

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Т.Г.ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

Славуцкий Сергей Леонидович

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА, ИНВАРИАНТНЫЕ
ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУПП ГАЛИЛЕЯ И ПУАНКАРЕ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения
и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор В.И.ФУЩИЧ



Киев - 1987

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА I. О некоторых системах нелинейных уравнений динамики сплошной среды, инвариантных относительно группы Галилея	12
§1. Нелинейное обобщение уравнения Ламе, инвариантное относительно алгебры Галилея	12
§2. Редукция и точные решения нелинейного обобщения уравнения Ламе	20
2.1. Построение анзацев	22
2.2. Редукция и точные решения нелинейного уравнения Ламе	25
§3. Уравнения движения идеальной жидкости	33
§4. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости	45
§5. Об одном нелинейном представлении алгебры Галилея $G(1,3)$ и Пуанкаре $P(1,3)$	53
ГЛАВА II. Симметрия и точные решения уравнений релятивистской гидродинамики	60
§1. Полная система уравнений релятивистской гидродинамики	60
§2. Релятивистский аналог уравнения Эйлера	69
§3. Редукция и точные решения уравнений релятивистской гидродинамики	78
§4. Потенциальное течение релятивистской жидкости	87
§5. Ультрарелятивистская потенциальная жидкость	94
§6. Уравнения движения сверхтекучей релятивистской жидкости	98
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	106
ЛИТЕРАТУРА	108

ВВЕДЕНИЕ

Уравнения в частных производных, особенно нелинейные уравнения, представляют собой наиболее распространенное и действенное средство описания сложных физических процессов. Поэтому методы построения решений системы дифференциальных уравнений играют большую роль в математической физике. Наиболее полную информацию о решениях содержит единое аналитическое представление всех решений системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) или обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), т.е. общий интеграл. Однако нахождение общего интеграла возможно только в некоторых частных случаях (метод огибающих, метод Фурье и т.п.). Для систем нелинейных ДУЧП трудности построения общего решения особенно велики в силу невыполнения для них линейного принципа суперпозиции решений. Поэтому основное внимание в настоящее время сосредоточено на аналитических методах построения регулярных локальных частных решений, из которых в некоторых случаях можно построить более общие решения. Одной из важных задач при этом является получение возможно более широких классов частных решений, содержащих произвольные параметры или функции. Иногда такой произвол оказывается достаточным для формулировки краевых задач.

Одним из эффективных методов, позволяющих добиться успеха в этом направлении, является теоретико-алгебраический анализ дифференциальных уравнений. Дело в том, что уравнения математической физики должны описывать реальные физические процессы, для которых имеют место законы сохранения энергии, импульса, момента импульса и должны выполняться либо принцип относитель-

ности Галилея, либо принцип относительности Пуанкаре-Эйнштейна. Это означает, что такие уравнения обладают широкой симметрией [5] .

Основы теории симметрии дифференциальных уравнений заложил выдающийся норвежский математик Софус Ли [59] . Им же и его учениками было положено начало использованию симметричных свойств ДУЧП для построения точных решений.

Теория С.Ли нашла свое дальнейшее развитие и многочисленные приложения в трудах Э.Нётер, А.Пуанкаре, Э.Картана, Г.Бейтмена, Г.Кирхгофа, А.Бэклунда [14, 2, 55] и других.

Важнейшие идеи по отысканию инвариантных решений ДУЧП были высказаны Л.И.Седовым [28] , Г.Биркгофом [3] , А.Морганом [61] , В.И.Смирновым, Л.С.Соболевым.

Современному изложению теории С.Ли, теории инвариантных и частично-инвариантных решений посвящена монография Л.В.Овсянникова [20] .

Обобщение классической теории С.Ли в виде теории нелокальной симметрии Ли-Бэклунда нашло свое законное выражение в работах Н.Х.Ибрагимова [12] . Теория нелокальной (нелинейной) симметрии систем ДУЧП развита в работах В.И.Фудича [34, 35] .

Аналитическое описание решений целого ряда двумерных нелинейных ДУЧП стало возможным в результате разработанного метода обратной задачи теории рассеяния [32] . При этом также существенно используется симметрия (как правило, нелокальная) этих уравнений.

Новый алгебраический метод интегрирования широкого класса нелинейных двумерных и одномерных динамических систем, обладающих нетривиальной группой внутренних симметрий, предложен в работах А.Н.Лознова и М.В.Савельева [19] .

Методы группового анализа в приложении к уравнениям динамики сплошной среды продолжают широко использоваться и в настоящее время. Этим вопросам посвящены работы В.С.Владимирова [6], Л.В.Овсянникова [22], В.В.Духначева [25], С.И.Сенатова [29], Ю.А.Чиркунова [51] и других.

Настоящая диссертация посвящена исследованию теоретико-алгебраических свойств и построению точных решений нелинейных многомерных систем ДУЧГ гидродинамического типа.

Прежде чем перейти к подробному изложению полученных результатов, сформулируем основные определения и теоремы метода С.Ли.

Пусть $\mathbb{R}^{n+m}$ - $(n+m)$ -мерное евклидово пространство векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$, рассмотрим отображение

$$(g, f): \mathbb{R}^{n+m} \times B \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$$

где $B \subset \mathbb{R}^r$ - открытый шар с центром в точке $0 \in \mathbb{R}^r$.

Определим преобразования T_a пространства $\mathbb{R}^{n+m}$ в себя равенством

$$\begin{aligned} x' &= T_a x = f(x, u, a), \\ u' &= T_a u = g(x, u, a), \quad a \in B, u \in u(x) (0.1) \end{aligned}$$

При достаточно малых a такие преобразования образуют локальную r -параметрическую группу Ли G_r .

Определение 0.1. Группа Ли преобразований (0.1) называется группой инвариантности дифференциального уравнения

$$F(x, u, D_1 u, \dots, D_s u) = 0, \quad (0.2)$$

где - оператор полного дифференцирования s -го порядка, если множество решений уравнения (0.2) является инвариантным многообразием группы.

Применение группы Ли основывается на возможности описания локальной группы Ли в терминах ее алгебры Ли, представляющей собой более простой алгебраический объект.

Определение 0.2. Алгеброй Ли L_r группы (0.1) размерности r называется векторное пространство инфинитезимальных операторов группы

$$X_j = \xi_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta_j^k \frac{\partial}{\partial u_k}, \quad j = \overline{1, r}, \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, m} \quad (0.3)$$

где

$$\xi_j^i = \left. \frac{\partial f_i}{\partial a_j} \right|_{a=0}, \quad \eta_j^k = \left. \frac{\partial g_k}{\partial a_j} \right|_{a=0},$$

снабженные операцией коммутирования:

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i.$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование в соответствующих пределах.

Между группой Ли и ее алгеброй Ли существует связь. Именно, согласно первой теореме Ли [59], чтобы восстановить группу Ли по ее алгебре Ли, необходимо решить следующую задачу

Коши:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_j} = \xi_j^i(f, g), \quad \frac{\partial g_k}{\partial a_j} = \eta_j^k(f, g) \quad (0.4)$$

$$f_i|_{a=0} = x_i, \quad g_k|_{a=0} = u_k$$

Решение задачи (0.4) называют интегрированием представления алгебры.

Определение 0.3. Представлением алгебры Ли L называется гомоморфизм этой алгебры в множество операторов T , определенных в некотором нелинейном пространстве. Если операторы T линейны, то представление называется линейным. Другими словами,

если $x, y \in L$, то
 $ax + by \mapsto aT(x) + bT(y),$
 $[x, y] \mapsto [T(x), T(y)], a, b - \text{const.}$

Сформулируем кратко алгоритм Ли нахождения максимальной симметрии ДУЧП.

Теорема 0.1. Операторы (0.3) принадлежат максимальной алгебре инвариантности (МАИ) уравнения (0.2), если и только если

$$X_S F|_{F=0} = 0, \quad (0.5)$$

где X_S - продолжение оператора X . Координаты продолженного оператора для $S = 1, 2$ вычисляются по формулам Ли [20]

$$\begin{aligned} S=1: X_1 &= X + \eta_j^i \frac{\partial}{\partial u_j^i}, \quad \eta_j^i = D_j \eta^i - u_k^i D_j \xi^k; \\ S=2: X_2 &= X + \eta_{jk}^i \frac{\partial}{\partial u_{jk}^i}, \quad \eta_{jk}^i = D_k \eta_j^i - u_{jl}^i D_k \xi^l; \\ u_j^i &= \frac{\partial u^i}{\partial x_j}, \quad u_{jk}^i = \frac{\partial^2 u^i}{\partial x_j \partial x_k}, \quad i = \overline{1, m}, j, k, l = \overline{1, n} \end{aligned}$$

Определение 0.4. Уравнение (система уравнений) (0.5) называется определяющим для группы инвариантности уравнения (0.2). Множество решений определяющего уравнения образует векторное пространство, элементами которого являются координаты минимального оператора группы (0.3), допускаемой уравнением (0.2).

Определение 0.5. Отображение $F: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^k$ есть абсолютный инвариант группы (0.1), если для любых $(x, u, a) \in \mathbb{R}^{n+m} \otimes B$ справедливо равенство

$$F_S(f_i(x, u, a), g_j(x, u, a)) = F_S(x, u) \quad (0.6)$$

$$i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, s = \overline{1, k}$$

Теорема 0.2. $F(x, u)$ является инвариантом группы (0.1), если и только если для любых $(x, u) \in \mathbb{R}^{n+m}$ выполнено равенство

$$X_j F(x, u) = 0 \quad (0.7)$$

где X_j - операторы (0.3).

Теорема 0.3. Если дифференциальное уравнение (0.2) допускает преобразование (0.1), то любое его решение $u(x)$ преобразуется с помощью (0.1) в решение $u'(x')$ того же уравнения. Этот факт можно использовать для генерирования новых решений. Этот факт можно использовать для генерирования новых решений из каких-либо известных (групповое размножение решений). С помощью группового размножения из частного решения ДУЧП можно получить многопараметрическое семейство решений.

Пусть $u(x) = \Phi(x)$ - некоторое решение (0.2) с группой (0.1). Тогда формула

$$g(x, u, a) = \Phi[f(x, u, a)] \quad (0.8)$$

определяет в неявном виде новое решение (0.2) $u(x)$.

Если группа порождает линейное преобразование в пространстве зависимых переменных, т.е. вместо (0.1) имеем

$$\begin{aligned} x' &= f(x, u, a) \\ u' &= A(x, a)u \end{aligned} \quad (0.9)$$

где A - матрица размерности $(m \times m)$, то формула (0.8) примет вид

$$u = A^{-1} \Phi[f(x, u, a)], \quad (0.10)$$

где A^{-1} - обратная A матрица.

Формулы (0.8), (0.10) будем называть формулами размножения решений.

В дальнейшем будем рассматривать группы вида (0.10).

Определение 0.6. Решение уравнения (0.2) $u = \Phi(x)$ называется инвариантным H - решением (или просто инвариантным решением), где H - подгруппа группы (0.10), если справедливо равенство

$$\Lambda^{-1} \Phi(f(x, b)) = \Phi(x),$$

где $b \in B^{r-s}$ - набор параметров, определяющих $(r-s)$ - параметрическую подгруппу H r - параметрической группы (0.10).

Теорема 0.4. Решение $u = \Phi(x)$ является H - инвариантным в том и только в том случае, когда

$$\Phi(x) = A(x) \varphi(\omega), \quad (0.11)$$

где $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{n-r+s}\}$ - инварианты группы H , а $(m \times m)$ матрица $A(x)$ удовлетворяет системе ДУЧП

$$XA(x) = 0 \quad (0.12)$$

где X - инфинитезимальный оператор группы H , $\varphi(\omega)$ - произвольные функции, $\varphi: \mathbb{R}^{n-r+s} \rightarrow \mathbb{R}^m$

Решения (0.11) обладают очень важным свойством: с их помощью исходное уравнение может быть редуцировано к уравнению с меньшим числом независимых переменных [21].

Определение 0.7. Инвариантное решение вида (0.11) будем называть анзацем.

Анзацы используются в настоящей работе как основа построения частных решений систем нелинейных ДУЧП. Анзацы (0.11) предложены в работе [36].

Определение 0.8. Процедуру понижения размерности ДУЧП с помощью анзаца будем называть редукцией, а получаемое в результате процедуры уравнение - редуцированным уравнением.

Определение 0.9. Семейство решений уравнения (0.2), допускающего группу G , вида

$$u(x) = \Phi(x, \lambda), \quad \lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\},$$

называется G - неразмножаемым (или просто неразмножимым), если справедливо равенство

$$\Lambda'(x, a) \Phi(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda'(\lambda, a)) \quad (0.13)$$

В дальнейшем будем предполагать, что греческие индексы изменяются в пределах от 0 до 3, а латинские - от I до 3, если это не оговорено особо.

Метрический тензор в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ определен как $g_{ab}(x) = \delta_{ab}$, $x \in \mathbb{R}^3$, δ_{ab} - символ Кронекера, а в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$ - формулой

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} -1, & \mu, \nu = 0 \\ 1, & \mu, \nu = 1, 2, 3 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (0.14)$$

Скалярные произведения в пространствах $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^{1,3}$ определим соответственно как $\vec{a} \cdot \vec{b} = \delta^{mn} a_m b_n$ и $a \cdot b = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu$

Сформулируем еще несколько важных определений.

Определение 0.10. Операторы $\{P_\mu, J_{\mu\nu}\}$ реализуют представление алгебры Ли $AP(1,3)$ группы Пуанкаре $P(1,3)$, если выполнены коммутационные соотношения

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[P_\mu, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha} P_\beta - g_{\mu\beta} P_\alpha \quad (0.15)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\beta} J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha} J_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha} J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta} J_{\mu\alpha}$$

Определение 0.11. Операторы $\{P_\mu, J_a, G_a\}$ реализуют представление алгебры Ли $AG(1,3)$ группы Галилея $G(1,3)$, если выполнены коммутационные соотношения

$$[P_\mu, P_\nu] = [P_0, J_a] = [P_a, G_b] = [G_a, G_b] = 0$$

$$[J_a, J_b] = \varepsilon_{abc} J_c, [J_a, P_b] = \varepsilon_{abc} P_c, \quad (0.16)$$

$$[J_a, G_b] = \varepsilon_{abc} G_c, [P_0, G_a] = P_a,$$

где ε_{abc} - символ Леви-Чивита.

Определение 0.12. Операторы $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, D\}$ образуют представление алгебры Ли $AP(I, 3)$ расширенной группы Пуанкаре $\widetilde{P}(I, 3)$, если наряду с (0.15) выполняются коммутационные соотношения

$$[D, P_\mu] = -P_\mu, [J_{\mu\nu}, D] = 0 \quad (0.17)$$

Определение 0.13. Операторы $\{P_\mu, J_a, G_a, D\}$ образуют представление алгебры Ли $\widetilde{AG}(I, 3)$ расширенной группы Галилея $\widetilde{G}(I, 3)$, если наряду с (0.16) выполняются коммутационные соотношения

$$[P_0, D] = 2P_0, [P_a, D] = P_a, [G_a, D] = -G_a \\ [J_a, D] = 0 \quad (0.18)$$

Определение 0.14. Операторы $\{P_\mu, J_a, G_a, D, A\}$ образуют представление алгебры Ли $AG_0(I, 3)$ обобщенной группы Галилея $G_0(I, 3)$, если вместе с (0.16), (0.18) выполняются соотношения

$$[A, D] = -2A, [P_0, A] = D, [P_a, A] = G_a, \\ [J_a, A] = [G_a, A] = 0 \quad (0.19)$$

Определение 0.15. Операторы $\{P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu\}$ реализуют представление алгебры Ли $AC(I, 3)$ конформной группы $C(I, 3)$, если вместе с (0.15), (0.17) выполняются условия

$$[D, K_\mu] = K_\mu, [J_a, K_b] = \varepsilon_{abc} K_c, \\ [J_a, K_0] = [K_\mu, K_\nu] = 0, [J_{0a}, K_0] = -K_a, \\ [J_{0a}, K_b] = \delta_{ab} K_0, [K_a, P_0] = -[K_0, P_a] = \\ = -2J_{0a}, [K_a, P_b] = 2(\delta_{ab} D - \varepsilon_{abc} J_c). \quad (0.20)$$

ГЛАВА I

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ГАЛИЛЕЯ

В настоящей главе изучена симметрия ряда нелинейных систем уравнений, встречающихся в классической гидродинамике и теории упругости. Получено нелинейное обобщение уравнения Ламе, инвариантное относительно группы Галилея $G(1, 3)$, предложены способы расширения симметрии уравнения Ламе за счет дополнительных условий, налагаемых на решения. Построены все неэквивалентные анзацы для векторного поля, инвариантные относительно группы $G(1, 3)$, с помощью которых найдены многопараметрические семейства точных решений рассматриваемых систем уравнений. Проведена групповая классификация уравнений гидродинамики, содержащих произвольный элемент. Найдены базисы нелинейного представления алгебр Галилея $AG(1, 3)$ и Пуанкаре $AP(1, 3)$.

§1. Нелинейное обобщение уравнения Ламе, инвариантное относительно алгебры $AG(1, 3)$

Основное уравнение линейной теории упругости — векторное уравнение Ламе получается варьированием лагранжиана с плотностью $\mathcal{L} = T - U$. Здесь T, U — соответственно плотность кинетической и потенциальной энергии упругой среды, которая вычисляется по формулам

$$T = \frac{\rho_0}{2} \dot{\vec{u}}^2, \quad U = \frac{\lambda}{2} (I_1)^2 + \mu I_2,$$

в которых ρ_0 — плотность среды, $\vec{u}$ — вектор смещения, $\lambda, \mu = \text{const}$ (коэффициенты Ламе), I_1, I_2 — инварианты тензора деформации в линейном приближении. Подстановка в вариационное уравнение Эйлера приводит к уравнению Ламе

$$\square \vec{U} + \bar{\lambda} g_{\mu\nu} \text{div} \vec{U} = 0$$

(I.I.I)

где $\bar{\lambda} = 1 + \frac{M}{\lambda} = \text{const.}$

Групповые свойства уравнения (I.I.I) изучались в работах [1, 52, 36, 37]. В [52] показано, что максимальной алгеброй Ли инвариантности уравнения Ламе является 8-мерная алгебра Евклида $AE(I, 3)$, дополненная оператором масштабных преобразований. В классе интегродифференциальных операторов алгеброй инвариантности (I.I.I) являются 10- и 15-мерные алгебры Ли [37]. Инвариантные решения уравнения Ламе построены в [1].

В [36] обращено внимание на то, что для уравнения (I.I.I) не справедлив ни один из известных в настоящее время принципов относительности. На алгебраическом языке это означает, что уравнение Ламе не инвариантно ни относительно преобразований Лоренца, ни относительно преобразований Галилея. В связи с этим возникает задача обобщить уравнение (I.I.I) (нелинейным образом) так, чтобы расширить максимальную алгебру инвариантности до алгебры Галилея $AG(I, 3)$. Известные в литературе нелинейные обобщения уравнения Ламе не обладают такой симметрией.

Рассмотрим уравнение [38]

$$L\vec{U} + F(\vec{U}, \vec{U}_1, \vec{U}_2, X) = 0$$

(I.I.2)

где $\vec{U} = \{\partial u^a / \partial x_\mu\}$, $\vec{U}_1 = \{\partial^2 u^a / \partial x_\mu \partial x_\nu\}$, $x_0 = t$

$\vec{F}$ - произвольная дважды дифференцируемая вектор-функция,

которую можно представить в виде

$$F^i = A^{\mu\nu}(u) u_{\mu\nu}^i + B_\nu^\mu(u) u_{\mu i}^\nu + C^\mu(u) u_{\mu}^i + D_\mu(u) u_i^\mu + E(u) u^i$$

(I.I.3)

$$u = \{\vec{U}, u_0\}, \quad u^0 = 1$$

Всюду по повторяющимся индексам подразумевается суммирование, нижний индекс у компонент 4-вектора $\vec{U}$ означает дифференциро-

вание по соответствующей переменной. Тензорные коэффициенты в (I.I.3) представим в виде

$$A^{\mu\nu}(\vec{u}) = a_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(|\vec{u}|) u^\alpha u^\beta, \quad B_\nu^\mu(\vec{u}) = b_{\alpha\beta}^\mu{}_\nu(|\vec{u}|) u^\alpha u^\beta, \\ C^\mu = c_\alpha^\mu(|\vec{u}|) u^\alpha, \quad D_\mu = d_{\mu\alpha}(|\vec{u}|) u^\alpha, \quad E = e(|\vec{u}|), \\ |\vec{u}| = (u^1 u^1 + u^2 u^2 + u^3 u^3)^{1/2} \quad (\text{I.I.4})$$

где $a_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$, $b_{\alpha\beta}^\mu{}_\nu$, c_α^μ , $d_{\mu\alpha}$, e - произвольные дважды дифференцируемые тензорные функции, зависящие только от $|\vec{u}|$.

Теорема 2.I.I. Уравнение (I.I.2) при условиях (I.I.3), (I.I.4) инвариантно относительно преобразований Галилея, если

$$\vec{F} = -2(\vec{u} \cdot \vec{v}) \partial \vec{u} / \partial t + \{ \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{v} \} \vec{u} \quad (\text{I.I.5})$$

Доказательство. Воспользуемся лиевским критерием инвариантности уравнения (I.I.2) относительно преобразований Галилея (см. теорему 0.2)

$$G_a(L\vec{u} + \vec{F})|_{L\vec{u} + \vec{F} = 0} = 0 \quad (\text{I.I.6})$$

где

$$G_a = t \frac{\partial}{\partial x_a} - \frac{\partial}{\partial u^a} - u_a^b \frac{\partial}{\partial u^b} - 2 u_{a\mu}^b \frac{\partial}{\partial u_{\mu}^b}$$

- дважды продолженный оператор

$$G_a = t \partial / \partial x_a - \partial / \partial u^a \quad (\text{I.I.7})$$

Оператор (I.I.7) порождает преобразования

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v} t, \\ \vec{u}' = \vec{u} + \vec{v}, \quad t' = t \quad (\text{I.I.8})$$

где $\vec{v}$ - вектор-параметр преобразования

Применяя критерий (I.I.6) к уравнению (I.I.2) и учитывая (I.I.3), (I.I.4), получим для коэффициентов в (I.I.4) следующие условия (определяющие уравнения):

$$a_{\alpha\beta}^{00} + 1 = - \sum_{\nu, \mu \neq 0} a_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \sum_{\mu \neq \nu \neq 0} a_{\alpha\beta}^{\mu\nu},$$

$$C_{\alpha}^0 = \sum_{\mu \neq 0} C_{\alpha}^{\mu}, \quad a_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = a_{\alpha\beta}^{\nu\mu} = a_{\beta\alpha}^{\mu\nu} = a_{\beta\alpha}^{\nu\mu}$$

$$b_{\alpha\nu\beta}^{\mu} = d_{\mu\alpha} = e = 0, \quad a_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = 0, \quad \mu\lambda\nu \neq \alpha\lambda\beta$$

$$\partial a_{\alpha\beta}^{\mu\nu} / \partial u = \partial C_{\alpha}^{\mu} / \partial u = 0, \quad C_{\alpha}^{\mu} = 0, \quad \mu \neq \alpha$$

Отсюда следует, что уравнение (I.I.2) может быть записано в виде

$$L u^i + C_1 u_{00}^i - 2(C_1 + 1) u^a u_{0a}^i + (C_1 + 1) u^a u^b u_{ab}^i = 0,$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные. В частности, при $C_1 = C_2 = 0$ имеем

$$\square u^i + \lambda u_{ai}^a - 2 u^a u_{0a}^i - u^a u^b u_{ab}^i = 0$$

что совпадает с (I.I.2), (I7I.5) в покомпонентной записи.

Рассмотрим теперь случай, когда вектор $\vec{F}$ явно зависит от координат $\vec{x}$. Очевидно, что такие уравнения (I.I.2) не будут инвариантны относительно пространственных сдвигов. В этом случае справедлива

Теорема I.I.2. Уравнение (I.I.2), в котором

$$\vec{F} = -2(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \partial \vec{u} / \partial t + \{ \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \} \vec{u} + \{ \vec{x} \cdot (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \} \vec{u} \quad (I.I.9)$$

инвариантно относительно преобразований (I.I.8).

Доказательство аналогично предыдущему.

С помощью алгоритма Ли можно доказать следующее утверждение.

Теорема I.I.3. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (I.I.2) является

I) II-мерная алгебра Ли $AG(I, 3)$ группы Галилея $G(I, 3)$

дополненная оператором дилатации D с законом

$$P_\mu = \partial/\partial x_\mu, J_a = \varepsilon_{abc} x_b P_c + S_a, D = x_\mu P_\mu, \quad (I.I.I0)$$

$$G_a = t P_a - \partial/\partial u^a$$

если $\vec{F}$ определена из (I.I.5);

2) 8 - мерная алгебра Ли, базис которой образуют операторы P_0, J_a, G_a, D из (I.I.I0), если $\vec{F}$ определена из (I.I.9).

Операторы P_μ порождают сдвиги по координатам, J_a - пространственные повороты, а оператор D - масштабные преобразования. Матрицы S_a реализуют неприводимые представления $D(I, 0)$ алгебры Ли группы вращения 3-х мерного пространства $O(3)$ на пространстве решений уравнения (I.I.2) и имеют следующий вид:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.I.II)$$

Отметим, что в теории упругости часто используются дифференциальные следствия из уравнения Ламе. Возьм дивергенцию и ротор от (I.I.I) получим незацепленную систему 4-х волновых уравнений [33]

$$\partial^2 v_0 / \partial t^2 = a^2 \Delta v_0, \quad v_0 = \text{div } \vec{u}, \quad a = \text{const} \quad (I.I.I2)$$

$$\partial^2 \vec{v} / \partial t^2 = b^2 \Delta \vec{v}, \quad \vec{v} = \text{rot } \vec{u}, \quad b \neq a = \text{const} \quad (I.I.I3)$$

В [36] установлено, что уравнения (I.I.I2), (I.I.I3) инвариантны относительно конформной группы $C(I, 3)$. Кроме того, система (I.I.I3) инвариантна относительно группы $GL(3)$, т.е. относительно линейных преобразований

$$v_i' = a_{ij} v_j$$

Таким образом, система уравнения (I.I.I2), (I.I.I3) инвариантна относительно группы $C(I, 3) \otimes GL(I) \otimes GL(3)$.

Уравнения (I.I.I2), (I.I.I3) в механике сплошных сред

интерпретируют как волновые уравнения, описывающие распространение соответственно продольных и поперечных упругих волн (волны растяжения и сдвига). Из (I.I.I2), (I.I.I3) следует, что скорость поперечных и продольных волн является постоянной величиной в любых инерциальных системах отсчета. Это обстоятельство противоречит релятивистскому принципу относительности, согласно которому только величина скорости света в однородных средах не зависит от системы отсчета. Эту трудность можно преодолеть, если модифицировать систему (I.I.I2), (I.I.I3) следующим образом:

$$\partial^2 V_0 / \partial t^2 = a^2 \Delta V_0 + a_1^2 V_0 \quad (I.I.I4)$$

$$\partial^2 \vec{V} / \partial t^2 = b^2 \Delta \vec{V} + b_1^2 \vec{V}, \quad (I.I.I5)$$

где постоянные величины a_1 , b_1 характеризуют свойства упругой среды. Скорость волн, описываемых уравнениями (I.I.I4), (I.I.I5) не будет постоянной в различных инерциальных системах. Приписав упругим волнам "переменную массу", т.е. положив $a_1 = a_1(\vec{V}, \vec{V}_0)$, $b_1 = b_1(\vec{V}, \vec{V}_0)$, можно таким образом учесть нелинейные эффекты взаимодействия продольных и поперечных упругих волн.

Групповые свойства уравнений (I.I.I4), (I.I.I5) устанавливает следующая теорема.

Теорема I.I.4. Система уравнений (I.I.I4), (I.I.I5) инвариантна относительно группы $P(1, 3) \otimes GL(1) \otimes GL(3)$.

Доказательство. Пользуясь тем, что система (I.I.I4), (I.I.I5) линейна, проведем доказательство методом, несколько отличным от использованного в предыдущих теоремах.

Пусть

$$L'u = 0, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (I.I.I6)$$

- линейная система ДУЧП и пусть она инвариантна относительно

некоторого множества операторов Q_A , $A=1, \dots, N$. Тогда справедливо равенство [34]

$$[L, Q_A]u = 0 \quad (I.I.I7)$$

или, в операторном виде,

$$[L, Q_A] = B_A L$$

где B_A - некоторый оператор.

Операторы Q_A представимы в виде

$$Q_A = \xi_A^\alpha(x, u) \partial / \partial x_\alpha + \eta_A(x) \quad (I.I.I8)$$

где $\eta_A(x)$ - квадратная матрица $m \times m$.

(I.I.I7) при этом представляет собой систему однородных линейных уравнений для определения $\xi_A^\alpha(x, u)$ и $\eta_A(x)$, т.е. определяющие уравнения. В данном случае определяющие уравнения

имеют вид

$$\begin{aligned} I \xi_0^a &= A \xi_a^0 \\ \xi_u^M &= \xi_0^0 = \xi_1^1 = \xi_2^2 = \xi_3^3 = 0 \\ \xi_b^a &= -\xi_a^b, \quad a \neq b \\ \eta_{00} - \eta_{aa} &= 0 \\ I \xi_{00}^0 - A \xi_{aa}^0 + A_1 \xi_1^0 + 2\eta_0 &= 0 \\ I \xi_{00}^a - A \xi_{bb}^a + A_1 \xi_1^a - 2\eta_a &= 0 \quad u = \{v_0, \vec{v}\} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1^2 \end{pmatrix} = A_1 \quad (I.I.I9)$$

Здесь и далее нижний индекс в определяющих уравнениях означает дифференцирование по соответствующей переменной. Решение уравнений (I.I.I9) задаются формулами

$$\begin{aligned} \xi_\mu^\nu &= C_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu, \\ \eta &= S, \end{aligned} \quad (I.I.20)$$

где $C_{\mu\nu} = -C_{\nu\mu}$, $\mu \neq \nu$, d_μ - произвольные постоянные, S - числовая матрица.

вида

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

где Σ - произвольная числовая матрица 3×3 . Из формул (I.I.20) следует утверждение теоремы.

Замечание. Формулировка теоремы не учитывает инвариантности уравнений (I.I.14), (I.I.15) относительно бесконечнопараметрической группы Ли, что является следствием линейности уравнений. Фактически речь идет о фактор-группе по нормальному делителю, порожденному операторами $f(x) \frac{\partial}{\partial v_0} \cdot g^a(x) \frac{\partial}{\partial v^a}$, где $f(x), \vec{g}(x)$ - произвольные решения однородной системы (I.I.12), (I.I.13).

Укажем еще на один способ расширения симметрии исходного уравнения Ламе.

В [39] отмечено, что некоторые подмножества в множестве всех решений ДУЧП имеют более широкую симметрию, чем множество всех решений данного уравнения. Выделение таких подмножеств осуществляется с помощью дополнительных условий.

Определение I.I.1. Будем говорить, что ДУЧП $F(x, u, u_1, \dots, u_s) = 0$ условно инвариантно относительно некоторой группы Ли преобразований G , если оно инвариантно относительно группы G на подмножестве решений данного уравнения, выходящем дополнительным условием $F_1(x, u, u_1, \dots, u_r) = 0$, и не инвариантно на множестве всех решений.

Теорема I.I.5. Уравнение Ламе (I.I.1) условно инвариантно относительно группы Галилея $G(1,3)$ при условии

$$\partial u^i / \partial t \partial x_j = 0 \quad (I.I.21)$$

где $u^i(x, t)$ - решение уравнения Ламе.

Доказательство. Инвариантность уравнения Ламе относительно преобразований, порождаемых операторами P_μ, J_a из алгебры $AG(1, 3)$ доказана в [52]. Покажем, что при условии (I.I.2I) оно инвариантно относительно преобразований Галилея (I.I.8).

Используя критерий инвариантности (0.7), получим

$$G_a \mathcal{L} \vec{u} = \partial \vec{u}^2 / \partial t \partial x_a \quad \text{где} \quad G_a = t P_a - \partial / \partial u^a$$

следовательно, в силу (I.I.2I), $G_a \mathcal{L} \vec{u} = 0$, что и требовалось.

Совершенно аналогично доказывается

Теорема I.I.6. Уравнение Ламе (I.I.1) условно инвариантно относительно проективных преобразований, порождаемых оператором.

$$A = x_0 x_\mu \partial_\mu + (x_a + x_0 u^a) \partial / \partial u^a,$$

при условии

$$(\partial u^i / \partial x_0 \partial x_\mu) \cdot x_\mu = 0 \quad (I.I.22)$$

В заключение отметим, что понятие условной инвариантности также успешно применяется для нахождения частных решений ДУЧП [40].

§2. Редукция и точные решения нелинейного обобщения уравнения Ламе

В настоящей работе для нахождения точных решений систем ДУЧП используется анзац вида (0.II)

$$u = A(x) \varphi(\omega) \quad (I.2.1)$$

Для уравнения Ламе в (I.2.1) $A(x)$ — матрица (3×3) , $\vec{\varphi} \in \mathbb{R}^3$ — неизвестный вектор, зависящий от трех новых переменных $\vec{\omega} = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$. В соответствии с теоремой 0.4 гипотеза (I.2.1) в исходное уравнение редуцирует его к

уравнению относительно . Редуцированное уравнение может быть даже сложнее исходного уравнения и тем не менее, теоретико-алгебраические методы дают эффективный алгоритм построения широких классов точных решений таких уравнений.

Достаточным условием того, чтобы решения (I.2.1) удовлетворяли редуцированному уравнению является выполнение соотношений

$$QA(x) \equiv \left(\xi^m \frac{\partial}{\partial x_m} + \eta^a \frac{\partial}{\partial x^a} \right) A(x) = 0, \quad (I.2.2)$$

$$\xi^m \frac{\partial \omega}{\partial x_m} = 0, \quad (I.2.3)$$

где Q — операторы АИ нелинейного уравнения Ламе (I.1.2), (I.1.5), т.е. $AG(I,3)$. Возьмем в качестве Q линейную комбинацию базисных операторов этой алгебры

$$Q = \theta^m P_m + \theta^{aa} G_a + \theta^{ab} J_{ab}, \quad (I.2.4)$$

где $\theta^m, \theta^{aa}, \theta^{ab}$ — константы, $J_{ab} = \varepsilon_{abc} J_c$.

Решая систему ДУЧП (I.2.2), (I.2.3), (I.2.4), находим анзацы вида (I.2.1). Подставляя их в (I.1.2), (I.1.5), получим ДУЧП, зависящие от трех переменных $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Решая полученные уравнения и подставляя результат в (I.1.2), (I.1.5) находим точные решения исходного ДУЧП.

Таким образом, задача построения точных решений нелинейного уравнения Ламе (как, впрочем, и других) разбивается на два этапа. На первом этапе интегрируются уравнения (I.2.2), (I.2.3), (I.2.4) и строятся анзацы (I.2.1). На втором этапе ищутся частные решения редуцированных ДУЧП. Рассмотрим реализацию этой схемы подробнее.

2.1. Построение анзацев

Прежде всего необходимо построить в явном виде матрицы $A(x)$, удовлетворяющие уравнению (1.2.2), т.е. проинтегрировать линейную систему 10 ДУЧП первого порядка с переменными коэффициентами, что сделать непросто. К тому же останется открытым вопрос, не будут ли некоторые из полученных таким образом анзацев давать эквивалентные (в симметричном смысле) решения исходного ДУЧП, т.е. решения, которые переводятся друг в друга преобразованиями из группы инвариантности (групповым умножением решений). Очевидно, что желательно построить возможно более широкие классы неразмножаемых решений.

Поэтому воспользуемся для решения этой задачи алгоритмом, описанным в [9].

Сделаем в (1.2.2) замену

$$A'(x) = \exp \{ \Sigma \} A(x), \quad (1.2.5)$$

где

причем Σ выбирается таким образом за счет констант $\sigma^r, \sigma^{ra}, \sigma^{ab}$, чтобы уравнение на $A'(x)$ имело максимально простой вид.

Подставим (1.2.5) в (1.2.2) и подействует на полученное уравнение оператором $\exp \{ \Sigma \}$ (это возможно в силу того, что исходное уравнение инвариантно относительно таких преобразований). В результате получим

$$\exp \{ \Sigma \} Q \exp \{ -\Sigma \} A'(x) = Q' A'(x) = 0 \quad (1.2.6)$$

Теорема 1.2.1. С помощью преобразования (1.2.5) оператор из (1.2.6) может быть приведен к одному из следующих операторов:

$$1) \quad Q' = J_{12} + \alpha P_0 + \beta G_3, \quad (1.2.7)$$

$$2) \quad Q' = J_{12} + \alpha G_3, \quad (1.2.8)$$

$$3) \quad Q' = J_{12} + \alpha P_3, \quad (1.2.9)$$

$$4) Q' = P_0, \quad (I.2.10)$$

$$5) Q' = P_1, \quad (I.2.11)$$

$$6) Q' = G_1, \quad (I.2.12)$$

$$7) Q' = G_1 + \alpha P_2, \quad (I.2.13)$$

$$8) Q' = G_1 + \alpha P_0, \quad (I.2.14)$$

$$9) Q' = J_{12}, \quad (I.2.15)$$

$$10) Q' = J_{12} + \alpha P_0 \quad \text{, где } \alpha, \beta = \text{const}, \alpha\beta \neq 0 \quad (I.2.16).$$

Доказательство теоремы основано на применении формулы
Кэмпбелла-Хаусдорфа

$$\exp\{\theta Q_1\} Q_2 \exp\{-\theta Q_1\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\theta^k}{k!} \{Q_1, Q_2\}^k,$$

$$\{Q_1, Q_2\}^0 = Q_2, \quad \{Q_1, Q_2\}^n = [Q_1, \{Q_1, Q_2\}^{n-1}].$$

Замечание 1. Поскольку при доказательстве теоремы используются только коммутационные соотношения алгебры, то она остается справедливой для любого представления алгебры.

Замечание 2. Утверждение теоремы соотносится с результатом анализа подгрупповой структуры группы $G(I, 3)$, проведенным в работе [41]. Оказывается, что операторы (I.2.7)-(I.2.16) исчерпывают все несопряженные одномерные подалгебры алгебры Галилея $AG(I, 3)$ и, таким образом, решения, инвариантные относительно операторов (I.2.7)-(I.2.16), будучи разномножительными конечными преобразованиями из группы Галилея, образуют множество $G(I, 3)$ - неразмножаемых решений.

Для того, чтобы найти инвариантные переменные, необходимо проинтегрировать систему ДУЧП (I.2.3), где $\xi^n(x)$ - коэффициенты операторов (I.2.7)-(I.2.16), стандартными методами теории линейных ДУЧП. Ниже приводится результат интегрирования системы ДУЧП (I.2.2), (I.2.3) с использованием теоремы I.2.1.

Таблица I.

№ III	Оператор	Инвариантные переменные			Анзац
		$\omega_1(x)$	$\omega_2(x)$	$\omega_3(x)$	
I.	$J_{12} + \alpha G_3$	t	$x_1^2 + x_2^2$	$\frac{x_3}{t} +$ $+\alpha \arcsin x$ $\times \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)$	$u^1 = x_1 \varphi^1$ $u^2 = x_2 \varphi^1$ $u^3 = \varphi^2 + \omega_3 - \frac{x_3}{t}$
2.	$J_{12} + \alpha P_0 + \beta G_3$	$x_1^2 + x_2^2$	$\beta t^2 - 2\alpha x_3$	$t +$ $+\alpha \arcsin x$ $\times \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)$	$u^1 = x_1 \varphi^1$ $u^2 = x_2 \varphi^1$ $u^3 = \varphi^2 - \frac{\beta}{\alpha} t$
3.	$J_{12} + \alpha P_0$	$x_1^2 + x_2^2$	x_3	$t +$ $+\alpha \arcsin x$ $\times \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)$	$u^1 = x_1 \varphi^1$ $u^2 = x_2 \varphi^1$ $u^3 = \varphi^2$
4.	$J_{12} + \alpha P_3$	$x_1^2 + x_2^2$	t	$x_3 +$ $+\alpha \arcsin x$ $\times \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)$	$u^1 = x_1 \varphi^1$ $u^2 = x_2 \varphi^2$ $u^3 = \varphi^3$
5.	$G_1 + \alpha P_0$	x_2	x_3	$t^2 - 2\alpha x_1$	$u^1 = \varphi^1 - \frac{t}{\alpha}$ $u^2 = \varphi^2$ $u^3 = \varphi^3$
6.	$G_1 + \alpha P_2$	t	x_3	$\alpha x_1 - t x_2$	$u^1 = \varphi^1 + \frac{x_2}{\alpha}$ $u^2 = \varphi^2$ $u^3 = \varphi^3$
7.	J_{12}	t	x_3	$x_1^2 + x_2^2$	$u^1 = \varphi^1 - \frac{x_1}{t}$ $u^2 = \varphi^2$ $u^3 = \varphi^3$
8.	G_1	t	x_2	x_3	$u^1 = \varphi^1 - \frac{x_1}{t}$ $u^2 = \varphi^2$ $u^3 = \varphi^3$

9.	P_1	t	x_2	x_3	$u^i = \varphi^i(\omega)$
10.	P_0	x_1	x_2	x_3	$u^i = \varphi^i(\omega)$

2.2. Редукция и точные решения нелинейного уравнения Ламе

Подставляя анзацы из табл. I в уравнение (I.1.2), (I.1.5), получим редукцированные уравнения. Здесь нумерация соответствует позициям табл. I, нижний индекс означает дифференцирование по соответствующей переменной.

$$\begin{aligned} \text{I. } & \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 - 4\varphi^1 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^1 - \frac{2}{\omega_1} (\varphi^2 + \omega_3) \varphi_{\omega_1 \omega_3}^1 + 4\omega_2 (\lambda - 1 + \omega_2 \varphi^1 \varphi^1) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^1 + \\ & + \frac{4\omega_2}{\omega_1} (\varphi^2 + \omega_3) \varphi^1 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^1 + \left[\frac{(\varphi^2 + \omega_3)^2}{\omega_1^2} - \frac{\alpha^2}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right] \varphi_{\omega_3 \omega_3}^1 - 2\varphi^1 \varphi_{\omega_1}^1 + \\ & + [8(\lambda - \varphi^1) + 6\omega_2 \varphi^1 \varphi^1] \varphi_{\omega_2}^1 + \frac{2}{\omega_1^2} (\varphi^2 + \omega_3) (1 + \varphi^1) \varphi_{\omega_3}^1 = 0, \quad (\text{I.2.I7}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varphi_{\omega_1 \omega_1}^2 - 4\varphi^1 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^2 - \frac{2}{\omega_1} (\varphi^2 + \omega_3) \varphi_{\omega_1 \omega_3}^2 + 4\omega_2 (\omega_2 \varphi^1 \varphi^1 - 1) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 + \\ & + \frac{4\omega_2}{\omega_1} \varphi^1 (\varphi^2 + \omega_3) \varphi_{\omega_2 \omega_3}^2 + \left[\frac{(\varphi^2 + \omega_3)^2}{\omega_1^2} - \frac{\alpha^2}{\omega_2} + \frac{\lambda - 1}{\omega_1^2} \right] \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 + 2(\omega_2 \varphi^1 \varphi^1 - 2) \varphi_{\omega_2}^2 + \\ & + \frac{2\lambda}{\omega_1} \varphi_{\omega_3}^1 + \frac{2\lambda \omega_2}{\omega_1} \varphi_{\omega_2 \omega_3}^1 = 0, \end{aligned}$$

$$2\lambda \omega_2 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^1 + 2(\lambda - 1) \varphi_{\omega_3}^1 - \frac{\lambda}{\omega_1} \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{2. } & 4\omega_1 (\lambda - 1 + \omega_1 \varphi^1 \varphi^1) \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 - 8\alpha \omega_1 \varphi^1 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^1 - 4\omega_1 \varphi^1 \varphi_{\omega_1 \omega_3}^1 + 4\alpha^2 (\varphi^2 \varphi^2 - 1) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^1 + \\ & + 4\alpha \varphi^2 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^1 + (1 - \frac{\alpha^2}{\omega_1}) \varphi_{\omega_3 \omega_3}^1 + [8(\lambda - 1) + 6\omega_1 \varphi^1 \varphi^1] \varphi_{\omega_1}^1 + (2\beta - 4\alpha \varphi^1 \varphi^2) \varphi_{\omega_2}^1 - \\ & - 2\varphi^1 \varphi_{\omega_3}^1 - 4\alpha \lambda \varphi_{\omega_1 \omega_2}^2 = 0, \quad (\text{I.2.I8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4\omega_1 (\omega_1 \varphi^1 \varphi^1 - 1) \varphi_{\omega_1 \omega_1}^2 - 8\alpha \omega_1 \varphi^1 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^2 - 4\omega_1 \varphi^1 \varphi_{\omega_1 \omega_3}^2 + 4\alpha^2 (\varphi^2 \varphi^2 - 1) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 + \\ & + 4\alpha \varphi^2 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^2 + (1 - \frac{\alpha^2}{\omega_1}) \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 + 2(\omega_1 \varphi^1 \varphi^1 - 2) \varphi_{\omega_1}^2 + 2\beta \varphi_{\omega_2}^2 - 4\alpha \lambda \omega_1 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^1 = 0, \end{aligned}$$

$$2\lambda \omega_1 \varphi_{\omega_1 \omega_3}^1 + 2(\lambda - 1) \varphi_{\omega_3}^1 - 2\lambda \alpha \varphi_{\omega_2 \omega_3}^2 = 0.$$

$$\begin{aligned}
 3. & 4\omega_1(\lambda-1+\omega_1\varphi^1\varphi^1)\varphi_{\omega_1\omega_1}^1 + 4\omega_1\varphi^1\varphi^2\varphi_{\omega_1\omega_2}^1 - 4\omega_1\varphi^1\varphi^1\varphi_{\omega_1\omega_3}^1 + (\varphi^2\varphi^2-1)\varphi_{\omega_2\omega_2}^1 - \\
 & - 2\varphi^2\varphi_{\omega_2\omega_3}^1 + (1-\frac{\alpha^2}{\omega_1})\varphi_{\omega_3\omega_3}^1 + [8(\lambda-1)+6\omega_1\varphi^1\varphi^1]\varphi_{\omega_1}^1 + 2\varphi^1\varphi^2\varphi_{\omega_2}^1 - 2\varphi^1\varphi_{\omega_3}^1 + 2\lambda\varphi_{\omega_1\omega_2}^2 = 0, \\
 & 4\omega_1(\omega_1\varphi^1\varphi^1-1)\varphi_{\omega_1\omega_1}^2 + 4\omega_1\varphi^1\varphi^2\varphi_{\omega_1\omega_2}^2 - 4\omega_1\varphi^1\varphi_{\omega_1\omega_3}^2 + (\lambda-4\alpha^2+\varphi^2\varphi^2)\varphi_{\omega_2\omega_2}^2 - \\
 & - 2\varphi^2\varphi_{\omega_2\omega_3}^2 + (1-\frac{\alpha^2}{\omega_1})\varphi_{\omega_3\omega_3}^2 + (2\omega_1\varphi^1\varphi^1-4)\varphi_{\omega_1}^2 + 2\lambda\varphi_{\omega_2}^1 + \\
 & + 2\lambda\omega_1\varphi_{\omega_1\omega_2}^1 = 0, \tag{I.2.19}
 \end{aligned}$$

$$2\lambda\omega_1\varphi_{\omega_1\omega_3}^1 + 2(\lambda-1)\varphi_{\omega_3}^1 + \lambda\varphi_{\omega_2\omega_3}^2 = 0.$$

$$\begin{aligned}
 4. & 4\omega_1(\lambda-1+\omega_1\varphi^1\varphi^1)\varphi_{\omega_1\omega_1}^1 - 4\omega_1\varphi^1\varphi_{\omega_1\omega_2}^1 + 4\omega_1\varphi^1\varphi^2\varphi_{\omega_1\omega_3}^1 + \varphi_{\omega_2\omega_2}^1 - \\
 & - 2\varphi^2\varphi_{\omega_2\omega_3}^1 - [\varphi^2\varphi^2 - (1+\frac{\alpha^2}{\omega_1})]\varphi_{\omega_3\omega_3}^1 + [8(\lambda-1)+6\omega_1\varphi^1\varphi^1]\varphi_{\omega_1}^1 + 2\varphi^1\varphi^2\varphi_{\omega_2}^1 - \\
 & - 2\varphi^1\varphi_{\omega_3}^1 + 2\lambda\varphi_{\omega_1\omega_2}^2 = 0, \\
 & 4\omega_1(\omega_1\varphi^1\varphi^1-1)\varphi_{\omega_1\omega_1}^2 - 4\omega_1\varphi^1\varphi_{\omega_1\omega_2}^2 + 4\omega_1\varphi^1\varphi^2\varphi_{\omega_1\omega_3}^2 + \varphi_{\omega_2\omega_2}^2 + (\lambda-1-\frac{\alpha^2}{\omega_1})\varphi_{\omega_3\omega_3}^2 + \\
 & + (\varphi^2\varphi^2+\lambda-1-\frac{\alpha^2}{\omega_1})\varphi_{\omega_1}^2 + 2\lambda\varphi_{\omega_3}^1 + 2\lambda\omega_1\varphi_{\omega_1\omega_3}^1 = 0, \tag{I.2.20}
 \end{aligned}$$

$$2\lambda\omega_1\varphi_{\omega_1\omega_2}^1 + 2(\lambda-1)\varphi_{\omega_3}^1 + \lambda\varphi_{\omega_3\omega_3}^2 = 0.$$

$$\begin{aligned}
 5. & ((\varphi^2\varphi^2)-1)\varphi_{\omega_1\omega_1}^1 + 2\varphi^2\varphi^3\varphi_{\omega_1\omega_2}^1 - 4\alpha\varphi^1\varphi^2\varphi_{\omega_1\omega_3}^1 + (\varphi^3\varphi^3-1)\varphi_{\omega_2\omega_2}^1 - \\
 & - 4\alpha\varphi^1\varphi^3\varphi_{\omega_2\omega_3}^1 + 4\alpha^2(\varphi^1\varphi^1-1+\lambda)\varphi_{\omega_3\omega_3}^1 + 2\varphi_{\omega_3}^1 - 2\alpha\lambda\varphi_{\omega_1\omega_3}^2 - \\
 & - 2\alpha\lambda\varphi_{\omega_2\omega_3}^3 = 0, \\
 & (\varphi^2\varphi^2-1+\lambda)\varphi_{\omega_1\omega_1}^2 + 2\varphi^2\varphi^3\varphi_{\omega_1\omega_2}^2 - 4\alpha\varphi^1\varphi^2\varphi_{\omega_1\omega_3}^2 + (\varphi^3\varphi^3-1)\varphi_{\omega_2\omega_2}^2 - \\
 & - 4\alpha\varphi^1\varphi^3\varphi_{\omega_2\omega_3}^2 + 4\alpha^2(\varphi^1\varphi^1-1)\varphi_{\omega_3\omega_3}^2 + 2\varphi_{\omega_3}^2 + \varphi_{\omega_1\omega_2}^3 - \tag{I.2.21} \\
 & - 2\alpha\lambda\varphi_{\omega_1\omega_3}^1 = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\varphi^2\varphi^2-1)\varphi_{\omega_1\omega_1}^3 + 2\varphi^2\varphi^3\varphi_{\omega_1\omega_2}^3 - 4\alpha\varphi^1\varphi^2\varphi_{\omega_1\omega_3}^3 + (\varphi^3\varphi^3-1+\lambda)\varphi_{\omega_2\omega_2}^3 - \\
 & - 4\alpha\varphi^1\varphi^3\varphi_{\omega_2\omega_3}^3 + 4\alpha^2(\varphi^1\varphi^1-1)\varphi_{\omega_3\omega_3}^3 + 2\varphi_{\omega_3}^3 - 2\alpha\varphi_{\omega_2\omega_3}^1 + \varphi_{\omega_1\omega_2}^2 = 0.
 \end{aligned}$$

$$6. \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 - 2\varphi^3 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^1 + 2(\omega_1 \varphi^2 - \alpha \varphi^1) \varphi_{\omega_1 \omega_3}^1 + (\varphi^3 \varphi^3 - 1) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^1 - 2\varphi^3 (\omega_1 \varphi^2 - \alpha \varphi^1) \varphi_{\omega_2 \omega_3}^1 + [\alpha^2 (\lambda - 1) - \omega_1^2 + (\omega_1 \varphi^2 - \alpha \varphi^1)^2] \varphi_{\omega_3 \omega_3}^1 + 2\varphi^2 \varphi_{\omega_3}^1 - \lambda \alpha \omega_1 \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 + \lambda \alpha \varphi_{\omega_2 \omega_3}^3 = 0,$$

$$\varphi_{\omega_1 \omega_1}^2 - 2\varphi^3 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^2 + 2(\omega_1 \varphi^2 - \alpha \varphi^1) \varphi_{\omega_1 \omega_3}^2 + (\varphi^3 \varphi^3 - 1) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 - 2\varphi^3 (\omega_1 \varphi^2 - \alpha \varphi^1) \varphi_{\omega_2 \omega_3}^2 + [\omega_1^2 (\lambda - 1) - \alpha^2 + (\omega_1 \varphi^2 - \alpha \varphi^1)^2] \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 \quad (I.2.22)$$

$$+ 2\varphi^2 \varphi_{\omega_3}^2 - \lambda \alpha \omega_1 \varphi_{\omega_3 \omega_3}^1 - \lambda \omega_1 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^3 = 0,$$

$$\varphi_{\omega_1 \omega_1}^3 - 2\varphi^3 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^3 + 2(\omega_1 \varphi^2 - \alpha \varphi^1) \varphi_{\omega_1 \omega_3}^3 + (\varphi^3 \varphi^3 - 1 + \lambda) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^3 - 2\varphi^3 (\omega_1 \varphi^2 - \alpha \varphi^1) \varphi_{\omega_2 \omega_3}^3 - [\alpha^2 + \omega_1^2 - (\omega_1 \varphi^2 - \alpha \varphi^1)^2] \varphi_{\omega_3 \omega_3}^3 + 2\varphi^2 \varphi_{\omega_3}^3 + \lambda \alpha \varphi_{\omega_2 \omega_3}^1 -$$

$$- \lambda \omega_1 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^2 = 0.$$

$$7. \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 - 2\varphi^2 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^1 - 4\omega_3 \varphi^1 \varphi_{\omega_1 \omega_3}^1 + (\varphi^2 \varphi^2 - 1) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^1 + 4\omega_3 \varphi^1 \varphi^2 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^1 + 2\varphi_{\omega_2 \omega_3}^2 + 4\omega_3 (\lambda - 1 + \omega_3 \varphi^1 \varphi^1) \varphi_{\omega_3 \omega_3}^1 - 2\varphi^1 \varphi_{\omega_1}^1 + 2\varphi^1 \varphi^2 \varphi_{\omega_2}^1 + [8(\lambda - 1) + 6\omega_3 \varphi^1 \varphi^1] \varphi_{\omega_3}^1 = 0,$$

$$\varphi_{\omega_1 \omega_1}^2 - 2\varphi^2 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^2 - 4\omega_3 \varphi^1 \varphi_{\omega_1 \omega_3}^2 + (\lambda + \varphi^2 \varphi^2) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 + 4\omega_3 \varphi^1 \varphi^2 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^2 + \quad (I.2.23)$$

$$+ (4\omega_3^2 \varphi^1 \varphi^1 - 4\omega_3 - 1) \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 + 2(\omega_3 \varphi^1 \varphi^1 - 2) \varphi_{\omega_3}^2 + 2\lambda \varphi_{\omega_2}^1 +$$

$$+ 2\lambda \omega_3 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^1 = 0.$$

$$8. \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 + (\varphi^2 \varphi^2 - 1) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^1 + (\varphi^3 \varphi^3 - 1) \varphi_{\omega_3 \omega_3}^1 - 2\varphi^2 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^1 - 2\varphi^3 \varphi_{\omega_1 \omega_3}^1 + 2\varphi^2 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^1 - \frac{2}{\omega_1^2} \varphi^1 = 0,$$

(I.2.24)

$$\varphi_{\omega_1 \omega_1}^2 + (\varphi^2 \varphi^2 - 1 + \lambda) \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 + \lambda \varphi_{\omega_2 \omega_3}^3 - 2\varphi^2 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^2 -$$

$$- 2\varphi^3 \varphi_{\omega_1 \omega_3}^2 + 2\varphi^2 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^3 = 0,$$

$$\varphi_{\omega_1 \omega_1}^3 + (\varphi^2 \varphi^2 - 1) \varphi_{\omega_2 \omega_2}^3 + (\varphi^3 \varphi^3 + \lambda - 1) \varphi_{\omega_3 \omega_3}^3 + \lambda \varphi_{\omega_2 \omega_3}^2 - 2\varphi^2 \varphi_{\omega_1 \omega_2}^3 -$$

$$- 2\varphi^3 \varphi_{\omega_1 \omega_3}^3 + 2\varphi^2 \varphi_{\omega_2 \omega_3}^3 = 0.$$

$$\begin{aligned}
 9. \quad & \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 - \varphi_{\omega_2 \omega_2}^1 - \varphi_{\omega_3 \omega_3}^1 - 2\varphi_{\omega_1 \omega_2}^2 - 2\varphi_{\omega_1 \omega_3}^3 + \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 + \\
 & + \varphi_{\omega_3 \omega_3}^3 \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 + 2\varphi_{\omega_2 \omega_3}^3 \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 = 0, \\
 & \varphi_{\omega_1 \omega_1}^2 - \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 - \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 + \lambda \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 + \lambda \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 - 2\varphi_{\omega_1 \omega_2}^2 \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 - 2\varphi_{\omega_1 \omega_3}^3 \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 + \\
 & + \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 + \varphi_{\omega_3 \omega_3}^3 \varphi_{\omega_3 \omega_3}^3 + 2\varphi_{\omega_2 \omega_3}^3 \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 = 0, \\
 & \varphi_{\omega_1 \omega_1}^3 - \varphi_{\omega_2 \omega_2}^3 - \varphi_{\omega_3 \omega_3}^3 + \lambda \varphi_{\omega_2 \omega_3}^3 + \lambda \varphi_{\omega_3 \omega_3}^3 + \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 + \varphi_{\omega_3 \omega_3}^3 \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 + \\
 & + 2\varphi_{\omega_2 \omega_3}^3 \varphi_{\omega_2 \omega_2}^2 - 2\varphi_{\omega_1 \omega_2}^2 \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 - 2\varphi_{\omega_1 \omega_3}^3 \varphi_{\omega_1 \omega_1}^1 = 0. \quad (I.2.25)
 \end{aligned}$$

$$10. \quad -\varphi_{\omega_a \omega_a}^i + \lambda \varphi_{\omega_a \omega_i}^a + \varphi^a \varphi^b \varphi_{\omega_a \omega_b}^i = 0. \quad (I.2.26)$$

Частное решение одного из уравнений (I.2.17)-(I.2.26) с помощью анзацев из табл. I дает частное решение нелинейного уравнения Ламе. Для нахождения частных решений систем ДУЧ (I.2.17)-(I.2.26) осуществим прямую редукцию этих уравнений к системам ОДУ.

Предположим, что в (I.2.17) $\varphi^i = \varphi^i(\omega_3)$, $i = 1, 2$, т.е. зависят только от одной переменной. Тогда получим

$$\left[\frac{1}{\omega_1^2} (\varphi^2 + \omega_3)^2 - \frac{\lambda^2}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right] \varphi_{\omega_3 \omega_3}^1 + \frac{2}{\omega_1^2} (\varphi^2 + \omega_3) (1 + \varphi^1) \varphi_{\omega_3}^1 = 0, \quad (I.2.27)$$

$$\left[\frac{1}{\omega_1^2} (\varphi^2 + \omega_3)^2 - \frac{\lambda^2}{\omega_2} + \frac{\lambda - 1}{\omega_1^2} \right] \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 + \frac{2\lambda}{\omega_1} \varphi_{\omega_3}^1 = 0, \quad (I.2.28)$$

$$2(\lambda - 1) \varphi_{\omega_3}^1 - \frac{2}{\omega_1} \varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 = 0. \quad (I.2.29)$$

Из уравнения (I.2.28) с учетом (I.2.29) следует $\varphi_{\omega_3 \omega_3}^2 = 0$, т.е. $\varphi^2 = c_1 \omega_3 + c_2$, где c_1, c_2 - произвольные постоянные. Подставляя выражение для φ^2 в (I.2.27), получим уравнение

$$\left[\frac{(\omega_3 (c_1 + 1) + c_2)^2}{\omega_1^2} - \frac{\lambda^2}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1^2} \right] \varphi_{\omega_3 \omega_3}^1 + \frac{2(\omega_3 (c_1 + 1) + c_2)}{\omega_1^2} \varphi_{\omega_3}^1 = 0. \quad (I.2.30)$$

Выберем $C_1 = -1$, тогда из (I.2.30) получим ОДУ с постоянными коэффициентами (ω_1, ω_2 участвуют в качестве параметров)

$$[(C_2^2 - 1)/\omega_1^2 - \alpha^2/\omega^2] \varphi'_{\omega_3} \omega_3 + [2C_2/\omega_1^2] (1 + \varphi') \varphi'_{\omega_3} = 0 \quad (\text{I.2.31})$$

Общим решением (I.2.31) является функция

$$\varphi' = C_3 \operatorname{tg} [C_2 C_3 \omega_2 (\omega_3 + C_4) / \omega_2 (1 - C_2^2) + \alpha^2 \omega_1^2] - 1. \quad (\text{I.2.32})$$

Таким образом, частное решение исходного нелинейного уравнения Ламе имеет вид

$$\begin{aligned} u_1' &= x_1 \{ C_3 \operatorname{tg} [C_2 C_3 (x_1^2 + x_2^2) (x_3/t + \alpha \arcsin x_1 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \\ &+ C_4) / ((x_1^2 + x_2^2) (1 - C_2^2) + \alpha^2 t^2)] - 1 \}, \\ u_2' &= x_2 \{ C_3 \operatorname{tg} [(C_2 C_3 (x_1^2 + x_2^2) (x_3/t + \alpha \arcsin x_1 / \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + C_4) / \\ &/ ((x_1^2 + x_2^2) (1 - C_2^2) + \alpha^2 t^2)] - 1 \}, \quad u_3' = C_2 - x_3/t. \end{aligned} \quad (\text{I.2.33})$$

Применим теперь к решению (I.2.33) процедуру разложения с помощью конечных преобразований группы G (I.3), используя теорему 0.3. Нетрудно заметить, что вращения в трехмерном пространстве, порождаемые операторами J_a (I.1.10) вызывают следующее преобразование координат:

$$x_i' = a_{ij} \cdot x_j$$

где a_{ij} - матричные элементы ортогональной матрицы. Иначе говоря,

$$x_1' = \vec{a} \cdot \vec{x}, \quad x_2' = \vec{b} \cdot \vec{x}, \quad x_3' = \vec{c} \cdot \vec{x}, \quad (\text{I.2.34})$$

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - некоторые постоянные векторы, такие, что $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$. Кроме того, поскольку вращения вокруг каждой из осей координат независимы, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

Сказанное относится и к преобразованию компонент вектор-функции, т.е.

$$u_1' = \vec{d} \cdot \vec{u}, \quad u_2' = \vec{e} \cdot \vec{u}, \quad u_3' = \vec{f} \cdot \vec{u}, \quad (\text{I.2.35})$$

где векторы $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$, вообще говоря, отличны от $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, однако для наших целей это несущественно.

Операторы P_μ (I.I.IO) генерируют сдвиги по осям координат: $x'_\mu = x_\mu + d_\mu$,

$$\text{где } d_\mu = \text{const} \quad (\text{I.2.36})$$

а операторы G_a (I.I.IO) - преобразования Галилея (I.I.8).

С учетом всего сказанного, применение формулы (0.IO) к решению

(I.2.33), даст окончательно

$$\begin{aligned} \vec{y} = & [\vec{a} \cdot \vec{a} (\vec{y} + \vec{\theta} t) + \vec{b} \cdot \vec{b} (\vec{y} + \vec{\theta} t)] \{ c_3 \operatorname{tg} [c_2 c_3 ((\vec{a} \cdot (\vec{y} + \vec{\theta} t))^2 + \\ & + (\vec{b} \cdot (\vec{y} + \vec{\theta} t))^2) / ((\vec{a} \cdot (\vec{y} + \vec{\theta} t))^2 + (\vec{b} \cdot (\vec{y} + \vec{\theta} t))^2) (1 - c_2^2) + \lambda^2 y^2) \} \\ & \cdot ((\vec{a} \cdot (\vec{y} + \vec{\theta} t)) / y_0 + \lambda \alpha \kappa \sin(\vec{a} \cdot (\vec{y} + \vec{\theta} t) / \sqrt{(\vec{a} \cdot (\vec{y} + \vec{\theta} t))^2 + z^2}) + c_4) \} - 1 \} + \vec{a} (c_2 - (\vec{a} \cdot (\vec{y} + \vec{\theta} t)) / y_0) + \vec{\theta}, \quad z = \vec{b} \cdot (\vec{y} + \vec{\theta} t) \end{aligned} \quad (\text{I.2.36})$$

где $\vec{y} = \vec{x} + \vec{d}$, $y_0 = t + d_0$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{\theta}$, t_0 , λ , c_i - действительные параметры, причем здесь и в дальнейшем параметры $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ удовлетворяют условиям $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Таким образом, (I.2.36) представляет собой многопараметрическое семейство точных частных G (I, 3) - неразмножаемых инвариантных решений нелинейного аналога уравнения Ламе (I.I.2), (I.I.5).

Аналогичным образом можно получить другие частные решения нелинейного уравнения Ламе.

Положим в (I.2.I8) $\varphi^i = \varphi^i(\omega_i)$, $i = 1, 2$. Тогда, полагая для простоты $\lambda = 1$, получим

$$2 \omega_1 \varphi'_{\omega_1, \omega_1} + 3 \varphi'_{\omega_1} = 0 \quad (\text{I.2.37})$$

Общее решение уравнения (I.2.37) дается формулой

$$\varphi^1 = c_1 \omega_1^{-1/2} + c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const} \quad (\text{I.2.38})$$

Выбирая $C_2 = 0$, имеем для φ^2 уравнение

$$4\omega_1(c_1^2-1)\varphi_{\omega_1\omega_2}^2 + (2c_1^2-4)\varphi_{\omega_1}^2 = 0 \quad (\text{I.2.39})$$

Его общее решение задается формулой

$$\varphi^2 = C_3 \omega_1^{(c_1^2-2)/(2c_1^2-2)+1} \left(1 + (c_1^2-2)/(2(c_1^2-1))\right) + C_4 \quad (\text{I.2.40})$$

где C_3, C_4 — произвольные постоянные. Повторяя рассуждения, приведшие к формуле (I.2.36), получим с помощью (I.2.38), (I.2.40) семейство частных решений уравнения (I.1.2), (I.1.5)

$$\begin{aligned} \vec{u} = & [\vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{z} + \vec{b} \cdot \vec{b} \cdot \vec{z}] c_1 [(\vec{a} \cdot \vec{z})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{z})^2]^{-1/2} + \\ & + \vec{c} \{C_3 [(\vec{a} \cdot \vec{z})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{z})^2]^{k+1} \cdot (1+k)^{-1} + C_4\} + \vec{\theta}, \quad (\text{I.2.41}) \\ \vec{z} = & (\vec{y} + \vec{\theta} t), \quad k = (c_1^2-2)/2(c_1^2-1). \end{aligned}$$

Совершенно аналогично получены семейства частных решений, приведенные ниже.

Полагая $\varphi^i = \varphi^i(\omega_1)$ в (I.2.19), получим решение

$$\begin{aligned} \vec{u} = & C_1 [\vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{z} + \vec{b} \cdot \vec{b} \cdot \vec{z}] (y_0 + 2 \arcsin \vec{a} \cdot \vec{y} / \sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{y})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{y})^2})^{-1/2} + \\ & + \vec{c} \cdot C_2 / (k+1) [(\vec{a} \cdot \vec{y})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{y})^2 - c_1^2]^{k+1} + \vec{\theta}, \\ \vec{z} = & (\vec{y} + \vec{\theta} t), \quad k = c_2 / (2 - c_1^2) / 2, \end{aligned} \quad (\text{I.2.42})$$

Из (I.2.20) при $\varphi^i = \varphi^i(\omega_2)$ получим

$$\vec{u} = C_1 [\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{z} + \vec{b} \cdot \vec{b} \cdot \vec{z}] \operatorname{ctgh} [c_1(t + c_2)] + \vec{c} (c_3 t + c_4) + \vec{\theta} \quad (\text{I.2.43})$$

Из (I.2.21) при $\varphi^i = \varphi^i(\omega_3)$ получим

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{2} [(y_0^2 - 2\alpha \vec{a}(\vec{z} + c_1))^{1/2} - y_0] + \vec{b} [c_2(y_0 - 2\alpha \vec{a} \cdot (\vec{z} + c_1 - \alpha^2))^{1/2} + c_3] + \vec{c} [c_4(y_0 - 2\alpha \vec{a}(\vec{z} + c_1 - \alpha^2))^{1/2} + c_5] + \vec{\theta}, \quad (I.2.44)$$

Из (I.2.22) при $\varphi^i = \varphi^i(\omega)$

$$\vec{u} = \vec{a} \left(\frac{c_1}{y_0} - \frac{y_0}{2} + c_2 y_0^2 \right) + \vec{b} (c_3 y_0 + c_4) + \vec{c} (c_5 y_0 + c_6) + \vec{\theta}, \quad (I.2.45)$$

Из (I.2.23) при $\varphi^i = \varphi^i(\omega_1)$

$$\vec{u} = c_1 [\vec{a} \cdot \vec{a} \cdot \vec{z} + \vec{b} \cdot \vec{b} \cdot \vec{z}] \operatorname{tg}[(c_2 + y_0)c_1] + \vec{c} (c_3 y_0 + c_4), \quad (I.2.46)$$

где $C_1 > 0$.

Таким образом, используя симметричные свойства нелинейных ДУЧП, можно эффективно строить в явном виде их частные решения. При этом задача нахождения его точных решений сводится к существенно более простой задаче — интегрированию системы ОДУ. Для этого могут быть применены различные методы, в том числе приближенные или численные.

В заключение сделаем замечание. Для дальнейшей редукции редуцированных уравнений (I.2.17)–(I.2.26) можно было бы применить описанный алгоритм еще столько раз, сколько необходимо (для получения системы ОДУ). При этом возникает необходимость изучения их симметрии. В силу того, что эти уравнения сложны, найти их максимальную симметрию, используя метод Ли, весьма непросто.

Однако оказывается, что можно получить информацию о симметрии редуцированных уравнений, зная симметрию исходного уравнения. Эта информация содержится в следующем утверждении [20].

Теорема I.2.2. Пусть G — группа инвариантности некоторого ДУЧП, $H \subset G$ — однопараметрическая подгруппа G , являющаяся нормальным делителем в G . Тогда фактор-группа G/H есть группа инвариантности уравнения, полученного редукцией по отношению к H .

ного по H - инвариантным решениям. При этом теорема не гарантирует того, что G/H будет максимально широкой группой, допускаемой редуцированным уравнением.

Кроме того, исходное уравнение можно редуцировать сразу к ОДУ, если редукцию проводить по трехмерным несопряженным подалгебрам. Однако задача построения такой системы подалгебр является самостоятельной алгебраической задачей, требующей специального рассмотрения.

§3. Уравнения движения идеальной жидкости

Групповые свойства основного уравнения динамики идеальной жидкости - уравнения Эйлера - хорошо изучены (см. [3, 58, 64, 66] и цитированную там литературу). Однако в различных вопросах гидродинамики используется ряд других уравнений, симметричные свойства которых не исследованы. В настоящем параграфе устанавливаются групповые свойства некоторых нелинейных систем уравнений гидродинамики идеальной жидкости и их обобщений и строятся семейства их точных частных решений.

Для описания турбулентной диффузии, деформации материальных поверхностей в турбулентном потоке и т.п. применяется уравнение движения идеальной жидкости в форме Лагранжа [13] :

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} + \lambda \frac{\partial P}{\partial x_i} = 0 \quad (1.3.1)$$

где u^i - компоненты вектора смещения, x_i - лагранжиан переменные, P - давление, $\lambda = \text{const}$, $i, j = \overline{1, 3}$. Без ограничения общности можно полагать $P = \text{const}$.

Полную информацию о локальных групповых свойствах уравнения (1.3.1) дает

Теорема I.3.I. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (I.3.I) является 15-мерная алгебра Ли A_{15} , базисные элементы которой задаются формулами

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \tilde{P}_a = \frac{\partial}{\partial u^a}, \\ D_1 &= 2x_a P_a + (u^a - x_a) \tilde{P}_a, \quad D_2 = x_0 P_0, \\ G_0 &= x_0 \tilde{P}_a, \quad J_a = \varepsilon_{abc} (u^b - x_b) \tilde{P}_c \end{aligned} \quad (I.3.2)$$

Для доказательства утверждения теоремы приведем определяющие уравнения, к которым приводят вычисления по методу Ли:

$$\begin{aligned} \xi_\mu^a &= \xi_0^a = \xi_a^0 = 0 \\ \xi_b^a &= 0, \quad a \neq b, \\ \eta_{u^b u^b}^a &= \eta_{00}^a = \eta_{u^b 0}^a = 0 \\ 2\eta_{u^i}^i - \xi_{00}^0 &= 0 \\ 2\eta_{u^j}^j - \xi_{i i}^i &= 0 \\ \eta_{u^b}^a + \eta_{u^a}^b &= 0, \quad a \neq b \\ \eta_{u^b}^a + \eta_{u^a}^b &= 0 \end{aligned} \quad (I.3.3)$$

где нижний индекс по-прежнему означает дифференцирование, по индексам i, j суммирование не производится, $\xi^{\mu}(x, \vec{u})$, $\eta^a(x, \vec{u})$ - координаты инфинитезимального оператора.

Общим решением сильно переопределенной системы уравнений (I.3.3) являются функции

$$\begin{aligned} \xi^0 &= C_{00} x_0 + d_0 \\ \xi^a &= 2C_{00} x_a + d_a \\ \eta^a &= C_{ab} (u^b - x_b) + C_{00} (u^b - x_b) + b_a x_0 + f_a, \end{aligned} \quad (I.3.4)$$

где $c_{ab} = -c_{ba}$, c_{00} , c_{ab} , d_{ij} , b_a , f_{ij} - произвольные постоянные. Выбирая базис в 15-мерном пространстве функций (I.3.4), получим базисные операторы алгебры A_{15} (I.3.2). Коммутационные соотношения алгебры устанавливаются формулами:

$$\begin{aligned} [P_0, G_a] &= \tilde{P}_a, [P_a, G_b] = [J_a, P_0] = [\tilde{P}_a, G_b] = [\tilde{P}_a, \tilde{P}_b] = 0 \\ [J_a, J_b] &= -\varepsilon_{abc} J_c, \\ [J_a, P_b] &= -\varepsilon_{abc} \tilde{P}_c, \\ [J_a, \tilde{P}_b] &= -\varepsilon_{abc} \tilde{P}_c, \\ [J_a, G_b] &= -\varepsilon_{abc} G_c, \\ [G_a, G_b] &= 0 \end{aligned}$$

Замечание I. Десятимерная подалгебра $AG_{10}^* \subset A_{15}$, порожденная операторами P_0 , $\tilde{P}_a$, G_a , J_a из (I.3.2), локально изоморфна алгебре Галилея $AG(I, 3)$ [35]. Однако конечные преобразования, порождаемые этими операторами не совпадают с преобразованиями, определяющими группу Галилея и имеют вид:

$$x_0 \rightarrow x_0' = x_0 + a_0 \quad (I.3.5)$$

$$x_i \rightarrow x_i' = x_i$$

$$u^i \rightarrow (u^i)' = R_{ik} (u^k - x_k) + V_i x_0 + a_i$$

где R_{ik} - оператор 3-мерного поворота, g_{ij} , V_i - действительные параметры.

Движение идеальной несжимаемой сверхтекучей жидкости описывается в отсутствие объемных сил системой уравнений Эйлера с дополнительным членом Ландау и уравнениями неразрывности [23] (в рамках "двухскоростной" модели Ландау):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}_s}{\partial t} + (\vec{V}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_s &= 0 \\ \frac{\partial \vec{V}_n}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_n - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{V}_n - \vec{V}_s)^2 &= 0 \\ \text{div } \vec{V}_s &= 0, \text{div } \vec{V}_n = 0 \end{aligned} \quad (I.3.6)$$

(I.3.7)

где $\vec{V}_n$, $\vec{V}_s$ - скорость нормальной и сверхтекучей компонент жидкости соответственно; по индексам s, n суммирование нет.

Теорема I.3.2. Максимальной алгеброй инвариантности уравнений (I.3.6), (I.3.7) является прямая сумма двух расширенных алгебр Галилея $AG(1,3) \oplus D_1 \oplus D_2$ с базисными элементами

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial/\partial x_\mu, \quad G_a = t P_a + \partial/\partial u_a + \partial/\partial u^{a+3}, \\ J_a &= \varepsilon_{abc} x_b P_c + \hat{S}_a, \quad D_1 = x_a P_a + \hat{I}, \\ D_2 &= x_0 P_0 - \hat{I}, \\ u &= \begin{pmatrix} \vec{V}_s \\ \vec{V}_n \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_a = \begin{pmatrix} S_a & \hat{O} \\ \hat{O} & S_a \end{pmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} I_3 & O \\ O & I_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (I.3.8)$$

где приняты обозначения I_3 - единичная матрица 3×3 , $\hat{O}$ - нулевая матрица.

Замечание I. Уравнения (I.3.6) кроме алгебры (I.3.8) инвариантны относительно проективных преобразований, порождаемых оператором

$$A = x_0 x_\mu P_\mu + (x_0 - 2x_0 v_s^2) \partial/\partial u$$

Отметим, что учет взаимодействия между нормальной и сверхтекучей компонентами жидкости можно ввести в уравнения (I.3.6), (I.3.7) различными способами. В литературе встречаются обсуждения такой возможности на основе микроскопической теории [23, 48]. С точки зрения симметрии представляется естественным обобщение системы (I.3.6), (I.3.7) в виде

$$\begin{aligned} \partial \vec{V}_s / \partial t + (\vec{V}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_s &= \vec{F}_1(\vec{V}_n, \vec{V}_s, \frac{\partial \vec{V}_n}{\partial x}, \frac{\partial \vec{V}_s}{\partial x}); \\ \partial \vec{V}_n / \partial t + (\vec{V}_n \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}_n &= \vec{F}_2(\vec{V}_n, \vec{V}_s, \partial v_n / \partial x, \partial v_s / \partial x) \end{aligned} \quad (I.3.9)$$

с дополнительными условиями

$$\vec{\Phi}(\vec{v}_n, \vec{v}_s, \partial \vec{v}_n / \partial \vec{x}, \partial \vec{v}_s / \partial \vec{x}) = 0 \quad (1.3.10)$$

При этом следует иметь в виду, что функции $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{\Phi}$ в (1.3.9), (1.3.10) должны представлять собой векторные дифференциальные инварианты группы Галилея $G(1, 3)$ [4], поскольку левые части в (1.3.9) являются абсолютными векторными инвариантами группы Галилея.

В качестве примера приведем простейшую систему зацепленных уравнений вида (1.3.9), (1.3.10):

$$\begin{aligned} \partial \vec{v}_s / \partial t + (\vec{v}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_s &= 0 \\ \partial \vec{v}_n / \partial t + (\vec{v}_n \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_n &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{v}_s &= \lambda \operatorname{div} \vec{v}_n, \quad \lambda = \text{const.} \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Теорема 1.3.3. Максимальной алгеброй инвариантности системы уравнений (1.3.11) является 16-мерная алгебра Ли A_{16} , базис которой задается формулами

$$\begin{aligned} P_\mu &= \partial / \partial x_\mu, \quad G_a = x_0 P_a + \partial / \partial v_n^a + \partial / \partial v_s^a, \\ K_{ab} &= x_a P_b + v_s^a \partial / \partial v_s^b + v_n^a \partial / \partial v_n^b \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

Операторы K_{ab} порождают следующие линейные преобразования:

$$\begin{aligned} x'_0 &\rightarrow x_0 \\ \vec{x} &\rightarrow \vec{x}' = \Lambda \vec{x} + \vec{\alpha} \\ \vec{v}_s &\rightarrow \vec{v}_s' = \Lambda \vec{v}_s + \vec{v}_s \\ \vec{v}_n &\rightarrow \vec{v}_n' = \Lambda \vec{v}_n + \vec{v}_n \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

где Λ - произвольная числовая матрица.

Замечание I. Алгебру A_{16} с базисом (I.3.I2) можно представить в виде $[GL(3) \oplus G_3] \oplus T_4$, где $GL(3)$ - генераторы однородных линейных преобразований трехмерного пространства, G_3 - галилеевы переносы, T_4 - трансляции.

Хорошо известно, что существует глубокая аналогия между квантовой механикой частиц и гидромеханикой идеальной жидкости. Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера (вместе с сопряженным) относительно комплексной функции $\psi(\vec{x}, t)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + (U(x) + \kappa |\psi|^2) \psi = 0 \quad (\text{I.3.I4})$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + (U(x) + \kappa |\psi|^2) \psi^* = 0 \quad (\text{I.3.I5})$$

где $\hbar$ - постоянная Планка, $m > 0$ - масса частицы, κ - константа взаимодействия, $U(x)$ - внешний потенциал.

Исследованию симметрии уравнения Шредингера (I.3.I4), (I.3.I5) посвящено большое число работ (см. [57] и цитированную там литературу). Получим другую форму уравнений Шредингера. Следуя [62], применим к (I.3.I4), (I.3.I5) преобразования Маделунга

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp(i\alpha\phi), \quad \psi^* = \sqrt{\rho} \exp(-i\alpha\phi), \quad \alpha = \text{const.}$$

где $\rho = \psi^* \psi = |\psi|^2$, $\phi(x)$ - скалярный потенциал. Полагая теперь $\alpha = \frac{m}{\hbar}$, $m\phi = V(x)$, получим вместо (I.3.I4), (I.3.I5) уравнения для плотности ρ и потенциала V в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{m} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{\nabla} V) = 0 \quad (\text{I.3.I6})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} V)^2 + U(x) + \kappa \rho = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho}, \quad (\text{I.3.I7})$$

которые и представляют собой гидродинамическую форму нелинейного уравнения Шредингера.

Заметим, что уравнение (I.3.I7) отличается от уравнения для гидродинамического потенциала скорости идеальной жидкости правой частью, которая представляет собой так называемый "квантовый потенциал". При $\hbar = 0$ и $\hbar \rightarrow 0$ получим из (I.3.I7) классическое уравнение Гамильтона-Якоби-, а из системы (I.3.I6), (I.3.I7) в целом уравнения изэнтропического безвихревого движения газа (идеальной жидкости). В связи с этим гидродинамическую систему, описываемую уравнениями (I.3.I6), (I.3.I7) называют нелинейной безвихревой жидкостью Маделунга. Установим групповые свойства уравнений (I.3.I6), (I.3.I7) в отсутствие внешних полей, т.е. при $U(x)=0$.

Теорема I.3.4. Уравнения (I.3.I6), (I.3.I7) допускают 12-параметрическую расширенную группу Галилея $\tilde{G}(1, 3)$, базис алгебры Ли которой образуют операторы

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad \tilde{P} = \partial_\nu, \quad J_a = \varepsilon_{abc} x_b P_c$$

$$G_a = t \partial_a + \frac{1}{2m} x_a \partial_\nu, \quad D = -2t \partial_t - x_a \partial_a - \rho \partial_\rho \quad (I.3.I8)$$

Доказательство. Для инфинитезимального оператора группы $\tilde{G}(1, 3)$ $Q = \xi^\alpha \partial_\alpha + \eta \partial_\rho + \sigma \partial_\nu$ получим с помощью алгоритма Ли следующие определяющие уравнения относительно функций

$$\xi^\alpha(t, \vec{x}, \rho, \nu), \quad \eta(t, \vec{x}, \rho, \nu), \quad \sigma(t, \vec{x}, \rho, \nu) :$$

$$\xi^\alpha_{,\rho} = \xi^\alpha_{,\nu} = \xi^0_{,\alpha} = 0 \quad (I.3.I9)$$

$$\xi^a_{,\nu} + \xi^b_{,\alpha} = \delta_{ab} \xi^0_{,\nu} \quad (I.3.20)$$

$$\eta - \rho \eta_\rho = 0 \quad (I.3.21)$$

$$\eta_\nu = \eta_{\rho\rho} = 0 \quad (I.3.22)$$

$$2\eta_a - \rho \xi^a_{,bb} = 0 \quad (I.3.23)$$

$$\eta_0 + \lambda_1 \rho \sigma_{aa} = 0 \quad (I.3.24)$$

$$\sigma_\rho = \sigma_v = 0 \quad (I.3.25)$$

$$-\xi_0^a + 2\lambda_1 \sigma_a = 0 \quad (I.3.26)$$

$$2x\rho^2\eta + \rho\sigma_0 + x\rho^3\xi_0^0 - \lambda_2\eta_{aa} = 0 \quad (I.3.27)$$

Переопределенная система (I.3.19) - (I.3.27) решается следующим образом.

Из уравнений (I.3.22), (I.3.21), (I.2.23) заключаем, что $\eta = a(t)\rho$. Подставляя это выражение в (I.3.27) и расцепляя получившееся уравнение по независимым переменным, получим $\sigma_0 = 0$. Тогда из (I.3.24) следует $\eta_{00} = 0$, а из (I.3.25) $\xi_{i0}^i = 0$ (по i не суммировать), и с учетом этого из (I.3.27) $\xi_0^0 = -2a(t)$ причем $a(t) = C_{00} - \text{const} t, \dots$. Принимая во внимание изложенное, решение уравнений Киллинга (I.3.20) запишем в виде

$$\begin{aligned} \xi_0^0 &= -2C_{00}t + d_0, \\ \xi_a^a &= b_a t + C_{ab}x^b - C_{00}x_a + d_a, \quad C_{ab} = -C_{ba}, \end{aligned}$$

где C_{ab} , C_{00} , b_a , d_μ - произвольные постоянные.

К этим выражениям следует добавить уже известное соотношение

$$\eta = C_{00}\rho$$

и полученное из (I.3.26) выражение для σ через ξ^a :

$$\sigma = \frac{1}{2\lambda_1} (b_a x_a) + \rho, \quad \rho - \text{const}$$

Выбирая базис в этом пространстве решений обычным образом, получим набор базисных операторов (I.3.18). Теорема доказана.

Замечание I. Уравнение Гамильтона - Якоби, получающееся из (I.3.17) при $x=0$, $\hbar \rightarrow 0$ широко используются в механике сплошных сред. Наиболее широкая локальная группа, допускаемая этим уравнением, известна - это 2I-параметриче-

ская группа Ли $S(3) \otimes G_0(I, 3)$, где $G_0(I, 3)$ - обобщенная группа Галилея (иначе - конформное расширение группы Галилея).

Приведем без доказательства результат исследования групповых свойств часто встречающихся следствий из уравнения Гамильтона-Якоби.

Уравнение $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \lambda^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_a}\right]^2 = 0$ обладает той же симметрией, что и исходное уравнение Гамильтона-Якоби $\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial u}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_a} = 0$. Базисные операторы алгебры Ли группы $S(3) \otimes G_0(I, 3)$ записываются в виде

$$K_0 = (2D_1 + D_2)u - (|\vec{x}|^2 + 4\lambda t u) \partial_0,$$

$$K_a = 2x_a D_2 - (|\vec{x}|^2 + 4\lambda t u) \partial_a,$$

$$D_1 = -t \partial_0 + u \partial_u,$$

$$D_2 = x_a \partial_a + 2t \partial_0$$

(I.3.28)

$$A = t D_2 - \frac{1}{2\lambda} |\vec{x}|^2 \partial_u$$

$$G_a = t \partial_a + x_a \partial_u$$

$$J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a$$

$$\bar{J}_{ab} = u J_{ab}$$

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad \tilde{P} = \partial_u$$

Если уравнение Гамильтона-Якоби продифференцировать по времени и результат рассматривать на множестве решений исходного уравнения, то получим уравнение 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\lambda^2 \frac{\partial u}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_b} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b} = 0 \quad (I.3.29)$$

которое встречается в теории нелинейных волн.

Уравнение (I.3.29) инвариантно относительно II-мерной алгебры Ли $\tilde{A\bar{G}}(I, 3)$ с базисными операторами

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_a = \varepsilon_{abc} x_b P_c, \quad \tilde{P} = \partial_u, \quad \tilde{G} = t \partial_u, \quad (I.3.30)$$

$$D_1 = 2t \partial_t + x_a \partial_a, \quad D_2 = u \partial_u + x_a \partial_a$$

Обратимся к построению некоторых точных частных решений нелинейных ДУЧП, симметрия которых была рассмотрена в этом параграфе. Воспользуемся при этом алгоритмом, описанным в § 2 настоящей главы, опуская промежуточные выкладки.

Решения уравнения (I.3.1) ищем, используя его инвариантность относительно преобразований, порождаемых оператором $G_1 + \lambda P_0$ где G_1 и P_0 - операторы из (I.3.2). Анзац имеет вид

$$u^1 = t^2/2\lambda + \varphi^1(\omega), \quad (I.3.31)$$

$$u^2 = \varphi^2(\omega), \quad u^3 = \varphi^3(\omega)$$

где $\omega = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\lambda = \text{const}$, $\lambda \neq 0$

$G(I, 3)$ - неразмножаемое решение, полученное с помощью анзаца (I.3.31), можно представить в виде

$$\vec{u} = \vec{a}(y_0^2/2\lambda - \vec{a} \cdot \vec{y} + k) + \vec{b}F(\vec{a} \cdot \vec{y}, \vec{b} \cdot \vec{y}, \vec{c} \cdot \vec{y}) + \vec{c}\Phi(\vec{a} \cdot \vec{y}, \vec{b} \cdot \vec{y}, \vec{c} \cdot \vec{y}) + \vec{\theta}y_0$$

где F и Φ - произвольные дважды дифференцируемые (I.3.32) функции, $\vec{y} = \vec{x} + \vec{d}$, $y_0 = t + d_0$, $d_0, \vec{d}, \vec{\theta}, k$ - действительные параметры. Поскольку решение (I.3.32) содержит произвольные функции, можно говорить, что формула (I.3.32) представляет широкий класс точных решений уравнения (I.3.1).

Для нахождения частного решения системы уравнений (I.3.6), (I.3.7) используем анзац М2, табл. I. Редуцированные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 2\omega_1 \varphi^1 \varphi^1_{\omega_1} - 2\lambda \varphi^2 \varphi^1_{\omega_2} + \varphi^1_{\omega_3} + \varphi^1 &= 0 \\ 2\omega_1 \varphi^1 \varphi^2_{\omega_1} - 2\lambda \varphi^2 \varphi^2_{\omega_2} + \varphi^2_{\omega_3} + \beta/\lambda &= 0 \\ 2\omega_1 \varphi^1_{\omega_1} - 2\lambda \varphi^2_{\omega_2} + 2\varphi^1 &= 0 \end{aligned} \quad (I.3.32)$$

$$\begin{aligned} 2\omega_1 \psi^1 \psi^1_{\omega_1} - 2\lambda \psi^2 \psi^1_{\omega_2} + \psi^1_{\omega_3} + \psi^1 &= 2\omega_1 (\psi^1 - \varphi^1) \psi^1_{\omega_1} + \\ 2(\psi^2 - \varphi^2) \psi^1_{\omega_2} + 2\omega_1 (\varphi^1 - \psi^1) \varphi^1_{\omega_1} + 2(\varphi^2 - \psi^2) \varphi^1_{\omega_2} + (\varphi^1 - \psi^1)^2_{\omega_3} &= 0 \\ \omega_1 (\varphi^1 - \psi^1) \varphi^1_{\omega_3} + (\psi^2 - \varphi^2) \psi^2_{\omega_3} + \omega_1 (\varphi^1 - \psi^1) \varphi^1_{\omega_3} + (\varphi^2 - \psi^2) \varphi^2_{\omega_3} &= 0 \\ 2\omega_1 \psi^1 \psi^2_{\omega_1} - 2\lambda \psi^2 \psi^2_{\omega_2} + \psi^2_{\omega_3} + \beta/\lambda &= 2\lambda \omega_1 (\varphi^1 - \psi^1) \psi^1_{\omega_2} + \\ 2\lambda \omega_1 (\psi^1 - \varphi^1) \varphi^1_{\omega_2} + 2\lambda (\psi^2 - \varphi^2) \varphi^2_{\omega_2}, \omega_1 \psi^1_{\omega_1} - \lambda \psi^2_{\omega_2} + \psi^1 &= 0 \end{aligned} \quad (I.3.33)$$

где $\psi^i, \varphi^i, i=1, 2$ - новые неизвестные функции. Положим в (I.3.32) $\varphi^i = \varphi^i(\omega_3)$, тогда вместо (I.3.32), (I.3.33) получим

$$\begin{aligned}\varphi_{\omega_3}^2 &= -\beta/\alpha, \quad \varphi^{-1}=0 \\ \psi_{\omega_3}^2 &= -\beta/\alpha, \quad \psi^1=0\end{aligned}\quad (\text{I.3.34})$$

и, следовательно, функции

$$\begin{aligned}\vec{V}_s &= \vec{C} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \left(y_0 + \alpha \arcsin \frac{\vec{a} \cdot \vec{y}}{\sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{g})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{y})^2}} \right) \\ \vec{V}_n &= \vec{d} \cdot \frac{\beta}{\alpha} \left(y_0 + \alpha \arcsin \frac{\vec{a} \cdot \vec{y}}{\sqrt{(\vec{a} \cdot \vec{y})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{y})^2}} \right)\end{aligned}\quad (\text{I.3.35})$$

являются решениями уравнений (I.3.6), (I.3.7).

Найдем решения уравнений (I.3.16), (I.3.17), инвариантные относительно оператора G_1 из (I.3.18). В этом случае анзац имеет вид

$$\begin{aligned}v &= x_1^2/4m^2 + \varphi(\omega) \\ \rho &= \psi(\omega)\end{aligned}\quad (\text{I.3.36})$$

где $\omega_1 = t$, $\omega_2 = x_2$, $\omega_3 = x_3$. Подстановка (I.3.36) в (I.3.16), (I.3.17) дает редуцированные уравнения

$$\psi \omega_1 + 2m(\psi \omega_A \psi \omega_A + \psi \Delta_2 \psi) + \psi/\omega_1 = 0 \quad (\text{I.3.37})$$

$$\psi \omega_1 + m \psi \omega_A \cdot \psi \omega_A + \hbar^2/2m \cdot 1/\psi (\Delta_2 \psi - 1/2 \psi \cdot \psi \omega_A \psi \omega_A) = 0$$

где $A=2, 3$, $\Delta_2 = \partial^2/\partial \omega_A \partial \omega_A$

Применим теперь к системе уравнений (I.3.37) результаты теоремы I.2.2. Так как подгруппа с генератором G_1 не является нормальным делителем в $\tilde{G}(I, 3)$, то необходимо построить ее нормализатор, т.е. найти максимальные подгруппы группы $\tilde{G}(I, 3)$, для которых G_1 является нормальным делителем. Из общей теории известно [24], что для того, чтобы группа $H \subset \tilde{G}(I, 3)$ была нормализатором группы G_1 , необходимо и достаточно выполнение условия

$$[G_1, Q] = \alpha G_1, \alpha - \text{const}$$

где Q - генератор группы H . Следовательно, элемент алгебры $\widetilde{AG}(1, 3)$ вида

$$\theta^{ab} J_{ab} + \theta^{0a} G_a + \theta^M P_M + \theta^{00} D + \theta \tilde{P}$$

принадлежит алгебре АН группы H , если и только если

$$[G_1, \theta^{ab} J_{ab} + \theta^{00} D + \theta \tilde{P} + \theta^{0a} G_a + \theta^M P_M] = \alpha G_1 \quad (I.3.38)$$

Вычисляя коммутатор в левой части (I.3.38) с помощью коммутационных соотношений алгебры $\widetilde{AG}(1, 3)$ (0.18) и приравняв нулю члены при линейно независимых слагаемых, получим условия на коэффициенты $\theta^{ab}, \theta^{00}, \theta^{0a}, \theta^M$:

$$\theta'^2 = \theta'^3 = \theta^0 = \theta^1 = 0$$

Следовательно, алгебра АН порождается операторами

$\{J_{23}, P_2, P_3, \tilde{P}, D, G_a\}$, которые являются генераторами фактор-группы $Nor G_1/G_1$ - группы симметрии уравнений (I.3.37).

Возникает возможность дальнейшей редукции уравнений (I.3.37) и построения инвариантных решений. Возьмем для этой цели оператор J_{23} , который теперь следует записать в переменных, входящих в уравнения (I.3.37)

$$J_{23} = \omega_2 \partial \omega_3 - \omega_3 \partial \omega_2$$

Аналог для функций φ, ψ имеет вид

$$\varphi = f(\varepsilon), \psi = g(\varepsilon) \quad (I.3.39)$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ - новые инвариантные переменные, $\varepsilon_1 = \omega_1$, $\varepsilon_2 = \omega_2^2 + \omega_3^2$.

Подстановка (I.3.39) в (I.3.37) дает редуцированные уравнения

$$\begin{aligned} g \varepsilon_1 + m [\varepsilon_2 f \varepsilon_2 g \varepsilon_2 + g (f \varepsilon_2 + \varepsilon_2 f \varepsilon_2 \varepsilon_2)] + g / \varepsilon_1 &= 0 \\ f \varepsilon_1 + 4m \varepsilon_2 f^2 \varepsilon_2 + \hbar^2 / m \cdot 1/g (2g \varepsilon_2 + & \\ + 2\varepsilon_2 g \varepsilon_2 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 g^2 \varepsilon_2 / g) &= 0 \end{aligned} \quad (I.3.40)$$

Полагая в (I.3.40) $g_{\varepsilon_2} = f_{\varepsilon_2} = 0$, получим частное решение

$$g = \frac{c_1}{t}, \quad f = \alpha c_1 \ln t + c_2.$$

Подставляя это решение в (I.3.39), (I.3.35) и умножая его с помощью конечных преобразований из группы $\tilde{G}(I, 3)$, получим семейство частных решений уравнений (I.3.16), (I.3.17)

$$v = -\frac{1}{2m} \left(\vec{\theta} \cdot \vec{y} + \frac{\vec{\theta}^2}{2} y_0 \right) + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{y} + \vec{a} \cdot \vec{\theta} \cdot \vec{y}_0)^2}{4m y_0} - c_1 \ln y_0 + c_2,$$

$$p = \frac{c_1}{y_0}. \quad (I.3.41)$$

§4. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости

Движение вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии внешних массовых сил описывается уравнениями Навье-Стокса

$$\partial \vec{v} / \partial t + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \lambda \Delta \vec{v} = 0, \quad (I.4.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (I.4.2)$$

где $\vec{v}$ — скорость, $\lambda = \text{const}$.

Изучению групповых свойств уравнений (I.4.1), (I.4.2) посвящено большое число работ [7, 26, 60]. В настоящем параграфе определены групповые свойства и построены частные решения некоторых модификаций уравнений Навье-Стокса. Доказательство всех теорем осуществляется с помощью метода Ли.

Применяя к обеим частям уравнений (I.4.1) операцию rot , получим уравнение

$$\partial \vec{u} / \partial t + \operatorname{rot} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \lambda \Delta \vec{u} = 0,$$

в котором $\vec{u} = \operatorname{rot} \vec{v}$. Далее воспользуемся известными формулами векторного анализа

$$\operatorname{rot} (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \operatorname{rot} [\vec{u}, \vec{v}],$$

$$[\vec{v}, [\vec{u}, \vec{v}]] = (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{u} + \vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) - \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v},$$

и, учитывая условие несжимаемости (I.4.2), получим форму уравнений движения вязкой жидкости, в которую явно входит завихренность (уравнение Гельмгольца) [16]:

$$\begin{aligned} \partial \vec{u} / \partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} &= (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - \lambda \Delta \vec{u}, \\ \vec{u} &= \text{rot } \vec{v}. \end{aligned} \quad (\text{I.4.3})$$

Теорема I.4.1. Уравнения (I.4.3) инвариантны относительно алгебры Галилея $AG(I, 3)$ с базисными операторами

$$P_0 = \partial / \partial t, \quad P_a = \partial / \partial x_a, \quad J_a = \epsilon_{ab} x_b P_c + \hat{S}_a, \quad (\text{I.4.4})$$

$$G_a = a(t) P_a + a'(t) \partial / \partial v_a, \quad (\text{I.4.5})$$

где $\hat{S}_a$ - матрицы (I.3.8), (I.I.II), действие $\hat{S}_a$ определено на множестве векторов $\begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{u} \end{pmatrix}$, $a(t)$ - произвольная дифференцируемая функция, $a'(t) = da/dt$.

Следствие I. Из вида оператора (I.4.5), порождающего галилеевские преобразования следует, что для уравнений (I.4.3) принцип относительности Галилея заменится более общим свойством инвариантности относительно перехода в любую систему координат, движущуюся поступательно, т.е. уравнение Гельмгольца инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Лл.

Уравнения

$$\begin{aligned} \partial \vec{v} / \partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \lambda_1 \nabla (\vec{E})^2 + \lambda_2 (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} &= 0, \\ \partial \vec{E} / \partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} + \lambda_3 (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= 0, \\ \text{div } \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.4.6})$$

где $\vec{v}(\vec{x}, t)$ - скорость, $\vec{E}(\vec{x}, t)$ - напряженность электрического поля,

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \text{const}$, описывают генерацию сильных электрических полей при сложном движении сплошной несжимаемой среды [8]

Теорема I.4.2. Уравнения (I.4.6) допускают алгебру Ли расширенной группы Галилея $\tilde{G}(I, 3)$, базисные элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} P_0 &= \partial/\partial t, \quad P_a = \partial/\partial x_a, \\ J_a &= \varepsilon_{abc} x_b P_c + \hat{S}_a, \quad G_a = t P_a + \partial/\partial v^a \quad (I.4.7) \\ D_1 &= t P_0 - \hat{I}, \quad D_2 = x_a P_a + \hat{I}, \end{aligned}$$

где $\hat{I}$ - единичная матрица.

Следствие I. Как следует из (I.4.7), вектор $\vec{E}$ при переходе в другую инерциальную систему отсчета остается неизменным, что противоречит принципу относительности Галилея.

Движение несжимаемой теплопроводящей жидкости описывается системой уравнений [17]

$$\partial \vec{v} / \partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \lambda_1 \Delta \vec{v} = 0, \quad (I.4.8)$$

$$\partial u / \partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) u + \lambda_2 \Delta u = 0, \quad (I.4.9)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (I.4.10)$$

которая представляет собой уравнения Навье-Стокса (I.4.8), (I.4.10) и уравнение теплопроводности (I.4.9) с конвективным членом. Здесь $\lambda_1, \lambda_2 = \text{const}$, u - температура.

Теорема I.4.3. Максимальная алгебра инвариантности уравнений (I.4.8)-(I.4.10) - расширенная алгебра Галилея $\tilde{AG}(I, 3)$ с базисом

$$\begin{aligned} P_a &= \partial/\partial x_a, \quad P_0 = \partial/\partial t, \quad \tilde{P} = \partial/\partial u, \\ D_1 &= 2t P_0 + x_a P_a - v^a \partial/\partial v^a, \quad D_2 = u \tilde{P}, \\ G_a &= t P_a + \partial/\partial v^a, \quad J_a = \varepsilon_{abc} x_b P_c + S_a. \end{aligned} \quad (I.4.11)$$

Замечание. Уравнения (I.4.8.), (I.4.9) без условия (I.4.10), кроме операторов (I.4.11) допускают также оператор

$$A = x_0 x_\mu p_\mu + (x_a - x_0 v^a) \partial / \partial v^a,$$

порождающий проективные преобразования, т.е. алгеброй инвариантности уравнений (I.4.8), (I.4.9) является обобщенная алгебра Галилея $AG_0(I, 3)$.

Рассмотрим неустановившееся плоское потенциальное течение несжимаемой жидкости в неглубоком водоеме с твердым дном $y = -f(x)$ и свободной границей $y = u(x, t)$. В теории мелкой воды делается предположение о том, что давление в жидкости совпадает с гидростатическим. Учет кроме этого граничные условия

$$y = u(x, t): \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

$$y = -f(x): \frac{\partial \varphi}{\partial x} f' + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

где $\varphi(x, y)$ - потенциал скорости, $f' = df/dx$.

Можно показать, что при этом уравнения движения приобретают вид [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \lambda v^2 \frac{\partial v}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} - f \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda v \frac{\partial v}{\partial t} - f' v, \\ -\frac{\partial u}{\partial x} &= \lambda (v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}), \end{aligned} \quad (I.4.12)$$

где $v = \partial \varphi / \partial x$, $\lambda = \text{const}$

Поскольку уравнения (I.4.12) содержат произвольный элемент $f(x)$, естественным образом возникает задача групповой классификации. Ее результаты содержит

Теорема I.4.4. Уравнения (I.4.12) допускают следующие алгебры Ли:

а) алгебру Ли группы Галилея $G(I, 1)$ с базисом

$$P_0^I = \partial / \partial t, \quad P_1^I = \partial / \partial x, \quad G^I = t P_1 + \partial / \partial v, \quad (I.4.13)$$

если $f = \text{const}$;

б) алгебру Ли $AG(1,1)$ базисными элементами

$$P_0^{\bar{I}} = P_0^I, \quad P_1^{\bar{I}} = P_1^I - a \partial / \partial u, \quad G^{\bar{I}} = t P_1^I + \partial / \partial v, \quad (I.4.I4)$$

если $f = ax + b$, $a, b = \text{const}$;

в) алгебру Ли, базис которой образуют операторы

$$\begin{aligned} P_0^{\bar{I}} &= P_0^I, \\ A_1 &= \exp(\sqrt{a/\lambda} t) [P_1^I + \sqrt{a/\lambda} \partial / \partial v - (ax+b) \partial / \partial u], \\ A_2 &= \exp(-\sqrt{a/\lambda} t) [P_1^I - \sqrt{a/\lambda} \partial / \partial v - (ax+b) \partial / \partial u], \end{aligned} \quad (I.4.I5)$$

если $f = ax^2 + bx + c$, $a, b, c = \text{const}$.

г) единственный оператор P_0^I , если $f(x)$ - произвольная дважды дифференцируемая функция.

Замечание. Алгебры Ли с базисами (I.4.I3), (I.4.I4), очевидно, изоморфны.

В [42] поставлена задача об исследовании групповых свойств и построении точных решений уравнений гидродинамики несжимаемой вязкой жидкости с внутренним вращением. В [53] для описания движения жидкостей с внутренними степенями свободы (парамгнитные жидкости, эмульсии и т.п.) предложена система уравнений, состоящая из уравнений Навье-Стокса с поправками и уравнения, выражающего закон сохранения внутреннего момента импульса:

$$\begin{aligned} \partial \vec{v} / \partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \lambda_1 \vec{\nabla} [\vec{S} (\vec{S} - \vec{\nabla} \times \vec{v})] + \lambda_2 \Delta \vec{v} + \lambda_3 \vec{\nabla} \times \vec{S} &= 0, \\ \partial \vec{S} / \partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{S} + \lambda_4 (\vec{S} - \vec{\nabla} \times \vec{v}) + \lambda_5 \Delta \vec{S} &= 0, \\ \text{div } \vec{v} &= 0, \end{aligned} \quad (I.4.I6)$$

где $\vec{v}(\vec{x}, t)$ - скорость, $\vec{S}(\vec{x}, t)$ - плотность внутреннего момента импульса,

Теорема I.4.5. [31]. Максимальной алгеброй инвариантности уравнений (I.4.I6) является алгебра Галилея $AG(I,3)$ с базисными операторами

$$P_a = \partial/\partial x_a, \quad G_a = x_0 P_a - \partial/\partial v^a, \quad J_a = \epsilon_{abc} x_b P_c + \hat{S}_a \quad (I.4.17)$$

Отметим, что при преобразованиях Галилея, генерируемых операторами G_a из (I.4.17), вектор $\vec{S}$ остается неизменным.

При линеаризации системы уравнений Навье-Стокса, что часто используется в реальных гидродинамических задачах, вместо (I.4.1), (I.4.2) получаются уравнения

$$\begin{aligned} \partial \vec{v} / \partial t + \lambda \Delta \vec{v} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned} \quad (I.4.18)$$

Важно подчеркнуть, что линейная система Навье-Стокса (I.4.18) в отличие от нелинейной не инвариантна относительно преобразований Галилея, т.е. для нее не выполняется основной принцип механики — принцип относительности Галилея [42]. Это обстоятельство ставит под сомнение правомерность использования уравнений (I.4.18) для описания реальных гидродинамических систем.

Потеря галилеевской инвариантности системой (I.4.18) по-видимому связана с тем, что из уравнений (I.4.18) нельзя получить уравнений (I.4.1), (I.4.2) с помощью локальной замены переменных. Укажем, тем не менее, на связь между этими уравнениями, которая возможна при некоторых предположениях.

В уравнениях (I.4.18) осуществим замену операторов дифференцирования следующим образом

$$P_0 \rightarrow P_0, \quad P_a \rightarrow P_a + v^a.$$

Тогда после преобразований получим вместо (I.4.18) уравнения

$$\partial \vec{v} / \partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \Delta \vec{v} = 0, \quad (I.4.19)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} + (\vec{v})^2 = 0. \quad (I.4.20)$$

Если в (I.4.20) положить дополнительно $\vec{v}^2 = \text{const}$ (интeгровое

течение жидкости с постоянным модулем скорости), то из (I.4.19), (I.4.20) получим уравнения Навье-Стокса. Таким образом, для описания винтового течения несжимаемой вязкой жидкости возможно использование уравнений (I.4.18).

Обратимся к нахождению некоторых частных решений рассматриваемых систем уравнений.

Для уравнения Гельмгольца (I.4.3) используем анзац №6 табл. I, который в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} v^i &= \frac{\dot{a}}{a} \chi_i + \varphi^i(\omega), \quad u^i = \psi^i(\omega), \\ v^2 &= \varphi^2(\omega), \\ v^3 &= \varphi^3(\omega), \end{aligned}$$

С помощью этого анзаца осуществляется редукция уравнений (I.4.3) по оператору G_2 к уравнениям

$$\begin{aligned} \psi_{\omega_1}^1 - \frac{\dot{a}}{a} \psi^1 + \varphi^A \psi_{\omega_A}^1 - \psi^A \varphi_{\omega_A}^1 - \lambda \Delta_2 \psi^1 &= 0, \\ \psi_{\omega_1}^2 + \varphi^A \psi_{\omega_A}^2 - \psi^A \varphi_{\omega_A}^2 - \lambda \Delta_2 \psi^2 &= 0, \\ \psi_{\omega_1}^3 + \varphi^A \psi_{\omega_A}^3 - \psi^A \varphi_{\omega_A}^3 - \lambda \Delta_2 \psi^3 &= 0, \\ \psi^1 &= \varphi_{\omega_2}^3 - \varphi_{\omega_3}^2, \\ \psi^2 &= \varphi_{\omega_3}^1, \\ \psi^3 &= -\varphi_{\omega_2}^1, \end{aligned} \tag{I.4.21}$$

где $A = 2, 3$, $\Delta_2 = \partial^2 / \partial \omega_A \partial \omega_A$.

Частным решением (I.4.21), как легко проверить, являются функции

$$\begin{aligned} \vec{\psi} &= \vec{\delta} = \text{const}, \\ \varphi^1 &= \vec{\alpha} \cdot \vec{\omega} + f_1(\omega_1), \\ \varphi^2 &= \vec{\beta} \cdot \vec{\omega} + f_2(\omega_1), \\ \varphi^3 &= \vec{\gamma} \cdot \vec{\omega} + f_3(\omega_1), \end{aligned} \tag{I.4.22}$$

где $f_i(\omega_1)$ - произвольные дифференцируемые функции, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ - произвольные постоянные, такие, что

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix}, \quad \delta_1 = \gamma_2 - \beta_3 = 0, \quad \delta_2 = \alpha_3, \quad \delta_3 = -\alpha_2 \quad (I.4.23)$$

Возвращаясь к исходной системе уравнений (I.4.3) и используя групповое разложение, получим семейство частных неразмножаемых решений

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{\delta} \\ \vec{v} &= \vec{a} [\alpha_1 y_0 + \alpha_2 \vec{\beta} \cdot \vec{z} + \alpha_3 \vec{c} \cdot \vec{z} + f_1(y_0) + \vec{a} \cdot \vec{z} \dot{g}(y_0)/g(y_0)] + \\ &+ \vec{b} [\beta_1 y_0 + \beta_2 \vec{z} \cdot \vec{b} + \beta_3 \vec{c} \cdot \vec{z} + f_2(y_0)] + \vec{c} [\gamma_1 y_0 + \gamma_2 \vec{b} \cdot \vec{z} + \\ &+ \gamma_3 \vec{c} \cdot \vec{z} + f_3(y_0)], \quad \vec{z} = \vec{y} + \vec{\theta} t, \end{aligned} \quad (I.4.24)$$

где $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ - параметры, удовлетворяющие (I.4.23), $\vec{\theta}$ - произвольный параметр, $g(y_0), f_i(y_0)$ - произвольные дифференцируемые функции. Редукция уравнений мелкой воды (I.4.12) по оператору G для случая $f = ax + b$, a, b - произвольные постоянные дает редуцированные уравнения

$$\begin{aligned} \lambda \varphi \left(\frac{\varphi}{\omega} + \varphi_\omega \right) - a\varphi - \varphi_\omega - \frac{\varphi}{\omega} - \frac{b}{\omega} &= 0, \\ \frac{\lambda}{\omega} \varphi + \lambda \varphi_\omega - 2a &= 0, \end{aligned} \quad (I.4.25)$$

где $\omega = t$.

С их помощью легко строится решение исходных уравнений, представленное в виде анзаца

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{\omega} + \varphi(\omega), \\ u &= \psi(\omega) - 2ax. \end{aligned}$$

Неразмножаемое семейство полученных таким образом решений имеет вид

$$\begin{aligned} v &= \frac{y + c_1}{y_0} + \frac{2ay_0^2}{3\lambda}, \\ u &= \frac{12a^2 y_0^4}{45\lambda} + \frac{7ac_1 y_0}{g} - \frac{2a^2 y_0^3}{12\lambda} + \frac{c_2}{y_0} - 2ax - (ac_1 + b), \end{aligned} \quad (I.4.26)$$

где a, b, c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Приведем частное решение уравнений динамики жидкости с внутренним вращением (I.4.16), полученное с помощью анзаца №8 табл. I. Промежуточные выкладки ввиду их громоздкости опустим. В уравнениях (I.4.16) полагается $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, $\lambda_3 > 0$.

Решение имеет вид

$$\vec{v} = \vec{a} \left[\frac{y_0}{\alpha} + \sqrt{\omega_1} Z_{1/3} \left(-\frac{\omega_1^{3/2}}{6\alpha^2\lambda_3} \right) \right] + \vec{b} \left[\frac{Z \sqrt{D_1/2\lambda_3} + D_1 \text{th} \sqrt{D_1/2\lambda_3} (\omega_2 - \xi)}{\sqrt{D_1/2\lambda_3} + (\xi/2\lambda_3) \text{th} \sqrt{D_1/2\lambda_3} (\omega_2 - \xi)} \right] + \vec{c} \left[\frac{\sigma \sqrt{D_2/2\lambda_3} + D_2 \text{th} \sqrt{D_2/2\lambda_3} (\omega_3 - \rho)}{\sqrt{D_2/2\lambda_3} + (\sigma/2\lambda_3) \text{th} \sqrt{D_2/2\lambda_3} (\omega_3 - \rho)} \right],$$

$$\vec{s} = \vec{d} \exp \left\{ \int [E(\omega_1) \int_0^{\omega_1} \frac{d\theta}{E(\theta)}]^{-1} d\omega_1 \right\}. \quad (\text{I.2.27})$$

Здесь

$$E(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\alpha\lambda_3} \int \sqrt{x} Z_{1/3} \left(-\frac{x^{3/2}}{6\alpha^2\lambda_3} \right) dx \right\},$$

Z_m - цилиндрическая функция порядка m , (ξ, ρ) и (σ, ρ) - координаты некоторой точки в пространстве (v^2, ω_2) и (v^3, ω_3) соответственно, $\omega_1 = y_0^2 - 2\alpha \vec{a} \cdot \vec{y}$, $\omega_2 = \vec{b} \cdot \vec{y}$, $\omega_3 = \vec{c} \cdot \vec{y}$, D_1, D_2, α, d - параметры, причем $D_1, D_2 > 0$.

§5.06 одним нелинейном представлении

алгебр Галилея $AG(I, 3)$ и Пуанкаре $AP(I, 3)$

Известно, что алгебра Ли операторов полностью определяется набором структурных констант. Коммутационные соотношения алгебры Галилея $AG(I, 3)$ имеют вид (0.16). При этом операторы $\{P_i, J_a, G_a\}$ (I.1.10) образуют линейное представление алгебры $AG(I, 3)$. Поставим задачу о построении нелинейного представления алгебры $AG(I, 3)$ следующим образом.

Пусть операторы G_a имеют вид

$$G_a = f^{ab}(t, x, u) \partial/\partial x^b + g^{ab}(t, x, u) \partial/\partial u^b, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad u \in \mathbb{R}^3, \quad (I.5.1)$$

где $f^{ab}(t, x, u)$, $g^{ab}(t, x, u)$ — некоторые произвольные тензорные функции, зависящие от компонент векторов x , u . Операторы P_m , J_a соответствуют линейному представлению алгебры $AG(I, 3)$:

$$P_m = \partial/\partial x^m, \quad J_a = \varepsilon_{abc} x^b P_c + S_a$$

в пространстве функций $\psi(t, x, u)$.

Представим функции f^{ab} , g^{ab} в следующем виде:

$$\begin{aligned} f^{ab} &= x^a x^b F_1(t, |x|, |u|) + x^a u^b F_2(t, |x|, |u|) + u^a x^b F_3(t, |x|, |u|) + u^a u^b F_4(t, |x|, |u|) \\ &\quad + F_5 \delta_{ab} \\ g^{ab} &= x^a x^b H_1(t, |x|, |u|) + x^a u^b H_2(t, |x|, |u|) + u^a x^b H_3(t, |x|, |u|) + \\ &\quad + u^a u^b H_4(t, |x|, |u|) + \delta_{ab} H_5(t, |x|, |u|). \end{aligned} \quad (I.5.2)$$

Потребуем теперь выполнения коммутационных соотношений (0.16), в которых участвует оператор G_a , определенный из (I.5.1).

(I.5.2). В результате, приравнявая коэффициенты при независимых операторах $\partial/\partial x^a$ и $\partial/\partial u^a$ в левой и правой частях равенств, получим условия, накладываемые на функции F_i ; H_i ; $i = 1, 5$:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = F_3 = H_1 = H_2 = H_3 = 0, \quad H_4 H_5 = H_5 F_4 = 0, \\ \partial F_4 / \partial x_a &= \partial F_5 / \partial x_a = \partial H_4 / \partial x_a = \partial H_5 / \partial x_a = 0, \\ \partial H_4 / \partial u^a &= \frac{\partial H_5}{\partial u^a} = \partial F_4 / \partial u^a = \partial F_5 / \partial u^a = 0, \\ \frac{\partial F_4}{\partial t} &= \frac{\partial H_4}{\partial t} = \frac{\partial H_5}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial F_5}{\partial t} = 1. \end{aligned} \quad (I.5.3)$$

Из (I.5.3) следует, что базисные операторы G_a алгебры Ли $AG(I, 3)$ могут иметь вид

$$G_a = t \partial/\partial x^a + c_1 \partial/\partial u^a \quad (I.5.4)$$

$$G_a^* = t \partial/\partial x^a + c_2 u^a u^b \partial/\partial x^b + c_3 u^a u^b \partial/\partial u^b, \quad (I.5.5)$$

c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные.

Операторы (I.5.4) порождают конечные преобразования стандартного вида, а операторы (I.5.5) - конечные преобразования

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ x' &= x + \theta t + c_2 c_3 u \left(\frac{\theta \cdot u}{1 - \theta \cdot u} \right), \\ u' &= c_3 \frac{u}{1 - \theta \cdot u}, \end{aligned} \quad (\text{I.5.6})$$

где θ - вектор-параметр преобразования.

Алгебру Ли с базисом $\{J_a, P_a, G_a^*\}$, причем $c_2=0, c_3=1$ будем обозначать $AG^*(I, 3)$. В силу теоремы об изоморфизме алгебр Ли [9] алгебра $AG^*(I, 3)$ локально изоморфна алгебре Галилея $AG(I, 3)$. Как нетрудно убедиться, изоморфизм устанавливается отображением

$$u \mapsto u' = \frac{u}{1 - \theta \cdot u}.$$

Таким образом, мы получим нелинейное представление алгебры Ли группы Галилея. Полученный результат является частным случаем более общего утверждения. Пусть $x \in \mathbb{R}^4$, $u(x) \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^7 = \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^3$, элементом которого является вектор $y = (x, u(x))$. Пусть также в $\mathbb{R}^7$ действует группа $G(I, 3)$. Тогда справедлива

Теорема I.5.1. [50]. Максимальным конечнопараметрическим расширением группы Галилея $G(I, 3)$ является полная проактивная группа преобразований пространства $\mathbb{R}^7$. Базис соответствующей алгебры Ли образуют операторы

$$\begin{aligned} P_a &= \partial / \partial y_a, \\ J_{AB} &= y_A P_B - y_B P_A, \\ \Pi_A &= y_A y_B P_C, \quad A, B = \overline{0, 6}. \end{aligned} \quad (\text{I.5.7})$$

Естественным образом возникает задача описания дифференциальных уравнений, инвариантных относительно алгебры $AG^*(I,3)$.

Задача опирается на теорему о представлении [20], которую можно сформулировать следующим образом:

Теорема I.5.2. Если неособое инвариантное многообразие группы G задано регулярно уравнением $\psi(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, то существует такой инвариант этой группы $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$, что это многообразие задается уравнением $F(x) = 0$.

Другими словами, дифференциальные уравнения, допускающие группу G , записываются через дифференциальные инварианты этой группы. В силу теоремы Трессе о базисе [65] для любой группы существует базис дифференциальных инвариантов.

Рассмотрим построение дифференциальных инвариантов I-го порядка 3-параметрической подгруппы G_3 группы $G^*(I,3)$, элементами которой являются преобразования Галилея, порождаемые операторами

$$G_a = t \partial / \partial x_a + u^a u^b \partial / \partial u^b$$

Как известно [20], для этого необходимо решить систему линейных дифференциальных уравнений

$$G_a I(u, y) = 0, \quad (I.5.8)$$

где $I(u, y)$ — искомый инвариант. Поскольку $x \in \mathbb{R}^4$, $(u, y) \in \mathbb{R}^{15}$ $a = \overline{1,3}$, то существует $15-3=12$ функционально независимых решений (I.5.8) I_s , $S = \overline{1,12}$, которые и образуют базис дифференциальных инвариантов I порядка группы G_3 .

Не вдаваясь в подробности интегрирования уравнения (I.5.8), приведем возможный вид некоторых дифференциальных уравнений, инвариантных относительно подгруппы G_3 :

$$\begin{aligned} \partial \vec{u} / \partial t [\vec{v}(\vec{u}), \vec{u}] + [\vec{v}, \vec{u}] \cdot \vec{v}(\vec{u}) &= 0, \\ \det \left| \partial u^i / \partial x_j \right| &= 0, \\ \det |C| &= 0, \end{aligned} \quad (I.5.9)$$

где C - матрица 3×3 , элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{u_2^1}{u^1} - \frac{u_2^2}{u^2}, \quad C_{13} = \frac{u_3^1}{u^1} - \frac{u_3^3}{u^3}, \quad C_{21} = \frac{u_1^2}{u^2} - \frac{u_1^1}{u^1}, \\ C_{23} &= \frac{u_3^2}{u^2} - \frac{u_3^3}{u^3}, \quad C_{31} = \frac{u_1^3}{u^3} - \frac{u_1^1}{u^1}, \quad C_{32} = \frac{u_2^3}{u^3} - \frac{u_2^2}{u^2}, \quad C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0. \end{aligned}$$

В уравнениях (I.5.9) функция $\vec{u}(\vec{x}, t)$ преобразуется по закону (I.5.6) при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

Подобным же образом может быть построено нелинейное представление алгебры Пуанкаре $AP^*(I,3)$. Генераторы преобразований Лоренца при этом имеют вид

$$J_{0a}^* = x_0 P_a + x_a P_0 + \partial / \partial u^a - u^a u^b \partial / \partial u^b. \quad (I.5.10)$$

Укажем на одно интересное применение полученного представления $AP^*(I,3)$.

В работе [35] было показано, что требование релятивистской инвариантности уравнений, выражающих закон сохранения заряда, непосредственно приводит к системе уравнений Максвелла в вакууме. Подобное обстоятельство обнаружено в гидродинамике идеальной жидкости.

Пусть поле скоростей идеальной жидкости описывается вектор-функцией $\vec{u}(t, \vec{x})$ и пусть

$$\Phi(\vec{u}, \vec{u}, \dots, \vec{u}) = 0 \quad (I.5.11)$$

- система дифференциальных уравнений в частных производных относительно $\vec{u}(t, \vec{x})$. Следуя С.Ли, будем говорить, что система (I.5.II) инвариантна относительно преобразований Лоренца, если

$$Q_s \Phi \Big|_{\Phi=0} = 0 \quad (I.5.I2)$$

где Q_s - продолжение оператора $Q = \theta^{\mu\nu} J_{\mu\nu} + \theta^\mu P_\mu$. Операторы $J_{\mu\nu}$, P_μ образуют базис представления алгебры Ли группы Пуанкаре $P(I, 3)$, причем J_{0a} имеют вид (I.5.I0).

С помощью метода Ли можно доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма. Уравнение $\text{div } \vec{u}(t, \vec{x}) = 0$ инвариантно относительно преобразований, порождаемых операторами вида

$$Q = a(t) \partial_t + (b^a(t) + x_b \tilde{f}^{ab}(t, \vec{x})) \partial_{x_a} + (g^a(t, \vec{x}) + u^b f^{ab}(t, \vec{x})) \partial_{u^b} \quad (I.5.I3)$$

где $a(t)$, $b^a(t)$ - произвольные дифференцируемые функции,

$$\tilde{f}^{ab} = \begin{cases} f^{ab}, & a \neq b \\ h^a, & a = b \end{cases}$$

а $f^{ab}(\vec{x}, t)$, $g^a(\vec{x}, t)$, $h^a(\vec{x}, t)$ - совокупность произвольных функций, удовлетворяющих уравнению $\text{div } \vec{u} = 0$.

Очевидно, что операторы (I.5.I3) образуют бесконечномерную алгебру Ли, содержащую в качестве подалгебры Ли группы $B(I, 3)$,

$G(I, 3)$, $GL(3)$, $O(3)$, однако эта алгебра не содержит алгебры Пуанкаре $AP(I, 3)$.

Теорема I.5.3. Пусть (I.5.II) - система дифференциальных уравнений в частных производных I-го порядка, включающая подсистему

$$\text{div } \vec{u}(t, \vec{x}) = 0. \quad (I.5.I4)$$

Тогда для Лоренц-инвариантности исходной системы необходимо, чтобы она включала уравнение

$$\partial \vec{u} / \partial t + \vec{u} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0. \quad (I.5.I5)$$

Доказательство. Потребуем, чтобы уравнение (I.5.I4) удовлетворяло условию Лоренц-инвариантности (I.5.I2). Подставив в (I.5.I2) выражения (I.5.I0) для операторов ∂_a^* , приходим к уравнению

$$\vec{u} \cdot \text{div } \vec{u} + \partial \vec{u} / \partial t + \vec{u} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0,$$

из которого с учетом (I.5.I4) следует уравнение Эйлера (I.5.I5).

Замечание. Доказанное утверждение не означает, конечно, что уравнение Эйлера — единственно возможное релятивистское нелинейное уравнение для векторного поля. На множество решений системы (I.5.II) могут быть наложены различные дополнительные условия, что приводит к иным уравнениям.

Г Л А В А II

СИММЕТРИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В этой главе изучена симметрия систем ДУЧР релятивистской гидродинамики в различных случаях. Построены анзацы для векторного поля, инвариантные относительно одномерных несопряженных подгрупп группы Пуанкаре $P(1,3)$. С помощью анзацев проведена редукция и найдены многопараметрические семейства точных решений.

§1. Полная система уравнений релятивистской гидродинамики

Уравнения движения релятивистской жидкости содержатся, как известно, в уравнениях, выражающих собой законы сохранения энергии и импульса:

$$\partial T_{\mu\nu} / \partial x_\nu = 0, \quad (2.1.1)$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса.

При этом необходимо дополнительно учесть закон сохранения числа частиц в жидкости (уравнение непрерывности):

$$\partial(nu_\mu) / \partial x_\mu = 0 \quad (2.1.2)$$

и термодинамическое уравнение

$$d/ds (\sigma/n) = 0, \quad (2.1.3)$$

где s — собственное время, σ — удельная энтропия.

Можно показать [18], что уравнение (2.1.3) является следствием из уравнений (2.1.1), (2.1.2), т.е. движение релятивистской идеальной жидкости является адиабатическим.

Из (2.1.1) и (2.1.2), учитывая кроме того уравнение состояния среды в виде $n = f(v)$, получим окончательно [49]

$$(f - vf') \left(u_\nu u_\mu \frac{\partial v}{\partial x_\mu} + \frac{\partial v}{\partial x_\nu} \right) + vf' u_\mu \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (2.1.4)$$

где $f' \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\mu} + f' u_\mu \frac{\partial v}{\partial x_\mu} = 0, \quad (2.1.5)$

$$f' = df/dv, \quad v - \text{удельная энтальпия.}$$

Следует отметить, что групповые свойства уравнений одномерного адиабатического движения среды в релятивистской гидродинамике изучались в работе [10].

Изучение групповых свойств уравнений (2.1.4), (2.1.5) начнем со следующего утверждения.

Лемма 2.1.1. Уравнения (2.1.4), (2.1.5) с помощью локальной замены переменных принимает вид

$$U_\nu \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial W}{\partial x_\mu} = 0, \quad (2.1.6)$$

$$U^\mu \frac{\partial W}{\partial x_\mu} - F(W) \frac{\partial U_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (2.1.7)$$

где U_μ , W - новые неизвестные функции.

Доказательство.

Предположим, что $f - vf' \neq 0$ и перепишем (2.1.4) в виде

$$u_\mu u_\nu \frac{\partial v}{\partial x_\mu} + F(v) u_\mu \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \frac{\partial v}{\partial x_\nu} = 0, \quad (2.1.8)$$

где $F(v) = vf' / (f - vf')$.

Сделаем замену

$$v = \Phi(\bar{w}), \quad \text{так чтобы} \quad F[\Phi(\bar{w})] / \Phi'(\bar{w}) = \bar{w}.$$

Тогда функция $\Phi(w)$ определится из следующей неявной формулы:

$$\int d\Phi / F(\Phi) = \ln \bar{w}, \quad F(\Phi) \neq 0 \text{ выполняется всегда,}$$

а уравнение (2.1.8) после замены примет вид

$$u_\mu u_\nu \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_\nu} + \bar{w} u_\mu \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x_\mu} = 0. \quad (2.1.9)$$

Введем еще одну замену

$U_\mu = \bar{W} u_\mu$, тогда вместо (2.1.9) запишем

$$u_\nu \partial u_\mu / \partial x_\nu + \bar{W} \partial \bar{W} / \partial x_\mu = 0, \quad (2.1.10)$$

И, наконец, заменяя $\bar{W} = \frac{1}{2} W^2$

, получим окончательно уравнение (2.1.6) вместо уравнения (2.1.10).

Аналогичным путем получается уравнение (2.1.7).

Теорема 2.1.1. Алгеброй инвариантности уравнения (2.1.6) является расширенная алгебра Пуанкаре $AP(1,3)$.

Доказательство. Используем алгоритм С.Ли. В результате действия инфинитезимального оператора

$$Q = \xi^\alpha \partial / \partial x_\alpha + \zeta^\alpha \partial / \partial u^\alpha + \sigma \partial / \partial v$$

на уравнение (2.1.6), которое перепишем в виде

$$u^\nu u_\nu^\mu + v_\mu = 0, \quad (2.1.11)$$

получим следующие определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} & \zeta^\nu u_\nu^\mu + u^\nu (\zeta_\nu^\mu + u_\nu^\alpha \zeta_\alpha^\mu + v_\nu \zeta_\nu^\mu - u_\alpha^\mu \xi_\nu^\alpha - u_\alpha^\mu u_\nu^\beta \xi_\beta^\alpha - \\ & - u_\alpha^\mu v_\nu \xi_\nu^\alpha) + \sigma_\mu + u_\mu^\alpha \sigma_\alpha + v_\mu \sigma_v - v_\alpha \xi_\mu^\alpha - v_\alpha v_\mu \xi_\nu^\alpha - v_\alpha u_\mu^\beta \xi_\beta^\alpha \Big|_{v_\mu = -u^\nu u_\nu^\mu} = 0 \end{aligned}$$

После перехода на многообразие, задаваемое уравнением (2.1.11) получим тождество

$$\begin{aligned} & \zeta^\nu u_\nu^\mu + u^\nu \zeta_\nu^\mu + u^\nu u_\nu^\alpha \zeta_\alpha^\mu - u^\alpha u_\alpha^\nu u^\nu \zeta_\nu^\mu - u^\nu u_\alpha^\mu \xi_\nu^\alpha - u^\nu u_\alpha^\mu u_\nu^\beta \xi_\beta^\alpha + \\ & + u^\nu u_\alpha^\mu u_\nu^\beta \xi_\beta^\alpha + \sigma_\mu + u_\mu^\alpha \sigma_\alpha - u^\nu u_\nu^\alpha \sigma_v + u^\nu u_\nu^\alpha \xi_\mu^\alpha - u_\mu^\beta u_\nu^\alpha u^\nu \xi_\beta^\alpha = 0. \end{aligned}$$

Разделив его по "независимым" переменным

(т.к. $\zeta^\mu = \zeta^\mu(x, u, v)$, $\sigma = \sigma(x, u, v)$, $\xi^\mu = \xi^\mu(x, u, v)$) получим систему определяющих уравнений относительно функций

ξ^μ , ζ^μ , σ :

$$\xi_{\mu\beta}^{\alpha} = \xi_{\nu}^{\alpha} = 0,$$

$$\sigma_{\mu\alpha} = 0,$$

$$\gamma^{\nu} + u^{\nu} \gamma_{\mu}^{\mu} - u^{\mu} u^{\nu} \gamma_{\nu}^{\mu} - u^{\alpha} \xi_{\alpha}^{\nu} - u^{\nu} \sigma_{\nu} + u^{\nu} \xi_{\mu}^{\mu} = 0, \mu \neq \nu \quad (2.1.12)$$

$$\gamma^{\mu} + u^{\mu} \gamma_{\mu}^{\mu} - u^{\mu} u^{\mu} \gamma_{\nu}^{\mu} - u^{\nu} \xi_{\nu}^{\mu} - u^{\mu} \sigma_{\nu} + u^{\mu} \xi_{\mu}^{\mu} = 0, \sum_{\mu}, \quad (2.1.13)$$

$$\gamma_{\mu\alpha}^{\mu} - u^{\alpha} \gamma_{\nu}^{\mu} + \xi_{\mu}^{\alpha} = 0, \quad (2.1.14)$$

$$u^{\nu} \gamma_{\nu}^{\mu} + \sigma_{\mu} = 0. \quad (2.1.15)$$

Для того, чтобы решить эту систему, заметим, что из уравнений (2.1.12), (2.1.13) следует

$$\gamma^{\nu} = u^{\nu} (-\gamma_{\mu}^{\mu} + u^{\mu} \gamma_{\nu}^{\mu} - \xi_{\mu}^{\mu} + \sigma_{\nu}) + u^{\alpha} \xi_{\alpha}^{\nu}, \mu \neq \nu$$

$$\gamma^{\nu} = u^{\nu} (-\gamma_{\mu}^{\nu} + u^{\mu} \gamma_{\nu}^{\nu} - \xi_{\nu}^{\nu} + \sigma_{\nu}) + u^{\alpha} \xi_{\alpha}^{\nu}, \quad (\text{по } \nu \text{ не суммировать})$$

Отсюда

$$-\gamma_{\mu}^{\mu} + u^{\mu} \gamma_{\nu}^{\mu} - \xi_{\mu}^{\mu} + \sigma_{\nu} = \Phi(u, v, x) \quad (2.1.16)$$

т.е.

$$\gamma^{\mu} = u^{\mu} \Phi + u^{\alpha} \xi_{\alpha}^{\mu}. \quad (2.1.17)$$

Из уравнения (2.1.14) заключаем, что

$$\gamma_{\mu\alpha}^{\mu} = u^{\alpha} \gamma_{\nu}^{\mu} - \xi_{\mu}^{\alpha}.$$

Подставляя в это выражение формулу (2.1.17), получим

$$u^{\mu} \Phi_{\mu\alpha} + \xi_{\alpha}^{\mu} = u^{\alpha} u^{\mu} \Phi_{\nu} - \xi_{\mu}^{\alpha}, \text{ т.е.}$$

$$u^{\mu} (\Phi_{\mu\alpha} - u^{\alpha} \Phi_{\nu}) = -(\xi_{\mu}^{\alpha} + \xi_{\alpha}^{\mu}). \quad (2.1.18)$$

Подставляя (2.1.17) в (2.1.16), получаем

$$u^2 \Phi_{\nu} - u^{\mu} \Phi_{\mu\mu} = 2\Phi - \sigma_{\nu} + 2\xi_{\mu}^{\mu}, \sum_{\mu}. \quad (2.1.19)$$

Сравнивая (2.1.18), (2.1.19), заключаем, что

$$u^{\mu} (2\Phi - \sigma_{\nu}) = -u^{\alpha} (\xi_{\mu}^{\alpha} + \xi_{\alpha}^{\mu}), \mu \neq \alpha.$$

т.е.

$$2\Phi = \sigma_{\nu} - \frac{u^{\alpha}}{u^{\mu}} (\xi_{\mu}^{\alpha} + \xi_{\alpha}^{\mu}), \mu \neq \alpha.$$

что возможно тогда и только тогда, когда $\xi_{\mu}^{\alpha} + \xi_{\alpha}^{\mu} = 0, \alpha \neq \mu$.
Поэтому окончательно

$$\Phi = \frac{1}{2} \sigma_{\nu} - \xi_{\mu}^{\mu}$$

Отсюда и из уравнения (2.1.18) следует $\sigma_{\nu\nu} = 0$.

Наконец, требуя совместности уравнения (2.1.15) с остальными, получим $\sigma_{\mu} = 0, \xi_{\lambda\nu}^{\mu} = 0$. Тогда система определяющих уравнений примет вид

$$\xi_{\mu}^{\alpha} = \xi_{\nu}^{\alpha} = \xi_{\lambda\nu}^{\mu} = \sigma_{\mu} = \sigma_{\mu\mu} = \sigma_{\nu\nu} = 0,$$

$$\gamma_{\mu}^{\mu} = \frac{1}{2} u^{\mu} \sigma_{\nu} + u^{\alpha} \xi_{\alpha}^{\mu} - u^{\mu} \xi_{\mu}^{\mu}, \text{ по } \mu \text{ не суммируется.}$$

$$\xi_{\nu}^{\mu} + \xi_{\mu}^{\nu} = 0, \mu \neq \nu.$$

Выпишем ее общее решение:

$$\xi_{\mu}^{\mu} = C_{\mu\nu} x_{\nu} + C_{00} x_{\mu} + d_{\mu}, \quad C_{\mu\nu} = -C_{\nu\mu}, \mu \neq \nu,$$

$$\gamma_{\mu}^{\mu} = \frac{a}{2} u^{\mu} + C_{\mu\nu} u^{\nu}, \mu \neq \nu$$

$$\sigma = a v + b, \quad a, b, d_{\mu}, C_{\mu\nu} - \text{const.}$$

Таким образом, базис алгебры инвариантности уравнения (2.1.6) образуют операторы

$$P_{\mu} = -g_{\mu\nu} \partial/\partial x_{\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_{\mu} P_{\nu} - x_{\nu} P_{\mu} + S_{\mu\nu}, \quad (2.1.20)$$

$$D_1 = x^{\mu} P_{\mu}, \quad D_2 = \frac{1}{2} u^{\mu} \partial/\partial u^{\mu} + v \partial/\partial v, \quad \tilde{P} = \partial/\partial v,$$

где $S_{\mu\nu}$ - матрица (4x4), реализующая представление $D(I/2, I/2)$ группы $SO(1,3)$ в пространстве решений уравнения (2.1.6), и, следовательно, алгеброй инвариантности уравнения (2.1.6) является расширенная алгебра Пуанкаре $\tilde{AP}(1,3)$. Теорема доказана.

Теорема 2.1.1 Дает ответ на вопрос о том, какова симметрия уравнения движения релятивистской жидкости в случае когда уравнение состояния среды не фиксировано и содержит произвольную функцию. Покажем теперь, как этот произвол влияет на симметричные свойства уравнения неразрывности (2.1.7), т.е. проведем групповую классификацию уравнения

$$f(v)u_\mu^\mu + f'(v)u^\mu v_\mu = 0.$$

Теорема 2.1.1. Алгебра инвариантности движения неразрывности (2.1.7) бесконечномерна для любого уравнения состояния среды.

Доказательство. Легко проверить, что с помощью алгоритма Ли получается следующая система определяющих уравнений

$$\begin{aligned} f \zeta_\alpha^\mu - f \xi_\alpha^\mu + f' u^\mu \sigma_{\alpha\mu} &= \delta_{\mu\alpha} \Phi(x, u, v) f, \\ f \zeta_v^\mu + f' \zeta^\mu + f' u^\mu \sigma_v - f' u^\alpha \xi_\alpha^\mu &= \Phi f' u^\mu, \\ f \zeta_\mu^\mu + f' u^\mu \sigma_\mu &= 0, \\ \xi_v^\mu &= \xi_\alpha^\mu = 0, \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

где $\Phi(x, u, v)$ — произвольная функция

Условия совместности (2.1.21) приводят к дополнительным соотношениям

$$\begin{aligned} f'' \sigma_{\alpha\alpha} + f' \Phi_{\alpha\alpha} &= 0, \\ f' \sigma_v + f \Phi_v &= 0, \\ f' \sigma_\alpha + f \Phi_\alpha + f \xi_{\mu\alpha}^\mu &= 0, \\ f'' \sigma_\alpha + f' \Phi_\alpha + f \xi_{\mu\alpha}^{\mu\prime\prime} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

Из уравнений (2.1.22) следует, что

$$\left(\frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f} \right) \sigma_\alpha = 0, \quad \frac{(f'')^2 - f' f''}{(f'')^2} \Phi_\alpha + \frac{(f')^2 - f f''}{f' f''} \Phi_{\alpha v} = 0, \quad f, f', f'' \neq 0$$

Это возможно, если

$$f = a \exp(bv), \quad a, b - \text{const} \quad (2.1.23)$$

или

$$\Phi_{u\alpha} = \sigma_\alpha = 0, \quad \forall f(v). \quad (2.1.24)$$

Рассмотрим последовательно оба случая:

а) пусть справедливо (2.1.23), тогда система уравнений (2.1.21), (2.1.22) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_{u\alpha}^m - \dot{\zeta}_\alpha^m &= \delta_{m\alpha} \Phi + u^m \Phi_{u\alpha}, \\ \dot{\zeta}_v^m + b \dot{\zeta}_\alpha^m - b u^\alpha \dot{\zeta}_\alpha^m &= b \Phi u^m + u^m \Phi_v, \\ \dot{\zeta}_m^m - u^\alpha \dot{\zeta}_{m\alpha}^m &= u^m \Phi_m, \\ b \sigma_{u\alpha} &= -\Phi_{u\alpha}, \\ b \sigma_v &= -\Phi_v, \\ b \sigma_\alpha + \dot{\zeta}_{m\alpha}^m &= -\Phi_\alpha, \\ \dot{\zeta}_{u\alpha}^m = \dot{\zeta}_v^m &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.25)$$

Очевидно, что все решения системы (2.1.25) содержат произвольную функцию и таким образом образуют бесконечномерное линейное пространство.

б) пусть выполняются (2.1.24). Тогда из (2.1.21), (2.1.22) имеем

$$\left. \begin{aligned} \partial/\partial u^\alpha (f \dot{\zeta}_v^m - f u^\alpha \dot{\zeta}_\alpha^m - f u^m \Phi) &= 0, \\ \partial/\partial v (f \dot{\zeta}_v^m - f u^\alpha \dot{\zeta}_\alpha^m - f u^m \Phi) &= 0, \\ \partial/\partial x_m (f \dot{\zeta}_v^m - f u^\alpha \dot{\zeta}_\alpha^m - f u^m \Phi) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.26)$$

$$\dot{\zeta}_{u\alpha}^m = \dot{\zeta}_v^m = \Phi_{u\alpha} = \sigma_{u\alpha} = \sigma_\alpha = 0, \quad (2.1.27)$$

$$f' \sigma_v + f \Phi_v = 0, \quad (2.1.28)$$

$$\dot{\zeta}_{m\alpha}^m + \Phi_\alpha = 0. \quad (2.1.29)$$

Для того, чтобы выписать решение приведенной системы, заметим, что из (2.1.27), (2.1.29) следует $\phi_{\mu\nu} = \phi_{\mu\alpha} = 0$. Поэтому

$$\phi = \varphi_1(v) + \varphi_2(x)$$

Тогда из (2.1.27), (2.1.28) находим

$$\xi^\mu = - \iint (\partial \varphi_2 / \partial x_\alpha) dx_\alpha dx_\mu, \quad (2.1.30)$$

$$\sigma = - \int (f/f') \varphi_1' dv. \quad (2.1.31)$$

Из уравнений (2.1.26) находим, что

$f(\xi^\mu - u^\alpha \xi_\alpha^\mu - u^\mu \phi) = \psi^\mu(x)$, где функции $\psi^\mu(x)$ удовлетворяют условию $\partial \psi^\mu / \partial x_\mu = 0$. Поэтому окончательно

$$\xi^\mu = \frac{1}{f} \psi^\mu(x) + u^\mu \phi + u^\alpha \xi_\alpha^\mu = \frac{1}{f} \psi^\mu(x) + u^\mu \phi - u^\alpha \int \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_\alpha} dx_\mu \quad (2.1.32)$$

Таким образом, и в этом случае алгебра инвариантности уравнения неразрывности (2.1.7) бесконечномерна, так как выражения для координат инфинитезимального оператора (допускаемого уравнением) (2.1.30) - (2.1.32) содержат произвольные функции.

Обратимся теперь к полной системе уравнений (2.1.6), (2.1.7), исключая случай $f - v f' = 0$, который будет рассмотрен ниже. Чтобы определить, какова симметрия этих уравнений, необходимо и достаточно, согласно методу С. Ли, определить касательное векторное поле к инвариантному многообразию, задаваемому обоими уравнениями системы.

Теорема 2.1.3. Уравнения (2.1.7), (2.1.6) инвариантны относительно расширенной алгебры Пуанкаре $P(1,3)$.

Доказательство. Определяющая система уравнений для уравнения (2.1.7) имеет вид

$$\mathcal{L}^m - u^\alpha \mathcal{L}_\alpha^m = \Psi(x, u, v) u^m, \quad (2.1.33)$$

$$\mathcal{L}_{u^\alpha} = 0,$$

$$F u^m \mathcal{L}_m^\nu + u^\nu u^m \sigma_m + \sigma_\nu = 0, \quad (2.1.34)$$

$$(u_\nu u^\nu + 1)(\sigma_\nu - \frac{F'}{F} \sigma) + F \Psi_\nu u_\nu u^\nu - \Psi - 2 \mathcal{L}_\nu^\nu = 0,$$

по ν не суммировать

$$u^\nu u^m (\sigma_\nu - \frac{F'}{F} \sigma) + F \Psi_\nu u^m u^\nu - (\mathcal{L}_\nu^\nu + \mathcal{L}_m^m) = 0, \quad m \neq \nu \quad (2.1.35)$$

где $\Psi(x, u, v)$ — произвольная функция.

Сравнивая (2.1.34) и (2.1.35), заключаем, что

$$\mathcal{L}_\nu^\nu + \mathcal{L}_m^m = 0, \quad m \neq \nu$$

$$\Psi = \frac{F'}{F} \sigma - \sigma_\nu - 2 \mathcal{L}_\nu^\nu, \quad \text{по } \nu \text{ не суммировать.}$$

Теперь потребуем совместности приведенных уравнений с уравнениями (2.1.21), (2.1.22). В результате получим $\Psi = \Phi$,

$$\mathcal{L}^m - u^\alpha \mathcal{L}_\alpha^m = \Phi u^m,$$

$$\mathcal{L}_{x^\nu}^m = 0,$$

$$\mathcal{L}_\nu^\nu + \mathcal{L}_m^m = 0, \quad m \neq \nu \quad (2.1.36)$$

$$\mathcal{L}_{u^\nu}^m = \mathcal{L}_\nu^m = \sigma_m = \sigma_\nu = \mathcal{L}_{u^m} = 0,$$

$$\Phi = -2 \mathcal{L}_m^m, \quad \mathcal{L}_m^m.$$

Решением (2.1.36) являются функции $\mathcal{L}^m = C_{m\nu} x^\nu + d_m$.
 $\mathcal{L}^m = C_{m\nu} u^\nu - 2 C_{00} u^0, \quad \sigma = a$, где $C_{m\nu} = -C_{\nu m}$, $C_{00} = C_{11} = C_{22} = C_{33}$.

Соответствующий базис операторов симметрии имеет вид

$$P_m = -g_{m\nu} \partial / \partial x_\nu, \quad J_{m\nu} = x_m P_\nu - x_\nu P_m + S_{m\nu}, \quad \tilde{P} = \partial / \partial v, \quad (2.1.37)$$

$$D = x^\nu P_\nu - u^m \partial / \partial u^m,$$

где $S_{m\nu}$ имеет тот же смысл, что и в (2.1.20). Теорема доказана.

§2. Релятивистский аналог уравнения Эйлера

Предположим, что релятивистская жидкость описывается уравнением состояния $f - \nu f' = 0$, т.е. $f = q\nu$, $q = \text{const}$. Указанное уравнение является "предельно жестким" для релятивистской жидкости [11].

Тогда уравнения (2.1.4), (2.1.5) принимают вид

$$u_\mu \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\nu \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\mu} + u_\mu \frac{\partial \nu}{\partial x_\mu} = 0. \quad (2.2.2)$$

Уравнение (2.2.1) естественно назвать релятивистским аналогом уравнения Эйлера. Известно, что симметрия уравнения Эйлера весьма широка [64]. В релятивистском случае симметрия уравнения Эйлера оказывается еще шире.

Теорема 2.2.1. Алгебра инвариантности релятивистского аналога уравнения Эйлера бесконечномерна.

Доказательство. С помощью алгоритма Ли получаем определяющие уравнения для координат инфинитезимального оператора

$$\zeta^\mu - u^\alpha \xi^\mu_\alpha = \Phi(x, u) u^\mu, \quad (2.2.3)$$

$$u^\mu \zeta^\nu_\mu = 0 \quad (2.2.4)$$

Для того, чтобы получить решения приведенной системы уравнений в явном виде, перепишем (2.2.4) в эквивалентном виде:

$$\frac{dx_\mu}{u_\mu} = \frac{dx_\alpha}{u_\alpha}.$$

Умножая знаменатели на u_μ (нижние индексы при компонентах u не означают дифференцирования) и интегрируя, получим набор инвариантов

$$\omega_\alpha = u_\alpha u^\mu \chi_\mu - \chi_\alpha u^\mu u_\mu.$$

Поэтому

$$\dot{\chi}^\nu(x, u) = \chi^\nu(\omega, u). \quad (2.2.5)$$

Подставляя (2.2.5) в (2.2.3), получим

$$u^\alpha \dot{\xi}_\alpha^\mu = \phi u^\mu - \chi^\mu, \quad \text{т.е.}$$

$$\frac{dx_\alpha}{u_\alpha} = \frac{dx_\beta}{u_\beta} = \frac{d\xi^\mu}{\phi u^\mu - \chi^\mu}. \quad (2.2.6)$$

Решение соответствующей (2.2.6) однородной системы уравнений получаем также, как (2.2.5):

$$I \xi^\mu(x, u) = \varphi^\mu(\omega, u)$$

Найдем решение неоднородной системы

$$\frac{dx_\alpha}{u_\alpha} = \frac{d\xi^\mu}{\phi u^\mu - \chi^\mu}$$

Интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \bar{I} \xi^\mu &= \frac{\int \phi(x, u) u^\mu u^\alpha dx_\alpha}{u_\beta u^\beta} - \frac{\int \chi^\mu u^\beta dx_\beta}{u_\alpha u^\alpha} = \\ &= \frac{u^\mu}{u_\nu u^\nu} F(x, u) - \frac{u^\alpha \chi_\alpha}{u_\nu u^\nu} \chi^\mu(\omega, u). \end{aligned}$$

Общее решение (2.2.6), таким образом, запишется в виде

$$\xi^\mu(x, u) = I \xi^\mu + \bar{I} \xi^\mu = \varphi^\mu(x, u) + \frac{u^\mu F(x, u) - u^\alpha \chi_\alpha \chi^\mu(\omega, u)}{u_\nu u^\nu}. \quad (2.2.7)$$

Из (2.2.5), (2.2.7) следует утверждение теоремы.

Следствие I. Релятивистское уравнение Эйлера инвариантно относительно конформной алгебры специального вида.

Действительно, если в (2.2.5), (2.2.7) положить

$$F = -(\theta_\nu u^\nu)(u^\alpha x_\alpha)^2, \quad \varphi^\mu = -\frac{\omega_\mu(\omega_\alpha \theta^\alpha)}{(u_\nu u^\nu)^2}, \quad \chi^\mu = \frac{\omega_\mu u^\nu \theta_\nu}{u_\alpha u^\alpha}, \quad \theta_\nu = \text{const},$$

то получим операторы

$$K_\mu = -x_\mu x^\nu P_\nu + \frac{1}{u_\alpha u^\alpha} [u_\mu u^\alpha u^\beta x_\beta - u_\mu x^\alpha u_\alpha u^\beta] \partial / \partial u^\beta, \quad (2.2.8)$$

образующие конформную алгебру, что легко проверяется. Операторы K_μ порождают преобразования

$$x'_\mu = \frac{x_\mu}{1 - \theta_\nu x^\nu}, \quad u'_\mu = \frac{u_\mu}{1 - \frac{\theta_\nu u^\nu u_\alpha x^\alpha - \theta_\nu x^\alpha u_\alpha x^\alpha}{u_\beta u^\beta}}, \quad (2.2.9)$$

где θ_ν - параметры преобразований.

Замечание I. Вместо уравнения (2.2.1) можно было бы рассмотреть более общее уравнение

$$f^\mu(u) \frac{\partial u}{\partial x^\mu} = 0,$$

где

$$f = \{f^\alpha | \alpha = 0, 1, \dots, n-1\}, \quad u = \{u^\beta | \beta = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

При этом утверждение теоремы сохраняет силу, что легко проверить.

Замечание 2. Чтобы величина u_μ имела смысл компоненты 4-х скорости, необходимо выполнение соотношения

$$u_\mu u^\mu = 1 \quad (2.2.10)$$

которое выражает тот факт, что в собственной системе отсчета скорость жидкости равна нулю. Это приводит к тому, что в системе определяющих уравнений всех рассмотренных выше урав-

нений появляется дополнительно условие

$$u_{\mu} \xi^{\mu} = 0,$$

которое не изменяет в принципе характера симметрии (не сужает ее). Так, например, вместо (2.2.8) получим

$$K_{\mu} = -x_{\mu} x^{\nu} P_{\nu} + (u_{\mu} u^{\nu} u^{\alpha} x_{\alpha} - u_{\mu} x^{\nu}) \partial / \partial u_{\nu}.$$

Для уравнения (2.2.2) остается справедливым результат теоремы

2.1.2. Однако представляется интересным рассмотреть случай

$v = \text{const}$. Тогда система (2.1.4), (2.1.5) с учетом (2.2.10) приобретает особенно простой вид:

$$u_{\mu} \partial u_{\nu} / \partial x_{\mu} = 0,$$

$$\partial u_{\mu} / \partial x_{\mu} = 0,$$

$$u_{\mu} u^{\mu} = 1.$$

(2.2.11)

Теорема 2.2.2. [38]. Уравнения (2.2.11) инвариантны относительно группы неоднородных линейных преобразований в 4-х мерном пространстве $JGL(4, R)$.

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущему.

Выпишем здесь только определяющие уравнения для $\xi^{\mu}(x, u)$.

$\xi^{\mu}(x, u)$:

$$\xi^{\mu} u_{\mu} = 0,$$

$$u^{\mu} \xi_{\mu}^{\nu} = 0,$$

$$\xi^{\mu} - u^{\nu} \xi_{\nu}^{\mu} = 0, \mu \neq \nu,$$

$$\xi^0 = \xi^1 = \xi^2 = \xi^3,$$

$$\xi^0 = \xi^1 = \xi^2 = \xi^3,$$

$$g_{\mu\nu} (\xi^{\mu} u^{\nu} + u^{\mu} \xi^{\nu}) = 0.$$

(2.2.12)

Общим решением (2.2.12) являются функции

$$\xi^m = c_{\mu\nu} x^\nu + b^m,$$

$$\eta^m = c_{\mu\nu} u^\nu,$$

где $c_{\mu\nu}, b^m - \text{const.}$

Соответственно, базисными элементами алгебры Ли, допускаемой уравнениями (2.2.11) являются операторы $P_\mu, J_{\mu\nu},$

$K_{\mu\nu} = x_\nu P_\mu - x_\mu P_\nu + \Sigma_{\mu\nu}$, где $\Sigma_{\mu\nu}$ выражаются через матрицы $S_{\mu\nu}$ [35].

Замечание I. Из явного вида базисных элементов алгебры $AP(1,3)$ (2.1.37) следует, что релятивистскую жидкость, описываемую уравнениями (2.2.11) можно интегрировать как движение частицы с переменной массой ($P_\mu P^\mu \neq \text{const}$) и бесконечным набором спинов $S = 0, 1, 2, 3, \dots$ [42]. Наряду с системой уравнений (2.2.11) подобным же образом могут быть интерпретированы и другие допустимые с симметрией точки зрения системы уравнений:

$$u_\mu \partial u_\nu / \partial x_\mu = 0,$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu u^\nu = 0,$$

$$u_\mu u^\mu = 1;$$

(2.2.13)

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0,$$

$$\partial_\nu u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0,$$

$$u_\mu u^\mu = 1;$$

(2.2.14)

$$u^\mu \partial_\mu u^\nu = 0,$$

$$\partial_\mu (u^\mu u_\nu u^\nu) = 0,$$

(2.2.15)

симметрия которых во всяком случае не уяз, чем симметрия уравнений (2.2.II).

Нелинейные уравнения движения для релятивистской жидкости, допускаемые с симметричной точки зрения, можно строить и из линейных способом, указанным в [43]. В исходном куанкс-ре-инвариантном уравнении для 4-х вектора скорости

$$\lambda_1 \partial_\alpha \partial^\alpha u_\mu + \lambda_2 \partial_\mu (\partial_\nu u^\nu) = m^2 u_\mu, \quad (2.2.I6)$$

$m, \lambda_1, \lambda_2 - \text{const}$, вектор - оператор ∂_μ и вектор u_μ заменим по формуле

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = A_1 \partial_\mu + A_2 u_\mu + A_3 u_\nu \partial^\nu u_\mu$$

$$u_\mu \rightarrow \tilde{u}_\mu = C_1 u_\mu + C_2 u_\nu \partial^\nu u_\mu$$

где A_1, A_2, A_3, C_1, C_2 - функциями от $u_\mu u^\mu$. В итоге получим уравнение

$$\lambda_1 D_\alpha D^\alpha \tilde{u}_\mu + \lambda_2 D_\mu (D_\nu \tilde{u}^\nu) = m^2 \tilde{u}_\mu \quad (2.2.I7)$$

Уравнение (2.2.I7) при определенных выборах функций A_i, C_1, C_2 инвариантно относительно более широких групп, чем исходное уравнение (2.2.I6). Так, например, в классе уравнений (2.2.I7) входит релятивистский аналог уравнения Эйлера, инвариантный, как это было показано; относительно бесконечномерной алгебры, в то время, как максимальной локальной группой инвариантности уравнения (2.2.I6) является алгебра $AP(1,3)$.

Замечание 3. Если предполагать, что скорость жидкости меньше скорости света в вакууме, то в уравнениях движения релятивистской жидкости должны присутствовать члены типа $m^2 u_\mu$. В связи с этим целесообразно наряду с релятивистским аналогом уравнения Эйлера, рассмотреть уравнение Эйлера

"о массой"

$$u^\nu \partial_\nu u^\mu = m^2 u^\mu. \quad (2.2.18)$$

Теорема 2.2.3. Максимальной локальной алгеброй инвариантности уравнения (2.2.18) является бесконечномерная алгебра Ли. Координаты операторов алгебры инвариантности имеют вид (2.2.19)

Доказательство. Приведем конечный результат вычислений, проведенных по такой же схеме, что и при доказательстве теоремы 2.2.1. Координаты инфинитезимального оператора $Q = \xi(x, u) \partial/\partial x + \zeta(x, u) \partial/\partial u$, генерирующего преобразования из группы инвариантности уравнения (2.2.18) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^\mu &= \psi^\mu(\sigma, \omega, \rho) + \frac{1}{u_\beta u^\beta} [\chi^\mu u^\alpha x_\alpha - u^\mu u^\alpha G_\alpha(x, u) - u^\mu u^\alpha \Phi_\alpha(x, u)], \\ \zeta^\mu &= \chi^\mu(\sigma, \omega, \rho) - u^\mu \varphi(x, u), \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

где

$$\sigma_\mu(x) = u_\mu u^\alpha x_\alpha - x_\mu u^\alpha u_\alpha,$$

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{u_\alpha u_\beta}{u^\beta u^\beta},$$

$$\rho_\mu(x, u) = m^2 x_\mu + \omega_{\mu\alpha} u^\alpha$$

$$\Phi_\mu(x, u) = \int \varphi(x, u) dx_\mu,$$

$\psi^\mu, \chi^\mu, G_\mu, \varphi$ — произвольные дифференцируемые функции. В классе уравнений (2.2.17) входит также интересное уравнение второго порядка

$$(u^\alpha \partial_\alpha)(u^\beta \partial_\beta) u^\mu = m^2 u^\mu. \quad (2.2.20).$$

которое является следствием релятивистского аналога уравнения Эйлера, т.к. факторизация уравнения (2.2.20) дает систему двух уравнений Эйлера:

$$u^\beta \partial_\beta u^\mu = m_1^2 u^\mu,$$

$$u^\alpha \partial_\alpha u^\mu = m_2^2 u^\mu$$

, где $m_1^2, m_2^2 = \frac{m^2}{m_1^2} - \text{const.}$

Теорема 2.2.4. Уравнение (2.2.19) допускает группу неоднородных линейных преобразований $JGL(4, R)$. Координаты инфинитезимального оператора группы при этом записываются в виде

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu} x^\nu + d^\mu$$

$$\eta^\mu = c_{\mu\nu} u^\nu$$

, где $c_{\mu\nu}, d^\mu$ - произвольные постоянные.

Наличие подобной симметрии означает, что уравнение (2.2.20) может использоваться для описания как релятивистского, так и нерелятивистского движения, поскольку оно инвариантно относительно преобразований Лоренца и Галилея одновременно.

Замечание . Такой же симметрией обладает и уравнение

$$u^\alpha u^\beta \partial_\alpha \partial_\beta u^\mu = m^2 u^\mu, \quad (2.2.20 \text{ а})$$

не содержащее первых производных, поэтому его можно рассматривать как некое симметричное (обладающее более широкой симметрией) нелинейное обобщение линейного волнового уравнения

$$\square u^\mu = m^2 u^\mu$$

Дополнительные условия типа нормировки 4-вектора $u_\mu u^\mu = \text{const}$ сужают группу допустимых преобразований до $P(1,3)$.

Тот факт, что инвариантность НДУЧП относительно бесконечномерной алгебры Ли позволяет находить широкие классы его решений, содержащие произвольные функции (а в некоторых случаях и общее решение), был отмечен в [44]. Релятивистское уравнение Эйлера входит в число таких уравнений, поэтому можно попытаться построить его общее решение. Покажем как это можно сделать на примере уравнения первого порядка

$$f'(u) \partial u / \partial x_\mu = 0. \quad (2.2.21)$$

ищем решение в неявном виде

$$F^\alpha(u, x) = 0 \quad (2.2.22)$$

Дифференцируя (2.2.22) по x_μ , получим

$$F_{u\beta}^\alpha u_\mu^\beta + F_{x_\mu}^\alpha = 0 \quad (2.2.23)$$

Свернем (2.2.23) с $f'(u)$:

$$f'(u) u_\mu^\beta F_{u\beta}^\alpha + f'(u) F_{x_\mu}^\alpha = 0. \quad (2.2.24)$$

Учитывая (2.2.21), получим окончательно уравнение

$$f'(u) F_{x_\mu}^\alpha = 0, \quad (2.2.25)$$

решением которого является функция

$$F^\alpha = F^\alpha(\omega, u) \quad (2.2.26)$$

где $\omega_\mu = f_\mu f \cdot x - x_\mu f \cdot f$

Обратно, если $\det \left(\frac{\partial F^\alpha}{\partial u^\beta} \right) \neq 0$, то из (2.2.24), (2.2.25) следует (2.2.21). Таким образом, формула (2.2.26) определяет в неявном виде общее решение уравнения (2.2.21).

Решения (2.2.26) обладают очень широким функциональным произволом. Так, например, из (2.2.26) и теоремы 0.3. следует, что если $u_m(x)$ - решение уравнения (2.2.21), то

$$\tilde{u}_m(x) = u_m(x) \Phi(u)$$

где $\Phi(u)$ - произвольная дифференцируемая функция, есть тоже решение уравнения (2.2.21).

§3. Редукция и точные решения уравнений релятивистской гидродинамики

Вначале, следуя алгоритму, описанному в §2 первой главы, построим все анзацы для одномерных несопряженных подалгебр алгебры Пуанкаре $AP(I,3)$. Впервые $P(I,3)$ - несопряженные одномерные подалгебры были получены в работе [63]. В отличие от первой главы, операцию группового умножения применим здесь при построении анзацев. Таким путем мы получим неразмножаемые анзацы для векторного поля, инвариантные относительно алгебры $(AP(I,3))$, с помощью которых можно строить неразмножаемые многопараметрические семейства частных решений уравнений релятивистской гидродинамики. Опуская громоздкие вычисления, приведем результат в виде таблицы.

Таблица 2.

Индекс	Подалгебра	Инвариантные переменные		
		$\omega_1(x)$	$\omega_2(x)$	$\omega_3(x)$
1	P_0	$a \cdot x$	$b \cdot x$	$c \cdot x$
2	P_3	$d \cdot x$	$b \cdot x$	$c \cdot x$
3	$P_0 + P_1$	$a \cdot x + d \cdot x$	$b \cdot x$	$c \cdot x$

4	J_{12}	$[(a \cdot x)^2 + (b \cdot x)^2]^{1/2}$	$d \cdot x$	$b \cdot x$
5	J_{03}	$[(d \cdot x)^2 - (c \cdot x)^2]^{1/2}$	$a \cdot x$	$b \cdot x$
6	$J_{02} + J_{12}$	$a \cdot x + d \cdot x$	$[(d \cdot x)^2 - (a \cdot x)^2 - (b \cdot x)^2]^{1/2}$	$c \cdot x$
7	$\alpha J_{23} - J_{01}$	$[(d \cdot x)^2 - (a \cdot x)^2]^{1/2}$	$\alpha \ln(d \cdot x + a \cdot x) +$ $+ \arctg(b \cdot x / c \cdot x)$	$[(b \cdot x)^2 + (c \cdot x)^2]^{1/2}$
8	$J_{23} - \frac{\varepsilon}{2}(P_0 + P_1)$	$a \cdot x + d \cdot x$	$\varepsilon(d \cdot x - a \cdot x) +$ $+ \arctg(b \cdot x / c \cdot x)$	$[(b \cdot x)^2 + (c \cdot x)^2]^{1/2}$
9	$J_{12} + \alpha P_0$	$[(a \cdot x)^2 + (b \cdot x)^2]^{1/2}$	$d \cdot x + \arctg \frac{a \cdot x}{b \cdot x}$	$c \cdot x$
10	$J_{12} - \alpha P_3$	$[(a \cdot x)^2 + (b \cdot x)^2]^{1/2}$	$c \cdot x + \alpha \arctg(a \cdot x / b \cdot x)$	$d \cdot x$
11	$J_{01} - \alpha P_2$	$[(d \cdot x)^2 - (a \cdot x)^2]^{1/2}$	$b \cdot x + \alpha \ln(a \cdot x + d \cdot x)$	$c \cdot x$
12	$J_{02} + J_{12} +$ $+ P_0 - P_1$	$d \cdot x - a \cdot x + (d \cdot x +$ $+ a \cdot x)b \cdot x + \frac{1}{6}(d \cdot x + a \cdot x)^3$	$b \cdot x + \frac{1}{4}(d \cdot x + a \cdot x)^2$	$c \cdot x$
13	$J_{02} + J_{12} +$ $- \varepsilon P_3$	$d \cdot x + a \cdot x$	$[(d \cdot x)^2 - (a \cdot x)^2 - (b \cdot x)^2]^{1/2}$	$b \cdot x + \varepsilon(d \cdot x + a \cdot x)c \cdot x$

В табл. 2 $\alpha \neq 0$, a, b, c, d - произвольные постоянные, причем $a^2 = b^2 = c^2 = -d^2 = 1$, $a \cdot b = a \cdot c = a \cdot d = b \cdot c = b \cdot d = c \cdot d = 0$, $\varepsilon = \pm 1$. Соответствующие позиции в табл. 2 анзацы имеют вид

$$1. \quad u_\mu = \Phi_\mu(\omega) \quad (2.3.1)$$

$$2. \quad u_\mu = \Phi_\mu(\omega) \quad (2.3.2)$$

$$3. \quad u_\mu = \Phi_\mu(\omega) \quad (2.3.3)$$

$$4. \quad u_\mu = [g_{\mu\nu} - (1 - \frac{b \cdot x}{\omega_1})(b_\mu b_\nu + q_\mu q_\nu) + \frac{a \cdot x}{\omega_1}(b_\mu a_\nu - b_\nu a_\mu)] \Phi^\nu(\omega) \quad (2.3.4)$$

$$5. U_{\mu} = \left[g_{\mu\nu} + \frac{(d \cdot x + c \cdot x)^2 - 1}{2(d \cdot x + c \cdot x)} (d_{\mu} c_{\nu} - c_{\mu} d_{\nu}) - \frac{(d \cdot x + c \cdot x - 1)^2}{2(d \cdot x + c \cdot x)} (c_{\mu} c_{\nu} + d_{\mu} d_{\nu}) \right] \Phi^{\nu}(\omega) \quad (2.3.5)$$

$$6. U_{\mu} = \left[g_{\mu\nu} + \frac{b \cdot x}{a \cdot x + d \cdot x} ((a_{\mu} + d_{\mu}) b_{\nu} - b_{\mu} (a_{\nu} + d_{\nu})) + \frac{1}{2} \left(\frac{b \cdot x}{a \cdot x + d \cdot x} \right)^2 \times (a_{\mu} + d_{\mu})(a_{\nu} + d_{\nu}) \right] \Phi^{\nu}(\omega) \quad (2.3.6)$$

$$7. U_{\mu} = \left[g_{\mu\nu} + \frac{(d \cdot x + a \cdot x - 1)^2}{2(d \cdot x + a \cdot x)} (d_{\mu} d_{\nu} - a_{\mu} a_{\nu}) + \frac{(a \cdot x + d \cdot x)^2 - 1}{2(d \cdot x + a \cdot x)} \times (d_{\mu} a_{\nu} - d_{\nu} a_{\mu}) + \left(1 - \frac{c \cdot x}{\omega_3} \right) (b_{\mu} b_{\nu} + c_{\mu} c_{\nu}) + \frac{b \cdot x}{\omega_3} (c_{\mu} b_{\nu} - b_{\mu} c_{\nu}) \right] \Phi^{\nu} \quad (2.3.7)$$

$$8. U_{\mu} = \left[g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{c \cdot x}{\omega_3} \right) (b_{\mu} b_{\nu} + c_{\mu} c_{\nu}) + \frac{b \cdot x}{\omega_3} (c_{\mu} b_{\nu} - b_{\mu} c_{\nu}) \right] \Phi^{\nu}(\omega) \quad (2.3.8)$$

$$9. U_{\mu} = \left[g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{b \cdot x}{\omega_1} \right) (b_{\mu} b_{\nu} + a_{\mu} a_{\nu}) + \frac{a \cdot x}{\omega_1} (b_{\mu} a_{\nu} - b_{\nu} a_{\mu}) \right] \Phi^{\nu}(\omega) \quad (2.3.9)$$

$$10. U_{\mu} = \left[g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{b \cdot x}{\omega_1} \right) (b_{\mu} b_{\nu} + a_{\mu} a_{\nu}) + \frac{a \cdot x}{\omega_1} (b_{\mu} a_{\nu} - b_{\nu} a_{\mu}) \right] \Phi^{\nu}(\omega) \quad (2.3.10)$$

$$11. U_{\mu} = \left[g_{\mu\nu} + \frac{(d \cdot x + a \cdot x)^2 - 1}{2(a \cdot x + d \cdot x)} (d_{\mu} a_{\nu} - d_{\nu} a_{\mu}) - \frac{(d \cdot x + a \cdot x - 1)^2}{2(d \cdot x + a \cdot x)} (a_{\mu} a_{\nu} - d_{\mu} d_{\nu}) \right] \Phi^{\nu}(\omega) \quad (2.3.11)$$

$$12. U_{\mu} = \left[g_{\mu\nu} + \frac{d \cdot x + a \cdot x}{2} (b_{\mu} (a_{\nu} + d_{\nu}) - (a_{\mu} + d_{\mu}) b_{\nu}) + \frac{1}{8} (d \cdot x + a \cdot x)^2 (a_{\mu} + d_{\mu})(a_{\nu} + d_{\nu}) \right] \Phi^{\nu}(\omega) \quad (2.3.12)$$

$$13. U_{\mu} = \left[g_{\mu\nu} + \frac{b \cdot x}{a \cdot x + d \cdot x} (b_{\nu} (a_{\mu} + d_{\mu}) - b_{\mu} (a_{\nu} + d_{\nu})) + \frac{1}{2} \left(\frac{b \cdot x}{a \cdot x + d \cdot x} \right)^2 \times (a_{\mu} + d_{\mu})(a_{\nu} + d_{\nu}) \right] \Phi^{\nu}(\omega). \quad (2.3.13)$$

Подставляя выражения (2.3.1)-(2.3.13) в уравнения (2.1.4), (2.1.5), получим редуцированные уравнения, приводимые ниже.

Полагаем, что для скалярного поля анзац имеет вид $\psi = \varphi(\omega)$.

$$1. \Phi^{\nu} (a \cdot \Phi_{\omega_1} + b \cdot \Phi_{\omega_2} + c \cdot \Phi_{\omega_3}) + \varphi (a \cdot \Phi_{\omega_1}^{\nu} + b \cdot \Phi_{\omega_2}^{\nu} + c \cdot \Phi_{\omega_3}^{\nu}) + a_{\nu} \Phi_{\omega_1} + b_{\nu} \Phi_{\omega_2} + c_{\nu} \Phi_{\omega_3} = 0; \quad (2.3.14)$$

$$2. f(a \cdot \Phi_{\omega_1} + b \cdot \Phi_{\omega_2} + c \cdot \Phi_{\omega_3}) + f'(a \cdot \Phi_{\omega_1} + b \cdot \Phi_{\omega_2} + c \cdot \Phi_{\omega_3}) = 0$$

$$\Phi^{\nu} (d \cdot \Phi_{\omega_1} + b \cdot \Phi_{\omega_2} + c \cdot \Phi_{\omega_3}) + \varphi (d \cdot \Phi_{\omega_1}^{\nu} + b \cdot \Phi_{\omega_2}^{\nu} + c \cdot \Phi_{\omega_3}^{\nu}) + d_{\nu} \Phi_{\omega_1} + b_{\nu} \Phi_{\omega_2} + c_{\nu} \Phi_{\omega_3} = 0, \quad (2.3.15)$$

$$3. f(d \cdot \Phi_{\omega_1} + b \cdot \Phi_{\omega_2} + c \cdot \Phi_{\omega_3}) + f'(d \cdot \Phi_{\omega_1} + b \cdot \Phi_{\omega_2} + c \cdot \Phi_{\omega_3}) = 0;$$

$$\Phi^{\nu} ((a+d) \cdot \Phi_{\omega_1} + b \cdot \Phi_{\omega_2} + c \cdot \Phi_{\omega_3}) + \varphi ((a+d) \cdot \Phi_{\omega_1}^{\nu} + b \cdot \Phi_{\omega_2}^{\nu} + c \cdot \Phi_{\omega_3}^{\nu}) + (a_{\nu} + d_{\nu}) \Phi_{\omega_1} + b_{\nu} \Phi_{\omega_2} + c_{\nu} \Phi_{\omega_3} = 0, \quad (2.3.16)$$

$$f((a+d) \cdot \Phi_{\omega_1} + b \cdot \Phi_{\omega_2} + c \cdot \Phi_{\omega_3}) + f'((a+d) \cdot \Phi_{\omega_1} + b \cdot \Phi_{\omega_2} + c \cdot \Phi_{\omega_3}) = 0;$$

$$4. [g_{\mu\nu} + (1 - \frac{\omega_3}{\omega_1})(b_\mu b_\nu + a_\mu a_\nu) + \frac{\omega_2}{\omega_1}(b_\mu a_\nu - a_\mu b_\nu)](b \cdot \phi \psi_{\omega_1} + d \cdot \phi \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3})\phi' + \psi[\frac{a \cdot \phi}{\omega_1}(b_\nu a \cdot \phi - a_\nu b \cdot \phi) + b \cdot \phi \phi'_{\omega_1} + d \cdot \phi \phi'_{\omega_2} + c \cdot \phi \phi'_{\omega_3}] + b_\nu \psi_{\omega_1} + d_\nu \psi_{\omega_2} + c_\nu \psi_{\omega_3} = 0, \\ f(-b \cdot \phi + b \cdot \phi_{\omega_1} + d \cdot \phi_{\omega_2} + c \cdot \phi_{\omega_3}) + f'(b \cdot \phi \psi_{\omega_1} + d \cdot \phi \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3}) \quad (2.3.17) \\ = 0;$$

$$5. [g_{\mu\nu} + \frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1}(d_\mu c_\nu - c_\mu d_\nu) - \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1}(c_\mu c_\nu + d_\mu d_\nu)]\phi' \left[\left(\frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} \times d \cdot \phi + \frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} c \cdot \phi \right) \psi_{\omega_1} + a \cdot \phi \psi_{\omega_2} + b \cdot \phi \psi_{\omega_3} \right] + \psi \left[\left(\frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} d \cdot \phi + \frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} c \cdot \phi \right) \phi'_{\omega_1} + a \cdot \phi \phi'_{\omega_2} + b \cdot \phi \phi'_{\omega_3} + (c \cdot \phi + d \cdot \phi) \times \right. \\ \left. \times (d_\mu c \cdot \phi - c_\mu d \cdot \phi) \right] + (d_\mu \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} + c_\mu \frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1}) \psi_{\omega_1} + a_\mu \psi_{\omega_2} + b_\mu \psi_{\omega_3} \} = 0, \\ f(d \cdot \phi + c \cdot \phi) \left[(d_\mu \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} + c_\mu \frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1}) \phi'_{\omega_1} + a \cdot \phi_{\omega_2} + b \cdot \phi_{\omega_3} \right] + \\ + f' \left[\left(d \cdot \phi \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} + \frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} c \cdot \phi \right) \psi_{\omega_1} + a \cdot \phi \psi_{\omega_2} + b \cdot \phi \psi_{\omega_3} \right] = 0; \quad (2.3.18)$$

$$6. [g_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\frac{\omega_1}{\omega_2}(a_\mu + d_\mu)b_\nu + \frac{\omega_2}{\omega_1}(a_\nu + d_\nu)b_\mu)]\phi' [(a \cdot \phi + d \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + \frac{1}{2}(\frac{\omega_1}{\omega_2}(d \cdot \phi - a \cdot \phi) + \frac{\omega_2}{\omega_1}(d \cdot \phi + a \cdot \phi)) \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3}] + \\ + \psi \left[\phi'_{\omega_1} (a + d) \cdot \phi + \frac{1}{2} \cdot \phi'_{\omega_2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}(d \cdot \phi - a \cdot \phi) + \frac{\omega_2}{\omega_1}(d \cdot \phi + a \cdot \phi) \right) + c \cdot \phi \phi'_{\omega_3} \right] + (a_\nu + d_\nu) \psi_{\omega_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}(d_\nu - a_\nu) + \frac{\omega_2}{\omega_1}(d_\nu + a_\nu) \right) \psi_{\omega_2} + c_\nu \psi_{\omega_3} \} = 0, \quad (2.3.19) \\ f[(a + d) \cdot \phi_{\omega_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}(d - a) \cdot \phi_{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}(d + a) \cdot \phi_{\omega_2} \right) + c \cdot \phi_{\omega_3}] + \\ + f'[(a \cdot \phi + d \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}(d \cdot \phi - a \cdot \phi) + \frac{\omega_2}{\omega_1}(d \cdot \phi + a \cdot \phi) \right) \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3}] = 0;$$

$$7. [g_{\mu\nu} + \frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1}(a_\mu a_\nu + d_\mu d_\nu) - \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1}(d_\mu a_\nu - a_\mu d_\nu) + (1 - \frac{\omega_1}{\omega_3}) \times (b_\mu b_\nu + c_\mu c_\nu) + \frac{\omega_1}{\omega_3}(c_\mu b_\nu - b_\mu c_\nu)]\phi' \left[\left(\frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} a \cdot \phi + \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} d \cdot \phi \right) \psi_{\omega_1} + \right. \\ \left. + (\alpha(a \cdot \phi + d \cdot \phi) + b \cdot \phi) \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3} \right] + \psi [-a_\nu d \cdot \phi (a \cdot \phi + d \cdot \phi) + b_\nu \omega_3^{-2} b \cdot \phi c \cdot \phi - c_\nu \omega_3^2 (b \cdot \phi)^2 + d_\nu a \cdot \phi (a \cdot \phi + d \cdot \phi) + \\ + \phi'_{\omega_1} \left(\frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} a \cdot \phi + \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} d \cdot \phi \right) + \phi'_{\omega_2} (\alpha(a \cdot \phi + d \cdot \phi) + b \cdot \phi) + c \cdot \phi \phi'_{\omega_3}] \quad (2.3.20)$$

$$+ b \cdot \phi) + \phi_{\omega_3}^v c \cdot \phi + \frac{1}{4\omega_1} (a_v(\omega_1^2 - 1) + d_v(\omega_1^2 + 1)) \psi_{\omega_1} + [\alpha(a_v + d_v) + b_v] \psi_{\omega_2} + c_v \psi_{\omega_3} = 0,$$

$$f[a \cdot \phi + d \cdot \phi + \omega_3^{-1} b \cdot \phi + (\frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} a \cdot \phi + \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} d \cdot \phi) + \alpha(a + d) \phi_{\omega_2} + b \cdot \phi_{\omega_2}^v + c \cdot \phi_{\omega_3}] + f'[(\frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} a \cdot \phi + \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} d \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + [\alpha(a \cdot \phi + d \cdot \phi) + b \cdot \phi] \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3}] = 0.$$

8. $[g_{\mu\nu} + (1 - \frac{\omega_1}{\omega_3})(b_\mu b_\nu + c_\mu c_\nu) + \frac{\omega_1}{\omega_3}(c_\mu b_\nu - b_\mu c_\nu)] \phi^\mu [(a \cdot \phi + d \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + (\varepsilon(d \cdot \phi - a \cdot \phi) + \frac{b \cdot \phi}{\omega_3}) \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3}] + \varphi[\frac{b \cdot \phi}{\omega_3}(c_v b \cdot \phi - (2.3.2I) - b_v c \cdot \phi) + (a \cdot \phi + d \cdot \phi) \phi_{\omega_1}^v + (\varepsilon(d \cdot \phi - a \cdot \phi) + b \cdot \phi \omega_3^{-1}) \phi_{\omega_2}^v + c \cdot \phi \phi_{\omega_3}^v] + (a_v + d_v) \psi_{\omega_1} + (\varepsilon(d_v - a_v) + b_v \omega_3^{-1}) \psi_{\omega_2} + c_v \psi_{\omega_3} = 0,$

$$f[-c \cdot \phi + (a_\mu + d_\mu) \phi_{\omega_1}^v + \varepsilon(d - a) \cdot \phi_{\omega_2} + b \cdot \phi_{\omega_2} \omega_3^{-1} + c \cdot \phi_{\omega_3}] + f'[(a \cdot \phi + d \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + \varepsilon(d \cdot \phi - a \cdot \phi) \psi_{\omega_2} + b \cdot \phi \omega_3^{-1} \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3}] = 0;$$

$$9. [g_{\mu\nu} + (1 - \frac{\omega_3}{\omega_1})(b_\mu b_\nu + a_\mu a_\nu) + \frac{\omega_3}{\omega_1}(b_\mu a_\nu - b_\nu a_\mu)] \phi^\nu [(b \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + (d \cdot \phi + \frac{a}{\omega_1} a \cdot \phi) \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3}] + \varphi[\frac{a \cdot \phi}{\omega_1}(b_v a \cdot \phi - a_v b \cdot \phi) + b \cdot \phi \phi_{\omega_1}^v + (d \cdot \phi + \frac{a}{\omega_1} a \cdot \phi) \phi_{\omega_2}^v + c \cdot \phi \phi_{\omega_3}^v] + b_v \psi_{\omega_1} + (d_v + \frac{a}{\omega_1} a_v) \psi_{\omega_2} + c_v \psi_{\omega_3} = 0,$$

$$f[-b \cdot \phi + b \cdot \phi_{\omega_1} + (d_\mu + \frac{a}{\omega_1} a_\mu) \phi_{\omega_2}^v + c \cdot \phi_{\omega_3}] + f'[(b \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + (d \cdot \phi + \frac{a}{\omega_1} a \cdot \phi) \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3}] = 0; \quad (2.3.22)$$

$$10. [g_{\mu\nu} + (1 - \frac{\omega_3}{\omega_1})(b_\mu b_\nu + a_\mu a_\nu) + \frac{\omega_3}{\omega_1}(b_\mu a_\nu - b_\nu a_\mu)] \phi^\nu [(b \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + (c \cdot \phi + \frac{a}{\omega_1} a \cdot \phi) \psi_{\omega_2} + d \cdot \phi \psi_{\omega_3}] + \varphi[\frac{a \cdot \phi}{\omega_1}(b_v a \cdot \phi - a_v b \cdot \phi) + b \cdot \phi \phi_{\omega_1}^v + (c \cdot \phi + \frac{a}{\omega_1} a \cdot \phi) \phi_{\omega_2}^v + d \cdot \phi \phi_{\omega_3}^v] + b_v \psi_{\omega_1} + (c_v + \frac{a}{\omega_1} a_v) \psi_{\omega_2} + d_v \psi_{\omega_3} = 0,$$

$$f[-b \cdot \phi + b \cdot \phi_{\omega_1} + (c_\mu + \frac{a}{\omega_1} a_\mu) \phi_{\omega_2}^v + d \cdot \phi_{\omega_3}] + f'[(b \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + (c \cdot \phi + \frac{a}{\omega_1} a \cdot \phi) \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3}] = 0; \quad (2.3.23)$$

$$\begin{aligned}
 \text{II. } & \left[g_{\mu\nu} + \frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} (d_\mu a_\nu - d_\nu a_\mu) - \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} (a_\mu a_\nu - d_\mu d_\nu) \right] \left\{ \phi^\nu \left[\left(\frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} a \cdot \phi + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} d \cdot \phi \right) \psi_{\omega_1} + (b \cdot \phi + \alpha (a \cdot \phi + d \cdot \phi)) \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3} \right] + \\
 & + \varphi \left[(d_\nu a \cdot \phi - a_\nu d \cdot \phi) (a \cdot \phi + d \cdot \phi) + \phi_{\omega_1}^\nu \left(\frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} a \cdot \phi + \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} d \cdot \phi \right) + \right. \\
 & + \phi_{\omega_2}^\nu (b \cdot \phi + \alpha (a \cdot \phi + d \cdot \phi)) + \phi_{\omega_3}^\nu c \cdot \phi + \frac{1}{4\omega_1} (a_\nu (\omega_1^2 - 1) + d_\nu (\omega_1^2 + 1)) \psi_{\omega_1} + \\
 & \left. + (b_\nu + \alpha (a_\nu + d_\nu)) \psi_{\omega_2} + c_\nu \psi_{\omega_3} \right\} = 0, \\
 & f[a \cdot \phi + d \cdot \phi] + f' \left[\left(\frac{\omega_1^2 - 1}{2\omega_1} a \cdot \phi + \frac{\omega_1^2 + 1}{2\omega_1} d \cdot \phi \right) \psi_{\omega_1} + \right. \\
 & \left. + (b \cdot \phi + \alpha (a \cdot \phi + d \cdot \phi)) \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3} \right] = 0; \quad (2.3.24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{I2. } & \left[g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \omega_1 (b_\mu (a_\nu + d_\nu) - (a_\mu + d_\mu) b_\nu) + \frac{1}{8} \omega_2 (a_\mu + d_\mu) (a_\nu + d_\nu) \right] \times \\
 & \times \left\{ \phi^\nu \left[(d - a) \cdot \phi + \omega_2 (d + a) \cdot \phi \right) \psi_{\omega_1} + b \cdot \phi \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3} \right] + \\
 & + \varphi \left[(d_\nu a \cdot \phi - a_\nu d \cdot \phi) + \phi_{\omega_1}^\nu ((d - a) \cdot \phi + \omega_2 (a + d) \cdot \phi) + \phi_{\omega_2}^\nu b \cdot \phi + \right. \\
 & + c \cdot \phi \phi_{\omega_3}^\nu \left. \right] + \frac{1}{2} (\omega_1 (a_\nu + d_\nu) - b_\nu) + \frac{1}{4} (a_\nu + d_\nu) \omega_2 \psi_{\omega_1} + b_\nu \psi_{\omega_2} + \\
 & + c_\nu \psi_{\omega_3} \left. \right\} = 0, \\
 & f[(a + d) \cdot \phi] + f' \left[\frac{1}{2} \omega_1 (a + d) \cdot \phi - b \cdot \phi + \frac{1}{8} \omega_2 (a + d) \cdot \phi \right] \psi_{\omega_1} + \\
 & + b \cdot \phi \psi_{\omega_2} + c \cdot \phi \psi_{\omega_3} = 0; \quad (2.3.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{I3. } & \left[g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} (a_\mu + d_\mu) b_\nu + \frac{\omega_2}{\omega_1} (a_\nu + d_\nu) b_\mu \right) \right] \left\{ \phi^\nu \left[(a \cdot \phi + d \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + \right. \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} (d \cdot \phi - a \cdot \phi) + \frac{\omega_2}{\omega_1} (d \cdot \phi + a \cdot \phi) \right) \psi_{\omega_2} + (\varepsilon (a + d) \cdot \phi + c \cdot \phi) \psi_{\omega_3} \left. \right] + \\
 & + \varphi \left[\phi_{\omega_1}^\nu (a + d) \cdot \phi + \frac{1}{2} \phi_{\omega_2}^\nu \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} (d \cdot \phi - a \cdot \phi) + \frac{\omega_2}{\omega_1} (d \cdot \phi + a \cdot \phi) \right) + \right. \\
 & + (\varepsilon (a + d) \cdot \phi + c \cdot \phi) \phi_{\omega_3}^\nu \left. \right] + (a_\nu + d_\nu) \psi_{\omega_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} (d_\nu - a_\nu) + \frac{\omega_2}{\omega_1} (d_\nu + a_\nu) \right) \times \\
 & \times \psi_{\omega_2} + (\varepsilon (a + d)_\nu) \psi_{\omega_3} \left. \right\} = 0, \\
 & f[(a + d) \cdot \phi] + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} (d - a) \cdot \phi + \frac{\omega_2}{\omega_1} (d + a) \cdot \phi \right) \psi_{\omega_2} + \varepsilon (a + d) \cdot \phi + c \cdot \phi \psi_{\omega_3} \\
 & + f'[(a \cdot \phi + d \cdot \phi) \psi_{\omega_1} + \varepsilon (a \cdot \phi + d \cdot \phi) \psi_{\omega_3}] = 0; \quad (2.3.26)
 \end{aligned}$$

Найдем частное решение уравнений движения релятивистской жидкости (2.1.4), (2.1.5).

Будем искать решение системы уравнений (2.1.4), (2.1.5) в виде (см. табл. 2)

$$\begin{aligned} v &= v(\omega), \\ u_\mu(x) &= \partial W(x)/\partial x_\mu \phi(\omega) \equiv W_\mu \phi(\omega), \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

где ω - инвариант $P(1,3)$.

Подстановка (2.3.27) в (2.1.4), (2.1.5) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} v\phi W^\mu (W_\nu \dot{\omega}_\mu \dot{\phi} + W_{\mu\nu} \phi) + W^\mu W_\nu \phi^2 \dot{\omega}_\mu \dot{v} + \omega_\nu \dot{v} &= 0 \\ f(\Box W \phi + \dot{\phi} W_\mu \dot{\omega}^\mu) + \dot{f} \phi W^\mu \dot{\omega}_\mu \dot{v} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

где $\omega_\mu \equiv \partial \omega / \partial x_\mu$.

Для того, чтобы система (2.3.28) была разрешима относительно W , v , ϕ необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} \Box W &= F_1(W, \omega) \\ W_\mu \dot{\omega}^\mu &= F_2(W, \omega) \\ W_\mu W^\mu &= F_3(W, \omega) \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

где F_1 , F_2 , F_3 - произвольные дифференцируемые функции.

Подстановка (2.3.39) в (2.3.28) приводит к дальнейшей редукции:

$$\begin{aligned} v\phi [W_\nu \dot{\phi} F_2 + \frac{1}{2} \partial/\partial x_\nu (W_\mu \dot{\omega}^\mu) \phi + \phi^2 \dot{v} F_2 W_\nu + \omega_\nu \dot{v}] &= 0, \\ f(F_1 \phi + \dot{\phi} F_2) + \dot{f} \dot{v} \phi F_2 &= 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} W_\nu (v F_2 \phi \dot{\phi} + \phi^2 \dot{v} F_2) + \frac{1}{2} v \phi^2 (W_\nu \partial F_2 / \partial W + \omega_\nu \partial F_2 / \partial \omega) + \dot{v} \omega_\nu &= 0 \\ f(F_1 \phi) + \dot{\phi} F_2 f + \dot{f} \dot{v} \phi F_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

В первом уравнении полученной системы возможно провести расщеплению по "независимым" переменным W, ω :

$$\begin{aligned} (v\dot{\phi} + \phi\dot{v})F_2\phi + \frac{1}{2}v\phi^2 \partial F_3 / \partial W &= 0, \\ \frac{1}{2}v\phi^2 \partial F_3 / \partial \omega + \dot{v} &= 0, \\ f(F_1\phi + \dot{\phi}F_2) + f\dot{v}\phi F_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

Исследуя совместность системы (2.3.39), трудно сделать какие-либо общие выводы о характере функций F_1, F_2, F_3 , поэтому целесообразно рассмотреть некоторые частные случаи и исходя из этого искать решения редуцированной системы уравнений (2.3.41).

а). Пусть $W = a \cdot x = a_\nu x^\nu$

Тогда из (2.3.39) имеем:

$$\begin{aligned} F_1 &= 0 \\ a_\nu \omega^\nu &= F_2(a \cdot x, \omega) \\ F_3 &= a^2 = \text{const} \end{aligned}$$

Подстановка полученных выражений в систему (2.3.41) дает

$$\begin{aligned} (v\phi)^{\cdot} F_2 \phi &= 0, \\ \dot{v} &= 0, \\ \dot{\phi} F_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

Поскольку $\dot{\phi} \neq 0$, по предположению, то из (2.3.42) следует

$F_2 = 0$ и $v = c = \text{const}$, а из (2.3.40) — уравнение

$$a_\mu \partial \omega / \partial x_\mu = 0,$$

общим решением которого является функция

$$\omega = f(a_\mu a \cdot x - x_\mu a^2).$$

Теорема 2.4.1. 1) Уравнение (2.4.2) допускает алгебру Пуанкаре $AP(I,3)$ при произвольных $f(v)$. При $f = qv$, $q = const$, уравнение (2.4.2) переходит в линейное волновое уравнение $\square \varphi = 0$, инвариантное относительно конформной группы $C(I,3)$.

2) Уравнения (2.4.1), (2.4.2) допускают алгебру $AP(I,3)$. Максимально широкая симметрия достигается при $f = qv$, в этом случае базис расширенной алгебры Пуанкаре $\tilde{AP}(I,3)$ образуют операторы

$$P_\mu = \partial/\partial x_\mu, J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, (2.4.3)$$

$$\tilde{P} = \partial/\partial u, D_1 = \varphi \partial/\partial \varphi + v \partial/\partial v, D_2 = x_\mu P_\mu - v \partial/\partial v.$$

В качестве доказательства приведем полную систему определяющих уравнений для координат оператора $Q = \xi \cdot \partial + \zeta \cdot \partial_\varphi + \sigma \cdot \partial_v$

$$\begin{aligned} \xi^\alpha_\varphi &= \xi^\alpha_v = 0, \\ \xi^a_0 &= \xi^a_0, \\ \xi^0_0 &= \xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3, \\ \xi^a_b + \xi^b_a &= 0, a \neq b, \\ \zeta_\mu &= \zeta_v = 0, \\ \sigma(f-v) &= 0, \\ \sigma - v \zeta_\varphi + v \xi^0_0 &= 0, \\ (vf_v - f)\sigma_0 - v f (\xi^0_{00} - \xi^{aa}_{aa}) &= 0, \\ -(vf_v - f)\sigma_0 - v f (\xi^a_{00} - \xi^{aa}_{bb}) &= 0, \\ (vf_v - f)\sigma_\varphi + v f \zeta_\varphi &= 0, \\ (vf_v - f)vf\sigma_v + 2(1-f_v)f v^2 \xi^0_0 + (v^2 f f_{vv} - v^2 f_v f_v + f^2)\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

f - произвольная дифференцируемая функция.

Подставляя его в (2.3.44), получим решение уравнения Эйлера

$$u_\mu(x) = \alpha_\mu \dot{f}(f + \beta \cdot x) + \beta_\mu (f + \beta \cdot x), \quad \dot{f} = \partial f / \partial (\alpha \cdot x).$$

§4. Потенциальное течение релятивистской жидкости

В случае потенциального (изэнтропического) течения релятивистской жидкости можно ввести потенциал 4-скорости:

$$\partial \varphi / \partial x_\mu = v u_\mu \quad \text{где } v - \text{удельная энтальпия.}$$

Тогда из уравнений (2.1.4), (2.1.5) получим уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} + v^2 = 0, \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_\mu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \left[v \frac{\partial f}{\partial v} - f(v) \right] + v f(v) \square \varphi = 0. \quad (2.4.2)$$

Отметим сразу же, что уравнение Эйконала (2.4.1), являющееся релятивистским аналогом уравнения Гамильтона-Якоби, обладает очень широкой симметрией, а именно: уравнение (2.4.1) инвариантно относительно 21-мерной алгебры Ли $AC(1,4)$, включающей в себя в качестве подалгебр обобщенную алгебру Галилея $AG_0(1,3)$ и конформную алгебру $C(3)$. Уравнение (2.4.2) - это модифицированное волновое уравнение и можно ожидать, что оно также обладает нетривиальной симметрией. Кроме того, поскольку полное описание движения жидкости дается системой (2.4.1), (2.4.2), необходимо узнать групповые свойства этой системы в целом. Ответ на эти вопросы следует из приведенных ниже утверждений.

Теорема 2.4.1. 1) Уравнение (2.4.2) допускает алгебру Пуанкаре $AP(I,3)$ при произвольных $f(v)$. При $f = av$, $a = \text{const}$, уравнение (2.4.2) переходит в линейное волновое уравнение $\square\varphi = 0$, инвариантное относительно конформной группы $C(I,3)$.

2) Уравнения (2.4.1), (2.4.2) допускают алгебру $AP(I,3)$. Максимально широкая симметрия достигается при $f = av$, в этом случае базис расширенной алгебры Пуанкаре $\tilde{AP}(I,3)$ образуют операторы

$$P_\mu = \partial/\partial x_\mu, J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, (2.4.3)$$

$$\tilde{P} = \partial/\partial u, D_1 = \varphi \partial/\partial \varphi + v \partial/\partial v, D_2 = x_\mu P_\mu - v \partial/\partial v.$$

В качестве доказательства приведем полную систему определяющих уравнений для координат оператора $Q = \xi \cdot \partial + \zeta \cdot \partial_\varphi + \sigma \cdot \partial_v$

$$\begin{aligned} \xi^\alpha_\varphi &= \xi^\alpha_v = 0, \\ \xi^a_a &= \xi^a_0, \\ \xi^0_0 &= \xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3, \\ \xi^a_b + \xi^b_a &= 0, a \neq b, \\ \zeta_\mu &= \zeta_v = 0, \\ \sigma(f-v) &= 0, \\ \sigma - v \zeta_\varphi + v \xi^0_0 &= 0, \\ (vf_v - f)\sigma_0 - v f (\xi^0_{00} - \xi^0_{aa}) &= 0, \\ -(vf_v - f)\sigma_0 - v f (\xi^a_{00} - \xi^a_{bb}) &= 0, \\ (vf_v - f)\sigma_\varphi + v f \zeta_{\varphi\varphi} &= 0, \\ (vf_v - f)vf\sigma_v + 2(1-f_v)f v^2 \xi^0_0 + (v^2 f f_{vv} - v^2 f_v f_v + f^2)\sigma &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Из явного вида решений этой системы следует утверждение теоремы.

Следствие I. В случае $x \in \mathbb{R}^{1,1}$, $f = av$ система (2.4.1), (2.4.2) обладает бесконечной симметрией. В самом деле, в этом случае из (2.4.4) следует, что $\xi^0(x)$ и $\xi^1(x)$ удовлетворяют одномерному волновому уравнению, общее решение которого содержит произвольные функции:

$$\begin{aligned}\xi^0(x) &= g_1(x_0 + x_1) + g_2(x_0 - x_1), \\ \xi^1(x) &= g_1(x_0 + x_1) - g_2(x_0 - x_1).\end{aligned}$$

Соответственно,

$$\chi = c_1 \varphi + c_2, \quad \sigma = c_1 v - v \left(\partial g_1 / \partial x_0 + \partial g_2 / \partial x_0 \right), \quad c_1, c_2 - \text{const.}$$

Таким образом координаты инфинитезимального оператора группы инвариантности уравнений (2.4.1), (2.4.2) образуют бесконечномерное линейное пространство.

Замечание. Как было отмечено, уравнение состояния среды $f = av$ является предельно жестким для релятивистской жидкости. Из теоремы 2.4.1 следует, что этому случаю соответствует максимально широкая симметрия уравнений потенциального движения жидкости.

Уравнения (2.4.1), (2.4.2) допускает естественное обобщение. Потенциал 4-скорости можно задать в более общем виде:

$$F(v) u_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu}$$

тогда уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} + F^2(v) &= 0, \\ \square \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial v}{\partial x^\mu} \cdot G(v) &= 0,\end{aligned} \quad (2.4.5)$$

где $G = (F \partial f / \partial v - f \partial F / \partial v)$, и использовано уравнение состояния $f(v) = h$.

Результат групповой классификации уравнений (2.4.5) приведен ниже.

Теорема 2.4.2. Максимальной алгеброй инвариантности уравнений (2.4.5) в классе операторов I-го порядка являются следующие алгебры Ли:

1) бесконечномерная алгебра, включающая $AP(I, 4)$, если

$$G = F = 0;$$

2) расширенная алгебра Пуанкаре $\tilde{AP}(I, 3)$ с базисными операторами

$$P_\mu, J_{\mu\nu}, \tilde{P} = \partial/\partial u, D_1 = x^\mu P_\mu + \frac{F}{2F} \partial/\partial v + \varphi \partial/\partial \varphi,$$

$$D_2 = x_\mu P^\mu - \frac{F}{2F} \partial/\partial v \text{ если } F \neq 0, G = 0$$

3) бесконечная алгебра, включающая конформную с операторами

$$K_\mu = 2x_\mu D + x^2 P_\mu, \text{ где } D = x^\mu P_\mu$$

если $F = 0, G \neq 0$.

Доказательство. В результате последовательной реализации алгоритма Ли приходим к полной системе определяющих уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_u^\alpha &= \xi_v^\alpha = 0, \\ \xi_a^0 &= \xi_0^a, \\ \xi_0^0 &= \xi_1^1 = \xi_2^2 = \xi_3^3, \\ \xi_6^a + \xi_a^6 &= 0, a \neq 6, \\ \xi_\mu^\mu &= \xi_\nu^\nu = 0, \\ F(F_\nu \sigma - F \xi_\varphi + F \xi_0^0) &= 0, \\ G \sigma_0 - \xi_{00}^0 + \xi_{aa}^0 &= 0, \\ G \sigma_a + \xi_{00}^a - \xi_{66}^a &= 0, \\ G \sigma_\nu + G_\nu \sigma &= 0, \\ F(G \sigma_\varphi + \xi_{\varphi\varphi}) &= 0. \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

Решая систему в каждом из указанных выше случаев, получим соответственно:

$$1) \xi^m = C_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu,$$

$$\zeta = f_1(\varphi),$$

$$\sigma = f_2(\varphi, \nu, x),$$

где $C_{\mu\nu}, d_\mu - \text{const}$, f_1 и f_2 - произвольные функции из C^∞ . $C_{\mu\nu} = -C_{\nu\mu}$.

$$2) \xi^m = C_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu$$

$$\zeta = a\varphi + b$$

$$\sigma = \frac{F}{2\dot{F}} (a - c_{00}), \quad a, b - \text{const}$$

$$3) \xi^m = 2C_{\nu\mu} x^\nu x_\mu - C_{\mu\nu} x_\nu x^\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu$$

$$\zeta = f_3(\varphi)$$

$$\sigma = -\frac{4}{G} C_{\mu\nu} x^\mu + f_4(\varphi), \quad \text{где } f_3 - \forall \text{ функция, } f_4 - \text{удовлетворяет уравнению}$$

удовлетворяет уравнению

$$\partial f_4 / \partial \nu - 4\dot{G}/G^2 C_{\mu\nu} x^\mu + \dot{G}/G f_4 = 0,$$

$$C_{\mu\nu}, d_\mu, b_{\mu\nu} - \text{const}, \quad b_{\mu\mu} = -b_{\mu\mu}, \quad b_{00} = b_{11} = b_{22} = b_{33}, \quad b_{0n} = b_{n0}.$$

Из явного вида решений уравнений (2.4.6) следует утверждение теоремы.

Следствие. В случае $x \in \mathbb{R}^{1,1}$ алгебра инвариантности уравнений (2.4.5) бесконечномерна при любых функциях F, G .

Справедливость утверждения следует из того, что, как легко заметить, в одномерном случае решение системы (2.4.6) содержит произвольные функции.

Идем решение системы уравнений (2.4.5) в виде

$$u = \phi_1(\omega),$$

$$\nu = \phi_2(\omega),$$

(2.4.7)

ω - инвариантная переменная.

После подстановки (2.5.7) в исходную систему имеем:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1^2 \omega_m \omega^m + F(\phi_2) &= 0, \\ \dot{\phi}_1 \omega_m \omega^m + \dot{\phi}_1 \square \omega + \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \omega_m \omega^m G(\phi_2) &= 0, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

где $\omega_m \equiv \partial \omega / \partial x_m$, точка означает дифференцирование по ω .

Система (2.4.8) разрешима относительно ϕ_1, ϕ_2 , если ω удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} \omega_m \omega^m &= B(\omega) \\ \square \omega &= A(\omega) \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Воспользуемся теперь результатами работы [56]. Ищем точные решения системы (2.4.9) в предположении, что

$$B(\omega) = \pm 1, \quad A(\omega) = \frac{m}{\omega}, \quad m = -2, -1, 0, 1, 2, 3.$$

Тогда в каждом из этих 6 случаев можно построить точные решения уравнений (2.4.9):

$$(1^0) \quad m = -2; \quad \omega = [(a \cdot y)^2 + (b \cdot y)^2 + (c \cdot y)^2]^{1/2},$$

где $a^2 = b^2 = c^2 = -1, a \cdot b = b \cdot c = a \cdot c = 0, \omega_m \omega^m = -1, y_m = x_m + \theta_m$
 $\theta_m = \text{const.}$

$$(2^0) \quad m = -2; \quad \omega = [(a \cdot y)^2 + (b \cdot y)^2]^{1/2},$$

где $a^2 = b^2 = 1, a \cdot b = 0, y_m = x_m + \theta_m, \omega_m \omega^m = 1$.

$$(3^0) \quad m \neq 0; \quad \text{а) } \omega = a \cdot y, \quad a^2 = 1, y_m = x_m + \theta_m, \omega_m \omega^m = +1$$

б) $\omega = a \cdot y + F(b \cdot y), \quad a \cdot b = b^2 = 0, a^2 = -1,$
 $\omega_m \omega^m = -1$

$$(4^0) \quad m = 1; \quad \omega = [(a \cdot y)^2 + (b \cdot y)^2]^{1/2}$$

$a^2 = -b^2 = 1, a \cdot b = 0, y_m = x_m + \theta_m, \omega_m \omega^m = 1$ (2.4.10)

$$(5^0) \quad m = 2; \quad \omega = [(a \cdot y)(b \cdot y) + (c \cdot y)^2]^{1/2},$$

$a^2 = b^2 = a \cdot c = b \cdot c = 0, a \cdot b = 2, c^2 = 1, \omega_m \omega^m = 1$

$$(6^0) \quad m = 3; \quad \omega = [x^2 + 2\theta \cdot x + \theta^2]^{1/2}, \quad \omega_m \omega^m = 1.$$

Перейдем теперь к нахождению точных решений системы

(2.4.8), которую перепишем в виде

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1^2 \pm F(\phi_2) &= 0, \\ \dot{\phi}_1 [1 + \dot{\phi}_2 G(\phi_2)] \pm \frac{m \dot{\phi}_1}{\omega} &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.II)$$

Разумеется, общее решение системы (2.4.II) при любых функциях F, G найти невозможно, поэтому выберем какой-либо частный случай, например, $F = \phi_2^2$, $G = \frac{1}{\phi_2}$. Тогда из первого уравнения (2.4.II) следует, что $\omega_r \omega^r = 1$ и $\dot{\phi}_1 = \phi_2$, а из второго -

$$\dot{\phi}_2 (\omega + m) + \omega \phi_2 = 0 \quad (2.4.I2)$$

Решением уравнения (2.4.I2) является функция

$$\phi_2(\omega) = C_1 (\omega + m)^m \exp[-(\omega + m)], \quad C_1 = \text{const} \quad (2.4.I3)$$

Тогда

$$\phi_1(\omega) = \int C_1 (\omega + m)^m \exp[-(\omega + m)] d\omega \quad \text{при } m = -2, -1 \quad (2.4.I4)$$

$$\phi_1(\omega) = -C_1 e^{-\omega} + C_2 \quad \text{при } m = 0$$

$$\phi_1(\omega) = -C_1 \exp[-(\omega + m)] [(\omega + m)^m + m(\omega + m)^{m-1} + \dots + m(m-1)(m-2)\dots \cdot 1] \quad \text{при } m = 1, 2, 3.$$

Таким образом, согласно (2.4.I0), (2.4.I3), (2.4.I4) получим в этом случае следующие классы точных решений исходной системы уравнений : (2.4.5), которые можно записать в явном виде:

$$(1^0) \quad u(x) = -C_1 \exp[-a \cdot (x + \theta)] + C_2,$$

$$v(x) = C_1 \exp[-a \cdot (x + \theta)], \quad m = 0$$

$$(2^0) \quad u(x) = -C_1 \{[(a \cdot y)^2 + (b \cdot y)^2]^{1/2} + 2\} \exp\{-[(a \cdot y)^2 + (b \cdot y)^2]^{1/2} - 1\} + C_2$$

$$v(x) = C_1 \{[(a \cdot y)^2 + (b \cdot y)^2]^{1/2} + 1\} \exp\{-[(a \cdot y)^2 + (b \cdot y)^2]^{1/2} - 1\}, \quad m = 1,$$

$$y_r = x_r + \theta_r,$$

$$(3^0) \quad u(x) = -C_1 \left\{ \left[(a \cdot y)(b \cdot y) + (c \cdot y)^2 \right]^{1/2} + 2 \right\}^2 + 2 \left[(a \cdot y)(b \cdot y) + (c \cdot y)^2 \right]^{1/2} + 4 \left\{ \exp \left\{ - \left[(a \cdot y)(b \cdot y) + (c \cdot y)^2 \right]^{1/2} - 2 \right\} + C_2 \right\}, \quad m=2,$$

$$v(x) = C_1 \left\{ \left[(a \cdot y)(b \cdot y) + (c \cdot y)^2 \right]^{1/2} + 2 \right\}^2 \exp \left\{ - \left[(a \cdot y)(b \cdot y) + (c \cdot y)^2 \right]^{1/2} - 2 \right\},$$

$$(4^0) \quad u(x) = -C_1 \left\{ \left[(x^2 + 2\theta \cdot x + \theta^2)^{1/2} + 3 \right]^3 + 3 \left[(x^2 + 2\theta \cdot x + \theta^2)^{1/2} - 3 \right] \right\} + C_2,$$

$$v(x) = C_1 \left\{ (x^2 + 2\theta \cdot x + \theta^2)^{1/2} + 3 \right\}^3 \exp \left\{ - (x^2 + 2\theta \cdot x + \theta^2)^{1/2} - 3 \right\},$$

$$m=3.$$

Подобным же образом могут быть найдены частные решения системы (2.4.5) при другом выборе функций F, G .

§ 5. Ультрарелятивистская потенциальная жидкость

При движении жидкости со скоростью света (ультрарелятивистская жидкость), ее состояние полностью определяется температурой, поэтому достаточно знать вместо системы (2.4.5) уравнение для потенциала 4-скорости, чтобы полностью описать движение:

$$\frac{\partial u}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \square u + 2 \frac{\partial u}{\partial x^\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0$$

(2.5.1)

Отметим, что уравнение (2.5.1) встречается в общей теории относительности [15]. Кроме того, его можно считать одним из многомерных аналогов уравнения Борна-Инфельда, которые изучались в [46]. Информацию о его групповых свойствах дает

Теорема 2.5.1. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (2.5.1.) является 17-мерная алгебра $Li A_{17}$, включающая в качестве подалгебры конформную алгебру $Li AC(I,3)$. Базис

алгебры A_{17} задается операторами

$$P_\mu = g_{\mu\nu} \partial / \partial x_\nu, \quad \tilde{P} = \partial / \partial u, \quad D = u \tilde{P}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \\ D = x^\mu P_\mu, \quad K_\mu = 2x_\mu D - x^2 \partial / \partial x_\mu \quad (2.5.2)$$

Доказательство. Система определяющих уравнений, получаемых по методу Ли, в данном случае такова:

$$\xi^\alpha_{;u} = 0 = \eta_\mu = \eta_{\mu u} = 0$$

$$\xi^0_a = \xi^a_0$$

(2.5.3)

$$\xi^a_b + \xi^b_a = 2 \delta_{ab} \xi^0_0$$

Из последнего уравнения сразу следует $\eta = au + b$, $a, b = \text{const}$. Решение уравнений Каллинга дает следующий результат:

$$\xi^\mu = 2c_\nu x^\nu x^\mu - c_{\mu\nu} x_\nu x^\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu \\ c_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, d_\mu = \text{const}, \quad b_{00} = b_{11} = b_{22} = b_{33}, \quad b_{0a} = b_{a0}, \\ b_{mn} = -b_{nm}$$

Выбрав базис в пространстве решений обычным образом, получим координаты операторов (2.5.2).

Замечание 1. В одномерном случае конформная симметрия нарушается, что легко проверяется непосредственно.

Замечание 2. В уравнении (2.5.1) при конформном преобразовании независимых переменных не требуется соответствующего преобразования потенциала в отличие от уравнений, получаемых добавлением к волновому уравнению члена, компенсирующего конформную неинвариантность. В [15] отмечается, что это единственное уравнение, обладающее таким свойством. Более того, это свойство сохраняется как в плоском, так и в искривленном пространстве-времени.

Из явного вида конформных преобразований, порождаемых операторами K_μ (2.5.2) и из теоремы 0.4. вытекает, что реше-

ние уравнения (2.5.1) следует искать в виде

$$u(x) = f(x) \varphi(w) + g(x) \quad (2.5.4)$$

В зависимости от вида инвариантных переменных $w(x)$ функций $f(x)$, $g(x)$ получаются различные классы решений уравнения (2.5.1).

Рассмотрим простейший случай: $f(x) = 1$, $g(x) = 0$.

Подстановка $u = \varphi(w)$, где w — единственная инвариантная переменная редуцирует исходное уравнение к ОДУ

$$3\ddot{\varphi}(w, w^v)^2 + \dot{\varphi}(w, w^v) \Delta w + 2w^v w^\mu w_{,\mu} \dot{\varphi} = 0 \quad (2.5.5)$$

где $\dot{\varphi} = d\varphi/dw$, $dv = \partial w / \partial x^v$

Условие разрешимости уравнения (2.5.5) относительно приводит к соотношениям (2.4.9), которые перепишем в виде

$$w_v w^v = F_1(w) \quad (2.5.6)$$

$$\Delta w = F_2(w)$$

и сводит задачу к уже решенной в §4 настоящей главы. Однако здесь мы не будем делать никаких предположений относительно вида функций F_1 и F_2 . Тогда (2.5.5) можно переписать в виде

$$\ddot{\varphi} + \Phi(w) \dot{\varphi} = 0 \quad (2.5.7)$$

где $\Phi(w) = (F_2 + \dot{F}_1) / 3F_1$, $F_1 \neq 0$.

Общее решение уравнения (2.5.7) дается формулой

$$\varphi(w) = C_1 \int \exp[-\Phi(w) dw] dw + C_2 \quad (2.5.8)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

I. Трансляционный инвариант $w = \alpha_\nu x^\nu$ дает из (2.5.6)

$F_1 = \alpha^2 = \text{const}$, $F_2 = 0$. Тогда из (2.5.8) получаем

$$\varphi(\omega) = C_1 + \omega + \omega^2, \text{ т.е. } u(x) = C_1 \alpha x^2 + C_2.$$

2°. Используя лоренцовский инвариант $\omega = \alpha x, x^2 = x^2$ аналогично получим $F_1 = 4x^2, F_2 = 8$ и из (2.5.8)

$$\varphi(\omega) = C_1 \omega^2 + C_2, \text{ т.е. } u(x) = C_1 (\alpha x)^2 + C_2$$

3°. Пусть

$$\omega_{\mu} = [c^2 x_{\mu} - c_{\mu}(c \cdot x)] / \alpha x^2 \quad (2.5.9)$$

- полный набор инвариантов конформных преобразований, полученный интегрированием соответствующих уравнений Лагранжа.

Рассмотрим инвариант

$$\omega = \beta x / \alpha x^2, \beta_{\mu} = \text{const}, \beta c = \beta^2 = 0$$

представляющий собой линейную комбинацию инвариантов (2.5.8).

Тогда из (2.5.6) следует $\omega_{\mu} \cdot \omega^{\mu} = 0$

и, соответственно, (2.5.5) удовлетворяется при любых $\varphi(\omega)$.

Таким образом в этом случае

$$u(x) = \Phi\left(\frac{\beta x}{\alpha x^2}\right)$$

где Φ - произвольная функция из C^2

Отметим, что также как это было сделано выше, полученные решения можно размножить с помощью операторов симметрии.

Так, например, из трансляционно-инвариантного решения с помощью конформных преобразований можно получить новый класс решений:

$$u(x) = C_1 [(2\alpha) - (2\beta)x^2] [1 - 2(\beta x) + \beta^2 x^2]^{-1} + C_2 \quad (2.5.10)$$

где β_m - параметры конформных преобразований.

Чтобы формула (2.5.10) представляла семейство $C(I,3)$ - неразмножаемых решений, необходимо размножить решения (2.5.10) с помощью остальных независимых преобразований из группы $C(I,3)$.

§6. Сверхтекучая релятивистская жидкость

Полная система уравнений, описывающих бездиссипативное движение релятивистской сверхтекучей жидкости в рамках двухскоростной модели Л.Д.Ландау, получена в работе [48] :

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= 0 \\ \partial_\mu s^\mu &= 0 \\ \partial_\mu v^\mu - \partial_\nu v^\mu &= 0 \\ s^\mu (\partial_\mu w^\nu - \partial_\nu w^\mu) &= 0 \end{aligned} \quad (2.6II)$$

Здесь v , w - 4-векторы скорости сверхтекучей и нормальной компонент жидкости, j - плотность 4-вектора потока массы, s - плотность 4-вектора потока энтропии,

$$j^\mu = \partial P / \partial v_\mu, \quad s^\mu = \partial P / \partial w_\mu,$$

где P - давление, $P = f(v, w)$, f - произвольная функция класса C^1 .

Таким образом, (2.6.1) представляет собой систему из 12 квазилинейных уравнений I-го порядка относительно 16 неизвестных функций, на которые накладываются, впрочем, дополнительные дифференциальные связи, содержащие произвольную функцию. Естественно ожидать при этом, что система (2.6.1) обладает широкой симметрией.

Теорема 2.6.1. Уравнения (2.6.1) инвариантны относительно бесконечномерной алгебры Ли.

Доказательство. Запишем инфинитезимальный оператор в виде $Q = \xi^\alpha \partial_\alpha + \eta^\alpha \partial_{v_\alpha} + \sigma^\alpha \partial_{w_\alpha} + \rho^\alpha \partial_{j^\alpha}$. Определяющие уравнения в данном случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha^\alpha &= \tau_\alpha^\alpha = 0 \quad (g) & \tau^M - S^\nu \xi^\nu_M &= \phi(x) S^M \\ \xi_{j\beta}^\alpha &= \xi_{w\beta}^\alpha = \xi_{v\beta}^\alpha = \xi_{s\beta}^\alpha = 0 \quad (a) & \tau_{w0}^0 + \xi_0^0 &= \sigma_{w1}^1 + \xi_1^1 = \sigma_{w2}^2 + \xi_2^2 \neq \\ & & &= \sigma_{w3}^3 + \xi_3^3 \\ \tau_{j\beta}^\alpha &= \tau_{w\beta}^\alpha = \tau_{v\beta}^\alpha = 0 \\ \rho_{v\beta}^\alpha &= \rho_{w\beta}^\alpha = \rho_{s\beta}^\alpha = 0 \quad (d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{w\beta}^\alpha &= \eta_{j\beta}^\alpha = \eta_{s\beta}^\alpha = 0 \\ \sigma_{v\beta}^\alpha &= \sigma_{j\beta}^\alpha = \sigma_{s\beta}^\alpha = 0 \\ \eta_\beta^\alpha - \eta_\alpha^\beta &= 0, \quad \eta_{v\alpha}^\alpha = -\xi_\alpha^\alpha \quad (e) \\ S^\alpha \sigma_\alpha^\beta - S^\beta \sigma_\beta^\alpha &= 0 \quad (nc) \end{aligned}$$

(2.6.2)

$$\rho_{j\beta}^\alpha - \xi_\beta^\alpha = 0, \quad \alpha \neq \beta \quad (b)$$

$$\rho_{j0}^0 - \xi_0^0 = \rho_{j1}^1 - \xi_1^1 = \rho_{j2}^2 - \xi_2^2 = \rho_{j3}^3 - \xi_3^3 \quad (2)$$

$$\eta_{v\beta}^\alpha + \xi_\alpha^\beta = 0, \quad \alpha \neq \beta$$

$$\sigma_{wv}^M + \xi_M^v = 0, \quad M \neq v$$

$$\tau_{s\beta}^\alpha - \xi_\beta^\alpha = 0, \quad \alpha \neq \beta$$

$$\tau_{j0}^0 - \xi_0^0 = \tau_{j1}^1 - \xi_1^1 = \tau_{j2}^2 - \xi_2^2 = \tau_{j3}^3 - \xi_3^3$$

Здесь $\phi(x)$ - произвольная функция класса C^∞ .
Из уравнений (2.6.2. а, б, в) сразу следует $\rho_{j\beta}^\alpha \cdot \gamma = 0$
т.е.

$$\rho^\alpha = A^{\alpha\beta}(x) j^\beta + B^\alpha(x)$$

что является следствием линейности и однородности соответствующего уравнения системы (2.6.2). Из (2.6.2) заключаем, что функции $A^{\alpha\beta}(x)$, $B^\alpha(x)$ удовлетворяют исходному уравнению.

Используя уравнения (2.6.2.в, г) можно записать

$$A^{\alpha\beta} \frac{\xi^\alpha}{j^\beta} = \delta_{\alpha\beta} \psi'(x)$$

где $\psi'(x)$ - некоторая функция класса C^∞ .

Таким образом,

$$\rho^\alpha = A^{\alpha\beta}(x) j^\beta + B^\alpha(x)$$

$$\xi^\alpha = \int A^{\alpha\beta}(x) d\alpha_\beta - \int \psi'(x) d\alpha_\alpha$$

Совершенно так же из остальных определяющих уравнений находим:

$$\sigma^2 = -w^\beta \int A_{\alpha}^{\beta\gamma}(x) d\alpha_\gamma + w^\beta \int \psi'_\alpha(x) d\alpha_\beta + w^2 \psi^2(x);$$

$$\eta^2 = -v^\beta \int A_{\alpha}^{\beta\gamma}(x) d\alpha_\gamma + v^\beta \int \psi'_\alpha(x) d\alpha_\beta,$$

$$\varepsilon^\alpha = s^\beta \int A_{\gamma}^{\alpha\beta}(x) d\alpha_\beta + s^\beta \int \psi'_\beta(x) d\alpha_\alpha + \phi(x) s^\alpha$$

при этом уравнения (2.6.2 а, ж) удовлетворяются тождественно.

Полученные формулы доказывают теорему.

В частности, нетрудно показать, что если выбрать

$$A^{\alpha\beta}(x) = \delta_{\alpha\beta} x^\nu b_\nu - x_\alpha b_\beta.$$

$$\Psi^1(x) = \Psi^2(x) = \Phi(x) = B^{\alpha}(x) = 0$$

где $b_\nu = \text{const} \neq 0$, то уравнения (2.6.1) будут допускать конформные преобразования, задаваемые операторами K_μ (2.5.2).

Для нахождения некоторых частных решений системы (2.6.1) поступим следующим образом.

Очевидно, что исходные уравнения инвариантны относительно сдвигов. Инвариантной переменной в этом случае можно выбрать величину $w = \alpha x^\nu$. Легко видеть, что сдвиговой анзац $\psi_\mu = x_\mu f(w)$ приводит к решениям:

$$j^\mu = \frac{b_1 x_\mu}{\alpha x^\nu}$$

$$S^\mu(x) = \frac{b_2 x_\mu}{\alpha x^\nu}$$

$$V^\mu(x) = b_3 x_\mu$$

(2.6.3)

$$W^\mu(x) = b_4 x_\mu, \quad \beta_1, \dots, \beta_4 = \text{const}$$

Из теоремы 2.6.1 следует, что уравнения (2.6.1) инвариантны относительно конформных преобразований, порождаемых операторами

$$K_\mu = 2 x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu + 2 (x^\nu S_{\mu\nu} \psi) \partial_\mu - K_{\mu\nu} x^\nu \partial_\mu$$

Преобразования выражаются формулами

$$\begin{aligned} x'_\mu &= (x_\mu - \sigma_\mu x^2) / (1 - 2\sigma x + \sigma^2 x^2) \\ u'_\mu &= u_\mu(x) / (1 - 2\sigma x + \sigma^2 x^2)^{-k} \exp \times \\ &\quad \times [2i S_{\mu\nu} \sigma^\nu x^\nu \tau(x, \sigma)] \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

где σ_μ - параметры, k - конформная степень,

$$\tau = \frac{1}{2\sqrt{(\sigma x)^2 - \sigma^2 x^2}} \ln \left(\frac{[(1 - \sigma x) + \sqrt{(\sigma x)^2 - \sigma^2 x^2}]}{(1 - \sigma x - \sqrt{(\sigma x)^2 - \sigma^2 x^2})} \right)$$

Матрицы $S_{\mu\nu}$ реализуют представление $D(1/2, 1/2)$ алгебры $ASO(1,3)$ в пространстве 4-векторов $u(x)$. Они могут быть выбраны в следующем виде [35]:

$$\begin{aligned} S_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ S_{01} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

С помощью преобразований (2.6.4) можно размножить решения (2.6.3) и получить конформно-инвариантные решения

$$\begin{aligned} J_\mu(x) &= \beta_1 (x_\mu - \sigma_\mu x^2) / \Delta_\nu (x^\nu - \sigma^\nu x^2) (1 - 2\sigma x + \sigma^2 x^2)^k \times \\ &\quad \times \exp [-2i S_{\mu\nu} \sigma^\nu x^\nu \tau], \\ \tilde{J}_\mu(x) &= \beta_2 (x_\mu - \sigma_\mu x^2) / \Delta_\nu (x^\nu - \sigma^\nu x^2) (1 - 2\sigma x + \sigma^2 x^2)^k \times \\ &\quad \times \exp [-2i S_{\mu\nu} \sigma^\nu x^\nu \tau], \\ V_\mu(x) &= \beta_3 (x_\mu - \sigma_\mu x^2) / (1 - 2\sigma x + \sigma^2 x^2)^{k+1} \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

$$\exp[-2iS_{\mu\nu}x^\nu\sigma^{\mu\tau}].$$

$$W_\mu(x) = \beta_\mu (x_\mu - \sigma_\mu x^2) / (1 - 2\sigma_\mu x + \sigma_\mu^2 x^2)^{k+1} \times \exp[-2iS_{\mu\nu}x^\nu\sigma^{\mu\tau}].$$

Решения (2.6.6) в свою очередь можно использовать для генерирования новых решений с помощью других независимых операторов из алгебры инвариантности уравнений (2.6.1). Таких операторов, согласно утверждению теоремы 2.6.1, существует бесконечное множество.

Рассмотрим конформную алгебру $AC(I,3)$, которая является подалгеброй алгебры инвариантности уравнений (2.6.1) и получим $S(I,3)$ -инвариантные решения. Для этого достаточно размножить решения (2.6.6) с помощью оператора

$$J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu + S_{\mu\nu}, \quad P_\mu = -g_{\mu\nu} \partial^\nu,$$

где $S_{\mu\nu}$ — матрицы (2.6.5). Преобразования независимых переменных, порождаемые оператором $J_{\mu\nu}$ можно записать в виде

$$x'_0 = a \cdot x = a_\nu x^\nu$$

$$x'_2 = b \cdot x$$

$$x'_3 = c \cdot x$$

$$x'_0 = d \cdot x$$

(2.6.7)

причем действительные параметры $a_\mu, b_\mu, c_\mu, d_\mu$ удовлетворяют условиям

$$a^2 = b^2 = c^2 = -d^2 = 1, \quad ab = bc = cd = ad = bd = ac = 0$$

Преобразования 4-вектора $u_\mu(x)$ запишем как обычно

$$u'_\mu(x) = u_\mu(x) \exp(i \theta^{\mu\nu} S_{\mu\nu}) \quad (2.6.8)$$

где $\theta^{\mu\nu}$ - параметры.

Тогда, применяя формулу разложения (0.10) с учетом соотношений (2.6.7), (2.6.8) к решениям (2.6.6), получим $S(I, 3)$ -инвариантные решения

$$\begin{aligned} J_\mu = & \beta_1 [-a_\mu \cdot a \cdot x - b_\mu \cdot b \cdot x - c_\mu \cdot c \cdot x + d_\mu \cdot d \cdot x - \\ & - \sigma_\mu (- (ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2 + (dx)^2)] / \\ & [d_0(dx) - d_1(ax) - d_2(bx) - d_3(cx) - d \sigma_0 \cdot \\ & \cdot ((dx)^2 - (ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2)] \times \\ & \times [1 - 2(\sigma_0 dx - \sigma_1 ax - \sigma_2 bx - \sigma_3 cx) + \\ & + \sigma^2 ((dx)^2 - (ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2)]^{\kappa} \times \\ & \times \exp\{-2i S_{\mu\nu} [(a^\nu ax + b^\nu bx + c^\nu cx - d^\nu dx) \tau \sigma^\mu + \theta^{\mu\nu}]\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_\mu = & \beta_2 [-a_\mu \cdot a \cdot x - b_\mu \cdot b \cdot x - c_\mu \cdot c \cdot x + d_\mu \cdot d \cdot x - \sigma_\mu (- (ax)^2 - (bx)^2 - \\ & - (cx)^2 + (dx)^2)] / [d_0(dx) - d_1(ax) - d_2(bx) - d_3(cx) - \\ & - d \sigma_0 ((dx)^2 - (ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2)] [1 - 2(\sigma_0 dx - \sigma_1 ax - \\ & - \sigma_2 bx - \sigma_3 cx) + \sigma^2 ((dx)^2 - (ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2)]^{\kappa} \times \\ & \times \exp\{-2i S_{\mu\nu} [(a^\nu ax + b^\nu bx + c^\nu cx - d^\nu dx) \tau \sigma^\mu + \theta^{\mu\nu}]\} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\mu = & \beta_3 [-a_\mu \cdot a \cdot x - b_\mu \cdot b \cdot x - c_\mu \cdot c \cdot x + d_\mu \cdot d \cdot x - \sigma_\mu (- (ax)^2 - (bx)^2 - \\ & - (cx)^2 + (dx)^2)] / [1 - 2(\sigma_0 dx - \sigma_1 ax - \sigma_2 bx - \sigma_3 cx) + \\ & + \sigma^2 ((dx)^2 - (ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2)]^{\kappa+1} \exp\{-2i \tau \sigma^\mu S_{\mu\nu} (a^\nu ax + \\ & + b^\nu bx + c^\nu cx - d^\nu dx) - i \theta^{\mu\nu} S_{\mu\nu}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{\mu} = & \beta_4 [-q_{\mu}ax - b_{\mu}bx - c_{\mu}cx + d_{\mu}dx - \sigma_{\mu}(-(ax)^2 - (bx)^2 - \\ & -(cx)^2 + (dx)^2)] / [1 - 2(\sigma_0 dx - \sigma_1 ax - \sigma_2 bx - \sigma_3 cx) + \\ & + \sigma^2((dx)^2 - (ax)^2 - (bx)^2 - (cx)^2)]^{k+1} \exp \{-2i\tau S_{\mu\nu}(a^{\nu}ax + \\ & + b^{\nu}bx + c^{\nu}cx - d^{\nu}dx) - i\theta^{\mu\nu}S_{\mu\nu}\}. \end{aligned}$$

Отметим, что используя другие анзацы из таблицы №2, можно получать другие независимые семейства точных частных решений уравнений (2.6.1).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе на основе применения классического метода Ли проведен теоретико-алгебраический анализ систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, применяемых для описания движения сплошных сред в рамках классических и релятивистских теорий инвариантных относительно группы Галилея и Пуанкаре. При этом решены следующие задачи:

- построен нелинейный аналог уравнения Ламе, инвариантный относительно группы Галилея $G(1, 3)$, предложены способы расширения симметрии линейного уравнения Ламе за счет дополнительных условий, налагаемых на решения;
- построены анзацы для векторного поля, инвариантные относительно однопараметрических несопряженных подгрупп группы Галилея $G(1, 3)$ и группы Пуанкаре $P(1, 3)$;
- проведена групповая классификация уравнений классической и релятивистской гидродинамики, содержащих произвольный элемент;
- исследована симметрия уравнений движения идеальной жидкости (уравнения в форме Лагранжа, уравнения Ландау для сверхтекучей жидкости, гидродинамическая форма уравнения Шредингера), вязкой несжимаемой жидкости (уравнение Гельмгольца, "мелкой воды",

жидкости с внутренним вращением), уравнений релятивистского течения идеальной жидкости в различных случаях и некоторых других;

- получены многопараметрические семейства точных частных решений ряда систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных гидродинамического типа;

- построено общее решение релятивистского аналога уравнения Эйлера;

- построены нелинейные векторные представления алгебры Галилея $AG(I, 3)$ и Пуанкаре $AP(I, 3)$ и предложены возможные приложения найденных представлений.

Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при решении таких задач гидродинамики, теории упругости, астрофизики, формулировка которых включает галилеевскую или релятивистскую инвариантность.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору В.И.Фушичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А н н и н Б. Д. , Б и т е в В. О. , С е н а - ш о в С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. - Новосибирск: Наука,
2. Б е й т м е н Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн. - М. : Физматгиз, 1958. - 179 с.
3. Б и р к г о ф Г. Гидродинамика. - М. : Изд-во иностр. лит., 1963. - 400 с.
4. Б л а г о д а р н ы й А. И. Системы дифференциальных уравнений, инвариантные относительно группы Галилея // Динамика сплошной среды. - 1977. - 30. - С. 71-87.
5. Б о г о л ю б о в Н. Н. , Ш и р к о в Д. В. Введение в теорию квантованных полей. - М. : Наука, 1984. - 588 с.
6. В л а д и м и р о в В. С. , В о л о в и ч И. В. Законы сохранения для нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. - 1984. - 279, №4. - С. 843-847.
7. Д а н и л о в Ю. А. Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье-Стокса. - М., 1967. - 15 с. - (Препринт/ АН СССР. Ин-т атомной энергии им. И.В.Курчатова).
8. Д у б р о в с к и й В. А. Уравнения электродинамики и электроупругости // Докл. АН СССР. - 1984. - 279, №4. - С. 857-860.

9. Жданов Р. З. О применении метода Ли-Беклунда к исследованию симметричных свойств уравнения Дирака// Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - с. 70-73.

10. Жумартбаев М. Т. Групповые свойства уравнений адиабатического движения среды в релятивистской гидродинамике// Ж. прикл. мех. и техн. физ. - 1969. - № 2. - с. 116-120.

11. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Релятивистская астрофизика. - М.: Наука, 1967. - 656 с.

12. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. - М.: Наука, 1983. - 280 с.

13. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1978. - 287 с.

14. Картан Э. Теория спиноров. - М.: Изд-во иностр. лит., 1947. - 223 с.

15. Коркина М. П., Григорьев С. Б. гравитационное поле точечной частицы при наличии нелинейного конформно - инвариантного скалярного поля // Укр. физ. журн. - 1984. - 29, № 8. - с. 1153-1157.

16. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математическая модель. - М.: Наука, 1973. - 416 с.

17. Ладженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1970. - 288 с.

18.Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.
Механика сплошных сред. - М.: ГИТТД, 1953. - 788 с.

19.Мезнов А.Н., Савельев М.В.
Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. - М.: Наука, 1985. - 280 с.

20.Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400 с.

21.Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Изд-во НГУ, 1966. - 131 с.

22.Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. - М.: Наука, 1981. - 368 с.

23.Паттерман С. Гидродинамика сверхтекучей жидкости. - М.: Мир, 1978. - 520 с.

24.Понтрягин Л.С. Непрерывные группы. - М.: Наука, 1984. - 520 с.

25.Пухначев В.В. Инвариантные решения уравнений Навье-Стокса, описывающие движения со свободной границей // Докл. АН СССР. - 1972. - 202. - № 2. - С. 302-305.

26.Пухначев В.В. Групповые свойства уравнений Навье-Стокса в плоском случае // Ж. прикл. мех. и техн. физ. - 1960. - № 1. - С. 83-90.

27.Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. - М. : Наука, 1968. - 592 с.

28.Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. - М. : Наука, 1980. - 440 с.

29.Сенашов С.И. Групповые свойства уравнений нелинейной теории упругости // Всесоюз. конференция по теор. упругости. Тезисы докл. - Ереван. 1979. - С.313-314.

30.Славцкий С.Л. Групповые свойства некоторых уравнений гидродинамики // Теоретико-алгебраические исследования уравнений мат. физики. - Киев : Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. 71-74.

31.Славцкий С.Л. Симметрия некоторых уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 74-80.

32.Теория солитонов. Метод обратной задачи / Под ред. С.П.Новикова. - М. : Наука, 1980. - 320 с.

33.Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977.

34.Фушич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Докл. АН СССР. - 1979. - 246, № 4. - С. 846 - 850.

35.Фущич В.И., Никитин А.Г.

Симметрия уравнений Маковелла. - Киев : Наук. думка, 1983.
- 196 с.

36.Фущич В.И. Симметрия в задачах математи-

ческой физики // Теоретико-алгебраические исслед. уравне-
ний мат. физики. - Киев : Ин-т математики АН УССР, 1981. -
С.5-29.

37.Фущич В.И., Наконечный В.В.

Теоретико-алгебраический анализ уравнения Лама // Укр. мат.
журн. - 1980. - 32, № 2. - С. 267-271.

38.Фущич В.И., Славущий С.Л.

О нелинейном галилей-инвариантном обобщении уравнения Лама
// Докл. АН СССР. - 1986. - 287, № 2. - С. 320-323.

39.Фущич В.И. О симметрии и точных решениях

многомерных волновых уравнений // Укр. мат. журн. - 1987.
- 39, № 1. - С. 116-123.

40.Фущич В.И., Цифра И.М.

О симметрии нелинейных уравнений электродинамики // Теорет.
и мат. физика. - 1985. - 64, № 1. - С. 41-50.

41.Фущич В.И., Бараник А.Ф.,

Бараник Л.Ф. Непрерывные подгруппы обобщен-
ногруппы Галилея. I. - Киев, 1985. - 46 с. (Препринт
/ АН УССР Ин-т математики; 85, 19).

42.Ф у щ и ч В . И . О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С. 4 - 23.

43.Ф у щ и ч В . И . О пуанкаре-, галилеево - инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решений // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 4-19.

44.Ф у щ и ч В . И . , С е р о в а М . М . О максимальной группе инвариантности и общем решении одномерных уравнений газовой динамики // Докл. АН СССР. - 1983. - 268, № 5. - С. 1102-1104.

45.Ф у щ и ч В . И . , Ш т е л е н ь В . М . Об инвариантных решениях уравнений Дирака // Докл. АН СССР. - 1983. - 269, № 1. - С. 83-92.

46.Ф у щ и ч В . И . , С е р о в Н . И . Симметрия и точные решения уравнения Монжа-Ампера // Докл. АН СССР. - 1983. - 273, № 3. - С. 24-26.

47.Ф у щ и ч В . И . , С л а в у ц к и й О . Д . О симметрии некоторых уравнений движения идеальной жидкости // Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред. - Киев: Наук. думка, 1986. - С. 161-165.

48. Х а л а т н и к о в И . М . Теория сверхтекучести. - М. : Наука, 1971. - 320 с.

49. Х а л а т н и к о в И . М . Некоторые вопросы релятивистской гидродинамики // Ж. эксперим. и теорет. физики. - 1954. - 27, № 5 (II). - С. 529-541.

50. Ч а л ы р о в Е . И . Конечномерные расширения группы Галилея // Динамика сплошн. среды / Ин-т гидродинамики СО АН СССР. - Новосибирск, 1984. - 68. - С. 145-155.

51. Ч и р к у н о в Ю . А . Групповой анализ уравнений Ламе // Динамика сплошн. среды. - Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1975. - 23. - С. 219 - 225.

52. Ч и р к у н о в Ю . А . Групповое свойство уравнений Ламе // Динамика сплошн. среды. - Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1973. - 14. - С. 138-140.

53. Ш л о м и с М . И . Динамика жидких парамагнетиков. - Пермь : Изд-во Пермского госуниверситета, 1983. - 68 с.

54. Ш т е л е н ь В . М . Формула генерирования конформно-инвариантных решений уравнений поля произвольного спина // Теоретико-групповые исслед. уравнений мат. физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С. 60 - 66.

55. Bäcklund A. V. Über flächentransformationen // Math. Annalen. - 1876. - 9. - P. 297 - 320.

56. Collins C. B. Complex potential equations. I. A technique for solution // Proc. Cambr. Phys. Soc. - 1976. - 80, No 1. - P. 165 - 171.

57. Fuschchich W. I., Moskaliuk S. S. On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation in three spatial dimensions // Lett. Nuovo Cim. - 1981. - 31, No 16. - P. 371 - 376.

58. Grauel A., Steeb W. - H. Similarity solutions of the Euler equation and Navier - Stokes equation in two space dimensions // Int. J. Theor. Phys. - 1985. - 24, No 3. - P. 255 - 265.

59. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen: Bd. I - 3. - Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893.

60. Lloyd S. P. The infinitesimal group of the Navier - Stokes equations // Acta mechanica. - 1981. - 38, No 1. - P. 85 - 98.

61. Morgan A. G. A. The reduction by one of the number of independent variables in some systems of partial differential equations // Quart. J. Math. Oxford. - 1952. - 3, No 12. - P. 250 - 259.

62. Nonnenmacher T. F., Dukek G., Baumann G. On the nonlinear Schrödinger equation and its fluid - dynamical form // Lett. Nuovo Cim. - 1983. - 36, No 14. - P. 453 - 456.

63. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group // J. Math. Phys. - 1975. - 16, No8. - P.1597 - 1624.

64. Rosen G., Ulrich G. N. Invariance group of the equation $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ // SIAM J. Appl. Math. - 1973. - 24, No3. - P.286 - 288.

65. Tresse A. Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations // Acta math. - 1894. - 18, -P.I - 88.

66. Truesdell C., Noll W. The nonlinear field theories of mechanics. Encyclopedia of physics. V.III/3. - Berlin: Springer, 1965.