

Національна академія наук України
Інститут математики

На правах рукопису

ТУЛУПОВА Лариса Олександрівна
**ЛІЇВСЬКА ТА УМОВНА
СИМЕТРІЯ
НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ
ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ**

01.01.03 – математична фізика

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Наукові керівники
член-кореспондент НАН України,
доктор фіз-мат наук, професор
ФУЩИЧ В. І.,
доктор фіз-мат наук, професор
СЄРОВ М. І.

Київ – 1997

Зміст

Вступ	3
1 Симетрійна класифікація і розв'язки нелінійних рівнянь параболічного типу.	10
§ 1.1 Узагальнені рівняння Нав'є-Стокса	10
1.1.1 Симетрійна класифікація рівнянь 1.1	12
1.1.2 Симетрія рівнянь 2.1	16
§ 1.2 Рівняння Нав'є – Стокса для потенціалу.	18
§ 1.3 Нелінійна система рівнянь двофазної рідини	32
§ 1.4 Узагальнене рівняння Бюргерса	46
§ 1.5 Узагальнене рівняння Кортевега -де Фріза	54
2 Умовна інваріантність деяких рівнянь параболічного типу.	58
§ 2.1 Нелінійне рівняння дифузії	58
§ 2.2 Рівняння Нав'є - Стокса.	65
§ 2.3 Нелінійна система рівнянь двофазної рідини	76
Підсумки	83
Література	85

Вступ

Однією з найважливіших задач математичної фізики є знаходження точних розв'язків диференціальних рівнянь, які описують реальні фізичні процеси. Більшості таких процесів притаманні властивості регулярності (симетрії). Взагалі, принципи симетрії посідають основне місце в науковому вивченні світу - закони збереження енергії, імпульсу, моменту кількості руху є наслідками однорідності та ізотропності чотирьохвимірному простору-часу. І тому можна розглядати симетрію як принцип, за яким з усіх можливих станів (рівнянь) фізичної системи відбираємо тільки ті, яким властива симетрія. На сьогодні створено велику кількість спеціальних методів для розв'язання різних типів звичайних диференціальних рівнянь - таких, як однорідні рівняння або рівняння в повних диференціалах, а також ефективних методів для розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних: відокремлення змінних, спеціальних підстановок, інтегралів енергії, Пуассона, розкладу до рядів Фур'є, оберненої задачі теорії розсіювання, спуску Адамара та інших. Всі ці методи розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних засновані на ідеях симетрії і застосовуються для розв'язку тих задач, рівняння яких мають симетрію.

Щодо звичайних диференціальних рівнянь, то всередині минулого століття видатний норвезький математик Софус Лі зробив відкриття, яке мало великі наслідки. Це відкриття полягало в тому, що всі спеціальні методи є тільки частинними випадками загальної процедури інтегрування, яка оснований на інваріантності диференціального рівняння відносно деякої неперервної групи симетрії.

Крім теорії симетрії диференціальних рівнянь Софусом Лі були також запропоновані і розроблені основні методи дослідження групових властивостей диференціальних рівнянь в частинних похідних. Вивчення симетрійних властивостей рівняння дозволяє одержати ва-

жливу інформацію про процес, який це рівняння описує.

Фундаментальне відкриття Лі полягає в тому, що складні нелінійні умови інваріантності диференціальних рівнянь відносно перетворень з групи можна у випадку неперервних груп замінити еквівалентними, але значно простішими лінійними умовами, які відображають "інфінітезімальну інваріантність" цієї системи відносно перетворень. Майже для кожної системи математичної фізики ці умови інфінітезімальної симетрії - визначальні рівняння повної групи симетрій системи - можна розв'язати явно в замкненому вигляді, тобто найбільш загальна група неперервних симетрій системи може бути визначена явно.

Коли знайдено повну групу симетрій системи диференціальних рівнянь, можна розв'язувати такі задачі:

- розмноження розв'язків;
- знаходження інваріантних розв'язків за їх симетрійними властивостями;
- класифікація диференціальних рівнянь відносно даної групи перетворень;
- знаходження законів збереження, інтегралів руху;
- зменшення кількості змінних диференціального рівняння та деякі інші.

Взагалі кажучи, теорія неперервних груп симетрій має значні переваги за інші методи, які придатні до розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних. Це – можливість одержання точних розв'язків одно – та багатовимірних рівнянь та систем, не тільки лінійних, але й тих, в склад яких входять довільні нелінійності. На жаль, виникають певні складності знаходження розв'язків рівнянь з врахуванням конкретних граничних умов.

Багато дослідників використовували і розвивали теорію Софуса Лі. Вперше його ідеї були застосовані Пуанкаре (1905 р.) до системи рівнянь Максвела. В 1918 році Е. Ньотер довела дві чудові теореми, які пов'язували групи симетрії з законами збереження. Г. Бейтман ефективно використав симетрію лінійного хвильового рівняння для одержання його точних розв'язків. Роботи В.І. Смирнова і С.Л. Соболева (1932 р.) були присвячені побудові та застосуванню функціонально – інваріантних розв'язків лінійного хвильового рів-

няння. Принципово нові ідеї знаходження інваріантних розв'язків були запропоновані Г. Біркгофом. Подальший розвиток теорія С. Лі набула в роботах Л.В. Овсяннікова і його школи. Ними була створена теорія інваріантних і частково-інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь. Важливі результати були одержані Н.Х. Ібрагімовим [14, 16, 15, 17], П. Олвером [26, 82], П. Вінтерніцем [85, 83, 84], Блуменом та Коулом [70, 68, 69], а також багатьма іншими авторами.

Новий підхід до дослідження алгебр інваріантності диференціальних рівнянь розроблено В.І. Фушичем і його школою [39, 37, 38, 41, 42, 43, 45, 65, 40]. Так головна відмінність неліївського методу дослідження симетрій диференціальних рівнянь від класичного полягає в тому, що базисні елементи алгебри інваріантності даних рівнянь є інтегродиференціальними операторами. Цей метод дослідження симетрійних властивостей рівнянь дозволив знайти нові симетрії багатьох добре відомих рівнянь квантової механіки: Дірака [58], Максвелла [46], Ламе [60] тощо.

Також В.І. Фушичем та його учнями розроблено метод умовної симетрії [65, 39]. За допомогою цього методу можна одержати такі підмножини розв'язків диференціальних рівнянь, симетрія яких ширше, а іноді і зовсім відрізняється від симетрії всієї множини розв'язків. Результати досліджень умовної симетрії деяких конкретних рівнянь представлені в роботах [49, 50, 44, 62, 73]. Другий розділ даної дисертації присвячено вивченню та застосуванню саме цього методу.

Поряд з вищезгаданими методами школою Фушича проводяться дослідження нелокальної і негрупової симетрій диференціальних рівнянь [47, 53].

Основний об'єкт дослідження

Дисертація присвячена дослідженню симетрійних властивостей одновимірних та багатовимірних нелінійних диференціальних рівнянь та систем математичної фізики параболічного типу. Головна увага зосереджена на класифікації цих рівнянь і систем відносно групи Галілея та конформної групи і застосуванню методу умовної симетрії для дослідження інваріантності і класифікації диференціальних рівнянь.

Для всіх рівнянь, які досліджено в роботі, знайдені інваріанти, побудовані анзаци, проведена редукція; для більшості рівнянь одержані точні розв'язки. Анзаци, за допомогою яких були редуктовані диференціальні рівняння, побудовані як за ліївськими операторами, так і за операторами умовної симетрії. Також були побудовані формули розмноження розв'язків деяких нелінійних диференціальних рівнянь.

Структура і обсяг роботи.

Дисертація складається з вступу, двох розділів і підсумків, загальним обсягом 94 сторінки. Список літератури містить 90 назв.

Короткий зміст роботи

Перший розділ дисертації присвячено вивченню ліївської симетрії нелінійних рівнянь і систем параболічного типу - узагальнених рівнянь Нав'є - Стокса та рівнянь Нав'є - Стокса для потенціалу, нелінійної системи рівнянь двофазної рідини, рівнянь Бюргерса та Кортевега - де Фріза.

В першому параграфі цього розділу проведена симетрійна класифікація узагальнених рівнянь Нав'є - Стокса:

$$\begin{cases} \vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} + \lambda\Delta\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p; \\ \rho_0 + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0; \\ p = f(\rho, \vec{u}), \end{cases}$$

як в одно -, так і в багатовимірному випадках.

Розглядалися узагальнення двох типів: $f = f(\rho, \vec{\nabla}\rho)$ і $f = f(\rho, \vec{u})$. З результатів дослідження симетрії цих рівнянь випливає, що, якщо припустити, що тиск рідини залежатиме не тільки від густини рідини, але й від швидкості зміни густини або від швидкості руху самої рідини, то при тій самій симетрії, що й для класичного випадку (тиск залежить тільки від густини рідини) клас нелінійностей в рівняннях Нав'є - Стокса стає значно ширшим.

В другому параграфі вивчені симетрійні властивості системи Нав'є - Стокса для потенціалу:

$$\begin{cases} w_0 + \frac{1}{2}w_a w_a + \lambda w_{aa} = H(\rho); \\ \rho_0 + \rho_a w_a + \rho w_{aa} = 0. \end{cases}$$

Цю систему одержано з класичних рівнянь Нав'є - Стокса при переході від векторного поля $\vec{u}$ до його потенціалу w . Була проведена редукція цієї системи в трьохвимірному просторі при $H(\rho) = m\rho^{2/3}$ до системи диференціальних рівнянь в частинних похідних з меншою кількістю змінних. Використавши розв'язки редукованих систем і зробивши перехід від потенціалу w до векторного поля $\vec{u}$ були побудовані точні розв'язки рівнянь Нав'є - Стокса. В параграфі також були побудовані формули розмноження розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса.

В наступному третьому параграфі досліджені симетрійні властивості багатовимірної нелінійної системи рівнянь двофазної рідини

$$\begin{cases} u_0 = f(v)\Delta u; \\ v_0 = \Delta u. \end{cases}$$

Була проведена класифікація цих рівнянь в залежності від вигляду нелінійності. В трьохвимірному випадку, при $f(v) = \lambda v^{-4/5}$ були знайдені інваріанти, за якими побудовані анзаци. За їх допомогою система двофазної рідини була редукована, що дозволило знайти точні розв'язки. Причому при знаходженні інваріантів використано ізоморфізм максимальної алгебри інваріантності $AC(3)$ системи

$$\begin{cases} u_0 = \lambda v^{4/5} \Delta u; \\ v_0 = \Delta u. \end{cases}$$

алгебрі $AO(1, 4)$. Цей ізоморфізм здійснюється за формулою

$$\vec{x} = \frac{\vec{z}}{z_4 - z_0},$$

переходом від простору $\vec{x} \in R_3$ до простору $z = z(z_0, \vec{z}, z_4) \in R_{1+4}$.

В четвертому параграфі розглядається узагальнене рівняння Бюргера

$$u_0 + u_{11} = F(u, u_1).$$

Проведена класифікація нелінійностей $F(u, u_1)$, при яких зберігається інваріантність відносно алгебри Галілея. Досліджено редукцію цього рівняння при деяких значеннях функції $F(u, u_1)$.

В останньому п'ятому параграфі першого розділу проведена класифікація симетрійних властивостей узагальненого рівняння Кортевега - де Фріза

$$u_0 + \lambda u u_1 + u_{111} = F(u, u_1)$$

в залежності від нелінійності $F(u, u_1)$. Знайдені інваріанти і проведена редукція цього рівняння при $F(u, u_1) = \lambda u_1^{5/3}$, коли рівняння має найбільш широку симетрію.

Другий розділ дисертації присвячено вивченню та застосуванню умовної симетрії до дослідження деяких параболічних рівнянь і систем -нелінійного рівняння дифузії, рівнянь Нав'є-Стокса та системи двофазної рідини.

В першому параграфі досліджено умовну симетрію нелінійного рівняння дифузії

$$H(u)u_0 + u_{11} = F(u).$$

Знайдені оператори умовної інваріантності, побудовані анзаци, проведена редукція і одержані точні розв'язки рівняння. Доведені теореми про умовну інваріантність рівняння дифузії при деяких особливих нелінійностях.

В другому параграфі розглянуто систему рівнянь Нав'є - Стокса. Було знайдено ряд операторів умовної симетрії одновимірних та n - вимірних рівнянь, за якими побудовані анзаци і редуковано систему Нав'є-Стокса до системи звичайних диференціальних рівнянь, що дало змогу знайти точні розв'язки. Виявилось, що деякі одновимірні оператори не підлягають n -вимірному узагальненню, а деякі - можуть бути узагальнені кількома різними способами.

В третьому параграфі ще раз звертаємось до нелінійної системи рівнянь двофазної рідини. Тут була досліджена умовна симетрія цієї системи. Знайдені оператори дали змогу побудувати анзаци і проредувати вихідну систему. Вдалося знайти деякі нові класи точних розв'язків.

Апробація роботи.

Результати, які викладені в дисертації, надруковані в 8 роботах. Вони доповідались на семінарах відділу прикладних досліджень Інституту математики НАН України, на наукових семінарах кафедри вищої математики Полтавського технічного університету, на наукових конференціях Полтавського ТУ та Полтавського державного педагогічного інституту, на міжнародній конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Київ, 1995).

Висловлюю щирю вдячність і подяку моїм науковим керівникам члену-кор. НАН України Фушичу Вільгельму Іллічу та професору Серову Миколі Івановичу за постановку задач, постійну увагу до роботи, наукове співробітництво, вимогливість та підтримку.

Розділ 1

Симетрійна класифікація і розв'язки нелінійних рівнянь параболічного типу.

Ліівська симетрія диференціальних рівнянь застосовується для розв'язання багатьох різних задач. Однією з найбільш важливих задач є знаходження інваріантних розв'язків рівнянь.

Цей розділ присвячено дослідженню ліівської симетрії деяких нелінійних рівнянь параболічного типу, а також симетрійній класифікації цих рівнянь.

За допомогою інваріантів груп Галілея, Пуанкаре та конформної побудовані анзаци, проведена редукція і знайдені класи точних розв'язків нелінійних рівнянь Нав'є – Стокса, двофазної рідини, Кортевега - де Фріза, Бюргерса.

§ 1.1 Узагальнені рівняння Нав'є-Стокса

Розглянемо систему рівнянь Нав'є – Стокса

$$\begin{cases} \vec{u}_0 + (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} + \lambda \Delta \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p; \\ \rho_0 + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0; \\ p = f(\rho), \end{cases} \quad (1.1)$$

де $\vec{u} = \vec{u}(x) \in R_n, \rho = \rho(x) \in R_1; p = p(x) \in R_1; x = (x_0; \vec{x}) \in R_{1+n}$.

Лієвська симетрія рівняння (1.1) добре вивчена (дивись, наприклад, [64]). Результати цих досліджень можна сформулювати у вигляді наступного твердження.

Теорема 1.1 *Максимальна алгебра інваріантності рівняння (1.1) складається з операторів:*

$$1. \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad G_a = x_0 \partial_a + \partial_{u^a},$$

$$J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a + u^a \partial_{u^b} - u^b \partial_{u^a},$$

$$\text{якщо } F(\rho)\text{-довільна гладка функція, де } F(\rho) = \frac{\dot{f}(\rho)}{\rho};$$

(1.2)

$$2. \partial_0, \quad \partial_a, \quad G_a, \quad J_{ab}, \quad D_1 = \rho \partial_\rho, \quad D_2 = 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a - u^a \partial_{u^a},$$

$$\text{якщо } F(\rho) = 0;$$

$$3. \partial_0, \quad \partial_a, \quad G_a, \quad J_{ab}, \quad D_3 = 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a - \frac{2}{k+1} \rho \partial_\rho - u^a \partial_{u^a},$$

$$\text{якщо } F(\rho) = \lambda \rho^k, (k - \text{довільне});$$

$$4. \partial_0, \quad \partial_a, \quad G_a; \quad J_{ab}; \quad D_4 = 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a - n \rho \partial_\rho - u^a \partial_{u^a};$$

$$\Pi = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_a \partial_a - n x_0 \rho \partial_\rho + (x_a - x_0 u^a) \partial_{u^a},$$

$$\text{якщо } F(\rho) = \lambda \rho^{\frac{2-n}{n}}.$$

В цьому параграфі проведена класифікація симетрійних властивостей узагальнених рівнянь Нав'є-Стокса

$$\begin{cases} \vec{u}_0 + (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} + \lambda \Delta \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p; \\ \rho_0 + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0; \\ p = f(\rho; \vec{\nabla} \rho) \end{cases} \quad (1.3)$$

та

$$\begin{cases} \vec{u}_0 + (\vec{u} \vec{\nabla}) \vec{u} + \lambda \Delta \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p; \\ \rho_0 + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0; \\ p = f(\rho; \vec{u}). \end{cases} \quad (1.4)$$

Симетрійні властивості систем (1.3) та (1.4) досліджені в залежності від вигляду функції f .

1.1.1 Симетрійна класифікація рівнянь 1.1

Розглянемо спочатку одновимірний випадок системи (1.3). Якщо $x = (x_0, x_1)$, $u = u(x)$ та $\rho = \rho(x)$, то система (1.3) має вигляд

$$\begin{cases} u_0 + uu_1 + \lambda u_{11} + F^1 \rho_{11} = 0; \\ \rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1 = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

де

$$\begin{aligned} F^0(\rho; \rho_1) &= \frac{1}{\rho} f_\rho(\rho; \rho_1), \\ F^1(\rho; \rho_1) &= \frac{1}{\rho} f_{\rho_1}(\rho; \rho_1). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Має місце таке твердження.

Теорема 1.2 Максимальна алгебра інваріантності рівнянь (1.5) складається з операторів

$$1. \partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0 \partial_1 + \partial_u,$$

якщо $f(\rho; \rho_1)$ - довільна диференційовна функція;

$$2. \partial_0, \quad \partial_1, \quad G,$$

$$D_1 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + \frac{2}{1-k} \rho \partial_\rho - u \partial_u, \quad (k = \text{const}),$$

$$\text{коли } f = \rho^k H \left(\rho_1 \rho^{-\frac{k+1}{2}} \right), \quad H \in C^\infty;$$

$$3. \partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D_2 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - \rho \partial_\rho - u \partial_u;$$

$$\Pi = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 - x_0 \rho \partial_\rho + (x_1 - u x_0) \partial_u,$$

$$\text{коли } f = \rho^3 H \left\{ \frac{\rho_1}{\rho^2} \right\}, \quad H \in C^\infty;$$

$$4. \partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D_2, \quad \Pi, \quad D_3 = \rho \partial_\rho,$$

$$\text{коли } f = \lambda \frac{\rho_1^2}{\rho}.$$

Доведення. Нехай

$$\begin{aligned} X = & \xi^0(x_0, x_1, \rho, u) \partial_0 + \xi^1(x_0, x_1, \rho, u) \partial_1 + \\ & + \eta^0(x_0, x_1, \rho, u) \partial_\rho + \eta^1(x_0, x_1, \rho, u) \partial_u \end{aligned} \quad (1.7)$$

– інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (1.5).
З умови інваріантності

$$\tilde{X}S_1 \left| \begin{array}{l} S_1=0 \\ S_2=0 \end{array} \right. = 0; \quad \tilde{X}S_2 \left| \begin{array}{l} S_1=0 \\ S_2=0 \end{array} \right. = 0; \quad (1.8)$$

де $\tilde{X}$ - продовження оператора X (див. [65, 24, 25]), а S_1 і S_2 відповідно перше і друге рівняння системи (1.5), одержуємо визначальні рівняння для координат оператора (1.7) та функцій $F^0(\rho; \rho_1)$ і $F^1(\rho; \rho_1)$:

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= \xi_\rho^0 = \xi_u^0 = 0; & \xi_0^1 &= \xi_\rho^1 = \xi_u^1 = 0; & \xi_0^0 &= 2\xi_1^1; \\ \eta_0^0 &= 0; & \eta_{uu}^1 &= 0; & \eta^1 + u\xi_1^1 - \xi_0^1 + \rho\eta_\rho^1 &= 0; \\ \eta^0 &= \rho(\eta_\rho^0 - \eta_u^1 - \xi_1^1); & \eta_0^0 + u\eta_1^0 + \rho\eta_1^1 &= 0; \\ \rho\eta_\rho^1 &= \lambda(\eta_{1u}^1 + \rho_1\eta_{\rho u}^1). \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \eta_0^1 + u\eta_1^1 + \lambda\eta_{11}^1 + F^0\eta_1^0 + F^1\eta_{11}^0 &= 0; \\ F^1(\eta_\rho^0 - \eta_u^1) + F_\rho^1\eta^0 + F_{\rho_1}^1(\eta_1^0 + \rho_1\eta_\rho^0 - \rho_1\xi_1^1) &= 0; \\ F^0(\eta_\rho^0 - \eta_u^1 + \xi_1^1) + F_\rho^0\eta^0 + F_{\rho_1}^0(\eta_1^0 + \rho_1\eta_\rho^0 - \rho_1\xi_1^1) + \\ + \lambda(2\eta_{1\rho}^1 + \rho_1\eta_{\rho\rho}^1) + F^1(2\eta_{1\rho}^0 + \rho_1\eta_{\rho\rho}^0) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Загальним розв'язком системи визначальних рівнянь (1.9) є функції

$$\begin{cases} \xi^0 = ax_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0; \\ \xi^1 = ax_0x_1 + \kappa x_1 + gx_0 + d_1; \\ \eta^0 = -\rho(ax_0 + \kappa + \tau); \\ \eta^1 = a(x_1 - ux_0) + g - \kappa u \end{cases} \quad (1.11)$$

а функції $F^0(\rho; \rho_1)$ та $F^1(\rho; \rho_1)$ задовольняють умовам

$$\begin{cases} \tau F^1 + \rho F_\rho^1(ax_0 + \kappa + \tau) + \rho_1 F_{\rho_1}^1(2ax_0 + 2\kappa + \tau) = 0; \\ -F^0(ax_0 + \kappa - \tau) + \rho F_\rho^0(ax_0 + \kappa + \tau) + \\ + \rho_1 F_{\rho_1}^0(2ax_0 + 2\kappa + \tau) = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

В тому випадку, коли функція $f(\rho; \rho_1)$, а також відповідно і функції $F^0(\rho; \rho_1)$ та $F^1(\rho; \rho_1)$, будуть довільними, то, як видно з (1.12), максимальна алгебра інваріантності буде складатися з операторів ∂_0, ∂_1 і G .

Щоб знайти функції F^0, F^1 та f , при яких максимальна алгебра інваріантності системи (1.5) визначається операторами $\partial_0, \partial_1, G$ та D_1 , треба розв'язати систему

$$\begin{cases} (3-k)F^1 + 2\rho F_\rho^1 + (k+1)\rho_1 F_{\rho_1}^1 = 0; \\ 2(2-k)F^0 + 2\rho F_\rho^0 + (k+1)\rho_1 F_{\rho_1}^0 = 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Звідки, враховуючи умови (1.6), знаходимо $f = \rho^k H \left\{ \rho_1 \rho^{-\frac{k+1}{2}} \right\}$.

У випадку, коли функція $f = \rho^3 H(\omega)$, де $\omega = \frac{\rho_1}{\rho^2}$, а $H \in C^\infty$, система рівнянь, що визначають функції F^0 та F^1 , набуває вигляду

$$\begin{cases} \rho F_\rho^1 + 2\rho_1 F_{\rho_1}^1 = 0; \\ F^0 - \rho F_\rho^0 - 2\rho_1 F_{\rho_1}^0 = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

а максимальна алгебра інваріантності рівнянь (1.5) включає в себе оператори $\partial_0, \partial_1, G, D_2$ та Π .

З формул (1.11) випливає, що базис найбільш широкої алгебри інваріантності системи рівнянь (1.5) задається операторами $\partial_0, \partial_1, G, D_2, D_3$ та Π . При цьому функції F^0 і F^1 повинні задовольняти системі

$$\begin{cases} \rho F_\rho^1 + 2\rho_1 F_{\rho_1}^1 = 0; \\ F^0 - \rho F_\rho^0 - 2\rho_1 F_{\rho_1}^0 = 0; \\ F^1 + \rho F_\rho^1 + \rho_1 F_{\rho_1}^1 = 0; \\ F^0 + \rho F_\rho^0 + F_{\rho_1}^0 = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Загальним розв'язком (1.15) будуть функції

$$F^1 = 2\lambda \frac{\rho_1}{\rho^2}, \quad F^0 = -\lambda \frac{\rho_1^2}{\rho^3}, \quad f = \lambda \frac{\rho_1^2}{\rho}, \quad (\lambda = \text{const}).$$

Теорему доведено.

Вивчимо тепер симетрію багатовимірною узагальненого рівняння Нав'є – Стокса (1.3):

$$\begin{cases} \vec{u}_0 + \left(\vec{u} \vec{\nabla} \right) \vec{u} + \lambda \Delta \vec{u} + F^0 \vec{\nabla} \rho + \left(\vec{F} \vec{\nabla} \right) \left(\vec{\nabla} \rho \right) = 0; \\ \rho_0 + \operatorname{div} (\rho \vec{u}) = 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

де

$$F^0 = \frac{1}{\rho} f_\rho;$$

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho} f \vec{\nabla} \rho.$$

Справедливе таке твердження.

Теорема 1.3 *Максимальна алгебра інваріантності системи рівнянь (1.16) складається з операторів*

1. $\partial_0, \quad \partial_a,$

при довільній функції $f = f(\rho; \vec{\nabla} \rho);$

2. $\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a + u^a \partial_b - u^b \partial_a; \quad G_a = x_0 \partial_a + \partial_{u^a},$
якщо $f = f\left(\rho; \left(\vec{\nabla} \rho\right)^2\right);$

3. $\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab}, \quad G_a,$

$$D_1 = 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a + \frac{2}{1-k} \rho \partial_\rho - u^a \partial_{u^a},$$

коли $f = \rho^k H(\omega), \omega = \left(\vec{\nabla} \rho\right)^2 \rho^{-(k+1)}, \quad k \neq \frac{n+2}{n}, \quad \text{де } H \in C^\infty;$

4. $\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab}, \quad G_a, \quad D_1,$

$$\Pi = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_a \partial_a - \frac{2}{1-k} x_0 \rho \partial_\rho + (x_a - u^a x_0) \partial_{u^a},$$

коли $f = \rho^k H(\omega), \omega = \left(\vec{\nabla} \rho\right)^2 \rho^{-(k+1)}, \quad \text{де } k = \frac{n+2}{n}; \quad H \in C^\infty;$

5. $\partial_0, \quad \partial_a, \quad J_{ab}, \quad G_a, \quad D_1, \quad \Pi, \quad D_2 = \rho \partial_\rho,$

коли $f = \frac{\lambda}{\rho} \left(\vec{\nabla} \rho\right)^2.$

Доведення даної теореми аналогічне доведенню теореми (1.2).

1.1.2 Симетрія рівнянь 2.1

Розглянемо одновимірний випадок узагальнених рівнянь Нав'є – Стокса (1.4):

$$\begin{cases} u_0 + uu_1 + \lambda u_{11} + F^0 \rho_1 + F^1 u_1 = 0; \\ \rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1 = 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

де

$$\begin{aligned} F^0(\rho; \rho_1) &= \frac{1}{\rho} f_\rho(\rho; u), \\ F^1(\rho; \rho_1) &= \frac{1}{\rho} f_u(\rho; u). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Аналогічно, як і для рівнянь (1.5), доводиться така теорема.

Теорема 1.4 *Максимальна алгебра інваріантності рівнянь (1.17) складається з операторів*

1. ∂_0, ∂_1 ,
при довільній функції $f = f(\rho; \rho_1)$;
2. $\partial_0, \partial_1, G_1 = x_0 \partial_1 + \partial_u$,
коли $f = \lambda_1 u + H(\rho)$, де $H(\rho) \in C^\infty$;
3. $\partial_0, \partial_1, G_2 = x_0 \partial_1 + \lambda_1 \rho \partial_\rho + \partial_u$,
коли $f = \rho H(\lambda_1 u + \ln \rho) + \lambda_2$, де $H(\lambda_1 u + \ln \rho) \in C^\infty$;
4. $\partial_0, \partial_1, D_1 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + \frac{2}{1-k} \rho \partial_\rho - u \partial_u, (k = \text{const})$,
коли $f = \rho^k H \left\{ u \rho^{\frac{1-k}{2}} \right\} + \lambda_1, H \in C^\infty$;
5. $\partial_0, \partial_1, D_2 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - u \partial_u$,
коли $f = u^2 H(\rho) + \lambda_2, H \in C^\infty$;
6. $\partial_0, \partial_1, D_2, D_3 = \rho \partial_\rho$,
коли $f = \lambda_1 \rho u^2 + \lambda_2$;
7. $\partial_0, \partial_1, G, D_4 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + \rho \partial_\rho - u \partial_u$,
коли $f = \lambda_1 u + \frac{\lambda_2}{\rho} + \lambda_3$.

В випадку довільної кількості просторових змінних $\vec{x} \in R_n$ система (1.4) має вигляд:

$$\begin{cases} \vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla}) \vec{u} + \lambda \Delta \vec{u} + F^0 \vec{\nabla} \rho + (\vec{F}\vec{\nabla}) \vec{u} = 0; \\ \rho_0 + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

де

$$\begin{aligned} F^0 &= \frac{1}{\rho} f_\rho; \\ \vec{F} &= \frac{1}{\rho} f_{\vec{u}}. \end{aligned}$$

Теорема 1.5 *Максимальна алгебра інваріантності системи рівнянь (1.18) визначається операторами*

1. ∂_0, ∂_a ,
при довільній функції $f = f(\rho; \vec{u})$;
2. $\partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a + u^a \partial_b - u^b \partial_a$;
коли $f = f(\rho; (\vec{u})^2) \in C^\infty$;
3. $\partial_0, \partial_a, J_{ab}, D_1 = 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a + \frac{2}{1-k} \rho \partial_\rho - u^a \partial_{u^a}, (k = \text{const})$,
коли $f = \rho^k H(\omega), \omega = (\vec{u})^2 \rho^{\frac{1-k}{2}}, \text{ де } H \in C^\infty$;
4. $\partial_0, \partial_a, J_{ab}, D_2 = 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a - u^a \partial_{u^a}$,
коли $f = (\vec{u})^2 H(\rho) + \lambda_1, H \in C^\infty$;
5. $\partial_0, \partial_a, J_{ab}, D_2, D_3 = \rho \partial_\rho$,
коли $f = \lambda_1 (\vec{u})^2 \rho + \lambda_2$.

Треба відмітити, що симетрія рівнянь Нав'є-Стокса (1.4) в багатовимірному випадку "бідніша" за одновимірний. Одновимірні рівняння є особливим випадком рівнянь (1.4).

З результатів досліджень випливає, що, якщо припустити, що тиск рідини залежить не тільки від її густини, але й від зміни густини, а також від швидкості руху рідини, то при тих самих симетрійних властивостях, що й для класичного випадку клас нелінійностей в рівняннях Нав'є-Стокса вдається значно розширити.

§ 1.2 Рівняння Нав'є – Стокса для потенціалу.

Якщо в системі (1.1)

$$\begin{cases} \vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} + \lambda\Delta\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\rho; \\ \rho_0 + \operatorname{div}(\rho\vec{u}) = 0; \\ p = f(\rho), \end{cases}$$

перейти від векторного поля $\vec{u}$ до його потенціалу w , тобто зробити заміну

$$\vec{u} = \vec{\nabla}w, \quad (1.20)$$

і після цього проінтегрувати одержані рівняння, то система (1.1) виглядатиме так

$$\begin{cases} w_0 + \frac{1}{2}w_a w_a + \lambda w_{aa} = H(\rho); \\ \rho_0 + \rho_a w_a + \rho w_{aa} = 0, \end{cases} \quad (1.21)$$

де $H(\rho) = -\frac{1}{\rho}f(\rho)$.

В цьому параграфі проведено класифікацію симетрійних властивостей системи (1.21) в залежності від вигляду функції $H(\rho)$. Побудовані анзаци і проведена редукція цієї системи до звичайних диференціальних рівнянь при $n = 3$ та $H(\rho) = m\rho^{2/3}$, а також знайдені розв'язки вихідної системи Нав'є – Стокса (1.1).

Теорема 1.6 *Максимальна алгебра інваріантності рівнянь (1.21) складається з операторів:*

$$1. \quad \partial_0; \quad \partial_a; \quad \partial_w; \quad G_a = x_0\partial_a + x_a\partial_w; \quad J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b; \quad (1.22)$$

$$D_1 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - n\rho\partial_\rho;$$

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_a\partial_a - nx_0\rho\partial_\rho + \left(\frac{\vec{x}^2}{2} - \lambda nx_0\right)\partial_w,$$

коли $H(\rho) = m\rho^{2/n}$;

$$2. \quad \partial_0; \quad \partial_a; \quad \partial_w; \quad G_a; \quad J_{ab}; \quad D_2 = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \frac{2}{k}\rho\partial_\rho,$$

коли $H(\rho) = m\rho^k$, $k \neq \frac{2}{n}$;

$$3. \quad \partial_0; \quad \partial_a; \quad \partial_w; \quad G_a; \quad J_{ab}; \quad D_3 = mx_0\partial_w + \rho\partial_\rho,$$

коли $H(\rho) = m \ln \rho + k$;

$$4. \quad \partial_0; \quad \partial_a; \quad \partial_w; \quad G_a; \quad J_{ab},$$

коли $H(\rho)$ -довільна гладка функція.

Доведення. Нехай

$$X = \xi^\mu (x_0, x_1, \rho, w) \partial_\mu + \eta^0 (x_0, x_1, \rho, w) \partial_\rho + \eta^1 (x_0, x_1, \rho, w) \partial_w \quad (1.23)$$

– інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (1.21).

З умови інваріантності

$$\tilde{X} \left[w_0 + \frac{1}{2} w_a w_a + \lambda w_{aa} - H(\rho) \right] \left| \begin{array}{l} w_{11} = \lambda^{-1} (F - w_0 - \frac{1}{2} w_a w_a) - (w_{22} + \dots + w_{nn}) \\ \rho_0 = \rho_a w_a - \rho \lambda^{-1} (F - w_0 - \frac{1}{2} w_a w_a) \end{array} \right. = 0 \quad (1.24)$$

$$\tilde{X} [\rho_0 + \rho_a w_a + \rho w_{aa}] \left| \begin{array}{l} w_{11} = \lambda^{-1} (F - w_0 - 1/2 w_a w_a) - (w_{22} + \dots + w_{nn}) \\ \rho_0 = \rho_a w_a - \rho \lambda^{-1} (F - w_0 - 1/2 w_a w_a) \end{array} \right. = 0$$

одержуємо визначальні рівняння для координат оператора (1.24) та функції $F(\rho)$:

$$\begin{aligned} \eta_\rho^1 &= \eta_w^1 = 0; \quad \eta_a^0 = \eta_w^0 = 0; \quad \eta_a^1 = \xi_0^a; \quad \xi_\rho^\alpha = \xi_w^\alpha = 0; \\ \xi_a^0 &= 0; \quad \xi_1^1 = \xi_2^2 = \dots = \xi_n^n; \quad \xi_a^a = -\xi_a^b; \quad \xi_0^0 = 2\xi_1^1; \\ \eta^0 &= \rho\eta_\rho^0; \quad \eta_0^0 + \rho\eta_{aa}^1 = 0; \\ \lambda\eta_{aa}^1 - \dot{F}\eta^0 + \eta_0^1 - 2F\xi_1^1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Розв'язуючи систему (1.25) одержуємо

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^0 = px_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0; \\ \xi^1 = px_0 x_a + c_{ab} x_b + \kappa x_a + g_a x_0 + d_a, \quad a \neq b; \\ \eta^0 = -n\rho(\kappa + px_0); \\ \eta^1 = p \left(\frac{\vec{x}^2}{2} - \lambda n x_0 \right) + g_a x_a + \tau, \end{array} \right. \quad (1.26)$$

де $p, \kappa, \tau, d_0, d_a, g_a, c_{ab}$ - довільні параметри.

При цьому функція F повинна задовольняти рівнянню

$$\lambda p n - \dot{F} \rho (\tau - p n x_0) - 2F(p x_0 + \kappa) = 0. \quad (1.27)$$

В залежності від значень параметрів p, τ, n, k рівняння (1.27) має різні розв'язки. Проаналізувавши їх, одержуємо всі випадки теореми (1.6).

Теорему доведено.

Коли $n = 3$ та $H(\rho) = m \rho^{2/3}$ система (1.21) набуває вигляду

$$\begin{cases} w_0 + \frac{1}{2} w_a w_a + \lambda w_{aa} = m \rho^{2/3}; \\ \rho_0 + \rho_a w_a + \rho w_{aa} = 0, \end{cases} \quad (1.28)$$

Як впливає з теореми (1.6), базис максимальної алгебри інваріантності системи (1.28) задається операторами (1.22). Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри виглядатимуть так

$$\begin{cases} \xi^0 = p x_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0, \\ \xi^a = p x_0 x_a + c_{ab} x_b + \kappa x_a + g_a x_0 + d_a, \\ \eta^0 = -3\rho(\kappa + p x_0), \\ \eta^1 = p \left(\frac{\vec{x}^2}{2} - 3\lambda x_0 \right) + g_a x_a + \tau. \end{cases}$$

Використаємо симетрію системи (1.28) для знаходження її інваріантних розв'язків.

Розв'язок системи (1.28)

$$\begin{cases} \Phi^0(x_0, \vec{x}, \rho, w) = 0; \\ \Phi^1(x_0, \vec{x}, \rho, w) = 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

є інваріантним відносно алгебри (1.22), якщо виконується умова

$$X\Phi^0 \left| \begin{array}{l} \Phi^0=0 \\ \Phi^1=0 \end{array} \right. = 0; \quad X\Phi^1 \left| \begin{array}{l} \Phi^0=0 \\ \Phi^1=0 \end{array} \right. = 0, \quad (1.30)$$

де

$$\Phi^0 = w_0 + \frac{1}{2}w_a w_a + \lambda w_{aa} - m\rho^{2/3};$$

$$\Phi^1 = \rho_0 + \rho_a w_a + \rho w_{aa},$$

Загальний розв'язок системи (1.30) має вигляд

$$\Phi^0(J) = 0, \quad \Phi^1(J) = 0, \quad (1.31)$$

де $J = (J_1, \dots, J_{n+2})$ -перші інтеграли системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{dx_a}{\xi^a} = \frac{d\rho}{\eta^0} = \frac{dw}{\eta^1}. \quad (1.32)$$

Так як система (1.32) нелінійна і залежить від багатьох параметрів, то знайти її розв'язки досить важко. В цьому зв'язку в [40] запропоновано метод розв'язання таких систем за допомогою підгрупового аналізу. Даний метод було використано в роботах [28]-[30] і застосовано для розв'язання ряду задач. Цей метод базується на використанні спеціальних алгебраїчних методів, які розробляються авторами вказаних робіт. Розв'яжемо систему (1.32) методом, який оснований на інтегруванні системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, методи розв'язання яких добре відомі. Перші кроки в цьому напрямку були зроблені в [71]; докладніше цей метод описано в [75].

Ключовим моментом запропонованого метода є введення допоміжного параметру t таким чином:

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = dt. \quad (1.33)$$

Тоді система (1.32) переходить в рівняння:

$$\frac{dx_0}{dt} = px_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0, \quad (1.34)$$

$$\frac{dx_a}{dt} = px_0 x_a + c_{ab} x_b + \kappa x_a + g_a x_0 + d_a, \quad (1.35)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -3\rho(\kappa + px_0), \quad (1.36)$$

$$\frac{dw}{dt} = p \left(\frac{\vec{x}^2}{2} - 3\lambda x_0 \right) + g_a x_a + \tau, \quad (1.37)$$

Так як рівняння (1.34) залежить тільки від x_0 , то його можна проінтегрувати незалежно від інших диференціальних рівнянь. В залежності від коефіцієнтів p, κ, d_0 можливі шість різних варіантів:

1. $p = 1, \quad \kappa = 0, \quad d_0 = 0;$
2. $p = 1, \quad \kappa = 0, \quad d_0 = 1;$
3. $p = 1, \quad \kappa = 0, \quad d_0 = -1;$
4. $p = 0, \quad \kappa = \frac{1}{2}, \quad d_0 = 0;$
5. $p = 0, \quad \kappa = 0, \quad d_0 = 1;$
6. $p = 0, \quad \kappa = 0, \quad d_0 = 0.$

Підставляючи в рівняння (1.35) одержані розв'язки рівняння (1.34) відносно x_0 , матимемо систему лінійних рівнянь з змінними коефіцієнтами

$$\frac{dx_a}{dt} = pz(t)x_a + c_{ab}x_b + \kappa x_a + g_az(t) + d_a,$$

де $z(t) = x_0$ - розв'язок рівняння (1.34). Дана система підстановкою

$$\begin{cases} \vec{x} = h(t)\vec{y}, \\ h(t) = \sqrt{|\dot{z}(t)|} \exp(-\kappa t) \end{cases} \quad (1.38)$$

зводиться до лінійної неоднорідної системи з сталими коефіцієнтами відносно невідомих функцій $\vec{y}$:

$$\dot{y}_a = c_{ab}y_b + \kappa y_b + \frac{1}{h(t)} (g_az(t) + d_a), \quad (1.39)$$

Система (1.39) у матричному записі виглядатиме так

$$\dot{Y} = AY + D(t), \quad (1.40)$$

$$\text{де } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \kappa & c_{12} & c_{13} \\ -c_{12} & \kappa & c_{23} \\ -c_{13} & -c_{23} & \kappa \end{pmatrix},$$

або після заміни $c_{23} = B_1, c_{31} = B_2, c_{12} = B_3$

$$A = \begin{pmatrix} \kappa & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & \kappa & B_1 \\ B_2 & -B_1 & \kappa \end{pmatrix},$$

$$\text{а } D(t) = \begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \\ D_3(t) \end{pmatrix}, \quad D_a(t) = \frac{g_a z(t) + d_a}{h(t)}.$$

Спочатку розв'язуємо однорідну систему

$$\dot{Y} = AY. \quad (1.41)$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \kappa - \lambda & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & \kappa - \lambda & B_1 \\ B_2 & -B_1 & \kappa - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

розв'язуючи яке, знаходимо власні числа матриці A :

$$\lambda_1 = \kappa; \quad \lambda_{2,3} = \kappa \pm i\sqrt{B^2} = \kappa \pm iB.$$

В тому випадку, коли $B \neq 0$ власними векторами матриці A є вектори

$$\vec{K}_1 = \vec{a}; \quad \vec{K}_2 = \vec{c} + i\vec{b}; \quad \vec{K}_3 = \vec{c} - i\vec{b},$$

де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - довільні постійні вектори, які утворюють ортонормований базис простору R_3 , тобто

$$\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1, \vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c} = 0.$$

А отже, розв'язком однорідної системи (1.41) буде

$$\vec{y} = C_1 \vec{a} e^{\kappa t} + C_2 e^{\kappa t} (\vec{c} \cos t + \vec{b} \sin t) + C_3 e^{\kappa t} (\vec{b} \cos t - \vec{c} \sin t). \quad (1.42)$$

В тому випадку, коли $B = 0$, розв'язок однорідної системи (1.41) матиме таку форму

$$\vec{y} = e^{\kappa t} (C_1 \vec{a} + C_2 \vec{b} + C_3 \vec{c}).$$

Потім застосовуючи метод варіації довільних сталих знаходимо розв'язок системи (1.40). Використавши (1.38), одержуємо розв'язок

рівняння (1.35). Підставляючи розв'язки рівнянь (1.34), (1.35) в (1.36) та (1.37) будемо мати два рівняння з відокремленими змінними.

Виключаючи параметр t з системи (1.34)-(1.37) знаходимо розв'язки системи (1.32):

$$\begin{aligned} J_1 &= \omega_1(x_0, \vec{x}), \dots, J_n = \omega_n(x_0, \vec{x}), \\ J_{n+1} &= \frac{\rho}{v_1(\vec{\omega})}; \quad J_{n+2} = w - v_2(\vec{\omega}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

З (1.31) та (1.43) одержуємо

$$\begin{cases} \rho = v_1(x) \varphi^0(\vec{\omega}); \\ w = v_2(x) + \varphi^1(\vec{\omega}), \end{cases} \quad (1.44)$$

де $\varphi^0(\vec{\omega}), \varphi^1(\vec{\omega})$ - довільні гладкі функції.

Наведемо приклад знаходження інваріантів в випадку 1.

Система (1.34)-(1.37) виглядатиме так

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_0^2 \\ \dot{\vec{x}} = x_0 \vec{x} - \vec{B} \times \vec{x} + \vec{g} x_0 + \vec{d} \\ \dot{\rho} = -3x_0 \rho \\ \dot{u} = \frac{1}{2} \vec{x}^2 + \vec{g} \vec{x} - 3\lambda x_0 + \sigma \end{cases} \quad (1.45)$$

Після заміни (1.38) $\vec{x} = x_0 \vec{y} = -\frac{1}{t} \vec{y}$:

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{x_0} \\ \dot{\vec{y}} = -\vec{B} \times \vec{y} - t \vec{d} \\ \dot{\rho} = 3\frac{\rho}{t} \\ \dot{u} = \frac{1}{2t^2} \vec{y}^2 + \frac{3\lambda}{t} + \sigma \end{cases} \quad (1.46)$$

Розв'яжемо систему

$$\dot{\vec{y}} = -\vec{B} \times \vec{y} - t \vec{d} \quad (1.47)$$

Як випливає з (1.42), розв'язком однорідної системи

$$\dot{\vec{y}} = -\vec{B} \times \vec{y}$$

буде

$$\vec{y} = C_1 \vec{a} + C_2 (\vec{c} \cos t + \vec{b} \sin t) + C_3 (\vec{b} \cos t - \vec{c} \sin t). \quad (1.48)$$

Користуючись методом варіації довільних сталих, підставивши (1.48) до системи (1.47), одержуємо

$$\begin{aligned}\dot{c}_1(t) &= -t\vec{a}\vec{d}; \\ \dot{c}_2(t) \sin t + \dot{c}_3(t) \cos t &= -t\vec{b}\vec{d}; \\ \dot{c}_2(t) \cos t - \dot{c}_3(t) \sin t &= -t\vec{c}\vec{d}.\end{aligned}$$

Звідки

$$\begin{aligned}\dot{c}_1(t) &= -t\vec{a}\vec{d}; \\ \dot{c}_2(t) &= -t\vec{b}\vec{d} \sin t - t\vec{c}\vec{d} \cos t \\ \dot{c}_3(t) &= -t\vec{b}\vec{d} \cos t + t\vec{c}\vec{d} \sin t\end{aligned}\tag{1.49}$$

Або

$$\begin{aligned}c_1(t) &= -\frac{1}{2}\vec{a}\vec{d}t^2 + c_1; \\ c_2(t) &= -(\vec{c}\vec{d}t + \vec{b}\vec{d}) \sin t + (\vec{b}\vec{d}t + \vec{c}\vec{d}) \cos t + c_2; \\ c_3(t) &= -(\vec{b}\vec{d}t - \vec{c}\vec{d}) \sin t - (\vec{c}\vec{d}t + \vec{b}\vec{d}) \cos t + c_3\end{aligned}\tag{1.50}$$

Підставляючи (1.50) до (1.48), одержуємо

$$\begin{aligned}c_1 &= \vec{a}\vec{y} + \frac{1}{2}\vec{a}\vec{d}t^2; \\ c_2 &= \vec{b}\vec{y} \sin t + \vec{c}\vec{y} \cos t; \\ c_3 &= -\vec{c}\vec{y} \sin t + \vec{b}\vec{y} \cos t.\end{aligned}$$

Звідси знаходимо інваріанти та анзаци

$$1. \quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{\vec{a}\vec{x}}{\sqrt{1+x_0^2}} \\ \omega_2 = \frac{\vec{b}\vec{x}x_0 + \vec{c}\vec{x}}{1+x_0^2} \\ \omega_3 = \frac{\vec{b}\vec{x} - \vec{c}\vec{x}x_0}{1+x_0^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = (1+x_0^2)^{-3/2} \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \frac{x_0\vec{x}^2}{2(1+x_0^2)} - \\ - \frac{3\lambda}{2} \ln(1+x_0^2) + \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

Інваріанти $\vec{\omega}$ та відповідні до них анзаци у формі (1.44) для інших випадків наведені нижче:

$$2. \quad \begin{cases} \omega_1 = \frac{\vec{a}\vec{x}}{x_0} + \frac{k}{2x_0^2} \\ \omega_2 = -\frac{\vec{b}\vec{x}}{x_0} \sin \frac{1}{x_0} + \frac{\vec{c}\vec{x}}{x_0} \cos \frac{1}{x_0} \\ \omega_3 = \frac{\vec{b}\vec{x}}{x_0} \cos \frac{1}{x_0} + \frac{\vec{c}\vec{x}}{x_0} \sin \frac{1}{x_0} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = x_0^{-3} \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \frac{\vec{x}^2}{2x_0} + \frac{k\vec{a}\vec{x}}{x_0^2} + 3\lambda \ln x_0 + \\ + \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \omega_1 = \dot{A}^{1/2} \vec{a}\vec{x} \\ \omega_2 = \dot{A}^{1/2} \left(-\vec{b}\vec{x} \sin A + \vec{c}\vec{x} \cos A \right) \\ \omega_3 = \dot{A}^{1/2} \left(\vec{b}\vec{x} \cos A + \vec{c}\vec{x} \sin A \right) \\ A = \text{arth} x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \dot{A}^{3/2} \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = -\frac{1}{2} \vec{x}^2 x_0 \dot{A} - \frac{3\lambda}{2} \ln \dot{A} + \\ + \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} \omega_1 = \dot{A}^{1/2} \vec{a}\vec{x} \\ \omega_2 = \dot{A}^{1/2} \left(\vec{b}\vec{x} \sin A + \vec{c}\vec{x} \cos A \right) \\ \omega_3 = \dot{A}^{1/2} \left(\vec{b}\vec{x} \cos A - \vec{c}\vec{x} \sin A \right) \\ A = \ln x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \dot{A}^{3/2} \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} \omega_1 = \vec{a}\vec{x} - \frac{k}{2} x_0^2 \\ \omega_2 = \vec{b}\vec{x} \cos x_0 - \vec{c}\vec{x} \sin x_0 \\ \omega_3 = \vec{b}\vec{x} \sin x_0 + \vec{c}\vec{x} \cos x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = k\vec{a}\vec{x}x_0 - \frac{k^2}{3} x_0^3 + \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} \omega_1 = x_0 \\ \omega_2 = \vec{b}\vec{x} \sin \vec{a}\vec{x} + \vec{c}\vec{x} \cos \vec{a}\vec{x} \\ \omega_3 = \vec{b}\vec{x} \cos \vec{a}\vec{x} - \vec{c}\vec{x} \sin \vec{a}\vec{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} \omega_1 = x_0 \\ \omega_2 = \vec{b}\vec{x} \sin \frac{\vec{a}\vec{x}}{x_0} + \vec{c}\vec{x} \cos \frac{\vec{a}\vec{x}}{x_0} \\ \omega_3 = \vec{b}\vec{x} \cos \frac{\vec{a}\vec{x}}{x_0} - \vec{c}\vec{x} \sin \frac{\vec{a}\vec{x}}{x_0} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \frac{(\vec{a}\vec{x})^2}{2x_0} + \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} \omega_1 = x_0 \\ \omega_2 = \vec{b}\vec{x} \\ \omega_3 = \vec{c}\vec{x} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \frac{(\vec{d}\vec{x})^2}{2x_0} + \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} \omega_1 = x_0 \\ \omega_2 = \vec{a}\vec{x} \\ \omega_3 = \vec{x}^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$10. \quad \vec{\omega} = \frac{\vec{x}}{x_0} + \frac{\vec{k}}{2x_0^2} \quad \begin{cases} \rho = \frac{1}{x_0^3} \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \frac{\vec{k}\vec{x}}{x_0^2} + \frac{\vec{k}^2}{3x_0^3} + \frac{\vec{x}^2}{2x_0} - \\ - 3\lambda \ln x_0 + \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$11. \quad \vec{\omega} = \frac{\vec{x}}{\sqrt{1+x_0^2}} \quad \begin{cases} \rho = (1+x_0^2)^{-3/2} \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \frac{x_0 \vec{x}^2}{2(1+x_0^2)} + \\ + \frac{3\lambda}{2} \ln(1+x_0^2) + \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$12. \quad \vec{\omega} = \frac{\vec{x}}{\sqrt{1-x_0^2}} \quad \begin{cases} \rho = (1-x_0^2)^{-3/2} \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \frac{x_0 \vec{x}^2}{2(1-x_0^2)} + \\ + \frac{3\lambda}{2} \ln(1-x_0^2) + \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$13. \quad \vec{\omega} = x_0^{-1/2} \vec{x} \quad \begin{cases} \rho = x_0^{-3/2} \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

$$14. \quad \vec{\omega} = \vec{x} - \vec{k} \frac{x_0^2}{2} \quad \begin{cases} \rho = \varphi^0(\vec{\omega}) \\ w = \frac{1}{3} x_0^3 \vec{k}^2 + \vec{k}\vec{x}x_0 + \varphi^1(\vec{\omega}) \end{cases}$$

Підставляючи анзаци 1 - 14 до рівняння (1.21) одержимо редуковані рівняння для визначення невідомих функцій $\varphi^0, \vec{\varphi}$ відповідно:

$$1. \quad \begin{cases} \lambda \Delta \varphi^1 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi^1)^2 + \varphi_2^1 \omega_3 - \varphi_3^1 \omega_2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^2 = (\varphi^0)^{2/3} \\ \varphi^0 \Delta \varphi^1 + \vec{\nabla} \varphi^0 \vec{\nabla} \varphi^1 + \varphi_2^0 \omega_3 - \varphi_3^0 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} \lambda \Delta \varphi^1 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi^1)^2 + \varphi_2^1 \omega_3 - \varphi_3^1 \omega_2 + k \omega_1 = (\varphi^0)^{2/3} \\ \varphi^0 \Delta \varphi^1 + \vec{\nabla} \varphi^0 \vec{\nabla} \varphi^1 + \varphi_2^0 \omega_3 - \varphi_3^0 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} \lambda \Delta \varphi^1 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi^1)^2 - \varphi_2^1 \omega_3 + \varphi_3^1 \omega_2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^2 = (\varphi^0)^{2/3} \\ \varphi^0 \Delta \varphi^1 + \vec{\nabla} \varphi^0 \vec{\nabla} \varphi^1 - \varphi_2^0 \omega_3 + \varphi_3^0 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} \lambda \Delta \varphi^1 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi^1)^2 - \frac{1}{2} \varphi_1^1 \omega_1 + \varphi_2^1 (\omega_3 - \frac{\omega_2}{2}) - \\ - \varphi_3^1 (\omega_2 + \frac{\omega_3}{2}) = (\varphi^0)^{2/3} \\ \varphi^0 \Delta \varphi^1 + \vec{\nabla} \varphi^0 \vec{\nabla} \varphi^1 - \frac{1}{2} \varphi_1^0 \omega_1 + \varphi_2^0 (\omega_3 - \frac{\omega_2}{2}) - \\ - \varphi_3^0 (\omega_2 + \frac{\omega_3}{2}) - \frac{3}{2} \varphi^0 = 0 \end{cases}$$

$$5. \quad \begin{cases} \lambda \Delta \varphi^1 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi^1)^2 - \varphi_2^1 \omega_3 + \varphi_3^1 \omega_2 + k \omega_1 = (\varphi^0)^{2/3} \\ \varphi^0 \Delta \varphi^1 + \vec{\nabla} \varphi^0 \vec{\nabla} \varphi^1 - \varphi_2^0 \omega_3 + \varphi_3^0 \omega_2 = 0 \end{cases}$$

$$6. \quad \begin{cases} (1 + \omega_3^2) (\lambda \varphi_{22}^1 + \frac{1}{2} (\varphi_2^1)^2) + (1 + \omega_2^2) (\lambda \varphi_{33}^1 + \frac{1}{2} (\varphi_3^1)^2) + \varphi_1^1 - \\ - 2 \omega_2 \omega_3 (\lambda \varphi_{23}^1 + \varphi_2^1 \varphi_3^1) - \lambda (\varphi_2^1 \omega_2 + \varphi_3^1 \omega_3) = (\varphi^0)^{2/3} \\ (1 + \omega_3^2) (\varphi^0 \varphi_{22}^1 + \varphi_2^0 \varphi_2^1) + (1 + \omega_2^2) (\varphi^0 \varphi_{33}^1 + \varphi_3^0 \varphi_3^1) + \varphi_1^0 - \\ - \omega_2 \omega_3 (2 \varphi^0 \varphi_{23}^1 + \varphi_2^0 \varphi_3^1 + \varphi_3^0 \varphi_2^1) - \varphi^0 (\varphi_2^1 \omega_2 + \varphi_3^1 \omega_3) = 0 \end{cases}$$

$$7. \quad \begin{cases} (\omega_1^2 + \omega_3^2) \left(\lambda \varphi_{22}^1 + \frac{1}{2}(\varphi_2^1)^2 \right) + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \left(\lambda \varphi_{33}^1 + \frac{1}{2}(\varphi_3^1)^2 \right) + \\ + \varphi_1^1 \omega_1^2 - 2\omega_2 \omega_3 \left(\lambda \varphi_{23}^1 + \varphi_2^1 \varphi_3^1 \right) - \\ - \lambda \left(\varphi_2^1 \omega_2 + \varphi_3^1 \omega_3 - \omega_1 \right) = (\varphi^0)^{2/3} \omega_1^2 \\ (\omega_1^2 + \omega_3^2) \left(\varphi^0 \varphi_{22}^1 + \varphi_2^0 \varphi_2^1 \right) + (\omega_1^2 + \omega_2^2) \left(\varphi^0 \varphi_{33}^1 + \varphi_3^0 \varphi_3^1 \right) + \\ + \varphi_1^0 \omega_1^2 - \omega_2 \omega_3 \left(2\varphi^0 \varphi_{23}^1 + \varphi_2^0 \varphi_3^1 + \varphi_3^0 \varphi_2^1 \right) - \\ - \varphi^0 \left(\varphi_2^1 \omega_2 + \varphi_3^1 \omega_3 - \omega_1 \right) = 0 \end{cases}$$

$$8. \quad \begin{cases} \lambda \left(\varphi_{22}^1 + \varphi_{33}^1 \right) + \frac{1}{2} \left((\varphi_2^1)^2 + (\varphi_3^1)^2 \right) + \varphi_1^1 + \frac{\lambda}{x_0} = (\varphi^0)^{2/3} \\ \varphi^0 \left(\varphi_{22}^1 + \varphi_{33}^1 \right) + \varphi_2^0 \varphi_2^1 + \varphi_3^0 \varphi_3^1 + \varphi_1^0 + \frac{\varphi^0}{x_0} = 0 \end{cases}$$

$$9. \quad \begin{cases} \lambda \varphi_{22}^1 + \frac{1}{2}(\varphi_2^1)^2 + 4\omega_3 \left(\lambda \varphi_{33}^1 + \frac{1}{2}(\varphi_3^1)^2 \right) + \\ + 4\omega_2 \left(\lambda \varphi_{23}^1 + \frac{1}{2}\varphi_2^1 \varphi_3^1 \right) + \varphi_1^1 + 2\lambda \varphi_3^1 = (\varphi^0)^{2/3} \\ \varphi^0 \varphi_{22}^1 + \varphi_2^0 \varphi_2^1 + 4\omega_3 \left(\varphi^0 \varphi_{33}^1 + \varphi_3^0 \varphi_3^1 \right) + \\ + 2\omega_2 \left(2\varphi^0 \varphi_{23}^1 + \varphi_2^0 \varphi_3^1 + \varphi_3^0 \varphi_2^1 \right) + \varphi_1^0 + 2\varphi^0 \varphi_3^1 = 0 \end{cases}$$

$$10, 14. \quad \begin{cases} \lambda \Delta \varphi^1 + \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \varphi^1 \right)^2 + \vec{k} \vec{\omega} = (\varphi^0)^{2/3} \\ \varphi^0 \Delta \varphi^1 + \vec{\nabla} \varphi^0 \vec{\nabla} \varphi^1 = 0 \end{cases}$$

$$11, 12. \quad \begin{cases} \lambda \Delta \varphi^1 + \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \varphi^1 \right)^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}^2 = (\varphi^0)^{2/3} \\ \varphi^0 \Delta \varphi^1 + \vec{\nabla} \varphi^0 \vec{\nabla} \varphi^1 = 0 \end{cases}$$

$$13. \quad \begin{cases} \lambda \Delta \varphi^1 + \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla} \varphi^1 \right)^2 - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi^1 \vec{\omega} = (\varphi^0)^{2/3} \\ \varphi^0 \Delta \varphi^1 + \vec{\nabla} \varphi^0 \vec{\nabla} \varphi^1 - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \varphi^0 \vec{\omega} - \frac{3}{2} \varphi^0 = 0 \end{cases}$$

Якщо розв'язати системи редукованих рівнянь 1-14, то за допомогою відповідних анзаців можна побудувати розв'язки системи (1.21).

Зробивши підстановку (1.20) знаходимо розв'язки рівнянь Нав'є – Стокса (1.1). Нижче наведені деякі з них.

$$\begin{cases} \rho = \left(\frac{1}{2}\right)^{3/2} \frac{\vec{x}^2}{(1+x_0^2)^{5/2}} \\ \vec{u} = \frac{\vec{x}x_0}{1+x_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = (1+x_0^2)^{-9/2} \left[2(\vec{b}\vec{x} - \vec{c}\vec{x}x_0)^2 + \frac{1}{2}(\vec{a}\vec{x})^2(1+x_0^2) \right] \\ \vec{u} = \frac{\vec{x}x_0}{1+x_0} + (1+x_0^2)^{-2} \left[2x_0(\vec{b}(\vec{b}\vec{x}) - \vec{c}(\vec{c}\vec{x})) + \right. \\ \left. + (1-x_0^2)(\vec{b}(\vec{c}\vec{x}) + \vec{c}(\vec{b}\vec{x})) \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = (1+x_0^2)^{-3/2} \left\{ \frac{1}{2}(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + (1+x_0^2)^{-1} \left[\lambda_2(\vec{b}\vec{x} - \vec{c}\vec{x}x_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - \lambda_3(\vec{c}\vec{x} + \vec{b}\vec{x}x_0) + \frac{\vec{x}^2}{2} \right] \right\}^{3/2} \\ \vec{u} = (1+x_0^2)^{-1} \left[\vec{x}x_0 + \lambda_2(\vec{b}x_0 + \vec{c}) + \lambda_3(\vec{b} - \vec{c}x_0) \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \frac{c_1}{\vec{x}^2}^{3/2} \left[y \left(\frac{\vec{x}^2}{1+x_0^2} \right) \right]^{-1} \\ \vec{u} = \frac{\vec{x}^2}{1+x_0^2} \left[x_0 + y \left(\frac{\vec{x}^2}{1+x_0^2} \right) \right] \\ 2\lambda \left(2y + \frac{3}{x}y \right) + y^2 + 1 = \frac{2c_1}{x^2} y^{-2/3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{x_0^3} \left[\frac{\vec{a}\vec{x}}{x_0} + \frac{k}{2x_0^2} \right]^{3/2} \\ \vec{u} = \frac{\vec{x}}{x_0} + \frac{k\vec{a}}{x_0^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{x_0^5} \left\{ k \vec{a} \vec{x} x_0 + \frac{k^2}{2} + (\vec{b} \vec{x})^2 + (\vec{c} \vec{x})^2 + \right. \\ \quad \left. \sqrt{2} \left[((\vec{b} \vec{x})^2 - (\vec{c} \vec{x})^2) \cos \frac{2}{x_0} + 2 \vec{b} \vec{x} \vec{c} \vec{x} \sin \frac{2}{x_0} \right] \right\} \\ \vec{u} = \frac{1}{x_0^2} \left\{ \pm \sqrt{2} \left[(\vec{c}(\vec{c} \vec{x}) - \vec{b}(\vec{b} \vec{x})) \sin \frac{2}{x_0} + (\vec{c}(\vec{b} \vec{x}) + \vec{b}(\vec{c} \vec{x})) \cos \frac{2}{x_0} \right] + \right. \\ \quad \left. + \vec{x} x_0 + k \vec{a} \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \frac{c_1^{3/2}}{x_0^3} \left[y \left(\frac{\vec{x}^2}{1 + x_0^2} \right) \right]^{-1} \\ \vec{u} = \frac{1}{x_0^2} \left\{ \vec{k} + x_0 \left[\vec{x} + \vec{a} y \left(\frac{\vec{a} \vec{x}}{x_0} + \frac{1}{2x_0^2} \right) \right] \right\} \\ \lambda \dot{y} + \frac{1}{2} y^2 + x = c_1 y^{-2/3} \end{cases}$$

Отже, застосування переходу від векторного поля $\vec{u}$ до його потенціалу w в рівняннях Нав'є – Стокса дозволяє знайти нові класи точних розв'язків.

Зауваження. Скінченні перетворення, які породжуються операторами алгебри інваріантності рівнянь Нав'є – Стокса можуть бути використані для побудови формул розмноження розв'язків рівняння (1.1).

$$\begin{aligned} w_{new} = w_{old} & \left[\frac{\kappa^2 x_0 + \theta_0}{\sigma}; \frac{\kappa A \vec{x} + \vec{\theta} + \vec{v}(\kappa^2 x_0 + \theta_0)}{\sigma} \right] + \\ & + \vec{v} \frac{\kappa A \vec{x} + \vec{\theta}}{\sigma} \frac{\vec{v}^2}{2\sigma} (\kappa^2 x_0 + \theta_0) + \frac{\tau}{2\sigma} \left[\kappa A \vec{x} + \vec{\theta} + \vec{v}(\kappa^2 x_0 + \theta_0) \right]^2 + \\ & + 3\lambda \ln \sigma + v_0; \end{aligned}$$

$$\rho_{new} = \rho_{old} \left[\frac{\kappa^2 x_0 + \theta_0}{\sigma}; \frac{\kappa A \vec{x} + \vec{\theta} + \vec{v}(\kappa^2 x_0 + \theta_0)}{\sigma} \right] \left(\frac{\sigma}{\kappa} \right)^3,$$

$$\text{де } \sigma = 1 - p\kappa(x_0 + a),$$

$\kappa, \tau, a, p, \theta_0, \theta_a, v_0, v_a$ - довільні параметри, A - довільна стала матриця.

§ 1.3 Нелінійна система рівнянь двофазної рідини

Розглянемо багатовимірну нелінійну систему рівнянь теплопровідності

$$\begin{cases} u_0 = f(v)\Delta u; \\ v_0 = \Delta u, \end{cases} \quad (1.51)$$

де $u = u(x) \in R_1, v = v(x) \in R_1, x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+3}, \Delta$ - лапласіан, $f(v)$ - довільна диференційовна функція.

В цьому розділі проведена класифікація симетрійних властивостей рівнянь (1.51) в залежності від функції $f(v)$. В тому випадку, коли система (1.51) інваріантна відносно конформної алгебри $AC(3)$, ми використаємо її симетрію для побудови анзаців та редукції цієї системи до диференціальних рівнянь в частинних похідних.

Має місце наступне твердження .

Теорема 1.7 *Максимальна алгебра інваріантності системи рівнянь (1.51) складається з операторів:*

$$1. \quad A_5 = \langle \partial_0, \partial_a, \beta(\vec{x}) \partial_u, J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, D_0 = 2x_0 \partial_0 + x_a \partial_a \rangle, \\ \text{де } \beta(\vec{x}) \text{ - лінійна функція,} \\ \text{у випадку довільної диференційовної функції } f(v);$$

$$2. \quad A_5, D = x_b \partial_b - \frac{n-2}{2} u \partial_u - \frac{n+2}{2} v \partial_v, \\ \text{коли } f(v) = \lambda \exp v;$$

$$3. \quad A_5, D_1 = mx_0 \partial_0 - (m+1)u \partial_u + (m-1)v \partial_v, \\ \text{коли } f(v) = \lambda v^m, m \neq -\frac{4}{n+2};$$

$$4. \quad A_5, D, K_a = 2x_a D - \vec{x}^2 \partial_a, \\ \text{коли } f(v) = \lambda v^{\frac{-4}{n+2}}.$$

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 1.2, а визначальні рівняння для координат інфінітезимального оператора та функції f виглядають таким чином

$$\begin{aligned} \xi_u^\alpha &= \xi_v^\alpha = 0; & \xi_a^0 &= 0; & \xi_a^0 &= 0; & \xi_a^b &= -\xi_b^a, & \eta_v^1 &= 0; \\ \eta_{uu}^1 &= 0; & \eta_{aa}^1 &= \eta_0^0, & 2\eta_{au}^1 &= \xi_{bb}^a; & \eta_0^1 &= f\eta_0^0; \\ f(2\xi_a^a - \xi_0^0) &= f\eta_0^0; & \eta_u^1 - \eta_v^0 - f\eta_u^0 - 2\xi_a^a + \xi_0^0 &= 0. \end{aligned}$$

Коли $n = 3$ та $f(v) = \lambda v^{-4/5}$ система (1.51) має вигляд

$$\begin{cases} u_0 = \lambda v^{4/5} \Delta u; \\ v_0 = \Delta u. \end{cases} \quad (1.52)$$

Як впливає з теореми (1.7), максимальною алгеброю інваріантності системи (1.52) є алгебра

$$A = \{AC(3), \partial_0, D_0, \beta(\vec{x})\partial_u\} = \{\partial_a, J_{ab}, D, K_a, \partial_0, D_0, \beta(\vec{x})\partial_u\}.$$

Так як алгебра $AC(3)$ є нелінійною відносно $\vec{x}$, то не вдається застосувати метод знаходження інваріантів, описаний в [65]. Як відомо (див., наприклад, [40]), алгебра $AC(3)$ ізоморфна алгебрі $AO(1, 4)$. Цей ізоморфізм здійснюється за допомогою переходу від простору $\vec{x} \in R_3$ до простору $z = z(z_0, \vec{z}, z_4) \in R_{1+4}$ таким чином

$$\vec{x} = \frac{\vec{z}}{z_4 - z_0}, \quad (1.53)$$

і реалізовується на конусі

$$z_0^2 - \vec{z}^2 - z_4^2 = 0. \quad (1.54)$$

Базисні елементи алгебри $AO(1, 4)$ мають форму

$$J_{AB} = z^A \partial_B - z^B \partial_A, \quad A, B = \overline{0, 4}.$$

Зв'язок між базисними операторами алгебр $AC(3)$ та $AO(1, 4)$ визначається формулами

$$\begin{cases} \partial_a = J_{4a} - J_{0a}; \\ J_{ab} = J_{ab}; \\ D = J_{04}; \\ K_a = J_{4a} + J_{0a}. \end{cases}$$

Алгебра $AO(1, 4)$ реалізована лінійним представленням і тому можливо застосувати метод знаходження її інваріантів, запропонований [65].

Отже, координати алгебри $AO(1, 4)$ визначені так

$$\begin{cases} \xi^{x_0} = ax_0 + d, \\ \xi^{z_\mu} = c_{\mu\nu} z^\nu. \end{cases} \quad (1.55)$$

Запишемо еквівалентну систему Лагранжа-Ейлера

$$\frac{dx_0}{\kappa_0 x_0 + d} = \frac{z_\mu}{c_{\mu\nu} z^\nu} = d\tau. \quad (1.56)$$

Систему (1.56) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \kappa_0 x_0 + d, \\ \dot{z}_\mu = c_{\mu\nu} z^\nu. \end{cases} \quad (1.57)$$

або у матричному вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \kappa_0 x_0 + d, \\ \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}, \end{cases} \quad (1.58)$$

$$\text{де } \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

а матриця $\mathbf{A}$ є відповідною до алгебри $AO(1, 4)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} \\ c_{01} & 0 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{02} & -c_{12} & 0 & c_{23} & c_{24} \\ c_{03} & -c_{13} & -c_{23} & 0 & c_{34} \\ c_{04} & -c_{14} & -c_{24} & -c_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

Кількість незалежних розв'язків системи (1.58) визначається кількістю різних коренів характеристичного рівняння $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$, де $\mathbf{E}$ - одинична матриця.

Зробивши заміну змінних

$$c_{0a} = A_a(a = \overline{1, 3}); \quad c_{04} = k; \quad c_{ab} = B_c; \quad c_{a4} = C_a.$$

Одержуємо характеристичне рівняння системи (1.58)

$$\begin{aligned} & \lambda^5 + \lambda^3 [\vec{B}^2 + \vec{C}^2 - \vec{A}^2 - k^2] - \\ & - \lambda \left[(\vec{A}\vec{B})^2 - (\vec{B}\vec{C})^2 + (\vec{A} \times \vec{C} + k\vec{B})^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Для скорочення запису введемо позначення

$$M = \vec{A}^2 - \vec{B}^2 - \vec{C}^2 + k^2;$$

$$N = (\vec{A}\vec{B})^2 - (\vec{B}\vec{C})^2 + (\vec{A} \times \vec{C} + k\vec{B})^2.$$

Тоді рівняння (1.60) запишеться так

$$\lambda^5 - M\lambda^3 - \lambda N = 0. \quad (1.61)$$

Це рівняння має п'ять коренів :

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} [M + \sqrt{M^2 + 4N}]};$$

$$\lambda_{4,5} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} [M - \sqrt{M^2 + 4N}]}. \quad (1.62)$$

В залежності від знаку дискримінанта $D = M^2 + 4N$ відповідного біквдратного рівняння корені $\lambda_i, i = \overline{2, 5}$ можуть бути дійсними або комплексними. Випишемо суттєво різні випадки:

$$1. \quad D = 0$$

$$(a) \quad M = 0, N = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, (i = \overline{1, 5});$$

$$(b) \quad M^2 = -4N, M > 0, N < 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \sqrt{\frac{M}{2}},$$

$$\lambda_4 = \lambda_5 = -\sqrt{\frac{M}{2}};$$

$$(c) \quad M^2 = -4N, M < 0, N < 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_4 = i\sqrt{\frac{|M|}{2}},$$

$$\lambda_3 = \lambda_5 = -i\sqrt{\frac{|M|}{2}};$$

$$2. \quad D > 0$$

$$(a) \quad M = -\sqrt{M^2 + 4N}, M < 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_4 = i\sqrt{|M|}, \quad \lambda_5 = -i\sqrt{|M|};$$

$$(b) \quad M = \sqrt{M^2 + 4N}, M > 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0,$$

$$\lambda_2 = \sqrt{M}, \quad \lambda_3 = -\sqrt{M};$$

$$(c) \quad M > \sqrt{M^2 + 4N}, M > 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} [M + \sqrt{M^2 + 4N}]},$$

$$\lambda_{4,5} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} [M - \sqrt{M^2 + 4N}]};$$

$$(d) \quad |M| > \sqrt{M^2 + 4N}, M < 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_{2,3} = \pm i \sqrt{\frac{1}{2} [M + \sqrt{M^2 + 4N}]},$$

$$\lambda_{4,5} = \pm i \sqrt{\frac{1}{2} [M - \sqrt{M^2 + 4N}]};$$

$$(e) \quad |M| < \sqrt{M^2 + 4N}, M < 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{1}{2} [M + \sqrt{M^2 + 4N}]},$$

$$\lambda_{4,5} = \pm i \sqrt{\frac{1}{2} [M - \sqrt{M^2 + 4N}]};$$

Наведемо приклад знаходження інваріантів в деяких випадках.

Випадок (1a).

Вектори $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ і сталу k виберемо такими, щоб вони задовольняли умовам

$$\vec{A}^2 - \vec{B}^2 - \vec{C}^2 + k^2 = 0;$$

$$(\vec{A}\vec{B})^2 - (\vec{B}\vec{C})^2 + (\vec{A} \times \vec{C} + k\vec{B})^2 = 0.$$

Власними векторами матриці A будуть

$$S_1 = e_2; \quad S_2 = e_3; \quad S_3 = e_1 + \tau(e_0 - e_4);$$

$$S_4 = \tau e_2 + e_3 + \frac{\tau^2}{2}(e_0 - e_4); \quad S_5 = \tau e_1 + e_0 + \frac{\tau^2}{2}(e_0 - e_4),$$

де $e_\mu, (\mu = \overline{0,4})$ - довільні ортонормовані вектори простору R_{1+4} , тобто такі, для яких виконується рівність

$$e_\mu e_\nu = g^{ij},$$

де g^{ij} - метричний тензор простору R_{1+4} з сигнатурою $(+, -, -, -, -)$.

Розв'язок другого рівняння системи (1.58) має вигляд

$$Z = c_1 e_2 + c_2 e_3 + c_3 [e_1 + \tau(e_0 - e_4)] + c_4 \left[\tau e_1 + e_3 + \frac{\tau^2}{2}(e_0 - e_4) \right] + c_5 \left[\tau e_1 + e_0 + \frac{\tau^2}{2}(e_0 - e_4) \right].$$

Або

$$\begin{cases} e_0 Z = c_3 \tau + \frac{\tau^2}{2}(c_4 + c_5) + c_5; \\ e_1 Z = c_3 - \tau(c_4 + c_5); \\ e_2 Z = c_1; \\ e_3 Z = c_2; \\ e_4 Z = c_3 \tau + \frac{\tau^2}{2} c_5. \end{cases}$$

За формулами (1.53) та (1.54) повертаємось до старих змінних

$$\begin{cases} \vec{a}\vec{x} = c_1 + \tau; \\ \vec{b}\vec{x} = c_2; \\ \vec{c}\vec{x} = c_3, \end{cases} \quad (1.62)$$

де $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - ортонормовані вектори простору R_3 .

В залежності від коефіцієнтів κ_0 і d_0 можливі три суттєво різних випадки:

$$1. \tau = x_0; \quad 2. \tau = \ln x_0; \quad 3. \tau = \vec{a}\vec{x}. \quad (1.63)$$

З системи (1.62), враховуючи (1.63), одержуємо інваріанти системи (1.52), які записано в таблиці під номерами 1.1, 1.2, 1.3.

Випадок (1с).

Вектори $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ і стала k задовольняють умовам

$$\begin{aligned} \vec{A}^2 - \vec{B}^2 - \vec{C}^2 + k^2 &< 0; \\ (\vec{A}\vec{B})^2 - (\vec{B}\vec{C})^2 + (\vec{A} \times \vec{C} + k\vec{B})^2 &< 0; \\ (\vec{A}^2 - \vec{B}^2 - \vec{C}^2 + k^2)^2 &= -4 \left[(\vec{A}\vec{B})^2 - (\vec{B}\vec{C})^2 + (\vec{A} \times \vec{C} + k\vec{B})^2 \right]. \end{aligned}$$

В залежності від коефіцієнтів κ_0 та d_0 можливі три суттєво різних розв'язки першого рівняння системи Лагранжа-Ейлера:

$$1. \tau = x_0; \quad 2. \tau = \ln x_0; \quad 3. \tau = \operatorname{arctg} \frac{\vec{c}\vec{x}}{\vec{b}\vec{x}}. \quad (1.64)$$

Власними векторами матриці A будуть

$$\begin{aligned} S_1 &= e_0; & S_2 &= e_1 - ie_4; & S_3 &= e_2 - ie_3; \\ S_4 &= e_1 + ie_4; & S_5 &= e_2 + ie_3. \end{aligned}$$

Елементи матриці Z , яка є розв'язком другого рівняння системи (1.58), матимуть вигляд

$$\begin{cases} e_0 Z = c_1; \\ e_1 Z = c_2 \cos \tau + c_3 \sin \tau; \\ e_2 Z = c_4 \cos \tau + c_5 \sin \tau; \\ e_3 Z = c_5 \cos \tau - c_4 \sin \tau; \\ e_4 Z = c_3 \cos \tau - c_2 \sin \tau. \end{cases}$$

Повертаючись за формулами (1.53) та (1.54) до старих змінних, маємо

$$\begin{cases} (c_3 \cos \tau - c_2 \sin \tau - 1) \vec{a}\vec{x} = c_2 \cos \tau + c_3 \sin \tau; \\ (c_3 \cos \tau - c_2 \sin \tau - 1) \vec{b}\vec{x} = c_4 \cos \tau + c_5 \sin \tau; \\ (c_3 \cos \tau - c_2 \sin \tau - 1) \vec{c}\vec{x} = c_4 \cos \tau - c_5 \sin \tau. \end{cases} \quad (1.65)$$

Розв'язуючи систему лінійних рівнянь (1.65) відносно c_2, c_3, c_4 та c_5 , враховуючи (1.54) і підставляючи (1.64) в розв'язки цієї системи, одержуємо інваріанти системи (1.52). Їх розміщено в таблиці під номерами 3.1, 3.2, 3.3.

В інших випадках інтегрування системи (1.58) проводиться аналогічно.

За допомогою операторів алгебри $AC(3)$ будуємо анзаци, які і редукують систему (1.52) до системи диференціальних рівнянь в частинних похідних з меншою кількістю змінних.

Одержані результати - інваріанти, анзаци та редуковані рівняння зведені до таблиці.

п	Інваріанти	Анзаци	Редуковані рівняння
1.	$\begin{cases} \omega_1 = \vec{a}\vec{x} - x_0 \\ \omega_2 = \vec{b}\vec{x} \\ \omega_3 = \vec{c}\vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} v = \varphi^0(\omega) \\ u = \varphi^1(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi_1^1 = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} \varphi_1^0 \\ -\varphi_1^0 = \Delta \varphi^1 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} \omega_1 = \frac{2}{\vec{x}^2 + 1} \\ \quad \times (\vec{a}\vec{x} \cos t - \\ \quad - \sin t) + \sin t \\ \omega_2 = \frac{2}{\vec{x}^2 + 1} \\ \quad \times (\vec{a}\vec{x} \sin t + \\ \quad \cos t) - \cos t \\ \omega_3 = \frac{2}{\vec{x}^2 + 1} \times \\ \quad \times (\vec{b}\vec{x} \cos mt + \\ \quad + \vec{c}\vec{x} \sin mt) \\ t = x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} v = (\vec{x}^2 + 1)^{-5/2} \\ \quad \times \varphi^0(\omega) \\ u = (\vec{x}^2 + 1)^{-1/2} \\ \quad \times \varphi^1(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_1 \varphi_2^1 - \omega_2 \varphi_1^1 + m \varphi_3^1 \times \\ \quad \times (1 - \omega_a^2)^{1/2} = \\ \quad = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} [\omega_1 \varphi_2^1 - \\ \quad - \omega_2 \varphi_1^1 + m \varphi_3^1 \times \\ \quad \times (1 - \omega_a^2)^{1/2}] \\ \omega_1 \varphi_2^0 - \omega_2 \varphi_1^0 + m \varphi_3^0 \times \\ \quad \times (1 - \omega_a^2)^{1/2} = \\ \quad = -3\varphi^1 - 24 (\omega_1 \varphi_1^1 + \\ \quad + \omega_2 \varphi_2^1) - 12\omega_3 \varphi_3^1 + \\ \quad + 4 (1 - \omega_a^2) \varphi_{aa}^1 - \\ \quad - 8 (\omega_1 \omega_2 \varphi_{12}^1 + \omega_1 \omega_3 \varphi_{13}^1 \\ \quad + \omega_2 \omega_3 \varphi_{23}^1) \end{cases}$

3.	$\begin{cases} \omega_1 = \vec{a}\vec{x} - \ln x_0 \\ \omega_2 = \vec{b}\vec{x} \\ \omega_3 = \vec{c}\vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} v = x_0^{5/4} \varphi^0(\omega) \\ u = x_0^{1/4} \varphi^1(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} -\frac{\varphi^1}{4} - \varphi_1^1 = \lambda (\varphi^0)^{-\frac{4}{5}} \\ \times \left[\frac{5}{4} \varphi^0 - \varphi_1^0 \right] \\ \frac{5}{4} \varphi^0 - \varphi_1^0 = \Delta \varphi^1 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} \omega_1 = \frac{2}{\vec{x}^2 + 1} \\ \times (\vec{a}\vec{x} \cos t - \\ - \sin t) + \sin t \\ \omega_2 = \frac{2}{\vec{x}^2 + 1} \\ \times (\vec{a}\vec{x} \sin t + \\ \cos t) - \cos t \\ \omega_3 = \frac{2}{\vec{x}^2 + 1} \times \\ \times (\vec{b}\vec{x} \cos mt + \\ + \vec{c}\vec{x} \sin mt) \\ t = \ln x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} v = (\vec{x}^2 + 1)^{-5/2} \\ \times x_0^{5/4} \varphi^0(\omega) \\ u = (\vec{x}^2 + 1)^{-1/2} \\ \times x_0^{1/4} \varphi^1(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} \omega_1 \varphi_2^1 - \omega_2 \varphi_1^1 + m \varphi_3^1 \times \\ \times (1 - \omega_a^2)^{1/2} = \\ = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} [\omega_1 \varphi_2^1 - \\ - \omega_2 \varphi_1^1 + \\ + m \varphi_3^1 ((1 - \omega_a^2)^{1/2} + \\ + \frac{5}{4} \varphi^0)] - \frac{1}{4} \varphi^1 \\ \omega_1 \varphi_2^0 - \omega_2 \varphi_1^0 + m \varphi_3^0 \times \\ \times (1 - \omega_a^2)^{1/2} = \\ = -3 \varphi^1 - 24 (\omega_1 \varphi_1^1 + \\ + \omega_2 \varphi_2^1) - 12 \omega_3 \varphi_3^1 + \\ + 4 (1 - \omega_a^2) \varphi_{aa}^1 - \\ - 8 (\omega_1 \omega_2 \varphi_{12}^1 + \omega_1 \omega_3 \varphi_{13}^1 \\ + \omega_2 \omega_3 \varphi_{23}^1) - \frac{5}{4} \varphi^0 \end{cases}$

5.	$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{2}{\vec{x}^2 + 1} \\ \times (\vec{a}\vec{x} \cos t - \\ - \sin t) + \sin t \\ \omega_2 = \frac{2}{\vec{x}^2 + 1} \\ \times (\vec{a}\vec{x} \sin t + \\ \cos t) - \cos t \\ \omega_3 = x_0 \\ t = \alpha \arctg \frac{\vec{c}\vec{x}}{\vec{b}\vec{x}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} v = (\vec{x}^2 + 1)^{-5/2} \\ \times \varphi^0(\omega) \\ u = (\vec{x}^2 + 1)^{-1/2} \\ \times \varphi^1(\omega) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_3^1 = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} \varphi_3^0 \\ \varphi_3^0 = -3\varphi^1 - \\ -4(\omega_1\varphi_1^1 + \omega_2\varphi_2^1) \times \\ \times \left(3 + \frac{\alpha^2}{1 - \omega_1^2 - \omega_2^2} \right) + \\ + 4\varphi_{11}^1 (1 + \\ + \frac{\alpha^2\omega_2^2}{1 - \omega_1^2 - \omega_2^2} + \omega_1^2) + \\ + 4\varphi_{22}^1 \left(\frac{\alpha^2\omega_1^2}{1 - \omega_1^2 - \omega_2^2} + \right. \\ \left. + 1 - \omega_2^2 \right) - 2\varphi_{12}^1\omega_1\omega_2 \times \\ \times \left(4 + \frac{\alpha^2}{1 - \omega_1^2 - \omega_2^2} \right) \end{array} \right.$
6.	$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \left(-\frac{\vec{a}\vec{x} + 1}{1 - \vec{x}^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \right) \exp \alpha t \\ \omega_2 = \frac{1}{1 - \vec{x}^2} \times \\ \left(\vec{b}\vec{x} \cos t + \right. \\ \left. + \vec{c}\vec{x} \sin t \right) - \\ \omega_3 = \frac{1}{1 - \vec{x}^2} \times \\ \left(\vec{b}\vec{x} \sin t - \right. \\ \left. - \vec{c}\vec{x} \cos t \right) - \\ t = x_0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} v = (1 - \vec{x}^2)^{-5/2} \\ \times \varphi^0(\omega) \\ u = (1 - \vec{x}^2)^{-1/2} \\ \times \varphi^1(\omega) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\omega_1\varphi_1^1 - \omega_3\varphi_2^1 + \omega_2\varphi_3^1 \\ = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} (\alpha\omega_1\varphi_1^0 - \\ - \omega_3\varphi_2^0 + \omega_2\varphi_3^0) \\ \alpha\omega_1\varphi_1^0 - \omega_3\varphi_2^0 + \omega_2\varphi_3^0 \\ 3\varphi^1 + 12\nabla\varphi^1\vec{\omega} + \\ + 8(\omega_1\omega_2\varphi_{12}^1 + \omega_1\omega_3\varphi_{13}^1 \\ + \omega_2\omega_3\varphi_{23}^1) + 4\omega_a^2\varphi_{aa}^1 + \\ + \varphi_{22}^1 + \varphi_{33}^1 \end{array} \right.$

7.	$\begin{cases} \omega_1 = \exp \alpha x_0 \times \\ \times \left(-\frac{\vec{a}\vec{x} + 1}{1 - \vec{x}^2} + \frac{1}{2} \right) \\ \omega_2 = \frac{\vec{b}\vec{x}}{1 - \vec{x}^2} \\ \omega_3 = \frac{\vec{c}\vec{x}}{1 - \vec{x}^2} \end{cases}$	$\begin{cases} v = (1 - \vec{x}^2)^{-5/2} \\ \times \varphi^0(\omega) \\ u = (1 - \vec{x}^2)^{-1/2} \\ \times \varphi^1(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi_1^1 = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} \varphi_1^0 \\ \alpha \omega_1 \varphi_1^0 = 3\varphi^1 + \varphi_{22}^1 + \\ + \varphi_{33}^1 + 12\nabla \varphi^1 \vec{\omega} + \\ + 4\omega_a \omega_b \varphi_{ab}^1 \end{cases}$
8.	$\begin{cases} \omega_1 = x^\alpha x_0 \times \\ \left(-\frac{\vec{a}\vec{x} + 1}{1 - \vec{x}^2} + \frac{1}{2} \right) \\ \omega_2 = \frac{\vec{b}\vec{x}}{1 - \vec{x}^2} \\ \omega_3 = \frac{\vec{c}\vec{x}}{1 - \vec{x}^2} \end{cases}$	$\begin{cases} v = (1 - \vec{x}^2)^{-5/2} \\ \times x_0^{5/4} \varphi^0(\omega) \\ u = (1 - \vec{x}^2)^{-1/2} \\ \times x_0^{1/4} \varphi^0(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\varphi^1}{4} + \alpha \omega_1 \varphi_1^1 = \\ = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} \left[\frac{5}{4} \varphi^0 + \right. \\ \left. + \alpha \omega_1 \varphi_1^0 \right] \\ \frac{5}{4} \varphi^0 + \alpha \omega_1 \varphi_1^0 = \\ = 3\varphi^1 + 12\nabla \varphi^1 \vec{\omega} + \varphi_{22}^1 \\ + \varphi_{33}^1 + 4\omega_a \omega_b \varphi_{ab}^1 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} \omega_1 = x_0 \\ \omega_2 = \frac{\vec{b}\vec{x}}{1 - \vec{x}^2} \\ \omega_3 = \frac{\vec{c}\vec{x}}{1 - \vec{x}^2} \end{cases}$	$\begin{cases} v = (1 - \vec{x}^2)^{-5/2} \\ \times \varphi^0(\omega) \\ u = (1 - \vec{x}^2)^{-1/2} \\ \times \varphi^1(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi_1^1 = \lambda (\varphi^0)^{-\frac{4}{5}} \varphi_1^0 \\ \varphi_1^0 = 3\varphi^1 + 12(\omega_2 \varphi_2^1 \\ + \omega_3 \varphi_3^1) + 4\omega_2 \omega_3 \varphi_{23}^1 + \\ + (4\omega_2^2 + 1) \varphi_{22}^1 + \\ + (4\omega_3^2 + 1) \varphi_{33}^1 \end{cases}$

10.	$\begin{cases} \omega_1 = x_0 \\ \omega_2 = \vec{b}\vec{x} \\ \omega_3 = \vec{c}\vec{x} \end{cases}$	$\begin{cases} v = \varphi^0(\omega) \\ u = \varphi^1(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi_1^1 = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} \varphi_1^0 \\ \varphi_1^0 = \varphi_{22}^1 + \varphi_{33}^1 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} \omega_1 = \vec{a}\vec{x} \\ \omega_2 = \vec{b}\vec{x}^2 + \vec{c}\vec{x}^2 \\ \omega_3 = \arctg \frac{\vec{b}\vec{x}}{\vec{c}\vec{x}} - \\ -\alpha x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} v = \varphi^0(\omega) \\ u = \varphi^1(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi_3^1 = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} \varphi_3^0 \\ -\alpha \varphi_3^0 = 4\varphi_2^1 + \varphi_{11}^1 + \\ + 4\omega_2 \varphi_{22}^1 + \frac{1}{\omega_2} \varphi_{33}^1 \end{cases}$
12.	$\begin{cases} \omega_1 = \vec{a}\vec{x} \\ \omega_2 = \vec{b}\vec{x}^2 + \vec{c}\vec{x}^2 \\ \omega_3 = \arctg \frac{\vec{b}\vec{x}}{\vec{c}\vec{x}} - \\ -\alpha \ln x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} v = x_0^{5/4} \varphi^0(\omega) \\ u = x_0^{1/4} \varphi^1(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\varphi_1^1}{4} - \alpha \varphi_3^1 = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} \\ \times \left(\frac{5}{4} \varphi^0 - \alpha \varphi_3^0 \right) \\ \frac{5}{4} \varphi^0 - \alpha \varphi_3^0 = 4\varphi_2^1 + \\ \varphi_1^1 + 4\omega_2 \varphi_{22}^1 + \frac{1}{\omega_2} \varphi_{33}^1 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} \omega_1 = \vec{a}\vec{x} \\ \omega_2 = \vec{b}\vec{x}^2 + \vec{c}\vec{x}^2 \\ \omega_3 = x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} v = \varphi^0(\omega) \\ u = \varphi^1(\omega) \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi_3^1 = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} \varphi_3^0 \\ \varphi_3^0 = 4\varphi_2^1 + \varphi_{11}^1 + \\ + 4\omega_2 \varphi_{22}^1 \end{cases}$

4.	$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \left(-\frac{\vec{d}\vec{x} + 1}{1 - \vec{x}^2} + \frac{1}{2} \right) \times \\ \exp \left(\alpha \arctg \frac{\vec{c}\vec{x}}{\vec{b}\vec{x}} \right) \\ \omega_2 = \frac{\sqrt{\vec{b}\vec{x}^2 + \vec{c}\vec{x}^2}}{1 - \vec{x}^2} \\ \omega_3 = x_0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} v = (1 - \vec{x}^2)^{-5/2} \\ \times \varphi^0(\omega) \\ u = (1 - \vec{x}^2)^{-1/2} \\ \times \varphi^1(\omega) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_3^1 = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} \varphi_3^0 \\ \varphi_3^0 = 3\varphi^1 + 8\omega_1\omega_2\varphi_{12}^1 + \\ + \left(4\omega_1^2 + \frac{\alpha^2\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) \varphi_{11}^1 + \\ + (4\omega_2^2 + 1) \varphi_{22}^1 + \\ + \left(12\omega_1 + \frac{\alpha^2\omega_1}{\omega_2^2} \right) \varphi_1^1 + \\ + \left(12\omega_2 + \frac{1}{\omega_2} \right) \varphi_2^1 \end{array} \right.$
5.	$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \exp \alpha t \times \\ \left(-\frac{\vec{d}\vec{x} + 1}{1 - \vec{x}^2} + \frac{1}{2} \right) \\ \omega_2 = \frac{1}{1 - \vec{x}^2} \times \\ \left(\vec{b}\vec{x} \cos t + \right. \\ \left. + \vec{c}\vec{x} \sin t \right) - \\ \omega_3 = \frac{1}{1 - \vec{x}^2} \times \\ \left(\vec{b}\vec{x} \sin t - \right. \\ \left. - \vec{c}\vec{x} \cos t \right) \\ t = \ln x_0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} v = (1 - \vec{x}^2)^{-5/2} \\ \times x_0^{5/4} \varphi^0(\omega) \\ u = (1 - \vec{x}^2)^{-1/2} \\ \times x_0^{1/4} \varphi^1(\omega) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \alpha\omega_1\varphi_1^1 - \omega_3\varphi_2^1 + \omega_2\varphi_3^1 \\ = \lambda (\varphi^0)^{-4/5} \left(\alpha\omega_1\varphi_1^0 - \right. \\ \left. - \omega_3\varphi_2^0 + \omega_2\varphi_3^0 + \frac{5}{4}\varphi^0 \right) \\ - \frac{1}{4}\varphi^1 \\ \alpha\omega_1\varphi_1^0 - \omega_3\varphi_2^0 + \omega_2\varphi_3^0 \\ 3\varphi^1 + 12\nabla\varphi^1\vec{\omega} + \\ + 8 \left(\omega_1\omega_2\varphi_{12}^1 + \omega_1\omega_3\varphi_{13}^1 \right. \\ \left. + \omega_2\omega_3\varphi_{23}^1 \right) + 4\omega_a^2\varphi_{aa}^1 + \\ \left. + \varphi_{22}^1 + \varphi_{33}^1 - \frac{5}{4}\varphi^0 \right. \end{array} \right.$

Розв'язавши редуковані рівняння 1 - 15, за допомогою відповідних замінів одержуємо точні розв'язки системи (1.52). Нижче наведемо деякі з них.

$$\begin{cases} v = \left[\frac{3\lambda x_0}{(\vec{b}\vec{x})^2} \right]^{5/4}; \\ u = 5\lambda \left[\frac{3\lambda x_0}{(\vec{b}\vec{x})^2} \right]^{1/4}, \end{cases} \quad \begin{cases} v = \left[\frac{\lambda x_0}{(\vec{b}\vec{x})^2 + (\vec{c}\vec{x})^2} \right]^{5/4}; \\ u = 5\lambda \left[\frac{\lambda x_0}{(\vec{b}\vec{x})^2 + (\vec{c}\vec{x})^2} \right]^{1/4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \left[\frac{-\lambda x_0}{\vec{x}^2} \right]^{5/4}; \\ u = 5\lambda \left[\frac{-\lambda x_0}{\vec{x}^2} \right]^{1/4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \left[\frac{12\lambda x_0}{(1 - \vec{x}^2)^2} \right]^{5/4}; \\ u = 5 \left[\frac{\lambda^5 x_0}{12(1 - \vec{x}^2)^2} \right]^{1/4}, \end{cases} \quad \begin{cases} v = \left[\frac{-12\lambda x_0}{(1 + \vec{x}^2)^2} \right]^{5/4}; \\ u = 5 \left[\frac{-\lambda^5 x_0}{12(1 + \vec{x}^2)^2} \right]^{1/4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = x_0^{5/4} y^5; \\ u = 5\lambda x_0^{1/4} y, \end{cases}$$

$y = y(\omega_1)$ - розв'язок рівняння $\lambda y'' + y^4 y' - \frac{1}{4} y^5 = 0$.

§ 1.4 Узагальнене рівняння Бюргерса

Добре вивчена і описана в літературі максимальна алгебра інваріантності класичного рівняння Бюргерса

$$u_0 + \lambda u u_1 + u_{11} = 0, \quad (1.66)$$

$$u = u(x), x = (x_0, x_1), u_\mu = \partial_\mu u, \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \mu = 0, 1.$$

Базисними елементами цієї алгебри є оператори

$$\begin{aligned} \partial_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0}; & \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}; & G &= x_0 \partial_1 + \frac{1}{\lambda} \partial_u; \\ D &= 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - u \partial_u; \\ \Pi &= x_0^2 \partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 + \left(\frac{x_1}{\lambda} - x_0 u \right) \partial_u. \end{aligned} \quad (1.67)$$

В цьому параграфі проведена класифікація симетрійних властивостей узагальненого рівняння Бюргерса

$$u_0 + u_{11} = F(u, u_1), \quad (1.68)$$

де $F(u, u_1)$ -довільна диференційовна функція,

залежності від цієї функції $F(u, u_1)$; також досліджена редукція рівняння (1.68).

Має місце твердження.

Теорема 1.8 Максимальна алгебра інваріантності рівняння (1.68) складається з операторів

$$1. \quad \partial_0, \quad \partial_1, \quad (1.69)$$

якщо $F(u, u_1)$ - довільна диференційовна функція;

$$2. (a) \quad \partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad (1.70)$$

якщо $F(u, u_1) = f(u_1) - \lambda u u_1$,

де $f(u_1)$ - довільна диференційовна функція;

$$(b) \quad \partial_0, \quad \partial_1, \quad \tilde{G} = e^{mx_0} \left(\frac{\lambda}{m} \partial_1 + \partial_u \right), \quad (1.71)$$

якщо $F = f(u_1) + m u - \lambda u u_1$

$$3. \quad \partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D, \quad (1.72)$$

$$\text{якщо } F(u, u_1) = \lambda u_1 (u_1^{1/2} - u);$$

$$4. \quad \partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D, \quad \Pi, \quad (1.73)$$

$$\text{якщо } F(u, u_1) = -\lambda u u_1.$$

Доведення.

Як і в §1.4 інфінітезимальний оператор має вигляд

$$X = \xi^0(x, u)\partial_0 + \xi^1(x, u)\partial_1 + \eta(x, u)\partial_u. \quad (1.74)$$

Умова інваріантності рівняння (1.68) відносно оператора (1.74) виглядатиме так:

$$\tilde{X} [u_0 + u_{11} - F(u, u_1)] \Big|_{u_{11}=F-u_0} = \quad (1.75)$$

$$= ({}^0\eta - \eta F_u - {}^1\eta F_{u_1} + {}^{11}\eta) \Big|_{u_{11}=F-u_0} = 0,$$

${}^0\eta$ та ${}^1\eta$ такі самі, як і в попередньому параграфі, а

$$\begin{aligned} {}^{11}\eta = & \eta_{11} + 2\eta_{1u}u_1 + \eta_{uu}u_1^2 + \eta_u u_{11} - \xi_{11}^1 u_1 - 2\xi_1^1 u_{11} - 2\xi_{1u}^1 u_1^2 - \\ & - \xi_{uu}^1 u_1^3 - 3\xi_u^1 u_1 u_{11} - \xi_{11}^0 u_0 - 2\xi_{1u}^0 u_0 u_1 - \xi_{uu}^0 u_1^2 u_0 - \xi_u^0 u_0 u_{11} - \\ & - 2\xi_u^0 u_1 u_{01} - 2\xi_1^0 u_{01}. \end{aligned}$$

Розщеплюючи (1.75) за степенями u_1 , одержуємо визначальні рівняння для координат оператора (1.74) та функції $F(u, u_1)$:

$$\begin{aligned} \xi_u^0 = \xi_1^0 = 0; \quad \xi_u^1 = 0; \quad \xi_0^0 = 2\xi_1^1; \\ F(\eta_u - 2\xi_1^1) - \eta F_u - F_{u_1}(\eta_1 + \eta_u u_1 - \xi_1^1 u_1) + \\ + (2\eta_{1u} - \xi_0^1)u_1 + \eta_{uu}u_1^2 + \eta_0 + \eta_{11} = 0. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Розв'язуючи перші 4 рівняння системи (1.76), маємо

$$\begin{cases} \xi^0 = 2\alpha(x_0); \\ \xi^1 = \dot{\alpha}x_1 + \beta(x_0); \\ \eta = \eta(x, u), \end{cases} \quad (1.77)$$

де α, β - довільні диференційовні функції аргументу x_0 . Функція $\eta(x, u)$ залишається невизначеною.

Перед тим, як розв'язувати останнє рівняння (1.76), використаємо комутаційні співвідношення між операторами алгебри інваріантності.

Оскільки випадок 1 є тривіальним, то на його доведенні зупинятися не будемо.

Випадок 2.

Розглянемо оператори

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad G = \beta(x_0)\partial_1 + \eta(x, u)\partial_u.$$

Комутаційні співвідношення між цими операторами будуть такими

$$\begin{aligned} [\partial_0, \partial_1] &= 0; \\ [\partial_0, G] &= \dot{\beta}\partial_1 + \eta_0\partial_u; \\ [\partial_1, G] &= \eta_1\partial_u. \end{aligned} \tag{1.78}$$

Оскільки оператор, що є результатом дії дужок Пуасона на оператори алгебри інваріантності, повинен бути лінійною комбінацією операторів цієї алгебри, то з комутаційних співвідношень (1.78) випливає два випадки:

$$\begin{aligned} 1. \quad \dot{\beta} &= \lambda; \quad \eta_0 = \eta_1 = 0; \quad \lambda \neq 0; \\ 2. \quad \dot{\beta} &= m\beta; \quad \eta_0 = m\eta, \eta_1 = 0; \quad m \neq 0. \end{aligned} \tag{1.79}$$

З (1.79) одержуємо

$$\begin{aligned} 1. \quad \beta &= \lambda x_0 + c; \quad \eta = \phi(u); \\ 2. \quad \beta &= \lambda e^{mx_0}, \quad \eta = \phi(u)e^{mx_0}, \end{aligned} \tag{1.80}$$

де $\phi(u)$ - довільна гладка функція.

Отже, оператор Галілея може мати дві різні форми

$$\begin{aligned} 1. \quad G &= \lambda x_0 \partial_1 + \phi(u) \partial_u; \\ 2. \quad \tilde{G} &= e^{mx_0} (\lambda \partial_1 + \phi(u) \partial_u). \end{aligned} \tag{1.81}$$

Представлення операторів (1.81) локально еквівалентно до такого

$$\begin{aligned} 1. \quad G &= x_0 \partial_1 + \frac{1}{\lambda} \partial_u; \\ 2. \quad \tilde{G} &= e^{mx_0} (\lambda \partial_1 + \partial_u), \end{aligned} \quad (1.82)$$

де еквівалентність здійснюється за допомогою локальної заміни

$$\int \frac{du}{\phi(u)} \longrightarrow u. \quad (1.83)$$

Координати інфінітезимальних операторів алгебр інваріантності $\langle \partial_0, \partial_1, G \rangle$ та $\langle \partial_0, \partial_1, \tilde{G} \rangle$ відповідно мають вигляд

$$\begin{cases} \xi^0 = d_0; \\ \xi^1 = \lambda g x_0 + d_1; \\ \eta = g, \end{cases} \quad \begin{cases} \xi^0 = d_0; \\ \xi^1 = \lambda g e^{mx_0}; \\ \eta = g e^{mx_0}. \end{cases} \quad (1.84)$$

Підставивши (1.84) в останнє рівняння системи (1.76), одержимо

$$\begin{aligned} 1. \quad F u + \lambda u_1 &= 0; \\ 2. \quad F u + \lambda u_1 - m &= 0. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Розв'язком (1.85) є функції

$$\begin{aligned} 1. \quad F &= -\lambda u u_1 + f(u_1); \\ 2. \quad F &= -\lambda u u_1 + m u + f(u_1), \end{aligned} \quad (1.86)$$

де $f(u_1)$ - довільна диференційовна функція.

Випадок 2 доведено.

Випадок 3.

Розглянемо оператори

$$\begin{aligned} \partial_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0}; \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, G = x_0 \partial_1 + \frac{1}{\lambda} \partial_u; \\ D &= 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + \eta(x, u) \partial_u. \end{aligned} \quad (1.87)$$

Знайдемо комутаційні співвідношення операторів (1.87):

$$\begin{aligned} [\partial_0, \partial_1] &= 0; \\ [\partial_0, G] &= \lambda \partial_1; \\ [\partial_1, G] &= 0; \\ [\partial_0, D] &= 2\partial_0 + \eta_0 \partial_u; \\ [\partial_1, D] &= \partial_1; \\ [G, D] &= -x_0 \partial_1 + \left(x_0 \eta_1 + \frac{1}{\lambda} \eta_u\right) \partial_u. \end{aligned}$$

Щоб оператори (1.87) складали алгебру, необхідно, щоб виконувались умови

$$\begin{cases} \eta_0 = 0; \\ \lambda x_0 \eta_1 + \eta_u = -1 \end{cases} \quad (1.88)$$

Розв'язком системи (1.88) буде

$$\eta = -u.$$

Таким чином,

$$D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - u \partial_u. \quad (1.89)$$

А координати (1.77) набудуть вигляду

$$\begin{cases} \xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0; \\ \xi^1 = \kappa x_1 + \lambda g x_0 + d_1; \\ \eta = -\kappa u + g. \end{cases} \quad (1.90)$$

Підставивши (1.90) до (1.76) одержимо

$$\begin{cases} 3F + F_u + 2F_{u_1} u_1 = 0; \\ F_u + \lambda u_1 = 0. \end{cases} \quad (1.91)$$

Неважко переконатися, що загальний розв'язок (1.91) має вигляд:

$$F = \lambda u_1^{3/2} - \lambda u u_1.$$

Випадок 3 доведено.

Зауваження. Оператори $\partial_0, \partial_1, \tilde{G}$ і D не можуть утворювати алгебру, так як

$$[\tilde{G}, D] = \lambda(2mx_0 - 1)\tilde{G} - 2e^{mx_0} \partial_u.$$

Випадок 4.

Тепер розглянемо п'ять операторів :

$$\begin{aligned}\partial_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0}; \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, G = x_0 \partial_1 + \frac{1}{\lambda} \partial_u; \\ D &= 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - u \partial_u; \Pi = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 + \eta(x, u) \partial_u.\end{aligned}\tag{1.92}$$

Маємо такі комутаційні співвідношення операторів:

$$\begin{aligned}[\partial_0, \partial_1] &= 0; \\ [\partial_0, G] &= \lambda \partial_1; \\ [\partial_1, G] &= 0; \\ [\partial_0, D] &= 2\partial_0; \\ [\partial_1, D] &= \partial_1; \\ [G, D] &= -G; \\ [\partial_0, \Pi] &= 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + \eta_0 \partial_u; \\ [\partial_1, \Pi] &= x_0 \partial_1 + \eta_1 \partial_u; \\ [G, \Pi] &= (\lambda x_0 \eta_1 + \eta_u) \partial_u; \\ [D, \Pi] &= 2\Pi + (2x_0 \eta_0 + x_1 \eta_1 - u \eta_u - \eta) \partial_u.\end{aligned}$$

Щоб визначити $\eta(x, u)$, треба розв'язати нескладну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \eta_0 = -u; \\ \eta_1 = \frac{1}{\lambda}; \\ \lambda x_0 \eta_1 + \eta_u = 0; \\ 2x_0 \eta_0 + x_1 \eta_1 - u \eta_u - \eta = 0. \end{cases}\tag{1.93}$$

З системи (1.93) випливає, що

$$\eta = \frac{x_1}{\lambda} - x_0 u.$$

Отже, координати оператора (1.74) будуть такими

$$\begin{cases} \xi^0 = ax_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0; \\ \xi^1 = (ax_0 + \kappa x_1 + \lambda g x_0 + d_1); \\ \eta = a \left(\frac{x_1}{\lambda} - x_0 u \right) - \kappa u + g, \end{cases}$$

а функція $F(u, u_1)$ повинна задовольняти системі трьох рівнянь

$$\begin{cases} 3F + F_u u + 2F_{u_1} u_1 = 0; \\ F_u + \lambda u_1 = 0; \\ F_{u_1} + \lambda u = 0, \end{cases} \quad (1.94)$$

Розв'язком системи (1.94) є

$$F = -\lambda u u_1.$$

Теорему доведено.

Використаємо оператори алгебри інваріантності для знаходження точних розв'язків рівняння (1.68).

Локально нееквівалентні анзаци, які побудовано за допомогою операторів алгебр (1.69)-(1.73), відповідно мають вигляд

1. $u = \varphi(x_0 - kx_1);$
2. a) $u = \varphi(x_0 - kx_1);$
b) $u = \frac{2k}{\lambda}x_0 + \varphi(kx_0^2 - x_1),$
3. a) $u = \varphi(x_0 - kx_1);$
b) $u = ke^{mx_0} + \varphi(k\lambda e^{mx_0} + k_1x_0 - x_1),$
4. a) $u = \varphi(x_0 - kx_1);$
b) $u = \frac{2k}{\lambda}x_0 + \varphi(kx_0^2 - x_1);$
c) $u = \frac{k}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{x_0}}\varphi(\omega);$
 $\omega = \frac{x_1 - kx_0}{\sqrt{x_0}},$
5. a) $u = \varphi(x_0 - kx_1);$
b) $u = \frac{2k}{\lambda}x_0 + \varphi(kx_0^2 - x_1);$
c) $u = \frac{k}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{x_0}}\varphi\left(\frac{x_1 - kx_0}{\sqrt{x_0}}\right);$
d) $u = \frac{k}{\lambda k_1} + \frac{x_0\omega}{\lambda\sqrt{x_0^2 + k_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + k_1}}\varphi(\omega);$
 $\omega = \frac{x_1 - \frac{k}{k_1}x_0}{\sqrt{x_0^2 + k_1}},$

де φ - довільна диференційовна функція.

Якщо анзаци 1.3-1.7 підставити відповідно в рівняння

1. $u_0 + u_{11} = F(u, u_1),$
коли $F(u, u_1)$ - довільна диференційовна функція;
2. $u_0 + \lambda u u_1 + u_{11} = f(u_1),$
коли $f(u_1)$ - довільна диференційовна функція;
3. $u_0 + \lambda u u_1 + u_{11} = f(u_1) + tu;$
4. $u_0 + \lambda u u_1 + u_{11} = u_1^{3/2};$
5. $u_0 + \lambda u u_1 + u_{11} = 0,$

то одержимо сукупності редукованих рівнянь для знаходження функції φ :

1. $k^2 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = F(\varphi, \dot{\varphi});$
2. $k^2 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = F(\varphi, \dot{\varphi});$
 $\ddot{\varphi} - \lambda \dot{\varphi} \varphi + \frac{2k}{\lambda} = f(\dot{\varphi});$
3. $k^2 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = F(\varphi, \dot{\varphi});$ (1.96)
 $\ddot{\varphi} - \lambda \dot{\varphi} \varphi + k_1 \dot{\varphi} - m \varphi = f(\dot{\varphi});$
4. $k^2 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = F(\varphi, \dot{\varphi});$
 $\ddot{\varphi} - \lambda \dot{\varphi} \varphi + \frac{2k}{\lambda} = f(\dot{\varphi});$
 $\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} \varphi - \dot{\varphi} \omega - \frac{1}{2} \varphi = \lambda \dot{\varphi}^{3/2};$
5. $k^2 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = F(\varphi, \dot{\varphi});$
 $\ddot{\varphi} - \lambda \dot{\varphi} \varphi + \frac{2k}{\lambda} = f(\dot{\varphi});$
 $\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} \varphi - \dot{\varphi} \omega - \frac{1}{2} \varphi = \lambda \dot{\varphi}^{3/2};$
 $\ddot{\varphi} + \lambda \dot{\varphi} \varphi + \frac{k_1 \omega}{\lambda} = 0.$

Розв'язавши рівняння (1.96) і використавши відповідні анзаци (1.95), можна одержати розв'язки рівняння (1.68) з відповідною нелінійністю.

§ 1.5 Узагальнене рівняння Кортевега - де Фріза

Розглянемо узагальнене рівняння Кортевега - де Фріза

$$u_0 + \lambda u u_1 + u_{111} = F(u, u_1), \quad (1.97)$$

де $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_\mu = \partial_\mu u$, $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1$; F - довільна диференційовна функція.

Добре відома максимальна алгебра інваріантності класичного рівняння Кортевега - де Фріза

$$u_0 + \lambda u u_1 + u_{111} = 0. \quad (1.98)$$

Базисними елементами цієї алгебри є оператори

$$\begin{aligned} \partial_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0}; & \partial_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}; & G &= x_0 \partial_1 + \partial_u; \\ D &= 3x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - 2u \partial_u. \end{aligned} \quad (1.99)$$

В цьому параграфі проведена класифікація симетрійних властивостей рівняння (1.97) в залежності від функції $F(u, u_1)$; симетрія цього рівняння використана для побудови анзаців і редукції рівняння (1.97) до звичайних диференціальних рівнянь.

Має місце твердження.

Теорема 1.9 Максимальна алгебра інваріантності рівняння (1.97) складається з операторів

$$1. \quad \partial_0, \quad \partial_1, \quad (1.100)$$

якщо $F(u, u_1)$ - довільна диференційовна функція;

$$2. \quad \partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad (1.101)$$

якщо $F(u, u_1) = f(u_1)$,

де $f(u_1)$ - довільна диференційовна функція;

$$3. \quad \partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D, \quad (1.102)$$

якщо $F(u_1) = \lambda u_1^{5/3}$.

Доведення. Нехай

$$X = \xi^0(x, u) \partial_0 + \xi^1(x, u) \partial_1 + \eta(x, u) \partial_u. \quad (1.103)$$

Використаємо умову інваріантності рівняння (1.97) відносно оператора (1.103)

$$\left. \tilde{X} [u_0 + \lambda u u_1 + u_{111} - F(u, u_1)] \right|_{u_{111}=F-u_0-\lambda u u_1} = \quad (1.104)$$

$$\left. = ({}^0\eta + \eta(\lambda u_1 - F_u) + {}^1\eta(\lambda u - F_{u_1}) + {}^{111}\eta) \right|_{u_{111}=F-u_0-\lambda u u_1} = 0,$$

де

$$\begin{aligned} {}^0\eta &= \eta_0 + \eta_u u_0 - \xi_0^1 u_1 - \xi_u^1 u_1 u_0 - \xi_0^0 u_0 - \xi_u^0 u_0^2; \\ {}^1\eta &= \eta_1 + \eta_u u_1 - \xi_1^1 u_1 - \xi_u^1 (u_1)^2 - \xi_1^0 u_0 - \xi_u^0 u_0 u_1; \\ {}^{111}\eta &= \eta_{111} + 3\eta_{u11} u_1 + 3\eta_{uu1} u_1^2 + 3\eta_{u_1} u_{11} + \eta_{uuu} u_1^3 + 3\eta_{uu} u_1 u_{11} + \\ &+ \eta_u u_{111} - 3\xi_1^0 u_{011} - 3\xi_{11}^0 u_{01} - 6\xi_{1u}^0 u_1 u_{01} - \xi_{111}^0 u_0 - \xi_{uuu}^1 u_1^4 - \\ &- 3\xi_{u11}^0 u_0 u_1 - 3\xi_{uu1}^0 u_1^2 u_0 - 3\xi_{u1}^0 u_0 u_{11} - 3\xi_{uu}^0 u_1^2 u_{01} - 3\xi_u^0 u_{11} u_{01} - \\ &- 3\xi_u^0 u_1 u_{011} - 3\xi_{uu}^0 u_1 u_0 u_{11} - \xi_u^0 u_0 u_{111} - \xi_{uuu}^0 u_0 u_1^3 - 3\xi_{11}^1 u_{11} - \\ &- 3\xi_1^1 u_{111} \xi_{111}^1 u_1 - 3\xi_{11u}^1 u_1^2 - 3\xi_{1uu}^1 u_1^3 - 9\xi_{1u}^1 u_1 u_{11} - 6\xi_{uu}^1 u_1^2 u_{11} - \\ &- 3\xi_u^1 u_{11}^2 - 4\xi_u^1 u_1 u_{111}. \end{aligned}$$

Розщеплюючи (1.104) за степенями u_1 , одержуємо визначальні рівняння для координат оператора (1.103) та функції $F(u, u_1)$:

$$\begin{aligned} \xi_u^1 &= 0; \quad \xi_u^0 = \xi_1^0 = 0; \quad \xi_0^0 = 3\xi_1^1; \\ \eta_{1u} &= \xi_{11}^1; \quad \eta_{uu} = 0; \quad \eta_0 + \eta_{111} = 0; \\ \eta(\lambda u_1 - F_u) &+ (\lambda u - F_{u_1})(\eta_1 + \eta_u u_1 - \xi_1^1 u_1) + \\ &+ (\lambda u u_1 - F)(3\xi_1^1 - \eta_u) + u_1(3\eta_{11u} - \xi_0^1 - \xi_{111}^1) = 0. \end{aligned} \quad (1.105)$$

В тому випадку, коли максимальна алгебра інваріантності представлена операторами ∂_0, ∂_1 , координатами оператора (1.103) будуть

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta = 0. \quad (1.106)$$

Підставляючи (1.106) до (1.105), бачимо, що воно задовольняється при довільній функції $F(u, u_1)$.

Коли максимальна алгебра інваріантності рівняння (1.97) складається з операторів $\partial_0, \partial_1, G$, то підставляючи координати

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^1 = x_0, \quad \eta = 1 \quad (1.107)$$

до (1.105), одержуємо рівняння для визначення функції F

$$F_u = 0. \quad (1.108)$$

Загальним розв'язком рівняння (1.108) є функція (1.101).

В третьому випадку

$$\xi^0 = 3x_0, \quad \xi^1 = x_1, \quad \eta = -2u. \quad (1.109)$$

Підставляючи (1.109) та (1.101) до (1.105), приходимо до рівняння відносно функції f :

$$3u_1 \dot{f} - 5f = 0. \quad (1.110)$$

Загальним розв'язком (1.110) є функція (1.102).

Теорему доведено.

Локально нееквівалентні анзаци, які побудовані за алгебрами (1.100), (1.101) та (1.102), виглядатимуть так:

1. $u = \varphi(x_0 - kx_1);$
2. $a) \quad u = \varphi(x_0 - kx_1);$
 $b) \quad u = \varphi(kx_0^2 - 2x_1) + kx_0;$
3. $a) \quad u = \varphi(x_0 - kx_1);$
 $b) \quad u = \varphi(kx_0^2 - 2x_1) + kx_0;$
 $c) \quad u = x_0^{-2/3} \varphi[x_0^{-1/3}(x_1 - kx_0)] + k,$

де φ - довільна диференційовна функція.

Підставляючи анзаци (1.111) відповідно в рівняння

$$1. \quad u_0 + u_{111} = F(u, u_1),$$

коли $F(u, u_1)$ - довільна диференційовна функція;

$$2. \quad u_0 + \lambda u u_1 + u_{111} = f(u_1),$$

коли $f(u_1)$ - довільна диференційовна функція;

$$3. \quad u_0 + \lambda u u_1 + u_{111} = u_1^{5/3},$$

одержуємо такі сукупності редукованих диференціальних рівнянь відносно функції φ :

$$1. \quad \dot{\varphi} - k\varphi\dot{\varphi} - k^3 \ddot{\varphi} = F(\varphi, \dot{\varphi}),$$

$$2. \quad \begin{aligned} \dot{\varphi} - k\varphi\dot{\varphi} - k^3 \ddot{\varphi} &= F(\varphi, \dot{\varphi}); \\ 4 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}\varphi - \frac{k}{2} &= F(\dot{\varphi}), \end{aligned} \tag{1.112}$$

$$3. \quad \begin{aligned} \dot{\varphi} - k\varphi\dot{\varphi} - k^3 \ddot{\varphi} &= F(\varphi, \dot{\varphi}); \\ 4 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}\varphi - \frac{k}{2} &= F(\dot{\varphi}); \\ \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}\varphi - \dot{\varphi}^{5/3} - \frac{\omega\dot{\varphi}}{3} - \frac{2}{3}\varphi &= 0, \end{aligned}$$

Якщо розв'язати редуковані рівняння (1.112), то, використовуючи відповідні анзаци, одержимо розв'язки рівняння (1.97) з відповідними нелінійностями.

Розділ 2

Умовна інваріантність деяких рівнянь параболічного типу.

Поняття умовної інваріантності розроблялося в роботах [1], а детально цей метод описано в монографії [65]. Метод умовної симетрії дає можливість одержати такі підмножини розв'язків диференціальних рівнянь, симетрія яких ширша, а іноді зовсім відрізняється від симетрії всієї множини розв'язків.

Цей розділ дисертації присвячено вивченню і застосуванню умовної інваріантності. З цієї точки зору досліджені нелінійні рівняння дифузії, Нав'є – Стокса, двофазної рідини. За операторами умовної симетрії знайдені інваріанти і побудовані анзаци, за допомогою яких нелінійні рівняння були редуковані, що дало змогу одержати нові класи точних розв'язків цих рівнянь.

§ 2.1 Нелінійне рівняння дифузії

Розглянемо нелінійне рівняння дифузії

$$H(u)u_0 + u_{11} = F(u), \quad (2.1)$$

де $u = u(x) \in R_1, x = (x_0, x_1) \in R_2, H(u)$ і $F(u)$ - довільні гладкі функції.

Часто рівняння (2.1) досліджують в еквівалентному вигляді

$$u_0 + \partial_1 (f(u)u_1) = g(u). \quad (2.2)$$

Так, наприклад, в роботах [24], [11] досліджена ліівська інваріантність цього рівняння.

В роботах [39] та [49] Q-умовна інваріантність рівняння (2.1) була досліджена при $H(u) \equiv 1$ і довільній функції $F(u)$ та $H(u) = \frac{1}{u}$ і, $F(u) = 0$.

Нехай

$$Q = A(x, u)\partial_0 + B(x, u)\partial_1 + C(x, u)\partial_u, \quad (2.3)$$

де A, B, C - гладкі функції, диференційний оператор першого порядку, який діє на многовиді $(x, u) \in R_3$.

Аналогічно до [29] доводиться теорема.

Теорема 2.1 Рівняння (2.1) Q - умовно інваріантне відносно оператора (2.3), якщо функції A, B, C задовольняють таким умовам:

Випадок 1. $A \neq 0$ (не втрачаючи загальності можна покласти $A = 1$):

$$\begin{aligned} B_{uu} &= 0, & C_{uu} &= 2(B_{1u} + HB B_u), \\ 3B_u F &= 2(C_{1u} + HB_u C) - (HB_0 + B_{11} + 2HB B_1 + \dot{H}BC), \\ C\dot{F} - (C_u - 2B_1)F &= HC_0 + C_{11} + 2HCB_1 + \dot{H}C^2; \end{aligned} \quad (2.4)$$

Випадок 2. $A = 0$ (не втрачаючи загальності можна покласти $B = 1$):

$$C\dot{F} - C_u F = HC_0 + C_{11} + 2CC_{1u} + C^2 C_{uu} + \frac{C\dot{H}}{H} (F - CC_u + C_1). \quad (2.5)$$

Доведення. Запишемо умову Q-умовної інваріантності

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{Q}S \\ S=0 \\ Qu=0 \end{array} \right| = 0, \quad (2.6)$$

де $S = H(u)u_0 + u_{11} - F(u)$, $Qu = Au_0 + Bu_1 - C$.

Випадок 1.

З рівняння $Qu = 0$ випливає, що $u_0 = C - Bu_1$. Тоді умова (2.6) матиме вигляд

$$\left[H {}^0\eta + {}^{11}\eta + (\dot{H}u_0 - \dot{F})C \right] \bigg|_{\substack{u_0=C-Bu_1 \\ u_{11}=F-H(C-Bu_1)}} = 0, \quad (2.7)$$

де

$$\begin{aligned} {}^0\eta &= C_0 + C_u u_0 - B_u u_0 u_1 - B_0 u_1, \\ {}^{11}\eta &= C_{11} + 2C_{1u} u_1 + C_{uu} u_1^2 - B_{11} u_1 - 2B_{1u} u_1^2 - B_{uu} u_1^3 + \\ &+ (C_u - B_u u_1) u_{11} - 2(B_1 + B_u u_1) u_{11}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Підставляючи (2.8) до (2.7), одержимо

$$\begin{aligned} &B_{uu} u_1^3 + (2B_{1u} + 2HBB_u - C_{uu}) u_1^2 + (3B_u F - 2C_{1u} - \\ &- 2HB_u C + HB_0 + B_{11} + 2HBB_1 + \dot{H}BC) u_1 + \\ &+ C\dot{F} - (C_u - 2B_1)F - HC_0 - C_{11} - 2HCB_1 - \dot{H}C^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Оскільки функції B, C не залежать від u_1 , то з (2.9) випливає (2.4).

Випадок 2.

З рівняння $Qu = 0$ одержимо $C = u_1$. Тоді

$$\begin{aligned} u_{11} &= C_1 + CC_u, \\ u_0 &= H^{-1}(F - C_1 - CC_u). \end{aligned}$$

Діючи аналогічно як і для випадку 1, одержуємо рівняння (2.5).

Теорему доведено.

Теорема 2.2 Рівняння (2.1) Q - умовно інваріантне відносно оператора

$$Q = \partial_0 + u\partial_1 + P_3(u)\partial_u, \quad (2.10)$$

коли воно має вигляд

$$(3\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u})u_0 + u_{11} = (2\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u})P_3(u), \quad (2.11)$$

де $P_3(u) = \lambda_1 u^3 + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u + \lambda_4$, λ_i - довільні сталі, $i = \overline{1, 4}$.

Доведення. Підставляючи $B = u, C = C(u)$ в (2.4), матимемо

$$C_{uu} = 2uH, \quad F = \frac{1}{3}(2H - uH_u)C, \quad uH_{uu} + 2H_u = 0.$$

Звідки знаходимо

$$H = 3\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u}, \quad F = (2\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u})P_3(u).$$

Теорему доведено.

Використаємо оператор (2.10) для знаходження розв'язків рівняння (2.11). Анзац, який одержано за допомогою оператора (2.10), має вигляд

$$x_1 - \int \frac{udu}{P_3(u)} = \varphi(\omega), \quad \omega = x_0 - \int \frac{du}{P_3(u)}. \quad (2.12)$$

Анзац (2.12) редукує рівняння (2.11) до звичайного диференціального рівняння

$$\ddot{\varphi} + P_3(\dot{\varphi}) = 0. \quad (2.13)$$

Інтегрування рівняння (2.13) залежить від вигляду коренів поліному P_3 . Можливі сім суттєво відмінних випадки. Наведемо по одному прикладу для кожного з них. Кожен приклад подано таким чином: вигляд поліному $P_3(u)$, редуковане рівняння і розв'язок рівняння (2.1) з відповідними нелінійностями.

$$1. \quad P_3(u) = (u-1)^3, \quad (\varphi - \omega)^2 = 2\omega,$$

$$u = 1 + \frac{x_1 - x_0}{x_0 - \frac{1}{2}(x_1 - x_0)^2};$$

$$2. \quad P_3(u) = (u+1)(u-1)^2, \quad \text{th}(\varphi - \omega) - 1 = \frac{1}{\varphi + \omega},$$

$$\frac{\left(x_0 + x_1 + \frac{1}{u-1}\right)u - 1}{x_0 + x_1 + \frac{1}{u-1} - u} = \text{th}(x_0 - x_1);$$

$$3. \quad P_3(u) = (u - 2)(u^2 - 1), \quad \exp 3(\varphi - \omega) - 3 \exp(\varphi + \omega) = -2,$$

$$u = -\frac{\exp 3(x_1 - x_0) + 3 \exp(x_1 + x_0) - 4}{\exp 3(x_1 - x_0) + 3 \exp(x_1 + x_0) + 2};$$

$$4. \quad P_3(u) = (u - 1)(u^2 + 2u + 2),$$

$$3 \cos 2(\varphi - \omega) + 4 \sin 2(\varphi - \omega) + 5 = 2 \exp(-2(2\varphi + 3\omega)),$$

$$u = \frac{\exp(-3x_0 - 2x_1) + 3 \sin(x_0 - x_1) - \cos(x_0 - x_1)}{\exp(-3x_0 - 2x_1) - 2 \sin(x_0 - x_1) - \cos(x_0 - x_1)};$$

$$5. \quad P_3(u) = (u - 1)^2, \quad \varphi = \omega + \ln \omega, \quad u = 1 + \exp(x_1 - x_0);$$

$$6. \quad P_3(u) = u^2 - 1, \quad \varphi = \ln \operatorname{ch} \omega, \quad u = \frac{\operatorname{ch} x_0 - \exp x_1}{\operatorname{sh} x_0};$$

$$7. \quad P_3(u) = u^2 + 1, \quad \varphi = \ln \cos \omega, \quad u = \frac{-\cos x_0 + \exp x_1}{\sin x_0}.$$

Теорема 2.3 Рівняння

$$u_0 + uu_{11} = \lambda_1 u + \lambda_2, \quad (\lambda_1, \lambda_2 = \text{const}) \quad (2.14)$$

Q - умовно інваріантне відносно оператора

$$Q = \partial_0 + \frac{u}{x_1} \partial_1 + (\lambda_1 u + \lambda_2) \partial_u. \quad (2.15)$$

Доведення. Якщо знайти продовження оператора (2.15) та подіяти ним на рівняння (2.14), то будемо мати

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(u_0 + uu_{11} - \lambda_1 u - \lambda_2) &= \left(\frac{2u}{x_1^2} - \frac{3u_1}{x_1} + 2\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u} \right) \times \\ &\times (u_0 + uu_{11} - \lambda_1 u - \lambda_2) - \left(\frac{2u}{x_1^2} - \frac{3u_1}{x_1} + \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u} \right) \times \\ &\times \left(u_0 + \frac{u}{x_1} u_1 + \lambda_1 u + \lambda_2 \right), \end{aligned}$$

тобто

$$\tilde{Q}S = \alpha S + \beta Qu,$$

що і треба було довести.

Анзац

$$\lambda_1 u + \lambda_2 = \exp(\lambda_1 x_0) \varphi(\omega), \quad \omega = u - \lambda_2 x_0 - \lambda_1 \frac{x_1^2}{2}, \quad (2.16)$$

що одержано за допомогою оператора (2.15), редукує рівняння (2.14) до звичайного диференціального рівняння

$$\ddot{\varphi} = 0. \quad (2.17)$$

Розв'язавши рівняння (2.17) і застосувавши анзац (2.16), знаходимо розв'язок рівняння (2.14):

$$\lambda_1 u + \lambda_2 = \exp(\lambda_1 x_0) \left[c_1 \left(u - \lambda_2 x_0 - \lambda_1 \frac{x_1^2}{2} \right) + c_2 \right]. \quad (2.18)$$

Наведемо ще деякі результати Q -умовної інваріантності рівняння (2.1) Результати записані в такому порядку: рівняння (2.1), відповідний оператор, анзац, редуковане рівняння, розв'язок рівняння (2.1).

$$1. \quad (\lambda_1 u^2 + \lambda_2) u_0 + u_{11} = \lambda_3 u^3,$$

$$Q = \lambda_2 x_1^2 \partial_0 + 3x_1 \partial_1 + 3u \partial_u,$$

$$u = x_1 \varphi(\omega), \quad \omega = x_0 - \frac{\lambda_2}{6} x_1^2,$$

$$\lambda_1 \varphi^2 \dot{\varphi} + \frac{\lambda_2^2}{9} \ddot{\varphi} = \lambda_3 \varphi^3.$$

$$2. \quad (\lambda_1 u^2 + \lambda_2) u_0 + u_{11} = \lambda_3 u^3 + 2u,$$

$$Q = \lambda_2 (1 + \cos 2x_1) \partial_0 - 2 \sin 2x_1 \partial_1 + 6u \partial_u,$$

$$u = \operatorname{ctg} x_1 \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{3}{\lambda_2} x_0 + \ln \sin x_1,$$

$$\ddot{\varphi} - 3\dot{\varphi} + 2\varphi + 3 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \varphi^2 \dot{\varphi} + \lambda_3 \varphi^3.$$

$$3. \quad (\lambda_1 u^2 + \lambda_2) u_0 + u_{11} = \lambda_3 u^3 - 2u,$$

$$Q = \lambda_2 \partial_0 + 3 \operatorname{th} x_1 \partial_1 - \frac{3u}{\operatorname{ch}^2 x_1} \partial_u,$$

$$u = \operatorname{cth} x_1 \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{3}{\lambda_2} x_0 - \ln \operatorname{sh} x_1,$$

$$\ddot{\varphi} + 3\dot{\varphi} + 2\varphi + 3 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \varphi^2 \dot{\varphi} = \lambda_3 \varphi^3.$$

$$4. \quad e^u u_0 + u_{11} = e^u,$$

$$(a) \quad Q = x_1 \partial_1 - 2 \partial_u, \quad u = \varphi(x_0) - \ln x_1^2, \\ e^\varphi \dot{\varphi} + 2 = e^\varphi, \quad u = \ln \frac{e^{x_0} + 2}{x_1^2}.$$

$$(b) \quad Q = \partial_1 + \operatorname{tg} \frac{x_1}{2} \partial_u, \quad u = \varphi(x_0) - 2 \ln \cos \frac{x_1}{2}, \\ e^\varphi \dot{\varphi} + \frac{1}{2} = e^\varphi, \quad u = \ln \frac{e^{x_0} + \frac{1}{2}}{\cos^2 \frac{x_1}{2}};$$

$$(c) \quad Q = \partial_1 + \operatorname{th} \frac{x_1}{2} \partial_u, \quad u = \varphi(x_0) - 2 \ln \operatorname{ch} \frac{x_1}{2}, \\ e^\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} = e^\varphi, \quad u = \ln \frac{e^{x_0} - \frac{1}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x_1}{2}};$$

$$5. \quad \lambda u u_0 + u_{11} = \lambda u^2,$$

$$(a) \quad Q = \partial_0 + \left(u + \frac{1}{\lambda x_1^2} \right) \partial_u, \quad u = \frac{1}{\lambda x_1^2} + e^{x_0} \varphi(x_1), \\ x_1^2 \ddot{\varphi} - 6(2\lambda - 1)\varphi = 0.$$

$$(b) \quad Q = \partial_0 + \left(u - \frac{1}{\lambda W(x_1)} \right) \partial_u, \quad u = \frac{1}{\lambda} W(x_1) + e^{x_0} \varphi(x_1), \\ \ddot{\varphi} = W \varphi, \quad u = \frac{1}{\lambda} W(x_1) + e^{x_0} \Lambda(x_1).$$

де $W(x)$ - функція Вейерштраса, $\Lambda(x)$ - функція Ламе (див. [18]).

§ 2.2 Рівняння Нав'є - Стокса.

Як було зазначено в §1.1, лівська симетрія рівнянь Нав'є - Стокса (1.1) добре відома з [64]. В цьому параграфі досліджено умовну симетрію цієї системи.

Розглянемо спочатку одновимірний випадок.

При $x = (x_0, x_1)$ та $u = u(x)$ система (1.1) має вигляд

$$\begin{cases} u_0 + uu_1 + \lambda u_{11} + F(\rho)\rho_1 = 0; \\ \rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1 = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Оператор умовної інваріантності будемо шукати у вигляді

$$Q = A(x, \rho, u) \partial_0 + B(x, \rho, u) \partial_1 + C(x, \rho, u) \partial_\rho + D(x, \rho, u) \partial_u, \quad (2.20)$$

де A, B, C, D - гладкі функції. Диференціальний оператор першого порядку Q діє на многовиді $(x, \rho, u) \in R_4$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.4 Рівняння (2.19) Q -умовно інваріантні відносно оператора (2.20), якщо функції A, B, C і D задовольняють системі диференціальних рівнянь в одному з наступних випадків:

I. $A \neq 0$ (не втрачаючи загальності можна покласти $A = 1$):

$$1. \quad B \neq u \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} & (u - B) \left\{ \frac{1}{\rho} [C_u (B - u) - C (B_u + 1)] + C_\rho \right\} - B_0 - BB_1 + D + \\ & + (BD_u - B_u D) + (D_\rho \rho - D_u u) = 0; \\ & -\frac{2B_u C}{\rho} \left[D + \frac{C}{\rho} (B - u) \right] + \frac{1}{B - u} (B_\rho C + D_\rho \rho) \left(\frac{\lambda}{\rho} C_1 - \frac{\lambda C}{\rho^2} C_u - \right. \\ & \left. - D \right) + \left\{ \frac{\lambda}{\rho^3} B_{uu} C^3 + \frac{\lambda}{\rho^2} C^2 (D_{uu} - 2B_{1u}) + \frac{C}{\rho} [B_1 u - D + B_0 + FC_u + \right. \\ & \left. + \lambda B_{11} - 2\lambda D_{1u} + 2B_1 (B - u)] + D_0 + D_1 u - FC_1 + \lambda D_{11} + 2B_1 D \right\} = 0; \\ & \frac{C}{\rho} [C_u (B - u) - C (B_u + 1)] + C_0 + C_u D + C_1 u + D_1 \rho + \\ & + C (B_1 + C_\rho - D_u) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\lambda C}{\rho^2} \left[\frac{C}{B-u} (B_u - 2) + 2C_u \right] + \frac{1}{\rho} \left[2C (B-u) + \frac{\lambda C}{B-u} (C_\rho - B_1) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \lambda C_1 \right] + 3D + \frac{CF}{B-u} \right\} + \frac{2}{\rho} B_u \left\{ \left[\frac{2C}{\rho} (B-u) + D \right] (B-u) + FC \right\} + \\ & + \frac{\lambda}{B-u} D_\rho \left\{ \frac{1}{\rho} [C_u (B-u) - C (2-B_u)] + C_\rho - B_1 + \frac{F\rho}{\lambda} \right\} - \\ & - \frac{B_1}{\rho} [F\rho + (B-u) (2B-u)] + \lambda \left\{ \frac{3}{\rho^3} B_{uu} C^2 (u-B) + \frac{2C}{\rho^2} \times \right. \\ & \times [(B-u) (2B_{1u} - D_{uu}) - CB_{\rho u}] + \frac{1}{\rho} [2C (B_{1\rho} - D_{\rho u}) + (B-u) \times \\ & \times (2D_{1u} - B_{11})] + 2D_{1\rho} \left. \right\} B_\rho - C\dot{F} - FC_\rho + D_u F - \frac{B-u}{\rho} (B_0 - D + \\ & + FC_u) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_{\rho\rho}\rho^2 + (2B_{\rho u}\rho) (B-u) + B_{uu} (B-u)^2 + B_\rho\rho (2-B_u) - \\ & - \frac{1}{B-u} B_\rho^2 \rho^2 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B_\rho \left\{ -2F - 2 \frac{(B-u)^2}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho} \left[\frac{1}{\rho} (2C [2-B_u] - C_u [B-u]) + B_1 - C_\rho - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{B-u} (B_\rho C + D_\rho \rho) \right] \right\} - \frac{2(B-u)}{\rho} B_u \left[F + \frac{(B-u)^2}{\rho} \right] + \\ & + \lambda \left\{ \frac{(B-u)^2}{\rho^2} D_{uu} + \frac{1}{\rho} [2(B-u) D_u + (2-B_u) D_\rho] + D_{\rho\rho} \right\} + \\ & + \lambda \frac{B-u}{\rho^2} \left\{ \frac{3C(B-u)}{\rho} B_{uu} + 2[2CB_{\rho u} - B_{1u} (B-u)] + \right. \\ & \left. + \rho [2CB_{\rho\rho} - 2B_{1\rho} (B-u)] \right\} = 0; \end{aligned}$$

$$2. \quad B = u$$

$$D_\rho = 0;$$

$$D_0 + D_1 u - FC_1 + \frac{C}{\rho} (FC_u - 3D) + \lambda \left(\frac{C^2}{\rho^2} D_{uu} - \frac{2C}{\rho} D_{1u} + D_{11} \right) = 0;$$

$$C_0 + C_u D - CD_u - CC_\rho + C_1 u + D_1 \rho - \frac{2C^2}{\rho} = 0;$$

$$F \left(\frac{2C}{\rho} + D_u - C_\rho \right) - C\dot{F} = 0.$$

II. $A = 0$ (не втрачаючи загальності можна покласти $B = 1$):

$$D_0 + FCD_u + D_1u - C^2\dot{F} - DD_\rho\rho + (\lambda D_\rho - F)(C_1 + C_uD + CC_\rho) + \\ + \lambda [D_{11} + D(2D_{1u} + DD_{uu} + 2CD_{\rho u}) + C(2D_{1\rho} + CD_{\rho\rho})] + D^2 = 0; \\ FCC_u - \lambda C_u(D_1 + DD_u + C_uD_\rho) + D(2C + D_u\rho) + C_0 + \\ + C_1u + D_1\rho = 0.$$

Доведення.

Випадок 1. При $A = 1$ оператор (2.20) має вигляд

$$Q = \partial_0 + B(x, \rho, u)\partial_1 + C(x, \rho, u)\partial_\rho + D(x, \rho, u)\partial_u, \quad (2.22)$$

тоді

$$\begin{aligned} Q\rho &= \rho_0 + B\rho_1 - C = 0, \\ Qu &= u_0 + Bu_1 - D = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Запишемо умову інваріантності системи (2.19) відносно оператора (2.22) :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}S_1 &= {}^0\eta^1 + {}^1\eta^1u + \lambda {}^{11}\eta^1 + Du_1 - C\dot{F}\rho_1 - F {}^1\eta^0 = 0 \\ \tilde{Q}S_2 &= {}^0\eta^0 + {}^1\eta^0u + {}^1\eta^1\rho + D\rho_1 + Cu_1 = 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

де

$$\begin{aligned} S_1 &= u_0 + uu_1 + \lambda u_{11} + F(\rho)\rho_1; \\ S_2 &= \rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1, \\ {}^0\eta^1 &= D_0 + D_uu_0 + D_\rho\rho_0 - B_0u_1 - B_uu_0u_1 - B_\rho\rho_0u_1; \\ {}^1\eta^1 &= D_1 + D_uu_1 + D_\rho\rho_1 - B_1u_1 - B_uu_1^2 - B_\rho\rho_1u_1; \\ {}^0\eta^0 &= C_0 + C_uu_0 + C_\rho\rho_0 - B_0\rho_1 - B_uu_0\rho_1 - B_\rho\rho_0\rho_1; \\ {}^1\eta^0 &= C_1 + C_uu_1 + C_\rho\rho_1 - B_1\rho_1 - B_uu_1\rho_1 - B_\rho\rho_1^2; \\ {}^{11}\eta^1 &= D_{11} + 2D_{1u}u_1 + 2D_{1\rho}\rho_1 + D_{uu}u_1^2 + 2D_{\rho u}\rho_1u_1 + D_uu_{11} + \\ &+ D_{\rho\rho}\rho_1^2 + D_\rho\rho_{11} - B_{11}u_1 - 2B_{1u}u_1^2 - 2B_{1\rho}\rho_1u_1 - 2B_{1u}u_{11} - B_{uu}u_1^3 - \\ &- 2B_{\rho u}\rho_1u_1^2 - B_{\rho\rho}\rho_1^2u_1 - B_\rho\rho_{11}u_1 - 2B_\rho\rho_1u_{11} - 3B_uu_1u_{11}. \end{aligned}$$

Переходячи на многовид (x, ρ, u) маємо

$$\begin{aligned} \rho_{00} + B\rho_{01} &= L_1, & \rho_{01} + B\rho_{11} &= L_2, \\ u_{00} + Bu_{01} &= L_3, & u_{01} + Bu_{11} &= L_4, \\ \rho_{00} + u\rho_{01} + \rho u_{01} &= L_5, & \rho_{01} + u\rho_{11} + \rho u_{11} &= L_6, \end{aligned} \quad (2.25)$$

де

$$\begin{aligned}
L_1 &= C_0 + C_\rho \rho_0 + C_u u_0 - \rho_1 (B_0 + B_\rho \rho_0 + B_u u_0), \\
L_2 &= C_1 + C_\rho \rho_1 + C_u u_1 - \rho_1 (B_1 + B_\rho \rho_1 + B_u u_1), \\
L_3 &= D_0 + D_\rho \rho_0 + D_u u_0 - u_1 (B_0 + B_\rho \rho_0 + B_u u_0), \\
L_4 &= D_1 + D_\rho \rho_1 + D_u u_1 - u_1 (B_1 + B_\rho \rho_1 + B_u u_1), \\
L_5 &= -\rho_1 u_0 - \rho_0 u_1, \\
L_6 &= -2\rho_1 u_1.
\end{aligned}$$

Складемо систему лінійних рівнянь (2.25) відносно других похідних функцій ρ та u . Ця система буде сумісна, коли виконуватиметься умова

$$L_5 - L_1 - uL_2 + BL_6 - \rho L_4 = 0. \quad (2.26)$$

Виберемо вільну змінну ρ_{11} . Тоді

$$\begin{cases}
\rho_{00} = L_1 - BL_2 + B^2 \rho_{11}, \\
\rho_{01} = L_2 - B\rho_{11}, \\
u_{00} = L_3 - BL_4 + \frac{B^2}{\rho} [L_6 - L_2 + (B - u)\rho_{11}], \\
u_{01} = L_4 - \frac{B}{\rho} [L_6 - L_2 + (B - u)\rho_{11}], \\
u_{11} = \frac{1}{\rho} [L_6 - L_2 + (B - u)\rho_{11}].
\end{cases} \quad (2.27)$$

Щоб визначити перші похідні функцій ρ та u , складаємо систему з другого рівняння системи (2.19) та системи (2.23). Оскільки ранг одержаної системи 3, а кількість змінних - 4, то буде одна вільна змінна, за яку вважатимемо ρ_1 . Отже, маємо

$$\begin{cases}
\rho_0 = C - B\rho_1 \\
u_1 = \frac{1}{\rho} [(B - u)\rho_1 - C] \\
u_0 = D - \frac{B}{\rho} [(B - u)\rho_1 - C].
\end{cases} \quad (2.28)$$

Розв'язуючи одночасно перше рівняння системи (2.19) та останнє рівняння системи (2.27), визначаємо

$$\begin{aligned}
\rho_{11} &= \frac{1}{B - u} \left\{ \frac{\rho_1}{\lambda} [F\rho + (B - u)^2] + \frac{1}{\lambda} (Cu - D\rho - BC) + \right. \\
&+ \frac{2\rho_1}{\rho} [(B - u)\rho_1 - C] + \frac{1}{\rho} (C_u - B_u \rho_1) [(B - u)\rho_1 - C] + \\
&+ C_1 + C_\rho \rho_1 - B_1 \rho_1 - B_\rho \rho_1^2 \left. \right\}.
\end{aligned} \quad (2.29)$$

Підставляючи ρ_{11} з (2.29) в (2.27), одержуємо вираз всіх інших других похідних через ρ_1 . Потім, підставляючи вирази всіх похідних через ρ_1 в (2.24) та умову сумісності (2.26) і розщеплюючи ці рівняння за степенями ρ_1 , одержуємо рівняння (2.21).

Випадки I Б та II доводяться аналогічно.
Теорему доведено.

Для того, щоб виписати оператор (2.20) необхідно знайти розв'язок системи (2.21), що, очевидно, в загальному випадку зробити неможливо.

При деяких значеннях функції $F(\rho)$ вдалося знайти часткові розв'язки цих систем і за ними побудувати такі оператори:

$$\begin{aligned}
 F = \lambda; & \quad Q_1 = \partial_0 + u\partial_1 + k\rho^2\partial_\rho; \\
 F = \lambda; & \quad Q_2 = x_0\partial_1 + \frac{1}{mx_0}\partial_\rho + \partial_u; \\
 F = \lambda\rho; & \quad Q_3 = x_0\partial_1 - \frac{m}{x_0^2\rho^2}\partial_\rho + \partial_u; \\
 F = -k^2\rho; & \quad Q_4 = (x_0^2 + m^2)\partial_1 + \frac{m}{k}\partial_\rho + x_0\partial_u; \\
 F = \lambda\rho^3; & \quad Q_5 = 3x_0\partial_1 + \frac{2u}{\rho^3}\partial_\rho + \partial_u; \\
 F = f(\rho); & \quad Q_6 = x_1\partial_1 + u\partial_u; \\
 F = f(\rho); & \quad Q_7 = F(\rho)\partial_1 + \partial_\rho,
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

де λ, m, k - довільні константи.

Оператори Q_i використаємо для побудови анзаців, редукції та знаходження точних розв'язків системи (2.19). Одержані результати наведені нижче в такому порядку - анзац, редуковані рівняння; розв'язок редукованих рівнянь і розв'язок системи (2.19).

Оператор Q_1 ; $F = \lambda$.

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x_0u - x_1 = \varphi^1(u) \\ x_0 + \frac{c_1}{\rho} = \varphi^0(u) \end{cases} & \quad \begin{cases} \dot{\varphi}^1 = \varphi^0 \\ \ddot{\varphi}^1 = -\lambda cc_1 \dot{\varphi}^0 \end{cases} \\
 \begin{cases} \varphi^1 = \Phi(u) \\ \varphi^0 = \Phi'(u) \end{cases} & \quad \begin{cases} x_0u - x_1 = \Phi(u) \\ x_0 + \frac{c_1}{\rho} = \Phi(u) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Оператор Q_2 ; $F = \lambda$.

$$\begin{cases} \rho = \frac{x_1}{mx_0^2} + \varphi^0(x_0) \\ u = \frac{x_1}{x_0} + \varphi^1(x_0) \end{cases} \quad \begin{cases} x_0^2 \dot{\varphi}^0 + x_0 \varphi^0 + \frac{1}{m} \varphi^1 = 0 \\ x_0^2 \dot{\varphi}^1 + x_0 \varphi^1 + \frac{M}{m} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi^1 = \frac{1}{x_0} \left(c - \frac{M}{m} \ln x_0 \right) \\ \varphi^0 = \frac{1}{mx_0^2} \left[c - \frac{M}{m} (\ln x_0 + 1) \right] + \\ + \frac{k}{x_0} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \frac{x_1}{mx_0^2} \left[x_1 - \frac{M}{m} \times \right. \\ \times (\ln x_0 + 1) + c \left. \right] + \frac{k}{x_0} \\ u = \frac{1}{x_0} \left(c + x_1 - \frac{M}{m} \ln x_0 \right) \end{cases}$$

Оператор Q_3 ; $F = \lambda \rho$.

$$\begin{cases} \frac{\rho^2}{2} = -\frac{mx_1}{x_0^3} + \varphi^0(x_0) \\ u = \frac{x_1}{x_0} + \varphi^1(x_0) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}^0 - \frac{m}{x_0^3} \varphi^1 + \frac{2}{x_0} \varphi^0 = 0 \\ \dot{\varphi}^1 + \frac{\varphi^1}{x_0} - \frac{Mm}{x_0^3} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi^1 = \frac{1}{x_0} \left(c_1 - \frac{Mm}{x_0} \right) \\ \varphi^0 = \frac{1}{x_0^2} \left(\frac{Mm^2}{2x_0^2} - \frac{mc_1}{x_0} + c_2 \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\rho^2}{2} = -\frac{mx_1}{x_0^2} \left(\frac{Mm^2}{2x_0^2} - \right. \\ \left. - \frac{mx_1}{x_0} + c_2 \right) \\ u = \frac{1}{x_0} \left(x_1 - \frac{Mm}{x_0} \right) \end{cases}$$

Оператор Q_4 ; $F = -k^2 \rho$.

$$\begin{cases} \rho = \frac{mx_1}{k(x_0^2 + m^2)} + \varphi^0(x_0) \\ u = \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + m^2} + \varphi^1(x_0) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}^0 (x_0^2 + m^2) + x_0 \varphi^0 + \\ + \frac{m}{k} \varphi^1 = 0 \\ \dot{\varphi}^1 (x_0^2 + m^2) + x_0 \varphi^1 - \\ - km \varphi^0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi^0 = \frac{1}{km} \frac{c_2 m^2 - c_1 x_0}{x_0^2 + m^2} \\ \varphi^1 = \frac{c_1 + c_2 x_0}{x_0^2 + m^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \frac{m^2 x_1 - c_1 x_0}{km(x_0^2 + m^2)} \\ u = \frac{c_1 + x_0 x_1}{x_0^2 + m^2} \end{cases}$$

Оператор Q_5 ; $F = \rho^3$.

$$\begin{cases} \frac{\rho^4}{4} = \frac{x_1^2}{9x_0^2} + \frac{2\varphi^1 x_1}{3x_0} + \varphi^0(x_0) \\ u = \frac{x_1}{3x_0} + \varphi^1(x_0) \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 \dot{\varphi}^1 - \varphi^1 = 0 \\ 3x_0 \dot{\varphi}^0 + 4\varphi^0 + 2(\varphi^1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^1 = \frac{c_1}{x_0} \\ \varphi^0 = \frac{c_1^2}{x_0^2} + \frac{c_2}{x_0^{4/3}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^4}{4} = \frac{x_1^2}{9x_0^2} + \frac{2c_1x_1}{3x_0^2} + \varphi^0(x_0) \\ u = \frac{x_1}{3x_0} + \frac{c_2}{x_0^{4/3}} \end{array} \right.$$

Оператор Q_6 ; $F = f(\rho)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \varphi^0(x_0) \\ u = x_1\varphi^1(x_0) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}^0 = -\varphi^0\varphi^1 \\ \dot{\varphi}^1(\varphi^1)^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^0 = \frac{c_2}{x_0 + c_1} \\ \varphi^1 = \frac{1}{x_0 + c_1} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{c_2}{x_0 + c_1} \\ u = \frac{x_1}{x_0 + c_1} \end{array} \right.$$

Оператор Q_7 ; $F = f(\rho)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int F(\rho)d\rho = x_1 + \varphi^0(x_0) \\ u = \varphi^1(x_0) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{\varphi}^0 + \varphi^1 = 0 \\ \dot{\varphi}^1 = -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^0 = \frac{x_0^2}{2} - c_1x_0 + c_2 \\ \varphi^1 = -x_0 + c_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \int F(\rho)d\rho = x_1 + \frac{x_0^2}{2} - c_1x_0 \\ u = c_2 - x_0 \end{array} \right.$$

Через Φ позначено довільну гладку функцію.

У випадку довільної кількості змінних в рівняннях (1.1) дослідження умовної симетрії пов'язано з громіздкими перетвореннями.

Деякі з операторів умовної симетрії n -вимірних рівнянь (1.1) можуть бути одержані безпосереднім узагальненням операторів (2.30). Такі узагальнення наведені нижче.

Оператор $Q_a = x_0\partial_a + \frac{\alpha_a}{mx_0}\partial_\rho + \partial_{u^a}$; $F = \mu$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{m\omega^2} + \varphi^0(\omega) \\ \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega} + \vec{\varphi}(\omega) \\ \omega = x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} + \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega} + \frac{M\vec{\alpha}}{m\omega^2} = 0 \\ \frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{m\omega^2} + \frac{\varphi^0}{\omega} + \dot{\varphi}^0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = \frac{k\vec{\alpha}}{\omega} - \frac{M\vec{\alpha} \ln \omega}{m\omega} \\ \varphi^0 = \frac{k}{m\omega^2} + \frac{\lambda}{\omega} + \\ + \frac{M}{m^2 + \omega^2} (\ln \omega + 1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{\vec{\alpha}\vec{x} + k}{mx_0^2} - \frac{M(\ln x_0 + 1)}{m^2 x_0^2} + \\ + \frac{\lambda}{x_0} \\ \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{x_0} - \frac{M\vec{\alpha} \ln x_0}{mx_0} \\ + \frac{k\vec{\alpha}}{x_0} \end{array} \right.$$

Оператор $Q_a = x_0 \partial_a + \frac{m\alpha_a}{\rho x_0^2} \partial_\rho + \partial_{u^a}; \quad F = \mu \rho.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^2}{2} = -\frac{m(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega^3} + \varphi^0(\omega) \\ \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega} + \vec{\varphi}(\omega) \\ \omega = x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} + \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega} - \frac{M\vec{\alpha}}{\omega^3} = 0 \\ \dot{\varphi}^0 - \frac{m\vec{\alpha}\vec{\varphi}}{\omega^3} + \frac{2\varphi^0}{\omega} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = \frac{k\vec{\alpha}}{\omega} - \frac{M\vec{\alpha}}{\omega^2} \\ \varphi^0 = -\frac{mk}{\omega^3} + \frac{Mm^2}{2\omega^4} + \frac{k}{\omega^2} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^2}{2} = -\frac{m(\vec{\alpha}\vec{x})}{x_0^3} + \frac{k}{x_0^2} \\ + \frac{Mm^2}{x_0^4} + \frac{k}{x_0^2} \\ \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x} + k)}{x_0} - \frac{Mm\vec{\alpha}}{x_0^2} \end{array} \right.$$

Оператор $Q_a = (x_0^2 + m^2) \partial_a + \frac{m\alpha_a}{k} \partial_\rho + x_0 \partial_{u^a}; \quad F = -k^2 \rho.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{m(\vec{\alpha}\vec{x})}{k(\omega^2 + m^2)} + \varphi^0(\omega) \\ \vec{u} = \frac{\omega\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{\omega^2 + m^2} + \vec{\varphi}(\omega) \\ \omega = x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi}(\omega^2 + m^2) + \omega\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{\varphi}) - \\ - km\vec{\alpha}\varphi^0 = 0 \\ \dot{\varphi}^0(\omega^2 + m^2) + \frac{m\vec{\alpha}\vec{\varphi}}{k} + \\ + \omega\varphi^0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = \frac{\vec{\alpha}(c_1 + \omega c_2)}{\omega^2 + m^2} \\ \varphi^0 = \frac{c_2 m^2 - c_1 \omega}{km(\omega^2 + m^2)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = [m^2(\vec{\alpha}\vec{x} + c_2) - c_1 x_0] \\ \times \frac{km}{x_0^2 + m^2} \\ \vec{u} = \frac{x_0 \vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x} + c_2) + c_1 \vec{\alpha}}{x_0^2 + m^2} \end{array} \right.$$

Оператор $Q_a = (2n+1)x_0\partial_a + \frac{2nu^a}{\rho^3}\partial_\rho + \partial_{u^a}; \quad F = \rho^3.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^4}{4} = \frac{n}{2n+1} \frac{\vec{x}^2}{\omega^2} + \frac{2n}{2n+1} \frac{\vec{x}\vec{\varphi}}{\omega} + \\ + \varphi^0(\omega) \\ \vec{u} = \frac{\vec{x}}{(2n+1)\omega} + \vec{\varphi}(\omega) \\ \omega = x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega\vec{\varphi} + \vec{\varphi} = 0 \\ (2n+1)\omega\dot{\varphi}^0 + 4\omega\varphi^0 + \\ + 2n\vec{\varphi}^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = \frac{\vec{\lambda}}{\omega} \\ \varphi^0 = \frac{n\vec{\lambda}^2}{\omega^2} + k\omega^{-\frac{4n}{2n+1}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^4}{4} = \frac{n}{2n+1} \frac{\vec{x}^2}{x_0^2} + \frac{n\vec{\lambda}^2}{x_0^2} + \\ + \frac{2n}{2n+1} \frac{\vec{x}\vec{\lambda}}{x_0^2} + kx_0^{-\frac{4n}{2n+1}} \\ \vec{u} = \frac{\vec{x}}{(2n+1)x_0} + \frac{\vec{\lambda}}{x_0} \end{array} \right.$$

Оператор $Q_a = (2n+1)x_0\partial_a + \frac{x_a - x_0u^a}{x_0\rho^3}\partial_\rho + \partial_{u^a}; \quad F = \rho^3.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^4}{4} = \frac{n}{2n+1} \frac{\vec{x}^2}{\omega^2} - \frac{1}{2n+1} \frac{\vec{x}\vec{\varphi}}{\omega} + \\ + \varphi^0(\omega) \\ \vec{u} = \frac{\vec{x}}{(2n+1)\omega} + \vec{\varphi}(\omega) \\ \omega = x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = 0 \\ (2n+1)\omega\dot{\varphi}^0 + 4\omega\varphi^0 - \\ - \vec{\varphi}^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = \vec{\lambda} \\ \varphi^0 = \frac{\vec{\lambda}^2}{4n} + k\omega^{-\frac{4n}{2n+1}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^4}{4} = \frac{n}{(2n+1)^2} \frac{\vec{x}^2}{x_0^2} + \frac{\vec{\lambda}^2}{4n} - \\ - \frac{1}{2n+1} \frac{\vec{x}\vec{\lambda}}{x_0^2} + kx_0^{-\frac{4n}{2n+1}} \\ \vec{u} = \frac{\vec{x}}{(2n+1)x_0} + \vec{\lambda} \end{array} \right.$$

Оператор $Q_a = 3x_0\partial_a + \frac{2\alpha_a}{\rho^3}\vec{\alpha}\vec{u}\partial_\rho + \partial_{u^a}; \quad F = \rho^3.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^4}{4} = \left(\frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{3\omega} \right)^2 + \frac{2(\vec{\alpha}\vec{x})(\vec{\alpha}\vec{\varphi})}{3\omega} + \\ + \varphi^0(\omega) \\ \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{3\omega} + \vec{\varphi}(\omega) \\ \omega = x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega\vec{\varphi} + \vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{\varphi}) = 0 \\ \omega\dot{\varphi}^0 + \frac{4}{3}\varphi^0 + \frac{2}{3}(\vec{\alpha}\vec{\varphi})^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = \frac{k\vec{\alpha}}{\omega} \\ \varphi^0 = \frac{k^2}{\omega^2} + \lambda\omega^{-4/3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^4}{4} = \left(\frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{3x_0} \right)^2 + \frac{2k(\vec{\alpha}\vec{x})}{3x_0} + \\ + \frac{k^2}{x_0^2} + \lambda x_0^{-4/3} \\ \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{3x_0} + \frac{k\vec{\alpha}}{x_0} \end{array} \right.$$

Оператор $Q_a = 3x_0\partial_a + \frac{\alpha_a}{x_0\rho^3}(\vec{\alpha}\vec{x} - x_0\vec{\alpha}\vec{u})\partial_\rho + \partial_{u^a}; \quad F = \rho^3.$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^4}{4} = \left(\frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{3\omega} \right)^2 - \frac{(\vec{\alpha}\vec{x})(\vec{\alpha}\vec{\varphi})}{3\omega} + \\ + \varphi^0(\omega) \\ \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{3\omega} + \vec{\varphi}(\omega) \\ \omega = x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = 0 \\ \omega\dot{\varphi}^0 + \frac{4}{3}\varphi^0 - \frac{2}{3}(\vec{\alpha}\vec{\varphi})^2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = \vec{\lambda} \\ \varphi^0 = \frac{(\vec{\alpha}\vec{\lambda})}{4} + k\omega^{-4/3} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho^4}{4} = \left(\frac{\vec{\alpha}\vec{x}}{3x_0} \right)^2 + \frac{(\vec{\alpha}\vec{\lambda})^2}{4} - \\ - \frac{(\vec{\alpha}\vec{x})(\vec{\alpha}\vec{\lambda})}{3x_0} + kx_0^{-4/3} \\ \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{3x_0} + \vec{\lambda} \end{array} \right.$$

Оператор $Q_a = \vec{\alpha}\vec{x}\partial_a + \alpha_a u^b\partial_{u^b}; \quad F = f(\rho).$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \varphi^0(\omega) \\ \vec{u} = \vec{\alpha}\vec{x}\vec{\varphi}(\omega) \\ \omega = x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} + (\vec{\alpha}\vec{\varphi})\vec{\varphi} = 0 \\ \dot{\varphi}^0 + (\vec{\alpha}\vec{\varphi})\varphi^0 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = \frac{\vec{\alpha}}{\omega + \lambda} \\ \varphi^0 = \frac{k}{\omega + \lambda} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{k}{x_0 + \lambda} \\ \vec{u} = \frac{\vec{\alpha}(\vec{\alpha}\vec{x})}{x_0 + \lambda} \end{array} \right.$$

Оператор $Q_a = f\partial_a + \vec{\alpha}\partial_\rho; \quad F = f(\rho).$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int f(\rho)d\rho = \vec{\alpha}\vec{x} + \varphi^0(\omega) \\ \vec{u} = \vec{\varphi}(\omega) \\ \omega = x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} + \vec{\alpha} = 0 \\ \dot{\varphi}^0 + \vec{\alpha}\vec{\varphi} = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\varphi} = \vec{\lambda} - \vec{\alpha}\omega \\ \varphi^0 = \frac{\omega^2}{2} - \vec{\lambda}\vec{\alpha}\omega + k \\ \vec{u} = \vec{\lambda} - \vec{\alpha}x_0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \int f(\rho)d\rho = \vec{\alpha}\vec{x} + \frac{x_0^2}{2} - \\ - \vec{\lambda}\vec{\alpha}x_0 + k \\ \end{array} \right.$$

Треба зазначити, що n -вимірне узагальнення оператора Q_1 знайти не вдалося, а оператор Q_5 узагальнено чотирма різними способами.

Таким чином, наведені результати вказують на те, що рівняння Нав'є-Стокса мають сховані симетрії, які не можуть бути одержані за допомогою алгоритма Лі. Ці симетрії можна вдало використати для знаходження точних розв'язків даних рівнянь.

§ 2.3 Нелінійна система рівнянь двофазної рідини

Ліівську симетрію багатовимірної нелінійної системи рівнянь теплопровідності (1.51)

$$\begin{cases} u_0 = f(v)\Delta u; \\ v_0 = \Delta u \end{cases}$$

було розглянуто вище. В цьому параграфі дослідимо умовну симетрію одновимірної системи

$$\begin{cases} u_0 = f(v)u_{11}; \\ v_0 = u_{11}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Оператор умовної інваріантності шукаємо у вигляді

$$Q = A(x, u, v)\partial_0 + B(x, u, v)\partial_1 + C(x, u, v)\partial_u + D(x, u, v)\partial_v, \quad (2.32)$$

де A, B, C, D - гладкі функції. Диференціальний оператор першого порядку Q діє на многовиді $(x, u, v) \in R_4$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2.5 *Рівняння (2.31) Q -умовно інваріантні відносно оператора (2.32), якщо функції A, B, C і D задовольняють системі диференціальних рівнянь в одному з наступних випадків:*

I. $A \neq 0$ (не обмежуючи загальності можна покласти $A = 1$):

$$1. \quad B \neq 0 \quad (2.33)$$

$$fC_0 - D_0 + \frac{B_0}{B}(D - fC) = 0;$$

$$fC_v + f^2C_u - D_v - D_u f + fC + \frac{1}{B}(B_v + B_u f)(D - fC) = 0;$$

$$f^2(fB_{uu} + 2B_{uv}) + fB_{vv} - fB_v = 0;$$

$$\begin{aligned} C_0 - D_{11} - \frac{C}{B}(B_0 + 2D_{1v}) - \frac{D}{B}(2D_{1u} - B_{11}) - \frac{D^2}{B^2}(D_{uu} - 2B_{1u} - \\ - \frac{D}{B}B_{uu}2B_{uv}\frac{C}{B}) - \frac{2CD}{B^2}(D_{uv} - B_{1v}) - \frac{C^2}{B^2}(D_{vv} - B_{vv}\frac{D}{B}) + \\ + \frac{1}{B^2}(\frac{D}{B}B_v - D_v)\left[\left(C_1 - \frac{D_1}{f}\right)B + C\left(C_v - \frac{D_v}{f}\right) + D\left(C_u - \frac{D_u}{f}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{B}\left(\frac{D}{f} - C\right)(BB_1 + CB_v + DB_u)\right] = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B(C_u f - D_u + C_v + 2B_1) - C(fB_u - B_v) + B_0 + 2D_{1v} + 3DB_u + \\
& + f(2D_{1u} - B_{11}) + \frac{2Df}{B^2}(BD_{uu} - 2BB_{1u} - DB_{uu} - 2CB_{uv}) - \\
& - \frac{D^2}{B^2}(fB_{uu} + 2B_{uv}) + \frac{2}{B}(Cf + D)(D_{uv} - B_{1v}) - \frac{C^2}{B^2}fB_{vv} + \\
& + \frac{2C}{B^2}(BD_{vv} - DB_{vv}) - \frac{1}{B^2}(B_v D - BD_v) \left[\left(C_v - \frac{D_v}{f} \right) + \right. \\
& + f \left(C_u - \frac{D_u}{f} \right) + \frac{1}{B} \left(\frac{D}{f} - C \right) (B_v + fB_u) - \frac{1}{f} (B^2 + fC) \left. \right] - \\
& - \frac{fB_v}{B^2} \left[\left(C_1 - \frac{D_1}{f} \right) B + C \left(C_v - \frac{D_v}{f} \right) + D \left(C_u - \frac{D_u}{f} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{B} \left(\frac{D}{f} - C \right) (BB_1 + CB_v + DB_u) \left. \right] = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4Df}{B^2}B_{uv} - 2fB_u - B_v + \frac{f^2}{B^2}(2BB_{1u} - BD_{uu} + 3DB_{uu} + 2CB_{uv}) - \\
& - \frac{2f}{B}(D_{uv} - B_{1v}) + \frac{2Cf}{B^2}B_{vv} - \frac{1}{B^2}(BD_{vv} - DB_{vv}) - \\
& - \frac{f}{fB^2}(DB_v - BD_v) + \frac{B_v f}{B^2} \left[C_v - \frac{D_v}{f} + f \left(C_u - \frac{D_u}{f} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{B} \left(\frac{D}{f} - C \right) (B_v + fB_u) - \frac{1}{f} (B^2 - fC) \left. \right] = 0.
\end{aligned}$$

2. $B = 0$

$$\begin{aligned}
D &= fC; \\
D_v &= D_{uu} = D_{1u} = 0; \\
C_0 + CC_v - D_{11} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

II. $A = 0$ (не обмежуючи загальності можна покласти $B = 1$): $D_0 - fC_0 + (D_1 + DD_u + CD_v)(fD_u + D_v - fC - f^2C_u - fC_v) = 0;$

$$C_0 - D_{11} - 2DD_{1u} - 2CD_{1v} - D^2D_{uu} - 2CDD_{uv} - C^2D_{vv} + \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
& + (D_1 + DD_u + CD_v)(fC_u + C_v - D_u) - D_v(C_1 + CC_v + DC_u) = 0.
\end{aligned}$$

Доведення теореми аналогічне до доведення теореми 2.4.

Розв'язати системи (2.33)-(2.35) в загальному випадку складно, а отже не вдалося виписати оператор (2.32), але були знайдені деякі часткові розв'язки цих систем і за ними побудовані оператори:

$$\begin{aligned}
f &= \frac{\lambda}{\sqrt{v}}; & Q_1 &= x_1^2 \partial_0 + 12\lambda \sqrt{v} \partial_v + 12\lambda^2 \partial_u; \\
f &= \frac{\lambda}{\sqrt{v}}; & Q_2 &= \partial_0 + 2\lambda W(x_1) \sqrt{v} \partial_v + 2\lambda^2 W(x_1) \partial_u, \\
&& \text{де } W &\text{— функція Вейєрштраса} \\
f &= v^2; & Q_3 &= \partial_1 + \partial_v + (v^2 - x_1^2) \partial_u; \\
f &= 2v; & Q_4 &= \partial_1 + \partial_v + (v + x_0) \partial_u; \\
f &= \frac{\lambda}{v}; & Q_5 &= \partial_1 + \frac{\Phi_{11}(x_1)}{\Phi_1(x_1)} v \partial_v + \Phi(x_1) \partial_u; \\
f &= \frac{\lambda}{v}; & Q_6 &= \exp(-u) \partial_1 + v \partial_v + \partial_u; \\
f &\text{— довільна} & Q_7 &= \partial_0 + \partial_1 + \left(\frac{u - F(v)}{x_1} + \lambda x_1 \right) \partial_u,
\end{aligned}$$

$$\text{де } F(v) = \int f dv;$$

$$\begin{aligned}
f &\text{— довільна} & Q_8 &= \partial_0 + \partial_1 + \sqrt{2\lambda(u + F)} \partial_u; \\
f &\text{— довільна} & Q_9 &= \partial_0 + \partial_1 + \left(1 \pm \sqrt{1 + 2\lambda(u - F - x_1)} \right) \partial_u;
\end{aligned} \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
f &= v; & Q_{10} &= \partial_0 + x_1 \partial_1 - 2v \partial_v - 2\partial_u; \\
f &= v^n; & Q_{11} &= \partial_0 + x_1 \partial_1 + \frac{2}{n} v \partial_v + \frac{2}{n} v^{n+1} \partial_u; \\
f &= \exp v; & Q_{12} &= \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\partial_v + 2 \exp v \partial_u; \\
f &= v^{-4/3}; & Q_{13} &= \partial_0 + x_1^2 \partial_1 - 3x_1 v \partial_v - 3x_1 v^{-1/3} \partial_u; \\
f &= \frac{1}{(\lambda_1 F^2 + 3k)}; & Q_{14} &= kx_1^2 \partial_0 - x_1 \partial_1 - \frac{F}{f} \partial_v - F \partial_u,
\end{aligned}$$

$$\text{де } F(v) = \int f dv.$$

Оператори Q_i були використані для побудови анзаців та редукції системи (2.31). Нижче наведені відповідні до кожного оператора анзац і одержані за допомогою цього анзацу редуковані рівняння.

Оператор Q_1 ; $f = \frac{\lambda}{\sqrt{v}}$.

$$\begin{cases} \sqrt{v} = \varphi^0(x_1) + 6\lambda \frac{x_0}{x_1^2} \\ u = \varphi^1(x_1) + 12\lambda^2 \frac{x_0}{x_1^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi^1(x_1) - \text{довільна} \\ \text{диференційовна функція} \\ \varphi^0(x_1) = \frac{x_1^2}{12\lambda} \ddot{\varphi}^1 \end{cases}$$

Оператор Q_2 ; $f = \frac{\lambda}{\sqrt{v}}$.

$$\begin{cases} \sqrt{v} = \varphi^0(x_1) + \lambda x_0 W(x_1) \\ u = \varphi^1(x_1) + 2\lambda^2 x_0 W(x_1) \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi^1(x_1) - \text{довільна} \\ \text{диференційовна функція} \\ \varphi^0(x_1) = \frac{1}{2\lambda W(x_1)} \ddot{\varphi}^1 \end{cases}$$

Оператор Q_3 ; $f = v^2$.

$$\begin{cases} v = x_1 + \varphi^0(x_0) \\ u = \frac{1}{3} [(x_1 + \varphi^0)^3 - x_1^3] + \\ + \varphi^1(x_0) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}^1 = 0 \\ 2\varphi^0 = \dot{\varphi}^0 \end{cases}$$

Оператор Q_4 ; $f = 2v$.

$$\begin{cases} v = x_1 + \varphi^0(x_0) \\ u = \frac{1}{2}(x_0 + v)^2 + \varphi^1(x_0) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}^0 = 1 \\ \dot{\varphi}^1 = -2x_0 \end{cases}$$

Оператор Q_5 ; $f = \frac{\lambda}{v}$.

$$\begin{cases} v = \Phi_1(x_1)\varphi^0(x_0) \\ u = \int \Phi(x_1)dx_1 + \varphi^1(x_0) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}^0 = 1 \\ \dot{\varphi}^1 = \frac{\dot{\varphi}^0}{\lambda\varphi^0} \end{cases}$$

Оператор Q_6 ; $f = \frac{\lambda}{v}$.

$$\begin{cases} v = \frac{\varphi^0(x_0)}{\varphi^1(x_0) - x_1} \\ u = \ln \frac{1}{\varphi^1(x_0) - x_1} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}^0 = 0 \\ \dot{\varphi}^1 \varphi^0 = -1 \end{cases}$$

Оператор Q_7 ; f -довільна.

$$\begin{cases} v = \varphi^0(x_0 - x_1) \\ u = F(v) + \lambda x_1^2 + x_1 \varphi^1(x_0 - x_1) \end{cases} \begin{cases} \dot{\varphi}^1 = 0 \\ f(\varphi^0) \ddot{\varphi}^0 + \dot{f}(\varphi^0) (\dot{\varphi}^0)^2 - \\ - \dot{\varphi}^0 + 2\lambda = 0 \end{cases}$$

Оператор Q_8 ; f -довільна.

$$\begin{cases} v = \varphi^0(x_0 - x_1) \\ u = \frac{1}{2\lambda} (\lambda x_1 + \varphi^1(x_0 - x_1))^2 + \\ + F(v) \end{cases} \begin{cases} \dot{\varphi}^1 = 0 \\ f(\varphi^0) \ddot{\varphi}^0 + \dot{f}(\varphi^0) (\dot{\varphi}^0)^2 = 0 \end{cases}$$

Оператор Q_9 ; f -довільна.

$$\begin{cases} v = \varphi^0(x_0 - x_1) \\ u = \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{x_1}{2} - 1 + \varphi^1(x_0 - x_1) \right] + \\ + x_1 - F(v) \end{cases} \begin{cases} \dot{\varphi}^1 = 0 \\ f(\varphi^0) \ddot{\varphi}^0 + \dot{f}(\varphi^0) (\dot{\varphi}^0)^2 + \\ + \frac{1}{2\lambda} \dot{\varphi}^0 = 0 \end{cases}$$

Оператор Q_{10} ; $f = v$.

$$\begin{cases} v = x_1^{-2} \varphi^0(\ln x_1 - x_0) \\ u = -2x_0 + \varphi^1(\ln x_1 - x_0) \end{cases} \begin{cases} \ddot{\varphi}^1 - \dot{\varphi}^1 = \dot{\varphi}^0 \\ \dot{\varphi}^0 = \varphi^0(2 + \dot{\varphi}^1) \end{cases}$$

Оператор Q_{11} ; $f = v^n$.

$$\begin{cases} v = x_1^{2/n} \varphi^0(\ln x_1 - x_0) \\ u = \frac{1}{n+1} v^{n+1} + \varphi^1(\ln x_1 - x_0) \end{cases} \begin{cases} \dot{\varphi}^1 = 0 \\ \left(\frac{2}{n} \varphi^0 + \dot{\varphi}^0 \right) \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{n \dot{\varphi}^0}{\varphi^0} \right) \\ + \frac{2}{n} \dot{\varphi}^0 + \ddot{\varphi}^0 + \dot{\varphi}^0 (\varphi^0)^{-n} = 0 \end{cases}$$

Оператор Q_{12} ; $f = \exp v$.

$$\begin{cases} v = 2 \ln x_1 + \varphi^0(\ln x_1 - x_0) \\ u = \exp(x_1^2 \varphi^0) + \varphi^1(\ln x_1 - x_0) \end{cases} \begin{cases} \dot{\varphi}^1 = 0 \\ \ddot{\varphi}^0 + (\dot{\varphi}^0)^2 + 2 + \\ + \dot{\varphi}^0 [3 + \exp(-\varphi^0)] = 0 \end{cases}$$

Оператор Q_{13} ; $f = v^{-4/3}$.

$$\begin{cases} v = x_1^{-3} \varphi^0 \left(\frac{1}{x_1} + x_0 \right) \\ u = -3x_1 (\varphi^0)^{-1/3} + \\ + \varphi^1 \left(\frac{1}{x_1} + x_0 \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}^1 = 0 \\ \frac{4}{3} (\dot{\varphi}^0)^2 - \varphi^0 \ddot{\varphi}^0 + \dot{\varphi}^0 (\varphi^0)^{7/3} = 0 \end{cases}$$

Оператор Q_{14} ; $f = \frac{1}{(\lambda_1 F^2 + 3k)}$.

$$\begin{cases} F(v) = x_1 \varphi^0(\omega) \\ u = x_1 \varphi^0(\omega) + \varphi^1(\omega) \\ \omega = 6kx_1^2 + 12x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}^1 = 0 \\ 12k\ddot{\varphi}^0 - \dot{\varphi}^0 (\varphi^0)^2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши редуковані рівняння і застосувавши відповідні анзаци, одержимо розв'язки одновимірної системи рівнянь теплопровідності (2.31). Нижче наведені деякі з них.

$$\begin{cases} \sqrt{v} = \frac{x_1^2}{12\lambda} \ddot{\varphi}^1(x_1) + 6\lambda \frac{x_0}{x_1^2} \\ u = \varphi^1(x_1) + 12\lambda \frac{x_0}{x_1^2}, \end{cases}$$

де $\varphi^1(x_1)$ - довільна диференційовна функція.

$$\begin{cases} \sqrt{v} = \frac{\ddot{\varphi}^1(x_1)}{2\lambda W(x_1)} + \lambda x_0 W(x_1) \\ u = \varphi^1(x_1) + 2\lambda^2 x_0 W(x_1) \end{cases}$$

де $\varphi^1(x_1)$ - довільна диференційовна функція,

W -функція Вейер-штраса.

$$\begin{cases} v = x_1 + c_1 \exp 2x_0 \\ u = \frac{1}{3} [(x_1 + c_1 \exp 2x_0)^3 - x_1^3] + c_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = x_1 + x_0 + c_1 \\ u = \frac{1}{2} (2x_0 + x_1 + c_1)^2 - x_0^2 + c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \Phi_1(x_1)(x_0 + \lambda) \\ u = \int \Phi(x_1)dx_1 + \lambda_1 \ln(x_0 + \lambda) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\lambda - (x_0 + x_1)} \\ u = \ln \frac{1}{\lambda - (x_0 + x_1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v^2 = c_1 - 2\lambda(x_0 - x_1) \\ u = -\frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{3} (c_1 - 2\lambda(x_0 - x_1))^{3/2} + \frac{1}{4} (c_1 - 2\lambda(x_0 - x_1))^4 \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^v f(\tau) d\tau = x_0 - x_1 \\ u = \frac{1}{2\lambda} (\lambda x_1 + \lambda_1)^2 + F(v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^v \frac{f(\tau)}{c_1 - \tau} d\tau = x_0 - x_1 \\ u = \frac{1}{2\lambda} \left[\frac{x_1}{2} - 1 - 2\lambda F(v) + c_1(x_0 - x_1) \right] + x_1 \end{cases}$$

Підсумки

Перерахуємо основні результати, одержані в дисертації:

1. Проведена симетрійна класифікація узагальнених рівнянь Нав'є – Стокса в одно- та багатовимірних випадках для двох різних типів узагальнень.
2. Досліджені симетрійні властивості системи Нав'є – Стокса для потенціалу.
Знайдені нові класи точних розв'язків рівнянь Нав'є – Стокса.
Побудовані формули розмноження розв'язків цього рівняння.
3. Досліджені симетрійні властивості і проведено класифікацію нелінійної системи рівнянь двофазної рідини.
4. За допомогою ізоморфізму алгебри $AC(3)$ до алгебри $AO(1,4)$ були знайдені інваріанти цієї алгебри. Їх використання дало змогу редукувати систему двофазної рідини і знайти її точні розв'язки.
5. Проведена класифікація нелінійностей, при яких зберігається інваріантність відносно алгебри Галілея узагальненого рівняння Бюргерса.
6. Проведена класифікація симетрійних властивостей узагальненого рівняння Кортевега - де Фріза відносно алгебри Галілея.
7. Досліджена умовна симетрія та одержані точні розв'язки нелінійного рівняння дифузії.
8. Одержано ряд операторів умовної симетрії одно - та багатовимірних рівнянь Нав'є – Стокса, за якими побудовані інваріанти та проведена редукція. Знайдені деякі точні розв'язки цієї системи.

9. Досліджена умовна симетрія нелінійної системи рівнянь двофазної рідини.

Всі результати, які одержані в дисертації, нові і можуть бути використані в прикладних задачах теоретичної фізики, газо- та гідродинаміки тощо.

Література

- [1] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. - М.: Наука, 1974, 432 с.
- [2] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фушич В.И. Редукция и точные решения уравнения эйконала // Укр. мат. журн.- 1991.- 43, №4. - С.461 – 474.
- [3] Барут А., Рончка Р. Теория представления групп и ее приложения: В 2 т. - М.: Мир, 1980.- Т.1.- 455 с., т.2.- 386 с.
- [4] Биркгоф Г. Гидродинамика.- М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1963.- 244 с.
- [5] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981.- 448 с.
- [6] Боголюбов Н.Н., Широков Д.В. Квантовые поля.- М.: Наука, 1980. - 320 с.
- [7] Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп.- М.: Наука, 1965.- 588 с.
- [8] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. - 512 с.
- [9] Гейзенберг В. Введение в единую полевою теорию элементарных частиц. - М.:Мир, 1968.-239 с.
- [10] Дирак П. Принципы квантовой механики.- М.: Наука, 1979. - 480 с.
- [11] Дородницын В.А., Князева И.В., Свищевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву-

- мерном и трехмерном случаях / //Дифференц. уравнения. – 1983.– 19, N 7.– С. 1215 – 1224.
- [12] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения.- М.: Наука, 1986.- 759 с.
- [13] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов. Метод обратной задачи.- М.: Наука, 1980.- 324 с.
- [14] Ибрагимов Н.Х. Алфба группового анализа. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, Кибернетика", N8). М.: Знание, 1989, 48 с.
- [15] Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике
Успехи математических наук, т.47, выпуск 4(286), 1992, - с.83 – 144.
- [16] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983, - 280 с.
- [17] Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа. (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, Кибернетика", N7). М.: Знание, 1991 - 48 с.
- [18] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976, - 576 с.
- [19] Курант Р. Уравнения с частными производными.-М.: Мир, 1964.- 830 с.
- [20] Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951, Т.1 – 476 с., Т.2 – 544 с.
- [21] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Теоретическая физика. Т6. М.: Наука, 1988, - 736 с.
- [22] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости.- М.: Наука, 1987. - 246 с.

- [23] Миллер У. мл. Симметрия и разделение переменных. - М.: Мир, 1981. - 342 с.
- [24] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400 с.
- [25] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности // ДАН СССР, 1959. - 125, N3. - С. 492 - 295.
- [26] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. - М.: Мир, 1989, - 581 с.
- [27] Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. - М.: Наука, 1973. - 519 с.
- [28] Серов Н.И. Нелинейные волновые уравнения Ламе и Вейля // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. - С. 49-53.
- [29] Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности. // Укр. мат. журн. - 1990. - 42, N 10. С. 1370 - 1376.
- [30] Серов Н.И. Условная инвариантность нелинейного поливолнового уравнения относительно конформной алгебры // Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. - С. 65 - 67.
- [31] Серов М.І., Тулупова Л.О. Симетрійні властивості узагальнених рівнянь Нав'є - Стокса. Записки фізико-математичного факультету ПДП ім. В.Г. Короленка, 1996.
- [32] Серова М.М. О нелинейных уравнениях теплопроводности, инвариантных относительно группы Галилея // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики, 1985. - С.119 - 123.
- [33] Федоров Ф.И. Группа Лоренца. - М.: Наука, 1979. - 384 с.
- [34] Фушич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? .Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. Киев, Ин-т математики, 1987, с.4-16.

- [35] Фушич В.И. Об одном методе исследования групповых свойств интегро-дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн. -1981. -33, N6. - С. 834- 838.
- [36] Фушич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Доклады АН СССР. - 1979. - 246, N4. - С. 846 - 850.
- [37] Фушич В.И. О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решений, в:"Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.", Киев, Ин-т математики, 1985, с.4 - 13.
- [38] Фушич В.И. Симметрия в задачах математической физики, в:"Теоретико-алгебраические исследования в математической физике.", Киев, Ин-т математики, 1981, - с.6 - 28.
- [39] Фушич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики// Укр. мат. журн.- 1991.- 43, N 11. С. 1456 - 1470.
- [40] Фушич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея и Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. - Киев, Наукова думка, 1991. - 304 с.
- [41] Фушич В.И.,Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Галилея. Доклады АН Украины, 1989, сер. А, N4, - с.19-34
- [42] Фушич В.И.,Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре. Доклады АН Украины, 1989, сер. А, N5, - с.46-53
- [43] Фушич В.И.,Жданов Р.З.,Ревенко И.В. Общие решение нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала. УМЖ, 1991, N11, - с.1471-1487.
- [44] Фушич В.И.,Миронюк П.Й. Умовна симетрія і точні розв'язки рівняння нелінійної акустики. Доповіді АН УРСР, 1991, N6, - с.23-29.

- [45] Фушич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. Москва, Наука, 1990, - 400с.
- [46] Фушич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. Киев, Наукова думка, 1983, - 199 с.
- [47] Фушич В.И., Репета В.К., Серов Н.И. Нелиевская симметрия и точные решения одномерных уравнений газовой динамики. Доклады АН Украины, 1991, N11, - с.27-33.
- [48] Фушич В.И., Серов Н.И. Негрупповая симметрия некоторых нелинейных волновых уравнений // Докл. АН УССР.- 1991.- N9.- С. 45-49.
- [49] Фушич В.И., Серов М.И. Умовна інваріантність і точні розв'язки нелінійного рівняння акустики.// Доп. АН УРСР. Сер. А.- 1988, N 1.- С.28-32.
- [50] Фушич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности //Докл. АН УССР.- 1990.- Сер.А, N7.- С. 24-27.
- [51] Фушич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения уравнения Буссинеска //Симметрия и решения уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.- С. 95-102.
- [52] Фушич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность нелинейного волнового уравнения // Укр. мат. журн.- 1991.- 43, N3.- С. 394-399.
- [53] Фушич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности. Доклады АН Украины, 1992, N1, - с.26-30.
- [54] Фушич В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР.- 1990.- N11.- С. 15-18.
- [55] Фушич В.И., Серов Н.И., Репета В.К. Нелиевская симметрия и точные решения одномерных уравнений газовой динамики // Докл. АН УССР.- 1991.- N11.- С. 27-33.

- [56] Фушич В.И., Серов Н.И., Репета В.К. Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения // Докл. АН УССР.- 1991.- N5.- С. 29-36.
- [57] Фушич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР.- 1988.- Сер.А, N9.- С.17-20.
- [58] Фушич В.И., Серов Н.И., Штеленъ В.М. О некоторых точных решениях многомерных нелинейных уравнений Даламбера, Ливилля, эйконала и Дирака //Теоретико-групповые методы в физике. Труды 2-го международного семинара (Звенигород 1982). М.: Наука, 1983.
- [59] Фушич В.И., Серова М.М. О максимальной группе инвариантности и общем решении одномерных уравнений газовой динамики // Докл.АН СССР. -1983. -268, 5.- С. 1102-1104.
- [60] Фушич В.И., Славущкий С.Л. О нелинейном галилей - инвариантном обобщении уравнений Ламе // Докл.АН СССР. -1986. -287, N2. - С. 320- 323.
- [61] Фушич В.И.,Тычинин В.А. О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований. Киев, Институт математики, Препринт 82-33, 1982, – 53 с.
- [62] Фушич В.І.,Чопик В.І. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь. УМЖ, 1993, Т.45, N10, – с.1433–1443
- [63] Фушич В.И., Чопик В.И., Миронюк П.И. Условная инвариантность и точные решения трехмерных нелинейных уравнений акустики// Докл. АН УССР .Сер.А. - 1990. - N 9. - С. 24-27.
- [64] Фушич В.И., Штеленъ В.М., Попович Р.Е. О редукции уравнений Навье-Стокса к линейным уравнениям теплопроводности //Докл. АН УССР, 1992.- N2.-С.23-30.
- [65] Фушич В.И., Штеленъ В.М., Серов Н.И. Симметричный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики.- Киев, Наукова думка, 1989. – 339 с.

- [66] Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли.- М.:Гостехиздат, 1949.-396с.
- [67] Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразований. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1947.- 358 с.
- [68] Bluman G.W. and Cole I.D. Similarity methods for differential equations.- Berlin: Springer, 1974.- 332 p.
- [69] Bluman G.W., Cole I.D. The general similarity solution of the heat equation//J.Math.Mech.-1969.- 18, N 11.- P.1035-1042.
- [70] Bluman G.W.,Kumei S. Symmetries and differential equations. New York, Springer-Verlag, 1989.
- [71] Fushchich W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. A.- 1983.- 16.- P. 3645- 3658.
- [72] Fushchich W.I., Serov N.I., Shtelen W.M., Popovich R.E. Conditional symmetry of the linear heat equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy.- 1992.- N 12.
- [73] Fushchich W.I., Serov N.I., Tulupova L.A. The Conditional Invariance and Exact Solutions of the Nonlinear Diffusion Equation. // Dopovidi Ukr. Akademii Nauk.- 1993.- N4.- P. 37-40.
- [74] Fushchich W.I., Serov N.I., Tychinin W.A., Amerov T.K. On nonlocal symmetries of the nonlinear heat equation // Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy.- 1992.- N 11- P.27-33.
- [75] Fushchych W.,Shtelen W. and Serov N. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1993, 436 p.
- [76] Fushchich W.I., Shtelen W.M. and Slavutsky S.L. Reduction and exact solutions of the Navier-Stokes equations // J. Phys. A. : Math. Gen. - 1991. -24, N 4.-P.971-986.
- [77] Fushchych W.,Tsyfra I. On reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry.- J. Phys. A., 1987, V.20, N2, p.L45-L47.

- [78] Fushchych W., Tsyfra I. and Boyko V. Nonlinear Representations for Poincare and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields.- Journal of Nonlinear Math. Physics, 1994, V.1, N2, p.210-221.
- [79] Lie S. Vorlesungen uber continuerliche gruppen.- Leipzig: Teubner, 1893.- P. 805.
- [80] Lie S. Uber Differentialinvarianten.- Math. Ann.- 1884.- 24, N1.- P. 52-89.
- [81] Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen.- Leipzig: Teubner.- Bd. 1,2, 3.- 1888, 1890, 1893.
- [82] Olver P., Rosenau Ph. The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A. -1986. -144, N 3. -P. 107-112.
- [83] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P. and Zassenhaus . Subgroup of the Poincare group and their invariants//J.Math.Phys., 1976.- 17, N 6.- P.977-984.
- [84] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. 1. General method and the Poincare group // J. Math. Phys. -1975. -16, N 8. -P. 1597-1624.
- [85] Rideau G., Winternitz P. Nonlinear equations invariant under the Poincare, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time, Journ. Math. Phys., 1990, V.31, p.1095-1105.
- [86] Serov N.I., Fushchych B.W. On the new nonlinear equation with unique symmetry. - Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy, 1994, N9, p.49-50
- [87] Serov N.I., Tulupova L.A. Symmetry properties of the generalized Korteweg-de Vries and Burgers equations. Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy, 1994, N12, p.42-44.
- [88] Tulupova L.O. Symmetry and Reduction of the Generalized Nonlinear System of Two - Phase Liquid equations. JNMP, 1996, vol. 3, N 1-2, pp.214 - 219.

- [89] Tychinin V.A. The group classification of equations $u_0 = u^p u_{111}$ and $w_0 = w_{11}^k w_{111}$. *Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy*, 1992, N 10, p.24–28.
- [90] Webb G.M. Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers–heat equation system. - *J. Phys. A: Math. Gen*, 1990, V.23, N17, p.3885–3894

Тулупова Л.А. "Лиевская и условная симметрия нелинейных уравнений параболического типа"

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика. Институт математики НАН Украины, Киев, 1997.

Защищается диссертация, посвященная исследованию симметричных свойств нелинейных уравнений параболического типа. Проведена классификация ряда параболических уравнений относительно алгебр Галилея и конформной. Исследованы их симметричные свойства. Лиевская и условная симметрии были использованы для нахождения инвариантов алгебр Галилея $AG(1,3)$ и конформной $AC(3)$. С помощью инвариантов были построены анзацы и проведена редукция этих уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям или к дифференциальным уравнениям в частных производных с меньшим количеством переменных. Найдены новые классы точных решений некоторых уравнений математической физики, а также построены формулы размножения решений.

Tulupova L.O. "Lie's and Conditional Symmetry of Nonlinear Equations of Parabolic Type"

Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.03 – mathematical physics. Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 1996.

This thesis is devoted to investigation of symmetry properties of nonlinear equations of parabolic type. The classification of a number of parabolic equations was conducted with respect to the Galilean's and conformal algebras. The symmetry properties were investigated. Lie's and conditional symmetries were used for finding invariants of the Galilean's algebra $AG(1,3)$ and conformal algebra $AC(3)$. These invariants were used for building ansatzes and reduction equations to ordinary or partial differential equations with a lesser number of unknown values. New classes of exact solutions of some equations and formulae of generating solutions are received.

Ключові слова: симетрія, інваріантність, алгебра Лі, алгебра Галілея, алгебра Пуанкаре, конформна алгебра, нелінійний, рівняння, система, розв'язок, інваріант, анзац, редукція, оператор.