 \cdot \frac{u_t}{1 - u_t} \qquad (I.7.0^а)$$

или

$$u_{xx} = u_x^2 \cdot \frac{1}{1 - u_t} - u_x^2 . \qquad (I.7.0^б)$$

Пусть многообразие задано уравнением (I.7.0^б). Рассмотрим задачу приведения

$$\tau (u'_{xx} - u'_t u'^2_x)\Big|_{(1.7.0^б)} \equiv 0 . \qquad (I.7.I)$$

Подстановку ищем в виде $u' = \mathcal{Z}(u, u_x)$. Из определяющего соотношения (I.7.I) находим

$$\frac{u_x^2}{[1 - u_t]^2} = \left\{ u_x \mathcal{Z}_u + \left(\frac{u_x^2}{1 - u_t} - u_x^2 \right) \mathcal{Z}_{u_x} \right\}^2 . \qquad (I.7.2)$$

Выполняя последующее расщепление (I.7.2) по u_t, получаем

$$\mathcal{Z}_{u_x} = u_x^{-1} .$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\mathcal{Z} = \ln u_x + A(u) ,$$

где A - произвольная дифференцируемая функция. Подставляем

найденное $\mathcal{Z}$ в оставшееся от расщепления (I.7.I) уравнение. Приходим к условию $A_u = 1$, откуда $A = u + c$. c – постоянная интегрирования. Следовательно,

$$u' = \pm [\ln u_x + u + c] . \qquad (I.7.3)$$

Решение уравнения (I.6.I) $\psi(x,t)$ подставим в (I.7.3). Интегрируя полученное уравнение, находим соответствующее решение уравнения (I.7.0)

$$u = \ln[f(t) + \int \exp \psi \, dx] - c , \qquad (I.7.4)$$

где f – произвольная дифференцируемая функция.

Таким образом, уравнение (I.7.0) приводится к (I.6.I) с помощью нелокальной подстановки (I.7.3), а его решение определено соотношением (I.7.4).

I.8. $$V_{xx} = V_t V^{-2}(1 + V_x)^2 \qquad (I.8.0)$$

Уравнение (I.8.0) эквивалентно уравнению

$$u_{xx} - u_x^2 - u_t[\exp u - u_x]^2 = 0 . \qquad (I.8.I)$$

Приведение этих уравнений осуществляется с помощью точечной подстановки

$$V = \exp(-u) .$$

Уравнение (I.8.I) приведём к виду (I.6.0) подстановкой $u' = \mathcal{Z}(u, u_x)$. Расщеплением соотношения

$$\tau [u'_{xx} - u'_t (u')^{-2}]\Big|_{(1.8.0)} \equiv 0$$

по u_{xt} находим

$$u' = \pm [\exp u - u_x]^{-1} . \qquad (I.8.2)$$

Подстановка полученного значения $\mathcal{Z}$ в оставшееся после расщепления уравнение обращает его в тождество. Пусть $\Omega(x,t)$ – решение уравнения (I.6.0). В таком случае решение (I.8.I) получим, интегрируя уравнение $u_x - \exp u + \Omega^{-1} = 0$.

Последнее подстановкой $U = \ln W$ приводим к виду

$$W' - W^2 + W \cdot \Omega^{-1} = 0 .$$

Это уравнение заменой $W = Z^{-1}$ приводим к линейному уравнению

$$Z' - \Omega^{-1} \cdot Z = -1 . \qquad (I.8.3)$$

Решение полученного уравнения (I.8.3) имеет вид

$$Z = \exp\left(\int \Omega^{-1} dx\right)\left[c(t) - \int \exp\left(-\int \Omega^{-1} dx\right) dx\right].$$

Это позволяет записать решение уравнения (I.8.I)

$$U = -\ln\left\{\exp\int \Omega^{-1} dx \cdot \left[c(t) - \int \exp\left(-\int \Omega^{-1} dx\right) dx\right]\right\}. \qquad (I.8.4)$$

Т Е О Р Е М А 2.I.7. Уравнение (I.8.I) приводится к (I.6.0) с помощью нелокального преобразования зависимой переменной $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$, если $\mathcal{Z}$ имеет вид (I.8.2). Решения этого уравнения вычисляются по формуле (I.8.4).

§ 2. Линеаризация многомерных уравнений

Построенные выше нелокальные подстановки, линеаризующие уравнения с двумя независимыми переменными, в значительной мере облегчают отыскание преобразований, осуществляющих линеаризацию некоторых многомерных обобщений этих уравнений.

Рассмотрим типичный случай.

$$2.I. \quad U_{xx} + U_{yy} = U_t + U_x^2 + U_y^2 + h\, e^U \qquad (2.I.0)$$

Это уравнение является трёхмерным обобщением уравнения

$$U_{xx} - U_x^2 - h\, e^U = U_t .$$

Пусть многообразие задано уравнением (2.I.0). Определяющее соотношение записываем в виде

$$\tau \left[U_t' - U_{xx}' - U_{yy}'\right]\Big|_{(2.1.0)} \equiv 0 .$$

Решая его, находим нелокальную подстановку

$$U' = (U_x + U_y) \cdot \exp(-U) . \qquad (2.I.I)$$

Построим решение уравнения (2.I.0). Для этого обозначим $\Phi(x,y,t)$ решение линейного многомерного уравнения. Неоднородное линейное ДУЧП первого порядка

$$U_x + U_y = \Phi(x,y,t)\cdot \exp U \qquad (2.I.2)$$

перепишем в виде соответствующей системы ОДУ

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{\exp(-U)dU}{\Phi} .$$

По интегралам этой системы

$$J_1 = \exp(-U) + \int \Phi dx , \; J_2 = x - y$$

строим общее решение уравнения (2.I.2)

$$\Lambda[x-y ; e^{-U} + \int \Phi(x,y,t)dx] = 0 .$$

Записывая в другой форме, получаем

$$U = -\ln[f(x-y) - \int \Phi(x,y,t)dx] . \qquad (2.I.3)$$

Λ , f - произвольные дифференцируемые функции.

Т Е О Р Е М А 2.2.I. Линеаризация уравнения (2.I.0) осуществляется с помощью нелокальной подстановки (2.I.I), его решение определяется соотношением (2.I.3).

Другие многомерные уравнения линеаризуются аналогичным образом, что показано нами в таблице 3 приложения II.

§ 3. Групповые свойства уравнений, допускающих линеаризацию

При исследовании групповых свойств уравнений параболического типа используем ранее принятые обозначения. В целях облегчения сопоставления групповых свойств уравнений, допускающих линеаризацию, операторы алгебр Ли инвариантности уравнения теплопроводности

$$U_{xx} - U_t = 0 \qquad (3.0.0)$$

и уравнения Бюргерса [39] нами даны в таблице 4 приложения II. Некоторые из рассмотренных уравнений приводятся к линейному невырожденной точечной заменой переменных. Для них мы пользовались леммой о контравариантном законе преобразования координат инфинитезимального оператора [38, 39].

3.1. $$U_{xx} - U_t U_x^2 = 0 \qquad (3.1.0)$$

Это уравнение линеаризуется точечной заменой переменных (I.I.2). Поэтому алгебра Ли инвариантности (3.I.0) может быть получена из операторов алгебры Ли для уравнения (3.0.0):

$$X_\alpha = p_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, (\alpha = 0, 2), \; X_3 = c\,p_1, \; c_{22} = c_0,$$
$$X_4 = x_2 p_2 + 2x_0 p_0, \; X_5 = 2x_0 p_2 - x_1 x_2 p_1, \; X_1 = x_1 p_1,$$
$$X_6 = x_2 x_0 p_2 + x_0^2 p_0 - \frac{1}{4}(x_2^2 + 2x_0) x_1 p_1 . \qquad (3.1.1)$$

Построим конечные преобразования группы, отвечающие оператору X_5. Решение задачи Коши

$$\frac{\partial x'}{\partial a}\Big|_{a=0} = -ux, \qquad x'\Big|_{a=0} = x^\circ,$$
$$\frac{\partial u'}{\partial a}\Big|_{a=0} = 2t, \qquad u'\Big|_{a=0} = u^\circ$$

имеет вид

$$u' = u^\circ + 2at, \quad x' = x^\circ \cdot \exp[-a(2at + u^\circ)] . \qquad (3.1.2)$$

Пусть нам известно решение уравнения (3.I.0) $\Phi(x', t')$. Заменяя в этом решении переменные X' и U' новыми X и U, находим такую формулу "размножения" решений:

$$u = \Phi[x \exp\{-a(2at + u)\}; t] - 2at . \qquad (3.1.3)$$

3.2. $$U_{xx} - U_t - k u^{-1} u_x^2 = 0 \qquad (3.2.0)$$

Данное уравнение линеаризуется точечной подстановкой (I.2.I). Следовательно, алгебра Ли инвариантности (3.2.0) имеет вид

$$X_\alpha = p_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\,,\ (\alpha = 0,1)\ ,\ X_3 = c(x_0,x_1)x_2^{-k}p_2\,,$$
$$X_4 = x_1p_1 + 2x_0p_0\,,\ X_5 = x_0p_1 - \frac{x_1x_2}{2(k+1)}p_2\,,\ c_{11} = c_0\,,$$
$$X_6 = x_0x_1p_1 + x_0^2p_0 - \frac{(x_1^2+2x_0)}{4(k+1)}x_2p_2, X_2 = x_2p_2 \quad (3.2.I)$$

Конечные преобразования группы в случае оператора X_5 находим, решая следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial x'}{\partial a}\Big|_{a=0} = t\ ,\qquad x'\Big|_{a=0} = x^\circ\,,$$
$$\frac{\partial u'}{\partial a}\Big|_{a=0} = \frac{-xu}{2(k+1)}\ ,\ u'\Big|_{a=0} = u^\circ\,.$$

Подставляя решение этой задачи

$$x' = x^\circ + at\ ,\ u' = u^\circ \exp\left[-\tfrac{1}{2}(k+1)^{-1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}a^2t + ax\right)\right]$$

в какое-либо решение уравнения (3.2.0) $\Phi(x',t')$, получаем такую формулу "размножения" решений:

$$u = \Phi[at+x\,;t]\cdot\exp\left[\tfrac{1}{2}(k+1)^{-1}\cdot\left(\tfrac{1}{2}a^2t + ax\right)\right]\,.$$

3.3. $$u_t u_{xx} + 1 = 0 \qquad (3.3.0)$$

Запишем определяющее соотношение для уравнения (3.3.0):

$$u_0^2\rho^{11} - \omega^\circ\Big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0$$

Выполнив расщепление этого уравнения, находим следующую систему условий:

$$f_1^\circ = f_2^\circ = 0\,,\ f_0^1 = f_2^1 = 0\,,\ f_0^2 = f_{22}^2 = 0\,,$$
$$2f_{21}^2 = f_{11}^1\,,\qquad 2f_2^2 - 2f_1^1 - f_0^\circ = 0\,.$$

Решение этой системы имеет вид

$$f^\circ = c_1x_0 + c_2\,,\ f^1 = \left(c_3 - \tfrac{1}{2}c_1\right)x_1 + c_4\,,$$
$$f^2 = c_3x_2 + c_5x_1 + c_6\,.$$

Т Е О Р Е М А 2.3.I. Уравнение (3.3.0) инвариантно относительно алгебры Ли с базисными операторами

$$X_\alpha = p_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}, (\alpha = 0,1,2),\ X_3 = x_1 p_2,$$
$$X_4 = -x_1 p_1 + 2x_0 p_0,\ X_5 = x_1 p_1 + x_2 p_2 . \qquad (3.3.I)$$

3.4. $$U_{xx} - U_t U_x^2 U^{-2} = 0 \qquad (3.4.0)$$

Расщеплением определяющего соотношения

$$\rho^{11} - u_1^2 u^{-2}\cdot\omega^0 - 2u_0 u_1 u^{-2}\cdot\omega^1 + 2u_0 u_1^2 u^{-3}\cdot f^2\big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0$$

находим систему уравнений

$$f_1^0 = f_2^0 = 0,\ f_1^2 = 0,\ f_{11}^1 = 0,\ f_{22}^1 = x_2^{-2}\cdot f_0^1,$$
$$f_{22}^2 - 2f_{12}^1 - x_2^{-2}\cdot f_0^2 = 0,\ f_0^0 - 2f_2^2 + 2x_2^{-2} f^2 = 0.$$

Решение этой системы будет таким:

$$f^0 = c_1 x_0 + c_2,\quad c_i, (i = \overline{1,5}) - \text{const},$$
$$f^1 = x_1\left[\left(\tfrac{1}{4}c_1 - \tfrac{1}{2}c_3\right)\ln x_2 + \left(\tfrac{1}{2}c_3 - \tfrac{1}{4}c_1\right)x_0 + c_4\right] + B,$$
$$f^2 = x_2\left[c_3 x_0 + c_5 + \tfrac{1}{2}c_1 \ln x_2\right],\quad B_{22} = x_2^{-2} B_0 .$$

Т Е О Р Е М А 2.3.2. Уравнение (3.4.0) допускает алгебру Ли, операторы которой имеют вид $\left(p_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha},\ \alpha = 0,1,2\right)$

$$X_0 = p_1,\ X_1 = x_1 p_1,\ X_2 = x_2 p_2,\ X_3 = B(x_0, x_2) p_0,$$
$$X_4 = x_1(x_0 - \ln x_2)p_1 + 2x_0 x_2 p_2,\ B_{22} = x_2^{-2} B_0, \qquad (3.4.I)$$
$$X_5 = \tfrac{1}{4}x_1(\ln x_2 - x_0)p_1 + x_0 p_0 + \tfrac{1}{2}x_2 \ln x_2 p_2 .$$

Воспользуемся оператором X_4 для построения формулы "размножения" решений уравнения. Решение соответствующей задачи

$$\left.\frac{\partial x'}{\partial a}\right|_{a=0} = x(t - \ln u),\quad x'|_{a=0} = x^0,$$
$$\left.\frac{\partial u'}{\partial a}\right|_{a=0} = 2tu,\qquad u'|_{a=0} = u^0$$

даёт такие конечные преобразования группы:

$$x' = x^0 (u^0)^{-a}\cdot \exp[at(1-a)],\ u' = u^0 \cdot \exp 2at . \qquad (3.4.2)$$

Подстановкой последних в решение $\Phi(x', t)$ уравнения (3.4.0) получаем

$$u = \Phi[x\cdot u^{-a}\cdot e^{a(1-a)t};\ t]\cdot e^{-2at}. \qquad (3.4.3)$$

3.5. $$U_{xx} - U^{-2}U_t = 0 \qquad (3.5.0)$$

Расщепляя определяющее соотношение для уравнения (3.5.0)

$$2U^{-1}\cdot U_0 f^2 + U^2\rho^{11} - \omega^0 \Big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0 ,$$

получаем следующую систему необходимых условий:

$$f_1^0 = f_2^0 = 0, \quad f_2^1 = 0, \quad f_{22}^2 = 0, \quad f^2 = X_2 f_1^1,$$

$$2X_2^2 f_{21}^2 - X_2^2 f_{11}^1 + f_0^1 = 0, \quad X_2^2 f_{11}^2 = f_0^2 .$$

Решение этой системы имеет вид

$$f^1 = \left(\tfrac{1}{2} C_1 + C_2\right) X_1 + C_3 ,$$

$$f^0 = 2C_1 X_0 + C_4, \quad f^2 = C_2 X_2 .$$

$C_i, (i = \overline{1,4})$ - произвольные постоянные.

Т Е О Р Е М А 2.3.3. Уравнение (3.5.0) инвариантно относительно алгебры Ли, базисные операторы которой имеют вид

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}, \ \alpha = 0,1,2, \ X_0 = P_0, \ X_1 = P_1,$$

$$X_2 = X_1 P_1 + 2X_0 P_0, \quad X_3 = X_1 P_1 + X_2 P_2 . \qquad (3.5.I)$$

3.6. $$U_{xx} - U_x^2 U_t [1 - U_t]^{-1} = 0 \qquad (3.6.0)$$

Расщеплением определяющего соотношения

$$(1 - U_0)^2 \cdot \rho^{11} - \omega^0 U_1^2 - 2U_0 U_1 (1 - U_0)\omega^1 \Big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0$$

находим систему уравнений

$$f_1^0 = f_2^0 = 0, \quad f_0^1 = f_2^1 = f_{11}^1 = 0, \quad f_1^2 = 0,$$

$$f_{22}^2 = f_0^2 = -f_2^2 = 0, \quad f_{22}^2 + f_2^2 = \tfrac{1}{2} f_0^0 .$$

Получаем решение этой системы

$$f^1 = C_1 X_1 + C_2, \ f^0 = C_3, \ f^2 = -C_4 \cdot e^{X_0 - X_2} + C_5 .$$

Следовательно, уравнение (3.6.0) допускает алгебру Ли инвариантности с базисными операторами

$$X_\alpha = P_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}, \ (\alpha = 0,1,2), \qquad (3.6.I)$$

$$X_3 = -\exp(X_0 - X_2) P_2 .$$

3.7. $u_{xx} - u_x^2 - u_t[\exp u - u_x]^2 = 0$ (3.7.0)

Для этого уравнения определяющее соотношение записываем следующим образом:

$$\rho^{11} + 2[u_0(\exp u - u_1) - u_1]\cdot\omega^1 - \omega^0(\exp u - u_1)^2 - 2u_0(\exp 2u - u_1\exp u)\cdot f^2\big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0.$$

Выполняя расщепление, находим систему необходимых условий

$$f_1^0 = f_2^0 = 0, \quad \exp x_2\cdot f_2^1 - f_2^2 + \tfrac{1}{2}f_0^0 = 0,$$
$$f_0^1 = f_{22}^1 + f_2^1, \quad f_{11}^2 - f_0^2\cdot\exp 2x_2 = 0,$$
$$f_1^1 - f_1^2\cdot\exp(-x_2) - \tfrac{1}{2}f_0^0 + f^2 = 0,$$
$$f_{22}^2 - f_2^2 - 2f_{12}^1 - 2f_0^1\exp x_2 - f_0^2 = 0,$$
$$2f_{12}^2 - f_{11}^1 - 2f_1^2 + f_0^1\exp 2x_2 + 2f_0^2\exp x_2 = 0.$$

Полученная система уравнений имеет решение

$$f^0 = c_1, \quad f^1 = c_2x_1 + c_3, \quad f^2 = -c_2.$$

Т Е О Р Е М А 2.3.4. Уравнение (3.7.0) допускает алгебру Ли, базисные операторы которой имеют вид

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_3 = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}. \quad (3.7.1)$$

Конечные преобразования группы Ли, соответствующие оператору X_3, находим, решая следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial x'}{\partial a}\Big|_{a=0} = x, \quad x'\Big|_{a=0} = x^0,$$
$$\frac{\partial u'}{\partial a}\Big|_{a=0} = -1, \quad u'\Big|_{a=0} = u^0.$$

Получаем

$$x' = x^0e^a, \qquad u' = u^0 - a.$$

Это позволяет по известному решению уравнения (3.7.0) построить параметрическое семейство решений

$$u = a + \Phi[x\cdot\exp a; t]. \quad (3.7.2)$$

Полученные результаты показывают, что метод нелокальной

линеаризации эффективен также и при решении нелинейных уравнений параболического типа. Групповые свойства этих уравнений играют столь же важную роль, как и в случае рассмотренных нами гиперболических уравнений.

Г Л А В А III. ПОСТРОЕНИЕ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ, ДОПУСКАЮЩИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЮ

Анализ групповых свойств нелинейных уравнений и нелокальных подстановок, осуществляющих их линеаризацию, позволяет выделить семейства уравнений, приводимых к одному и тому же уравнению и допускающих алгебры Ли одинаковой размерности. В связи с этим возникает естественная задача объединения таких уравнений в существенно различные классы уравнений. Полученные в предыдущих главах нелокальные подстановки, осуществляющие приведение конкретных уравнений, позволяют указать тип преобразований, приводящих уравнения данного класса.

Нами построены классы ДУЧП с двумя независимыми переменными, допускающих линеаризацию с помощью нелокальных преобразований.

§ I. Классы линеаризуемых уравнений гиперболического типа

При построении классов уравнений, допускающих линеаризацию, представляются две возможности. Первая – когда исходное уравнение выбираем из числа линеаризованных ранее. Ставим перед собой задачу описать возможные уравнения, приводимые к исходному. Вторая возможность – когда исходное уравнение выбираем таким, чтобы оно содержало произвольные элементы, а многообразие определяем каким-либо уравнением из числа приведенных.

Решение любой такой задачи индивидуально и связано с большим объёмом вычислений для каждого из возможных случаев. Однако, все эти задачи ставятся и решаются однотипно. Поэтому, дав подробное решение нескольких типичных задач, ограничимся постановкой других задач и сообщением конечных результатов.

I. Многообразие зададим уравнением

$$u_{xt} = W(u, u_1) . \qquad (I.I.0)$$

Исходное уравнение выберем линейным с постоянными коэффициентами

$$u'_{xt} + a u'_x + b u'_t + k u' + l = 0 . \qquad (I.I.I)$$

Предположим, что нелокальная линеаризация осуществляется подстановками вида $u' = \mathcal{Z}(u, u_x)$. Расщепление соотношения

$$\tau(1.1.1)\big|_{(1.1.0)} \equiv 0 \qquad (I.I.2)$$

по u_{xx} даёт уравнение

$$W u_x + W \mathcal{Z}_{u_x u_x} \mathcal{Z}_{u_x}^{-1} = -[u_t \mathcal{Z}_{u u_x} \mathcal{Z}_{u_x}^{-1} + a] ,$$

решение которого имеет вид

$$W = \mathcal{Z}_{u_x}^{-1} [\, c(u, u_t) - u_t \mathcal{Z}_u - a \mathcal{Z}] . \qquad (I.I.3)$$

С учётом (I.I.3) второе из уравнений, полученных расщеплением (I.I.2), будет таким

$$c_{u_t} \mathcal{Z}_{u_x}^{-1} [\, c - u_t \mathcal{Z}_u - a \mathcal{Z}] + bc + \\ + (k - ab) \cdot \mathcal{Z} + u_x c_u + l = 0 . \qquad (I.I.4)$$

Решить это соотношение в общем случае не удаётся.

Пусть C – линейная по u_t функция

$$c = \phi(u) u_t + \psi(u)$$

и, кроме того, $a = b = k = l = 0$. В этом случае находим подстановку

$$u' = \mathcal{Z} = -\varkappa[\ln(\psi' u_x)] + l \qquad (I.I.5)$$

и следующий класс нелинейных уравнений:

$$U_{xt} = \left[\frac{\psi'}{\psi}\right]'_u \frac{\psi}{\psi'} U_x U_t - \varkappa^{-1}\psi U_x \ . \qquad (I.I.6)$$

Точечная подстановка $V = \Omega(U)$($U = \omega(V)$) приводит (I.I.6) к уравнению

$$V_{xt} = -\varkappa^{-1} V_x \exp\int(\omega'_v)^2 dV \ . \qquad (I.I.7)$$

Здесь $\psi'\cdot\psi^{-1} = [\Omega']^{-1}$.

Пример 3.I.I. При $\psi = U$ имеем

$$U_{xt} + U^{-1}U_x U_t = -\varkappa^{-1} U U_x \ .$$

Заменой $V = \frac{1}{2}U^2$ это уравнение приводим к такому:

$$V_{xt} = -\varkappa^{-1} V_x \sqrt{2V} \ . \qquad (I.I.8)$$

ТЕОРЕМА 3.I.I. Пусть уравнение (I.I.0) допускает приведение к линейному волновому уравнению $U_{xt} = 0$ по формуле (I.I.2) с помощью подстановок $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$, и пусть W – линейная функция по U_t . Тогда уравнения класса (I.I.6) линеаризуются подстановками вида (I.I.5) и эквивалентны (I.I.7).

2. Выберем в качестве исходного уравнение

$$U'_{xt} + W(U') = 0 \ . \qquad (I.2.0)$$

Задав многообразие уравнением

$$U_{xt} = F(U, U_1) \ , \qquad (I.2.I)$$

потребуем, чтобы замена $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$ осуществляла решение задачи

$$\tau(1.2.0)\,\Big|_{(1.2.1)} \equiv 0 \ . \qquad (I.2.2)$$

Решая систему, полученную из (I.2.2), находим соотношение

$$F = \mathcal{Z}_{U_x}^{-1}[c(U, U_t) - U_t \mathcal{Z}_U] \qquad (I.2.3)$$

и условие

$$U_x c_U + c_{U_t}\mathcal{Z}_{U_x}^{-1}[c - U_t \mathcal{Z}_U] = -W(\mathcal{Z}) \ . \qquad (I.2.4)$$

Случай 2.I. При $c = \mathrm{const}$ получаем $W = 0$, $\mathcal{Z}$ – произвольная дифференцируемая функция. Уравнение (I.2.I) принимает вид

$$U_{xt} = -\mathcal{Z}_u \cdot \mathcal{Z}_{u_x}^{-1} \cdot U_t \,. \qquad (I.2.5)$$

С л у ч а й 2.2. Полагая $C_{u_t}=0$, приходим к уравнению

$$U_{xt} = -C\,C_u^{-1}[\Omega']^{-1} - C_{uu}\,C_u^{-1}\,U_x U_t \,. \qquad (I.2.6)$$

При этом

$$\mathcal{Z} = \Omega(-U_x C_u) \,, \qquad (I.2.7)$$

где Ω - обратная по отношению к W функция аргумента $-U_x C_u$. Точечная замена $V = C(U)$ позволяет записать уравнение (I.2.6) иначе

$$V_{xt} = -V[\,\Omega'(-V_x)]^{-1}. \qquad (I.2.8)$$

Т Е О Р Е М А 3.I.2. Если уравнения вида (I.2.0) допускают приведение к (I.2.I) с помощью нелокальных подстановок $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$ по формуле (I.2.2) и если $C(U, U_t)$ - линейная функция по U_t, то уравнения класса (I.2.6) приводятся к (I.2.0) подстановками вида (I.2.7) и эквивалентны уравнению (I.2.8).

З а м е ч а н и е 3.I.I. Полагая $W = e^{U'}$, получаем

$$U_{xt} = U_x \cdot \exp U - U_x U_t \,,$$

$$V_{xt} + V_x V = 0, \quad (U = \ln(-V)) \,.$$

З а м е ч а н и е 3.I.2. Для многих уравнений вида (I.2.0) в [58] получены точные решения. Это позволяет при помощи установленных зависимостей строить решения уравнений класса (I.2.8).

С л у ч а й 2.3. При $C_u = 0$ получаем подстановку

$$U' = \mathcal{Z} = \Omega[-\mu_1 U_x + \mu_2] \equiv \Omega(\alpha) \,, \qquad (I.2.9)$$

$$\Lambda(\alpha) = \int W(\alpha)\, d\alpha \,.$$

Здесь Ω - функция, обратная к Λ. Уравнение (I.2.I) таково:

$$U_{xt} = \mu_1^{-\frac{1}{2}} \sqrt{U_t} \cdot [\,\Omega'(-\mu_1 U + \mu_2)]^{-1}. \qquad (I.2.I0)$$

П р и м е р 3.I.2. При $W = e^{U'}$ имеем $U' = \ln(-\frac{1}{2} U_x)$,

$$U_{xt} = -U_x \sqrt{U_t} \,.$$

Следовательно, уравнения класса (I.2.I0) приводятся к (I.2.0) подстановками (I.2.9).

С л у ч а й 2.4. Выбирая $C = \phi(u)u_t + \psi(u)$ получаем $W = 1$ и нелокальное преобразование вида

$$u' = \mathcal{Z} = u_x + \ln\phi + \int \phi\, du ,$$

чему соответствует уравнение

$$u_{xt} = -\phi^{-1}[1 + \phi'] .$$

С л у ч а й 2.5. Полагая $\mathcal{Z}_u = 0$, находим подстановку

$$u' = \mathcal{Z} = \Omega(-\lambda u_x) . \qquad (I.2.II)$$

Ω - функция обратная по отношению к W . Уравнение (I.2.I) оказывается следующим:

$$u_{xt} = -\frac{u}{\Omega'(-\lambda u_x)} . \qquad (I.2.I2)$$

П р и м е р 3.I.3. В случае $W = \sin u'$ получаем уравнение

$$u_{xt} = u\cdot\sqrt{1 - \lambda^2 u_x^2} .$$

Соответствующая подстановка имеет вид $u' = \arcsin \lambda u_x$.

Таким образом, уравнения (I.2.I2) нелокальными подстановками вида (I.2.II) приводятся к уравнениям (I.2.0).

3. Рассмотрим следующую задачу нелокальной линеаризации:

$$\tau(u'_{xt})\Big|_{\mathfrak{M}} \equiv 0, \quad u' = \mathcal{Z}(u, u_x), \qquad (I.3.0)$$

$$\mathfrak{M}: \quad u_{xt} = W(u, u_1) . \qquad (I.3.I)$$

Расщеплением (I.3.0) получаем первое уравнение

$$W u_x + W \mathcal{Z}_{u_x u_x} \mathcal{Z}_{u_x}^{-1} + u_t \mathcal{Z}_{u u_x} \mathcal{Z}_{u_x}^{-1} = 0 . \qquad (I.3.2)$$

Решение его оказывается следующим:

$$W = \mathcal{Z}_{u_x}^{-1}[C(u, u_t) - u_t \mathcal{Z}_u] . \qquad (I.3.3)$$

C - произвольная дифференцируемая функция.

Второе уравнение выглядит так:

$$C_{u_t} C - U_x C_u \mathcal{Z}_{u_x} - U_t C_{u_t} \mathcal{Z}_u = 0 . \qquad (I.3.4)$$

С л у ч а й 3.I. При $C=const$ нелокальная линеаризация уравнений класса

$$U_{xt} = \mathcal{Z}_{u_x}^{-1} [C - U_t \mathcal{Z}_u] . \qquad (I.3.5)$$

осуществляется подстановкой $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$, где $\mathcal{Z}(U,U_x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

С л у ч а й 3.2. Для $C = U_t \mathcal{Z}_u + \psi(U)$ получаем подстановку в виде

$$U' = \mathcal{Z} = \gamma [\ln U_x + \psi_u \psi^{-1}] , (\psi \neq 0) \qquad (I.3.6)$$

и соответствующее ей уравнение класса

$$U_{xt} = \gamma^{-1} U_x \cdot \psi(U) . \qquad (I.3.7)$$

$\psi(U)$ – произвольная дифференцируемая функция, γ – произвольная постоянная.

С л у ч а й 3.3. Полагая $C = U_t \cdot r(U)$, $C_u = U_t C_{u_t} S(U)$, получаем подстановку

$$\mathcal{Z} = \Lambda [U_x \Omega^{-1}] + k \int \Omega \, dU . \qquad (I.3.8)$$

Здесь функция $\Omega(U)$ связана с $r(U)$ и $S(U)$ условиями

$$S(U) = \Omega' \Omega^{-1}, \quad r(U) = k \Omega .$$

Λ, Ω – произвольные дифференцируемые функции. Уравнение (I.3.I) имеет вид

$$U_{xt} + \Omega' \cdot \Omega^{-1} \cdot U_x U_t = 0 \qquad (I.3.9)$$

и эквивалентно линейному волновому уравнению $V_{xt} = 0$.

Т Е О Р Е М А 3.I.3. Уравнения классов (I.3.7) и (I.3.9) приводятся к линейному волновому уравнению с помощью соответствующих подстановок (I.3.6) и (I.3.8).

4. Рассмотрим подстановки вида $U' = \mathcal{Z}(U,U_x)$. Определим условия для коэффициентов уравнения

$$u'_{xt} + F(u')u'_x + P(u')u'_t + N(u')u'_x u'_t + H(u')R(x,t) = 0, \quad (I.4.0)$$

при которых оно допускает линеаризацию

$$\tau(1.4.0)\Big|_{u_{xt}=0} \equiv 0 \ . \quad (I.4.I)$$

Получаем систему уравнений

$$\mathcal{Z}_{uu_x} + N(\mathcal{Z})\mathcal{Z}_{u_x}\mathcal{Z}_u = 0, \quad (I.4.2)$$

$$F(\mathcal{Z}) = 0, \quad H(\mathcal{Z}) = 0 \ ,$$

$$u_x u_t \mathcal{Z}_{uu} + u_t P(\mathcal{Z})\mathcal{Z}_u + u_x u_t N(\mathcal{Z})\mathcal{Z}_u^2 = 0 . \quad (I.4.3)$$

Решение уравнения (I.4.2) имеет вид

$$\mathcal{Z} = \Omega[\phi(u) + \psi(u_x)] \equiv \Omega[\Lambda] \ .$$

ϕ , ψ – произвольные дифференцируемые функции. Обозначим Φ функцию, обратную к Ω . При этом находим

$$N(\mathcal{Z}) = \Phi''(\mathcal{Z})[\Phi'(\mathcal{Z})]^{-1} \ .$$

Уравнение (I.4.3) принимает вид

$$u_x \Omega' \phi_{uu} + P[\Omega]\cdot\Omega'\cdot\phi_u = 0 \ .$$

С л у ч а й 4.I. Выбирая $\phi_u = 0$, находим подстановку

$$\mathcal{Z} = \Omega[\psi(u_x)], \quad \psi(u_x) = \Phi(\mathcal{Z}) , \quad (I.4.4)$$

и уравнения класса

$$u'_{xt} + P(u')u'_t + \Phi''(u')[\Phi'(u')]^{-1}\cdot u'_x u'_t = 0 \ . \quad (I.4.5)$$

Здесь Ω – произвольная дифференцируемая функция.

Заметим, что в данном случае справедливо соотношение

$$\tau(u'_t)\Big|_{u_{xt}=0} \equiv 0 \ .$$

Выполняя точечную подстановку $V = \Phi(u')$, убеждаемся в том, что (I.4.5) эквивалентно уравнению

$$V_{xt} + B(V)V_t = 0 \ . \quad (I.4.6)$$

$B(V)$ – произвольная дифференцируемая функция.

С л у ч а й 4.2. Полагая $P[\Omega] = -u_x \phi_{uu}\phi_u^{-1}$, находим

следующее нелокальное преобразование зависимой переменной:

$$u' = \mathcal{Z} = \Omega\left[\ln \frac{\ell u_x}{\ell \cdot \delta \exp(\ell u) + 1}\right] . \qquad (I.4.7)$$

ℓ , δ – постоянные интегрирования. Если Φ – произвольная дифференцируемая функция, обратная по отношению к Ω , то уравнение (I.4.0) принимает вид

$$u'_{xt} + \Phi''(u')[\Phi'(u')]^{-1} u'_x u'_t = u'_t \exp \Phi(u') \qquad (I.4.8)$$

и эквивалентно уравнению

$$V_{xt} = V_t \exp V \qquad (I.4.9)$$

здесь $V = \Phi(u')$.

Т Е О Р Е М А 3.I.4. Уравнения классов (I.4.5), (I.4.8) линеаризуются при помощи нелокальных подстановок (I.4.4) и (I.4.7) и эквивалентны соответственно уравнениям (I.4.6) и (I.4.9).

5. Рассмотрим задачу приведения уравнений

$$u_{xt} = W(u, u_1) \qquad (I.5.0)$$

к уравнению

$$u'_{xt} + u'_x u' = 0 \qquad (I.5.I)$$

подстановками $u' = \mathcal{Z}(u, u_x)$. Определяющее соотношение имеет вид

$$\tau(1.5.1)\Big|_{(1.5.0)} \equiv 0 .$$

Уравнения класса

$$u_{xt} = \mathcal{Z} u_x^{-1} [c(u, u_t) - \tfrac{1}{2}\mathcal{Z}^2 - u_t \mathcal{Z}_u] \qquad (I.5.2)$$

допускают приведение к уравнению (I.5.I) при условии

$$c_{u_t}[c - \tfrac{1}{2}\mathcal{Z}^2 - u_t \mathcal{Z}_u] + u_x c_u \mathcal{Z}_{u_x} = 0 . \qquad (I.5.3)$$

Полагая $c = \text{const}$, из уравнения (I.5.2) получаем

$$u_{xt} = \mathcal{Z} u_x^{-1} [c - \tfrac{1}{2}\mathcal{Z}^2 - u_t \mathcal{Z}_u] . \qquad (I.5.4)$$

При этом подстановка имеет вид

$$U' = \mathcal{Z}(U, U_x) , \qquad (I.5.5)$$

$\mathcal{Z}$ - произвольная дифференцируемая функция.

6. Исходное уравнение выберем в виде

$$U'_{xt} + F(U')U'_x + P(U')U'_t + N(U')U'_xU'_t + H(U')R = 0 . \qquad (I.6.0)$$

Задавая многообразие уравнением

$$U_{xt} - U U_x = 0 , \qquad (I.6.1)$$

найдём решение задачи приведения

$$\tau\,(1.6.0)\,\Big|_{(1.6.1)} \equiv 0 , \quad U' = \mathcal{Z}(U, U_x) . \qquad (I.6.2)$$

Полагая $\mathcal{Z}_U = 0$, приходим к решению

$$F = 0 , \quad P = 0 , \quad R = \text{const} ,$$

$$U' = \mathcal{Z} = \mathcal{F}[R\,U_x^{-1} + k] . \qquad (I.6.3)$$

Если $\Omega(U')$ - функция, обратная к $\mathcal{F}$, то уравнение (I.6.0) может быть записано следующим образом:

$$U'_{xt} + U'_xU'_t\left[\frac{\Omega''}{\Omega'} - \frac{\Omega'}{\Omega - k}\right] + \frac{R}{\Omega'} = 0 . \qquad (I.6.4)$$

k - произвольная постоянная.

Посредством точечной замены $V = \Omega(U)$ устанавливаем эквивалентность (I.6.4) уравнению

$$V_{xt} - V_xV_t\,[V - k]^{-1} + R = 0 , \qquad (I.6.5)$$

которое подстановкой $W = \ln(V - k)$ приводится к виду

$$W_{xt} + R \cdot \exp(-W) = 0 . \qquad (I.6.6)$$

Т Е О Р Е М А 3.I.5. Пусть уравнения (I.6.0) приводятся к (I.6.I) с помощью нелокальных преобразований $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$ по формуле (I.6.2) и пусть $\mathcal{Z}_U = 0$. Тогда уравнения класса (I.6.4) приводятся к (I.6.I) подстановками вида (I.6.3) и эквивалентны уравнению (I.6.6).

7. Зададим многообразие уравнением

$$U_{xt} = M(x,t) \cdot U . \qquad (I.7.0)$$

Исходное уравнение оставим прежним (I.6.0). Расщеплением определяющего соотношения

$$\tau\,(1.6.0)\,\Big|_{\,(1.7.0)} \equiv 0,\ u' = \mathcal{Z}(u, u_x) \qquad (I.7.1)$$

получаем систему уравнений

$$\mathcal{Z}_{uu_x} + N(\mathcal{Z})\,\mathcal{Z}_u\,\mathcal{Z}_{u_x} = 0\,, \qquad (I.7.2)$$

$$u_x \mathcal{Z}_{uu} + P(\mathcal{Z})\cdot\mathcal{Z}_u + u_x N(\mathcal{Z})\,\mathcal{Z}_u^2 = 0\,, \qquad (I.7.3)$$

$$uM\,\mathcal{Z}_{u_x u_x} + F(\mathcal{Z})\,\mathcal{Z}_{u_x} + uMN(\mathcal{Z})\,\mathcal{Z}_{u_x}^2 = 0\,, \qquad (I.7.4)$$

$$\begin{aligned} &uu_x M\,\mathcal{Z}_{uu_x} + uM\,\mathcal{Z}_u + u_x M\,\mathcal{Z}_{u_x} + uM_x\mathcal{Z}_{u_x} + \\ &\quad + u_x F(\mathcal{Z})\,\mathcal{Z}_u \;+\; uMP(\mathcal{Z})\,\mathcal{Z}_{u_x} \;+ \\ &uu_x N(\mathcal{Z})M\,\mathcal{Z}_u\,\mathcal{Z}_{u_x} \;+\; H(\mathcal{Z})\,R(x,t) = 0\,. \end{aligned} \qquad (I.7.5)$$

Из (I.7.2) находим

$$\mathcal{Z} = \Omega\,[\phi(u) + \psi(u_x)] \equiv \Omega[\Lambda]\,,$$

$$N(\mathcal{Z}) = \Phi''[\Phi']^{-1}.$$

Здесь Φ - функция, обратная к Ω. При этом из (I.7.3) и (I.7.4) следуют равенства

$$P(\mathcal{Z}) = -u_x\,\phi_{uu}[\phi_u]^{-1},$$

$$F(\mathcal{Z}) = -uM\,\psi_{u_x u_x}[\psi_{u_x}]^{-1},\ M = \mathrm{const}\,.$$

Пусть для $P(\mathcal{Z})$ имеет место представление

$$P(\mathcal{Z}) = -u_x\cdot\phi_{uu}\cdot\phi_u^{-1} = \alpha\cdot\exp[k(\phi+\psi)]\,.$$

α, k - произвольные постоянные. Тогда

$$\psi = k^{-1}\ln(-\alpha^{-1}\cdot u_x),$$

а для ϕ должно быть выполнено условие

$$\frac{d\phi}{\alpha k^{-1}\cdot\exp(k\phi) + \mu} = du$$

Положим $\mu = 0$. Находим

$$\phi = -k^{-1}\cdot\ln[-\alpha(u+A)]\,,$$

A - произвольная постоянная. Получаем следующие результаты:

$$\mathcal{Z} = \Omega\left[k^{-1}\ln\frac{U_x}{\alpha^2(U+A)}\right], \qquad (I.7.6)$$

$$N = \Phi''[\Phi']^{-1},\ H = 0,\ M = \text{const},$$

$$P = \alpha^2\cdot\exp(k\Phi),\ F = \alpha^{-2}M\cdot\exp(-k\Phi).$$

Уравнение (I.6.0) принимает вид

$$U'_{xt} + \alpha^2\exp(kU')\cdot U'_t + \\ + \alpha^{-2}M\exp(-kU')\cdot U'_x + \Phi''(\Phi')^{-1}\cdot U'_x U'_t = 0. \qquad (I.7.7)$$

Т Е О Р Е М А 3.I.6. Уравнения класса (I.7.7) приводятся к линейному (I.7.0) при $M = \text{const}$ нелокальными подстановками (I.7.6) и эквивалентны уравнению

$$-V_{xt} = \alpha^2 V_t\exp k\Omega(V) + \alpha^{-2}MV_x\exp(-k\Omega(V)) \qquad (I.7.8)$$

8. Пусть исходное уравнение имеет вид

$$U'_{xt} - (U')^{-1}\cdot U'_x U'_t + U'U'_x = 0. \qquad (I.8.0)$$

Многообразие зададим уравнением

$$U_{xt} = W(U, U_1). \qquad (I.8.1)$$

Предположим, что подстановки $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$ осуществляют приведение уравнений (I.8.0) и (I.8.I) по формуле

$$\tau(1.8.0)\Big|_{(1.8.1)} \equiv 0. \qquad (I.8.2)$$

Из (I.8.2) следует

$$W = \mathcal{Z}\cdot\mathcal{Z}_{U_x}^{-1}[C(U,U_t) - U_t\mathcal{Z}_U\mathcal{Z}^{-1} - \mathcal{Z}],$$

$$C_{U_t}[C - U_t\mathcal{Z}_U\mathcal{Z}^{-1} - \mathcal{Z}] + U_x\mathcal{Z}_{U_x}\mathcal{Z}^{-1}\cdot C_U = 0.$$

С л у ч а й 8.I. При условии $C = \text{const}$ находим, что $\mathcal{Z}$ - произвольная функция, а уравнение (I.8.I) приобретает вид

$$U_{xt} = [C\mathcal{Z} - U_t\mathcal{Z}_U - \mathcal{Z}^2]\cdot\mathcal{Z}_{U_x}^{-1}. \qquad (I.8.3)$$

С л у ч а й 8.2. Подчиняя C и $\mathcal{Z}$ условиям

$$C_u = \phi(U)\cdot C_{ut}\,, \quad \mathcal{Z}_u = \omega(U)\cdot\mathcal{Z}\,,$$

находим

$$\mathcal{Z} = [1+\gamma U]^{-1}\cdot \exp \omega U\,, \qquad (I.8.4)$$

где ω, γ – произвольные постоянные, а уравнение таково:

$$U_{xt} + U_x \exp \omega U = 0\,. \qquad (I.8.5)$$

Следовательно, уравнения (I.8.3) приводятся к (I.8.0) подстановками $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$, где $\mathcal{Z}$ – произвольная дифференцируемая функция, а уравнение (I.8.5) – нелокальной заменой (I.8.4).

9. Рассмотрим приведение уравнений

$$U_{xt} = W(U, U_1) \qquad (I.9.0)$$

к уравнению

$$U'U'_{xt} - U'_x U'_t + (U')^3 = 0 \qquad (I.9.1)$$

подстановками $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$. Определяющее соотношение в этом случае имеет вид

$$\tau(1.9.1)\,\Big|_{(1.9.0)} \equiv 0\,. \qquad (I.9.2)$$

Из (I.9.2) получаем систему уравнений

$$W = \mathcal{Z}\,\mathcal{Z}_{U_x}^{-1}[C(U, U_t) - U_t \mathcal{Z}_u \mathcal{Z}^{-1}]\,, \qquad (I.9.3)$$

$$U_x C\,\mathcal{Z}_u + U_x C_u \mathcal{Z} + C\,C_{ut}\mathcal{Z}^2\mathcal{Z}_{U_x}^{-1} - U_t C_{ut}\mathcal{Z}\,\mathcal{Z}_u\mathcal{Z}_{U_x}^{-1} -$$
$$- U_x U_t \mathcal{Z}_u^2\mathcal{Z}^{-1} - U_x \mathcal{Z}_u \mathcal{Z}_{U_x}\mathcal{Z}^{-1} + \mathcal{Z}^2 = 0\,. \qquad (I.9.4)$$

Случай 9.I. Пусть $C_{U_t} = 0$. Находим

$$\mathcal{Z} = -U_x C_u\,, \qquad (I.9.5)$$

$$U_{xt} = C\,U_x - U_x U_t\, C_{uu}\, C_u^{-1}\,. \qquad (I.9.6)$$

Полученное уравнение эквивалентно следующему:

$$V_{xt} = V V_x\,. \qquad (I.9.7)$$

Уравнения (I.9.6) и (I.9.7) связаны точечной подстановкой

$$V = C(U)$$

Случай 9.2. При $\mathcal{Z}_u = 0$ уравнение (I.9.4) становится следующим:

$$\mathcal{Z}^2 \mathcal{Z}_{u_x}^{-1} \cdot C \cdot C_{u_t} + u_x \mathcal{Z} \cdot C_u + \mathcal{Z}^2 = 0 .$$

Отсюда следует

$$C_u = 0 , \quad C_{u_t} C = \gamma ,$$
$$\mathcal{Z} = -\gamma u_x + \delta , \qquad (I.9.8)$$

γ , δ - произвольные постоянные. Уравнение (I.9.0) принимает вид

$$u_{xt} = \left(u_x - \frac{\delta}{\gamma}\right)\sqrt{2\gamma u_t} . \qquad (I.9.9)$$

Таким образом, уравнения классов (I.9.6) и (I.9.9) приводятся к (I.9.I) подстановками (I.9.5) и (I.9.8) соответственно.

I0. Уравнение

$$u_\xi \cdot f(u) \cdot \phi(\xi) + u_\eta = 0 \qquad (I.I0.0)$$

нелокальной заменой переменных

$$u = x , \ \xi = z_x , \ \eta = t \qquad (I.I0.I)$$

приводится к уравнению

$$z_{xt} = f(x) \cdot \phi(z_x) . \qquad (I.I0.2)$$

Если

$$u = \Phi(\xi, \eta) \qquad (I.I0.3)$$

- какое-либо решение уравнения (I.I0.0), полученное из общего решения

$$\Lambda[u ; \int \phi^{-1}(\xi) d\xi - f(u) \cdot \eta] = 0$$

а функция ψ определена равенством

$$\xi = \psi(u, \eta) ,$$

полученным из (I.I0.3), то решение уравнения (I.I0.2) имеет вид

$$z = \int \psi(x, t) dx . \qquad (I.I0.4)$$

§ 2. Классы параболических уравнений, допускающих линеаризацию

Построим классы уравнений, которые при помощи нелокальных подстановок приводятся к исследованным ранее.

I. Выберем в качестве исходного уравнение теплопроводности

$$U'_{xx} - U'_t = 0 . \qquad (2.I.0)$$

Построим уравнения вида

$$U_{xx} = U_t + F(U)\phi(U_x) + H(U)R(x,t), \qquad (2.I.I)$$

приводимые к (2.I.0) подстановками $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$.

Определяющее соотношение таково:

$$\tau(2.1.0)\Big|_{(2.1.1)} \equiv 0 . \qquad (2.I.2)$$

Решение первого из уравнений, полученных расщеплением (2.I.2)

$$\mathcal{Z}_{U_x U_x} = 0 ,$$

имеет вид

$$\mathcal{Z} = A_1(U)\cdot U_x + A_2(U) .$$

Остальные уравнения, полученные из (2.I.2) будут следующими:

$$A_1 F \phi' + 2A'_1 \cdot U_x = 0 , \qquad (2.I.3)$$

$$(A'_1 \cdot U_x + A_2 U)(F\phi + HR) + U_x A_1 (F'\phi + H'R) - A_1 H R_x - U_x^3 A''_1 - U_x^2 A''_2 = 0 . \qquad (2.I.4)$$

Из (2.I.3) находим

$$\phi = \tfrac{1}{2} k_1 U_x^2 + k_2 ,$$

$$A_1 = \lambda_1 \exp\left[-\tfrac{1}{2} k_1 \int F\, dU\right] .$$

k_1, k_2, λ_1 – произвольные постоянные. Подстановка этих результатов в (2.I.4) после расщепления и интегрирования полученных уравнений позволяет найти значения A_2 и H:

$$A_2 = \ell_1 \int \exp\left(\tfrac{1}{2} k_1 \int F\, dU\right) dU + \ell_2 ,$$

$$H = m \exp\left(\tfrac{1}{2} k_1 \int F\, dU\right) .$$

Оставшееся от расщепления (2.I.4) уравнение имеет вид

$$\ell_1 F k_2 H^{-1} + \ell_1 R + \lambda_1 R_x = 0 .$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

С л у ч а й I.I. Пусть выполнено условие

$$R_x + \ell_1 \lambda_1^{-1} R + \ell_1 \lambda_1^{-1} B_1 = 0 , (B_1 = \text{const}).$$

Тогда

$$F = k_2^{-1} B_1 H = 2[2k_3 - k_1 u]^{-1}, (k_3 = \text{const}),$$

$$R = D(t) \exp(-\ell_1 \lambda_1^{-1} \cdot x) - B_1$$

Осуществляющая линеаризацию подстановка оказывается такой:

$$u' = \lambda_1 \exp(-\tfrac{1}{2} k_1 \int F du) \cdot u_x + \ell_1 \int \exp(\tfrac{1}{2} k_1 \int F du) du . \quad (2.I.5)$$

Уравнение, допускающее линеаризацию, записывается следующим образом:

$$u_{xx} = u_t + \frac{k_1 u_x^2}{2k_3 - k_1 u} + 2m \frac{D(t)}{2k_3 - k_1 u} e^{-\ell_1 \lambda_1^{-1} x} . \quad (2.I.6)$$

Выполнив в нём точечную подстановку $V = S(u)$, где

$$S''(S')^{-1} = -k_1 [2k_3 - k_1 u]^{-1},$$

находим уравнение

$$V_{xx} = V_t + 2c_1 m D(t) \cdot \exp(-\ell_1 \lambda_1^{-1} x), \quad (2.I.7)$$

эквивалентное (2.I.6).

С л у ч а й I.2. Выбирая $k_2 = 0$, $B_1 = 0$, $m \neq 0$, приходим к уравнению

$$u_{xx} = u_t + \tfrac{1}{2} k_1 F(u) u_x^2 + mh(t) \cdot e^{\frac{1}{2} k_1 \int F du - \ell_1 \lambda_1^{-1} x} . \quad (2.I.8)$$

линеаризация которого осуществляется подстановками (2.I.5). Уравнение (2.I.8) эквивалентно (2.I.7).

С л у ч а й I.3. Для значений $k_2 = 0$, $m = 0$ получаем:

$$u_{xx} = u_t + \tfrac{1}{2} k_1 F(u) \cdot u_x^2 , (H = 0) . \quad (2.I.9)$$

Это уравнение эквивалентно линейному

$$V_{xx} = V_t .$$

Таким образом, нами установлено, что нелокальная линеаризация уравнений (2.I.6), (2.I.8), (2.I.9) осуществляется подстановками вида (2.I.5). В первых двух случаях задача эквивалентна задаче приведения уравнений (2.I.7) и (2.I.0); в третьем - нелокальная подстановка может быть заменена точечной.

2. Заменим подстановку, осуществляющую линеаризацию уравнений (2.I.I) в предыдущей задаче, преобразованием $U'=\mathcal{Z}(U,U_t)$. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Т Е О Р Е М А 3.2.I. Пусть уравнения (2.I.I) допускают линеаризацию по формуле (2.I.2) с помощью нелокального преобразования $U'=\mathcal{Z}(U,U_t)$ и пусть $R=\text{const}$, $(R\neq 0)$. Тогда уравнения класса

$$U_{xx}=U_t+F(U)\left[\tfrac{1}{2}k_1U_x^2+k_2\right]+R\cdot e^{-\frac{1}{2}k_1\int F\,du}\cdot\Big\{E-$$

$$-k_2R^{-1}\int\exp\left(-\tfrac{1}{2}k_1\int F\,du\right)F'\,du\Big\}. \qquad (2.2.0)$$

где E - произвольная постоянная, а F - произвольная дифференцируемая функция, линеаризуются подстановками

$$U'=U_t\lambda_1\exp\left(-\tfrac{1}{2}k_1\int F\,du\right)+\ell_2. \qquad (2.2.I)$$

Доказывается прямым вычислением.

Уравнение (2.2.0) эквивалентно следующему:

$$V_{xx}=V_t+2\,\frac{k_2}{k_1}\cdot\frac{\delta''}{(\delta')^3}+$$

$$+R\left\{E-2\,\frac{k_2}{k_1}R^{-1}\int[\delta'''\cdot\delta'-2(\delta'')^2]\frac{dV}{(\delta')^4}\right\}.$$

где

$$V=S(U),\quad U=\delta(V),$$

$$\frac{S''}{S'}=-\tfrac{1}{2}k_1F(U).$$

3. Рассмотрим задачу приведения уравнений

$$U_{xx} = W(U, U_1) \tag{2.3.0}$$

подстановками $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$ к уравнению

$$U'_{xx} + k\cdot(U'_x)^2(U')^{-1} + R(k-1)^{-1}\cdot U' - U'_t = 0. \tag{2.3.I}$$

Из определяющего соотношения

$$\tau(2.3.1)\,\Big|_{(2.3.0)} \equiv 0 \tag{2.3.2}$$

находим следующую систему уравнений:

$$\mathcal{Z}_{U_x U_x} + k\cdot\mathcal{Z}^{-1}\cdot\mathcal{Z}_{U_x} = 0, \tag{2.3.3}$$

$$2U_x\mathcal{Z}_{UU_x} + 2F\mathcal{Z}_{U_x U_x} + F_{U_x}\cdot\mathcal{Z}_{U_x} + $$
$$+2kU_x\mathcal{Z}^{-1}\cdot\mathcal{Z}_U\cdot\mathcal{Z}_{U_x} + 2kF\mathcal{Z}^{-1}\mathcal{Z}_{U_x}^2 = 0, \tag{2.3.4}$$

$$U_x^2\mathcal{Z}_{UU} + 2U_xF\mathcal{Z}_{UU_x} + F^2\mathcal{Z}_{U_xU_x} + F\mathcal{Z}_U +$$
$$U_xF_U\mathcal{Z}_{U_x} + FF_{U_x}\mathcal{Z}_{U_x} + kU_x^2\mathcal{Z}^{-1}\mathcal{Z}_U^2 +$$
$$2kU_xF\mathcal{Z}^{-1}\mathcal{Z}_U\mathcal{Z}_{U_x} + kF^2\mathcal{Z}^{-1}\mathcal{Z}_{U_x}^2 + \frac{R\cdot\mathcal{Z}}{k-1} = 0. \tag{2.3.5}$$

Остановимся на некоторых возможных решениях этой задачи.

С л у ч а й 3.I. Пусть $k \neq -1$, $\psi' \neq 0$. При этом получаем следующий класс уравнений:

$$U_{xx} = U_t - \frac{\psi''}{\psi'}U_x^2 - R\frac{k+1}{k-1}\cdot\frac{\psi}{\psi'}. \tag{2.3.6}$$

Подстановка, приводящая эти уравнения к (2.3.I), имеет вид

$$U' = (k+1)^{\frac{1}{k+1}}[\mu\psi' U_x + \psi]^{\frac{1}{k+1}}. \tag{2.3.7}$$

С л у ч а й 3.2. Полагая $k \neq -1$, $\psi = \mathrm{const}$, находим, что $R = 0$, а уравнение (2.3.0) и подстановка, линеаризующая его, оказываются следующими:

$$U_{xx} = U_t - \phi'\phi^{-1}U_x^2 + h\phi^{-1}, \tag{2.3.8}$$

$$U' = (k+1)^{\frac{1}{k+1}}[\phi(U)U_x + \psi]^{\frac{1}{k+1}}, (h = \mathrm{const}). \tag{2.3.9}$$

Заметим, что уравнения (2.3.6) и (2.3.8) эквивалентны соответ-

ственно уравнениям

$$V_{xx} = V_t - R\frac{k+1}{k-1}V = 0\,, \qquad (2.3.10)$$

$$V_{xx} = V_t + h\,. \qquad (2.3.11)$$

Из полученных результатов следует, что уравнения (2.3.6),(2.3.8) приводятся к (2.3.I) соответствующими подстановками (2.3.7) и (2.3.9). Задачи приведения этих уравнений эквивалентны задачам приведения для уравнений (2.3.I0) и (2.3.II).

С л у ч а й 3.3. Рассматривая задачу при значениях $k=-1$ и $\psi'\neq 0$, находим нелокальную подстановку

$$u' = \mathcal{Z} = \psi\cdot\exp[2hR^{-1}\psi'\psi^{-1}\cdot u_x]\,, \qquad (2.3.12)$$

Последняя осуществляет приведение уравнений класса

$$u_{xx} = u_t - \left(\frac{\psi'}{\psi}\right)'_u\frac{\psi}{\psi'}u_x^2 + \frac{1}{2}R\frac{\psi}{\psi'}\,\cdot \qquad (2.3.13)$$

к виду (2.3.I). Уравнения (2.3.I3) эквивалентны такому:

$$V_{xx} = V_t + \tfrac{1}{2}R\,. \qquad (2.3.14)$$

С л у ч а й 3.4. При $k=-1$ и $\psi=\mathrm{const}$ находим следующую подстановку

$$u' = \psi\exp(h\omega^{-1}u_x),\ (\phi = h\omega^{-1})\,. \qquad (2.3.15)$$

где h - произвольная постоянная. Уравнение (2.3.0) приобретает вид

$$u_{xx} = u_t + \omega'\omega^{-1}u_x^2 + \omega\,. \qquad (2.3.16)$$

Точечная замена устанавливает его эквивалентность уравнению

$$V_{xx} = V_t + 1\,. \qquad (2.3.17)$$

Т Е О Р Е М А 3.2.2. Уравнения (2.3.I3) и (2.3.I6) приводятся к (2.3.I) с помощью соответствующих нелокальных подстановок (2.3.I2) и (2.3.I5) и эквивалентны уравнениям (2.3.I4) и (2.3.I7).

З а м е ч а н и е 3.2.I. Подстановки вида $U'=\mathcal{Z}(U,U_t)$ в рассмотренной задаче (2.3.2) дают аналогичные результаты.

4. Исходные уравнения выберем в виде

$$U'_t+F(U')U'_x=G(U')(U'_x)^2+U'_{xx}+H(U')R(x,t)\,. \quad (2.4.0)$$

Многообразие зададим линейным уравнением

$$U_{xx}+N(x,t)U-U_t=0\,. \quad (2.4.1)$$

Определяющее соотношение задачи нелокальной линеаризации в данном случае имеет вид

$$\tau(2.4.0)\Big|_{(2.4.1)}\equiv 0\,. \quad (2.4.2)$$

Линеаризующие подстановки разыскиваем в классе нелокальных преобразований $U'=\mathcal{Z}(U,U_t)$. Система уравнений, полученных из (2.4.2), такова:

$$\mathcal{Z}_{U_tU_t}+G(\mathcal{Z})\mathcal{Z}_{U_t}^2=0\,, \quad (2.4.3)$$

$$\mathcal{Z}_{UU_t}+G(\mathcal{Z})\mathcal{Z}_U\mathcal{Z}_{U_t}=0\,, \quad (2.4.4)$$

$$F(\mathcal{Z})=0\,,\quad \mathcal{Z}_{UU}+G(\mathcal{Z})\mathcal{Z}_U^2=0\,, \quad (2.4.5)$$

$$RH+UN\mathcal{Z}_U+\mathcal{Z}_{U_t}(UN_t+U_tN)=0\,. \quad (2.4.6)$$

Из (2.4.3) находим

$$\Omega(\mathcal{Z})=\int\exp\Big(\int G\,d\mathcal{Z}\Big)d\mathcal{Z}=C_1U_t+aU+b\equiv\alpha\,. \quad (2.4.7)$$

C_1 - произвольная постоянная. Обозначим $\mathcal{F}$ - функцию, обратную к Ω, после чего замену переменной запишем следующим образом:

$$U'=\mathcal{Z}=\mathcal{F}(\alpha)\,. \quad (2.4.8)$$

При этом должны быть выполнены условия

$$R=N\,,\quad N_t=0\,,\quad G=\Omega''[\Omega']^{-1}\,,\quad H=-\Omega[\Omega']^{-1}\,.$$

Уравнение (2.4.0) приобретает вид

$$U'_t - \Omega''(\Omega')^{-1}(U'_x)^2 - U'_{xx} + R(X)\Omega(\Omega')^{-1} = 0 \ . \qquad (2.4.9)$$

Точечной заменой переменных $V = \Omega(U')$ (2.4.9) приводится к уравнению

$$V_t - V_{xx} + R(X)\cdot V = 0 \ . \qquad (2.4.10)$$

Т Е О Р Е М А 3.2.3. Если уравнение (2.4.0) допускает линеаризацию с помощью нелокальных преобразований зависимой переменной $U' = \mathcal{Z}(U, U_t)$ (2.4.2), то уравнения класса (2.4.9) приводятся к линейному (2.4.I) с помощью подстановок (2.4.8) и эквивалентны (2.4.I0).

5. Решая задачу линеаризации

$$\tau(2.4.0)\Big|_{(2.4.1)} \equiv 0 \qquad (2.5.0)$$

с помощью нелокальных преобразований $U' = \mathcal{Z}(U, U_x)$ приходим к следующей системе уравнений:

$$\mathcal{Z}_{U_x U_x} + G(\mathcal{Z})\,\mathcal{Z}^2_{U_x} = 0 \ , \qquad (2.5.I)$$

$$F(\mathcal{Z})\mathcal{Z}_{U_x} - 2U_x\mathcal{Z}_{UU_x} + 2U_x G(\mathcal{Z})\mathcal{Z}_U\mathcal{Z}_{U_x} = 0 \ , \qquad (2.5.2)$$

$$UN\mathcal{Z}_U + U_x N\mathcal{Z}_{UU_x} + UN_x\mathcal{Z}_{U_x} - U_x^2\mathcal{Z}_{UU} + U_x F\mathcal{Z}_U - HR - U_x^2 G\mathcal{Z}_U = 0 \ . \qquad (2.5.3)$$

Решение уравнения (2.5.I) получаем в виде

$$\Omega(\mathcal{Z}) = \int \exp\Big(\int G(\mathcal{Z})d\mathcal{Z}\Big)d\mathcal{Z} = C_1(U)U_x + C_2(U) \equiv \alpha \ ,$$

$$G = \Omega''(\Omega')^{-1}.$$

Обозначим $\mathcal{F}(\alpha)$ функцию, обратную к Ω , тогда

$$\Omega'_{\mathcal{Z}} = \frac{1}{\mathcal{F}'_\alpha} \ , \quad \Omega''(\mathcal{Z}) = -\frac{\mathcal{F}''_{\alpha\alpha}}{(\mathcal{F}'_\alpha)^3} \ .$$

Полученными результатами воспользуемся для решения уравнения (2.5.2). Находим

$$F(\mathcal{Z}) = 2U_x C'_1 \cdot C_1^{-1} = k\Omega \ .$$

Из уравнения (2.5.3) следует, что $k=1$, а коэффициенты уравнений (2.4.0) и (2.4.I) связаны соотношением

$$u_x \ell N + u \ell N_x - \tfrac{1}{2} u^2 N_x = H R \Omega'(\ell - \tfrac{1}{2} u)^2 .$$

С л у ч а й 5.I. Полагая $\ell = 0$, приходим к следующим результатам:

$$H \Omega'(\mathcal{Z}) = 1 , \quad R(x,t) = -2 N_x(x,t) .$$

Нелокальное преобразование зависимой переменной

$$u' = \mathcal{Z} = \mathcal{F}[-2 u_x u^{-1}] \qquad (2.5.4)$$

осуществляет линеаризацию уравнений класса

$$u_t + \Omega u_x - \Omega''(\Omega')^{-1} u_x^2 = u_{xx} + R(x,t)(\Omega')^{-1}. \qquad (2.5.5)$$

З а м е ч а н и е 3.2.2. В книге [65] класс уравнений (2.5.5) получен иным методом, в предположении, что подстановки имеют вид $u' = \int(-2 u_x u^{-1})$.

С л у ч а й 5.2. Пусть $\ell \neq 0$, $\ell = \mathrm{const}$. Тогда $R = N = 0$, а подстановка

$$u' = \mathcal{F}\left[\frac{2 u_x}{\ell - u}\right] \qquad (2.5.6)$$

осуществляет линеаризацию уравнений класса

$$u_t + \Omega u_x - \Omega''(\Omega')^{-1} u_x^2 - u_{xx} = 0 . \qquad (2.5.7)$$

Заметим, что уравнения (2.5.5), (2.5.7) эквивалентны неоднородному уравнению Бюргерса

$$V_t + V V_x - V_{xx} - R(x,t) = 0 .$$

Т Е О Р Е М А 3.2.4. Уравнения (2.5.5) и (2.5.7) линеаризуются с помощью нелокальных подстановок (2.5.4) и (2.5.6) и эквивалентны неоднородному уравнению Бюргерса.

6. Рассмотрим уравнения вида

$$u_{xx} = u_t - G(u)u_x^2 - 2F(u)u_x , \qquad (2.6.0)$$

которые допускают приведение к линейному уравнению

$$u'_{xx} - u'_t = 0 . \qquad (2.6.1)$$

Для подстановки вида

$$u' = \Phi[\int \mathcal{Z}(u,u_x)dx] \equiv \Phi(\mathcal{L}) \qquad (2.6.2)$$

получим следующее определяющее соотношение:

$$\tau(2.6.1)\Big|_{(2.6.0)} \equiv 0 .$$

Т Е О Р Е М А 3.2.5. Уравнения класса

$$u_{xx} = u_t - F''(F')^{-1}u_x^2 - 2Fu_x \qquad (2.6.3)$$

линеаризуются с помощью подстановок

$$u' = k_2 k_1^{-1} \exp\int F(u)dx \qquad (2.6.4)$$

и эквивалентны уравнению Бюргерса.

Доказательство осуществляется прямым вычислением.

7. Зададим многообразие уравнением

$$u_{xx} = W(u, u_1) . \qquad (2.7.0)$$

Потребуем, чтобы оно допускало приведение к уравнению

$$u'_{xx} - (u'_x)^2 u'_t = 0 \qquad (2.7.1)$$

подстановками $u' = \mathcal{Z}(u,u_x)$. Определяющее соотношение записываем следующим образом:

$$\tau(2.7.1)\Big|_{(2.7.0)} \equiv 0 . \qquad (2.7.2)$$

Решая систему уравнений, полученную расщеплением (2.7.2), находим

$$u_{xx} = \mathcal{Z}_{u_x}^{-1}[\mathcal{Z}_{u_x}^{-1}\{B(u) - u_t\}^{-1} - u_x\mathcal{Z}_u] , \qquad (2.7.3)$$

$$\mathcal{Z} = \Lambda[\ln u_x - \int A^{-1}du] \equiv \Lambda(\mathcal{L}) . \qquad (2.7.4)$$

Здесь $A(u)$ - произвольная дифференцируемая функция, Λ подчинено условию

$$\Lambda''(\Lambda')^{-1} - 1 + (\Lambda')^2 \cdot [B_u - B A^{-1}] = 0 . \qquad (2.7.5)$$

В общем случае решить это уравнение не удаётся. Поэтому предположим, что выполнено соотношение

$$B_u - A^{-1}B = k .$$

k - произвольная постоянная, $A(U)$ и $B(U)$ связаны следующим образом:

$$B = [c_1^0 + k \int \exp(-\int A^{-1} du) du] \cdot \exp \int A^{-1} du . \qquad (2.7.6)$$

c_i^0 - постоянная интегрирования. Уравнение (2.7.5) приобретает вид

$$\Lambda'' - \Lambda' + k(\Lambda')^3 = 0 . \qquad (2.7.7)$$

Интегрируя последнее, получаем следующие допустимые значения функции Λ :

$$\Lambda_1 = \mp a_1^{-1} \operatorname{ar} \begin{matrix} ch \\ sh \end{matrix} \{ \exp[\mp(\alpha + c_1)] \} - c_2 , (k = a_1^2 > 0) ,$$

$$\Lambda_2 = \pm a_2^{-1} \operatorname{arc} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \{ \exp(\alpha + c_3) \} - c_4 , (k = -a_2^2 < 0) ,$$

$$\Lambda_3 = c_5 \cdot \exp \alpha - c_6 , (k = 0) . \qquad (2.7.8)$$

$c_i , (i = \overline{1,6})$ - произвольные постоянные.

Уравнение (2.7.0) становится таким:

$$U_{xx} = \frac{U_x^2}{(\Lambda')^2 \cdot [B - U_t]} + \frac{B_u - 1}{B} U_x^2 . \qquad (2.7.9)$$

Здесь B - произвольная дифференцируемая функция, связанная с A соотношением (2.7.6). Выполняя точечную замену $V = S(U)$, $S''(S')^{-1} = -A^{-1}$, убеждаемся в эквивалентности (2.7.9) уравнению

$$V_{xx} = V_x^2 (\Lambda')^{-2} [c_1^0 + k V - V_t]^{-1} , \qquad (2.7.10)$$

где $\Lambda = \Lambda(\ln V_x)$.

Т Е О Р Е М А 3.2.6. Уравнения класса (2.7.9), где Λ имеет вид (2.7.8), приводятся к уравнению (2.7.I) с помощью нелокальных подстановок (2.7.4) и эквивалентны уравнению (2.7.I0).

З а м е ч а н и е 3.2.3. При $k=1$ находим, что

$$\Lambda = \alpha = \ln u_x - \int A^{-1}\,du ,$$

а уравнение (2.7.8) оказывается следующим:

$$u_{xx} = \frac{u_x^2}{B(u)-u_t} + \frac{Bu-1}{B}\,u_x^2 .$$

Т Е О Р Е М А 3.2.7. Пусть уравнения $u_{xx}=W(u,u_1)$ приводятся к уравнению

$$u_{xx} = u_t u^{-2} \qquad (2.7.II)$$

с помощью нелокальных подстановок $u'=\mathcal{Z}(u,u_x)$ и пусть определяющее соотношение имеет вид

$$\tau(2.7.11)\Big|_{(2.7.0)} \equiv 0 .$$

Тогда уравнения класса

$$u_{xx}= u_t\left[B - \frac{B'}{kB}u_x\right]^2 - \frac{B''}{B'}\,u_x^2 . \qquad (2.7.I2)$$

приводятся к (2.7.II) преобразованием зависимой переменной

$$u'=\left[B - k^{-1}u_x B' B^{-1}\right]^{-1},\quad B=B(u) \qquad (2.7.I3)$$

и эквивалентны уравнению

$$V_{xx} = V_t\left[V - k^{-1}V^{-1}V_x\right]^2 . \qquad (2.7.I4)$$

Утверждение доказывается прямым вычислением.

Таким образом, найденные классы уравнений гиперболического и параболического типов, допускающих линеаризацию с помощью нелокальных преобразований переменных, позволили существенно расширить число интегрируемых нелинейных уравнений, а также получить их точные решения.

Г Л А В А IУ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЭКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ, SIN-ГОРДОНА, КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА

Установим связь между нелокальными преобразованиями τ_{i+1}^{-1} зависимой переменной, осуществляющими приведение уравнений

$$\tau_{i+1}^{-1}: \ f_i \longrightarrow f_{i+1}, \ (i=\overline{0,3})$$

с преобразованиями Бэклунда. Полученные результаты сформулируем в виде теорем. Затем найдём подстановки, осуществляющие линеаризацию уравнения Лиувилля (f_3) и приведение уравнений sin -Гордона и КдФ (f_0) посредством вспомогательных уравнений f_1, f_2 к уравнениям (f_3), совпадающим с исходными. Этими нелокальными подстановками воспользуемся для построения преобразований Бэклунда [52, 53].

§ I. Нелокальные преобразования и преобразования Бэклунда приводимых уравнений

Рассмотрим уравнения $f_i=0, (i=\overline{0,3})$, связанные нелокальными преобразованиями зависимых переменных $\tau_{i+1}(i=\overline{0,3})$:

$$\tau_{i+1}: \ u^{i+1}=\mathcal{Z}_{i+1}(x, u^i, u_1^i, \dots, u_i^i),$$
$$\tau_{i+1}^{-1}: \ u^i=\mathcal{Z}_{i+1}^{-1}(x, u^{i+1}, u_1^{i+1}, \dots, u_s^{i+1}).$$

Подстановки τ_{i+1} и τ_{i+1}^{-1} осуществляют приведение уравнений f_i:

$$\tau_{i+1}^{-1} f_i \Big|_{f_{i+1}} \equiv 0, \quad \tau_{i+1} f_{i+1} \Big|_{f_i} \equiv 0, \ (i=\overline{0,3}).$$

Связь между уравнениями $f_i, (i=1,2)$ может быть выражена с помощью операторов $\hat{P}_j$

$$\tau_j f_j = \hat{P}_j f_i, \ (i,j=1,2; \ i\neq j). \qquad (I.0.0)$$

При этом возникает следующая последовательность уравнений, допускающих приведение:

$$\tau_{i+1}^{-1}: \ f_i \longrightarrow f_{i+1}, \ (i=\overline{0,3}). \qquad (I.I.0)$$

Обратимся непосредственно к анализу связей, существующих между нелокальными преобразованиями, осуществляющими приведение уравнений f_1 и f_2 и преобразованием Бэклунда для них.

Л Е М М А 4.I.I. Пусть преобразование зависимой переменной

$$\tau^{-1}: u^0 = \mathcal{Z}^{-1}(x, u^2, u^2_1, \dots, u^2_s)$$

является произведением нелокальных подстановок τ_1^{-1} и τ_2^{-1} :

$$\tau^{-1} = \tau_2^{-1} \circ \tau_1^{-1}$$

с помощью которых осуществляется приведение уравнений f_i и f_{i+1} $(i = 0,1)$ в (I.I.0). Тогда

$$\tau^{-1} f_0 \Big|_{f_2} \equiv 0 ,$$

т.е. уравнение f_0 приводится к f_2 с помощью τ^{-1}.

Доказательство. Выполним преобразование τ_2^{-1} в подстановке τ_1^{-1} . Получаем

$$u^0 = \mathcal{Z}_1^{-1}[x, \mathcal{Z}_2^{-1}, D_1 \mathcal{Z}_2^{-1}, \dots] = \mathcal{Z}^{-1}(x, u^2, u^2_1, \dots) .$$

Здесь $\mathcal{Z}_2^{-1}, D_1 \mathcal{Z}_2^{-1}, \dots$ обозначен результат подстановки вместо $u^1, u^1_1, \dots$ выражений, вычисленных в соответствии с τ_2^{-1}.

Выполним преобразование τ_2^{-1} в уравнении

$$\tau_1^{-1} f_0 = \hat{P}_1 f_1 .$$

Находим

$$\tau_2^{-1} \circ \tau_1^{-1} f_0 = \tau^{-1} f_0 .$$

С другой стороны,

$$\tau_2^{-1} \hat{P}_1 f_1 = \hat{P}^*[\tau_2^{-1} f_1] = \hat{P}^* \circ \hat{P}_2 f_2 = \hat{P}_3 f_2 .$$

Здесь нами введены обозначения

$$\hat{P}^* = \tau_2^{-1} \hat{P}_1 , \qquad \hat{P}^* \circ \hat{P}_2 = \hat{P}_3 .$$

Отсюда приходим к следующему результату:

$$\tau_2^{-1} \circ \tau_1^{-1} f_0 \Big|_{\tau_2^{-1} f_1 \Big|_{f_2}} = \tau^{-1} f_0 \Big|_{f_2} \equiv 0 .$$

Т Е О Р Е М А 4.I.I. Пусть для уравнений $f_1(u^1)$ и $f_2(u^2)$ известны нелокальные подстановки τ_2 и τ_2^{-1}:

$$\tau_2: \quad u^2 = \mathcal{Z}_2(x, u^1, u^1_1, \dots, u^1_k), \tag{I.I.I}$$

$$\tau_2^{-1}: \quad u^1 = \mathcal{Z}_2^{-1}(x, u^2, u^2_1, \dots, u^2_s), \tag{I.I.2}$$

и пусть преобразование Бэклунда для этих уравнений выражено соотношениями

$$u^1 - \mathcal{Z}_2^{-1}(x, u^2, u^2_1, \dots, u^2_\kappa) = 0, \tag{I.I.3}$$

$$\phi(x, u^1, u^1_1, \dots; u^2, u^2_1, \dots) = 0. \tag{I.I.4}$$

Тогда

$$\phi = \hat{S}[u^2 - \mathcal{Z}_2(x, u^1, u^1_1, \dots, u^1_\kappa)]\Big|_{f_2=0,\, u^1=\mathcal{Z}_2^{-1}}. \tag{I.I.5}$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование τ_2. Так как известно обратное τ_2^{-1}, заменим u^1, $u^1_1, \dots$ соответствующими выражениями для них, полученными при помощи τ_2^{-1}

$$u^1 = \mathcal{Z}_2^{-1}(x, u^2, u^2_1, \dots, u^2_s),$$
$$u^1_i = D_i \mathcal{Z}_2^{-1}(x, u^2, u^2_1, \dots),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Приходим к следующему соотношению:

$$u^2 - \Phi(x, u^2, u^2_1, \dots)\Big|_{u^1=\mathcal{Z}_2^{-1}} = 0. \tag{I.I.6}$$

Подействуем на выражение, стоящее в левой части равенства (I.I.6), дифференциальным оператором $\hat{S}$, таким, чтобы старшая производная в полученном уравнении совпала со старшей производной в уравнении $f_2(u^2)$. В результате устанавливаем тождество

$$\hat{S}[u^2 - \mathcal{Z}_2(x, u^1, u^1_1, \dots)]\Big|_{u^1=\mathcal{Z}_2^{-1}} \equiv f_2(u^2) = 0. \tag{I.I.7}$$

Чтобы отыскать соотношение (I.I.4) в преобразовании Бэклунда, решим задачу

$$\hat{S}[u^2 - \mathcal{Z}_2(x, u^1, u^1_1, \ldots)]\Big|_{u^1 = \mathcal{Z}_2^{-1}, f_2} = \phi = 0 . \quad (I.I.8)$$

Функция $\phi(x, u^1, u^1_1, \ldots; u^2, u^2_1, \ldots)$ является искомой.

Подставим в $\phi = 0$ вместо u^2, u^2_1, ... соответствующие им выражения, вычисленные с помощью τ_2. Получаем

$$\phi\Big|_{u^2 = \mathcal{Z}_2} = f_1(u^1) = 0 .$$

С другой стороны, решая уравнение $\phi = 0$ относительно u^1 и полагая u^2, u^2_1, ... заданными функциями независимых переменных, приходим к нелокальной замене переменных

$$u^1 = \mathcal{Z}_2^{-1}(x, u^2, u^2_1, \ldots),$$

(считаем, что такое решение существует). Следовательно,

$$\phi = \hat{H}[u^1 - \mathcal{Z}_2^{-1}(x, u^2, u^2_1, \ldots)].$$

Теорема доказана.

Пример 4.I.I. Уравнения

$$f_2 \equiv u^2_{xt} + \tfrac{1}{2}\beta u^2_t \exp \tfrac{1}{2} u^2 = 0, \quad (I.I.9)$$

$$f_1 \equiv u^1_{xt} + \beta^{-1} u^1_x \exp - \tfrac{1}{2} u^1 = 0 \quad (I.I.10)$$

приводятся одно к другому подстановками

$$\tau_2: \quad u^2 = 2 \ln(\beta^{-\frac{1}{2}} u^1_x), \quad (I.I.11)$$

$$\tau_2^{-1}: \quad u^1 = -2 \ln(-2^{-\frac{1}{2}} \beta \cdot u^2_t). \quad (I.I.12)$$

Преобразование Бэклунда для уравнений (I.I.9), (I.I.10) в соответствии с теоремой 4.I.I имеет вид

$$u^2_t = -2\beta^{-1} \exp(-\tfrac{1}{2} u^1),$$

$$u^1_x = \beta \exp(\tfrac{1}{2} u^2) .$$

Часто бывает известно одно из преобразований, например τ_2. В этом случае также может быть построено преобразование Бэклунда для уравнений f_1 и f_2.

Преобразование τ_2 рассматриваем как одно из соотношений

в преобразовании Бэклунда

$$u^2 - \mathcal{Z}_2(x, u^1, u^1_1, \dots) = 0 . \qquad \text{(I.I.I3)}$$

$$\psi(x, u^1, u^1_1, \dots; u^2, u^2_1, \dots) = 0 . \qquad \text{(I.I.I4)}$$

Разрешим соотношение (I.I.I3), считая это возможным, относительно u^1, находим

$$u^1 = \mathcal{F}(x, u^2, u^1_1, \dots) . \qquad \text{(I.I.I5)}$$

Заменим в теореме 4.I.I недостающее обратное преобразование соотношением (I.I.I5). Приходим к задаче, соответствующей (I.I.8):

$$\hat{K}[u^1 - \mathcal{F}(x, u^2, u^1_1, \dots)]\Big|_{u^2 = \mathcal{Z}_2,\ f_1 = 0} = \psi = 0 . \qquad \text{(I.I.I6)}$$

Следовательно, система соотношений

$$u^2 - \mathcal{Z}_2(x, u^1, u^1_1, \dots) = 0 ,$$

$$\psi(x, u^1, u^1_1, \dots; u^2, u^2_1, \dots) = 0$$

является преобразованием Бэклунда для уравнений f_1, f_2.

Назовём его обратным по отношению к найденному ранее.

$$u^1 - \mathcal{Z}_2^{-1}(x, u^2, u^2_1, \dots) = 0 ,$$

$$\Phi(x, u^1, u^1_1, \dots; u^2, u^2_1, \dots) = 0 .$$

Т Е О Р Е М А 4.I.2. Пусть для уравнений f_1 и f_2 известно одно нелокальное преобразование (I.I.I), разрешимое относительно u^1

$$u^1 = \mathcal{F}(x, u^2, u^1_1, \dots, u^1_k) \qquad \text{(I.I.I7)}$$

и пусть преобразование Бэклунда для этих уравнений выражено соотношениями

$$u^2 - \mathcal{Z}_2(x, u^1, u^1_1, \dots, u^1_k) = 0 , \qquad \text{(I.I.I8)}$$

$$\psi(x, u^1, u^1_1, \dots; u^2, u^2_1, \dots) = 0 . \qquad \text{(I.I.I9)}$$

Тогда

$$\psi = \hat{K}[u^1 - \mathcal{F}(x, u^2, u^1_1, \dots, u^1_k)]\Big|_{u^2 = \mathcal{Z}_2,\ f_1 = 0} . \qquad \text{(I.I.20)}$$

Пример 4.I.2. Рассмотрим преобразование

$$\tau_2:\quad u^2 = -2\nu u^1_x (u^1)^{-1}, \qquad (I.I.2I)$$

осуществляющее приведение уравнения Бюргерса

$$f_2 \equiv u^2_t + u^2 u^2_x - \nu u^2_{xx} = 0$$

к уравнению теплопроводности

$$f_1 \equiv u^1_t - \nu u^1_{xx} = 0 .$$

Определяющее соотношение при этом будет таким:

$$\tau_2 f_2 \Big|_{f_1} \equiv 0 .$$

В равенстве (I.0.0)

$$\tau_2 f_2 = \hat{P}_2 f_1$$

оператор $\hat{P}_2$ имеет вид

$$\hat{P}_2 = \frac{\partial}{\partial x} + u^1_x (u^1)^{-1} .$$

В качестве первого из соотношений в преобразовании Бэклунда (I.I.I8) выберем (I.I.2I). Так как обратное преобразование заранее не известно, решаем задачу (I.I.I6). Дифференцируя по X выражение

$$u^1 + 2\nu u^1_x (u^2)^{-1} = 0$$

и заменяя u^1_{xx} величиной $\nu^{-1} u^1_t$, осуществим тем самым переход на многообразие f_1, находим

$$\psi \equiv 4\nu u^1_t + u^1 [2\nu u^2_x - (u^2)^2] = 0 . \qquad (I.I.22)$$

Полученное преобразование Бэклунда совпадает с известным [54].

Если считать, что в (I.I.2I) u^2 - заданная функция X и t, а u^1 - не известна, частное решение полученного уравнения (I.I.22) оказывается следующим:

$$u^1 = c(x) \cdot \exp\{(4\nu)^{-1} \int [2\nu u^2_x - (u^2)^2] dt\} . \qquad (I.I.23)$$

Вычислим u^1_t и u^1_{xx}, рассматривая (I.I.23) как нелокальное преобразование τ_2. Подставим найденные выражения в уравнение

$$f_1 \equiv u^1_t - \nu u^1_{xx} = 0$$

и затем осуществим переход на многообразие, заданное уравнением Бюргерса. Убеждаемся в справедливости тождества

$$\tau_2^{-1} f_1 \Big|_{f_2} \equiv 0 . \qquad (I.I.24)$$

Следовательно, второе из соотношений в преобразовании Бэклунда для уравнений Бюргерса f_2 и теплопроводности f_1, заданное равенством (I.I.22), будучи разрешённым относительно функции u^1, позволяет осуществить приведение этих уравнений по формуле (I.I.24).

Обратимся к последовательности приводимых уравнений (I.I.0). В связи с изложенным выше возникает задача: по известному преобразованию Бэклунда для уравнений f_1 и f_2 отыскать преобразование Бэклунда для уравнений f_0 и f_3.

На основании леммы 4.I.I воспользуемся преобразованиями $\tau_1^{-1}, \tau_2^{-1}, \tau_3^{-1}$ для отыскания подстановки $\tau_\Sigma^{-1} = \tau_1^{-1} \circ \tau_2^{-1} \circ \tau_3^{-1}$

$$u^0 = \mathcal{Z}_\Sigma^{-1}(x, u^3, u^3_1, \dots) .$$

Если последняя может быть выбрана в качестве одного из соотношений в преобразовании Бэклунда для f_0, f_3 и может быть разрешена относительно u^3, то на основании теоремы 4.I.2 преобразование Бэклунда для уравнений f_0, f_3 может быть получено решением задачи (I.I.I6).

Т Е О Р Е М А 4.I.3. Пусть для нелокальных подстановок τ_{i+1}, $(i = \overline{0,3})$, осуществляющих приведение уравнений f_i и f_{i+1}, $(i = \overline{0,3})$ в (I.I.0), известны обратные τ_{i+1}^{-1}, $(i = \overline{0,3})$ и пусть преобразование Бэклунда для f_1, f_2 выражено соотношениями

$$u^1 - \mathcal{F}(x, u^2, u^1_1, \dots) = u^2 - \mathcal{Z}_2^{-1}(x, u^1, u^1_1, \dots) = 0 ,$$
$$\psi(x, u^1, u^1_1, \dots; u^2, u^2_1, \dots) = 0 . \qquad (I.I.25)$$

Тогда преобразование Бэклунда для уравнений f_0 и f_3 может быть построено с помощью задачи (I.I.5).

Доказательство. Подставим в формулу замены переменной

$$u^2 - z_2 = 0$$

вместо u^2 выражение z_3^{-1} и заменим u^1, u_1^1,... значениями, вычисленными с помощью τ_1. Полученное соотношение обозначим так:

$$z_3^{-1} - z_2[x, z_1, D_1 z_1, \ldots] \equiv \Lambda(x, u^\circ, u_1^\circ, \ldots; u^3, u_1^3, \ldots) = 0.$$

Аналогичным образом из второго соотношения в (I.I.25) находим

$$\psi(x, u^1, u_1^1, \ldots; u^2, u_1^2, \ldots) = \Omega(x, u^\circ, u_1^\circ, \ldots; u^3, u_1^3, \ldots) = 0.$$

Заметим, что для ψ справедливо соотношение (I.I.I6). Поэтому после перехода к переменным u° и u^3 приходим к уравнению

$$\hat{K}[z_1(x, u^\circ, u_1^\circ, \ldots) - \mathcal{F}(x, z_3^{-1}, D_1 z_1, \ldots)]\Big|_{\Lambda=0, \hat{P} f_0} = \Omega = 0. \quad (I.I.26)$$

Равенство тем более выполняется на многообразии $\mathcal{M} f_0$. В самом деле, поскольку справедливо выражение

$$\psi = \hat{H}[u^1 - z_2^{-1}] = \Omega,$$

получаем

$$\hat{G}[u^1 - z_2^{-1}]\Big|_{u^2 - z_2 = \Lambda,\ \hat{P}^+ f_3 = 0} = \Omega = 0.$$

Таким образом, соотношения $\Lambda = 0$ и $\Omega = 0$ определяют как уравнение f_0, так и f_3 и, следовательно, являются преобразованием Бэклунда для них.

З а м е ч а н и е 4.I.I. Если выражение $\Lambda = 0$ не содержит производных u_k° и может быть разрешено относительно u°, то приходим к преобразованию зависимой переменной вида

$$u^\circ = z(x, u^3, u_1^3, \ldots)$$

и можем воспользоваться результатами, полученными ранее.

Ещё один частный случай решения поставленной задачи представим в виде теоремы.

Т Е О Р Е М А 4.I.4. Если для уравнений f_i, $(i=\overline{0,3})$ известны преобразования τ_{i+1}, $(i=\overline{0,3})$, τ_2^{-1} и соотношения

$$u^1 = \omega^1(x, u^\circ, u^\circ_1, \dots; u^3, u^3_1, \dots), \qquad (I.I.27)$$

$$u^2 = \omega^2(x, u^\circ, u^\circ_1, \dots; u^3, u^3_1, \dots), \qquad (I.I.28)$$

то преобразование Бэклунда для уравнений f_0, f_3 имеет вид

$$\omega^2 - \mathcal{Z}_2^{-1}(x, \omega^1, D_1\omega^1, \dots) = 0, \qquad (I.I.29)$$

$$\psi[x, \omega^1, D_1\omega^1, \dots; \omega^2, D_1\omega^2, \dots] = 0. \qquad (I.I.30)$$

Доказательство. В силу принятых допущений, для уравнений f_1 и f_2 может быть построено преобразование Бэклунда

$$u^2 - \mathcal{Z}_2(x, u^1, u^1_1, \dots) = 0,$$

$$\psi(x, u^1, u^1_1, \dots; u^2, u^2_1, \dots) = 0.$$

Подставляя в эти соотношения вместо $u^1, u^1_1, \dots$ и $u^2, u^2_1, \dots$ соответствующие выражения, полученные при помощи (I.I.27) и (I.I.28), находим

$$\Lambda(x, u^\circ, u^\circ_1, \dots; u^3, u^3_1, \dots) = \omega^2 - \mathcal{Z}_2 = 0,$$

$$\Omega(x, u^\circ, u^\circ_1, \dots; u^3, u^3_1, \dots) = \psi = 0,$$

преобразование Бэклунда для уравнений f_0 и f_3.

§ 2. Построение преобразований Бэклунда для уравнений Лиувилля, sin-Гордона, Кортевега-де Фриза

I°. Уравнение Лиувилля

Приведение уравнения Лиувилля

$$f_3 \equiv u^3_{xt} - \exp u^3 = 0 \qquad (2.I.0)$$

к линейному волновому уравнению

$$f_0 \equiv u^\circ_{xt} = 0 \qquad (2.I.I)$$

осуществляем посредством вспомогательных уравнений (I.I.9) и

(I.I.IO).

$$f_0 \xrightarrow{\tau_1^{-1}} f_1 \xrightarrow{\tau_2^{-1}} f_2 \xrightarrow{\tau_3^{-1}} f_3 \ . \qquad (2.I.2)$$

Допустим, что уравнение f_1 может быть представлено следующим образом:

$$f_1 \equiv \hat{\hat{u}}_{xt} - \omega_1(\hat{\hat{u}})\hat{\hat{u}}_x - \lambda_1(\hat{\hat{u}})\hat{\hat{u}}_t - \sigma_1(\hat{\hat{u}}) \ , \ (u^1 \equiv \hat{\hat{u}}) \ . \qquad (2.I.3)$$

Находим преобразование τ_1 , решая задачу приведения

$$\tau_1^{-1} f_0(u^0)\Big|_{f_1(\hat{\hat{u}})} \equiv 0 \ , \ u^0 = \mathcal{Z}_1^{-1}(\hat{\hat{u}}, \hat{\hat{u}}_1) \ . \qquad (2.I.4)$$

Расщеплением определяющего соотношения по степеням производных $\hat{\hat{u}}_{xx}$ и $\hat{\hat{u}}_{tt}$, получаем систему уравнений

$$\mathcal{Z}_{pq} = 0 \ , (\mathcal{Z}_1^{-1} \equiv \mathcal{Z} \ , \ p = \hat{\hat{u}}_x \ , \ q = \hat{\hat{u}}_t) \ ,$$

$$\hat{\hat{u}}_t \mathcal{Z}_{\hat{u}p} + (\omega_1 \hat{\hat{u}}_x + \lambda_1 \hat{\hat{u}}_t + \sigma_1)\mathcal{Z}_{pp} + \mathcal{Z}_p \omega_1 = 0 \ ,$$

$$\hat{\hat{u}}_x \mathcal{Z}_{\hat{u}q} + (\omega_1 \hat{\hat{u}}_x + \lambda_1 \hat{\hat{u}}_t + \sigma_1)\mathcal{Z}_{qq} + \mathcal{Z}_q \lambda_1 = 0 \ .$$

Не нарушая совместности, выбираем $\mathcal{Z}_q = 0$. Тогда из второго уравнения следует

$$\mathcal{Z}_{\hat{u}p} + \lambda_1 \mathcal{Z}_{pp} = 0 \ .$$

Это уравнение удовлетворяется, в частности, значениями $\lambda_1 = 0$, $\mathcal{Z}_{\hat{u}p} = 0$. Третье уравнение с учётом полученных результатов даёт соотношения

$$\omega_1 \neq 0 \ , \ \sigma_1 = 0 \ , \quad \hat{\hat{u}}_x \mathcal{Z}_{pp} + \mathcal{Z}_p = 0 \ . \qquad (2.I.5)$$

Слагаемые, оставшиеся после расщепления и не содержащие производных второго порядка, представим уравнением

$$\omega_1 \hat{\hat{u}}_x^2 \mathcal{Z}_{\hat{u}p} + \omega_1 \hat{\hat{u}}_x \mathcal{Z}_{\hat{u}} + \omega_1' \hat{\hat{u}}_x^2 \mathcal{Z}_p + \hat{\hat{u}}_x \hat{\hat{u}}_t \mathcal{Z}_{\hat{u}\hat{u}} = 0 \qquad (2.I.6)$$

Исходя из (2.I.5) $\mathcal{Z}_1^{-1}$ можем записать в виде ($C = const$)

$$\mathcal{Z}_1^{-1} = C \ln \beta^{-1} \hat{\hat{u}}_x + D(\hat{\hat{u}}) \ . \qquad (2.I.7)$$

Расщепляя (2.I.6) по $\hat{\hat{u}}_t$, находим $\mathcal{Z}_{\hat{u}\hat{u}} = 0$ и $D = a\hat{\hat{u}} + b$.

Из (2.I.6) получаем следующее условие:

$$\omega_1 \mathcal{Z}_{\hat{u}} + \omega_1' \hat{\hat{u}}_x \mathcal{Z}_p = 0 \ . \qquad (2.I.8)$$

Решая последнее с учётом (2.I.7), при $b=0$ и τ_1^{-1} вида

$$u^0 = \mathcal{Z}_1^{-1} = a[\hat{\hat{u}} + c a^{-1} \ln(\beta^{-1}\hat{\hat{u}}_x)], \quad (2.I.9)$$

находим уравнение, определяющее ω_1

$$\omega_1' + a(c)^{-1}\omega_1 = 0.$$

Уравнение f_1 принимает вид

$$\hat{\hat{u}}_{xt} = c^* \hat{\hat{u}}_x \exp[-a(c)^{-1}\hat{\hat{u}}]. \quad (2.I.I0)$$

Пусть уравнения f_3 и f_2 связаны соотношением

$$\tau_3 f_3(u^3)\Big|_{f_2(u^2)} \equiv 0, \; u^3 = \mathcal{Z}_3(u^2, u_1^2) \quad (2.I.II)$$

и уравнение f_2 имеет вид

$$f_2 \equiv \hat{u}_{xt} - \omega_2(\hat{u})\hat{u}_x - \lambda_2(\hat{u})\hat{u}_t - \delta_2(\hat{u}), (u^2 \equiv \hat{u}). \quad (2.I.I2)$$

Анализ системы определяющих уравнений, полученных расщеплением по производным второго порядка, показывает, что можно положить $\mathcal{Z}_p = 0$. Преобразование τ_3 будет таким:

$$u^3 = \mathcal{Z}_3 = \mathcal{Z} = h[\hat{u} + k h^{-1} \ln(\gamma^{-1}\hat{u}_t)]. \quad (2.I.I3)$$

Решая уравнение для функции λ_2

$$h\lambda_2 + \lambda_2' - (k\gamma)^{-1} \cdot e^{hu} = 0,$$

приходим к уравнению f_2

$$\hat{u}_{xt} = c^{**}\hat{u}_t \cdot \exp[h(k)^{-1}\hat{u}]. \quad (2.I.I4)$$

Построим преобразование τ_2 исходя из определяющего соотношения

$$\tau_2 f_2(\hat{u})\Big|_{f_1(\hat{\hat{u}})} \equiv 0, \; \hat{u} = \mathcal{Z}_2(\hat{\hat{u}}, \hat{\hat{u}}_1, x). \quad (2.I.I5)$$

В системе определяющих уравнений полагаем $\mathcal{Z}_q = 0$. Находим следующее преобразование:

$$\hat{u} = \mathcal{Z}_2 = \hat{c} \ln(\delta^{-1} \cdot \hat{\hat{u}}_x). \quad (2.I.I6)$$

Оставшиеся после этого соотношения в системе определяющих уравнений дают условия

$$\hat{c}hk^{-1}=+1,\ c^{**}=-\delta\alpha c^{-1},\ \delta=\beta,\ \hat{c}=c\alpha^{-1}. \quad (2.I.I7)$$

Обратное преобразование τ_2^{-1} находим, решая задачу

$$\tau_2^{-1}\ f_1(\hat{\hat{u}})\Big|_{f_2(\hat{u})}\equiv 0,\quad \hat{\hat{u}}=\mathcal{Z}_2^{-1}(\hat{u},\hat{u}_1,x)\ . \quad (2.I.I8)$$

Из системы определяющих уравнений получаем $\mathcal{Z}_p=0$. Одно из уравнений системы

$$\mathcal{Z}_q+\hat{u}_t\mathcal{Z}_{qq}=0$$

даёт возможность определить подстановку

$$\hat{\hat{u}}=\mathcal{Z}_2^{-1}=\hat{\hat{c}}\ \ln(\mu^{-1}\hat{u}_t). \quad (2.I.I9)$$

Другие уравнения позволяют найти соотношения, связывающие коэффициенты:

$$-hk^{-1}+c^*\mu^{-1}=0,\ -kh^{-1}=\hat{\hat{c}},\ \gamma=\mu,\ c^{**}=-\tfrac{1}{2}\beta. \quad (2.I.20)$$

Если положить $\hat{\hat{c}}=2$, то остальные коэффициенты принимают значения

$$hk^{-1}=+\tfrac{1}{2},\ \hat{\hat{c}}=-2,\ c^*=-\beta^{-1},\ \gamma=-2\beta^{-1},\ c\alpha^{-1}=2.$$

После этого преобразования τ_2 и τ_2^{-1} принимают вид

$$\hat{u}=2\ln(\beta^{-1}\hat{\hat{u}}_x),\quad \hat{\hat{u}}=-2\ln(-\tfrac{1}{2}\beta\hat{u}_t), \quad (2.I.2I)$$

а уравнения f_1 и f_2 записываются следующим образом:

$$\hat{\hat{u}}_{xt}=-\beta^{-1}\hat{\hat{u}}_x\exp(-\tfrac{1}{2}\hat{\hat{u}}), \quad (2.I.22)$$

$$\hat{u}_{xt}=-\tfrac{1}{2}\beta\hat{u}_t\exp(\tfrac{1}{2}\hat{u}). \quad (2.I.23)$$

Нелокальные преобразования с учётом новых значений коэффициентов получаем в виде

$$u^0=\mathcal{Z}_1^{-1}=\tfrac{1}{2}[\hat{\hat{u}}+2\ln\beta^{-1}\hat{\hat{u}}_x],\ u^3=\mathcal{Z}_3=\tfrac{1}{2}[\hat{u}+2\ln(-\tfrac{1}{2}\beta\hat{u}_t)], \quad (2.I.24)$$

$$\hat{u}=\mathcal{Z}_2=2\ln\beta^{-1}\hat{\hat{u}}_x,\quad \hat{\hat{u}}=\mathcal{Z}_2^{-1}=-2\ln(-\tfrac{1}{2}\beta\hat{u}_t). \quad (2.I.25)$$

Отсюда следует

$$u^0=\tfrac{1}{2}(\hat{\hat{u}}+\hat{u}),$$
$$u^3=\tfrac{-1}{2}(\hat{\hat{u}}-\hat{u}).$$

Исключая $\hat{u}$ и $\hat{\hat{u}}$ из преобразований (2.I.24), находим соотношения, связывающие переменные u^0 и u^3

$$\begin{aligned} u^0_x - u^3_x &= \beta \exp \tfrac{1}{2}(u^0+u^3), \\ u^0_t + u^3_t &= -2\beta^{-1}\exp \tfrac{1}{2}(u^3-u^0), \end{aligned} \qquad (2.I.26)$$

которые составляют преобразование Бэклунда для уравнений f_0 и f_3 . Иным методом это преобразование построено в работе [87].

Следовательно, нелокальные преобразования (2.I.24), (2.I.25), осуществляющие приведение уравнений в последовательности (2.I.2), определяют преобразование Бэклунда для уравнений (2.I.0),(2.I.I).

2°. Уравнение sin-Гордона

Рассмотрим уравнение

$$f_0 \equiv u^0_{xt} - \sin u^0 = 0, (u^0 \equiv u^3). \qquad (2.2.I)$$

Построим нелокальные преобразования, осуществляющие приведение уравнений в последовательности (I.I.0)

$$\begin{array}{ccc} & \overset{\tau_1^{-1}}{\longrightarrow} & f_1(\hat{\hat{u}}) \\ f_0(u^0) & \underset{\tau_2}{\uparrow\downarrow}\ \overset{\tau_2^{-1}}{} & \\ & \underset{\tau_3}{\longrightarrow} & f_2(\hat{u}) \end{array} \qquad (2.2.2)$$

f_2 представим в виде

$$\hat{u}_{xt} = \omega_1(\hat{u}_x)\phi_1(\hat{u}) + \lambda_1(\hat{u}_t)\psi_1(\hat{u}) + \sigma_1(\hat{u}). \qquad (2.2.3)$$

Решаем задачу приведения уравнений f_3 и f_2

$$\tau_3 f_3(u^3)\Big|_{f_2(\hat{u})} \equiv 0,\ u^3 = \mathcal{Z}_3(\hat{u}, \hat{u}_1). \qquad (2.2.4)$$

Расщепляя определяющее соотношение по производным второго порядка, находим уравнения ($\hat{u}_x = p$, $\hat{u}_t = q$, $\mathcal{Z}_3 = \mathcal{Z}$)

$$\begin{aligned} &\hat{u}_t \mathcal{Z}_{\hat{u}p} + \omega_1'\phi_1\mathcal{Z}_p + (\omega_1\phi_1 + \lambda_1\psi_1 + \sigma_1)\mathcal{Z}_{pp} = 0, \\ &\hat{u}_x \mathcal{Z}_{\hat{u}q} + \lambda_1'\psi_1\mathcal{Z}_q + (\omega_1\phi_1 + \lambda_1\psi_1 + \sigma_1)\mathcal{Z}_{qq} = 0. \end{aligned}$$

Полагая $\mathcal{Z}_q = 0$ и расщепляя первое из этих уравнений по $\hat{u}_t$,

получаем

$$\hat{U}_t \mathcal{Z}_{\hat{u}p} + \lambda_1(q)\,\psi_1\,\mathcal{Z}_{pp} = 0\,,$$
$$\omega_1'\,\phi_1\,\mathcal{Z}_p + (\omega_1\phi_1 + \sigma_1)\mathcal{Z}_{pp} = 0\,. \qquad (2.2.5)$$

Из первого уравнения при $\lambda_1 = 0$ и $\mathcal{Z}_{\hat{u}p} = 0$ следует

$$\mathcal{Z}_p\,\omega_1' + \omega_1\,\mathcal{Z}_{pp} = 0, (\sigma_1 = 0,\ \phi_1 \neq 0)\,. \qquad (2.2.5^{o})$$

Слагаемые, не содержащие производных второго порядка, представим уравнением

$$\omega_1\phi_1\,\mathcal{Z}_{\hat{u}} + \hat{U}_x\hat{U}_t\,\mathcal{Z}_{\hat{u}\hat{u}} + \mathcal{Z}_p\,\omega_1\phi_1'\,\hat{U}_x = \sin\mathcal{Z}\,. \qquad (2.2.6)$$

Отсюда следует $\mathcal{Z}_{\hat{u}\hat{u}} = 0$ и $\mathcal{Z}$ приобретает вид

$$\mathcal{Z} = \Omega(\hat{U}_x) + D(\hat{U})\,,$$

где

$$D(\hat{U}) = a\hat{U} + \ell\,.$$

Подставляя это выражение $\mathcal{Z}$ в (2.2.6) и решая его, приходим к соотношению

$$\omega_1\phi_1 a + \Omega'\omega_1\phi_1'\hat{U}_x = \sin(\Omega + D)\,. \qquad (2.2.7)$$

При этом $\ell = 0$.

Раскрывая последнее слагаемое в (2.2.7) как синус суммы двух аргументов, расчленяем (2.2.7) на два уравнения:

первое –

$$\sin D\cdot\cos\Omega = a\,\omega_1\phi_1\,, \qquad (2.2.8)$$

и второе –

$$\cos a\hat{U}\cdot\sin\Omega = \Omega'\omega_1\phi_1'\hat{U}_x\,. \qquad (2.2.9)$$

Выполним дифференцирование последнего по $p = \hat{U}_x$ и сравним результат с полученным выше уравнением $(2.2.5^{o})$. Находим, что функции ω_1 и ϕ_1 определяются выражениями

$$\omega_1 = \cos\Omega(\hat{U}_x)\,,\quad \phi_1 = a^{-1}\cos a\hat{U}\,.$$

Подставляя значения этих функций в (2.2.8), убеждаемся в том, что они удовлетворяют ему. Уравнение для функции Ω с учё-

том (2.2.9) принимает вид

$$\Omega'_p = p^{-1} \operatorname{tg} \Omega$$

и функция

$$\Omega = \arcsin \tfrac{1}{2} c^{-1} \hat{u}_x$$

является его решением. Преобразование τ_3 оказывается следующим:

$$u^3 = \mathcal{Z}_3 = a\hat{u} + \arcsin \tfrac{1}{2} c^{-1} \hat{u}_x , \qquad (2.2.10)$$

а уравнение f_2 - таким:

$$\hat{u}_{xt} = a^{-1} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2c} \hat{u}_x\right)^2} \cdot \sin a\hat{u} , \qquad (2.2.11)$$

где учтено, что

$$\omega_1 = \cos \arcsin \tfrac{1}{2} c^{-1} \hat{u}_x = \sqrt{1 - (2c)^{-2} \hat{u}_x^2} .$$

Преобразование τ_1^{-1} находим из определяющего соотношения

$$\tau_1^{-1} f_0(u^\circ) \Big|_{f_1(\hat{\hat{u}})} \equiv 0 , \quad u^\circ = \mathcal{Z}_1^{-1}(\hat{\hat{u}}, \hat{\hat{u}}_1) , \qquad (2.2.12)$$

в котором f_1 будет таким:

$$\hat{\hat{u}}_{xt} = \omega_2(\hat{\hat{u}}_x)\phi_2(\hat{\hat{u}}) + \lambda_2(\hat{\hat{u}}_t)\psi_2(\hat{\hat{u}}) + \sigma_2(\hat{\hat{u}}) . \qquad (2.2.13)$$

В системе определяющих уравнений полагаем $\mathcal{Z}_p = 0$, в результате чего эта система принимает вид

$$\mathcal{Z}_{\hat{u}q} = 0 , \quad \mathcal{Z}_{\hat{u}\hat{u}} = 0 , \quad \sigma_2 = 0 , \quad (\mathcal{Z}_1^{-1} \equiv \mathcal{Z}) ,$$
$$\lambda_2 \psi_2 \mathcal{Z}_{\hat{u}} + \lambda_2 \psi'_2 \hat{\hat{u}}_t \mathcal{Z}_q - \sin \mathcal{Z} = 0 ,$$
$$\mathcal{Z}_{qq} \cdot \lambda_2 + \mathcal{Z}_q \lambda'_2 = 0 .$$

Решая эти уравнения, получаем

$$\psi_2 = b^{-1} \sin b\hat{\hat{u}} , \quad \lambda_2 = \cos \Lambda(\hat{\hat{u}}_t) ,$$

и приходим к уравнению

$$\Lambda'_q = q^{-1} \operatorname{tg} \Lambda .$$

Последнее может быть удовлетворено, например, следующим значением Λ :

$$\Lambda = \arcsin\left[(2c^*)^{-1}\cdot\hat{\hat{u}}_t\right] .$$

Преобразование τ_1^{-1} оказывается таким:

$$u^\circ = \mathcal{Z}_1^{-1} = b\hat{\hat{u}} + \arcsin\left[(2c^*)^{-1}\cdot\hat{\hat{u}}_t\right] , \qquad (2.2.14)$$

а уравнение f_1 приобретает вид

$$\hat{\hat{u}}_{xt} = b^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2c^*}\hat{\hat{u}}_t\right)^2}\,\sin b\hat{\hat{u}} . \qquad (2.2.15)$$

Найдём преобразование τ_2^{-1}, решая задачу

$$\tau_2^{-1} f_1(\hat{\hat{u}})\Big|_{f_2(\hat{u})} \equiv 0, \quad \hat{\hat{u}} = \mathcal{Z}_2^{-1}(\hat{u}, \hat{u}_1) . \qquad (2.2.16)$$

Опуская промежуточные вычисления, решение системы определяющих уравнений при $\mathcal{Z}_q = 0$, получим в виде

$$\hat{\hat{u}} = \mathcal{Z}_2^{-1} = \rho\arcsin\left[(2c)^{-1}\hat{u}_x\right] . \qquad (2.2.17)$$

Преобразование τ_2 находим, решая задачу

$$\tau_2\, f_2(\hat{u})\Big|_{f_1(\hat{\hat{u}})} \equiv 0, \quad \hat{u} = \mathcal{Z}_2(\hat{\hat{u}}, \hat{\hat{u}}_1) .$$

Система определяющих уравнений при $\mathcal{Z}_p = 0$ имеет следующее решение:

$$\hat{u} = \mathcal{Z}_2 = \mu\arcsin\left[(2c^*)^{-1}\cdot\hat{\hat{u}}_t\right] \qquad (2.2.18)$$

и позволяет установить условия, связывающие коэффициенты в полученных выше подстановках (2.2.17), (2.2.18). Так, например, при $a = \frac{1}{2}$ находим

$$a = b , \quad \mu = b^{-1}, \quad \rho = a^{-1}, \quad c^* = c^{-1} .$$

С учётом полученных соотношений уравнения f_1 и f_2 приобретают вид

$$\hat{\hat{u}}_{xt} = 2\sqrt{1-\left(2^{-1}c\,\hat{\hat{u}}_t\right)^2}\,\sin\tfrac{1}{2}\hat{\hat{u}} ,$$

$$\hat{u}_{xt} = 2\sqrt{1-(2c)^{-2}\hat{u}_x^2}\,\sin\tfrac{1}{2}\hat{u} .$$

Найденные в ходе решения преобразования с новыми значениями коэффициентов оказываются следующими:

$$u^0=\mathcal{Z}_1^{-1}=\frac{1}{2}\hat{\hat{u}}+\arcsin\frac{c\hat{\hat{u}}_t}{2},\ u^3=\mathcal{Z}_3=\frac{1}{2}\hat{u}+\arcsin\frac{\hat{u}_x}{2c},\quad(2.2.19)$$
$$\hat{u}=\mathcal{Z}_2=-2\arcsin\frac{1}{2}c\hat{\hat{u}}_t,\ \hat{\hat{u}}=\mathcal{Z}_2^{-1}=2\arcsin[(2c)^{-1}\hat{u}_x].$$

Подстановки (2.2.19) могут быть записаны иначе

$$u^3=\frac{1}{2}(\hat{\hat{u}}+\hat{u}),$$
$$u^0=\frac{1}{2}(\hat{\hat{u}}-\hat{u}).$$

Это позволяет, исключив из τ_1^{-1} и τ_3 переменные $\hat{\hat{u}}$ и $\hat{u}$, найти

$$u^3-u^0=-2\arcsin\frac{1}{2}c(u^0_t+u^3_t),$$
$$u^3+u^0=2\arcsin\frac{1}{2c}(u^3_x-u^0_x).\quad(2.2.20)$$

Выражения (2.2.20) составляют преобразование Бэклунда для уравнения sin-Гордона (2.2.I).

Следует отметить, что построенное нами преобразование (2.2.20) совпадает с известным преобразованием Бэклунда для уравнения f_0, полученным иным методом в [54, 7I, 78, 90], а (2.2.I0) представляет собой преобразование Крускала [7I, 90].

Таким образом, нелокальные преобразования (2.2.I9), осуществляющие приведение уравнения sin-Гордона в последовательности (2.2.2), определяют преобразование Бэклунда для этого уравнения.

3°. Уравнение Кортевега-де Фриза

Рассмотрим уравнение КдФ

$$f_0\equiv u^0_t+12u^0u^0_x+u^0_{xxx}=0\quad(2.3.I)$$

и модифицированное уравнение КдФ (МКдФ)

$$f_1\equiv\hat{\hat{u}}_t-6\hat{\hat{u}}^2\hat{\hat{u}}_x+6\lambda\hat{\hat{u}}_x+\hat{\hat{u}}_{xxx}=0,\ (u^1\equiv\hat{\hat{u}}).\quad(2.3.2)$$

Пусть приведение этих уравнений осуществляется с помощью нелокальных преобразований зависимой переменной

$$u^0=\mathcal{Z}_1^{-1}(\hat{\hat{u}},\hat{\hat{u}}_1).\quad(2.3.3)$$

Определяющее соотношение

$$\tau_1^{-1} f_0(u^0)\Big|_{f_1(\hat{\hat{u}})} \equiv 0$$

позволяет выбрать $\mathcal{Z}_q = 0$. Расщепляя его по второй и третьей степеням производной $\hat{\hat{u}}_{xx}$, приходим к уравнениям

$$\mathcal{Z}_{ppp} = 0\,, \quad (p = \hat{\hat{u}}_x\,,\ q = \hat{\hat{u}}_t\,,\ \mathcal{Z}_1^{-1} \equiv \mathcal{Z}\,),$$
$$\mathcal{Z}_{\hat{u}p} + \hat{\hat{u}}_x \mathcal{Z}_{\hat{u}pp} + 2(\hat{\hat{u}}^2 - \lambda)\mathcal{Z}_{pp} = 0\,.$$

Для слагаемых, не содержащих производные второго порядка, получаем уравнение

$$\hat{\hat{u}}_t \mathcal{Z}_{\hat{u}} + 12\,\hat{\hat{u}}_x \mathcal{Z}\mathcal{Z}_{\hat{u}} + \hat{\hat{u}}_x^3 \mathcal{Z}_{\hat{u}\hat{u}\hat{u}} +$$
$$+ \mathcal{Z}_{\hat{u}}(6\,\hat{\hat{u}}^2\hat{\hat{u}}_x - \hat{\hat{u}}_t - 6\lambda\,\hat{\hat{u}}_x) + 12\,\hat{\hat{u}}\hat{\hat{u}}_x^2 \mathcal{Z}_p = 0\,.$$

Уравнение для слагаемых, содержащих первую степень $\hat{\hat{u}}_{xx}$, оказывается таким:

$$\hat{\hat{u}}_x \mathcal{Z}_{\hat{u}\hat{u}} + 12\,\mathcal{Z}\mathcal{Z}_p + \mathcal{Z}_{pp}[2\,\hat{\hat{u}}_x \mathcal{Z}_{\hat{u}\hat{u}} - \hat{\hat{u}}_t + 6\hat{\hat{u}}^2\hat{\hat{u}}_x - 6\lambda\hat{\hat{u}}_x] +$$
$$+ 6\,\mathcal{Z}_p(\hat{\hat{u}}^2 - \lambda) + 2\,\mathcal{Z}_{pp}(6\,\hat{\hat{u}}^2\hat{\hat{u}}_x - \hat{\hat{u}}_t - 6\lambda\,\hat{\hat{u}}_x) = 0\,.$$

Из последнего расщеплением по $\hat{\hat{u}}_t$ находим $\mathcal{Z}_{pp} = 0$, откуда

$$\mathcal{Z}_1^{-1} = \phi_1(\hat{\hat{u}})\cdot\hat{\hat{u}}_x + \psi_1(\hat{\hat{u}})\,. \qquad (2.3.4)$$

Полученные соотношения позволяют систему уравнений заменить уравнением

$$3\,\hat{\hat{u}}_x^2\phi_1'' + 3\,\hat{\hat{u}}_x\psi_1'' + 12\,\phi_1^2\,\hat{\hat{u}}_x + 12\,\psi_1\phi_1 + 6\phi_1(\hat{\hat{u}}^2 - \lambda) = 0\,.$$

Расщепляя его по $\hat{\hat{u}}_x^2$, находим, что $\phi_1 = a\hat{\hat{u}} + b$. Кроме того, остаются уравнения, определяющие вид функции ψ_1 :

$$\psi_1'' + 4\,\phi_1^2 = 0\,,$$
$$12\,\psi_1 + 6(\hat{\hat{u}}^2 - \lambda) = 0\,. \qquad (2.3.5)$$

Из второго уравнения получаем

$$\psi_1 = \frac{1}{2}(\lambda - \hat{\hat{u}}^2)\,.$$

При этом $\psi_1' = -\hat{\hat{u}}$ и $\psi_1'' = -1$. Из первого уравнения в (2.3.5) находим следующие значения коэффициентов: $a = 0$, $b = \pm\frac{1}{2}$.

Пусть $b = \frac{1}{2}$. Замена переменной принимает окончательный вид

$$u^\circ = \mathcal{Z}_1^{-1} = \tfrac{1}{2}(-\hat{\hat{u}}_x - \hat{\hat{u}}^2 + \lambda). \qquad (2.3.6)$$

Полученное преобразование (2.3.6) известно как преобразование Миуры [54, 71].

Осуществим приведение уравнения $(u^2 \equiv \hat{u})$

$$f_2 \equiv \hat{u}_t + 6\lambda\hat{u}_x - 3\hat{u}_{xx}\hat{u}_x\hat{u}^{-1} + \hat{u}_{xxx} = 0 \qquad (2.3.7)$$

к уравнению f_0

$$\tau_3\, f_0(u^\circ)\,\Big|_{f_2(\hat{u})} \equiv 0, \quad u^\circ = \mathcal{Z}_3(\hat{u}, \hat{u}_1, \hat{u}_2). \qquad (2.3.8)$$

Уравнение (2.3.7) получаем из f_1 преобразованием

$$\hat{\hat{u}} = \mathcal{Z}_2^{-1} = \hat{u}_{xx}\hat{u}^{-1}. \qquad (2.3.9)$$

Решая задачу (2.3.8) в предположении $\mathcal{Z}_{rr} = 0$, $r = \hat{u}_{xx}$, $s = \hat{u}_{xt}$, $\nu = \hat{u}_{tt}$, находим $\mathcal{Z}_s = 0$, $\mathcal{Z}_\nu = 0$. Преобразование τ_3 имеет вид

$$\mathcal{Z}_3 = \hat{u}_{xx}\cdot\phi_2(\hat{u}, \hat{u}_x) + \psi_2(\hat{u}, \hat{u}_x).$$

Из системы определяющих уравнений при этих условиях находим

$$\phi_2 = \phi_2(\hat{u}), \quad \mathcal{Z}_p = 0, \quad (\mathcal{Z}_3 \equiv \mathcal{Z}),$$
$$\mathcal{Z}_r = -\tfrac{1}{2}\hat{u}^{-1}.$$

В результате этого преобразование принимает вид

$$u^\circ = \mathcal{Z}_3 = -\tfrac{1}{2}\hat{u}_{xx}\hat{u}^{-1} + \omega_2(\hat{u}).$$

Оставшиеся в системе определяющих уравнений условия дают для ω_2 значение $\frac{1}{2}\lambda$. Таким образом, находим подстановку

$$u^\circ = \tfrac{1}{2}(\lambda - \hat{u}_{xx}\hat{u}^{-1}). \qquad (2.3.10)$$

Последовательность приведения уравнений представим схемой

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\tau_1^{-1}}{\nearrow} & f_1(\hat{\hat{u}}) & & \\ f_0(u^\circ) & \tau_2 \Big\uparrow & \Big\| & \tau_2^{-1} & \\ & \underset{\tau_3}{\searrow} & f_2(\hat{u}) & & \end{array} \qquad (2.3.11)$$

Пусть в преобразовании Бэклунда (I.I.I8), (I.I.I9) для уравнений f_0 и f_2 первое соотношение имеет вид (2.3.I0). Получим второе соотношение. Для этого запишем $\hat{u}_{xx}$ из (2.3.I0) и решим задачу

$$\hat{S}[\hat{u}_{xx} - \hat{u}(\lambda - 2u^0)]\Big|_{u^0=\frac{1}{2}(\lambda-\hat{u}_{xx}\hat{u}^{-1}),\, f_2(\hat{u})} = \phi = 0 .$$

Дифференцируя выражение для $\hat{u}_{xx}$ по x и переходя на многообразие $\mathcal{M}\, f_2$, находим

$$\hat{u}_{xxx} = \lambda \hat{u}_x - 2u^0\hat{u}_x - 2\hat{u}u^0_x .$$

Умножив левую и правую части этого уравнения на 6, получаем

$$6\hat{u}_{xxx} = 6\lambda\hat{u}_x - 12u^0\hat{u}_x - 12\hat{u}u^0_x .$$

Осуществим переход на многообразие $\mathcal{M}\, f_2$. Заменяя в последнем соотношении слагаемое $6\lambda\hat{u}_x$ значением, полученным для него из (2.3.7), находим

$$7\hat{u}_{xxx} = -\hat{u}_t + 3\hat{u}_{xx}\hat{u}_x\hat{u}^{-1} - 12u^0\hat{u}_x - 12\hat{u}u^0_x .$$

Отсюда приходим к выражению ϕ, используя следствие (2.3.I0)

$$\hat{u}_{xx}\hat{u}_x\hat{u}^{-1} = \hat{u}_{xxx} + 2u^0_x\hat{u} .$$

Следовательно, соотношения (2.3.I0) и

$$4\hat{u}_{xxx} + 12u^0\hat{u}_x + 6\hat{u}u^0_x + \hat{u}_t = 0 \qquad (2.3.I2)$$

определяют преобразование Бэклунда для уравнений f_0 и f_2. Исключая с помощью (2.3.9) переменную $\hat{u}$ и её производные, получаем преобразование Бэклунда для уравнений f_0, f_1[7I]:

$$u^0 = \tfrac{1}{2}(-\hat{\hat{u}}_x - \hat{\hat{u}}^2 + \lambda),$$

$$\phi = 4\hat{\hat{u}}_{xxx} + 12\hat{\hat{u}}\hat{\hat{u}}_{xx} + 12\hat{\hat{u}}^2\hat{\hat{u}}_x + 12\hat{\hat{u}}^2_x u^0_x + 12\hat{\hat{u}}^2_x + 12u^0\hat{\hat{u}}_x + 6u^0_{xx} - \hat{\hat{u}}_t = 0 .$$

Рассмотренные задачи свидетельствуют о том, что нелокальные преобразования, осуществляющие приведение нелинейных уравнений, позволяют находить преобразования Бэклунда для таких уравнений и получать их точные решения.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

В диссертации установлено, что метод нелокальных преобразований в сочетании с теоретико-групповым методом Ли является эффективным средством построения точных решений нелинейных уравнений, в том числе и многомерных.

Исследования показали, что многочисленные нелинейные уравнения с двумя независимыми переменными с помощью нелокальных или точечных преобразований приводятся к линейным уравнениям.

Основные результаты работы:

- построены некоторые классы нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными, допускающих нелокальную линеаризацию и указаны соответствующие подстановки;

- осуществлена нелокальная линеаризация и построены в явном виде точные решения многих нелинейных уравнений гиперболического и параболического типов с двумя независимыми переменными и многомерных, широко встречающихся в прикладных вопросах;

- построены, в частности, точные решения уравнения Лиувилля и связанных с ним уравнений, уравнений Монжа-Ампера специального вида, Эйлера-Лагранжа, Борна-Инфельда;

- исследованы групповые свойства уравнений гиперболического и параболического типов с двумя независимыми переменными, показано, что многие уравнения гиперболического типа, линеаризация которых осуществляется с помощью нелокальных преобразований зависимой переменной или точечными преобразованиями переменных, допускают бесконечную группу Ли;

- установлена связь между нелокальными преобразованиями,

осуществляющими приведение каких-либо двух уравнений, и преобразованиями Бэклунда;

– при помощи вспомогательных уравнений осуществлена линеаризация уравнения Лиувилля и приведение уравнений sin – Гордона и Кортевега-де Фриза к уравнениям, совпадающим с исходными, полученные нелокальные подстановки использованы при построении преобразований Бэклунда.

ЛИТЕРАТУРА

I. Айнс Э.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- Харьков: ГОНТИ-НКТП-ДНТВУ, I939.- 7I9 с.

2. Ахундова Э.А., Додонов В.В., Манько В.И. Интегралы движения и нелинейные формы линейных уравнений.- В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, т. I : Труды международного семинара в Звенигороде 28–30 ноября I979.- М.: Наука, I980, с. 348–354.

3. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М., Халилов В.Р., Шаповалов В.Н. Точные решения релятивистских волновых уравнений.- Новосибирск: Наука, I982.- I43 с.

4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных.- М.: Наука, I98I.- 448 с.

5. Бицадзе А.В. О некоторых классах точных решений уравнений гравитационного поля.- ДАН СССР, I977, т. 233, с. 5I7–5I8.

6. Бицадзе А.В. Точные решения некоторых вариантов уравнений гравитационного поля.- Труды мат. ин-та АН СССР, I98I, т.I57, с. I9–24.

7. Валландер С.В. Нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, сводя-

щиеся к линейным.- Вестник ЛГУ, 1954, № 5, с. 201-204.

8. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений.- М.; Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.- 295 с.

9. Виноградов А.М., Воробьёв Е.М. Применение симметрии для нахождения точных решений уравнения Заболотской-Хохлова.- Акустический журнал, 1976, т. 22, № 1, с. 23-27.

10. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Применение нелинейных дифференциальных уравнений в гражданской авиации.- М.: МИИГА, 1977.- 122 с.

11. Вишневский Л.Д. Построение в конечном виде решений некоторых классов неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.- Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 6, с. 1000-1005.

12. Голод П.И., Прикарпатский А.К. Классическое решение двумерной модели Тирринга с непериодическими начальными условиями.- Препринт.- Киев: ИТФ-78-18р, 1978.- 28 с.

13. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных.- М.; Л.: ОНТИ-ГТТИ, 1934.- 359 с.

14. Еругин Н.П. Приводимые системы.- Труды мат. ин-та АН СССР, 1946, т. 13.- 93 с.

15. Жибер А.В., Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Уравнения типа Лиувилля.- ДАН СССР, 1979, т. 249, № 1, с. 26-29.

16. Жибер А.В., Шабат А.Б. Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой.- ДАН СССР, 1979, т. 247, № 5, с.1103-1107.

17. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов: Метод обратной задачи.- М.: Наука, 1980.- 319 с.

18. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. Уравнение Кортевега-де Фриза- вполне интегрируемая гамильтонова система.- Функциональный

анализ и его приложения, I97I, т. 5, вып. 4, с. I8–27.

I9. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики.– Новосибирск: Новосибирский ун–т, I972.– I59 с.

20. Ибрагимов Н.Х., Андерсон Р.Л. Группы касательных преобразований Ли–Беклунда.– ДАН СССР, I976, т.227, № 3, с. 539–542.

2I. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Уравнение Кортевега–де Фриза с групповой точки зрения.– ДАН СССР, I979, т.224, № I, с.57–6I.

22. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. Эволюционные уравнения с нетривиальной группой Ли–Беклунда.– Функциональный анализ и его приложения, I980, т. I4, № I, с. 25–36.

23. Ибрагимов Н.Х. К теории групп преобразований Ли–Беклунда.– Мат. сб., I979, вып. I09, № 2, с. 229–253.

24. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.– М.: Наука, I97I.– 575 с.

25. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.– М.: Наука, I966.– 260 с.

26. Костенко В.Г. Інтегрування деяких нелІнІйних диференцІальних рІвнянь в частинних похІдних груповим методом.– ЛьвІв: ЛьвІвський держ. ун–т, I952.– 22 с.

27. Костенко Е.С. О групповых свойствах обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.– Дифференциальные уравнения, I972, т. 8, № 4, с. 727–730.

28. Курант Р. Уравнения с частными производными.– М.: Мир, I964.– 830 с.

29. Лакс П.Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединённые волны.– Математика, I969, I3: 5, с. I28–I50.

30. Лебедев Д.Р., Манин Ю.И. Гамильтонов оператор Гельфанда–Дикого и кориссоединённое представление группы Вольтерра.–

Функциональный анализ и его приложения, 1979, т. 13, вып. 4, с. 40–46.

31. Лопатин А.К. Асимптотическое расщепление почти инвариантных систем дифференциальных уравнений.– В кн.: Теоретико-групповые методы в физике, т. 2: Труды международного семинара, Звенигород 28–30 ноября 1979 г.– М.: Наука, 1980, с. 342–348.

32. Лопатинский Я.Б. Введение в современную теорию дифференциальных уравнений в частных производных.– Киев: Наукова думка, 1980.– 216 с.

33. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения.– М.: Гостехиздат, 1949.– 237 с.

34. Манин Ю.И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений.– В кн.: Современные проблемы математики, т. 11.– М.: ВИНИТИ, 1978, с. 5–152.

35. Митропольский Ю.А. О приводимости дифференциальных уравнений нелинейной механики 1: Приводимость на основании обобщённого метода усреднения.– Препринт 82.4.– Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1982.– 56 с.

36. Митропольский Ю.А. О приводимости дифференциальных уравнений нелинейной механики 2: Приводимость на основании метода ускоренной сходимости.– Препринт 82.5.– Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1982.– 39 с.

37. Овсянников Л.В. О линеаризации уравнения с частными производными второго порядка.– ДАН СССР, 1955, т. 102, № 2, с. 219–220.

38. Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений.– Новосибирск: Новосибирский ун-т, 1966.– 131 с.

39. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука, I978.- 399 с.

40. Плисс В.А. О приведении аналитической системы дифференциальных уравнений к линейной форме.- Дифференциальные уравнения, I965, т. I, № 2, с. 75-8I.

4I. Погорелов А.В. Об уравнениях Монжа-Ампера эллиптического типа.- Харьков: Харьковский ун-т, I960.- II0 с.

42. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы.- М.: Наука, I973.- 5I9 с.

43. Прикарпатский А.К. Об уравнениях Риккати, интегрируемых в квадратурах.- ДАН СССР, I980, т. 25I, № 5, с. I072-I077.

44. Прикарпатский А.К. Об аналоге преобразования Бэклунда для обыкновенных дифференциальных уравнений.- ДАН СССР, I980, т. 253, № 2, с. 298-30I.

45. Прикарпатский А.К. Геометрическая структура и Бэклунд-преобразование одной системы нелинейных эволюционных уравнений в частных производных.- Укр. мат. журнал, I980, т. 32, № I, с. I24-I27.

46. Рашевский П.К. Геометрическая теория уравнений с частными производными.- М.; Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, I947.- 354 с.

47. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.- М.: Наука, I978.- 687 с.

48. Тычинин В.А. Приведение некоторых автономных уравнений нелинейных колебаний к линейным однородным. Преобразование зависимой переменной.- В кн.: Динамика и прочность тяжёлых машин, вып. 4.- Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, I979, с. I43-I48.

49. Тычинин В.А. Приведение некоторых автономных уравнений нелинейных колебаний к линейным однородным. Преобразование независимых и зависимых переменных.- В кн.: Динамика и прочность тяжёлых машин, вып. 5.- Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, I980, с. I67-I74.

50. Тычинин В.А. Использование преобразований Ли-Беклунда для приведения некоторых уравнений в частных производных к удобному для интегрирования виду.- В кн.: Дифференциальные уравнения и их приложения.- Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, I980, с. 57-62.

5I. Тычинин В.А. О некоторых нелинейных уравнениях в частных производных второго порядка, приводимых преобразованием Ли-Беклунда зависимой переменной к уравнению линейной теплопроводности.- В кн.: Дифференциальные уравнения и их приложения.- Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, I980, с. 63-67.

52. Тычинин В.А. О преобразованиях Ли-Беклунда в некоторых задачах нелинейного тепло-массообмена.- В кн.: Математические методы тепломассопереноса.- Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, I980, с. 60-65.

53. Тычинин В.А. Преобразование Беклунда дифференциальных уравнений, приводимых конечным преобразованием Ли-Беклунда.- Днепропетровск, I980, - I9 с.- Рукопись представлена Днепропетровским ун-том. Деп. в ВИНИТИ I8 июля I980 г.,№ 3I72.80.

54. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.- М.: Мир, I977.- 622 с.

55. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.- М.; Л.: ОГИЗ, I948.- 430 с.

56. Фущич В.И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения.- Теор. и мат. физика, I97I, вып.7,

№ I, с. 3-I2.

57. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных.- В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике.- Киев: Ин-т мат. АН УССР, I978, с. 5-44.

58. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики.- В кн.: Теоретико-алгебраические исследования в математической физике.- Киев: Ин-т мат. АН УССР, I98I, с. 6-27.

59. Фущич В.И., Никитин А.Г. Групповые свойства уравнений Максвелла.- В кн.: Теоретико-групповые методы в математической физике.- Киев: Ин-т мат. АН УССР, I978, с. 45-80.

60. Фущич В.И., Серов Н.И. О точных решениях уравнения Борна-Инфельда.- ДАН СССР, I982, т. 263, № 3, с. 582-586.

6I. Фущич В.И., Тычинин В.А. О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований.- Препринт 82.33.- Киев: Ин-т мат. АН УССР, I982.- 48 с.

62. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований.- М.: И-Л, I947, - 359 с.

63. Adler M. On a Trace Functional for Formal Pseudo-Differential Operators and Symplectic Structure of the Korteveg-de Vries Equations.- Inventiones math., 1979, 50, p. 219-248.

64. Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol. 1.- N-Y.: Academic press, 1965.- 511 p.

65. Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering, Vol. 2.- N-Y.: Academic press, 1972.- 301 p.

66. Ames W.F., Lohner R.J., Adams E. Group properties of $U_{tt} = [f(U)U_x]_x$.- Int. J. Non-Linear Mech., 1981, 16, No 5-6, p. 439-447.

67. Anderson R.L., Kumei S., Wulfman C,E. Generalization of the Concept of Invariance of Differential Equations. Results of Application to Some Schrödinger Equations.- Physical Review Letters, 1972, 28, No 15, p. 988-991.

68. Anderson R.L., Davison S.M. A Generalization of Lie's "Counting" Theorem for Second-Order Ordinary Differential Equations.- Journal of Math. Anal. and Appl., 1974, 48, p. 301-315.

69. Anderson R.L., Fokas A.S. Group theoretical nature of Bäcklund transformations.- Letters in Math. Phys., 1979, Vol. 3, p. 117-126.

70. Byrnes S.G. Bäcklund transformations and the equation $z_{xy} = F(x,y,z)$.- J. Math. Phys., 1976, Vol. 17, No 5, p. 836-842.

71. Chen H.H. Relation bitween Bäcklund transformations and invers scattaring problems.- Lett. Notes. Math., 1976, 515, p. 241-252.

72. Chen H.H. A Bäcklund transformation in two dimensions.- J. Math. Phys., 1975, Vol. 16, No 12, p. 2382-2384.

73. Christiansen P.L. A Bäcklund transformayion for the 3 + 1 dimensional sin-Gordon equation.- Proceedings of the 8th International conference on Nonlinear Oscillations. Prague, 1978, Vol. 1.- Prague, 1979, p. 349- 354.

74. Cole J.D. On a quasi-linear parabolic equation occuring in aerodynamics.- Quart. Appl. Math., 1951, 9, p. 225-236.

75. Dhooghe P.F.J. Partial Differential Equations and Bäcklund maps.- Bull. de la Soc. Math. de Belgique, 1977, Vol. 29, 11, ser. B, p. 111-134.

76. Dhooghe P.F.J. Le probléme de Bäcklund: un fibré d'algebre de Lie.- C. r. Acad. sci., 1979, A B 289, No 3, p. 207-210.

77. Dickson L.E. Differential equations from the group standpoint.- Annals of Math., 1924, second series, Vol. 25, p. 287-379.

78. Forsyth A.R. Theory of Differential Equations, Vol. 5,6.- N-Y: Dover Publication, 1959.- 478 p., - 596 p.

79. Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation.- Phys. Rev. Lett., 1967, 19, p. 1095-1097.

80. Harrison B.K., Estabrook F.B. Geometric Approach to Invariance Groups and Solution of Partial Differential Systems.- J. Math. Phys., 1971, Vol. 12, No 4, p. 653-666.

81. Hirota R. Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations.- Lect. Notes. Math., 1976, 515, p. 40-68.

82. Hopf E. The partial differential equation $U_t + UU_x = \mu U_{xx}$.- Comm. Pure. Appl. Math., 1950, 3, p. 201-230.

83. Jacob A., Sternberg S. Coadjoint structures, solitons, and integrability.- Lect. Notes Phys., 1980, 120, p. 52-84.

84. Ibragimov N.H., Anderson R.L. Lie-Bäcklund Tangent Transformations.- J.Math. Anal. and Appl., 1977, Vol. 59, No 1, p. 145-162.

85. Klamkin M.S., Reid J.L. Nonlinear differential equations equivalent to solvable nonlinear equations.- SIAM J Math. Anal., 1976, Vol. 7, No 3, p. 305-310.

86. Kumei S. Invariance transformations, invariance groups of the sine-Gordon equations.- J. Math. Phys., 1975, Vol. 16,

No 12, p. 2461-2468.

87. Lamb G.L.Jr. Bäcklund transformations at the turn of the century.- Lect. Notes Math., 1976, 515, p. 69-79.

88. Mc Carthy P.J. Existence of strong Bäcklund transformations in for or more dimentions and generalization of a family of Bäcklund transformations.- Letters in Math. Phys., 1978, Vol. 2, p. 493-498.

89. Mc Carthy P.J. Bäcklund transformations as nonlinear Dirac equations.- Letters in Math. Phys., 1977, Vol. 2, p. 167-170.

90. Newell A.C. The interrelation between Bäcklund transformations and the inverse scattering transform.- Lect. Notes Math., 1976, 515, p. 227-239.

91. Pirani F., Robinson D. Sur la définition des transformations de Bäcklund.- C. r. Acad. sci., 1977, A 285, No 8, p. 581-583.

П Р И Л О Ж Е Н И Е I

Таблица I

Уравнения гиперболического типа, допускающие линеаризацию с помощью точечных замен переменных

№ п/п	Нелинейное уравнение	№ в [64]	Подстановка	Линейное уравнение	Решение
I	II	III	IУ	У	УI
I	$Z_t Z_{xt} = Z_x Z_{tt}$	9	$u=t, \xi=Z, \eta=X.$ $W=\Phi[Z_x \cdot Z_t^{-1}].$	$u_{\xi\eta}=0$ $W_t=0$	$Z=f(t+\psi(x))$
2	$Z_t Z_{xt} - Z_x Z_{tt} = Z_t^3$	II	$u=-t, \xi=X, \eta=Z.$ $W=\Phi[Z_x Z_t^{-1} - Z].$	$u_{\xi\eta}=-1$ $W_t=0$	$t-XZ=\phi(Z)+\psi(X)$
3	$Z_t(1+Z_t)Z_{xx}+(1+Z_x)^2 Z_{tt} = (1+2Z_t)(1+Z_x)Z_{xt}$	I4	$u=X, \eta=X+Z,$ $\xi=X+t+Z.$	$u_{\xi\eta}=0$	$X=\phi(X+t+Z)+\psi(X+Z)$
4	$Z_t Z_{xx} - (1+Z_x+Z_t)Z_{xt} = -(1+Z_x)Z_{tt}$	I5	$u=Z, \eta=X+t,$ $\xi=X+Z.$	$u_{\xi\eta}=0$	$Z=\phi(X+Z)+\psi(X+t)$

Продолжение таблицы I

I	II	III	IУ	У	УI
5	$(e^x-1)(z_t z_{xx} - z_x z_{xt}) = e^x z_x z_t$	I7	$u = x - e^x$, $\xi = z$, $\eta = t$.	$u_{\xi\eta} = 0$.	$x - e^x = \phi(z) - \psi(t)$
6	$z_t(1+z_t)z_{xx} + z_x(1+z_x)z_{tt} = (1 + z_x + z_t + 2z_x z_t)z_{xt}$	I8	$u = z$, $\xi = x+z$, $\eta = t+z$.	$u_{\xi\eta} = 0$	$z = \phi(x+z) + \psi(t+z)$
7	$z(z_t z_{xt} - z_x z_{tt}) = \mp z_x z_t^2$	23	$u=t$, $\xi=x$, $\eta=\pm z$.	$u_{\xi\eta}=\eta^{-1}u_\xi$	$t = \phi(z) \pm z\,\psi(x)$
8	$z_t^2 z_{xx} + z_x^2 z_{tt} = 2 z_x z_t z_{xt}$	I2	$u=t$, $\xi=x$, $\eta=z$.	$u_{\xi\eta}=0$	$t = \phi(z)\cdot x + \psi(z)$
9	$z_t^2 z_{xx} + z_x^2 z_{tt} = 2 z_x z_t z_{xt} + z_x z_t^2$	I3	$u=t$, $\xi=x$, $\eta=z$.	$u_{\xi\xi} = u_\xi$	$t = e^x\phi(z) + \psi(z)$
I0	$(b+z_t)^2 z_{xx} + (a+z_x)^2 z_{tt} = 2(a+z_x)(b+z_t)z_{xt}$	I6	$u = z$, $\xi = x$, $\eta = ax+bt+z$.	$u_{\xi\xi} = 0$	$z = x\,\phi(ax+bt+z) + \psi(ax+bt+z)$

П Р И Л О Ж Е Н И Е II

Таблица I

Уравнения параболического типа, приводимые к уравнению теплопроводности $U_{\xi\xi} = U_\eta$, ($U_0 = \Phi(\xi,\eta)$) с помощью точечных замен переменных

№ п/п	Нелинейное уравнение	Подстановка	Решение
I	II	III	IУ
I	$Z_t + \phi''(x)[\phi'(x)]^{-1} Z_x^{-1} = Z_x^{-2} Z_{xx}$	$\xi = z, \eta = t, U = \phi(x).$	$\Phi(z,t) = \phi(x)$
2	$Z_{xx} Z_t^2 - 2 Z_x Z_t Z_{xt} + Z_x^2 Z_{tt} = - Z_t^2 [\phi'(z)]^{-1}$	$\xi = x$, $\eta = \phi(z)$, $U = t$.	$\Phi(x,z) = t$
3	$Z_t = Z_{xx} - \phi'(z)\,\phi^{-1}(z) Z_x^2 + \phi(z)$	$\xi = x$, $\eta = t$, $U = t - \int \phi^{-1}(z) dz$	$t - \Phi(x,t) = \int \phi^{-1}(z) dz$
4	$Z_t \phi_x^2 - Z_x [\phi_x \phi_t + \phi_{xx} \phi_x^{-1}] = Z_{xx}$	$\xi = \phi(x,t)$, $\eta = t$, $U = z$	$z = \Phi[\phi(x,t); t]$
5	$(1 - Z_x Z_t)[Z_t^2 Z_{xx} + (1+Z_x)^2 Z_{tt} - 2 Z_t (1+Z_x) Z_{xt}] = -(1+Z_t)(1+Z_x)^2$	$\xi = x + t + z$, $U = z$, $\eta = x + z$.	$x = \Phi[x+t+z; x+z]$

Продолжение таблицы I

I	II	III	IУ
6	$z_{xx} + z_{tt} - 2z_{xt} = z_t(1 + z_x - z_t)^2$	$u = z,\ \xi = x + z,\ z = \Phi[x+z;\ x+t]$ $\eta = x + t.$	
7	$(1 - e^x)[z_{xx} - z_t z_x^2] + e^x z_x = 0$	$\xi = z,\ \eta = t,\quad \Phi(z,t) = x - e^x$ $u = x - e^x.$	
8	$z_{xx}(1+z_t)^2 + z_x^2 z_{tt} - 2z_x(1+z_t)z_{xt} = z_t(1+z_x+z_t)^2$	$\xi = x+z,\ u = z,\ z = \Phi(x+z,\ t+z)$ $\eta = t+z.$	III
9	$\phi_z z_t = \phi_{xx} - \phi_t + 2z_x\phi_{xz} + z_x^2\phi_{zz} + z_{xx}\phi_z$	$\xi = x,\ \eta = t,\quad \Phi(x,t) = \phi(x,t,z)$ $u = \phi(x,t,z).$	
10	$\phi_t + \phi_z z_t = [\phi_x + z_x\phi_z]^{-2}\cdot[\phi_{xx} + 2\phi_{xz}z_x + \phi_z z_{xx} + \phi_{zz}z_x^2]$	$u = x,\ \eta = t,\ x = \Phi[\phi(x,t,z);\ t]$ $\xi = \phi(x,t,z).$	

Таблица 2

Уравнения параболического типа, приводимые с помощью точечных замен переменных к рассмотренным в § I гл.II

№ п/п	Исходное уравнение	Подстановка	Полученное уравнение
I	II	III	IУ
I	$U_{xx} = \alpha^2 U_x^2 U_t$	$U = \phi(Z)$	$Z_t = [\phi']^{-2} Z_x^{-2} Z_{xx} + \phi''[\phi']^{-3}$
2	$U_\eta - U_{\xi\xi} = \Lambda(U) U_\xi^2$	$U = X, \xi = Z, \eta = t.$	$Z_t = -\Lambda(X) Z_x^{-1} + Z_x^{-2} Z_{xx}$
3	$U_\eta - U^2 U_{\xi\xi} = 0$	——	$Z_t = X^2 Z_x^{-2} Z_{xx}$
4	$U_\eta - U_{\xi\xi} = U R(\xi)$	——	$Z_t = Z_x^{-2} Z_{xx} + X Z_x R(Z)$
5	$U_\eta - U_{\xi\xi} = - R(\xi)$	——	$Z_t = Z_x^{-2} Z_{xx} + Z_x R(Z)$
6	$U_\eta - U_{\xi\xi} = U_\xi^2 - R(\xi)$	——	$Z_t = Z_x^{-2} Z_{xx} - Z_x^{-1} + Z_x R(Z)$
7	$U_\eta = U_{\xi\xi} + \phi(U) + \phi'(U)\phi^{-1}(U) U_\xi^2$	——	$Z_t = Z_x^{-2} Z_{xx} - \phi(X) Z_x - \frac{\phi'(X)}{\phi(X)} Z_x^{-1}$
8	$U_\eta - U_{\xi\xi} + U U_\xi = 0$	——	$Z_t = Z_x^{-2} Z_{xx} + X$
9	$U_\eta - U_{\xi\xi} + U U_\xi = 0$	$\xi = Z, \eta = t, U = \phi(X).$	$(Z_t - \phi_x) Z_x^2 = Z_{xx} - Z_x \frac{\phi_{xx}}{\phi_x}$
I0	$U_{xx} = U_x^2 U_t (1 - U_t)^{-1}$	$U = - \ln W$	$W_{xx} = W(W + W_t)^{-1}$

Таблица 3

Многомерные параболические уравнения, линеаризация которых осуществляется с помощью нелокальных преобразований

№ п/п	Исходное уравнение	Подстановка	Полученное уравнение
I	$U_t = U_{xx} + U_{yy}$	$U = Z^{-1}(Z_x + Z_y)$	$Z_t = -Z^{-1}(Z_x^2 + Z_y^2) + Z_{xx} + Z_{yy}$
2	———	$U = [1 + Z_x + Z_y]e^Z$	$Z_t = Z_x^2 + Z_y^2 + Z_{xx} + Z_{yy}$
3	———	$U = -(Z_x + Z_y)$	$Z_t = -hZ^{-2} + Z_{xx} + Z_{yy}$
4	$2U_t + U(U_x + U_y) = U_{xx} + U_{yy}$	$U = -\frac{Z_x + Z_y}{Z + \ell}$; $Z_x = Z_y$	$2Z_t = Z_{xx} + Z_{yy}$
5	$2U_t + e^U \cdot (U_x + U_y) - (U_x^2 + U_y^2) = U_{xx} + U_{yy}$	$U = \ln(Z_x + Z_y) - \ln Z$; $Z_x = Z_y$	———
6	$2U_t U^{-2} = U_{xx} + U_{yy}$	$U = 2(Z_x + Z_y)^{-1}$; $Z_x = Z_y$	$Z_t(Z_x^2 + Z_y^2) = Z_{xx} + Z_{yy}$
7	$U_t(U_x^2 + U_y^2) = U_{xx} + U_{yy}$	$U = \ln \frac{1}{2}(Z_x + Z_y) + Z$; $Z_x = Z_y$	$Z_t(Z_x^2 + Z_y^2)(1 - Z_t)^{-1} = Z_{xx} + Z_{yy}$

Таблица 4

Алгебры Ли инвариантности уравнений теплопроводности и Бюргерса

№ п/п	Уравнение	Операторы алгебры Ли
		$x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = u$, $p_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $(\mu = 0,1,2)$
I	$u_0 = u_{11}$	$X_1 = p_0$, $X_2 = p_1$, $X_3 = x_2 p_2$,
		$X_4 = 2x_0 p_0 + x_1 p_1$, $X_5 = 2x_0 p_1 - x_1 x_2 p_2$,
		$X_6 = 4x_0^2 p_0 + 4x_0 x_1 p_1 - (2x_0 + x_1^2) x_2 p_2$,
		$X_7 = C(x_0, x_1) p_2$, $C_0 = C_{11}$.
2	$u_0 + uu_1 = u_{11}$	$X_1 = p_0$, $X_2 = p_1$, $X_3 = x_0 p_1 + p_2$,
		$X_4 = 2x_0 p_0 + x_1 p_1 - x_2 p_2$,
		$X_5 = x_0^2 p_0 + x_0 x_1 p_1 + (x_1 - x_0 x_2) p_2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Таблица I

Некоторые нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, допускающие линеаризацию [48, 49]

№ п/п	Нелинейное уравнение	Линейное уравнение	Подстановка
I	II	III	IУ
I	$\ddot{y} + B(y)\dot{y}^2 + \Phi(y) = 0$	$\ddot{z} + k z = 0$	$z = c_1 \exp k \int B^{-1} dy$
	$\Phi = \exp(-\int B\,dy)\{c_2 + k\int \exp\int B dy\, dy\}$	$\dot{z} + k z = 0$	$z = c_1\{k^{-1}\Phi \exp\int B\,dy + \dot{y}\exp\int B\,dy\}$
2	$\ddot{y} - (3y^2 - k)y^{-3}\dot{y}^2 + y^3 = 0$	$\ddot{z} + k z = 0$	$z = c_1 \exp(-\frac{1}{2}k y^{-2})$
3	$\ddot{y} + B(y)\dot{y} + \Omega(y) = 0$	$\dot{z} + k z = 0$	$z = k^{-1}\psi\Omega + \psi\dot{y} + \frac{1}{2}c_1\dot{y}^2$
	$\Omega = -\int\{c_1\psi^{-1}(B + \frac{1}{2}k) - k(B - k)\}dy$		$\psi = c_1\int(B - \frac{1}{2}k)dy + c_2$
4	$\ddot{y} + c_1 = 0$	$\dot{z} + k z = 0$	$z = c_2 \exp(k\dot{y}c_1^{-1})$
5	$\ddot{y} + Q(y)\dot{y}^2 = 0$	$\ddot{Z}(\varepsilon) + kZ(\varepsilon) = 0$	$\varepsilon = y$, $z = A(y)\cdot(x + 1)$, $A'' + [Q - 2A'A^{-1}]A' = kA$

I	II	III	IV
6	$\ddot{y} + N(y)\dot{y} + R(y) = 0$ $N = 2\psi_x,\ R = y[\psi_{xx} + \psi_x^2 + k\xi_x^2]$	$\ddot{Z}(\xi) + kZ(\xi) = 0$	$\xi = \xi(x),\ Z = \eta(x,y)$ $\eta = y \cdot \exp\psi(x)$
7	$\ddot{y} + Q(y)\dot{y}^2 + R(y) = 0$ $R_y + RQ = k$	$\ddot{Z}(\xi) + kZ(\xi) = 0$	$Z = \exp\int R^{-1} k\,dy = \eta$ $\xi = x,\ Q = \eta_{yy}\eta_y^{-1}$
8	$\ddot{y} + Q(y)\dot{y}^2 + R(y) = 0$	$\dot{Z}(\xi) + kZ(\xi) = 0$	$\xi = 2c\int R\exp(2\int Q\,dy)dy -$ $-k^{-1}\ln\eta + \dot{y}^2 c\exp 2\int Q\,dy,$ $Z = \eta(y)$
9	$\ddot{y} + R(y) = 0$	$\dot{Z}(\xi) + kZ(\xi) = 0$	$Z = \eta(y),\ \xi = 2c_1\int R\,dy -$ $-k^{-1}\ln\eta + c_1\dot{y}^2$