

ОРДЕНА ЛЕНИНА АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ЦИФРА Иван Михайлович

УДК 517.9:519.46

СИММЕТРИЙНЫЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И СПИНОРНОГО ПОЛЕЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения и
математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор ФУЦИЧ В.И.

Киев - 1986

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
В в е д е н и е -----	4
ГЛАВА I. Симметрия нелинейных уравнений для электромагнитного поля и некоторые их точные решения.	9
§ I. Симметрия уравнений Максвелла без материаль- ных уравнений.	II
§ 2. Материальные уравнения, инвариантные относи- тельно группы Галилея $G(1,3)$ и группы Шредингера.	2I
§ 3. Пуанкаре-инвариантные материальные уравнения	3I
§ 4. Уравнения Максвелла в среде в случае двух независимых переменных.	38
§ 5. Конформно-инвариантные материальные уравнения.	40
§ 6. Симметрия материальных уравнений Минковского	44
§ 7. Нелокальная симметрия уравнений Максвелла в среде.	50
§ 8. Точные решения конформно-инвариантных нелиней- ных уравнений для электромагнитного поля. . .	53
ГЛАВА II. Конформно-инвариантные уравнения для вектора- потенциала A_μ , спинорного поля и взаимодей- ствующих полей.	56
§ 9. Конформно-инвариантные уравнения для вектора- потенциала.	58
§ 10. Нелинейные системы для взаимодействующих полей	68
§ 11. Точные решения уравнений Янга-Миллса.	74
§ 12. Конформная инвариантность уравнения. $\square^2 \psi = 0$. . .	77
§ 13. Система дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Шредингера. . .	8I
§ 14. Симметричные свойства некоторых интегро- дифференциальных уравнений.	86

ГЛАВА III. Дифференциальные уравнения с нарушенной симметрией.	95
§ 15. О редукции, решениях нелинейных волновых уравнений с нарушенной симметрией.	95

Введение.

Принципы симметрии играют важную роль в математической и теоретической физике. Можно сказать, что на принципах симметрии построен фундамент современной физики. Законы сохранения энергии, импульса, момента количества движения являются следствием однородности и изотропности четырехмерного пространства-времени.

"Симметрию в математической и теоретической физике можно рассматривать как принцип, с помощью которого из всевозможных логически допустимых моделей (уравнений, соотношений) отбираются только те, которые инвариантны относительно групп Евклида, Галилея, Пуанкаре, Лоренца, Вейля, Шредингера и т.д. Все основные уравнения математической физики (уравнения Ньютона, Лапласа, Даламбера, Лагранжа, Гамильтона-Якоби, Лиувилля, Максвелла и т.д.) обладают высокой симметрией. Именно этим свойством они и выделены среди множества других дифференциальных уравнений, рассматриваемых в математике" [51] .

Математические основы теории симметрии дифференциальных уравнений заложены в трудах выдающегося норвежского математика Софуса Ли (1842-1899). Им была создана теория непрерывных групп преобразований и их инвариантов, которая получила глубокое и плодотворное применение в геометрии, механике, теории дифференциальных уравнений.

Современному изложению теории С.Ли и ее дальнейшему развитию посвящена фундаментальная монография Л.В.Овсянникова [37] . Им, в частности, построена теория инвариантных и частично-инвариантных решений дифференциальных уравнений. С помощью этой

теории найдены новые частные решения уравнений газовой динамики. В настоящее время эта теория получила широкое применение.

Новый подход к исследованию алгебр инвариантности линейных дифференциальных уравнений в частных производных предложен в работе [50]. Основное отличие этого метода от классического метода С.Ли является, то, что базисные элементы алгебры инвариантности уравнений являются интегро-дифференциальными операторами. Такие операторы порождают нелокальные преобразования. С помощью нелиевского метода обнаружены новые симметрии для уравнений Максвелла, Дирака [50], Ламе [53] и др.

В работах Н.Х.Ибрагимова [16-19] развита теория групп преобразований Ли-Бэклунда, являющихся группами симметрии дифференциальных уравнений. Базисные операторы симметрии Ли-Бэклунда также связаны с нелокальными преобразованиями.

В книге Миллера [32] рассматривается вопрос о связи симметрии дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с системами координат в которых это уравнение допускает разделение переменных.

Как известно, при больших значениях напряженностей электрического и магнитного полей практически все материальные среды приобретают нелинейные по полю свойства. Это вызывает появление ряда новых эффектов, например, самовоздействие полей. Уравнения описывающие электромагнитное поле в этом случае, представляет систему нелинейных дифференциальных уравнений (нелинейные уравнения Максвелла), исследование которых представляет собой гораздо более сложную задачу по сравнению с соответствующими линейными задачами и требует разработки и применение новых методов решения этих уравнений.

Изучению симметричных свойств линейных уравнений Максвелла посвящено большое количество работ. Симметрия же нелинейных уравнений Максвелла практически не изучена, хотя нелинейные уравнения для электромагнитного поля вводились еще Г. Ми, М. Борном и Л. Инфельдом [75]. По этой причине одним из основных объектов исследования данной диссертационной работы являются нелинейные уравнения Максвелла (уравнения Максвелла с нелинейными материальными уравнениями).

В настоящее время одним из требований предъявляемых к теориям, описывающим безмассовые поля, является требование их конформной инвариантности. Поэтому важным представляется вопрос построения конформно-инвариантных уравнений, описывающих электромагнитное, спинорное, а также систему взаимодействующих полей.

Особо следует подчеркнуть возможность использования групповых методов для нахождения точных решений многомерных нелинейных дифференциальных уравнений даже в тех случаях когда не применим метод обратной задачи рассеяния. "Отыскания частных решений - необходимый этап в нахождении общего интеграла, который сводится тем или иным способом к "обобщению" и "размножению" частных решений, т.е. к переходу от решений, зависящих от произвольных констант, к решениям, содержащим произвольные функции" [41].

Численные решения, как правило, дают конкретный ответ на конкретный вопрос, но не дают представления о структуре решений. "Точные решения систем дифференциальных уравнений служат прекрасными тестами для приближенных методов их интегрирования и дают представление о структуре общего решения ... Их знание позволяет изучить свойства решений и глубже проникнуть в физику

явлений, описываемых дифференциальными уравнениями [41] .
Следует отметить, что найденные точные частные решения дифференциальных уравнений можно использовать для построения решения интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра [10] .

В связи с тем, что многие уравнения теоретической физики не инвариантны относительно групп Пуанкаре, Евклида, Галилея, возникает вопрос о возможности применения теории инвариантных решений для построения точных решений уравнений с нарушенной симметрией.

Настоящая диссертация посвящена исследованию групповых свойств линейных и нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное, спинорное, скалярное поле: отысканию частных точных решений нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений; построению уравнений с нарушенной симметрией; решения которых тем не менее могут быть найдены с помощью инвариантных анзацев.

Глава I посвящена исследованию симметричных свойств нелинейных уравнений для электромагнитного поля в среде. В § 1 найдена бесконечномерная алгебра Ли, являющаяся алгеброй инвариантности уравнений Максвелла и содержащая в качестве подалгебры алгебры Ли группы Пуанкаре, Галилея, Шредингера и конформной группы $C(1,3)$. В § 2 найдены материальные уравнения, инвариантные относительно группы Галилея $G(1,3)$ и группы Шредингера $Sch(1,3)$. В § 3 построены пуанкаре-инвариантные материальные уравнения. В § 4 найдено общее решение нелинейных уравнений Максвелла в среде в случае двух переменных x и t . В § 5 построены конформно-инвариантные материальные уравнения и инвариантные относительно CPT-преобразований. В

§ 6 установлена конформная инвариантность уравнений Минковского. В § 7 найдена нелинейная симметрия уравнений Максвелла в среде. В § 8 построены точные частные решения нелинейных конформно-инвариантных уравнений Максвелла.

В § 9 главы II построены конформно-инвариантные уравнения для вектора-потенциала A_μ и для системы взаимодействующих электромагнитного и спинорного полей. В § 10 построены точные решения конформно-инвариантных нелинейных уравнений для системы уравнений взаимодействующих полей. В § 11 построены новые частные точные решения уравнений Янга-Миллса. В § 12 изучается конформная инвариантность уравнения $(p_\mu p^\mu)^2 \psi = 0$, а в § 13 — инвариантность системы $S^2 \psi = 0$ относительно группы Шредингера. В § 14 изучаются групповые свойства интегро-дифференциальных уравнений для вектора-потенциала A_μ и спинорного поля ψ .

Глава III посвящена построению дифференциальных уравнений с нарушенной симметрией, допускающих редукцию к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Пользуясь случаем, чтобы выразить искреннюю благодарность моему научному руководителю, профессору В.И.Фуничу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ГЛАВА I. СИММЕТРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ.

Симметричные свойства уравнений Максвелла в вакууме подробно исследованы Лоренцом, Пуанкаре, Эйнштейном, Бейтменом, Канингхемом.

Максимальной в смысле С.Ли [37] локальной группой инвариантности для уравнений электромагнитного поля в вакууме при отсутствии зарядов является 16-параметрическая группа, содержащая в качестве подгруппы 15-параметрическую конформную группу $C(1,3)$ (современное изложение этого вопроса см. например в [58]).

Как известно, одних уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 0, \\ \partial_\mu \tilde{H}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (I.1)$$

недостаточно, чтобы определить электромагнитное поле в среде, поскольку система (I.1) является недоопределенной. Уравнения (I.1) записаны в общепринятых обозначениях, т.е.

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (H^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.2)$$

$\tilde{H}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} H^{\alpha\beta}$, $\tilde{F}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — абсолютно антисимметричный тензор. В терминах напряженностей

$\vec{E}$, $\vec{H}$ и индукции $\vec{D}$, $\vec{B}$ система (I.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \text{rot } \vec{H}, & \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\text{rot } \vec{E}, \\ \text{div } \vec{D} &= 0, & \text{div } \vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Для описания электромагнитного поля в конкретных средах к уравнениям (I.3) добавляют дополнительные соотношения (условия), которые называют материальными уравнениями или уравнениями связи. Эти дополнительные уравнения являются чаще всего линейными или нелинейными соотношениями на векторы $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$, явный вид этих соотношений зависит от свойств среды, и, как правило, слишком произвольный. Как будет показано ниже, явный вид материальных уравнений может быть существенно ограничен, если использовать принцип симметрии в качестве правила отбора этих дополнительных соотношений. Симметричные свойства уравнений (I.3) совместно с материальными уравнениями совершенно не изучены [51].

Уравнения, предложенные Борном, Инфельдом, фактически представляют собой уравнения Максвелла (I.3) с некоторыми нелинейными материальными уравнениями [75]. Эти уравнения инвариантны относительно группы Пуанкаре, но не инвариантны относительно группы (I,3), которая, как известно, является группой инвариантности уравнений Максвелла в вакууме.

В данной главе исследуются групповые свойства уравнений Максвелла в среде без материальных уравнений и с материальными уравнениями. в § I установлена инвариантность уравнений Максвелла (I.1) относительно бесконечнопараметрической группы. В §§ 2, 3, 5 описаны классы материальных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея $G(I,3)$, группы Шредингера $Sch(I,3)$, группы Пуанкаре $P(I,3)$ и конформной группы

С (I.3). В § 6 установлена конформная инвариантность материальных уравнений Минковского, которые вместе с уравнениями (I.3) составляют основу электродинамики инерциально движущихся изотропных сред. в § 7 установлена инвариантность уравнений (I.3) относительно бесконечномерной алгебры Ли, элементами которой являются интегродифференциальные операторы. в §§ 4,8 построены точные решения системы (I.3) вместе с нелинейными материальными уравнениями.

§ I. Симметрия уравнений Максвелла без материальных уравнений.

Существенным отличием уравнений (I.I) от уравнений Максвелла в вакууме является то, что (I.I) — сильно недоопределенная система уравнений первого порядка для четырех векторов $\vec{\phi}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$ и $\vec{H}$. По этой причине следует ожидать, что система (I.I) будет иметь более широкую симметрию чем уравнение Максвелла в вакууме. Для сравнения, напомним, что уравнения Максвелла в вакууме представляют собой недоопределенную систему восьми уравнений для двух векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

Симметричные свойства уравнений (I.I) устанавливаются следующим утверждением.

Теорема I.I. Алгеброй Ли инвариантности системы (I.I) в классе линейных дифференциальных операторов первого порядка является бесконечномерная алгебра, с базисными элементами вида

$$X_i = \xi^{\mu}(x) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \mathcal{L}_{F_{\mu\nu}} \frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}} + \mathcal{L}_{\tilde{H}_{\mu\nu}} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}}, \quad (I.4)$$

$$X_2 = F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}} \equiv F_{01} \frac{\partial}{\partial F_{01}} + F_{02} \frac{\partial}{\partial F_{02}} + F_{03} \frac{\partial}{\partial F_{03}} + F_{12} \frac{\partial}{\partial F_{12}} + F_{31} \frac{\partial}{\partial F_{31}} + F_{23} \frac{\partial}{\partial F_{23}}, \quad (1.5)$$

$$X_3 = \tilde{H}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}} \equiv \tilde{H}_{01} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{01}} + \tilde{H}_{02} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{02}} + \tilde{H}_{03} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{03}} + \tilde{H}_{12} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{12}} + \tilde{H}_{31} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{31}} + \tilde{H}_{23} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{23}}, \quad (1.6)$$

$$X_4 = F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{\mu\nu}} \equiv F_{01} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{01}} + F_{02} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{02}} + F_{03} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{03}} + F_{12} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{12}} + F_{31} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{31}} + F_{23} \frac{\partial}{\partial \tilde{H}_{23}}, \quad (1.7)$$

$$X_5 = \tilde{H}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial F_{\mu\nu}} \equiv \tilde{H}_{01} \frac{\partial}{\partial F_{01}} + \tilde{H}_{02} \frac{\partial}{\partial F_{02}} + \tilde{H}_{03} \frac{\partial}{\partial F_{03}} + \tilde{H}_{12} \frac{\partial}{\partial F_{12}} + \tilde{H}_{31} \frac{\partial}{\partial F_{31}} + \tilde{H}_{23} \frac{\partial}{\partial F_{23}} \quad (1.8)$$

где $\xi^{\mu}(x)$ — произвольные дифференцируемые функции.

$x = (x_0 = t, x_1, x_2, x_3)$, $\mu, \nu = \overline{0, 3}$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Доказательство. Для доказательства теоремы I.1 воспользуемся записью уравнений Максвелла в форме (I.3). Введем обозначения $\Psi = \text{столбец } (\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H})$, $\rho_i^m = \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_i^m}$, $m = \overline{1, 2}$, $i = \overline{0, 3}$.

В этих обозначениях система (I.3) принимает такой вид:

$$\begin{aligned} \rho_0^7 &= \rho_2^{12} - \rho_3^{11} & \rho_0^4 &= -(\rho_2^3 - \rho_3^2) \\ \rho_0^8 &= \rho_3^{10} - \rho_1^{12} & \rho_0^5 &= -(\rho_3^4 - \rho_1^3) \\ \rho_0^9 &= \rho_1^{11} - \rho_2^{10} & \rho_0^6 &= -(\rho_1^2 - \rho_2^4) \\ \rho_1^7 + \rho_2^8 + \rho_3^9 &= 0 & \rho_1^4 + \rho_2^5 + \rho_3^6 &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Доказательство теоремы сводится к применению алгоритма Ли к системе (I.9). Этот алгоритм подробно описан в [37] и состоит в построении всех дифференциальных операторов первого порядка, допускаемых системой (I.9):

$$X = \xi^{\mu}(x, \Psi) \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \zeta^{\nu}_i(x, \Psi) \frac{\partial}{\partial \Psi_i^{\nu}}, \quad (1.10)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование,

$j = \overline{0,3}$, $k = \overline{1,2}$. Построим первое продолжение оператора X

$$\hat{X} = X + G_i^k \frac{\partial}{\partial p_i^k} \quad (I.II)$$

где

$$G_i^k = D_i(\psi^k) - p_j^k D_i(\psi^j), \quad j = \overline{0,3} \quad (I.I2)$$

а D_i — оператор полного дифференцирования

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i^k \frac{\partial}{\partial \psi_k}$$

Подействуем оператором (I.I2) на многообразие (I.I0) и получаем

$$\begin{aligned} G_0^7 &= G_2^{12} - G_3^{11} \\ G_0^8 &= G_0^{10} - G_1^{12} \\ G_0^9 &= G_1^{11} - G_2^{10} \\ G_1^7 + G_2^8 + G_3^9 &= 0 \end{aligned} \quad (I.I3)$$

Подставим в (I.I3) G_i^k из формулы (I.I2), а затем перейдем на многообразие (I.9), в результате чего получаем следующую систему определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} \eta_0^{11} &= 0, \quad \eta_0^7 = \eta_2^{12} - \eta_1^{12}, \quad \eta_0^8 = \eta_3^{10} - \eta_1^{12}, \\ \eta_0^9 &= \eta_1^{11} - \eta_2^{10}, \quad \eta_1^7 + \eta_2^8 + \eta_3^9 = 0, \\ \eta_4^4 = \eta_5^8 = \eta_6^9 = -\eta_3^{11} = -\eta_2^{11} = -\eta_1^{10} &= C_1, \quad C_1 = \text{const}, \\ \eta_1^{11} = \eta_8^5 = \eta_9^6 = -\eta_{10}^3 = -\eta_{11}^2 = -\eta_{10}^1 &= C_2, \quad C_2 = \text{const}, \end{aligned}$$

$$1\eta^1 = 10\eta^{10} = -(\xi_1^1 + \xi_0^0), \quad 2\eta^2 = 11\eta^{11} = -(\xi_2^2 + \xi_0^0),$$

$$3\eta^3 = 12\eta^{12} = -(\xi_3^3 + \xi_0^0), \quad 4\eta^4 = 7\eta^7 = -(\xi_2^2 + \xi_3^3),$$

$$5\eta^5 = 8\eta^8 = -(\xi_1^1 + \xi_3^3), \quad 6\eta^6 = 9\eta^9 = -(\xi_1^1 + \xi_2^2),$$

$$5\eta^4 = 8\eta^7 = \xi_2^1, \quad 4\eta^5 = 7\eta^8 = \xi_1^2, \quad 6\eta^4 = 9\eta^7 = \xi_3^1,$$

$$-2\eta^4 = -5\eta^7 = -11\eta^8 = -12\eta^9 = \xi_3^0, \quad 3\eta^4 = -12\eta^6 = -10\eta^7 = 10\eta^9 = \xi_2^0, \quad (1.14)$$

$$-3\eta^5 = 2\eta^6 = 12\eta^8 = -11\eta^9 = \xi_1^0, \quad 6\eta^2 = -5\eta^3 = -7\eta^{11} = 8\eta^{12} = \xi_0^1,$$

$$-6\eta^1 = 4\eta^3 = 9\eta^{10} = -7\eta^{12} = \xi_0^2, \quad 5\eta^1 = -4\eta^2 = -8\eta^{10} = 7\eta^{11} = \xi_0^3,$$

$$4\eta^6 = 7\eta^9 = \xi_1^3, \quad 6\eta^5 = 9\eta^8 = \xi_3^2$$

$$5\eta^6 = 8\eta^9 = \xi_2^3,$$

$$\xi^{\mu} \equiv \frac{\partial \xi^{\mu}}{\partial \psi_k}, \quad \xi^{\nu} \equiv \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial x_{\nu}}, \quad k\eta^{\mu} \equiv \frac{\partial \eta^{\mu}}{\partial \psi_k}, \quad \eta^i \equiv \frac{\partial \eta^i}{\partial x_{\nu}}, \quad \eta^k \equiv \eta^{4_k}.$$

Система (1.14) является линейной системой дифференциальных уравнений в частных производных. Можно найти общее решение этой системы. Оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\eta^{\psi_2} &= -\xi_4^3 \psi_4 + \xi_4^1 \psi_6 - \xi_2^1 \psi_1 + \eta^5 \psi_2 - \xi_2^3 \psi_3 + \psi_2' - C_2 \psi_{11} \\
\eta^{\psi_3} &= \xi_4^2 \psi_4 - \xi_4^1 \psi_5 - \xi_3^1 \psi_1 - \xi_2^3 \psi_2 + \eta^6 \psi_3 + \psi_3' - C_2 \psi_{12} \\
\eta^{\psi_4} &= \eta^1 \psi_4 + \eta^2 \psi_5 + \eta^1 \psi_6 - \xi_3^4 \psi_2 + \xi_2^3 \psi_3 + \psi_4' + C_2 \psi_7 \\
\eta^{\psi_5} &= \xi_1^2 \psi_4 + \eta^2 \psi_5 + \xi_3^2 \psi_6 + \xi_3^4 \psi_1 - \xi_1^4 \psi_3 + \psi_5' + C_2 \psi_8 \\
\eta^{\psi_6} &= \xi_1^3 \psi_4 + \xi_2^3 \psi_5 + \eta^3 \psi_6 - \xi_2^4 \psi_1 + \xi_1^4 \psi_2 + \psi_6' + C_2 \psi_9 \\
\eta^{\psi_7} &= \eta^1 \psi_7 + \xi_2^1 \psi_8 + \xi_3^1 \psi_9 + \xi_3^4 \psi_{11} - \xi_2^4 \psi_{12} + \psi_7' + C_1 \psi_4 \\
\eta^{\psi_8} &= \xi_1^2 \psi_7 + \eta^2 \psi_8 + \xi_3^2 \psi_9 - \xi_3^4 \psi_{10} + \xi_1^4 \psi_{12} + \psi_8' + C_1 \psi_5 \\
\eta^{\psi_9} &= \xi_1^3 \psi_7 + \xi_2^3 \psi_8 + \eta^3 \psi_9 + \xi_2^4 \psi_{10} - \xi_1^4 \psi_{11} + \psi_9' + C_1 \psi_6 \\
\eta^{\psi_{10}} &= -\xi_4^3 \psi_8 + \xi_4^2 \psi_9 + \eta^4 \psi_{10} - \xi_1^2 \psi_{11} - \xi_1^3 \psi_{12} + \psi_{10}' - C_1 \psi_1 \\
\eta^{\psi_{11}} &= \xi_4^3 \psi_7 - \xi_4^1 \psi_9 - \xi_2^1 \psi_{10} + \eta^5 \psi_{11} - \xi_2^3 \psi_{12} + \psi_{11}' - C_1 \psi_2 \\
\eta^{\psi_{12}} &= -\xi_4^2 \psi_7 + \xi_4^1 \psi_8 - \xi_3^1 \psi_{10} - \xi_3^2 \psi_{11} + \eta^6 \psi_{12} + \psi_{12}' - C_1 \psi_3
\end{aligned} \tag{I.15}$$

где $\xi^{\mu}(x)$ — произвольные дифференцируемые функции зависящие от x . Наличие в (I.15) слагаемого ψ_k' связано с линейностью исходной системы (I.3). Координаты инфинитезимального оператора X зависят от произвольных гладких функций $\xi^{\mu}(x)$. Используя тензоры $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{H}_{\mu\nu}$, равенства (I.15) можно записать в простой и симметричной форме

$$\eta_{F,\nu} = -F_{\mu\alpha} \xi^{\alpha}_{,\nu} - F_{\alpha\nu} \xi^{\alpha}_{,\mu} + u_{\mu\nu}$$

$$\eta_{\mu\nu}^{\sim} = -\tilde{H}_{\mu\alpha} \xi_{\nu}^{\alpha} - \tilde{H}_{\alpha\nu} \xi_{\mu}^{\alpha} + \tilde{v}_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

где $\eta_{\mu\nu}$, $\tilde{v}_{\mu\nu}$ — произвольные решения системы (1.1). Теорема доказана. В работе [31] отмечено, что уравнения Максвелла в среде инвариантны относительно произвольных невырожденных линейных преобразований пространственно-временных переменных (аффинная ковариантность). Из теоремы 1.1. следует, что уравнения Максвелла в среде (1.1) инвариантны относительно группы произвольных (не обязательно линейных) невырожденных преобразований пространственно-временных переменных. При этом векторы индукции $\vec{D}$, $\vec{B}$ и напряженностей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ преобразуются по соответствующему линейному закону. Конечные преобразования для $\vec{x}$, t векторов $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$ можно построить решив соответствующие уравнения Ли.

"В то время как релятивистские преобразования являются привычным методом решения многих электродинамических задач, другие инвариантные преобразования почти не находят применения. Однако существуют определенные классы задач, где нелоренцовские преобразования оказываются более удобными. Примером может служить вычисление полей в средах с движущимися неоднородностями или источниками" [31].

Теперь введем определение.

Определение 1.1. Алгебра Ли с базисными элементами

а) P_0 , P_a , J_a , G_a удовлетворяющими следующие коммутационные соотношения:

$$[P_0, P_a] = [P_a, P_b] = 0, [P_0, J_a] = [P_a, G_b] = 0, [G_a, G_b] = 0,$$

$$[J_a, J_b] = i \varepsilon_{abc} J_c, [J_a, P_b] = i \varepsilon_{abc} P_c, \quad (I.17)$$

$$[J_a, G_b] = i \varepsilon_{abc} G_c, [P_0, G_a] = i P_a,$$

где ε_{abc} — антисимметричный тензор третьего ранга, $a, b = \overline{1,3}$, называется алгеброй Галилея $AG(I,3)$;

б) P_0, P_a, G_a, J_a, D, A удовлетворяющими коммутационными соотношениями (I.17) и соотношения

$$[D, J_a] = 0, [A, J_a] = [A, G_a] = 0, \\ [P_0, D] = 2i P_0, [P_a, D] = i P_a, [D, G_a] = i G_a, \quad (I.18)$$

$$[P_0, A] = i D, [P_a, A] = i G_a, [D, A] = 2i A$$

называется алгеброй Шредингера $ASch(I,3)$;

в) $P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu$, удовлетворяющими следующие коммутационные соотношения

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, [K_\mu, K_\nu] = 0,$$

$$[D, P_\mu] = -i P_\mu, [D, J_{\mu\nu}] = 0,$$

$$[P_\mu, J_{\nu\rho}] = i(g_{\mu\nu} P_\rho - g_{\mu\rho} P_\nu), [P_\mu, K_\nu] = i(2g_{\mu\nu} D - 2J_{\mu\nu}), \quad (I.19)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} J_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} J_{\mu\rho}),$$

$$[K_\mu, J_{\nu\rho}] = i(g_{\mu\nu} K_\rho - g_{\mu\rho} K_\nu), [K_\mu, D] = -i K_\mu, \mu, \nu, \rho, \sigma = \overline{0,3}$$

называется конформной алгеброй $AC(I,3)$.

Если базисные элементы, приведенных в определении I алгебр,

являются линейными операторами первого порядка, то как известно (см. например [18]), по каждой из таких алгебр можно построить соответствующую группу точечных преобразований независимых и зависимых переменных. Построенные таким образом группы будем называть группой Галилея $G(1,3)$, группой Шредингера $Sch(1,3)$ и конформной группой $C(1,3)$ соответственно. Из теоремы I.1 получаем важные для дальнейшего следствия.

Теорема I.2. Система (I.1) инвариантна относительно 20-мерной алгебры Ли группы $IGL(4, R)$, содержащей в качестве подалгебр, алгебры Пуанкаре $P(1,3)$ и алгебры Галилея $G(1,3)$.
Доказательство. Поскольку в теореме I $\xi^{\mu}(x)$ может быть произвольной функцией от x , можно выбрать

$$\xi^{\mu}(x) = C^{\mu\nu} x_{\nu} + a_{\mu}, \quad a_{\mu\nu} = \tilde{a}_{\mu\nu} = 0, \quad (I.20)$$

где $C_{\mu\nu}$, a_{μ} — произвольные константы.

Пусть $C_{\mu\nu} = -C_{\nu\mu}$. Тогда базисные элементы алгебры Пуанкаре $P(1,3)$

можно выбрать в таком виде:

$$P_{\mu} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}},$$

$$J_{\mu\nu} = x_{\mu} P_{\nu} - x_{\nu} P_{\mu} + (S_{\mu\nu} \psi)_n \frac{\partial}{\partial \psi_n}, \quad (I.21)$$

где по n подразумевается суммирование от 1 до 12 т.е. $n = \overline{1,12}$
 $\psi =$ столбец $(\vec{E}, \vec{S}, \vec{D}, \vec{H})$, матрицы $S_{\mu\nu}$ имеют вид

$$S_{ab} = - \begin{pmatrix} \hat{S}_{ab} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{S}_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{S}_{ab} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{S}_{ab} \end{pmatrix} \quad S_{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon_{abc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \hat{S}_{bc} \\ 0 & 0 & -\hat{S}_{bc} & 0 \\ 0 & \hat{S}_{bc} & 0 & 0 \\ -\hat{S}_{bc} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\hat{0}$ — нулевые 3×3 матрицы, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор. Если положить $C_{ab} = 0$, $C_{ab} = -C_{ba}$, $a, b = 1, 2, 3$, то из (1.16), (1.20) получаем базисные элементы алгебры Ли группы Галилея

$$\begin{aligned} P_0 &= i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \\ J_{ab} &= x_a P_b - x_b P_a + (S_{ab} \psi)_n \frac{\partial}{\partial \psi_n}, \\ G_a &= t P_a + (M_a \psi)_n \frac{\partial}{\partial \psi_n}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где

$$M_a = -\frac{1}{i} \varepsilon_{abc} \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{S}_{bc} & \hat{0} & \hat{0} \\ 0 & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ 0 & \hat{0} & -\hat{S}_{bc} & \hat{0} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом доказывается, что среди множества операторов вида (I.4) содержится алгебра Ли конформной группы (в этом случае $\xi(x) = 2(c x) x_\mu - x^2 c_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + a_\mu$) и алгебры Ли группы Шредингера Sch (I.3).

Совокупность генераторов (I.22) и операторов

$$\begin{aligned} D &= x_\nu p^\nu - 2i \Psi_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n}, \\ K_\mu &= 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu) p_\mu + 2(x^\nu S_{\mu\nu} \Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n}, \end{aligned} \quad (I.23)$$

образуют базис конформной алгебры $AC(I,3)$. Операторы (I.22) вместе с операторами

$$\begin{aligned} D &= 2x_0 p_0 - \vec{x} \vec{p} + (\lambda_0 \Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n}, \\ A &= x_0^2 p_0 - x_0 (\lambda_0 \Psi)_n \frac{\partial}{\partial \Psi_n} - \vec{x} \vec{G}, \end{aligned} \quad (I.24)$$

где

$$\lambda_0 = - \begin{pmatrix} 3\hat{I} & \hat{O} & \hat{O} & \hat{O} \\ \hat{O} & 2\hat{I} & \hat{O} & \hat{O} \\ \hat{O} & \hat{O} & 2\hat{I} & \hat{O} \\ \hat{O} & \hat{O} & \hat{O} & 3\hat{I} \end{pmatrix},$$

образуют базис алгебры $ASch(I,3)$. Генераторы (I.5)–(I.8) порождают чисто матричные преобразования, включающие и преобразования типа Хевисайда–Лормора–Райнича.

Таким образом, мы установили, что для системы (I.1) без материальных уравнений, выполняются как принцип относительности Лоренца–Пуанкаре–Эйнштейна, так и принцип относительности Галилея. Аналогичным свойством, как это отмечено в [52],

обладает нелинейная система Эйлера для идеальной жидкости.

§ 2. Материальные уравнения, инвариантные относительно группы Галилея $G(1,3)$ и группы Шредингера.

Рассмотрим уравнения (1.3) совместно с материальными уравнениями

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \vec{F}(\vec{B}, \vec{E}) \\ \vec{H} &= \vec{\Phi}(\vec{B}, \vec{E})\end{aligned}\quad (2.1)$$

где $\vec{F}$ и $\vec{\Phi}$ — произвольные дифференцируемые функции. Из класса материальных уравнений (2.1) выделим также уравнения, которые совместно с (1.3) образуют систему, инвариантную относительно группы Галилея $G(1,3)$.

Теорема 2.1. Система (1.3), (2.1) инвариантна относительно группы Галилея, инфинитезимальные операторы которой задаются формулами (1.21), тогда и только тогда, когда

$$\vec{F} = N_1(\vec{B}^2, \vec{B}\vec{E})\vec{B}, \quad \vec{\Phi} = -N_1(\vec{B}^2, \vec{B}\vec{E})\vec{E} + M_1(\vec{B}^2, \vec{B}\vec{E})\vec{B}, \quad (2.2)$$

где N_1, M_1 — произвольные функции двух переменных, $N_1, M_1 \in C^1(\mathbb{R}^1)$.

Доказательство. Так как система (1.3) инвариантна относительно группы Галилея $G(1,3)$ (в силу теоремы 1.2), то для доказательства теоремы необходимо установить при каких $\vec{F}$ и $\vec{\Phi}$ будет галилеевски-инвариантной система (2.1). Очевидно, что при произвольных $\vec{F}$ и $\vec{\Phi}$ уравнения (2.1) инвариантны относительно преобразований трансляции, генерируемых операторами

P_0, P_α . Следуя Ли, система (2.1) инвариантна относительно группы вращений, являющейся подгруппой группы Галилея $G(1,3)$, если и только если справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} J_{0\alpha} \left\{ \vec{D} - \vec{F}(\vec{B}, \vec{E}) \right\} \Big|_{\substack{\vec{D} = \vec{F}(\vec{B}, \vec{E}) \\ \vec{H} = \vec{\Phi}(\vec{B}, \vec{E})}} &\equiv 0, \\ J_{0\alpha} \left\{ \vec{H} - \vec{\Phi}(\vec{B}, \vec{E}) \right\} \Big|_{\substack{\vec{D} = \vec{F}(\vec{B}, \vec{E}) \\ \vec{H} = \vec{\Phi}(\vec{B}, \vec{E})}} &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Система (2.3) эквивалентна следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} E_3 \frac{\partial F_1}{\partial E_2} - E_2 \frac{\partial F_1}{\partial E_3} + B_3 \frac{\partial F_1}{\partial B_2} - B_2 \frac{\partial F_1}{\partial B_3} &= 0 \\ E_3 \frac{\partial F_2}{\partial E_2} - E_2 \frac{\partial F_2}{\partial E_3} + B_3 \frac{\partial F_2}{\partial B_2} - B_2 \frac{\partial F_2}{\partial B_3} &= F_3 \\ E_3 \frac{\partial F_3}{\partial E_2} - E_2 \frac{\partial F_3}{\partial E_3} + B_3 \frac{\partial F_3}{\partial B_2} - B_2 \frac{\partial F_3}{\partial B_3} &= -F_2 \\ E_1 \frac{\partial F_1}{\partial E_3} - E_3 \frac{\partial F_1}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial F_1}{\partial B_3} - B_3 \frac{\partial F_1}{\partial B_1} &= -F_3 \\ E_1 \frac{\partial F_2}{\partial E_3} - E_3 \frac{\partial F_2}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial F_2}{\partial B_3} - B_3 \frac{\partial F_2}{\partial B_1} &= 0 \\ E_1 \frac{\partial F_3}{\partial E_3} - E_3 \frac{\partial F_3}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial F_2}{\partial B_3} - B_3 \frac{\partial F_3}{\partial B_1} &= F_1 \\ E_2 \frac{\partial F_1}{\partial E_1} - E_1 \frac{\partial F_1}{\partial E_2} + B_2 \frac{\partial F_1}{\partial B_1} - B_1 \frac{\partial F_1}{\partial B_2} &= F_2 \\ E_2 \frac{\partial F_2}{\partial E_1} - E_1 \frac{\partial F_2}{\partial E_2} + B_2 \frac{\partial F_2}{\partial B_1} - B_1 \frac{\partial F_2}{\partial B_2} &= -F_1 \\ E_2 \frac{\partial F_3}{\partial E_1} - E_1 \frac{\partial F_3}{\partial E_2} + B_2 \frac{\partial F_3}{\partial B_1} - B_1 \frac{\partial F_3}{\partial B_2} &= 0 \\ E_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial E_2} - E_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial E_3} + B_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial B_2} - B_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial B_3} &= 0 \\ E_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial E_2} - E_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial E_3} + B_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial B_2} - B_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial B_3} &= \phi_3 \\ E_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial E_2} - E_2 \frac{\partial \phi_3}{\partial E_3} + B_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial B_2} - B_2 \frac{\partial \phi_3}{\partial B_3} &= -\phi_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
E_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial E_3} - E_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial B_3} - B_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial B_1} &= -\phi_3 \\
E_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial E_3} - E_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial B_3} - B_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial B_1} &= 0 \\
E_1 \frac{\partial \phi_3}{\partial E_3} - E_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial \phi_3}{\partial B_3} - B_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial B_1} &= \phi_1 \\
E_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial E_1} - E_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial E_2} + B_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial B_1} - B_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial B_2} &= \phi_2 \\
E_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial E_1} - E_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial E_2} + B_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial B_1} - B_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial B_2} &= -\phi_1 \\
E_2 \frac{\partial \phi_3}{\partial E_1} - E_1 \frac{\partial \phi_3}{\partial E_2} + B_2 \frac{\partial \phi_3}{\partial B_1} - B_1 \frac{\partial \phi_3}{\partial B_2} &= 0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Из системы (2.4) следует, что функции F_1 , F_2 , F_3 удовлетворяют таким уравнениям

$$\begin{aligned}
\left(E_3 \frac{\partial}{\partial E_2} - E_2 \frac{\partial}{\partial E_3} + B_3 \frac{\partial}{\partial B_2} - B_2 \frac{\partial}{\partial B_3} \right) (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2) &= 0 \\
\left(E_1 \frac{\partial}{\partial E_3} - E_3 \frac{\partial}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial}{\partial B_3} - B_3 \frac{\partial}{\partial B_1} \right) (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2) &= 0 \\
\left(E_2 \frac{\partial}{\partial E_1} - E_1 \frac{\partial}{\partial E_2} + B_2 \frac{\partial}{\partial B_1} - B_1 \frac{\partial}{\partial B_2} \right) (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2) &= 0 \\
\left(E_1 \frac{\partial}{\partial E_3} - E_3 \frac{\partial}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial}{\partial B_3} - B_3 \frac{\partial}{\partial B_1} \right) (F_1 B_1 + F_2 B_2 + F_3 B_3) &= 0 \\
\left(E_3 \frac{\partial}{\partial E_2} - E_2 \frac{\partial}{\partial E_3} + B_3 \frac{\partial}{\partial B_2} - B_2 \frac{\partial}{\partial B_3} \right) (F_1 B_1 + F_2 B_2 + F_3 B_3) &= 0 \\
\left(E_2 \frac{\partial}{\partial E_1} - E_1 \frac{\partial}{\partial E_2} + B_2 \frac{\partial}{\partial B_1} - B_1 \frac{\partial}{\partial B_2} \right) (F_1 B_1 + F_2 B_2 + F_3 B_3) &= 0 \\
\left(E_1 \frac{\partial}{\partial E_3} - E_3 \frac{\partial}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial}{\partial B_3} - B_3 \frac{\partial}{\partial B_1} \right) (F_1 E_1 + F_2 E_2 + F_3 E_3) &= 0 \\
\left(E_3 \frac{\partial}{\partial E_2} - E_2 \frac{\partial}{\partial E_3} + B_3 \frac{\partial}{\partial B_2} - B_2 \frac{\partial}{\partial B_3} \right) (F_1 E_1 + F_2 E_2 + F_3 E_3) &= 0 \\
\left(E_2 \frac{\partial}{\partial E_1} - E_1 \frac{\partial}{\partial E_2} + B_2 \frac{\partial}{\partial B_1} - B_1 \frac{\partial}{\partial B_2} \right) (F_1 E_1 + F_2 E_2 + F_3 E_3) &= 0
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Таким образом, функции $I_1 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$, $I_2 = F_1 B_1 + F_2 B_2 + F_3 B_3$, $I_3 = F_1 E_1 + F_2 E_2 + F_3 E_3$, являются инвариантами группы вращений $O(3)$.

Найдем эти инварианты. В силу первого уравнения системы (2.6)

$I_1 = I_1(E_2^2 + E_3^2, B_2^2 + B_3^2, B_1 E_2 + B_3 E_3, E_1, B_1)$. Подставив I_1 во второе и третье уравнение системы (2.6), получим такие равенства:

$$\begin{aligned} E_3 \left[2 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_1} E_1 - \frac{\partial I_1}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_3} \right] + B_3 \left[2 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_2} B_1 + E_1 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_3} - \frac{\partial I_1}{\partial B_1} \right] &\equiv 0, \\ E_2 \left[\frac{\partial I_1}{\partial E_1} - 2 E_1 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_1} - B_1 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_3} \right] + B_2 \left[\frac{\partial I_1}{\partial B_1} - 2 B_1 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_2} - E_1 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_3} \right] &\equiv 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\omega_1 = E_2^2 + E_3^2$, $\omega_2 = B_2^2 + B_3^2$, $\omega_3 = B_2 E_2 + B_3 E_3$.

Т.к. равенства (2.7) должны выполняться тождественно при $\vec{E}$ и $\vec{B}$ то выражения в скобках должны равняться нулю:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_1} E_1 - \frac{\partial I_1}{\partial E_1} + B_1 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_3} &= 0, \\ \frac{\partial I_1}{\partial B_1} - 2 B_1 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_2} - E_1 \frac{\partial I_1}{\partial \omega_3} &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Первыми интегралами системы (2.8) будут

$$\begin{aligned} C_1 &= \omega_1 + E_1^2, \\ C_2 &= \omega_2 + B_1^2, \\ C_3 &= \omega_3 + B_1 E_1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Интегралы C_1 , C_2 , C_3 — функционально независимы, т.к. матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial E_1}, \frac{\partial C_1}{\partial E_2}, \frac{\partial C_1}{\partial E_3}, \frac{\partial C_1}{\partial B_1}, \frac{\partial C_1}{\partial B_2}, \frac{\partial C_1}{\partial B_3} \\ \frac{\partial C_2}{\partial E_1}, \frac{\partial C_2}{\partial E_2}, \frac{\partial C_2}{\partial E_3}, \frac{\partial C_2}{\partial B_1}, \frac{\partial C_2}{\partial B_2}, \frac{\partial C_2}{\partial B_3} \\ \frac{\partial C_3}{\partial E_1}, \frac{\partial C_3}{\partial E_2}, \frac{\partial C_3}{\partial E_3}, \frac{\partial C_3}{\partial B_1}, \frac{\partial C_3}{\partial B_2}, \frac{\partial C_3}{\partial B_3} \end{pmatrix}$$

имеет общий ранг 3 (при $\vec{E} \neq 0$, $\vec{B} \neq 0$), и составляют фундаментальную систему инвариантов группы вращений.

Таким образом, мы приходим к выводу, что функция I_1 , а значит и функции I_2 и I_3 зависят только от инвариантов $C_1 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$, $C_2 = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$, $C_3 = B_1 E_1 + B_2 E_2 + B_3 E_3$. Итак, функции F должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 &= I_1(C_1, C_2, C_3) \\ F_1 E_1 + F_2 E_2 + F_3 E_3 &= I_2(C_1, C_2, C_3) \\ F_1 B_1 + F_2 B_2 + F_3 B_3 &= I_3(C_1, C_2, C_3) \end{aligned} \quad (2.10)$$

где I_1, I_2, I_3 произвольные дифференцируемые функции от аргументов C_1, C_2, C_3 . Общий вид функций F удовлетворяющие системе (1.27) задаются формулой:

$$\vec{F} = M_1 \vec{E} + N_1 \vec{B} + K_1 [\vec{B}, \vec{E}], \quad (2.11)$$

где M_1, N_1, K_1 — произвольные дифференцируемые функции, зависящие только от инвариантов $E_1^2 + E_2^2 + E_3^2$, $B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$, $B_1 E_1 + B_2 E_2 + B_3 E_3$, где

$$\begin{aligned} M_1 \vec{E}^2 + N_1 \vec{B} \vec{E} &= I_2, \\ M_1 \vec{B} \vec{E} + N_1 \vec{B}^2 &= I_3, \\ M_1 \vec{E}^2 + N_1 \vec{B}^2 + K_1 [\vec{B}' \vec{E}' - (\vec{B} \vec{E})'] + 2 M_1 N_1 \vec{B} \vec{E} &= I_1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Легко видеть, что система (2.12) разрешима относительно M_1 , N_1 , K_1 , при произвольных I_1 , I_2 , I_3 . Аналогично находим общий вид функции Φ :

$$\vec{\Phi} = M_2 \vec{E} + N_1 \vec{B} + K_1 [\vec{B}, \vec{E}] \quad (2.13)$$

где M_2 , N_1 , K_1 — произвольные дифференцируемые функции от инвариантов $\vec{E}^2$, $\vec{B}\vec{E}$, $\vec{B}^2$.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функции $\vec{D}$ и $\vec{H}$ задаваемые формулами (2.11) и (2.13) соответственно, удовлетворяют уравнениям (2.4), (2.5). Таким образом, мы получили общий вид материальных уравнений из класса (2.1), инвариантных относительно группы вращений

$$\begin{aligned} \vec{D} &= M_1 \vec{E} + N_1 \vec{B} + K_1 [\vec{B}, \vec{E}], \\ \vec{H} &= M_2 \vec{E} + N_1 \vec{B} + K_2 [\vec{B}, \vec{E}]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Теперь проанализируем какие ограничения налагает на функции M_1 , N_1 , K_1 , M_2 , N_2 , K_2 требование инвариантности уравнений (2.14) относительно группы Галилея $G(1,3)$. Условие инвариантности эквивалентно выполнению таких уравнений

$$\begin{aligned} G_\alpha \left\{ \vec{D} - M_1 \vec{E} - N_1 \vec{B} - K_1 [\vec{B}, \vec{E}] \right\} \Big|_{\substack{\vec{D} = M_1 \vec{E} + N_1 \vec{B} + K_1 [\vec{B}, \vec{E}] = 0 \\ \vec{H} = M_2 \vec{E} + N_1 \vec{B} + K_2 [\vec{B}, \vec{E}] = 0}} &= 0 \\ G_\alpha \left\{ \vec{H} - M_2 \vec{E} - N_1 \vec{B} - K_2 [\vec{B}, \vec{E}] \right\} \Big|_{\substack{\vec{D} = M_1 \vec{E} + N_1 \vec{B} + K_1 [\vec{B}, \vec{E}] = 0 \\ \vec{H} = M_2 \vec{E} + N_1 \vec{B} + K_2 [\vec{B}, \vec{E}] = 0}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Положим $\alpha=1$ и рассмотрим первое уравнение системы (2.15)

$$G_1 \left\{ D_1 - M_1 E_1 - N_1 B_1 - K_1 (B_1 E_3 - B_3 E_1) \right\} \begin{cases} \vec{D} = N_1 \vec{E} + N_2 \vec{B} + K_1 (\vec{B} \vec{E}) \\ \vec{E} = M_1 \vec{E} + N_2 \vec{B} + K_1 (\vec{B} \vec{E}) \end{cases} \equiv 0 \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) имеет такой вид:

$$E_1 \frac{\partial M_1}{\partial c_1} [-2 B_2 E_3 + 2 B_3 E_2] + B_1 \frac{\partial N_1}{\partial c_1} [2 B_3 E_2 - 2 B_2 E_3] + \\ + (B_1 E_3 - B_3 E_1)^2 \frac{\partial K_1}{\partial c_1} + K_1 (B_2^2 + B_3^2) \equiv 0 \quad (2.17)$$

Равенство (2.17) должно выполняться тождественно при произвольных $\vec{B}$ и $\vec{E}$. Введем новые переменные: $B'_1 = B_1$, $E'_1 = E_1$, $E'_2 = E_2$, $E'_3 = E_3$, $u = c_1$, $v = c_2$, $w = c_3$ (c_1 , c_2 , c_3 — функционально независимы). В новых переменных уравнения (2.17) переписываются

$$E'_1 \frac{\partial M_1}{\partial u} 2(B'_3 E'_1 - B'_1 E'_3) + 2 B'_1 \frac{\partial N_1}{\partial u} (B'_3 E'_2 - B'_2 E'_3) + \\ + \frac{\partial K_1}{\partial u} (B'_1 E'_3 - B'_3 E'_1) + K_1 (B'^2_2 + B'^2_3) \equiv 0, \quad (2.18)$$

где B'_1 , B'_2 , E'_1 выражены через новые переменные.

Равенство (2.18) должно выполняться тождественно при произвольных $u, E'_2, v, E'_3, w, B'_1$. Учитывая, что M_1 , N_1 , K_1 зависят только от u , v , w и положив $E'_1 = 0$, $E'_3 = 0$ (при этом $E'_2 = c_1$, $B'_2 = \frac{c_3}{c_1}$, $B'_3 = \sqrt{c_2 - (\frac{c_3}{c_1})^2} = B'_1$), получаем, что $K_1 = 0$. Поэтому из (2.18) получаем

$$E'_1 \frac{\partial M_1}{\partial u} + B'_1 \frac{\partial N_1}{\partial u} = 0 \quad (2.19)$$

Теперь положим $a = 2$ и учитывая, что $K_1 = 0$ рассмотрим

такое уравнение из (2.15),

$$\left\{ D_1 - M_1 E_1 - N_1 B_1 \right\} / \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} = M_1 \vec{E} + N_1 \vec{B} \\ \vec{H} = M_1 \vec{E} + N_1 \vec{B} + \kappa_1 [\vec{B}, \vec{E}] \end{array} \right. = 0 \quad (2.20)$$

Оно эквивалентно уравнению:

$$E_1' \frac{\partial M_1}{\partial u} 2(B_1' E_3' - B_3' E_1') + B_1' \frac{\partial N_1}{\partial u} 2(B_1' E_1' - B_3' E_3') = 0$$

Отсюда следует, что

$$E_1' \frac{\partial M_1}{\partial u} + B_1' \frac{\partial N_1}{\partial u} = 0 \quad (2.21)$$

Тождественное выполнение равенств (2.19), (2.21) возможно, лишь при условии, что $\frac{\partial M_1}{\partial u} = \frac{\partial N_1}{\partial u} = 0$. Таким образом, приходим к выводу, что M_1 , N_1 являются функциями только от v и w . Повторяя аналогичные рассуждения для уравнения

$$\vec{H} = M_2 \vec{E} + N_2 \vec{B} + \kappa_2 [\vec{B}, \vec{E}],$$

получаем, что $\kappa_2 = 0$ и $\frac{\partial M_2}{\partial u} = \frac{\partial N_2}{\partial u} = 0$, т.е. функции M_2 и N_2 зависят только от переменных v и w .

Поддействовав оператором $G_2 \{ D_1 - M_1(v, w) E_1 - N_1(v, w) B_1 \}$, получаем, что $M_1 = 0$. Далее, поддействовав оператором G_2 на уравнение $H_3 = M_2 E_3 + N_2 B_3$ приходим к уравнению

$$-D_1 = M_2 B_1.$$

Следовательно $N_2 = -M_2$. Итак, мы показали, что необходимыми

условиями инвариантности уравнений (2.14) относительно группы Галилея являются следующие условия:

$$M_1 = K_1 = K_2 = 0 \quad N_1 = N_1(c_2, c_3) \quad (2.22)$$

$$N_1 = N_2(c_2, c_3), \quad M_2 = M_2(c_2, c_3), \quad N_1 = -M_2$$

Можно доказать, что эти условия являются и достаточными. Действительно, полученные уравнения

$$\begin{aligned} \vec{D} &= N_1 \vec{B} \\ \vec{H} &= -N_1 \vec{E} + M_2 \vec{B} \end{aligned} \quad (2.23)$$

удовлетворяют условиям (2.15), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой. Теорема 2.1 доказана. В работах 26, 68 установлено, что полная система уравнений, описывающая электромагнитные поля в покоящейся системе отсчета, не инвариантна относительно преобразований Галилея. В этом параграфе предложены материальные уравнения, которые совместно с уравнениями Максвелла в среде образуют галилеевски-инвариантную систему. А теперь рассмотрим вопрос при каких функциях N_1 и M_2 материальные уравнения будут инвариантны относительно группы Шредингера $Sch(I, 3)$ инфинитезимальные операторы которой задаются формулами (1.22), (1.24).

Для инвариантности уравнений (1.23) относительно преобразований дилатации необходимо выполнение таких условий

$$\mathcal{D} \left\{ \vec{D} = N_1 \vec{B} \right\} / \left. \begin{aligned} \vec{D} &= N_1 \vec{B} \\ \vec{H} &= -N_1 \vec{E} + M_2 \vec{B} \end{aligned} \right\} \equiv 0, \quad (2.24)$$

$$\mathcal{D} \left\{ \vec{H} = -N_1 \vec{E} + M_2 \vec{B} \right\} / \left. \begin{aligned} \vec{D} &= N_1 \vec{B} \\ \vec{H} &= -N_1 \vec{E} + M_2 \vec{B} \end{aligned} \right\} \equiv 0$$

Из (2.24) получаем уравнения, которым должны удовлетворять N_1 и M_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial v} 4v + \frac{\partial N_1}{\partial w} 5w &= 0, \\ \frac{\partial M_1}{\partial v} 4v + \frac{\partial M_1}{\partial w} 5w &= M_1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Из (2.25) получаем, что

$$N_1 = N_1 \left(\frac{w^4}{v^5} \right), \quad M_1 = w^{1/5} M_2 \left(\frac{w^4}{v^5} \right) \quad (2.26)$$

Используя явный вид оператора A (I.24) легко убедиться прямой подстановкой, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} A \left\{ \vec{H} + N_1 \vec{E} - w^{1/5} M_1 \vec{B} \right\} \Bigg|_{\substack{\vec{D} = N_1 \vec{B} \\ \vec{H} = -N_1 \vec{E} + M_1 w^{1/5} \vec{B}}} &\equiv 0, \\ A \left\{ \vec{D} - N_1 \vec{B} \right\} \Bigg|_{\substack{\vec{D} = N_1 \vec{B} \\ \vec{H} = -N_1 \vec{E} + M_1 w^{1/5} \vec{B}}} &\equiv 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Таким образом мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.2. Система уравнений (I.3), (2.23) инвариантна относительно группы Шредингера. Sch (I,3), инфинитезимальные операторы которой задаются формулами (I.22), (I.24) тогда и только тогда когда

$$\begin{aligned} \vec{D} &= N_1 \left[\frac{(\vec{B} \vec{E})^4}{(\vec{B}')^5} \right] \vec{B}, \\ \vec{H} &= -N_1 \left[\frac{(\vec{B} \vec{E})^4}{(\vec{B}')^5} \right] \vec{E} + (\vec{B} \vec{E})^{4/5} M_2 \left(\frac{(\vec{B} \vec{E})^4}{(\vec{B}')^5} \right) \vec{B}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

§ 3. Пуанкаре-инвариантные материальные уравнения

Как известно, преобразования из группы Пуанкаре $P(1.3)$ сохраняют вид материальных уравнений в вакууме $\vec{D} = \vec{E}$, $\vec{B} = \vec{H}$, что физически соответствует релятивистскому постулату инвариантности скорости света. Уравнения, предложенные Борном для описания электромагнитного поля [75], фактически представляют собой уравнения Максвелла с некоторыми нелинейными уравнениями, которые также являются пуанкаре-инвариантными. В данном параграфе построен общий вид материальных уравнений (2.1) инвариантных относительно группы Пуанкаре, и как частный случай приводятся уравнения Борна-Инфельда.

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. Система уравнений (1.3), (2.1) инвариантна относительно группы Пуанкаре $P(1.3)$, инфинитезимальные операторы которой задаются формулами (1.21) тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}\vec{D} &= M\vec{E} + N\vec{B} \\ \vec{H} &= M\vec{B} - N\vec{E}\end{aligned}\quad (3.1)$$

где $M = M(C_1, C_2)$, $N = N(C_1, C_2)$ — произвольные дифференцируемые функции от инвариантов электромагнитного поля

$$\begin{aligned}C_1 &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \vec{E}^2 - \vec{B}^2, \\ C_2 &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} = \vec{B} \cdot \vec{E}.\end{aligned}$$

Доказательство. Так как уравнения (1.3) инвариантны относительно группы Пуанкаре $P(1.3)$, то для доказательства теоремы достаточно найти условия на функции M и N , при которых уравнения (2.1) инвариантны относительно алгебры Пуанкаре $P(1.3)$ (1.21). Уравнения (2.1) будут пуанкаре-инвариантны тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \rho_\mu \left\{ \vec{D} - \vec{F}(\vec{E}, \vec{B}) \right\} / \left. \begin{array}{l} \vec{D} = \vec{F}(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{H} = \vec{\Phi}(\vec{E}, \vec{B}) \end{array} \right\} &\equiv 0, \\ \rho_\mu \left\{ \vec{H} - \vec{\Phi}(\vec{E}, \vec{B}) \right\} / \left. \begin{array}{l} \vec{D} = \vec{F}(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{H} = \vec{\Phi}(\vec{E}, \vec{B}) \end{array} \right\} &\equiv 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} \left\{ \vec{D} - \vec{F}(\vec{E}, \vec{B}) \right\} / \left. \begin{array}{l} \vec{D} = \vec{F}(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{H} = \vec{\Phi}(\vec{E}, \vec{B}) \end{array} \right\} &\equiv 0, \\ J_{\mu\nu} \left\{ \vec{H} - \vec{\Phi}(\vec{E}, \vec{B}) \right\} / \left. \begin{array}{l} \vec{D} = \vec{F}(\vec{E}, \vec{B}) \\ \vec{H} = \vec{\Phi}(\vec{E}, \vec{B}) \end{array} \right\} &\equiv 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Используя формулу (1.21), условия инвариантности (3.2), (3.3), запишем в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка для функций $\vec{F}$ и $\vec{\Phi}$. При $\mu, \nu = 1, 3$ для $\vec{F}$ и $\vec{\Phi}$ получим систему уравнений (2.4), (2.5). Как показано в § 2, общее решение системы (2.4), (2.5) имеет вид (2.14). Нам остается рассмотреть уравнения:

$$\begin{aligned} J_{0\alpha} \left\{ \vec{D} - M_1 \vec{E} - N_1 \vec{B} - K_1 [\vec{B}, \vec{E}] \right\} / \left. \begin{array}{l} \vec{D} = M_1 \vec{E} + N_1 \vec{B} + K_1 [\vec{B}, \vec{E}] \\ \vec{H} = M_2 \vec{E} + N_2 \vec{B} + K_2 [\vec{B}, \vec{E}] \end{array} \right\} &\equiv 0, \\ J_{0\alpha} \left\{ \vec{H} - M_2 \vec{E} - N_2 \vec{B} - K_2 [\vec{B}, \vec{E}] \right\} / \left. \begin{array}{l} \vec{D} = M_1 \vec{E} + N_1 \vec{B} + K_1 [\vec{B}, \vec{E}] \\ \vec{H} = M_2 \vec{E} + N_2 \vec{B} + K_2 [\vec{B}, \vec{E}] \end{array} \right\} &\equiv 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рассмотрим первое уравнение системы (3.4), положив $\alpha = 1$

$$\begin{aligned}
& E_1 \left[- \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} 2 B_2 E_3 + 2 B_3 E_2 \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} + 2 B_3 E_1 \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} - 2 B_2 E_3 \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} \right] + \\
& + B_1 \left[- \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} 2 B_2 E_3 + 2 B_3 E_2 \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} + 2 B_3 E_1 \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} - 2 B_2 E_3 \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} \right] + \\
& + \left[- \frac{\partial K_1}{\partial \omega_2} 2 B_2 E_3 + 2 B_3 E_2 \frac{\partial K_1}{\partial \omega_2} - 2 B_3 E_1 \frac{\partial K_1}{\partial \omega_2} + 2 B_2 E_3 \frac{\partial K_1}{\partial \omega_2} \right] (B_3 E_1 - B_2 E_3) + \\
& + K_1 [E_1^2 + E_2^2 + B_2^2 + B_3^2] \equiv 0, \tag{3.5} \\
& \omega_1 = \vec{E}^2, \omega_2 = \vec{B}^2, \omega_3 = \vec{B} \vec{E}.
\end{aligned}$$

Как и в § 2, произведя замену переменных и положив $E_1 = E_3 = 0$, получим $K_1 = 0$. Аналогично, рассматривая уравнение

$$J_{01} \left\{ H_1 - M_1 E_1 - M_1 B_2 - K_2 \{ \vec{B}, \vec{E} \}_1 \right\} / \frac{\vec{D} = M_1 \vec{E} + M_2 \vec{B} + K_2 [\vec{E}, \vec{B}]}{\vec{H} = M_1 \vec{E} + M_2 \vec{B} + K_2 [\vec{E}, \vec{B}]} \equiv 0$$

доказываем, что $K_2 = 0$.

Теперь (3.5) примет вид

$$\left(\frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} + \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} \right) E_1 + \left(\frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} + \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} \right) B_1 \equiv 0. \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} + \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} = 0$ и $\frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} + \frac{\partial M_1}{\partial \omega_2} = 0$.

Поэтому $M_1 = M_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $M_2 = M_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Аналогично устанавливается $M_3 = M_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и $M_4 = M_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Далее рассмотрим такие уравнения, вытекающие из (3.4):

$$\begin{aligned}
J_{02} \left\{ D - M_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) E_1 - M_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) B_2 \right\} / \frac{\vec{D} = M_1 \vec{E} + M_2 \vec{B}}{\vec{H} = M_1 \vec{E} + M_2 \vec{B}} &\equiv 0, \\
J_{03} \left\{ D - M_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) E_1 - M_2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) B_2 \right\} / \frac{\vec{D} = M_1 \vec{E} + M_2 \vec{B}}{\vec{H} = M_1 \vec{E} + M_2 \vec{B}} &\equiv 0
\end{aligned}$$

из которых вытекает, что

$$\begin{aligned} -M_1 E_3 - M_2 B_3 + M_3 B_3 - N_1 E_3 &= 0, \\ M_1 E_2 + N_2 B_1 - M_2 B_2 + N_1 E_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что $M_2 = N_1$, $N_2 = M_1$.

Итак, мы установили, что необходимыми условиями инвариантности системы (2.14) относительно группы Пуанкаре P(1.3) являются условия:

$$\begin{aligned} E_3 = B_3 = 0, \quad M_1 = -N_1, \quad M_2 = N_2, \\ M_1 = M_2 (\vec{E}' - \vec{E}' \vec{B}' \vec{E}), \quad N_1 = N_2 (\vec{E}' - \vec{B}' \vec{E}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Убедимся, что полученные материальные уравнения (3.1) пуанкаре-инвариантны. Для этого достаточно проверить, что они удовлетворяют системе (3.4). Таким образом, условия (3.8) являются и достаточными.

Теорема доказана.

В терминах тензоров $F_{\mu\nu}$ и $\hat{H}_{\mu\nu}$ уравнения (3.1) принимают более симметричную форму

$$H_{\mu\nu} = M F_{\mu\nu} + N \hat{F}_{\mu\nu} \quad (3.9)$$

Так как M и N являются произвольными функциями от инвариантов C_1, C_2 , то мы получили целый класс пуанкаре-инвариантных материальных уравнений.

Если в (3.1) положить $M = \text{const}$, $N = \text{const}$, то уравнения (3.1) совместно с (1.3) совпадают с линейными уравнениями Максвелла.

Положив $M = \frac{1}{L}$, $N = \frac{\vec{B}' \vec{E}'}{L}$ в (3.1) $L = \sqrt{1 + \frac{\vec{B}'^2 - \vec{E}'^2}{b^2} + \frac{(\vec{B}' \vec{E}')^2}{b^4}}$, $b = \text{const}$,

система (1.3) совместно с (3.1) совпадает с нелинейными уравнениями для электромагнитного поля, предложенными Борном 75 и известными в литературе как уравнения Борна-Инфельда.

В физических приложениях чаще всего используются материальные уравнения вида

$$\vec{D} = \vec{f}(\vec{E}, \vec{H}), \quad \vec{B} = \vec{\varphi}(\vec{E}, \vec{H}) \quad (3.10)$$

Для того чтобы материальные уравнения вида (3.10), очевидно, достаточно разрешить систему (3.1) относительно векторов $\vec{D}$ и $\vec{B}$, тем самым, выразив их через векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Приведем некоторые примеры пуанкаре-инвариантных материальных уравнений.

1. Если $M=1$, $N=\vec{E}\vec{F}$ материальные уравнения имеют вид

$$\vec{B} = \vec{H} - \vec{E} \frac{\vec{E}\vec{H}}{1 + \vec{E}\vec{E}}$$

$$\vec{D} = \vec{E} - \vec{H} \frac{\vec{E}\vec{F}}{1 + \vec{E}\vec{E}}$$

2. $M = \epsilon \vec{E}\vec{D}$, $N=0$, $\epsilon = \text{const}$

$$\vec{D} = \epsilon \sqrt{\vec{E}\vec{H}} \vec{E}$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{H}}{\epsilon \sqrt{\vec{E}\vec{H}}}$$

3. $N=0$, $1 = \mu \frac{\vec{E}' - \vec{B}'}{(\vec{E}\vec{F})^2}$, $\mu = \text{const}$

$$\vec{B} = -\vec{E}\vec{H} = \frac{\sqrt{(\vec{E}\vec{H})^2 + \mu^{-1} \vec{E}'\vec{H}'}}{2 + \vec{H}'} \vec{H}$$

$$\vec{D} = \frac{\vec{E}\vec{H}}{\sqrt{(\vec{E}\vec{H})^2 + \mu^{-1} \vec{E}'\vec{H}'}} \vec{E}$$

4. Если положить в (3.1) $M = \varepsilon$, $N = \mu \vec{B} \vec{E}$ ($\varepsilon, \mu = \text{const}$), то материальные уравнения будут иметь более сложную структуру

$$\vec{D} = \varepsilon \left\{ 1 + \frac{\mu^2 (\vec{E} \vec{E})}{\varepsilon (\varepsilon + \mu \vec{E})} \right\} \vec{E} - \frac{\mu (\vec{E} \vec{H})}{\varepsilon (\varepsilon + \mu \vec{E})} \vec{H},$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{H}}{\varepsilon} - \mu \frac{\vec{E} \vec{H}}{\varepsilon (\varepsilon + \mu \vec{E})} \vec{E}.$$

Рассмотрим материальные уравнения частного вида

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon(\vec{E}, \vec{H}) \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu(\vec{E}, \vec{H}) \vec{H} \end{aligned} \quad (3.11)$$

где ε, μ — некоторые гладкие функции, зависящие от переменных $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Материальные уравнения вида (3.11) широко используются для описания распространения электромагнитного поля в реальных средах. Из теоремы 3.1 получаем (используется система единиц, в которой скорость света $c = 1$) будет пуанкаре-инвариантной только тогда, когда

$$\varepsilon(\vec{E}, \vec{H}) \mu(\vec{E}, \vec{H}) = 1$$

Пусть материальные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{\varphi}(\vec{B}) \\ \vec{D} &= \vec{f}(\vec{B}, \vec{E}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\vec{f}$ и $\vec{\varphi}$ — некоторые дифференцируемые функции.

Требование инвариантности уравнения $H_1 = \varphi(\vec{B})$ относительно преобразований генерируемых оператором $\hat{P}_0$ эквивалентно уравнению

$$E_2 \frac{\partial \varphi}{\partial B_3} - E_3 \frac{\partial \varphi}{\partial B_2} = 0 \quad (3.13)$$

Отсюда заключаем, что $\frac{\partial \varphi_1}{\partial B_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial B_3} = 0$. Пропедев аналогичную процедуру для уравнений $H_2 = \varphi_2(\vec{B})$ и $H_3 = \varphi_3(\vec{B})$, получаем,

$$H_1 = \varphi_1(B_1), \quad H_2 = \varphi_2(B_2), \quad H_3 = \varphi_3(B_3) \quad (3.14)$$

В свою очередь, уравнения (3.14) пуанкаре-инвариантны, если выполняются следующие равенства

$$\begin{aligned} p_3 &= E_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial B_1}, & p_2 &= E_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial B_1}, & p_1 &= E_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial B_1}, \\ p_3 &= -E_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial B_2}, & p_2 &= E_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial B_2}, & p_1 &= E_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial B_2}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из (3.15) следует, что $\frac{\partial \varphi_1}{\partial B_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial B_2} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial B_3} = \mu = \text{const}$.

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

С л е д с т в и е 3.1. Если материальные уравнения имеют вид (3.12), то векторы $\vec{B}$ и $\vec{D}$ могут быть только линейными функциями $\vec{E}$ и $\vec{H}$, т.е.

$$\vec{D} = \mu \vec{E}, \quad \vec{B} = \frac{1}{\mu} \vec{H}. \quad (3.16)$$

Отметим еще такой факт, что если материальные уравнения выбрать в виде

$$\begin{aligned} \vec{D} &= N(\vec{B}, \vec{E}) \vec{B}, \\ \vec{H} &= -N(\vec{B}, \vec{E}) \vec{E} \end{aligned} \quad (3.17)$$

где N — произвольная дифференцируемая функция одного переменного, то система (1.3), (3.17), как это следует из теорем 2.1, 3.1, будет инвариантна как относительно группы Пуанкаре $P(1.3)$, так и относительно группы Галилея $G(1.3)$.

§ 4. Уравнения Максвелла в среде в случае двух независимых переменных

В двумерном случае ($x = t, x_1 = x$) уравнения Максвелла
в вакууме приводят к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (4.1)$$

Эта система допускает бесконечномерную алгебру Ли, причем координаты инфинитезимального оператора задаются формулами:

$$\begin{aligned}\xi^t &= -f(x+t) + g(x-t) \\ \xi^x &= f(x+t) - g(x-t) \\ \eta^E &= -F(t-H) + G(t+H) \\ \eta^H &= F(t+H) - G(t-H),\end{aligned}\quad (4.2)$$

где f, g, F, G — произвольные дифференцируемые функции одного переменного.

К уравнениям Максвелла в среде

$$\begin{aligned}\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} &= 0\end{aligned}\quad (4.3)$$

необходимо добавить материальные уравнения, чтобы система была определенной. Оказывается, что если материальные уравнения имеют такую же структуру как и координаты ξ^E и η^H , т.е.

$$H = F(B+E) + G(B-E),$$

$$D = F(B+E) - G(B-E), \quad (4.4)$$

то система уравнений (4.3), (4.4) имеет общее решение.

Действительно, подставим (4.4) в (4.3) и получим

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0,$$

$$F' \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t} \right) - G' \left(\frac{\partial B}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial t} \right) - F' \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial x} \right) - G' \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial x} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0,$$

$$(F' - G') \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} \right) + (F' + G') \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0. \quad (4.5)$$

Из (4.5) как следствие, получаем систему

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial t} = 0. \quad (4.6)$$

Система (4.6) имеет общее решение

$$B = -f(x+t) - g(x-t)$$

$$E = f(x+t) - g(x-t). \quad (4.7)$$

Подставив (4.7) в (4.4), находим H и D :

$$H = F[-2g(x-t)] - G[-2f(x+t)],$$

$$D = F[2g(x-t)] - G[2f(x+t)]. \quad (4.8)$$

Формулы (4.7), (4.8) задают общее решение системы (4.3), (4.4). Итак, если в 2-мерном случае имеем среду с материальными уравнениями вида (4.4), то можно найти общее решение этой системы (4.3), (4.4).

§ 5. Конформно-инвариантные материальные уравнения

Выясним теперь вопрос о том, какие ограничения накладывают на материальные уравнения (2.1) требование инвариантности относительно конформной группы $C(1,3)$. Так как группа Пуанкаре $P(1,3)$ является подгруппой конформной группы $C(1,3)$, то для решения поставленного вопроса достаточно указать при каких M и N материальные уравнения (3.1) совместно с уравнениями Максвелла (1.3) инвариантны относительно конформных преобразований.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 5.1. Система уравнений (1.3), (3.1) инвариантна относительно группы $C(1,3)$, базисные инфинитезимальные операторы которой задаются формулами (1.21), (1.23) тогда и только тогда, когда

$$M = M\left(\frac{c_1}{c_2}\right), \quad N = N\left(\frac{c_1}{c_2}\right),$$

где M и N — произвольные дифференцируемые функции, зависящие от отношения инвариантов $c_1 = \vec{E}^2 - \vec{B}^2$, $c_2 = \vec{B} \vec{E}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Требования инвариантности материальных уравнений (3.1) относительно масштабных преобразований генерируемых оператором $D(1.23)$, приводит к тому, что функции M и N в (3.1) могут зависеть только от отношения инвариантов c_1/c_2 . Действительно, из уравнений

$$\mathcal{D} \left\{ \vec{\mathcal{D}} - M \vec{E} - N \vec{B} \right\} \bigg|_{\substack{\vec{D} = M \vec{E} + N \vec{B} \\ \vec{H} = M \vec{B} - N \vec{E}}} \equiv 0$$

получаем

$$C_1 \frac{\partial M}{\partial C_1} - C_2 \frac{\partial M}{\partial C_2} = 0,$$

$$C_1 \frac{\partial M}{\partial C_1} + C_2 \frac{\partial M}{\partial C_2} = 0$$

откуда и следует, что $M = M(\frac{C_1}{C_2})$ и $N = N(\frac{C_1}{C_2})$

Таким образом, материальные уравнения

$$\begin{aligned} \vec{D} &= M(\frac{C_1}{C_2}) \vec{E} + N(\frac{C_1}{C_2}) \vec{B} \\ \vec{H} &= M(\frac{C_1}{C_2}) \vec{B} + N(\frac{C_1}{C_2}) \vec{E} \end{aligned} \quad (5.1)$$

инвариантны относительно масштабных преобразований. Воспользовавшись явным видом операторов K_μ (I.23), легко убедиться, что условия

$$\begin{aligned} K_\mu \left\{ \vec{D} = M(\frac{C_1}{C_2}) \vec{E} + N(\frac{C_1}{C_2}) \vec{B} \right\} / \begin{aligned} \vec{D} &= M \vec{E} + N \vec{B} \\ \vec{H} &= M \vec{B} + N \vec{E} \end{aligned} &= 0 \\ K_\mu \left\{ \vec{H} = M(\frac{C_1}{C_2}) \vec{B} + N(\frac{C_1}{C_2}) \vec{E} \right\} / \begin{aligned} \vec{D} &= M \vec{E} + N \vec{B} \\ \vec{H} &= M \vec{B} + N \vec{E} \end{aligned} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

выполняются, а, следовательно, теорема доказана.

Приведем явный вид конформно-инвариантных материальных уравнений. Положив в (5.1)

$$M = \frac{\vec{E}' \cdot \vec{B}'}{\vec{E}'^2}, \quad N = 0$$

получим

$$\vec{D} = \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{\vec{E}^2} \vec{E} \quad (5.3)$$

$$\vec{B} = \sqrt{\frac{\vec{E}^2 - \vec{E} \cdot \vec{H}}{\vec{H}^2}} \vec{H}$$

Отметим также, что уравнения Борна-Инфельда, представляющие собой уравнения Максвелла (I.3) с материальными уравнениями

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \frac{\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B}}{1 + \frac{v^2}{c^2}} & \rho &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rho^0 \\ \vec{H} &= \frac{\vec{B} - \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \vec{J} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\vec{J}^0 + \frac{1}{c} \rho^0 \vec{v}) \end{aligned}$$

инвариантны относительно группы Пуанкаре $P(I.3)$, но не инвариантны относительно конформной группы $C(I.3)$.

Рассмотренные выше алгебры Ли не исчерпывают всех свойств симметрии уравнений Максвелла. Рассмотрим теперь инвариантность системы (I.3), (5.1) относительно следующих дискретных преобразований

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow -\vec{x}, \quad t \rightarrow t \\ \vec{E}(t, \vec{x}) &\rightarrow -\vec{E}(t, -\vec{x}) & \vec{D}(t, \vec{x}) &\rightarrow -\vec{D}(t, -\vec{x}) \\ \vec{H}(t, \vec{x}) &\rightarrow \vec{H}(t, -\vec{x}) & \vec{B}(t, \vec{x}) &\rightarrow \vec{B}(t, -\vec{x}) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \vec{x}, \quad t \rightarrow -t \\ \vec{E}(t, \vec{x}) &\rightarrow \vec{E}(-t, \vec{x}) & \vec{D}(t, \vec{x}) &\rightarrow -\vec{D}(-t, \vec{x}) \\ \vec{H}(t, \vec{x}) &\rightarrow -\vec{H}(-t, \vec{x}) & \vec{B}(t, \vec{x}) &\rightarrow \vec{B}(-t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow \vec{x}, \quad t \rightarrow t \\ \vec{E}(t, \vec{x}) &\rightarrow \vec{E}^*(t, \vec{x}) & \vec{D}(t, \vec{x}) &\rightarrow \vec{D}^*(t, \vec{x}) \\ \vec{H}(t, \vec{x}) &\rightarrow \vec{H}^*(t, \vec{x}) & \vec{B}(t, \vec{x}) &\rightarrow \vec{B}^*(t, \vec{x}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

* — знак комплексного сопряжения.

Преобразования (5.4), (5.5), (5.6) называют пространственной инверсией P , обращением времени T , и зарядовым сопряжением C соответственно. Непосредственной проверкой

убеждаемся, что система (I.3) инвариантна относительно преобразований (5.4)–(5.6).

Т е о р е м а 5.2. Конформно-инвариантная нелинейная система уравнений Максвелла (I.3), (5.1) инвариантна относительно C -, P -, T -преобразований (5.4)–(5.6) тогда и только тогда, когда $M(\frac{C_i}{C_1})$ – четная, а $N(\frac{C_i}{C_2})$ – нечетная функция относительно

Преобразования (5.4)–(5.6) запишем в виде

$$\begin{aligned}\psi(t, \vec{x}) &\rightarrow P \psi(t, \vec{x}) = A_1 \psi(t, \vec{x}) \\ \psi(t, \vec{x}) &\rightarrow T \psi(t, \vec{x}) = A_2 \psi(-t, \vec{x}) \\ \psi(t, \vec{x}) &\rightarrow C \psi(t, \vec{x}) = \psi^*(t, \vec{x})\end{aligned}\quad (5.7)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix}$$

$0, I$ – нулевая и единичная матрицы размерности 3×3 .

Операторы (5.7) совместно с инвариантными группами $C(I.3)$ (I.21), (I.23) удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям ($[,]$ – антикоммутатор):

$$\begin{aligned}[P, P_0] &= [P, P_a]_+ = [P, J_{ab}] = [P, J_{0a}]_+ = 0, \quad [C, P_0]_+ = [C, J_{ab}]_+ = 0, \\ [T, P_0]_+ &= [T, P_a] = [T, J_{ab}] = [T, J_{0a}]_+ = 0, \\ [T, D] &= [T, k_0]_+ = [T, k_a] = 0, \\ [C, D]_+ &= [C, k_a]_+ = 0, \quad [P, T] = [P, C] = [T, C] = 0, \\ T^2 &= P^2 = C^2 = I.\end{aligned}\quad (5.8)$$

§ 6. Симметрия материальных уравнений Минковского

В предыдущих параграфах изучалась симметрия уравнений Максвелла, описывающих электромагнитные явления в покоящейся среде. В этом параграфе рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \text{rot } \vec{H} & \text{div } \vec{D} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\text{rot } \vec{E} & \text{div } \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{D} + [\vec{u}, \vec{H}] &= \varepsilon (\vec{E} + [\vec{u}, \vec{B}]), \\ \vec{B} + [\vec{E}, \vec{u}] &= \mu (\vec{H} + [\vec{D}, \vec{u}]), \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\vec{u}$ — скорость движения среды, $\varepsilon, \mu = \text{const}$. Эти уравнения составляют основу электродинамики инерциально движущихся изотропных сред. Материальные уравнения (6.2) впервые получены Минковским [25]. Симметричные свойства системы (6.1), (6.2) устанавливаются следующей теоремой.

Т е о р е м а 6.1. Система уравнений (6.1), (6.2) инвариантна относительно группы конформных преобразований, причем базисные элементы соответствующей алгебры Ли имеют вид:

$$\begin{aligned} P_\mu &= i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \\ J_{\mu\nu} &= x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + (S_{\mu\nu} \psi)_\alpha \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} + V_{\mu\nu} \\ D &= x_\nu P^\nu - 2i \psi_\alpha \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} \\ K_\mu &= 2x_\mu D - (x_\nu x^\nu) P_\mu + 2x^\nu [(S_{\mu\nu} \psi)_\alpha \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} + V_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $V_{ab} = u_a P_{ib} - u_b P_{ia}$, $V_{0a} = u_a (u^b P_{ib}) - P_{ia}$, $P_{ia} = -i \frac{\partial}{\partial u_a}$

Доказательство. Система (6.1) инвариантна относительно конформных преобразований в силу теоремы I.I. Поэтому мы исследуем симметрию материальных уравнений Минковского. Перепишем уравнения (6.2) в виде:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{D}} - \varepsilon \vec{E} &= [\vec{u}, \varepsilon \vec{B} - \vec{H}] \\ \vec{B} - \mu \vec{H} &= [\vec{u}, \vec{E} - \mu \vec{\mathcal{D}}]\end{aligned}\quad (6.4)$$

Из (6.4) следует

$$\begin{aligned}(\vec{\mathcal{D}} - \varepsilon \vec{E})(\varepsilon \vec{B} - \vec{H}) &= 0 \\ (\vec{B} - \mu \vec{H})(\vec{E} - \mu \vec{\mathcal{D}}) &= 0\end{aligned}\quad (6.5)$$

Очевидно, что если уравнения (6.2) инвариантны относительно некоторым преобразований $\vec{\mathcal{D}}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{H}, \vec{u}$, то будут инвариантными относительно тех же преобразований и уравнения (6.5). Рассмотрим второе из уравнений (6.5). Если будет выполняться условие

$$(\mathcal{L}^{\vec{B}} - \mu \mathcal{L}^{\vec{H}})(\vec{E} - \mu \vec{\mathcal{D}}) + (\vec{B} - \mu \vec{H})(\mathcal{L}^{\vec{E}} - \mu \mathcal{L}^{\vec{\mathcal{D}}}) = 0 \quad (6.6)$$

то уравнение $(\vec{B} - \mu \vec{H})(\vec{E} - \mu \vec{\mathcal{D}}) = 0$ будет инвариантным относительно группы преобразований, инфинитезимальный оператор которой имеет вид

$$X = \xi^\mu \partial_{x^\mu} + \mathcal{L}^{\vec{E}} \partial_{\vec{E}} + \mathcal{L}^{\vec{B}} \partial_{\vec{B}} + \mathcal{L}^{\vec{\mathcal{D}}} \partial_{\vec{\mathcal{D}}} + \mathcal{L}^{\vec{H}} \partial_{\vec{H}} + \mathcal{L}^{\vec{u}} \partial_{\vec{u}} \quad (6.7)$$

Возьмем $\xi^\mu, \mathcal{L}^{\vec{E}}, \mathcal{L}^{\vec{B}}, \mathcal{L}^{\vec{\mathcal{D}}}, \mathcal{L}^{\vec{H}}$ заданные формулами (I.I5) и найдем из условия инвариантности системы (6.1). Теперь рассмотрим, какие ограничения на координаты инфинитезимального оператора (6.7) налагает условие (6.6).

$$\begin{aligned}
& [(\zeta_1^1 B_1 + \xi_2^1 B_2 + \xi_3^1 B_3 - \xi_3^0 E_2 + \xi_2^0 E_3) - \mu(-\xi_0^3 \mathcal{D}_2 + \xi_0^2 \mathcal{D}_3 + \zeta_4^4 H_1 - \\
& - \xi_1^2 H_2 - \xi_1^3 H_3)] \cdot (E_1 - \mu \mathcal{D}_1) + [(\xi_1^2 B_1 + \zeta_2^2 B_2 + \xi_3^2 B_3 + \xi_3^0 E_1 - \xi_1^0 E_3) - \\
& - \mu(\xi_0^3 \mathcal{D}_1 - \xi_0^1 \mathcal{D}_3 - \xi_2^1 H_1 + \zeta_5^5 H_2 - \xi_2^3 H_3)] (E_2 - \mu \mathcal{D}_2) + \\
& + [(\xi_1^3 B_3 + \xi_2^3 B_2 + \zeta_3^3 B_3 - \xi_2^0 E_1 + \xi_1^0 E_2) - \mu(-\xi_0^2 \mathcal{D}_1 + \xi_0^1 \mathcal{D}_2 - \\
& - \xi_3^1 H_1 - \xi_3^2 H_2 + \zeta_6^6 H_3)] (E_3 - \mu \mathcal{D}_3) + [(\xi_0^3 B_2 - \xi_0^2 B_3 + \\
& + \zeta_4^4 E_1 - \xi_1^2 E_2 - \xi_1^3 E_3) - \mu(\zeta_1^1 \mathcal{D}_1 + \xi_2^1 \mathcal{D}_2 + \xi_3^1 \mathcal{D}_3 + \\
& + \xi_3^0 H_2 - \xi_2^0 H_3)] (B_1 - \mu H_1) + [(-\xi_0^3 B_1 + \xi_0^1 B_3 - \xi_2^1 E_1 + \zeta_5^5 E_2 - \\
& - \xi_2^3 E_3) - \mu(\xi_1^2 \mathcal{D}_1 + \zeta_2^2 \mathcal{D}_2 + \xi_3^2 \mathcal{D}_3 - \xi_3^0 H_1 + \xi_1^0 H_3)] (B_2 - \mu H_2) + \\
& + [(\xi_0^2 B_1 - \xi_0^1 B_2 - \xi_3^1 E_1 - \xi_3^2 E_2 + \zeta_6^6 E_3) - \mu(\xi_1^3 \mathcal{D}_1 + \\
& + \xi_2^3 \mathcal{D}_2 + \zeta_3^3 \mathcal{D}_3 + \xi_2^0 H_1 - \xi_1^0 H_2)] \cdot (B_3 - \mu H_3) = 0 \quad (6.8)
\end{aligned}$$

Так как ξ^μ и ζ^k являются функциями только от x , то приравняв к нулю коэффициенты при различных произведениях $E_a B_b$, $E_a H_b$, $E_a \mathcal{D}_b$, $B_a \mathcal{D}_b$, $B_a H_b$, $\mathcal{D}_a H_b$, получаем определяющие уравнения на ξ^μ :

$$\begin{aligned}
\xi_0^0 &= \xi_1^1 = \xi_2^2 = \xi_3^3 \\
\xi_{,\mu}^0 - \xi_0^\mu &= 0 \\
\xi_a^a + \xi_{\overline{a}}^{\overline{a}} &= 0, \quad a \neq \overline{a} \quad a, \overline{a} = 1, 3
\end{aligned} \quad (6.9)$$

Как известно, решения системы (6.9) имеют вид

$$\xi^\mu(x) = 2(cx)x_\mu - x^2 c_\mu + a_\mu x^\nu + b_\mu, \quad (6.10)$$

где c_μ , a_μ , b_μ — произвольные действительные константы. Координаты $\zeta^{\overline{E}}$, $\zeta^{\overline{B}}$, $\zeta^{\overline{\mathcal{D}}}$, $\zeta^{\overline{H}}$ находим по формулам (1.15). Теперь ис-

исследуем инвариантность уравнений (6.4) с учетом полученных результатов. Запишем условие инвариантности системы (6.4).

$$\left(\zeta^{\vec{D}} - \varepsilon \zeta^{\vec{E}} - [\zeta^{\vec{u}}, \varepsilon \vec{B} - \vec{H}] - [\vec{u}, \varepsilon \zeta^{\vec{B}} - \zeta^{\vec{H}}] \right) \bigg|_{\substack{\vec{D} - \varepsilon \vec{E} = [\vec{u}, \varepsilon \vec{B} - \vec{H}] \\ \vec{B} - \mu \vec{H} = [\mu \vec{D} - \vec{E}, \vec{u}]} } = 0 \quad (6.11)$$

$$\left(\zeta^{\vec{B}} - \mu \zeta^{\vec{H}} - [\zeta^{\vec{u}}, \vec{E} - \mu \vec{D}] - [\vec{u}, \zeta^{\vec{E}} - \mu \zeta^{\vec{D}}] \right) \bigg|_{\substack{\vec{D} - \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} - \mu \vec{H}}} = 0$$

Так как $\zeta^{\vec{D}}$, $\zeta^{\vec{E}}$, $\zeta^{\vec{B}}$, $\zeta^{\vec{H}}$ — уже определены, требуется найти $\zeta^{\vec{u}}$, удовлетворяющие системе (6.11); $\zeta^{\vec{u}}$ — и заданные формулой

$$\zeta^{\vec{u}} = \xi_a^0 - u_a (\xi_b^0 u_b) + \xi_b^a u_b - \xi^a u_a \quad (6.12)$$

удовлетворяет системе (6.11). В этом можно убедиться прямой подстановкой на (6.12) в (6.11).

Введем обозначения: $\vec{D} - \varepsilon \vec{E} = \vec{A}$, $\varepsilon \vec{B} - \vec{H} = \vec{F}$, $\vec{B} - \mu \vec{H} = \vec{K}$, $\vec{E} - \mu \vec{D} = \vec{G}$.

Для конформных преобразований из формул (1.15) получаем

$$\begin{aligned} \zeta^{\vec{A}} &= -2 \xi_0^0 \mathcal{A}_1 + \xi_2^1 \mathcal{A}_2 + \xi_3^1 \mathcal{A}_3 - \xi_3^0 F_2 + \xi_2^0 F_3 \\ \zeta^{\vec{A}} &= \xi_1^2 \mathcal{A}_1 - 2 \xi_0^0 \mathcal{A}_2 + \xi_3^2 \mathcal{A}_3 + \xi_3^0 F_1 - \xi_1^0 F_3 \\ \zeta^{\vec{A}} &= \xi_1^3 \mathcal{A}_3 + \xi_2^3 \mathcal{A}_2 - 2 \xi_0^0 \mathcal{A}_3 - \xi_2^0 F_1 + \xi_1^0 F_2 \\ \zeta^{\vec{F}} &= \xi_0^3 \mathcal{A}_2 - \xi_0^2 \mathcal{A}_3 - 2 \xi_0^0 F_1 - \xi_1^2 F_2 - \xi_1^3 F_3 \\ \zeta^{\vec{F}} &= -\xi_0^3 \mathcal{A}_1 + \xi_0^1 \mathcal{A}_3 - \xi_2^1 F_1 - 2 \xi_0^0 F_2 - \xi_2^3 F_3 \\ \zeta^{\vec{F}} &= \xi_0^2 \mathcal{A}_1 - \xi_0^1 \mathcal{A}_2 - \xi_3^1 F_1 - \xi_3^2 F_2 - 2 \xi_0^0 F_3 \\ \zeta^{\vec{K}} &= -2 \xi_0^0 \mathcal{K}_1 + \xi_2^1 \mathcal{K}_2 + \xi_3^1 \mathcal{K}_3 - \xi_3^0 G_2 + \xi_2^0 G_3 \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\mathcal{L}^{K_2} = \xi_1^2 K_1 - 2\xi_0^0 K_2 + \xi_3^2 K_3 + \xi_3^0 G_1 - \xi_1^0 G_3$$

$$\mathcal{L}^{K_3} = \xi_1^3 K_3 + \xi_2^3 K_2 - 2\xi_0^0 K_3 - \xi_2^0 G_1 + \xi_1^0 G_2$$

$$\mathcal{L}^{G_1} = \xi_0^3 K_2 - \xi_0^2 K_3 - 2\xi_0^0 G_1 - \xi_1^2 G_2 - \xi_1^3 G_3$$

$$\mathcal{L}^{G_2} = -\xi_0^3 K_1 + \xi_0^1 K_3 - \xi_2^1 G_1 - 2\xi_0^0 G_2 - \xi_2^3 G_3$$

$$\mathcal{L}^{G_3} = \xi_0^2 K_1 - \xi_0^1 K_2 - \xi_3^1 G_1 - \xi_3^2 G_2 - 2\xi_0^0 G_3$$

Уравнения (6.4) в новых обозначениях запишутся так:

$$\vec{A} = [\vec{u}, \vec{F}]$$

$$\vec{K} = [\vec{u}, \vec{G}]$$

(6.14)

Поскольку зависимости $\mathcal{L}^{\vec{F}}$ и $\mathcal{L}^{\vec{G}}$ от $\vec{A}$ и $\vec{F}$, и $\mathcal{L}^{\vec{K}}$, $\mathcal{L}^{\vec{G}}$ от $\vec{K}$, $\vec{G}$ одинаковы, то нам достаточно проверить, удовлетворяют ли $\mathcal{L}^{\vec{u}}$ (6.12) условию

$$\mathcal{L}^{\vec{A}} = [\mathcal{L}^{\vec{u}}, \vec{F}] + [\vec{u}, \mathcal{L}^{\vec{F}}] \Big|_{\vec{A} = [\vec{u}, \vec{F}]} \quad (6.15)$$

Проведем проверку условия (6.15) для первого уравнения системы (6.15). Для остальных уравнений проверка производится аналогично

$$\mathcal{L}^{A_1} = \mathcal{L}^{u_2} F_3 + u_2 \mathcal{L}^{F_3} - \mathcal{L}^{u_3} F_2 - u_3 \mathcal{L}^{F_2} \quad (6.16)$$

Подставляем (6.13) в (6.16) и получаем:

$$\begin{aligned} & -2\xi_0^0 A_1 + \xi_2^1 A_2 + \xi_3^1 A_3 - \xi_3^0 F_1 + \xi_2^0 F_3 = F_3 [\xi_2^0 - u_2 (\xi_0^0 u_0) + \\ & + \xi_1^2 u_1 + \xi_3^2 u_3] + u_2 [\xi_0^2 A_1 - \xi_0^1 A_2 - \xi_3^1 F_1 - \xi_3^2 F_2 - 2\xi_0^0 F_3] - \\ & - F_2 [\xi_3^0 - u_3 (\xi_0^0 u_0) + \xi_1^3 u_1 + \xi_2^3 u_2] + u_3 [-\xi_0^3 A_1 + \xi_0^1 A_3 - \\ & - \xi_2^1 F_1 - 2\xi_0^0 F_2 - \xi_2^3 F_3] \end{aligned}$$

Учитывая уравнения (6.10), приходим к

$$\begin{aligned}
 & -2\mathfrak{F}_0^0(A_1 - u_2 F_3 - u_3 F_2) + \mathfrak{F}_2^1(A_2 + u_1 F_3 - u_3 F_1) + \\
 & + \mathfrak{F}_3^1(A_3 + u_2 F_1 - u_1 F_2) - \mathfrak{F}_3^0[F_2 - u_3(u_2 F_3 - u_3 F_2 - A_1) - \\
 & - F_2] + \mathfrak{F}_2^0[F_3 + u_2(-u_2 F_3 + u_3 F_2 + A_1)] + \mathfrak{F}_1^0[-F_2 u_2 u_1 - \\
 & - u_2 A_2 + F_2 u_3 u_1 - u_3 A_3] = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.17}$$

На многообразии $\vec{A} = [\vec{u}, \vec{F}]$ равенство (6.17) превращается в тождество. Таким образом, $\eta^{\vec{u}}$ (6.12) удовлетворяют условиям (6.11). Тем самым доказана инвариантность уравнений (6.2) относительно алгебры Ли конформной группы $C(1.3)$. Базисные операторы этой алгебры задаются формулами (6.3). Теорема доказана. Заметим, что из (6.3) следует, что вектор $\vec{u}$ преобразуется по нелинейному представлению группы Лоренца.

Уравнения (6.2) допускают следующее обобщение

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathcal{D}} + [\vec{u}, \vec{H}] &= \varepsilon \left(\frac{\vec{B}^2 - \vec{E}^2}{\vec{B} \cdot \vec{E}} \right) [\vec{E} + [\vec{u}, \vec{B}]] \\
 \vec{B} + [\vec{E}, \vec{u}] &= \mu \left(\frac{\vec{B}^2 - \vec{E}^2}{\vec{B} \cdot \vec{E}} \right) [\vec{H} + [\vec{\mathcal{D}}, \vec{u}]]
 \end{aligned}
 \tag{6.18}$$

Полученные уравнения также инвариантны относительно конформной группы $C(1.3)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & -P_3 & P_2 \\ P_3 & 0 & -P_1 \\ -P_2 & P_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \vec{S} \vec{P}, \quad \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \vec{\lambda} \vec{P} \quad (7.3)$$

Наша задача сводится к описанию операторов $Q_A(p)$, удовлетворяющих условиям инвариантности [58]:

$$\begin{pmatrix} P_0 & \vec{S} \vec{P} & 0_6 \\ \vec{\lambda} \vec{P} & 0_3 & 0_6 \\ 0_6 & \vec{P}_0 & -\vec{S} \vec{P} \end{pmatrix} Q_A(p) \begin{pmatrix} \vec{D}(p) \\ \vec{H}(p) \\ \vec{B}(p) \\ \vec{E}(p) \end{pmatrix} = 0 \quad (7.4)$$

Используя свойство матриц $\vec{S} \vec{P}$ и $\vec{\lambda} \vec{P}$

$$(\vec{\lambda} \vec{P})(\vec{S} \vec{P}) \equiv 0, \quad (7.5)$$

легко убедиться, что

$$\begin{pmatrix} P_0 & \vec{S} \vec{P} & 0_6 \\ \vec{\lambda} \vec{P} & 0_3 & 0_6 \\ 0_6 & \vec{P}_0 & -\vec{S} \vec{P} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{(\vec{S} \vec{P}) A}{P_0} & -\frac{(\vec{S} \vec{P}) B}{P_0} & 0_6 \\ A & B & 0_6 \\ 0_6 & -\frac{(\vec{S} \vec{P}) C}{P_0} & -\frac{(\vec{S} \vec{P}) D}{P_0} \end{pmatrix} \equiv 0 \quad (7.6)$$

где A, B, C, D — произвольные матрицы 3×3 ; $A, B, C, D \in M_3(R)$.

Выполняя операции коммутирования, убеждаемся, что матрицы

$$Q_{(A, B, C, D)} = \begin{pmatrix} -\frac{(\vec{S} \vec{P}) A}{P_0} & -\frac{(\vec{S} \vec{P}) B}{P_0} & 0_6 \\ A & B & 0_6 \\ 0_6 & -\frac{(\vec{S} \vec{P}) C}{P_0} & -\frac{(\vec{S} \vec{P}) D}{P_0} \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

образуют алгебру Ли.

Таким образом мы докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 7.1. Система уравнений Максвелла (1.3) инвариантна относительно бесконечномерной алгебры Ли, базисные элементы которой являются интегро-дифференциальными операторами. Символы этих операторов задаются формулой (7.7).

Эти операторы определены на множестве векторов $\tilde{\varphi}(p) \equiv$ столбец $(\tilde{D}(p), \tilde{H}(p), \tilde{B}(p), \tilde{E}(p))$, являющиеся фурье-образами решений уравнений Максвелла (1.3). Каждой матрице $Q_{(A,B,C,D)}$ можно сопоставить интегральный оператор $\hat{Q}_{(A,B,C,D)}$, заданный в пространстве функций $\varphi(t, \vec{x})$:

$$\hat{Q}_{(A,B,C,D)} \varphi(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-2} \int d^4 p Q_{(A,B,C,D)} \tilde{\varphi}(p) \exp\{i(p x)\}. \quad (7.8)$$

Интегральные операторы (7.8) удовлетворяют условию инвариантности уравнений Максвелла (1.3) и образуют алгебру Ли. Эти операторы порождают нелокальные преобразования векторов напряженностей и индукции электрического и магнитного полей. Поэтому, найденную здесь алгебру инвариантности уравнений Максвелла в принципе нельзя получить в классическом подходе Ли.

§ 8. Точные решения конформно-инвариантных нелинейных уравнений для электромагнитного поля

Отыскание точных решений нелинейных уравнений Максвелла в случае четырехмерного пространства-времени представляет собой актуальную, но не простую задачу. Для частного решения этой задачи мы используем симметрию уравнений Максвелла. Рассмотрим конформно-инвариантную систему, которая изучалась в § 5:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad \partial^\mu \tilde{H}_{\mu\nu} = 0, \quad (8.1)$$

$$H_{\mu\nu} = M F_{\mu\nu} + N \tilde{F}_{\mu\nu} \quad (8.2)$$

Для построения анзатца для тензоров $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{H}_{\mu\nu}$ воспользуемся связью $F_{\mu\nu}$ с вектор-потенциалом A_μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (8.3)$$

В работе [83] найден анзатц для A_μ :

$$A_\mu = \frac{b_\mu}{x^2} - 2\alpha_\mu \frac{\partial x}{(x^2)^2}, \quad (8.4)$$

где b_μ являются функциями только от переменной $\omega = \frac{\partial x}{x^2}$, α_μ — произвольные действительные константы. Подставив (8.4) в (8.3) легко получить, что

$$F^{\mu\nu} = \frac{f_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2 \frac{(f_{\mu k} x_\nu + f_{k\nu} x_\mu) x^k}{(x^2)^3} \quad (8.5)$$

где

$$f_{\mu\nu} = \beta_\mu \dot{b}_\nu - \beta_\nu \dot{b}_\mu, \quad \dot{b}_\mu \equiv \frac{db_\mu}{d\omega} \quad (8.6)$$

Формула (8.5) и дает искомый анзатц для $F_{\mu\nu}$.

Анзатц для тензора $\tilde{H}_{\mu\nu}$ имеет аналогичный вид

$$\tilde{H}_{\mu\nu} = \frac{\tilde{h}^{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2 \frac{(\tilde{h}^{\mu\nu} c_\nu + \tilde{h}^{k\nu} x_\mu) c_k}{(x^2)^3} \quad (8.7)$$

где $\tilde{h}^{\mu\nu} = \tilde{h}^{\mu\nu}(w)$.

Аналоги (8.5), (8.7) можно применять при решении произвольных дифференциальных уравнений для тензоров $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{H}_{\mu\nu}$, инвариантных относительно конформной алгебры AC(I.3) с базисными элементами (I.21), (I.23).

Система (8.1), (8.2) с помощью (8.5), (8.7) редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$F_{\mu\nu} \dot{f}^{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} \dot{\tilde{h}}^{\mu\nu} = 0, \quad (8.8)$$

$$h_{\mu\nu} = M(k) f_{\mu\nu} + N(k) \tilde{f}_{\mu\nu},$$

где $k = f_{\mu\nu} \dot{f}^{\mu\nu} / \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \dot{f}^{\alpha\beta} \dot{f}^{\mu\nu}$.

Если положить $f_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}$, $\tilde{f}_{\mu\nu} = c_{\mu\nu}$, где $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu} = \text{const}$, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu} = \text{const}$, то система (8.8) будет выполняться, если константы $a_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ связаны соотношениями

$$c_{\mu\nu} = M(k) a_{\mu\nu} + N(k) \tilde{a}_{\mu\nu}, \quad (8.9)$$

где $\tilde{a}_{\mu\nu} = a_{\mu\alpha} a^{\alpha\nu} / \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} a^{\alpha\beta} a^{\mu\nu}$.

Таким образом, мы получаем решения системы (8.1), (8.2)

$$F^{\mu\nu} = \frac{a^{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2 \frac{(a_{k\nu} x_\mu + a_{\mu k} x_\nu) x^k}{(x^2)^3},$$

$$\tilde{H}_{\mu\nu} = \frac{c_{\mu\nu}}{(x^2)^2} - 2 \frac{(\tilde{c}_{k\nu} x_\mu + \tilde{c}_{\mu k} x_\nu) x^k}{(x^2)^3} \quad (8.10)$$

зависящие от 6 произвольных действительных констант $a_{\mu\nu}$.

Рассмотрим частный случай, когда $M \equiv 0$ в (8.2) и материальные уравнения принимают вид

$$H_{\mu\nu} = N F_{\mu\nu} \quad (8.11)$$

С помощью анзатцев (8.5), (8.7) система (8.I), (8.II) редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\beta_{\mu} \dot{f}^{\mu} = 0, \quad \beta_{\mu} \dot{\tilde{h}}^{\mu} = 0 \\ h_{\mu\nu} = N(k) \tilde{f}_{\mu\nu}. \quad (8.I2)$$

Система (8.I2) легко интегрируется. Положив константы интегрирования равными нулю, получим

$$\beta_{\mu} f^{\mu} = 0, \quad \beta_{\mu} \tilde{h}^{\mu} = 0 \\ h_{\mu\nu} = N(k) \tilde{f}_{\mu\nu} \quad (8.I3)$$

которая эквивалентна системе ($\beta_0 \neq 0$)

$$\beta_{\mu} \dot{f}^{\mu} = 0, \quad h_{\mu\nu} = N(k) \tilde{f}_{\mu\nu} \quad (8.I4)$$

Решением (8.I4) будет

$$f_{0a} = F_a, \quad a = 1, 2, 3, \\ f_{12} = \frac{1}{\beta_0} (\beta_1 F_3 - \beta_3 F_1), \quad f_{13} = \frac{1}{\beta_0} (\beta_3 F_2 - \beta_2 F_3), \quad f_{23} = \frac{1}{\beta_0} (\beta_2 F_1 - \beta_1 F_2) \\ h_{\mu\nu} = N(k) \tilde{f}_{\mu\nu} \quad (8.I5)$$

где $F_a(\omega)$ — произвольные дифференцируемые вектор-функции одного переменного ω . Тогда решения системы (8.I), (8.II) получим, подставив $f_{\mu\nu}$ и $\tilde{h}_{\mu\nu}$ из (8.I5) в (8.5) и (8.7).

Очевидно, что если в полученных решениях для систем (8.I), (8.2) и (8.I), (8.II) сделать замену $x_{\mu} \rightarrow x'_{\mu} = x_{\mu} + a_{\mu}$, где a_{μ} — произвольные действительные константы, то мы получим новые точные решения рассматриваемых уравнений.

Таким образом, мы получили свойства частных точных решений, зависящих не только от действительных параметров, но содержащих также произвольные F_a функции.

Г Л А В А П

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕКТОРА-
ПОТЕНЦИАЛА A , СПИНАЛЬНОГО ПОЛЯ И ВЗАИМОДЕЙ-
СТВУЮЩИХ ПОЛЕЙ

Большое количество работ [76, 78, 80, 83, 84] посвящено развитию теории и применению в физике элементарных частиц группы конформных преобразований пространства-времени. Во многом это объясняется тем фактом, что волновые уравнения, которым удовлетворяют свободные безмассовые поля, являются локально конформно-инвариантными. Канингхэм, Тейтмен показали, что таковыми являются уравнения Максвелла и доказали, что уравнение конформно-инвариантно в случае скалярного поля. Конформная инвариантность безмассовых полевых уравнений обосновалась в работах 76, 77, 80 , где приводится такой "хорошо известный факт, что безмассовые волновые уравнения являются конформно-инвариантными". Поэтому важным представляется вопрос о построении локально конформно-инвариантных уравнений для безмассовых полей. Эти уравнения могут быть использованы в различных моделях теории поля.

В главе I построены конформно-инвариантные нелинейные уравнения для тензоров $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ электромагнитного поля. В настоящей главе построены конформно-инвариантные уравнения для вектора потенциала A_μ , для системы взаимодействующих полей. В §§ 9-11 изучаются дифференциальные уравнения первого и второго порядка. В связи с развитием нелокальной теории взаимодействия, актуаль-

ной представляется задача изучения дифференциальных уравнений порядка выше второго и особенно интегро-дифференциальных уравнений. Очевидно, что при построении нелокальной теории принципы симметрии должны играть далеко не последнюю роль. В § 12 изучается конформная инвариантность уравнения $\square^2 \psi = 0$.

Требование инвариантности уравнения движения для частиц с ненулевым спином в нерелятивистской теории относительно группы Предингера аналогично требованию конформной инвариантности в релятивистской теории. Поэтому в § 13 исследуется инвариантность системы $S^2 \psi = 0$ относительно группы Предингера. И, наконец, в § 14 изучаются групповые свойства интегро-дифференциальных уравнений для вектора-потенциала A_μ и спинорного поля ψ .

Для предложенных в главе II уравнений нет единого способа построения общего интеграла. С помощью группового метода найдены семейства частных точных решений, предлагаемых нелинейных уравнений. в §§ 9, 10 построены классы точных решений, зависящих от произвольных параметров для системы нелинейных уравнений для вектора-потенциала и взаимодействующих полей. в § 11 построены новые частные точные решения уравнений Инта-Миллса. В § 14 построен класс точных решений для интегро-дифференциального уравнения, описывающего спинорное поле.

§ 9. Конформно-инвариантные уравнения для вектора-потенциала

Конформно-инвариантные уравнения для вектора-потенциала можно построить, используя конформно-инвариантную систему уравнений для тензоров $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{H}_{\mu\nu}$ (8.1), (8.2).

Система уравнений (8.1), (8.2) может быть представлена через вектор-потенциал A_{μ} в следующем виде:

$$\square A_{\mu} - \partial_{\mu} (\partial_{\nu} A^{\nu}) = \lambda \partial^{\nu} \left\{ \phi \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \right\} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) \quad (9.1)$$

где $I_1 = -\frac{1}{4} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (\partial^{\alpha} A^{\beta} - \partial^{\beta} A^{\alpha}) (\partial^{\gamma} A^{\delta} - \partial^{\delta} A^{\gamma})$,

$$I_2 = -\frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu})$$

ϕ — произвольная дифференцируемая функция одного переменного, $\phi \in C^1(R^1)$

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 9.1. Система уравнений (9.1) инвариантна относительно локальной конформной группы $C(1.3)$, дополнительной группой градиентных преобразований

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \quad (9.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Градиентная инвариантность уравнений (9.1) проверяется непосредственной подстановкой (9.2) в уравнения (9.1)

$$\square A'_{\mu} - \partial_{\mu} (\partial_{\nu} A'^{\nu}) - \lambda \partial^{\nu} \left\{ \phi \left(\frac{I'_1}{I'_2} \right) \right\} (\partial_{\mu} A'_{\nu} - \partial_{\nu} A'_{\mu}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \square \mathcal{A}_{\mu} - \partial_{\mu} (\partial_{\nu} \mathcal{A}^{\nu}) - 1/\partial^{\nu} \left\{ \phi \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \right\} (\partial_{\mu} \mathcal{A}_{\nu} - \partial_{\nu} \mathcal{A}_{\mu}) + \\
&+ \square \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{\mu}} \right) - \partial_{\mu} (\square \varphi) = \square \mathcal{A}_{\mu} - \partial_{\mu} (\partial_{\nu} \mathcal{A}^{\nu}) - 1/\partial^{\nu} \left\{ \phi \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \right\} \times \\
&\times (\partial_{\mu} \mathcal{A}_{\nu} - \partial_{\nu} \mathcal{A}_{\mu})
\end{aligned}
\tag{9.3}$$

Теперь докажем инвариантность уравнения (9.1) относительно преобразований из группы C(1.3) с базисными инфинитезимальными операторами

$$\begin{aligned}
P_{\mu} &= i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \\
J_{\mu\nu} &= x_{\mu} P_{\nu} - x_{\nu} P_{\mu} + \mathcal{A}_{\mu} P_{\nu} - \mathcal{A}_{\nu} P_{\mu} \\
D &= x_{\nu} P^{\nu} - \mathcal{A}_{\nu} P^{\nu} \\
K_{\mu} &= 2 x_{\mu} D - (x_{\nu} x^{\nu}) P_{\mu} + 2 x^{\nu} (\mathcal{A}_{\mu} P_{\nu} - \mathcal{A}_{\nu} P_{\mu}),
\end{aligned}
\tag{9.4}$$

где $P_{\mathcal{A}_{\mu}} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_{\nu}}$

В этом случае

$$\xi'^{\mu}(x) = 2(c x) x_{\mu} - x^2 c_{\mu} + a_{\mu\nu} x^{\nu} + b_{\mu}
\tag{9.5}$$

$$\mathcal{A}'_{\mu} = - \xi'^{\nu}_{\mu} \mathcal{A}_{\nu}
\tag{9.6}$$

$$E'_{\nu} = \mathcal{L}'_{\nu} + \mathcal{A}'^{\ell}_{\nu} \mathcal{L}'_{\mathcal{A}_{\ell}} - \mathcal{A}'^j_{\nu} \left(\xi^j_{\nu} + \xi^j_{\mathcal{A}_{\ell}} \cdot \mathcal{A}_{\nu}^{\ell} \right)
\tag{9.7}$$

$$G'^{ij}_{\mathcal{A}} = D_i (E^j_{\mathcal{A}}) - \mathcal{A}'^{ij}_{\mathcal{A}} D_j (\xi^k_{\mathcal{A}})
\tag{9.8}$$

где D_i — оператор полного дифференцирования

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathcal{A}^{\lambda}_i \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}^{\lambda}} + G^{ij}_{ij} \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}^{ij}_{\lambda}}$$

Поддействовав оператором $\tilde{X}$

$$\tilde{X} = \mathcal{E}^{\lambda}_i \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}^{\lambda}_i} + \tilde{G}^{ij}_{ij} \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}^{ij}_{\lambda}}$$

на многообразие (9.1), убедимся в справедливости равенства

$$\begin{aligned} & \tilde{\chi} \left[\square A_{\mu} - \partial_{\mu} (\partial_{\nu} A^{\nu}) - \lambda \partial^{\nu} \left\{ \Phi \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \right\} \right. \\ & \left. (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) \right] \left[\square A_{\mu} - \partial_{\mu} (\partial_{\nu} A^{\nu}) - \lambda \partial^{\nu} \left\{ \Phi \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \right\} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (9.9)$$

что и доказывает теорему.

Теперь используем конформную симметрию уравнения (9.1) для нахождения его точных решений. В работе [83] построен анзац для A_{μ} :

$$A_{\mu} = \frac{b_{\mu}}{x^2} - 2x_{\mu} \frac{bx}{(x^2)^2}, \quad (9.10)$$

где $b_{\mu}(\omega)$ — произвольные гладкие функции одного переменного $\omega = \frac{bx}{x^2}$, β_{μ} — произвольные действительные константы. Подставив (9.10) в (9.1), приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\beta^2 \ddot{b}_{\mu} - \beta_{\mu} (\beta^{\nu} \ddot{b}_{\nu}) = \lambda \frac{d}{d\omega} \left\{ \Phi \left(\frac{c_1}{c_2} \right) \right\} (\beta_{\mu} b_{\nu} - \beta_{\nu} b_{\mu}) \quad (9.11)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{4} \varepsilon_{ik\mu\nu} (\beta^i b^k - \beta^k b^i) (\beta^{\mu} b^{\nu} - \beta^{\nu} b^{\mu}), \\ c_2 &= -\frac{1}{4} (\beta_{\mu} b_{\nu} - \beta_{\nu} b_{\mu}) (\beta^{\mu} b^{\nu} - \beta^{\nu} b^{\mu}) \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$b_{\mu} = c_{\mu} f(\omega) \quad (9.12)$$

является решением (9.11) при условии, что действительные константы c_{μ} удовлетворяют условию

$$\beta^2 c_{\mu} = \beta_{\mu} (\beta c) \quad (9.13)$$

Из (9.13) следует $c_{\mu} = \Theta \beta_{\mu}$, $\Theta \in \mathbb{R}$

$$(9.14)$$

Подставив (9.12) и (9.14) в (9.10), получим

$$A_{\mu} = \theta \left[\frac{\beta_{\mu}}{x^2} - 2x_{\mu} \frac{\beta x}{(x^2)^2} \right] f\left(\frac{\beta x}{x^2}\right) \quad (9.15)$$

Таким образом, используя конформную инвариантность нелинейной системы дифференциальных уравнений (9.1), получаем многопараметрическое семейство точных решений, зависящее от произвольных действительных констант C_{μ} и производной функции $f(\omega)$

В работе 83 предложено рассматривать уравнения для вектор-потенциала A_{μ} с нелинейной добавкой $1/A_{\mu}(A^{\nu}A^{\nu})$, которая сохраняет конформную инвариантность уравнений, однако, при этом нарушается калибровочная инвариантность. Отличительной чертой рассматриваемых уравнений (9.1) является то, что они конформно-инвариантны и инвариантны относительно калибровочных преобразований.

Хорошо известно, что уравнения для вектор-потенциала электромагнитного поля

$$\square A_{\mu} - \partial_{\mu}(\partial_{\nu} A^{\nu}) = 0 \quad (9.16)$$

инвариантны относительно локальной конформной группы $S(1.3)$ 83

Базисные операторы алгебры Ли группы $S(1.3)$ имеют вид (9.4). Если на A_{μ} положить дополнительное калибровочное условие Лоренца

$$\partial_{\nu} A^{\nu} = 0, \quad (9.17)$$

то, полученная таким образом система уравнений (9.16), (9.17), будет пуанкаре-инвариантной, но не инвариантной относительно локальной конформной группы $S(1.3)$. Естественно возникает вопрос о существовании дополнительных условий на A_{μ} , при котором уравнения (9.16) были бы конформно-инвариантны. Ответ на этот вопрос дастся следующей теоремой.

Т е о р е м а 9.2. Система уравнений (9.16) и (9.18)

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mu\nu} A^{\mu\nu} &= 0 \\ \mathcal{T}_{\mu\nu} &= P_{\mu\nu} - e A_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (9.18)$$

инвариантна относительно конформной алгебры AC(I.3) с базисными операторами:

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} &= i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \\ J_{\mu\nu} &= x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + A_\mu P_{A_\nu} - A_\nu P_{A_\mu} \\ D &= x_\nu P^\nu - A_\nu P^{A_\nu} \\ \mathcal{K}_{\mu\nu} &= 2 x_{\mu\nu} D - (x_\nu x^\nu) P_\mu + 2 x^\nu (A_{\mu\nu} P_{A_\nu} - A_\nu P_{A_\mu}) + \frac{2i}{e} P_{A_{\mu\nu}} \end{aligned} \quad (9.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Как уже отмечалось выше, уравнение (9.16) конформно-инвариантно, причем базисные элементы алгебры инвариантности задаются формулами (9.4). Дополнительный член $\frac{2i}{e} P_{A_{\mu\nu}}$ в операторе $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ не нарушает инвариантности уравнения (9.16) в силу того, что в уравнении содержатся только произвольные от полей $A_\mu(x)$, а не сами поля. Поэтому мы покажем конформную инвариантность уравнения (9.18). Релятивистская инвариантность и инвариантность относительно преобразований *дилатации* уравнения (9.18) очевидны, поэтому достаточно доказать только инвариантность относительно конформных преобразований генерируемых операторами $\mathcal{K}_{\mu\nu}$. В этом случае координаты инфинитезимального оператора имеют вид

$$\xi^\nu(x) = 2(c x) x_\nu - x^2 c_\nu \quad (9.20)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{A_0} &= -2(c x) A_0 + 2(x_0 c_1 - x_1 c_0) A_1 + 2(x_0 c_2 - x_2 c_0) A_2 + \\ &+ 2(x_0 c_3 - x_3 c_0) A_3 + \frac{2i}{e} c_0, \\ \mathcal{L}^{A_1} &= -2(c x) A_1 - 2(c_1 x_0 - x_1 c_0) A_0 + 2(c_1 x_2 - c_2 x_1) A_2 + 2(c_1 x_3 - x_1 c_3) A_3 - \\ &- \frac{2i}{e} c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{A_2} = & -2(Cx)A_2 - 2(x_0C_2 - x_2C_0)A_0 + 2(C_2x_1 - C_1x_2)A_1 + \\ & + 2(C_2x_3 - C_3x_2)A_3 - \frac{2i}{e}C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{A_3} = & -2(Cx)A_3 - 2(x_0C_3 - x_3C_0)A_0 + 2(x_1C_3 - C_1x_3)A_1 + \\ & + 2(C_3x_2 - C_2x_3)A_2 - \frac{2i}{e}C_3 \end{aligned} \quad (9.21)$$

Используя формулу (9.7), получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0^0 = & -2(Cx) - 4(Cx)A_0^0 + 2(x_0C_1 - x_1C_0)(A_0^1 + A_1^0) + 2(x_0C_2 - x_2C_0) \cdot \\ & \cdot (A_0^2 + A_2^0) + 2(x_0C_3 - x_3C_0)(A_3^0 + A_0^3), \\ \mathcal{E}_1^1 = & 2(C_1A_1 + C_0A_0 - C_2A_2 - C_3A_3) + 2(C_1x_0 - x_1C_0)(A_0^1 + A_1^0) + \\ & + 2(C_1x_2 - x_1C_2)(A_1^2 + A_2^1) + 2(C_1x_3 - x_1C_3)(A_1^3 + A_3^1) - 4(Cx)A_1^1 \\ \mathcal{E}_2^2 = & 2(C_2A_2 + C_0A_0 - C_1A_1 - C_3A_3) + 2(x_0C_2 - x_2C_0)(A_2^0 + A_0^2) + \\ & + 2(C_2x_1 - C_1x_2)(A_1^2 + A_2^1) + 2(C_2x_3 - C_3x_2)(A_3^2 + A_2^3) - \\ & - 4(Cx)A_2^2, \\ \mathcal{E}_3^3 = & 2(C_3A_3 + C_0A_0 - C_1A_1 - C_2A_2) + 2(x_0C_3 - x_3C_0)(A_3^0 + A_0^3) + \\ & + 2(x_1C_3 - x_3C_1)(A_3^1 + A_1^3) + 2(C_3x_2 - x_2C_3)(A_3^2 + A_2^3) - 4(Cx)A_3^3 \end{aligned} \quad (9.22)$$

Теперь, действуя оператором

$$\tilde{X} = \mathcal{L}^{A_\mu} \partial_{A_\mu} + \mathcal{E}_\nu^{\nu} \partial_{A_\nu} \quad (9.23)$$

на многообразие

$$i \partial_\nu A^\nu - e A_\nu A^\nu = 0 \quad (9.24)$$

получаем

$$-2(Cx) - 4(Cx)A_0^0 - 2(x_0C_1 - x_1C_0)(A_0^1 + A_1^0) -$$

$$\begin{aligned}
& + 2(x_0 c_2 - x_2 c_0)(A_0^2 + A_2^0) + 2(x_0 c_3 - x_3 c_0)(A_3^0 + A_0^3) + [2(c_1 A_1 + \\
& + c_0 A_0 - c_2 A_2 - c_3 A_3) - 2(c_1 x_0 - x_1 c_0)(A_0^1 + A_1^0) + 2(c_1 x_2 - x_1 c_2)(A_1^2 + A_2^1) + \\
& + 2(c_1 x_3 - x_1 c_3)(A_1^3 + A_3^1) - 4(c x) A_1^4] + [2(c_2 A_2 + c_0 A_0 - c_1 A_1 - c_3 A_3) - \\
& - 2(x_0 c_2 - x_2 c_0)(A_2^0 + A_0^2) + 2(c_2 x_1 - c_1 x_2)(A_1^2 + A_2^1) + 2(c_2 x_3 - c_3 x_2) \\
& + (A_3^2 + A_2^3) - 4(c x) A_2^4] + [2(c_3 A_3 + c_0 A_0 - c_1 A_1 - c_2 A_2) - \\
& - 2(x_0 c_3 - c_1 x_3)(A_3^0 + A_0^3) + 2(x_1 c_3 - x_3 c_1)(A_3^1 + A_1^3) + \\
& + 2(c_3 x_2 - x_2 c_3)(A_3^2 + A_2^3) - 4(c x) A_3^4] + 2e i A_0 [-2(c x) A_0 + \\
& + 2(x_0 c_1 - x_1 c_0) A_1 + 2(x_0 c_2 - x_2 c_0) A_2 + 2(x_0 c_3 - x_3 c_0) A_3 + \\
& + \frac{2i}{e} c_0] - i e 2 A_1 [-2(c x) A_1 - 2(c_1 x_0 - x_1 c_0) A_0 + 2(c_1 x_2 - x_1 c_2) A_2 + \\
& + 2(c_1 x_3 - x_1 c_3) A_3 - \frac{2i}{e} c_1] - 2i e A_2 [-2(c x) A_2 - 2(x_0 c_2 - x_2 c_0) A_0 + \\
& + 2(c_2 x_1 - c_1 x_2) A_1 + 2(c_2 x_3 - c_3 x_2) A_3 - \frac{2i}{e} c_2] - \\
& - 2i e A_3 [-2(c x) A_3 - 2(x_0 c_3 - x_3 c_0) A_0 + 2(x_1 c_3 - x_3 c_1) A_1 + \\
& + 2(c_3 x_2 - c_2 x_3) A_2 - \frac{2i}{e} c_3] = -4(c x) [A_0^0 + A_1^1 + \\
& + A_2^2 + A_3^3 + i e (A_\nu A^\nu)]
\end{aligned}$$

На многообразии (9.24) полученное выражение тождественно равно нулю, что и доказывает теорему.

Таким образом, мы получили нелинейное конформно-инвариантное дополнительное условие на вектор-потенциал A_μ . Нелинейное уравнение (9.18) не инвариантно относительно хорошо известного представления конформной алгебры, задаваемого формулами (9.4). Оно инвариантно только относительно представления задаваемого формулами (9.19). Такие представления для конформной

алгебры до сих пор не были обнаружены. Видимо, по этой причине в литературе рассматривались более сложные нелинейные калибровки [74]

$$P_{\mu} (A^{\mu} A^{\nu} A^{\nu}) = 0 \quad (9.25)$$

Калибровка Флато-Баена (9.25) не инвариантна относительно конформных преобразований генерируемых оператором K'_{μ} . Она инвариантна относительно преобразований генерируемых конформных операторов K_{μ} . Новое представление для конформной алгебры используем для построения конформно-инвариантных уравнений.

Как известно, нелинейное уравнение Дирака (с нелинейностью Гюни)

$$i \gamma_{\mu} \partial^{\mu} \psi + 1/(\bar{\psi} \psi)^{1/3} \psi = 0 \quad (9.26)$$

конформно-инвариантно. Более того, оно является единственным конформно-инвариантным уравнением из класса уравнения (см. 82)

$$i \gamma_{\mu} \partial^{\mu} \psi + F(\bar{\psi} \psi) \psi = 0 \quad (9.27)$$

где F — произвольная дифференцируемая функция $F \in C^1(\mathbb{R})$. Введем взаимодействие следующим образом: $p_{\mu} \rightarrow \pi_{\mu} = p_{\mu} - e A_{\mu}$.

Тогда уравнение (9.27) примет вид

$$i \gamma_{\mu} \pi^{\mu} \psi + F(\bar{\psi} \psi) \psi = 0 \quad (9.28)$$

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 9.3. Уравнение (9.28) инвариантно относительно локальной конформной группы преобразований ^{с(1,3)} с базисами ^{НБМН} $\mathfrak{C}(1,3)$, инфинитезимальными операторами, соответствующей алгебры Ли

$$P_{\mu} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}}$$

$$T_{\mu\nu} = x_{\mu} P_{\nu} - x_{\nu} P_{\mu} + A_{\mu} P_{\nu} - A_{\nu} P_{\mu} - (S_{\mu\nu} \psi)_k \frac{\partial}{\partial \psi_k}$$

$$D = x_{\nu} P^{\nu} - A_{\nu} P^{\nu} - i \frac{3+\alpha}{2} \psi_k \frac{\partial}{\partial \psi_k} \quad (9.29)$$

$$K'_{\mu} = 2 x_{\mu} D - (x_{\nu} x^{\nu}) P_{\mu} + 2 x^{\nu} (A_{\mu} P_{\nu} - A_{\nu} P_{\mu}) - 2 x^{\nu} (S_{\mu\nu} \psi)_k \frac{\partial}{\partial \psi_k} - \frac{2 \alpha i}{e} P_{\mu}$$

где $S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]$, если

$$F = \int (\bar{\psi} \psi)^{\frac{1}{3+\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} \neq -3 \\ \int = \text{const} \quad (9.30)$$

Доказательство. Как и в предыдущем случае, релятивистская инвариантность уравнения (9.28) очевидна при произвольной функции $F \in C'(\mathbb{R}')$. Остается доказать его инвариантность относительно преобразований генерируемых операторами D и K'_{μ} . Инвариантность относительно оператора D проверяется непосредственной подстановкой. Действительно, в этом случае

$$x'_{\mu} = e^{a_{\mu}} x_{\mu}, \quad A'_{\mu} = e^{-a_{\mu}} A_{\mu}, \quad \psi' = e^{-\frac{3+\alpha}{2} a} \psi \quad (9.31)$$

Легко убедиться, что

$$\gamma_{\mu} \pi'_{\mu} \psi' + \lambda (\bar{\psi}' \psi')^{\frac{1}{3+\alpha}} \psi' = e^{(\frac{3+\alpha}{2} - 1)a} \{ \gamma_{\mu} \pi_{\mu} \psi + \lambda (\bar{\psi} \psi)^{\frac{1}{3+\alpha}} \psi \}$$

где $\pi'_{\mu} = P'_{\mu} - e A'_{\mu}$, $P'_{\mu} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x'_{\nu}}$

Отсюда следует инвариантность уравнения (9.28), (9.30) относительно масштабных преобразований. Доказательство инвариантности относительно преобразований генерируемых операторами K'_{μ} проводится методом Ли. Координаты инфинитезимального оператора $C_{\mu} K'_{\mu}$, где C_{μ} — произвольные константы, задаются формулами (9.20), а

$$\mathcal{L}^{A_{\mu}} = -\xi_{\mu}^{\nu} A_{\nu}$$

$$\mathcal{L}^{\gamma} = \text{сложив } (\mathcal{L}^1, \mathcal{L}^2, \mathcal{L}^3, \mathcal{L}^4) = \frac{1}{8} [\xi_{\mu}^{\nu} (\gamma^{\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho} \gamma^{\sigma} - (3+\kappa) \delta^{\mu\nu})] \psi \quad (9.32)$$

$$\xi_{\mu}^{\nu} = \mathcal{L}_{\mu}^{\nu} + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{\rho} \psi_{\rho}^{\nu} - \psi_{\mu}^{\rho} \xi_{\rho}^{\nu} \quad (9.33)$$

Действуя оператором

$$\tilde{X} = \mathcal{L}^{A_{\mu}} \partial_{A_{\mu}} + (\mathcal{L}^{\gamma})_{\mu} \frac{\partial}{\partial \psi_{\mu}} + \xi_{\mu}^{\nu} \frac{\partial}{\partial \psi_{\mu}^{\nu}} \quad (9.34)$$

на многообразие

$$\gamma_{\mu} \pi^{\mu} \psi + \lambda (\bar{\psi} \psi)^{1/3+\kappa} \psi = 0 \quad (9.35)$$

с учетом формул (9.32) и (9.33), убеждаемся в справедливости равенства

$$\tilde{X} (\gamma_{\mu} \pi^{\mu} \psi + \lambda (\bar{\psi} \psi)^{1/3+\kappa} \psi) \Big|_{\gamma_{\mu} \pi^{\mu} \psi + \lambda (\bar{\psi} \psi)^{1/3+\kappa} \psi = 0} = \lambda (\bar{\psi} \psi)^{1/3+\kappa} \psi = 0$$

что и доказывает теорему.

Таким образом, наличие нового представления для конформной алгебры (9.19) значительно расширяет множество нелинейностей, сохраняющих конформную инвариантность уравнения Дирака, так как (9.28) конформно инвариантно, если $F = \lambda (\bar{\psi} \psi)^{\kappa}$, где κ — произвольное действительное число $\kappa \neq 0$.

Если на A_{μ} наложить условие

$$\square A_{\mu} = 0 \quad (9.36)$$

то полученная система уравнений для спинора ψ и вектора-потенциала A_{μ} будет пуанкаре-инвариантной, но не инвариантной относительно локальной конформной группы. Более того, поскольку A_{μ} преобразуется по представлению $\mathcal{D}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ группы Лоренца,

то не существует нетривиальных дополнительных условий на A_μ , которые бы совместно с (9.35), (9.36) образовали систему уравнений инвариантную относительно локальной конформной группы $S(1.3)$ [76].

§ 10. Нелинейные системы для взаимодействующих полей

Рассмотрим уравнение

$$i \chi_\mu \partial^\mu + \varepsilon (C, C) S_\mu P^\mu \psi = 0 \quad (10.1)$$

где ψ — 4-компонентный спинор, ψ — произвольная гладкая функция.

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 10.1. Уравнение (10.1) инвариантно относительно локальной конформной группы $S(1.3)$ с базисными элементами соответствующей алгебры ЛИ

$$\begin{aligned} P_\mu &= i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \\ J_{\mu\nu} &= x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu - (S_{\mu\nu} \psi)_\alpha \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} - \frac{i}{4} ([\gamma_\mu, \gamma_\nu] \psi)_\alpha \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}, \\ D &= x_\nu P^\nu - 2i \tilde{S}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} - \frac{i}{2} \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial \psi_\mu}, \\ K_\mu &= 2x_\mu D - (x_\nu P_\mu - x_\mu P_\nu) \tilde{S}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} - \frac{i}{4} (2x^\nu [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \psi)_\alpha \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где $\psi \in \text{spinors}(\vec{E}, \vec{B})$, $n = \overline{1, 6}$, $k = \overline{0, 3}$, а по повторяющимся индексам n и k подразумевается суммирование, если

$$\psi = 2 C_1^\alpha C_2^\beta, \quad \alpha = \text{const}, \quad 2 + \beta = -\frac{1}{4} \quad (10.3)$$

Доказательство. Инвариантность уравнений (10.1), (10.3) относительно преобразований трансляции, генерируемых операторами P_μ преобразований Лоренца, генерируемых операторами $J_{\mu\nu}$ и преобразований дилатации генерируемых оператором D . Далее справедливо равенство

$$\tilde{X}(i\chi_\mu \partial^\mu \psi + 2C_1^\alpha C_2^\beta (S_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \psi) = [-5(\alpha) + (12)\beta(\alpha)](i\chi_\mu \partial^\mu \psi + 2C_1^\alpha C_2^\beta (S_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \psi) \quad (10.4)$$

где $\tilde{X}$ — продолженный оператор $X = C_\mu K^\mu$, C_μ — произвольные константы, $C_\mu \in \mathbb{R}$, что и доказывает теорему.

Итак, мы получили конформно-инвариантное уравнение

$$\{i\chi_\mu \partial^\mu + 2(C_1^\alpha C_2^\beta) S_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\} \psi = 0, \quad (10.5)$$

описывающее взаимодействие электромагнитного и спинорного полей. Для отыскания ее частных точных решений используем конформную симметрию системы (10.5), (8.1), (8.2). Анзац для ψ задается формулой 82 :

$$\psi = \frac{\chi \cdot x}{(x')^2} \varphi(\omega) \quad (10.6)$$

а для $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ формулами (8.5), (8.7), где φ — 4-компонентный спинор. С помощью этих анзатцев система (10.5), (8.1), (8.2) редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \beta^\mu \dot{f}_{\mu\nu} &= 0 & \beta^\mu \dot{\tilde{f}}_{\mu\nu} &= 0, \\ h_{\mu\nu} &= M(I_1/I_2) f_{\mu\nu} + N(I_1/I_2) \tilde{f}_{\mu\nu}, \\ i(\chi\beta)\dot{\varphi} + 2(I_1^\alpha I_2^\beta) S_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (10.7)$$

где $I_1 = -\frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$, $I_2 = -\frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f^{\mu\nu} f^{\rho\sigma}$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решениями (10.7) будут

$$f_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} = d_{\mu\nu}$$

$$\psi = \exp\left[i \frac{k_\mu^\alpha k_\nu^\beta (\chi B) S_{\mu\nu} b^{\mu\nu}}{\beta^2} \right] \chi, \quad (10.8)$$

где $b_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$ — постоянные конформные величины, χ — постоянный 4-компонентный спинор, а константы $b_{\mu\nu}$ и $d_{\mu\nu}$ связаны соотношениями

$$h_{\mu\nu} = M(k/k_1) b_{\mu\nu} + N(k/k_1) \tilde{b}_{\mu\nu}$$

$$k_1 = -\frac{1}{4} b_{\mu\nu} b^{\mu\nu}, \quad k_2 = -\frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} b^{\mu\nu} b^{\alpha\beta}. \quad (10.9)$$

Подставляя (10.8) в (10.6) и в (8.5), (8.7), получаем семейство точных решений нелинейной системы уравнений (10.5), (8.1), (8.2):

$$\psi = \frac{\chi\chi}{(\chi^2)^2} \exp\left[i \frac{k_\mu^\alpha k_\nu^\beta (\chi B) S_{\mu\nu} b^{\mu\nu}}{\beta^2} \right] \chi.$$

$$f_{\mu\nu} = \frac{b_{\mu\nu}}{(\chi^2)^2} - 2 \frac{(b_{\mu\alpha} \chi_\nu + b_{\nu\alpha} \chi_\mu) \chi^\alpha}{(\chi^2)^3}, \quad (10.10)$$

$$\tilde{h}_{\mu\nu} = \frac{d_{\mu\nu}}{(\chi^2)^2} - 2 \frac{(d_{\mu\alpha} \chi_\nu + d_{\nu\alpha} \chi_\mu) \chi^\alpha}{(\chi^2)^3}.$$

Эти решения зависят от действительных параметров $b_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$, связанных соотношением (10.9), и постоянного спинора χ .

Теперь рассмотрим нелинейную конформно-инвариантную систему, описывающую взаимодействие электромагнитного и спинорного полей:

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad D^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0 \quad (10.11)$$

$$\gamma_\mu D^\mu \psi + 2 S_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \psi = 0,$$

где $D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \partial_\mu \ln(I_1^2 + I_2^2).$

Чтобы найти точные решения системы (10.11) используем анзац (10.6) для ψ и $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \frac{f_{\mu\nu}}{x^2} - 2x_\mu \frac{(f_{\mu k} x_\nu + f_{\nu k} x_\mu - 1/x^k)}{(x^2)^2} \quad (10.12)$$

Подставляя (10.6) и (10.12) в (10.11), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \beta^\mu f_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \{ \ln(C_0 + C_2) \} \beta^\mu f_{\mu\nu} &= 0, \\ \gamma^\mu f_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \{ \ln(C_0 + C_2) \} \beta^\mu f_{\mu\nu} &= 0, \\ i(\gamma\beta)\psi + 2 S_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \psi &= 0 \end{aligned} \quad (10.13)$$

Решением системы (10.13) будет

$$\psi = \exp \left\{ i 2 \frac{(k\beta)}{\beta^2} S_{\mu\nu} C^{\mu\nu} \int_0^\omega f(u) du \right\} \chi, \quad (10.14)$$

$$C_{01} = k_0, \quad C_{23} = -\frac{1}{\beta_0} (\beta_1 k_1 - \beta_3 k_3), \quad C_{31} = -\frac{1}{\beta_0} (\beta_3 k_1 - \beta_1 k_3), \quad C_{11} = -\frac{1}{\beta_0} (\beta_1 k_1 - \beta_1 k_1),$$

где $f(u)$ — произвольная функция $f \in C^2(\mathbb{R}^1)$, k_0 — произвольные действительные константы.

Таким образом; используя конформную инвариантность системы (10.11), получаем семейство точных частных решений

$$F_{\mu\nu} = \frac{C_{\mu\nu}}{\alpha^2} - 2\chi_\mu \frac{(f_{\mu\nu}(\chi_\nu + f_{\nu\mu}(\chi_\mu))\chi^\mu}{(\alpha')^2},$$

$$\psi = \frac{\chi}{(\alpha')^2} \exp\left\{i \frac{\chi}{\alpha'} (\chi_\mu) (S_{\mu\nu} \chi^\nu) \int f(u) du\right\} \chi \quad (10.15)$$

Теперь рассмотрим следующую систему нелинейных уравнений:

$$\chi^\mu (i\partial_\mu - e f_\mu) \psi = 0,$$

$$\square A_\mu - \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) + \mathcal{L}_1 \partial^\nu \left\{ \Phi\left(\frac{I_1}{I_2}\right) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right\} = -e \bar{\psi} \chi_\mu \psi + \quad (10.16)$$

$$+ \mathcal{L}_2 A_\mu (A_\nu A^\nu)$$

Эта система отличается от хорошо известной системы уравнений квантовой электродинамики добавочными членами $\mathcal{L}_1 \partial^\nu \left\{ \Phi\left(\frac{I_1}{I_2}\right) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right\}$, $\mathcal{L}_2 A_\mu (A_\nu A^\nu)$, описывающими самодействие электромагнитного поля. В работе 83 рассмотрена такая система уравнений без дополнительного члена $\mathcal{L}_1 \partial^\nu \left\{ \Phi\left(\frac{I_1}{I_2}\right) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right\}$. Система уравнений (10.16) также как и система, предложенная в 83, является конформно-инвариантной. Используя анзац (9.10) для A_μ и ψ (10.6), систему (10.16) редуцируем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i(\chi_\mu) \dot{\psi} = e(\chi_\mu) \psi,$$

$$\ddot{\beta}_\mu - \beta_\mu (\beta^\nu \dot{\beta}_\nu) + \mathcal{L}_1 \frac{d}{d\omega} \left\{ \Phi\left(\frac{C_1}{C_2}\right) \right\} \beta^\nu (i\beta_\mu \dot{\beta}_\nu - \beta_\nu \dot{\beta}_\mu) = \quad (10.17)$$

$$= -e \bar{\psi} \chi_\mu \psi + \mathcal{L}_2 \beta_\mu (\beta^\nu \dot{\beta}_\nu)$$

Решениями системы (10.17) являются

$$\beta_\mu = \theta \beta_\mu, \quad \psi = \exp\{-ie\theta\omega\} \chi, \quad (10.18)$$

при условии на константы θ, β_μ и постоянный спинор $K, \theta \in \mathbb{R}^1$

$$2\beta^2\theta^3\delta_\mu + e\bar{K}K_\mu K = 0 \quad (10.19)$$

Таким образом, мы получили точные решения системы (10.16)

$$\psi(x) = \frac{rx}{(x')^2} \exp\left\{-ie\theta\omega\right\} K, \quad (10.20)$$

$$A_\mu = \theta\left[\frac{\beta_\mu}{x^2} - 2x_\mu \frac{\beta x}{(x')^2}\right].$$

Отметим, что на этих решениях добавочный член $\lambda_1 \partial_\mu \left\{ \beta \left(\frac{2}{x'} \right) \left[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \right] \right\}$ тождественно равен нулю, т.е. решения (10.20) являются решениями системы (10.16), если $\lambda_1 = 0$ (см. [83]).

Итак, используя конформную инвариантность, мы свели сложные нелинейные системы дифференциальных уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, что, в свою очередь, позволило найти точные решения этих систем уравнений. Поскольку рассматриваемые в этом параграфе уравнения инвариантны относительно преобразований трансляции по независимой переменной, то, производя замену для найденных решений $x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + a_\mu$ (a_μ — действительные параметры), получим новые решения. Предлагаемые системы уравнений и их точные решения могут быть использованы при построении нелинейных моделей теории поля.

§ II. Точные решения уравнений Янга-Миллса

Построим точные решения уравнения Янга-Миллса, используя их конформную инвариантность. Как известно, система Янга-Миллса представляет собой очень сложную нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu}^a + \varepsilon^{abc} B_\mu^b F_{\mu\nu}^c &= 0, \\ F_{\mu\nu}^k &= \partial_\mu B_\nu^k - \partial_\nu B_\mu^k + i \varepsilon^{klm} B_\mu^l B_\nu^m. \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Система (II.1) инвариантна как относительно неабелевой калибровочной группы $SU(2)$, так и относительно группы конформных преобразований $C(1.3)$ 84. Для построения точных решений системы (II.1) используем анзац для B_μ^a , который имеет ту же структуру, что и анзац для вектора-потенциала электромагнитного поля

$$B_\mu^a = \frac{b_\mu^a}{x^2} - 2x_\mu \frac{b_\nu^a x^\nu}{(x^2)^2} \quad (\text{II.2})$$

Аналогичным образом, обобщая анзац (8.5), получаем анзац для тензора $F_{\mu\nu}^a$:

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{f_{\mu\nu}^a}{(x^2)^2} - 2x_\mu \frac{(f_{\mu k}^a x^\nu + f_{\nu k}^a x_\mu) x^k}{(x^2)^3}, \quad (\text{II.3})$$

где $f_{\mu\nu}^a = f_{\mu\nu}^a(\omega)$

Подставив (II.2), (II.3) в (II.1), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\beta^\mu \dot{f}_{\mu\nu}^a + \varepsilon^{\mu\nu\lambda} \dot{f}_{\mu\nu}^c = 0, \\ f_{\mu\nu}^b = \beta_\mu \dot{v}_\nu - \beta_\nu \dot{v}_\mu + i \varepsilon_{\mu\nu\lambda} v_\mu^l v_\nu^n. \quad (II.4)$$

Легко убедиться, что

$$\dot{v}_\mu^a = \frac{C_\mu^a}{\omega}, \\ \dot{f}_{\mu\nu}^a = \frac{d_{\mu\nu}^a}{\omega^2} \quad (II.5)$$

являются решениями системы (II.4) при условии, что константы C_μ^a , $d_{\mu\nu}^a$ удовлетворяют таким соотношениям:

$$\beta^\mu d_{\mu\nu}^a + \varepsilon^{\mu\nu\lambda} C_\mu^b d_{\mu\nu}^c = 0, \\ d_{\mu\nu}^b = \beta_\mu C_\nu^b - \beta_\nu C_\mu^b + i \varepsilon_{\mu\nu\lambda} C_\mu^l C_\nu^n. \quad (II.6)$$

Система (II.6) совместна потому, например, что существует решение

$$C_\mu^a = \beta_\mu^a, \quad d_{\mu\nu}^a = 0.$$

Таким образом, с помощью анзатцев (II.2), (II.3) получаем новые точные решения уравнения Янга-Миллса:

$$B_\mu^a = \left\{ \frac{C_\mu^a}{x^2} - 2\beta_\mu \frac{C_\nu^a x^\nu}{(x^2)^2} \right\} \frac{1}{\omega}, \\ F_{\mu\nu}^a = \left\{ \frac{d_{\mu\nu}^a}{(x^2)^2} - 2\beta_{[\mu} \frac{(C_{\nu]}^a (x^\nu + \beta_{\nu]} x^\nu)}{(x^2)^2} \right\} \frac{1}{\omega^2} \quad (II.7)$$

Формула (II.7) дает целое семейство решений, зависящих от постоянных C_μ^a , $d_{\mu\nu}^a$, связанных соотношениями (II.6). Заменой

$x'_\mu = x_\mu + a_\mu$ получаем новые решения уравнений Янга-Миллса

$$B_\mu^a = \left\{ \frac{C_\mu^a}{(x+a)^2} - 2(x+a)_\mu \frac{C_\nu^a (x^\nu + a^\nu)}{(x+a)^2 (x^\nu + a^\nu)^2} \right\} \frac{1}{\omega'}, \quad (II.8)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \left\{ \frac{d_{\mu\nu}^a}{(x_\mu + a_\mu)(x_\nu + a_\nu)} - 2(x_\mu + a_\mu) \frac{f_{\mu\nu}^a(x_\nu + a_\nu) d_{\nu\nu}^a(x_\mu + a_\mu)(x^k + a^k)}{(x_\nu + a_\nu)(x^k + a^k)} \right\}$$

$$\times \frac{1}{\omega'},$$

где $\omega' = \frac{f_{\mu\nu}^a(x_\mu + a_\mu)}{(x_\nu + a_\nu)(x^k + a^k)}.$

§ 12. Конформная инвариантность уравнения

В предыдущих параграфах изучались групповые свойства дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Теперь рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка. Интерес к дифференциальным уравнениям высших порядков возрастает по мере развития теории нелокальных взаимодействий.

Известно, что волновые уравнения для свободного безмассового скалярного поля являются конформно-инвариантными 76. В работе 77 найдены необходимые и достаточные условия конформной инвариантности уравнения $\square \psi = 0$, где ψ — многокомпонентная функция. Эти условия дают ряд локально конформно-инвариантных уравнений. Так, например, система уравнений для свободных безмассовых векторных полей

$$\begin{aligned}\square \vec{E} &= 0, \\ \square \vec{H} &= 0,\end{aligned}$$

инвариантна относительно локальной конформной группы тогда и только тогда, когда $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла. Если ψ является 4-компонентным спинором, преобразующимся по представлению $\mathcal{D}(0, 1/2) \oplus \mathcal{D}(1/2, 0)$ группы $O(1,3)$, то эти условия приводят к уравнению Дирака. В той же работе 77 высказано предположение, что требование локальной конформной инвариантности уравнения $\square^2 \psi = 0$ приводит к более слабым условиям, чем аналогичное требование для уравнения $\square \psi = 0$.

В этом параграфе рассмотрен вопрос об условиях, к которым приводит требование локальной конформной инвариантности уравнения

$$(P_\mu P^\mu)^2 \psi = 0 \quad (12.1)$$

где ψ — 4-компонентный спинор, преобразующийся по представлению $\mathcal{D}(0, \frac{1}{2}) \oplus \mathcal{D}(\frac{1}{2}, 0)$ группы $O(1,3)$. Соответствующие инфинитезимальные операторы локальной конформной группы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} P_\mu &= i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \\ J_{\mu\nu} &= x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ \mathcal{D} &= x_\nu P^\nu + \frac{3}{2} i \\ K_\mu &= 2 x_\mu \mathcal{D} - (x_\nu x^\nu) P_\mu + \frac{i}{2} x^\nu [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \end{aligned} \quad (12.2)$$

Решение этой задачи задается следующей теоремой.

Т е о р е м а 12.1. Для того чтобы система (12.1) была инвариантной относительно локальной конформной группы $C(1,3)$, инфинитезимальные операторы которой задаются формулами (12.2), необходимо и достаточно, чтобы ψ удовлетворял уравнению Дирака

$$\gamma_\nu P^\nu \psi = 0 \quad (12.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для доказательства теоремы используем коммутационные соотношения (1.19) для операторов (12.2). Для того чтобы уравнения (12.1) были конформно-инвариантными, необходимо, чтобы

$$[(P_\nu P^\nu)^2, K_\mu] \psi = 0, \quad (12.4)$$

где ψ — решение уравнения (12.1). Уравнение (12.4) эквивалентно уравнению

$$L_{\mu} \psi = 0, \quad (12.5)$$

где $L_{\mu} = [(P_\nu P^\nu)^2, K_\mu] = (P_\nu P^\nu) 2 i x_\mu (\gamma_\nu P^\nu) + 4 i \{ x_\mu (P_\nu P^\nu) + \frac{i}{2} \gamma_\mu (\gamma_\nu P^\nu) \} = -4 P_\mu (\gamma_\nu P^\nu) - 2 \gamma_\mu (P_\nu P^\nu)$

Таким образом, получаем, что ψ должен удовлетворять уравнению

$$[2P_\mu (\gamma_\nu P^\nu) + \gamma_\mu (P_\nu P^\nu)] \psi = 0 \quad (12.6)$$

Имея свертку (12.6) с γ^μ , получаем уравнение для спинора ψ

$$(P_\nu P^\nu) (\gamma_\mu P^\mu) \psi = 0 \quad (12.7)$$

Условие конформной инвариантности уравнения (12.7) приводит к новому уравнению

$$[2P_\mu (\gamma_\nu P^\nu) + \gamma_\mu (P_\nu P^\nu)] \psi = 0, \quad (12.8)$$

так как

$$[(P_\nu P^\nu) (\gamma_\nu P^\nu), K_\mu] = (P_\nu P^\nu) 2i x_\mu (\gamma_\nu P^\nu) + 4i \left\{ x_\mu (P_\nu P^\nu) + \frac{i}{2} \gamma_\mu (\gamma_\nu P^\nu) \right\} \times (\gamma_\nu P^\nu).$$

Учитывая, что ψ является решением уравнения (12.7), получаем уравнение (12.8). Взяв свертку (12.8) с γ_μ , приходим к уравнению

$$(P_\nu P^\nu) \psi = 0 \quad (12.9)$$

В свою очередь, уравнение (12.9) конформно-инвариантно тогда и только тогда, когда ψ удовлетворяет уравнению Дирака, так как

$$[P_\nu P^\nu, K_\mu] = 4i \left\{ x_\mu (P_\nu P^\nu) + \frac{i}{2} \gamma_\mu (\gamma_\nu P^\nu) \right\}$$

Необходимость условия теоремы доказана.

Достаточность. Если ψ удовлетворяет уравнению Дирака, которое, как известно, является конформно-инвариантным, то

уравнение (12.1) конформно-инвариантно в силу (12.5).

Теорема доказана.

Таким образом, требование конформной инвариантности системы $(P_\mu P^\mu)^2 \psi = 0$ приводит к тем же уравнениям, что и аналогичное требование для системы $P_\mu P^\mu \psi = 0$, а именно, к уравнению Дирака.

§ 13. Система дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Шредингера

Группа Шредингера Sch (I.3) является максимальной группой точечных преобразований уравнения Шредингера 92

$$S\psi(\bar{x}, t) = 0, \quad (13.1)$$

где $S = P_0 - \frac{\bar{P}^2}{2m}$, $P_0 = i \frac{\partial}{\partial t}$, $P_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}$, $a = 1, 2, 3$.

Группа Sch (I.3) содержит в качестве подгруппы группу Галилея G (I.3) и группу проективных и масштабных преобразований. Требование инвариантности уравнений движения для частиц с ненулевым спином $s \neq 0$ в нерелятивистской квантовой теории аналогично требованию конформной инвариантности в релятивистской теории. В работе 60 из требования инвариантности уравнения (13.1) относительно группы Sch (I.3) найдены уравнения движения для нерелятивистской частицы с ненулевым спином. В этом параграфе рассмотрим какие дополнительные условия необходимо наложить на волновую вектор-функцию $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$, чтобы уравнения

$$S^2 \psi = 0 \quad (13.2)$$

было инвариантно относительно группы Шредингера Sch (I.3).

О п р е д е л е н и е 13.1 Система дифференциальных уравнений (13.2) для вектор-функции $\psi(t, \bar{x})$ инвариантна относительно группы Шредингера Sch (I.3), если

$$[S^2, Q_e] \psi = 0, \quad (13.3)$$

где ψ - решение системы (I.3.2), Q_e - базисные элементы алгебры Ли группы Sch (I.3), удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Sch (I.3)

$$[P_0, P_a] = [P_a, G_a] = [P_a, P_b] = [G_a, G_b] = [D, J] = 0,$$

$$[A, J] = [A, G_a] = 0,$$

$$[P_0, P_a] = [P_a, G_a] = [P_a, P_b] = [G_a, G_b] = [D, J_a] = 0,$$

$$[A, J_a] = [A, G_a] = 0,$$

$$[J_a, J_b] = i \varepsilon_{abc} J_c, \quad (I.3.4)$$

$$[P_a, J_b] = i \varepsilon_{abc} P_c, \quad [G_a, J_b] = i \varepsilon_{abc} G_c,$$

$$[P_a, G_b] = i m \delta_{ab}, \quad [P_0, G_a] = i P_a, \quad [P_0, D] = 2i P_0, \quad [P_a, D] = i P_a,$$

$$[D, G_a] = i G_a, \quad [P_0, A] = i D, \quad [P_a, A] = i G_a, \quad [D, A] = 2i A.$$

Решение выше поставленной задачи задается следующей теоремой.

Т е о р е м а I.3.1. Для того чтобы система (I.3.2) была инвариантна относительно группы Шредингера, необходимо и достаточно, чтобы ψ удовлетворяла следующим дополнительным условиям:

$$[S, D - \frac{1}{2m} \sum_{a=1}^3 [P_a, G_a]_+] \psi = 0$$

$$[S, 2A - \frac{\sum_{a=1}^3 G_a G_a}{m}] \psi + 2(D - \frac{1}{2m} \sum_{a=1}^3 [P_a, G_a]_+)^2 \psi = 0,$$

$$[D - \frac{1}{2m} \sum_{a=1}^3 [P_a, G_a]_+, 2A - \frac{\sum_{a=1}^3 G_a G_a}{m}] \psi = 0 \quad (I.3.5)$$

$$(2A - \frac{\sum_{a=1}^3 G_a G_a}{2m})^2 \psi = 0$$

где $\sum_{a=1}^3 G_a G_a = G_1^2 + G_2^2 + G_3^2$, $\sum_{a=1}^3 [P_a, G_a]_+ = [P_1, G_1]_+ + [P_2, G_2]_+ + [P_3, G_3]_+ + [,]_+$
- антикоммутатор.

Доказательство. Необходимость.
Используя коммутационные соотношения (2.3), а также формулу

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (13.6)$$

получаем коммутаторы:

$$\begin{aligned} [S, A] &= [P_0 - \frac{\bar{P}^2}{2m}, A] = i\mathcal{D} - i \frac{\sum_{a=1}^3 [G_a, P_a]_+}{2m} = iL_1 \\ [L_1, A] &= [\mathcal{D} - \frac{\sum_{a=1}^3 [G_a, P_a]_+}{2m}, A] = 2iA - \frac{\sum_{a=1}^3 G_a [P_a, A]_+ + \sum_{a=1}^3 [G_a, A] P_a}{2m} + \\ &+ \frac{\sum_{a=1}^3 P_a [G_a, A] + \sum_{a=1}^3 [P_a, A] G_a}{2m} = 2iA - 2i \frac{\sum_{a=1}^3 G_a G_a}{2m} = i \left(2A - \frac{\sum_{a=1}^3 G_a G_a}{m} \right) = \\ &= iL_2, \quad [L_2, A] = \left[2A - \frac{\sum_{a=1}^3 G_a G_a}{m}, A \right] = 0 \end{aligned} \quad (13.7)$$

Используя коммутаторы (13.7), получаем:

$$\begin{aligned} [S^2, A] &= S iL_1 + iL_1 S = i[S, L_1]_+ = i[S, \mathcal{D} - \frac{1}{2m} \sum_{a=1}^3 [P_a, G_a]_+]_+ = iS_1 \\ [S_1, A] &= i[S, L_2]_+ + 2iL_1^2 = i[S, 2A - \frac{\sum_{a=1}^3 G_a G_a}{m}]_+ + \\ &+ 2i \left(\mathcal{D} - \frac{1}{2m} \sum_{a=1}^3 [P_a, G_a]_+ \right)^2 = iS_2, \\ [S_2, A] &= i[L_1, L_2]_+ = i \left[\mathcal{D} - \frac{1}{2m} \sum_{a=1}^3 [P_a, G_a]_+, 2A - \frac{\sum_{a=1}^3 G_a G_a}{m} \right]_+ = iS_3 \\ [S_3, A] &= 2iL_2^2 = 2i \left(2A - \frac{\sum_{a=1}^3 G_a G_a}{m} \right)^2 = 2iS_4, \quad [S_4, A] = 0, \end{aligned} \quad (13.8)$$

Из определения получаем, что для того чтобы система (13.2) была инвариантной относительно группы Sch (1.3), должны выполняться уравнения

$$S^2 \psi = 0, \quad S_1 \psi = 0, \quad S_2 \psi = 0, \quad S_3 \psi = 0, \quad S_4 \psi = 0, \quad (13.9)$$

Необходимость теоремы доказана.

Достаточность. Используя определение 13.1 коммутационные соотношения (13.4) и (13.8), легко убедиться, что уравнения (13.9) образуют систему уравнений, инвариантную относительно группы Шредингера Sch (1.3).

Теорема доказана.

Отметим, что при доказательстве теоремы нигде не использовался явный вид операторов алгебры Шредингера Sch (1.3), а использовались лишь коммутационные соотношения (13.4). Поэтому теорема справедлива как для операторов группы Sch (1.3) точечных преобразований, так и для операторов генерируемых ^{наши} не-локальные преобразования. Для того чтобы сравнить результаты с результатами работы [60], выберем базисные элементы алгебры Шредингера, как и в [60] в виде:

$$\begin{aligned} P_0 &= i \frac{\partial}{\partial t}, & P_a &= -i \frac{\partial}{\partial x_a}, \\ J_a &= (\vec{x} \vec{P})_a + S_a, & E &= im, \\ G_a &= t P_a - m x_a + \lambda_a, \\ D &= 2t P_0 - (\vec{x} \vec{P}) + \lambda_0, \\ A &= t D - t^2 P_0 + m \frac{\vec{x}^2}{2} - \vec{\lambda} \vec{x} \end{aligned} \quad (13.10)$$

Операторы (13.10) образуют представление алгебры Sch (1.3), если матрицы $S_a, \lambda_a, \lambda_0$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} [S_a, S_b] &= i \varepsilon_{abc} S_c, \\ [\lambda_a, \lambda_b] &= 0, \quad [\lambda_0, \lambda_a] = i \lambda_a \\ [\lambda_0, S_a] &= 0, \quad [\lambda_a, S_b] = i \varepsilon_{abc} \lambda_c \end{aligned} \quad (13.11)$$

Используя (13.10), получаем

$$\begin{aligned} L_1 &= 2tS + L \\ L_2 &= 2t^2S + 2tL - \frac{A}{m}, \end{aligned} \quad (13.12)$$

где $L = -\frac{\vec{\lambda} \vec{p}}{m} + \left(\lambda_0 - \frac{3}{2} i\right)$, $\Lambda = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \vec{\lambda}^2$

Подставив (I3.I2) в (I3.5), приходим к выводу, что уравнения (I3.5) эквивалентны системе уравнений:

$$\begin{aligned} S^2 \psi &= 0, \\ (SL + iS) \psi &= 0, \\ (L^2 + iL - \frac{m}{2}) \psi &= 0, \\ (\Lambda L + i\Lambda) \psi &= 0, \\ \Lambda^2 \psi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I3.I3})$$

В работе [60] получена система

$$S \psi = 0, \quad L \psi = 0, \quad \Lambda \psi = 0. \quad (\text{I3.I4})$$

Как видно из (I3.I4) и (I3.I3), каждое решение системы (I3.I4) является и решением системы (I3.I3). Обратное утверждение, вообще-то говоря, несправедливо. Поэтому приходим к выводу, что переход к уравнениям (I3.2) четвертого порядка привел к более слабым условиям, чем уравнение второго порядка (I3.I).

Отметим еще такой факт. Если матрицы S_a реализуют представление $\mathcal{D}(s) \otimes \mathcal{D}(s)$ алгебры $O(1,3)$, а матрицы λ_0 и λ_a имеют вид

$$\lambda_0 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \lambda_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ S_a & 0 \end{pmatrix}$$

где — нулевая матрица соответствующей размерности, то система (I3.I3) совпадает с уравнениями движения Леви-Леблонца [90] для нерелятивистской частицы со спином $s = 1/2$.

§ 14. Симметричные свойства некоторых интегро-дифференциальных уравнений

В этом параграфе обобщим метод Эстабрука-Уолквиста [79] для отыскания симметрии дифференциальных уравнений на случай интегро-дифференциальных уравнений. Пусть система уравнений в частных производных задана отображением ϕ из пространства n -струй в R^m $\phi: J_n(M) \rightarrow R^m$ $\phi(x, \varphi^N, \varphi^N_{i_1}, \dots, \varphi^N_{i_1 \dots i_n}) = 0$. Введем набор форм Картана $\theta^N = d\varphi^N - \varphi^N_{i_1} dx_{i_1}$, $\theta^N_{i_1} = d\varphi^N_{i_1} - \varphi^N_{i_1 s} dx_s$, $\theta^N_{i_1 \dots i_{n-1}} = d\varphi^N_{i_1 \dots i_{n-1}} - \varphi^N_{i_1 \dots i_{n-1} s} dx_s$, $T_{i_1 \dots i_s} = d\theta^N_{i_1 \dots i_s}$ (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до $m = \dim M$). Функции $\varphi^N_{i_1 \dots i_s}$ заданы на многообразии M , $N = N_0$, d — внешний дифференциал.

Требование инвариантности системы уравнений ϕ эквивалентно инвариантности системы форм $\{\phi dx, \theta, T\}$. Условие инвариантности указанной системы форм можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_X(\phi dx) &= h \phi dx + H\theta + RT, \\ L_X \theta &= \hat{H}\theta, \quad L_X T = \lambda \theta + tT. \end{aligned} \quad (14.1)$$

Здесь θ, T — вектор-формы $\theta = \{\theta^N_{i_1 \dots i_s}\}$, $T = \{T_{i_1 \dots i_s}\}$, $h, H, R, \hat{H}, \lambda, t$ — матрицы-формы соответствующих степеней: $(H\theta)_\alpha = H_{\alpha\beta} \wedge \theta_\beta$; символ β нумерует компоненты формы.

Из инвариантности форм Картана следует закон преобразования производных. Зная закон преобразования производных, можно найти симметрию формы ϕdx рассматриваемого уравнения.

Теперь рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение, заданное отображением $F: J_n \rightarrow R^m$

$$F(x, \varphi^N, \varphi^N_{i_1}, \dots, \varphi^N_{i_k}, y) = \phi(x, \varphi^N_{i_1}, \dots, \varphi^N_{i_k}) + \lambda \int_{\gamma} K(x, y, \varphi^N_{i_1}, \dots, \varphi^N_{i_k}) dy \quad (I4.2)$$

Функции и производные под интегралом определены в точке $j \in M$.
Представим отображение F посредством форм

$$\int_M F dx = \int_M \phi dx + \lambda \int_{M \times M} K dy dx$$

Поскольку интеграл по многообразию является интегралом от формы, то задача сводится к тому, чтобы найти условие, при выполнении которого сумма форм (I4.2) будет инвариантна. Инвариантность понимается в смысле (I4.1), поэтому инфинитезимальный критерий инвариантности уравнения (I4.2) можно представить в виде

$$L_x(\phi dx + \lambda K dy dx) = h(\phi dx + \lambda K dy dx) + H\theta + RT + H'\theta' + R'T' \quad (I4.3)$$

где формы Картана θ, T' определены в точке многообразия M .
Помимо (I4.3) в условие инвариантности необходимо включить условие инвариантности форм θ, T, θ', T' , что определяет закон преобразования производных функций

$$\begin{aligned} L_x \theta &= H\theta, & L_x \theta' &= H'\theta' \\ L_x T &= T_1\theta + T_2T, & L_x T' &= T'_1\theta' + T'_2T' \end{aligned} \quad (I4.4)$$

Поскольку формы ϕdx и $\lambda K dy dx$ в (I4.3) разных степеней, то преобразуются они независимо:

$$\begin{aligned} L_x \phi dx &= h\phi dx + H_1\theta + R_1T, \\ L_x \lambda K dy dx &= h\lambda K dy dx + H'_1\theta' + R'_1T' + H_2\theta + R_2T. \end{aligned} \quad (I4.5)$$

Связь между преобразованиями этих форм задается одной и той же формой h , что обеспечивает инвариантность уравнений (I4.2).

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение для электромагнитного потенциала

$$\square A_\mu - \partial_\mu (\partial_\nu A^\nu) = 2 A_\mu(x) \int F(A_\nu(y) A^\nu(y) | x, y) dy \quad (I4.6)$$

Изучим вопрос, при каких F уравнение (I4.6) будет инвариантно относительно локальной конформной группы $C(I.3)$, генераторы которой имеют вид

$$\begin{aligned} P_\mu &= i g_{\mu\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} + \frac{\partial}{\partial y^\nu} \right) = P_{x\mu} + P_{y\mu} \\ J_{\mu\nu} &= x_\mu P_{\nu} - x_\nu P_{\mu} + y_\mu P_{\nu} - y_\nu P_{\mu} + A_\mu P_\nu - A_\nu P_\mu \\ D &= x_\nu P^{x\nu} + y_\nu P^{y\nu} - A_\nu P^{A\nu} \\ U_{\mu\nu} &= 2 x_\mu (x_\nu P^{x\nu} + A_\nu P^{A\nu}) + 2 y_\mu (y_\nu P^{y\nu} + A_\nu P^{A\nu}) - (x_\nu y^\nu) P_{x\mu} + \\ &+ y_\nu (A_\mu P_{\nu} - A_\nu P_{\mu}) - (y_\nu y^\nu) P_{y\mu} + 2 y^\nu (A_\mu P_{\nu} - A_\nu P_{\mu}) \end{aligned} \quad (I4.7)$$

Для решения этой задачи воспользуемся изложенным выше методом.

Рассмотрим дифференциальные формы Картана

$$\begin{aligned} \Omega_1^x(x) &= dA^x(x) - P_\nu^x dx^\nu, \\ \Omega_1^y(y) &= dA^y(y) - P_\nu^y dy^\nu, \\ \Omega_1^A(A) &= dA^A(A) - P_\nu^A dA^\nu = dA^A(y) - \frac{\partial A^A(y)}{\partial y^\nu} dy^\nu, \\ \Omega_1^T(T) &= d\Omega_1^T(y) \end{aligned} \quad (I4.8)$$

и форму, соответствующую уравнению (I4.6)

$$\begin{aligned} \Omega^M &= dP_0^x dx + dP_1^x dx_1 + dP_2^x dx_2 + dP_3^x dx_3 - \\ &- dP_3^y dx_3 + (dP_0^y - dP_1^y - dP_2^y - dP_3^y) T_1 / (x_0 dx_1 + x_1 dx_2) - \\ &- 2 A_\mu(x) P^\mu dx^\mu \\ &\text{где } T_0 \end{aligned} \quad (I4.9)$$

Задача о симметрии уравнения (I4.6) эквивалентна задаче об инвариантности форм (I4.9), (I4.8) относительно векторного поля

$$X_A = \xi_A^\mu \partial_\mu + \tilde{\xi}_A^\mu \partial_{\tilde{\mu}} + \eta_A^\mu \partial_\mu + \tilde{\eta}_A^\mu \partial_{\tilde{\mu}} + \tilde{\eta}_{\nu A}^\mu \partial_{\tilde{\mu}} + \tilde{\eta}_{\nu A}^\mu \partial_{A^\nu(y)} \quad (I4.10)$$

где X_A оператор из (I4.7). Условия инвариантности форм (I4.8)

$$\begin{aligned} L_{X_A} \Omega_1^\mu(x) &= h_{1A} \Omega_1^\mu(x), \\ L_{X_A} \Omega_1^\mu(y) &= h_{1A} \Omega_1^\mu(y), \\ L_{X_A} \Omega_2^\mu(x) &= h_{2A} \Omega_2^\mu(x) + \Omega_2^\mu(x) \wedge \omega^A, \\ L_{X_A} \Omega_2^\mu(y) &= h_{2A} \Omega_2^\mu(y) + \Omega_2^\mu(y) \wedge \tilde{\omega}^A \end{aligned} \quad (I4.11)$$

приводят к тому, что $\tilde{\eta}_\nu^\mu(x, A^\mu), \tilde{\eta}_\nu^\mu(y, A^\mu)$ являются координатами первого продолжения оператора $\xi_A^\mu \partial_{x_\mu} + \tilde{\xi}_A^\mu \partial_{\tilde{\mu}} + \eta_A^\mu \partial_\mu + \tilde{\eta}_A^\mu \partial_{A^\mu(y)}$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_\nu^\mu &= \eta_\nu^\mu - e \eta_\nu^\mu + e_\nu - A_\nu^i (\xi_\nu^i + e \xi_\nu^i A_\nu^e), \\ \tilde{\eta}_\nu^\mu(y) &= \eta_\nu^\mu - e \eta_\nu^\mu A_\nu^e(y) - A_\nu^i(y) (\eta_\nu^i - e \eta_\nu^i A_\nu^e). \end{aligned} \quad (I4.12)$$

Условие инвариантности формы Ω^μ эквивалентно условию

$$L_{X_A} \Omega^\mu = h_{1A} \Omega^\mu + \Omega^\mu(x) \wedge \omega^A + \Omega^\mu(y) \wedge \tilde{\omega}^A + \Omega^\mu(x) \wedge \omega_{\mu\nu}^A + \Omega^\mu(y) \wedge \tilde{\omega}_{\mu\nu}^A \quad (I4.13)$$

Для вычисления производной $L_{X_A} \Omega^\mu$ воспользуемся формулой

$$i(X_A) d + d i(X_A) = L_{X_A} \quad (I4.14)$$

где $i(X_A)$ — оператор внутреннего умножения, $h_{1\nu}, h_{1A}, h_{1A}, h_{2A}, h_{2A},$
 $\omega^A, \tilde{\omega}^A, \omega_{\mu\nu}^A, \tilde{\omega}_{\mu\nu}^A, \omega_{\mu\nu}^A, \tilde{\omega}_{\mu\nu}^A$ — неизвестные дифференциальные формы соответствующих степеней.

Требования инвариантности формы (I4.9) относительно

трансляций ($x_A = p_{\mu}$) , приводит к уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial F}{\partial y_{\mu}} = 0$$

Следовательно, $F = F(A_{\nu}(y) A^{\nu}(y), x-y)$.

Представим форму Ω^{μ} в виде суммы

$$\Omega^{\mu} = \Omega_0^{\mu} + \Omega_I^{\mu}, \quad (14.15)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_0^{\mu} &= dP_0^{\mu} dx_0 dx_1 dx_2 + dP_1^{\mu} dx_0 dx_1 dx_2 + dP_2^{\mu} dx_0 dx_1 dx_2 - \\ &- dP_3^{\mu} dx_0 dx_1 dx_2 + (dP_0^{\mu} - dP_1^{\mu} - dP_2^{\mu} - dP_3^{\mu}) \tilde{T}_{\mu}(dx_0 dx_1 dx_2) \\ \Omega_I^{\mu} &= \lambda A_{\nu} F(A_{\nu}(y) A^{\nu}(y), x-y) dy^{\nu} \wedge dx^{\mu} \end{aligned}$$

Далее, исследуем какие ограничения на F накладывает требование лоренц-инвариантности. Вычисляя производную Ли $L_{\tilde{T}_{\mu\nu}}$ вдоль векторного поля (используя формулу (4.14)), получаем уравнение на F

$$g_{\mu\nu} \tilde{T}_{\mu} \frac{\partial F}{\partial z_{\nu}} - g_{\mu\nu} \tilde{T}_{\nu} \frac{\partial F}{\partial z_{\mu}} = 0, \quad (14.16)$$

$$(z_{\mu} \equiv x_{\mu} - y_{\mu})$$

откуда следует, что $F = F(A_{\nu}(y) A^{\nu}(y), |x-y|^2)$.

Вычисляя производную Ли Ω_0^{μ} вдоль векторного поля

$c^{\mu} k_{\mu}$, имеем

$$L_{c^{\mu} k_{\mu}} \Omega_0^0 = 2(c_0) \Omega_0^0 + 2(x_0 c_1 - x_1 c_0) \Omega_0^1 + 2(x_0 c_2 - x_2 c_0) \Omega_0^2 + 2(x_0 c_3 - x_3 c_0) \Omega_0^3,$$

$$L_{c^{\mu} k_{\mu}} \Omega_0^1 = 2(c_1) \Omega_0^1 + 2(c_0 c_1 - x_1 c_0) \Omega_0^0 + 2(c_1 x_2 - x_2 c_1) \Omega_0^2 + 2(c_1 x_3 - x_3 c_1) \Omega_0^3, \quad (14.17)$$

$$L_{c^{\mu} k_{\mu}} \Omega_0^2 = 2(c_2) \Omega_0^2 + 2(c_0 c_2 - x_2 c_0) \Omega_0^0 + 2(c_1 x_2 - x_2 c_1) \Omega_0^1 + 2(c_2 x_3 - x_3 c_2) \Omega_0^3,$$

$$L_{c^{\mu} k_{\mu}} \Omega_0^3 = 2(c_3) \Omega_0^3 + 2(c_0 c_3 - x_3 c_0) \Omega_0^0 + 2(c_1 x_3 - x_3 c_1) \Omega_0^1 + 2(c_2 x_3 - x_3 c_2) \Omega_0^2.$$

Аналогично, для формы Ω_I^M имеем:

$$L_{cr_{\kappa}} \Omega_I^0 = \left\{ (cx) \left[\frac{\partial F}{\partial u} 2u + 8F - 2F \right] + (cy) \left[\frac{\partial F}{\partial B} (-4B) + \frac{\partial F}{\partial u} 2u + 8F \right] \right\} \Omega_I^0 + \\ + 2(x_0 c_1 - x_1 c_0) \Omega_I^1 + 2(x_0 c_2 - x_2 c_0) \Omega_I^2 + 2(x_0 c_3 - x_3 c_0) \Omega_I^3,$$

$$L_{cr_{\kappa}} \Omega_I^1 = \left\{ (cx) \left[\frac{\partial F}{\partial u} 2u + 8F - 2F \right] + (cy) \left[\frac{\partial F}{\partial B} (-4B) + \frac{\partial F}{\partial u} 2u + 8F \right] \right\} \Omega_I^1 + \\ + 2(c_1 x_0 - x_1 c_0) \Omega_I^0 + 2(c_1 x_2 - c_2 x_1) \Omega_I^2 + 2(c_1 x_3 - c_3 x_1) \Omega_I^3,$$

$$L_{cr_{\kappa}} \Omega_I^2 = \left\{ (cx) \left[\frac{\partial F}{\partial u} 2u + 8F - 2F \right] + (cy) \left[\frac{\partial F}{\partial B} (-4B) + \frac{\partial F}{\partial u} 2u + 8F \right] \right\} \Omega_I^2 + \\ + 2(c_2 x_0 - x_2 c_0) \Omega_I^0 + 2(c_2 x_1 - c_1 x_2) \Omega_I^1 + \\ + 2(c_2 x_3 - c_3 x_2) \Omega_I^3 \quad (I4.I8)$$

$$L_{cr_{\kappa}} \Omega_I^3 = \left\{ (cx) \left[\frac{\partial F}{\partial u} 2u + 8F - 2F \right] + (cy) \left[\frac{\partial F}{\partial B} (-4B) + \frac{\partial F}{\partial u} 2u + 8F \right] \right\} \Omega_I^3 + \\ + 2(x_0 c_3 - x_3 c_0) \Omega_I^0 + 2(x_1 c_3 - x_3 c_1) \Omega_I^1 + 2(c_3 x_2 - c_2 x_3) \Omega_I^2,$$

где $B \equiv A_v(y) A^v(y)$, $u = |x - y|^2$.

Из (I4.I7), (I4.I8) получаем, что для того чтобы форма (I4.I5) была инвариантна относительно преобразований генерируемых оператором cr_{κ} должны выполняться следующие уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial u} 2u + 6F = 2F, \\ \frac{\partial F}{\partial B} (-4B) + \frac{\partial F}{\partial u} 2u + 8F = 0 \quad (I4.I9)$$

Решением (I4.I9) будет $F = \lambda B u^{-2}$, $\lambda = \text{const}$.

Инвариантность уравнения (I4.6) относительно масштабных преобразований проверяется непосредственной подстановкой в уравнение x', y', A' :

$$x' = e^a x \quad y' = e^a y,$$

$$A_\mu(x) = e^{-a} A_\mu(y) \quad A_\mu(y) = e^{-a} A_\mu(x)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Т е о р е м а 14.1. Уравнение (4.6) инвариантно относительно конформной алгебры, базисные операторы которой задаются формулами (4.7), если

$$F = \frac{A_\nu(y) A'^\nu(y)}{|x-y|^4}.$$

Итак, мы получили нелинейное конформно-инвариантное интегро-дифференциальное уравнение для электромагнитного поля

$A_\mu(x)$ с нелокальным самовзаимодействием, описываемым

$$\int \frac{A_\nu(y) A'^\nu(y)}{|x-y|^4} dy. \text{ Инвариантность интегро-дифференциальных}$$

уравнений также можно использовать для нахождения решений уравнений. Продемонстрируем это на конформно-инвариантном уравнении для спинорного поля $\psi(x)$ [52]

$$(\gamma_\mu \partial^\mu \psi(x) + \lambda \left\{ \iint_{\Omega} \frac{\bar{\psi}(y) \psi(y)}{|x-y|^4} dy \right\} \psi(x) = 0, \quad (14.20)$$

здесь $\mu, \nu = 0, 1$ $dy = dy_0 dy_1$.

Инвариантность понимается в смысле определения (14.3).

Решение уравнения (14.20) ищем в виде

$$\psi = \frac{\gamma_\nu x^\nu}{x^2} \varphi(\omega), \quad (14.21)$$

$$\omega_1 = \frac{\beta_0 x}{y^2},$$

где β_0, β_1 — произвольные действительные константы.

Уравнение (14.20) является анзацем, инвариантным относительно преобразований генерируемых оператором $S_\mu K_\mu$ ($\mu = 0, 1, 2$). Обозначим

$$\omega_1 = \frac{\beta_0 x}{y^2}, \quad \omega_2 = \frac{1}{x_0 + x_1}, \quad \omega_3 = \frac{1}{y_0 + y_1}, \quad (14.22)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — инварианты оператора $S_\mu K_\mu$. Инвариантность уравнения в смысле определения (14.3) является достаточным условием редукции отдельно дифференциальной части уравнения (14.2) и подынтегрального выражения $K dy$. Для того чтобы обеспечить редукцию уравнения (14.2), область Ω задаем в переменных ω_1, ω_2 и ω_3 .

Подставим (14.21) в (14.20) и получим

$$i(\chi\beta) \frac{d\chi}{\chi\beta} + \int_{\Omega} \frac{\bar{\varphi}(\omega_2)\varphi(\omega_1)}{\omega_3[2(\omega_2 - \omega_1) + (\beta_0 + \beta_1)\omega_3]} d\omega_1 d\omega_2 = 0 \quad (14.23)$$

Пусть Ω' область такова, что существует интеграл:

$$\iint_{\Omega'} \frac{d\omega_2 d\omega_3}{\omega_3[2(\omega_2 - \omega_1) + (\beta_0 + \beta_1)\omega_3]} = \frac{dF(\omega_1)}{d\omega_1}.$$

Тогда решением (14.23) будет

$$\varphi = \exp\left\{-i\frac{\chi\beta}{\beta_1} \int_{\Omega'} \frac{dF(\omega_1)}{d\omega_1} F(\omega_1)\right\} \chi \quad (14.24)$$

Таким образом, получаем решение уравнения (14.20):

$$\psi = \frac{\gamma_v x^v}{x^2} \exp \left\{ \frac{i \alpha (\bar{\chi} \chi) (\chi, \beta^v) F(\omega_1)}{\beta^2} \right\} \chi. \quad (14.25)$$

Таким образом, симметричные свойства интегро-дифференциальных уравнений также можно успешно использовать при построении их точных решений.

§ 15. 0 редукции, решениях нелинейных волновых уравнениях с нарушенной симметрией.

Рассмотрим нелинейное волновое уравнение

$$\square u + F_1(u) = 0, \quad u = u(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (15.1)$$

$$\square = \partial_0^2 - \partial_1^2 - \partial_2^2 - \partial_3^2, \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

где $F_1(u)$ — произвольная гладкая функция. В [51] предложен анзатц

$$u = f(x) \varphi(\omega) + g(x) \quad (15.2)$$

для построения семейств точных решений уравнений (15.1). Функции $f(x)$, $g(x)$ — заданные функции, $\varphi(\omega)$ — функция подлежащая определению, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — новые инвариантные переменные. С помощью анзатца (15.2) в [81–86] построены в явном виде широкие классы решений уравнения (15.1). При этом существенно использовалась пуанкаре-инвариантность уравнения (15.1).

Рассмотрим вопрос о том, возможно ли применять анзатц типа (15.2) для нахождения решений волновых уравнений с нарушенной симметрией? Более узкая формулировка этого вопроса такова: существуют ли волновые уравнения, не обладающие, например, лоренцевской симметрией, решения которых могут быть построены с помощью лоренц-инвариантного анзатца?

В этом параграфе дается положительный ответ на поставленный вопрос, а также построены многомерные нелинейные уравнения с нарушенной симметрией и найдены решения таких уравнений с помощью анзатца (I5.2), который ранее применяется только для пуанкаре- и галилеевски-инвариантных уравнений. Очевидно, что если рассмотреть уравнение с произвольным нарушением симметрии, то к такому уравнению не применим анзатц (I5.2). Поэтому уравнение с нарушенной симметрией должно иметь какую-то скрытую симметрию. Эта симметрия обнаруживается, если кроме уравнения (I5.1) рассматривать и уравнение порожденное некоторым инфинитезимальным оператором

$$X = \mu_{\alpha} \partial x_{\alpha} + \eta \partial u, \quad (\text{I5.3})$$

уравнение вида

$$\mu_{\alpha} = \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} = \eta. \quad (\text{I5.4})$$

Оператор (I5.3) не обязательно является оператором симметрии уравнения (I5.1), но он должен быть оператором симметрии уравнения (I5.1) на многообразии (I5.4). Таким образом, речь идет о симметрии не всех решений уравнения (I5.1) и только о симметрии некоторого подмножества решений, которое может быть значительно шире, чем симметрия самого уравнения. Именно эта идея, предложенная В.И.Фуцичем, и будет использована ниже.

I. Рассмотрим волновое уравнение

$$\Delta u \equiv \square u + F(x, u, u_1) = 0, \quad (\text{I5.5})$$

где $F(x, u, u_1)$ — произвольная гладкая функция, зависящая явно от $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $u_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3} \right)$.

Следуя [50] обобщим лиевское определение инвариантности уравнения (15.5).

О п р е д е л е н и е 15.1. Будем говорить, что уравнение (15.5) инвариантно относительно некоторого множества операторов

$\hat{Q} = \{\hat{Q}_A\}$, $A = 1, 2, \dots, N$, N — число линейно независимых операторов, если выполняются условия

$$\hat{Q}_A L u \Big|_{\substack{L u = 0 \\ \{Q_A u\} = 0}} = 0, \quad (15.6)$$

где $\{\hat{Q}_A u\} = 0$ — набор следующих уравнений

$$\hat{Q}_A u = 0, D \hat{Q}_A u = 0, D^2 \hat{Q}_A u = 0, \dots, D^n \hat{Q}_A u = 0, \quad (15.7)$$

D — оператор полного дифференцирования.

Если на решения уравнения (15.5) не накладывать условий (15.7), то определение (15.6) совпадает с классическим определением

С.Ли [37]

$$\hat{Q}_A L u \Big|_{L u = 0} = 0, \quad (15.8)$$

$\hat{Q}_A$ — набор дифференциальных операторов первого порядка, образующих алгебру Ли. (Здесь конечно, запись (15.8) является символической. Действие оператора $\hat{Q}_A$ на многообразии $L u$ понимается как и в [37], т.е. действие дважды продолженного инфинитезимального оператора). Чтобы продемонстрировать эффективность определения (15.6) и найти явные решения уравнения (15.5) выберем функцию F в виде

$$F = \left(\frac{\lambda_0}{x_0}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{x_1}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{x_2}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_3}{x_3}\right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)^2, \quad (15.9)$$

где λ_μ — произвольные параметры, $x_\mu \neq 0$, $\lambda_\mu \neq 0$.

Т е о р е м а I.7. Максимальной локальной группой (в смысле Ли) инвариантности уравнения (I5.5), (I5.9) является группа масштабных преобразований

$$x'_\mu = e^a x_\mu, \quad u' = e^{2a} u, \quad (I5.10)$$

дополненная группой сдвигов по зависимой переменной

$$u' = u + c, \quad (I5.11)$$

где a и c — действительные параметры.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно алгоритму Ли уравнение

$$L u = \square u - \left(\frac{\lambda_0}{x_0} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_1}{x_1} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_2}{x_2} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_3}{x_3} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 = 0$$

инвариантно относительно преобразований, генерируемых инфинитезимальным оператором

$$X = \xi_\mu \partial x_\mu + \eta \partial u,$$

если выполняются следующие условия

$$\left. \widetilde{X} L u \right|_{L u = 0} = \left. \widetilde{X} \left(\square u - \left(\frac{\lambda_0}{x_0} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_1}{x_1} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 - \left(\frac{\lambda_2}{x_2} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_3}{x_3} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 \right) \right|_{L u = 0} = 0 \quad (I5.12)$$

где $\widetilde{X}$ — второе продолжение инфинитезимального оператора X , т.е.

$$\widetilde{X} = X + \varepsilon^\mu \frac{\partial}{\partial u_\mu} + \sigma^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_{\mu\nu}},$$

$$\varepsilon^{\mu} = \eta_{\mu} + u_{\mu} \eta_{\mu} - u_i (\xi_{\mu}^i + u_{\mu} \xi_u^i), \quad (15.13)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\mu\nu} = & \eta_{\mu\nu} + u_{\nu} \eta_{\mu\mu} + u_{\mu} \eta_{\nu\nu} + u_{\mu} u_{\nu} \eta_{\mu\mu} + u_{\mu\nu} \eta_{\mu} - \\ & - u_i (\xi_{\mu\nu}^i + u_{\nu} \xi_{\mu\mu}^i) - u_{\mu} u_i (\xi_{\nu\mu}^i + u_{\nu} \xi_{\mu\mu}^i) - \\ & - u_{\mu i} (\xi_{\nu}^i + u_{\nu} \xi_u^i) - u_{i\nu} (\xi_{\mu}^i + u_{\mu} \xi_u^i) - u_{\mu\nu} u_i \xi_u^i. \end{aligned}$$

Подставляя (15.13) в (15.12) получаем

$$\begin{aligned} & \eta_{00} + 2u_0 \eta_{0u} + u_0^2 \eta_{uu} + (u_{11} + u_{22} + u_{33} + \frac{\lambda_0^2}{x_0^2} u_0^2 + \frac{\lambda_1^2}{x_1^2} u_1^2 + \frac{\lambda_2^2}{x_2^2} u_2^2 + \\ & + \frac{\lambda_3^2}{x_3^2} u_3^2) \eta_{\mu} - u_i (\xi_{00}^i + u_0 \xi_{0u}^i) - u_0 u_i (\xi_{0u}^i + u_0 \xi_{uu}^i) - 2u_0 u_i (\xi_u^i + \\ & + u_0 \xi_u^i) - 2(\xi_0^0 + u_0 \xi_u^0) (u_{11} + u_{22} + u_{33} + \frac{\lambda_0^2}{x_0^2} u_0^2 + \frac{\lambda_1^2}{x_1^2} u_1^2 + \frac{\lambda_2^2}{x_2^2} u_2^2 + \frac{\lambda_3^2}{x_3^2} u_3^2) - \\ & - u_i \xi_u^i (u_{11} + u_{22} + u_{33} + \frac{\lambda_0^2}{x_0^2} u_0^2 + \frac{\lambda_1^2}{x_1^2} u_1^2 + \frac{\lambda_2^2}{x_2^2} u_2^2 + \frac{\lambda_3^2}{x_3^2} u_3^2) - \eta_{11} - u_1 \eta_{1u} - \\ & - u_1^2 \eta_{uu} - u_{11} \eta_{\mu} + u_i (\xi_{11}^i + u_1 \xi_{1u}^i) + u_1 u_i (\xi_{1u}^i + u_1 \xi_{uu}^i) + 2u_{1i} (\xi_u^i + u_1 \xi_u^i) + \\ & + u_{11} u_i \xi_u^i - \eta_{22} - u_2 \eta_{2u} - u_2^2 \eta_{uu} - u_{22} \eta_{\mu} + u_i (\xi_{22}^i + u_2 \xi_{2u}^i) + \\ & + u_2 u_i (\xi_{2u}^i + u_2 \xi_{uu}^i) + u_{2i} (\xi_u^i + u_2 \xi_u^i) + u_{22} u_i \xi_u^i - \eta_{33} - u_3 \eta_{3u} - \\ & - u_3^2 \eta_{uu} - u_{33} \eta_{\mu} + u_i (\xi_{33}^i + u_3 \xi_{3u}^i) + u_3 u_i (\xi_{3u}^i + u_3 \xi_{uu}^i) + \\ & + u_{3i} (\xi_u^i + u_3 \xi_u^i) + u_{i3} (\xi_u^i + u_3 \xi_u^i) + u_{33} u_i \xi_u^i = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_0^2 u_0^2 \left(-\frac{2}{x_0^3}\right) \xi^0 + \frac{\lambda_0^2}{x_0^2} 2u_0(\eta_0 + u_0 \eta_u - u_i(\xi_0^i + u_0 \xi_u^i)) + \\ &\quad + \lambda_1^2 u_1^2 \left(-\frac{2}{x_1^3}\right) \xi^1 + \frac{\lambda_1^2}{x_1^2} 2u_1(\eta_1 + u_1 \eta_u - u_i(\xi_1^i + u_1 \xi_u^i)) + \\ &\quad + \lambda_2^2 u_2^2 \left(-\frac{2}{x_2^3}\right) \xi^2 + \frac{\lambda_2^2}{x_2^2} 2u_2(\eta_2 + u_2 \eta_u - u_i(\xi_2^i + u_2 \xi_u^i)) + \\ &\quad + \lambda_3^2 u_3^2 \left(-\frac{2}{x_3^3}\right) \xi^3 + \frac{\lambda_3^2}{x_3^2} 2u_3(\eta_3 + u_3 \eta_u - u_i(\xi_3^i + u_3 \xi_u^i)). \end{aligned} \tag{15.14}$$

Приравнявая коэффициенты при производных $u_{\mu\nu}$, получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \xi_a^0 - \xi_0^a &= 0, & a, b = \overline{1, 3}, \\ \xi_b^a + \xi_a^b &= 0, & a \neq b, \\ \xi_0^0 &= \xi_1^1 = \xi_2^2 = \xi_3^3. \end{aligned} \tag{15.15}$$

Решением (15.15) являются функции $\xi^\mu(x)$

$$\xi^\mu(x) = 2(Cx)x_\mu - x^2 c_\mu + a_{\mu\nu} x^\nu + b_\mu. \tag{15.16}$$

Далее, приравнявая коэффициенты при $u_0 u_1$, получаем, что

$$\xi_{10}^1 = \xi_1^0 = 0, \text{ а при } u_a u_b \text{ получаем } \xi_b^a = \xi_a^b = 0, \text{ } a \neq b$$

Отсюда следует, что $c_\mu = 0$, $a_{01} = a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, а следовательно

$$\xi^\mu(x) = a x_\mu + b_\mu, \tag{15.17}$$

где $a = a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{33}$.

Кроме того имеем:

$$u_0^2 : \eta_{\mu\mu} + \frac{\lambda_0^2}{x_0^2} \eta_\mu - 2\xi_0^0 \frac{\lambda_0^2}{x_0^2} = -\frac{2\lambda_0^2}{x_0^3} \xi^0 + \frac{2\lambda_0^2}{x_0^2} \eta_\mu - \frac{2\lambda_0^2}{x_0^2} \xi_0^0,$$

$$u_a^2 : \eta_{\mu\mu} + \frac{\lambda_a^2}{x_a^2} \eta_\mu - 2\xi_0^0 \frac{\lambda_a^2}{x_a^2} = -\frac{2\lambda_a^2}{x_a^3} \xi^a + \frac{2\lambda_a^2}{x_a^2} \eta_\mu - \frac{2\lambda_a^2}{x_a^2} \xi_a^a,$$

$$u_0 : 2\eta_{0\mu} - \xi_{00}^0 + \xi_{11}^0 + \xi_{22}^0 + \xi_{33}^0 = \frac{2\lambda_0}{x_0^2} \eta_0,$$

$$u_a : -2\eta_{a\mu} - \xi_{00}^1 + \xi_{11}^1 + \xi_{22}^1 + \xi_{33}^1 = \frac{2\lambda_a}{x_a^2} \eta_a.$$

Учитывая (15.17), получаем

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\mu} - \frac{\lambda_0^2}{x_0^2} \eta_\mu &= -\frac{2\lambda_0^2}{x_0^3} \xi^0, \\ -\eta_{\mu\mu} - \frac{\lambda_a^2}{x_a^2} \eta_\mu &= -\frac{2\lambda_a^2}{x_a^3} \xi^a, \end{aligned} \quad (15.18)$$

$$\begin{aligned} \eta_{0\mu} &= \frac{\lambda_0^2}{x_0^2} \eta_0, \\ -\eta_{a\mu} &= \frac{\lambda_a^2}{x_a^2} \eta_a. \end{aligned}$$

Далее, из (15.18) следует

$$\eta_\mu \left(\frac{\lambda_0^2}{x_0^2} + \frac{\lambda_a^2}{x_a^2} \right) = 2 \left(\frac{\lambda_0^2}{x_0^3} \xi^0 + \frac{\lambda_a^2}{x_a^3} \xi^a \right) \quad (15.19)$$

$$\eta_\mu = 2 + \frac{2}{\frac{\lambda_0^2}{x_0^2} + \frac{\lambda_a^2}{x_a^2}} \left(\frac{\lambda_0^2}{x_0^3} b_0 + \frac{\lambda_a^2}{x_a^3} b_a \right).$$

Из (15.19) следует, что $b_\mu = 0$ и $\eta_\mu = 2a$. Поэтому

$$\eta = 2ua + f(x). \quad (15.20)$$

Подставляя (15.20) в (15.18) получаем, что $f(x) = c = \text{const}$.

Таким образом мы получили, что

$$\xi^{\mu} = \alpha x_{\mu}, \quad \eta = 2\alpha u + c.$$

Теорема доказана.

Инфинитезимальный оператор запишем в виде

$$X = x_{\mu} \partial x_{\mu} + 2u \partial u + \lambda \partial u, \quad (15.21)$$

где λ — некоторая константа. Общий вид инвариантного многообразия оператора X имеет вид

$$\Phi \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_0}{x_2}, \frac{x_0}{x_3}, \frac{2u + \lambda}{x_3^2} \right) = 0, \quad (15.22)$$

Следовательно, инвариантные решения ищутся в виде

$$u = \frac{x_3^2}{2} \varphi \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{x_0}{x_2}, \frac{x_0}{x_3} \right) - \frac{\lambda}{2}. \quad (15.23)$$

Теперь покажем, что лоренц-неинвариантное уравнение (15.5), (15.9) с помощью лоренц-инвариантного анзатца

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = x_{\mu} x^{\mu} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (15.24)$$

редуцируется в обыкновенному дифференциальному уравнению. Очевидно, что (15.24) невозможно получить из (15.23), т.е. анзатц (15.24) невозможно получить используя симметрию исходного уравнения. Подставив (15.24) в (15.5), (15.9), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$4\omega \frac{d^2 \varphi}{d\omega^2} + 2 \frac{d\varphi}{d\omega} = \lambda^2 \left(\frac{d\varphi}{d\omega} \right)^2, \quad (15.25)$$

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2.$$

Решая уравнение (15.25), имеем

$$\varphi(\omega) = -2(-\lambda^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \left\{ \omega (-\lambda^2)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad \text{для } -\lambda^2 > 0, \quad (15.26)$$

$$\varphi(\omega) = -(\lambda^2) \ln \frac{(\lambda^2)^{\frac{1}{2}} + \omega}{(\lambda^2)^{\frac{1}{2}} - \omega} \quad \text{для } \lambda^2 > 0 \quad (15.27)$$

Итак, лоренц-инвариантное (в смысле определения (15.8)) уравнение (15.5), (15.9) редуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению. Формулы (15.26), (15.27) задают лоренц-инвариантное семейство решений уравнения (15.5), (15.9). Последнее означает, что на множествах (15.26), (15.27) выполняются условия

$$J_{\mu\nu} u(x) = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (15.28)$$

$$J_{0a} = x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + x_a \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a, b = 1, 2, 3. \quad (15.29)$$

Операторы (15.28), (15.29) порождают преобразования Лоренца. Условия (15.28) — это конкретная реализация первого уравнения из набора уравнений (15.7). В этом случае индекс A пробегает значения от 1 до 6.

Итак, уравнения (15.28) выделяют лоренц-инвариантное подмножество из множества всех решений уравнения (15.5), (15.9). Другими словами, уравнение (15.5), (15.9) в смысле определения (15.6) лоренц-инвариантно.

2. Теперь рассмотрим уравнение другого типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \lambda \Delta u (\nabla u)^2, \quad \lambda = \frac{1}{3m^2}, \quad (15.30)$$

которое, как легко убедиться, инвариантно (в смысле определения (I5.8)) относительно преобразований Галилея, порожденных генератором

$$G_a = t \frac{\partial}{\partial x_a} + m x_a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (I5.31)$$

Для уравнения (I5.30) обобщенное условие инвариантности (I5.6)

$$\{Q_A u\} = 0 \quad \text{имеет вид}$$

$$G_a u = t \frac{\partial u}{\partial x_a} - m x_a u = 0, \quad (I5.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{G_a u\} = 0. \quad (I5.33)$$

Итак, уравнения (I5.30), в смысле определения (I5.6), инвариантно относительно преобразований, порождаемых оператором (I5.31). Это означает, что подмножество решений уравнения (I5.30) выделяемое с помощью дополнительных условий (I5.32), (I5.33), инвариантно относительно преобразований Галилея, хотя само уравнение не инвариантно относительно этих преобразований. Галилеевски-инвариантный анзац (I5.2) для уравнения (I5.30) имеет вид

$$u = \varphi(t) + \frac{m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2t}, \quad \omega = t, \quad f = 1. \quad (I5.34)$$

Подставив (I5.34) в (I5.30), получаем

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow u = \frac{m(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2t} + Bt + C, \quad (I5.35)$$

B, C — произвольные постоянные.

3. Все сказанное выше применимо и к системам нелинейных уравнений в частных производных. В качестве примера рассмотрим нелинейную систему типа Дирака

$$\gamma_\mu \partial^\mu \Psi + g \left\{ 2 \bar{\Psi} (\gamma_\mu \partial^\mu) \Psi - \frac{x^2}{c x} \bar{\Psi} (c_\mu \partial^\mu) \Psi \right\} M(x) (\bar{\Psi} \Psi)^{\frac{1}{3}} \Psi = 0, \quad (15.36)$$

$$M(x) = 2 (c_\alpha x^\alpha)^{-1} \bar{\Psi} S_{\mu\nu} c^\mu x^\nu \Psi + \bar{\Psi} \Psi,$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu), \quad \mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3,$$

$\gamma_\mu, \beta_\mu, c_\alpha$ — произвольные параметры.

Уравнение (15.36) инвариантно относительно конформных преобразований. Тем не менее, с помощью анзаца [82]

$$\Psi(x) = \frac{\gamma x}{(x^2)^2} \varphi(\omega), \quad (15.37)$$

$$\omega = \frac{\beta x}{x^2}, \quad \beta \neq 0,$$

где $\varphi(\omega)$ — четырехкомпонентный спинор, зависящий только от одной переменной ω , уравнение (15.35) редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$i (\gamma_\mu \beta^\mu) \frac{d\varphi}{d\omega} + g (\bar{\varphi} \varphi)^{\frac{1}{3}} \varphi = 0. \quad (15.38)$$

Общим решением которого является

$$\varphi = \exp \left\{ i \frac{(\gamma \beta)}{\beta^2} g (\bar{x} x)^{\frac{1}{3}} \omega \right\} \chi,$$

ψ — постоянный спинор (n — компонентный).

Уравнение (15.35) на множестве

$$c_{\mu} k^{\mu} \psi = 0,$$

$$K_{\mu} = 2(c x)(x \partial) - x^2 (c \partial) + 2(c x) + (\sigma c)(\sigma x)$$

— генератор конформных преобразований, инвариантно относительно преобразований генерируемых оператором $c_{\mu} k^{\mu}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А р н о л ь д В.И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979. — 431 с.
2. Б а р у т А., Р о н ч к а Р. Теория представлений групп и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 456 с.
3. Б о г о л ь б о в Н.Н., Ш и р к о в Д.В. Квантовые поля. — М.: Наука, 1980. — 320 с.
4. В л а д и м и р о в В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981. — 512 с.
5. В л а д и м и р о в В.С., В о л о в и ч И.В. Законы сохранения для нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. — 1984. — 279, № 4. — С. 843-847.
6. В л а д и м и р о в В.С., В о л о в и ч И.В. Суперанализ. I. Дифференциальные исчисления // Теоретическая и математическая физика. — 1984. — 59, № 1. — С. 3-27.
7. В л а д и м и р о в В.С., В о л ь в и ч И.В. Локальные и нелокальные токи для интегрируемых систем // Докл. АН СССР. — 1985. — 280, № 2. — С. 328-333.
8. В и г н е р Е. Этюды о симметрии. — М.: Мир, 1971. — 318 с.
9. В и н о г р а д о в А.М., К р а с и л ь щ и к о в Н.С., Л ы п о л и н В.В. Применение нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: МИИГА, 1977. — 125 с.
10. В о л ь т е р р а В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, — М.: Наука, 1982. — 304 с.
11. Г у р е в и ч А.В., Ш в а р ц б у р г А.Б. Точные решения уравнений нелинейной геометрической оптики // Журн. электро-технич. физики. — 1970. — 59, вып. 6. — С. 2012-2022.

12. Д у б р о в и н Б.А., Н о в и к о в С.П., Ф о м е н -
к о А.Т. Современная геометрия. - М.: Наука, 1979. - 760 с.
13. Д ъ о д о н н е Ж. Основы современного анализа. - М.: Мир,
1964. - 430 с.
14. Д и р а к П. Принципы квантовой механики. - М.: Наука,
1979. - 480 с.
15. Ж е л н о р о в и ч В.А. Тензорное представление спиноров
и спинорных уравнений. - М.: Изд-во МГУ, 1979. - 154 с.
16. И б р а г и м о в Н.Х. Групповые свойства волновых урав-
нений для частиц с нулевой массой // Докл. АН СССР. - 1968. -
172, № 3. - С. 566-568.
17. И б р а г и м о в Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах ма-
тематической физики. - Новосибирск: Изд-во НГУ, 1972. - 200 с.
18. И б р а г и м о в Н.Х. Группы преобразований в математи-
ческой физике. - М.: Наука, 1983. - 280 с.
19. И б р а г и м о в Н.Х. Группы Ли-Бэклунда и законы сохра-
нения // Докл. АН СССР. - 1976. - 230, № 1. - С. 26-29.
20. К а д ы ш е в с к и й В.Г. Новый подход к теории электро-
магнитных взаимодействий // Физика элементарных частиц и
атомного ядра. - 1982, - II, вып. I. - С. 5-39.
21. К а р т а н Э. Внешние дифференциальные системы и их гео-
метрические приложения. - М.: Изд-во МГУ, 1962. - 238 с.
22. К а р т а н Э. Интегральные инварианты. - М.; Л.: ГИИТЛ,
1940. - 216 с.
23. К о л е с н и к о в П.М. Введение в нелинейную электро-
динамику. - Минск: Наука и техника, 1971. - 382 с.
24. К у р а н т Р. Уравнения с частными производными. - М.:
Мир, 1964. - 830 с.

56. Ф у щ и ч В.И., Н и к и т и н А.Г. Пуанкаре-инвариантные уравнения движения частиц произвольного спина // 1978. - 9, № 3. - С. 501-553.
57. Ф у щ и ч В.И., Н и к и т и н А.Г. О группе инвариантности квазирелятивистского уравнения движения // Докл. АН СССР. - 1978. - 238, № 1. - С. 46-49.
58. Ф у щ и ч В.И., Н и к и т и н А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. - Киев: Наук. думка, 1983. - 200 с.
59. Ф у щ и ч В.И., С е л е х м а н Н.А. Интегро-дифференциальные уравнения, инвариантные относительно групп Галилея, Пуанкаре, Шредингера и конформной группы // Докл. АН УССР. - 1983. - Сер. А, № 5. - С. 21-24.
60. Ф у щ и ч В.И., Ш т е л е н ь В.М. О линейных и нелинейных системах дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы Шредингера // Теоретическая и математическая физика, - 1983. - 56, № 3. - С. 387-394.
61. Ф у щ и ч В.И., Ц и ф р а И.М. О симметрии нелинейных уравнений электродинамики // Теоретическая и математическая физика. - 1985. - 64, № 1. - С. 41-50.
62. Ф у щ и ч В.И., Ц и ф р а И.М. Конформно-инвариантные нелинейные уравнения для электромагнитного поля // - Теоретико-групповые методы в физике. - М.: Наука, 1986. - С. 501-505.
63. Ц и ф р а И.М. Групповые свойства уравнений Дирака с электромагнитным взаимодействием // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. III-III4.
64. Ц и ф р а И.М. О системах дифференциальных уравнений, ин-

47. Туров Е.А. Материальные уравнения электродинамики. - М.: Наука, 1983. - 159 с.
48. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1973. - 622 с.
49. Фомин В.М. Точные решения некоторых задач нелинейной электродинамики // Журн. теоретической физики, -1969. - Вып.4, С. 553.
50. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Докл. АН СССР. - 1979. - 246, № 4. - С. 846-850.
51. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. - С. 6-28.
52. Фущич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. 4-23.
53. Фущич В.И., Наконечный В.В. Теоретико-алгебраический анализ уравнений Лапласа // Укр.мат.журн. - 1980. - 32, № 2. - С. 267-272.
54. Фущич В.И., Серов Н.И. О точных решениях уравнения Борна-Инфельда // Докл. АН СССР. - 1982. - 263. - С. 582-586.
55. Фущич В.И., Серов Н.И. Симметрия и точные решения многомерного уравнения Монжа-Ампера // Докл. АН СССР. - 1983. - 273, № 3. - С. 543.

36. Овсянников Л.В. Частичная инвариантность // Докл. АН СССР. - 1969. - 186, № I. - С. 22-25.
37. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400 с.
38. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. - М.: Гостехиздат, 1954.
39. Селекман Н.А. Теоретико-групповые свойства некоторых интегро-дифференциальных уравнений: Автореф. дис. ... кандидата физ.-мат. наук. - Киев, 1984. - 13 с.
40. Серов Н.И. Конформная инвариантность нелинейных волновых уравнений // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. - С. 59-63.
41. Сидоров А.Ф., Шалеев В.П., Яценко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. - М.: Наука, 1984. - 272 с.
42. Сибирский К.С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. - Кишинев: Штиница, 1976.
43. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Гостехиздат, 1953.
44. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. - М.: Наука, 1974.
45. Тихонов А.И., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972.
46. Тонелла М.-А. Основы электромагнетизма и теории относительности. - М.: Иностр. лит-ра, 1962.

25. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. - М.: Наука, 1982. - 620 с.
26. Лоренц Г.А. Электромагнитные явления в системе, движущейся с любой скоростью, меньшей скорости света // Принципы относительности. - М.: ОНТИ, 1935. - С. 67-87.
27. Малкин Н.А., Манько В.И. Дополнительные симметрии и когерентные состояния квантовых систем. - М.: Наука, 1979. - 230 с.
28. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике теории относительности и квантовой механике. - М.: Наука, 1972. - 437 с.
29. Мессиа А. Квантовая механика. - М.: Наука, 1978. Т. I. - 480 с.
30. Ми Г. Курс электричества и магнетизма. - Одесса, 1912. - 208 с.
31. Миллер М.А., Сорокин Ю.М., Степанов Н.С. Ковариантность уравнений Максвелла и сопоставление электродинамических систем // Успехи физ. наук. - 1977. - 121, вып. 3. - С. 525-537.
32. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. - М.: Мир, 1981. - 344 с.
33. Митропольский Ю.А., Лопатин А.К. Векторные поля, алгебры и группы порождаемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений и их свойства. - Киев, 1985. - 61 с. - (Препринт/ АН УССР: Ин-т математики; 85.73).
34. Нелинейная квантовая теория поля // Под ред. Д.Д. Иваненко. - М.: Иностран. лит-ра, 1959. - 464 с.
35. Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Изд-во НГУ, 1966. - 131 с.

вариантных относительно конформной группы и группы Шредингера // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. II4-II8.

65. Ц и ф р а И.М. Симметричные свойства и некоторые точные решения нелинейных уравнений для электромагнитного и спинорного полей // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 89-96.
66. Ц и ф р а И.М. О симметрии и точных решениях одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения для спинорного поля // Исследования по прикладным и теоретическим вопросам математики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.
67. Э й з е н х а р т Л. Непрерывные группы преобразований. - М.: Иностран. лит-ра, 1947.
68. Э й н ш т е й н А. К электродинамике движущихся тел // Сб. науч. тр. - М.: Наука, 1965, I. - С. 7-35.
69. Actor A. Classical solutions and the energy-momentum tensor// Annal. Phys., 1981, 131, N2- P.269-282.
70. Actor A. Classical solutions of Yang-Mills theories// Rev. Mod. Phys. - 1979. - 51 - P.461-525.
71. Ames W.F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering// New York: Academy press, - 1972 - 304P.
72. Bateman H. The Transformations of The Electrodynamical Equations/ Proc. London Math. Soc. - 1909 - P.223-264.
73. Barut A.O. Introduction to de Sitter and Conformal Groups// Lectures in Theoretical Physics. - 1971 - v.13.

74. Baryen F., Flato M. Remarks on conformal space // J. Math. Phys. - 1976 - 13 - P. 1112 - 1114.
75. Born M., Infeld L. Foundations of the new field theory // Proc. Roy. Soc. - 1934 - A 144 - P. 4225 - 4251.
76. Bracken A.J. A comment on the conformal invariance of the zero-mass Klein-Gordon equation // Lett. Nuovo Cim. - 1971 - 12 - P. 574 - 576.
77. Bracken A.J., Jessup B. Local conformal-invariance of the wave equation for finite-component fields // J. Math. Phys. - 1982 - 23 - P. 1925 - 1946.
78. Budini P. Conformal invariance of massless fields // Czech. J. Phys. - 1979 - B29 - P. 6 - 21.
79. Estabrook F.B., Harisson B.K. Geometric approach to invariance groups // J. Math. Phys. - 1982 - P. 1925 - 1946.
80. Ferrara S., Gatto R., Grillo A.F. Conformal algebra in space-time and operator product expansion // Springer tracts in Modern Physics - 1973 - v. 67.
81. Fushchik W.I., Shtelen W.M. The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation // Lett. Nuovo Cim., - 1982 - P. 498 - 502.
82. Fushchik W.I., Shtelen W.M. On some exact solutions of the nonlinear Dirac equation // J. Phys. - 1983 - 16A - P. 271 - 277.

83. Fushchich W.I., Shtelen W.M. on some exact solutions of the nonlinear equations of quantum electrodynamics // Phys. Lett. - 1983 - V. 12B - p. 215-217.
84. Fushchich W.I., Shtelen W.M. Conformal Symmetry and New Exact Solutions of $SU(2)$ Yang-Mills Theory // Lett. al Nuovo Cimento. - 1983 - 38 - P. 37-40.
85. Fushchich W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, D'Alembert and eikonal equations // J. math. Phys. A.: Math. Gen. - 1983 - 16 - P. 271-277.
86. Fushchich W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z. On the new conformally invariant equations for spinor fields and their exact solutions. // Phys. Lett. - 1985 - 159B - P. 189-191.
87. Levi - Leblond J.-M. Nonrelativistic particles and wave equations // Comm. Math. Phys. - 1967 - 6 - P. 286-311.
88. Nieder U. The maximal kinematical invariance group of Schrodinger equation // Helv. Phys. Acta - 1972 - 45 - P. 802-814.