

АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

ШУЛЬГА Марианна Вильгельмовна

УДК 517.946.9

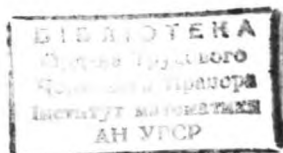
ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К
РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ
УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения и
математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

академик Ю.А.Митропольский



Киев-1988

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА I. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ.....	7
§ 1. Постановка задачи и основные определения.....	7
§ 2. О точных и приближенных решениях одного нелиней- ного волнового уравнения.....	II
§ 3. Асимптотические и точные решения многомерного нелинейного уравнения Шредингера	30
§ 4. Решения обобщенного уравнения Ван-дер-Поля.....	50
§ 5. О частных решениях волнового уравнения с кубичес- кой нелинейностью	57
ГЛАВА II. СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ.....	75
§ 1. Симметричный анализ двумерного квазилинейного волнового уравнения	75
§ 2. Об одном нелинейном двумерном волновом уравнении, обладающим бесконечномерной алгеброй Ли.....	82
§ 3. Симметрия уравнения Даламбера с нелинейным допол- нительным условием.....	88
§ 4. Симметрия систем уравнений, аппроксимирующих нели- нейные волновые уравнения	92
ЛИТЕРАТУРА	98

ВВЕДЕНИЕ

Методы теории возмущений и особенно асимптотические методы малого параметра как в теоретическом, так и в прикладном аспектах получили огромное развитие [4, 18, 19, 41]. С помощью асимптотических методов удастся построить в аналитическом виде приближенные решения сложных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений. Одним из наиболее эффективных подходов изучения нелинейных колебаний является асимптотическая теория возмущений, которую в литературе называют методом Крылова-Боголюбова-Митропольского (КБМ). Этот метод позволил в явном виде построить асимптотические решения широких классов нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

В настоящее время асимптотический анализ ОДУ с малым параметром превратился в трудно обозримую область теории дифференциальных уравнений. Идеи и методы асимптотического анализа сравнительно недавно начали применяться к двумерным нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных.

Многочисленные процессы физики, гидродинамики, биофизики моделируются, как правило, многомерными нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП). В связи с этим, естественно обобщить, применить идеи и методы нелинейной механики к исследованию нелинейных ДУЧП.

Первым существенным шагом в реализации этой обширной программы сделан в монографии Ю.А.Митропольского и Б.И.Мосееенкова [18]. Эта монография, в основном, посвящена обобщению методов нелинейной механики на двумерные нелинейные ДУЧП, которые широко встречаются в прикладной математике и механике.

Дальнейшему развитию асимптотического метода КБМ на двумерные нелинейные ДУЧП посвящена монография

К настоящему времени имеется очень мало литературы по обобщению асимптотических методов на многомерные нелинейные уравнения математической физики [52, 53, 49].

Диссертация посвящена применению асимптотических методов к исследованию многомерных нелинейных волновых уравнений второго порядка. Основное внимание уделяется разбору и исследованию конкретных многомерных нелинейных волновых уравнений, которые широко встречаются в прикладных задачах математики и математической физики.

Сочетание асимптотических методов и методов теории С. Ли группового анализа дифференциальных уравнений [19, 54, 55] дало возможность построить в явном виде приближенные решения нелинейных волновых уравнений.

Основными математическими моделями, описывающими обширный класс волновых процессов, являются нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных следующего вида

$$\square u + F_1(u, \frac{\partial u}{\partial x}, x) = 0 \quad (1)$$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial x_0} + \Delta \Psi + F_2(|\Psi|^2, x) \Psi = 0 \quad (2)$$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta, \quad x_0 = t, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (3)$$

$u = u(x)$ — вещественнозначная функция действительного вектора $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\Psi = \Psi(x)$ — комплекснозначная функция действительного вектора x ; F_1, F_2 — произвольные гладкие функции.

В работах солитонного направления исследуются, главным об-

разом, одномерные и двумерные нелинейные ДУЧП. В частности, уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ) [47]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} = 0, \quad u = u(t, x_1) \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \right) - 3a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (5)$$

одномерное нелинейное уравнение Шредингера [12]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \lambda |\psi|^2 \psi = 0, \quad \psi = \psi(t, x_1) \quad (6)$$

и одномерное нелинейное уравнение $\sin$ -Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \lambda \sin u = 0 \quad (7)$$

Уравнения (1) и (2) естественно назвать, соответственно, нелинейными уравнениями Даламбера и Шредингера.

Открытие Гарднера, Грина, Крускала и Миури [47] метода решения уравнения КдФ позволило построить точные (солитонные) решения уравнений (4)-(7).

Все гладкие решения одномерного уравнения (1) с нелинейностью

$$F_1 = \lambda \exp u, \quad u = u(t, x) \quad (8)$$

построил еще Лиувиль. Сингулярные решения уравнения (1) с нелинейностью (8) исследованы М.К.Поливановым и его учениками [9].

По-видимому, метод обратной задачи теории рассеяния трудно обобщить на многомерные уравнения (1), (2).

Очевидно, что для построения решений уравнений (1), (2) в явном виде необходимо конкретизировать нелинейность F_1 и F_2 . Поэтому в диссертации рассматриваются уравнения (1), (2) с фиксированной нелинейностью. Нелинейности выбираются такими, чтобы

уравнения (1), (2) были инвариантны относительно групп Галилея, Пуанкаре и их расширений. Свойство инвариантности уравнений (1), (2), дает нам возможность многомерные нелинейные ДУЧП сводить (редуцировать) к ОДУ.

Первая глава диссертации посвящена построению асимптотических и точных решений волновых уравнений вида (1), (2).

Во второй главе проведен симметричный анализ двумерных нелинейных волновых уравнений, волновых уравнений с дополнительным нелинейным условием и систем уравнений, аппроксимирующих волновые уравнения с кубической и экспоненциальной нелинейностями.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю академику Ю.А.Митропольскому за постановку задач, обсуждение и постоянное внимание к работе.

ГЛАВА I. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Эта глава посвящена методике редукции (сведения) многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям и построению асимптотических частных решений многомерных нелинейных волновых уравнений (I), (2). Получены в явном виде приближенные и точные решения нелинейных уравнений Даламбера, многомерного аналога уравнения Ван-дер-Поля, нелинейного уравнения Шредингера.

§ I. Постановка задачи и основные определения

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение в частных производных (ДУЧП) второго порядка

$$S: F(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_\mu}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}) = 0 \quad (I.I.I)$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^n$ — независимые переменные, $u = u(x)$ —

искомая функция, S — многообразие, на котором задано

и при этом само многообразие S задано в пространстве

$$(x, u) \in Z = R^n \times R^1$$

Поставим задачу о нахождении асимптотических и точных решений уравнения (I.I.I).

Получить асимптотические решения уравнения (I.I.I) непосредственно применяя асимптотические методы к этому уравнению не представляется возможным. Поэтому для построения асимптотических решений такого уравнения мы осуществили синтез теоретико-групповых идей Софуса Ли [54, 55] и асимптотических методов [4, 18, 19]. Это означает следующее. Сначала, используя симметрию уравнения (I.I.I) относительно соответствующей группы Ли, находим новые

переменные $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \dots, \omega_{n-1}(x)\}$, число которых на единицу меньше, чем число декартовых переменных $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$. Затем с помощью подстановки

$$u(x) = f(x) \cdot \varphi(\omega) + g(x) \quad (I.I.2)$$

см. ([31]) получаем из n -мерного уравнения (I.I.1) $(n-1)$ -мерное редуцированное уравнение относительно переменных $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$. Это редуцированное уравнение приводит к $(n-2)$ -мерному уравнению, а затем, полученное уравнение приводим к $(n-3)$ -мерному и т.д. В конце концов приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ). К ОДУ применяем асимптотический метод [4, 18, 19]. Опишем этот алгоритм более подробно.

Итак, предположим, что уравнение (I.I.1) допускает некоторую группу Ли G_τ преобразований пространства $Z = R^n \times R^1$

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \theta \cdot \xi^\mu(x, u) + O(\theta^2), \quad \mu = \overline{0, n-1} \\ u' &= u + \theta \cdot \eta(x, u) \end{aligned} \quad (I.I.3)$$

При этом $\xi^\mu(x, u)$ и $\eta(x, u)$ являются координатами инфинитезимального оператора

$$X = \xi^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (I.I.4)$$

и определяются они согласно [26] из условия инвариантности уравнения (I.I.1) относительно оператора (I.I.4).

$$X^2 F \Big|_{S=0} = 0 \quad (I.I.5)$$

где X — это второе продолжение инфинитезимального оператора X (I.I.4), определяемое формулой

$$X^2 = X + \xi^\mu \frac{\partial}{\partial u_\mu} + \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_{\mu\nu}} \quad (I.I.6)$$

где $\mathcal{L}^M = \mathcal{D}_\mu(\eta) - u_t \mathcal{D}_\mu(\xi^t)$, $\mathcal{D}_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + u_\mu \frac{\partial}{\partial u}$,
 $\mathcal{L}^{\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu(\eta) - u_{t\nu} \mathcal{D}_\mu(\xi^t)$,
 $\mathcal{D}_\mu = \mathcal{D}_\mu + u_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_\nu}$,
 $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0, n-1}$

(I.I.7)

После того, как исследована симметрия уравнения (I.I.I), т.е. найдены все операторы вида (I.I.4), относительно которых уравнение (I.I.I) инвариантно, наша задача заключается в том, чтобы найти новые переменные $\omega_1(x, u), \dots, \omega_{n-1}(x, u)$. Для нахождения этих новых переменных следует решить следующую систему ОДУ первого порядка

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x, u)} = \frac{dx_1}{\xi^1(x, u)} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{\xi^{n-1}(x, u)} = \frac{du}{\eta(x, u)} \quad (\text{I.I.8})$$

Итак, проинтегрировав систему (I.I.8), мы и получим новые переменные $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ для формулы (I.I.2). При этом $\omega_k(x, u)$, $k = \overline{1, n-1}$ являются первыми интегралами системы ОДУ (I.I.8) и согласно [26] представляют фундаментальную систему инвариантов группы G_τ .

С учетом (I.I.2), уравнение (I.I.I) переписется в виде

$$\Phi(\omega, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_\mu}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega_\mu \partial \omega_\nu}) = 0 \quad (\text{I.I.9})$$

где $\omega = \omega(x, u) = \{\omega_1(x, u), \dots, \omega_{n-1}(x, u)\}$ — новые независимые переменные, а $\varphi = \varphi(\omega)$ — неизвестная функция. При этом размерность уравнения (I.I.9) на единицу меньше, чем размерность исходного уравнения (I.I.I). Таким образом, задача о нахождении решений n -мерного уравнения (I.I.I) свелась к задаче о на-

хождении решений $(n-1)$ -мерного уравнения (I.I.9), которая в свою очередь решается аналогично первоначальной. То есть снова исследуется симметрия уравнения (I.I.9), и затем, используя ее, находятся новые переменные $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\omega(x, \omega), \varphi) = \{\tilde{\omega}_2(\omega, \varphi), \dots, \tilde{\omega}_{n-1}(\omega, \varphi)\}$, число которых на единицу меньше, чем число переменных $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}$.

Затем воспользовавшись подстановкой

$$\varphi(\omega) = \tilde{f}(\omega) \cdot \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}) + \tilde{g}(\omega) \quad (\text{I.I.IO})$$

получаем из $(n-1)$ -мерного уравнения (I.I.9) $(n-2)$ -мерное уравнение

$$\tilde{\Phi}(\tilde{\omega}, \tilde{\varphi}, \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\omega}_\mu}, \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\omega}_\mu \partial \tilde{\omega}_\nu}) = 0 \quad (\text{I.I.II})$$

относительно новых независимых переменных $\omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ и искомой функции $\tilde{\varphi}$.

Продолжая эту процедуру дальше, т.е. редуцируя $(n-2)$ -мерное уравнение (I.I.II) к $(n-3)$ -мерному уравнению, а последнее к $(n-4)$ -мерному и так далее, мы в конце концов придем к ОДУ, к которому и применяем асимптотические методы [4, 13] или же решаем их точно.

§ 2. 0 точных и приближенных решениях одного нелинейного волнового уравнения

Рассмотрим волновое уравнение следующего вида

$$S: \square u + m^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (I.2.1)$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1})$, $x_0 = t$, $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta$

ε — малый параметр, $m^2 > 0$

Хорошо известно, что уравнение (I.2.1) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $AP(1, n-1)$, базисные элементы которой имеют вид

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = (-i) \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad (I.2.2)$$

$a, b = \overline{1, n-1}; \quad a \neq b$

Преобразования, относительно которых уравнение (I.2.1) инвариантно, задаются формулой

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \theta \cdot \mathcal{F}^\mu(x, u) + O(\theta^2), \quad \mu = \overline{0, n-1} \\ u' &= u + \theta \cdot \gamma(x, u) + O(\theta^2), \end{aligned} \quad (I.2.3)$$

При этом $\mathcal{F}^\mu(x, u)$ и $\gamma(x, u)$ имеют вид

$$\mathcal{F}^\mu = c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu \quad (I.2.4a)$$

$$\gamma = 0 \quad (I.2.4b)$$

где $c_{\mu\nu}$, d_μ , $\mu, \nu = \overline{0, n-1}$ — произвольные параметры, причем $c_{00} = c_{11} = \dots = c_{(n-1)(n-1)} = 0$, $c_{0a} = c_{a0}$, $c_{ab} = -c_{ba}$, $a, b = \overline{1, n-1}$, $a \neq b$

В настоящем параграфе ставится задача об отыскании приближенных и точных решений уравнения (I.2.1). Для нахождения таких решений можно применить метод, предложенный в § I главы I.

Причем из явного вида γ (I.2.4б) следует, что формула

(I.1.2) имеет вид

$$u(x) = \varphi(\omega) \quad (I.2.5)$$

где φ — произвольная функция, зависящая от инвариантных переменных $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \dots, \omega_{n-1}(x)\}$, которые находятся из уравнения Лагранжа

Ниже мы рассмотрим случай $n=4$, где n — количество независимых переменных, т.е. $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$

Уравнение (I.2.1) имеет вид

$$u_{00} - u_{11} - u_{22} - u_{33} + m^2 u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (I.2.6)$$

Запишем уравнения Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{c_{01}x_1 + c_{02}x_2 + c_{03}x_3 + d_0} &= \frac{dx_1}{c_{01}x_0 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + d_1} \\ &= \frac{dx_2}{c_{02}x_0 - c_{12}x_1 + c_{23}x_3 + d_2} = \frac{dx_3}{c_{03}x_0 - c_{13}x_1 - c_{23}x_2 + d_3} = \frac{du}{0} \end{aligned} \quad (I.2.7)$$

I. Редукционные уравнения. В зависимости от соотношений между коэффициентами $c_{\mu\nu}$ и d_μ , $\mu, \nu = \overline{0, 3}$, приходим к различным редукционным уравнениям.

Случай I. $\omega_1 = \alpha_\nu x^\nu$, $\omega_2 = \beta_\nu x^\nu$, $\omega_3 = \gamma_\nu x^\nu$

Для функции $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ получим уравнение

$$\varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33} - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (I.2.8)$$

Если предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_a)$ в уравнении зависит только от одной переменной, то приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\varphi_{aa} - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0, \quad a = \overline{1, 3} \quad (I.2.9)$$

Случай 2. $\omega_1 = p_\nu x^\nu$, $\omega_2 = \alpha_\nu x^\nu$, $\omega_3 = \beta_\nu x^\nu$

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.I0})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то из (I.2.I0) получим ОДУ

$$\varphi_{11} + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.II})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то (I.2.I0) имеет вид (I.2.9).

Случай 3. $\omega_1 = \alpha_\nu x^\nu + p_\nu x^\nu$, $\omega_2 = \beta_\nu x^\nu$, $\omega_3 = \gamma_\nu x^\nu$

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ удовлетворяет уравнению

$$-\varphi_{22} - \varphi_{33} + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.I2})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_a)$, $a = 2, 3$, то (I.2.I2) примет вид (I.2.9).

Случай 4. $\omega_1 = [(\alpha_\nu x^\nu)^2 + (\beta_\nu x^\nu)^2]^{1/2}$, $\omega_2 = p_\nu x^\nu$, $\omega_3 = \gamma_\nu x^\nu$

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{11} - \varphi_{22} + \varphi_{33} + \omega_1^{-1} \cdot \varphi_1 - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.I3})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_1)$ зависит от одной переменной ω_1 , то из (I.2.I3) получим

$$\varphi_{11} + \omega_1^{-1} \varphi_1 - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.I4})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то из (I.2.I3) получим

$$\varphi_{22} + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.I5})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то (I.2.I3) принимает вид (I.2.9).

Случай 5. $\omega_1 = [(p_\nu x^\nu)^2 - (\gamma_\nu x^\nu)^2]^{1/2}$, $\omega_2 = \alpha_\nu x^\nu$, $\omega_3 = \beta_\nu x^\nu$

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} + \omega_1^{-1} \cdot \varphi_1 + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.I6})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то из (I.2.I6) получаем

$$\varphi_{11} + \omega_1^{-1} \varphi_1 + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.I7})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_a)$, $a=2,3$, то (I.2.16) имеет вид (I.2.9)

Случай 6. $\omega_1 = \alpha_\nu x^\nu + \rho_\nu x^\nu$, $\omega_2 = [(\rho_\nu x^\nu)^2 - (\alpha_\nu x^\nu)^2 - (\beta_\nu x^\nu)^2]$
 $\omega_3 = \gamma_\nu x^\nu$

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{22} - \varphi_{33} + 2\omega_1^{-1} \omega_2^{-1} \varphi_{12} + 2\omega_2^{-1} \varphi_2 + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.18})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то из (I.2.18) получаем

$$\varphi_{22} + 2\omega_2^{-1} \varphi_2 + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.19})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то (I.2.18) примет вид (I.2.9).

Случай 7. $\omega_1 = [(\rho_\nu x^\nu)^2 - (\alpha_\nu x^\nu)^2]^{1/2}$,

$\omega_2 = \beta \cdot \ln(\alpha_\nu x^\nu + \rho_\nu x^\nu) + \text{arctg} \frac{\beta_\nu x^\nu}{\gamma_\nu x^\nu}$, $\omega_3 = [(\beta_\nu x^\nu)^2 + (\gamma_\nu x^\nu)^2]$
 $\beta \neq 0$

Для функции $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ получаем уравнение

$$\varphi_{11} - \omega_2^{-2} \varphi_{22} - \varphi_{33} + 2\beta \omega_1^{-1} \varphi_{12} + \omega_1^{-1} \varphi_1 - \omega_3^{-1} \varphi_3 + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.20})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то (I.2.20) имеет вид (I.2.17).

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то из (I.2.20) получим ОДУ вида

$$\omega_2^{-2} \varphi_{22} + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.21})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то (I.2.20) является ОДУ вида

$$\varphi_{33} + \omega_3^{-1} \varphi_3 + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.22})$$

Случай 8. $\omega_1 = \alpha_\nu x^\nu + \rho_\nu x^\nu$, $\omega_2 = \varepsilon_1 (\rho_\nu x^\nu - \alpha_\nu x^\nu) + \text{arctg} \frac{\beta_\nu x^\nu}{\gamma_\nu x^\nu}$, $\omega_3 = [(\beta_\nu x^\nu)^2 + (\gamma_\nu x^\nu)^2]^{1/2}$, $\varepsilon_1 = \pm 1$

Для функции $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ получаем уравнение

$$\omega_3^{-2} \varphi_{22} + \varphi_{33} - 4\varepsilon_1 \varphi_{12} + \omega_3^{-1} \varphi_3 - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.23})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то (I.2.23) является ОДУ

$$\omega_2^{-2} \varphi_{22} - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\omega_3 = b_4) \quad (\text{I.2.24})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то из (I.2.23) имеем (I.2.22)

Случай 9. $\omega_1 = [(\alpha_\nu x^\nu)^2 + (\beta_\nu x^\nu)^2]^{\frac{1}{2}}$, $\omega_2 = \beta_\nu x^\nu + \beta \cdot \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}$
 Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{11} - (1 - \beta^2 \omega_1^{-2}) \varphi_{22} + \varphi_{33} + \omega_1^{-1} \varphi_1 - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.25})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то (I.2.25) имеет вид (I.2.I4).

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то из (I.2.25) имеем

$$(1 - \beta^2 \omega_1^{-2}) \varphi_{22} + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\omega_1 = b_5) \quad (\text{I.2.26})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то (I.2.25) совпадает с уравнением (I.2.9).

Случай 10. $\omega_1 = [(\alpha_\nu x^\nu)^2 + (\beta_\nu x^\nu)^2]^{\frac{1}{2}}$, $\omega_2 = \gamma_\nu x^\nu + \beta \cdot \operatorname{arctg} \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\nu x^\nu}$, $\beta \neq 0$, $\omega_3 = \beta_\nu x^\nu$

Для функции $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ получим уравнение

$$\varphi_{11} + (1 + \beta^2 \omega_1^{-2}) \varphi_{22} - \varphi_{33} + \omega_1^{-1} \varphi_1 - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.27})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то (I.2.27) примет вид (I.2.I4).

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то из (I.2.27) получим

$$(1 + \beta^2 \omega_1^{-2}) \varphi_{22} - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.28})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то (I.2.27) примет вид (I.2.II).

Случай 11. $\omega_1 = [(\beta_\nu x^\nu)^2 - (\alpha_\nu x^\nu)^2]^{\frac{1}{2}}$, $\omega_2 = \beta_\nu x^\nu + \beta \ln(\alpha_\nu x^\nu + \beta_\nu x^\nu)$, $\beta \neq 0$, $\omega_3 = \gamma_\nu x^\nu$

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} + 2\beta \omega_1^{-1} \varphi_{12} + \omega_1^{-1} \varphi_1 + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.29})$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то (I.2.29) совпадает с (I.2.I7).

Если $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то (I.2.29) совпадает с (I.2.9).

Случай 12. $\omega_1 = \beta_\nu x^\nu - \alpha_\nu x^\nu + (\beta_\nu x^\nu + \alpha_\nu x^\nu) \beta_\nu x^\nu + \frac{1}{6} (\beta_\nu x^\nu + \alpha_\nu x^\nu)^3$, $\omega_2 = \beta_\nu x^\nu + \frac{1}{4} (\beta_\nu x^\nu + \alpha_\nu x^\nu)^2$, $\omega_3 = \gamma_\nu x^\nu$

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ удовлетворяет уравнению

$$4\omega_2 \varphi_{11} - \varphi_{22} - \varphi_{33} + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (I.2.30)$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то из (I.2.30) получаем

$$4\omega_2 \varphi_{11} + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (I.2.31)$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то (I.2.30) совпадает с (I.2.9)

Случай I3. $\omega_1 = \alpha_\nu x^\nu + p_\nu x^\nu$, $\omega_2 = [(\rho_\nu x^\nu)^2 - (\alpha_\nu x^\nu)^2 - (\beta_\nu x^\nu)^2]^{\frac{1}{2}}$, $\omega_3 = \beta_\nu x^\nu + \varepsilon_1 (\alpha_\nu x^\nu + p_\nu x^\nu) \gamma_\nu x^\nu$, $\varepsilon_1 = \pm 1$

Функция $\varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \varphi_{22} + (-1 - \omega_1^2) \varphi_{33} + 2\omega_1 \omega_2^{-1} \varphi_{12} + 2\omega_3 \omega_2^{-1} \varphi_{23} + \\ + 2\varphi_2 \omega_2^{-1} + m^2 \varphi + \varepsilon \varphi^3 = 0 \end{aligned} \quad (I.2.32)$$

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то (I.2.32) имеет вид (I.2.19).

Если $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то (I.2.32) является ОДУ вида

$$(1 + \omega_1^2) \varphi_{33} - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\omega_1 = b_8) \quad (I.2.33)$$

Во всех случаях I-I3 на параметры $\alpha_\nu, \beta_\nu, \gamma_\nu, \rho_\nu$ накладываются условия

$$\alpha_\nu \alpha^\nu = \beta_\nu \beta^\nu = \gamma_\nu \gamma^\nu = -1, \quad \rho_\nu \rho^\nu = 1, \quad (I.2.34)$$

$$\alpha_\nu \beta^\nu = \beta_\nu \gamma^\nu = \gamma_\nu \rho^\nu = \rho_\nu \alpha^\nu = \alpha_\nu \gamma^\nu = \beta_\nu \rho^\nu = 0, \quad \nu = \overline{0, 3}$$

где $\alpha_\nu \alpha^\nu = \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2$, $\beta_\nu \beta^\nu = \beta_0^2 - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \beta_3^2$

$$\gamma_\nu \gamma^\nu = \gamma_0^2 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2, \quad \rho_\nu \rho^\nu = \rho_0^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2 - \rho_3^2$$

Итак, выше мы получили ряд дифференциальных уравнений в частных производных для функции $\varphi = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, зави-

сящих от трех переменных. Положив в этих уравнениях $\rho = \varphi(\omega_a)$ $a=1, 2, 3$, получили из них ОДУ. Искать решения полученных ДУЧП можно тем же способом, что и решения исходного уравнения (I.2.1), т.е. редуцируя их к двумерным уравнениям в частных производных. Для этого следует сначала исследовать симметрию редуцированных уравнений. Отметим, что не все из полученных ДУЧП обладает нетривиальной симметрией, поэтому дальнейшая редукция уравнений, не обладающих симметрией довольно затруднительна. К настоящему времени не существует каких-либо конструктивных методов построения решений таких уравнений. В том случае, когда редуцированное уравнение в частных производных обладает нетривиальной симметрией мы осуществляем повторную редукцию и приходим к ДУЧП от двух независимых переменных, исследовать которые значительно проще, чем уравнение в четырехмерном пространстве.

2. Редукция уравнения (I.2.8). Уравнение (I.2.8) инвариантно относительно 6-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой имеют вид

$$P_1 = (-i) \frac{\partial}{\partial \omega_1}, P_2 = (-i) \frac{\partial}{\partial x_a}, J_{ab} = \omega_a P_b - \omega_b P_a, \quad (I.2.35)$$

$a, b = 2, 3; a \neq b$

Преобразования, относительно которых уравнение (I.2.8) инвариантно, задаются формулой

$$\omega'_\mu = \omega_\mu + \theta \xi^\mu(\omega, \varphi) + \theta(\theta^2), \quad \mu = \overline{1, 3} \quad (I.2.26)$$

$$\varphi' = \varphi + \theta \eta(\omega, \varphi) + \theta(\theta^2)$$

где $\xi^\mu(\omega, \varphi)$ и $\eta(\omega, \varphi)$ имеют вид

$$\xi^\mu = \tilde{c}_{\mu\nu} \omega^\nu + \tilde{d}_\mu, \quad \eta = 0 \quad (I.2.37)$$

$\tilde{c}_{\mu\nu}, \tilde{d}_\mu, \mu, \nu = \overline{1, 3}$ — произвольные постоянные, причем

$$\tilde{c}_{11} = \tilde{c}_{22} = \tilde{c}_{33} = 0, \quad \tilde{c}_{\mu\nu} = -\tilde{c}_{\nu\mu}, \quad \nu \neq \mu$$

Поскольку $\eta = 0$, поэтому решение уравнения (I.2.8) ищем в виде

$$\psi(\omega) = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}) \quad (\text{I.2.38})$$

где $\tilde{\varphi}$ — новая неизвестная функция, зависящая от инвариантных переменных $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\omega) = \{\tilde{\omega}_1(\omega), \tilde{\omega}_2(\omega)\}$, которые определяются из уравнений Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{\tilde{c}_{12}\omega_2 + \tilde{c}_{13}\omega_3 + \tilde{d}_1} &= \frac{d\omega_2}{-\tilde{c}_{12}\omega_1 + \tilde{c}_{23}\omega_3 + \tilde{d}_2} = \\ &= \frac{d\omega_3}{-\tilde{c}_{13}\omega_1 - \tilde{c}_{23}\omega_2 + \tilde{d}_3} = \frac{d\varphi}{0} \end{aligned} \quad (\text{I.2.39})$$

В зависимости от соотношений между коэффициентами $\tilde{c}_{\mu\nu}$ и $\tilde{d}_\mu$, $\mu, \nu = \overline{1,3}$ приходим к различным редукционным уравнениям.

Случай I. $\tilde{\omega}_1 = (\tilde{\beta}_\mu \omega_\mu^*)^2 - \omega_\mu^* \omega_\mu^*$, $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\beta}_\mu \omega_\mu^*$,

где $\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}_\mu = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$, $\mu = \overline{1,3}$; $\omega_\mu^* = \omega_\mu + a_\mu$

Для функции $\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ получаем уравнение

$$-4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\varphi}_{22} - 4\tilde{\varphi}_1 - m^2 \varphi - \varepsilon \varphi^3 = 0 \quad (\text{I.2.40})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, то из (I.2.40) получаем

$$-4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} - 4\tilde{\varphi}_1 - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.41})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то из (I.2.40) получаем

$$\tilde{\varphi}_{22} - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.42})$$

Случай 2. $\tilde{\omega}_1 = a \cdot (\tilde{\beta}_\mu \omega_\mu^*)$, $\tilde{\omega}_2 = a^2 \tilde{\gamma}_\mu \omega_\mu^*$

где $-\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}_\mu = \gamma_\mu \gamma_\mu = b \neq 0$, $\tilde{\beta}_\mu \tilde{\gamma}_\mu = 0$, $\mu = \overline{1,3}$

Для функции $\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ приходим к уравнению

$$-a^2 b \tilde{\varphi}_{11} + a^4 b \tilde{\varphi}_{22} - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.43})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, то из (I.2.43) имеем

$$a^2 b \tilde{\varphi}_{11} + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.44})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то (I.2.43) переходит к ОДУ

$$a^4 b \tilde{\varphi}_{22} - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.45})$$

Случай 3. $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\alpha}_\mu \omega_\mu$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_\mu \omega_\mu$, где $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\alpha}_\mu = b \neq 0$, $\mu = \overline{1,3}$.

Функция $\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ удовлетворяет уравнению

$$b \tilde{\varphi}_{11} + 4 \tilde{\omega}_2 \tilde{\varphi}_{22} + 2 \tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{12} + 6 \tilde{\varphi}_2 - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.46})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\omega_1)$, то из (I.2.46) имеем

$$b \tilde{\varphi}_{11} - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.47})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\omega_2)$, то из (I.2.46) получим

$$4 \tilde{\omega}_2 \tilde{\varphi}_{22} + 6 \tilde{\varphi}_2 - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.48})$$

Случай 4. $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\alpha}_\mu \omega_\mu$, $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\beta}_\mu \omega_\mu$, где $\alpha_\mu \alpha_\mu = -\beta_\mu \beta_\mu = 1$, $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\beta}_\mu = 0$, $\mu = \overline{1,3}$.

Функция $\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\varphi}_{11} - \tilde{\varphi}_{22} - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.49})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, то из (I.2.49) переходит к ОДУ

$$\tilde{\varphi}_{11} - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.50})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то из (I.2.49) имеем

$$\tilde{\varphi}_{22} + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.50})$$

3. Редукция уравнения (I.2.10). Уравнение (I.2.10) инвариантно относительно 6-мерной алгебры Ли, базисные элементы которой имеют вид

$$P_1 = i \frac{\partial}{\partial \omega_1}, \quad P_2 = (-i) \frac{\partial}{\partial \omega_2}, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a \quad (I.2.51)$$

Преобразования, относительно которых уравнение (I.2.10) инвариантно, задаются формулой (I.2.36). При этом $\mathcal{F}^H(\omega, \varphi)$ и $\eta(\omega, \varphi)$ имеют вид

$$\mathcal{F}^1 = \tilde{c}_{12} \omega_2 + \tilde{c}_{13} \omega_3 + \tilde{d}_1, \quad (I.2.52)$$

$$\mathcal{F}^2 = \tilde{c}_{12} \omega_1 + \tilde{c}_{23} \omega_3 + \tilde{d}_2,$$

$$\mathcal{F}^3 = \tilde{c}_{13} \omega_1 - \tilde{c}_{23} \omega_2 + \tilde{d}_3, \quad \eta = 0$$

где $\tilde{c}_{\mu\nu}$, $\tilde{d}_\mu$, $\mu, \nu = \overline{1, 3}$ — произвольные постоянные.

Поскольку $\eta = 0$ (I.2.52), решение уравнения (I.2.10) ищем в виде (I.2.38). При этом новые независимые переменные $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ находим из уравнений Лагранжа

$$\frac{d\omega_1}{\tilde{c}_{12} \omega_2 + \tilde{c}_{13} \omega_3 + \tilde{d}_1} = \frac{d\omega_2}{\tilde{c}_{12} \omega_1 + \tilde{c}_{23} \omega_3 + \tilde{d}_2} = \frac{d\omega_3}{\tilde{c}_{13} \omega_1 - \tilde{c}_{23} \omega_2 + \tilde{d}_3} = \frac{d\varphi}{0} \quad (I.2.53)$$

В зависимости от соотношений между коэффициентами $c_{\mu\nu}$ и d_μ , $\mu, \nu = \overline{1, 3}$, приходим к таким редукционным уравнениям.

Случай I. $\tilde{\omega}_1 = (\tilde{\beta}_\mu \omega^{\mu*})^2 + \omega_\mu^* \omega^{\mu*}$, $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\beta}_\mu \omega^{\mu*} + a \ln \tilde{\alpha}_\mu \omega^1$

где $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\alpha}^\mu = \tilde{\alpha}_\mu \tilde{\beta}^\mu = 0$, $\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}^\mu = 1$, $\mu = \overline{1, 3}$; $\omega_\mu^* = \omega_\mu + a_\mu$

Для функции $\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ получаем уравнение

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} - 4a \tilde{\varphi}_{12} - \tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (I.2.54)$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, то (I.2.54) является ОДУ вида

$$4\tilde{\omega}_1 \varphi_{11} + 4\tilde{\varphi}_1 + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (I.2.55)$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то (I.2.54) переходит к ОДУ

$$\tilde{\varphi}_{22} - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (I.2.56)$$

Случай 2. $\tilde{\omega}_1 = (\tilde{\beta}_\mu \omega^{\mu*})^2 - \omega_\mu^* \omega^{\mu*}$, $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\beta}_\mu \omega^{\mu*} +$

$$+ a \cdot \tan^{-1} [\tilde{\gamma}_M \omega^{M*} (\tilde{\alpha}_M \omega^{M*})^{-1}] , \text{ где } \tilde{\alpha}_M \tilde{\alpha}^M = \\ = \tilde{\gamma}_M \tilde{\gamma}^M = b \neq 0, \tilde{\beta}_M \tilde{\beta}^M = 1, \tilde{\alpha}_M \tilde{\beta}^M = \tilde{\alpha}_M \tilde{\gamma}^M = \tilde{\beta}_M \tilde{\gamma}^M = 0, \\ M = \overline{1,3}.$$

Функция $\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ удовлетворяет уравнению

$$-4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + (a^2 \tilde{\omega}_1^{-1} + 1) \tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.57})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, то (I.2.57) является ОДУ вида

$$-4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + 4\tilde{\varphi}_1 + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.58})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то (I.2.57) запишется в виде

$$(a^2 \tilde{\omega}_1^{-1} + 1) \tilde{\varphi}_{22} + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\tilde{\omega}_1 = b_1) \quad (\text{I.2.59})$$

Случай 3. $\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_M \omega^{M*})^2 + a \tilde{\beta}_M \omega^{M*}$,

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_M \omega^{M*})^3 + a \cdot \tilde{\alpha}_M \omega^{M*} \cdot \tilde{\beta}_M \omega^{M*} + a^2 \tilde{\gamma}_M \omega^{M*}$$

где $\tilde{\alpha}_M \tilde{\alpha}^M = \tilde{\alpha}_M \tilde{\beta}^M = \tilde{\beta}_M \tilde{\gamma}^M = 0$, $\tilde{\alpha}_M \tilde{\gamma}^M = -\tilde{\beta}_M \tilde{\beta}^M = \tilde{\gamma}_M \tilde{\gamma}^M = b \neq c$

$$\omega_M^* = \omega_M + a_M, \quad M = \overline{1,3}$$

Функция $\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ удовлетворяет уравнению

$$-\tilde{\varphi}_{11} + 2(\tilde{\omega}_1 + a^2) \tilde{\varphi}_{22} + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.60})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, то (I.2.60) является ОДУ

$$\tilde{\varphi}_{11} - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.61})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то (I.2.60) имеет вид

$$2(\tilde{\omega}_1 + a^2) \tilde{\varphi}_{22} + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.62})$$

Случай 4. $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\alpha}_M \omega^M$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_M \omega^M$, где $\tilde{\alpha}_M \tilde{\alpha}^M = b \neq 0$, $M = \overline{1,3}$

В этом случае для функции $\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ получаем уравнение

$$b\tilde{\varphi}_{11} + 8\tilde{\omega}_1\tilde{\varphi}_{12} + 4\tilde{\omega}_2\tilde{\varphi}_{22} + 6\tilde{\varphi}_2 + m^2\tilde{\varphi} + \varepsilon\tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.63})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, то (I.2.63) имеет вид

$$\tilde{\varphi}_{11} + m^2\tilde{\varphi} + \varepsilon\tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.64})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то (I.2.63) является ОДУ вида

$$4\tilde{\omega}_2\tilde{\varphi}_{22} + 6\tilde{\varphi}_2 + m^2\tilde{\varphi} + \varepsilon\tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.65})$$

Случай 5. $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\alpha}_\mu \omega^\mu$, $\tilde{\omega}_2 = \tilde{\beta}_\mu \omega^\mu$, где $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\alpha}^\mu = -\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}^\mu = 1$, $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\beta}^\mu = 0$, $\mu = \overline{1,3}$

Для функции $\varphi(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ получим уравнение

$$\tilde{\varphi}_{11} - \tilde{\varphi}_{22} + m^2\tilde{\varphi} + \varepsilon\tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.66})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, то (I.2.66) имеет вид (I.2.64) ($b=1$)

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то (I.2.66) совпадает с (I.2.56)

Уравнение (I.2.I2) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли. Инфинитезимальные преобразования, относительно которых уравнение (I.2.I2) инвариантно задаются формулой (I.2.36).

При этом

$$\xi^1 = f(\omega_1), \quad \xi^2 = f(\omega_1) + \tilde{c}_{23}\omega_3 + \tilde{d}_2, \quad (\text{I.2.67})$$

$\xi^3 = f(\omega_1) - \tilde{c}_{23} + \tilde{d}_3$, $\eta = 0$
 где f — произвольная функция, $\tilde{c}_{23}$, $\tilde{d}_2$ и $\tilde{d}_3$ — произвольные постоянные.

4. Решения уравнения (I.2.I2). Решение уравнения (I.2.I2) ищем в виде (I.2.38). При этом новые независимые переменные $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ находим из уравнений Лагранжа (1.1.8), где ξ^1 , ξ^2 и η даны формулой (I.2.67). В зависимости от того, какая

функция $f(\omega_i)$ и каково соотношение между параметрами $\tilde{c}_{23}$
 $\tilde{d}_2$ и $\tilde{d}_3$ можно получить различные наборы новых переменных
 $\tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_2$.

Приведем несколько таких наборов:

Случай 1. $\tilde{\omega}_1 = (\omega_2 - \omega_1)^2 + \omega_3^2$, $\tilde{\omega}_2 = \Phi(\omega_1) + \arctg \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_3}$

где Φ — произвольная, дважды дифференцируемая функция.

Для функции $\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ получаем уравнение

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1} \varphi_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.68})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, то (I.2.68) принимает вид

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + 4\tilde{\varphi}_1 - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.69})$$

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\omega_2)$, то (I.2.68) запишется в виде

$$\tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_{22} - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\tilde{\omega}_1 = b_3) \quad (\text{I.2.70})$$

Случай 2. $\tilde{\omega}_1 = \omega_2^2 + \omega_3^2$, $\tilde{\omega}_2 = \Phi(\omega_1) + \arctg \frac{\omega_2}{\omega_3}$

где Φ — произвольная, дважды дифференцируемая функция.

Функция $\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ удовлетворяет уравнению типа (I.2.68).

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, то приходим к уравнению вида (I.2.69).

Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то приходим к уравнению вида (I.2.70).

Уравнение (I.2.13) может быть редуцировано к следующим

лучш

$$-\tilde{\varphi}_{11} + 4\tilde{\omega}_2 \tilde{\varphi}_{22} - \tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_1 + 4\tilde{\omega}_2 \tilde{\varphi}_2 + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.71})$$

где $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$, $\tilde{\omega}_1 = -\omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_2^2 - \omega_3^2$

$$\tilde{\varphi}_{11} + (d_3^2 - d_2^2) \tilde{\varphi}_{22} + \tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_1 - m^2 \tilde{\varphi} - \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.72})$$

где $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$, $\tilde{\omega}_1 = -\omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = d_3 \omega_2 - d_2 \omega_3$, $d_3^2 - d_2^2 = d_4 = \text{const} \neq 0$

Уравнение (I.2.16) редуцируется к уравнениям

$$\tilde{\varphi}_{11} - 4\tilde{\omega}_2 \tilde{\varphi}_{22} + \tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_1 - 4\tilde{\varphi}_2 + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.73})$$

где $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$, $\tilde{\omega}_1 = -\omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = \omega_2^2 + \omega_3^2$

$$\tilde{\varphi}_{11} - (d_3^2 + d_2^2) \tilde{\varphi}_{22} - \tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_1 + m^2 \tilde{\varphi} + \varepsilon \tilde{\varphi}^3 = 0 \quad (\text{I.2.74})$$

где $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$, $\tilde{\omega}_1 = -\omega_1$, $\tilde{\omega}_2 = d_3 \omega_2 - d_2 \omega_3$,
 $d_3^2 + d_2^2 = d_5 = \text{const} \neq 0$.

Из приведенных выше формул видно, что редуцированные уравнения представляют собой уравнения типа Дуффинга, Пенлеве с постоянными и переменными коэффициентами. К большинству из них можно применить асимптотические методы [4, 13]. Не останавливаясь на деталях применения, хорошо известных, асимптотических методов к нелинейным ОДУ, приведем лишь окончательные результаты. С точностью до ε^3 асимптотические решения уравнения (I.2.1) задаются такими выражениями

$$\begin{aligned} u = & c_1 \cos \frac{P}{\sqrt{A}} \omega + c_2 \sin \frac{P}{\sqrt{A}} \omega + \varepsilon \cdot \left\{ c_3 \cos \frac{P}{\sqrt{A}} \omega + c_4 \sin \frac{P}{\sqrt{A}} \omega + \right. \\ & + \frac{1}{32} \frac{c_1}{p^2} (c_1^2 - 3c_2^2) \cos \frac{3P}{\sqrt{A}} \omega - \frac{1}{32} \frac{c_2}{p^2} (c_2^2 - 3c_1^2) \sin \frac{3P}{\sqrt{A}} \omega \Big\} \quad (\text{I.2.75}) \\ & + \varepsilon^2 \cdot \left\{ c_5 \cos \frac{P}{\sqrt{A}} \omega + c_6 \sin \frac{P}{\sqrt{A}} \omega - \frac{3}{32} \frac{1}{p^2} (c_2^2 c_3 - c_1^2 c_3 + 2c_1 c_2 c_4 + \right. \\ & + \frac{1}{32} \frac{c_1}{p^2} (-c_1^4 + 2c_1^2 c_2^2 + 3c_2^4)) \cos \frac{3P}{\sqrt{A}} \omega - \frac{3}{32} \frac{1}{p^2} (c_2^2 c_4 - c_1^2 c_4 - \\ & - 2c_1 c_2 c_3 + \frac{1}{32} \frac{c_2}{p^2} (c_2^4 - 2c_1^2 c_2^2 - 3c_1^4)) \sin \frac{3P}{\sqrt{A}} \omega - \\ & - \frac{1}{1024} \frac{c_1}{p^4} (-c_1^4 + 10c_1^2 c_2^2 - 5c_2^4) \cos \frac{5P}{\sqrt{A}} \omega - \frac{1}{1024} \frac{c_2}{p^4} \times \\ & \times (-c_2^4 + 10c_1^2 c_2^2 - 5c_1^4) \sin \frac{5P}{\sqrt{A}} \omega \Big\} \end{aligned}$$

где $p^2 = m^2 + \varepsilon \cdot (\frac{3}{4} c_1^2 + \frac{3}{4} c_2^2) + \varepsilon^2 \cdot (\frac{6}{4} c_1 c_3 + \frac{6}{4} c_2 c_4 + \frac{3}{128} \frac{1}{m^2} (c_1^2 + c_2^2)^2)$
 A и ω задаются выражениями

$$\text{I) } A = A_2 = a^2 b \neq 0 \quad (a^2 b > 0), \quad \omega = \omega_2 = a \cdot \{ \tilde{\beta}_1 (\alpha_\nu x^\nu + a_1) + \tilde{\beta}_2 (\beta_\nu x^\nu + a_2) + \tilde{\beta}_3 (\gamma_\nu x^\nu + a_3) \}$$

где $-\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}_\mu = b \neq 0$, $\mu = \overline{1, 3}$, $\nu = \overline{0, 3}$

$$2) H = H_3 = a^4 b \neq 0 \ (a^4 b < 0), \ \omega = \omega_3 = a^2 \cdot \{ \tilde{\gamma}_1 (\alpha_\nu x^\nu + a_1) +$$

$$+ \tilde{\gamma}_2 (\beta_\nu x^\nu + a_2) + \tilde{\gamma}_3 (\gamma_\nu x^\nu + a_3) \},$$

где $\tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}_\mu = b \neq 0$, $\mu = \overline{1, 3}$, $\nu = \overline{0, 3}$

$$3) H = H_4 = b \neq 0 \ (b < 0), \ \omega = \omega_4 = \tilde{\alpha}_1 \alpha_\nu x^\nu + \tilde{\alpha}_2 \beta_\nu x^\nu + \tilde{\alpha}_3 \gamma_\nu x^\nu$$

где $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\alpha}_\mu = b \neq 0$, $\mu = \overline{1, 3}$, $\nu = \overline{0, 3}$

$$4) H = H_5 = 1, \ \omega = \omega_5 = \tilde{\beta}_1 \alpha_\nu x^\nu + \tilde{\beta}_2 \beta_\nu x^\nu + \tilde{\beta}_3 \gamma_\nu x^\nu,$$

где $-\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}_\mu = 1$, $\mu = \overline{0, 3}$, $\nu = \overline{0, 3}$

$$5) H = H_7 = \frac{a^2}{b_1} + 1 \neq 0 \left(\frac{a^2}{b_1} + 1 > 0 \right), \ b_1 = \{ \tilde{\beta}_1 (p_\nu x^\nu + a_1) - \tilde{\beta}_2 (\alpha_\nu x^\nu + a_2)$$

$$- \tilde{\beta}_3 (\beta_\nu x^\nu + a_3) \}^2 - \{ (p_\nu x^\nu + a_1)^2 - (\alpha_\nu x^\nu + a_2)^2 - (\beta_\nu x^\nu + a_3)^2 \} \neq 0$$

$$\omega = \omega_4 = \tilde{\beta}_1 (p_\nu x^\nu + a_1) - \tilde{\beta}_2 (\alpha_\nu x^\nu + a_2) - \tilde{\beta}_3 (\beta_\nu x^\nu + a_3) +$$

$$+ a \cdot \tan^{-1} \left[\{ \tilde{\gamma}_1 (p_\nu x^\nu + a_1) - \tilde{\gamma}_2 (\alpha_\nu x^\nu + a_2) - \tilde{\gamma}_3 (\beta_\nu x^\nu + a_3) \} \times \right.$$

$$\left. \times \{ \tilde{\alpha}_1 (p_\nu x^\nu + a_1) - \tilde{\alpha}_2 (\alpha_\nu x^\nu + a_2) - \tilde{\alpha}_3 (\beta_\nu x^\nu + a_3) \}^{-1} \right]$$

где $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\alpha}^\mu = \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}^\mu = b \neq 0$, $\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}^\mu = 1$,

$$\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\beta}^\mu = \tilde{\alpha}_\mu \tilde{\gamma}^\mu = \gamma_\mu \beta^\mu = 0, \ \mu = \overline{1, 3}, \ \nu = \overline{0, 3}$$

$$6) H = H_3 = 2(b_2 + a^2) \neq 0 \ (b_2 + a^2 > 0), \ b_2 = \frac{1}{2} \{ \tilde{\alpha}_1 (p_\nu x^\nu + a_1) -$$

$$- \tilde{\alpha}_2 (\alpha_\nu x^\nu + a_2) - \tilde{\alpha}_3 (\beta_\nu x^\nu + a_3) \}^2 + a \{ \tilde{\beta}_1 (p_\nu x^\nu + a_1) -$$

$$\begin{aligned}
& -\tilde{\beta}_2(\alpha_\nu x^\nu + a_2) - \tilde{\beta}_3(\beta_\nu x^\nu + a_3) \} \neq 0, \quad \omega = \omega_3 = \frac{1}{2} \{ \tilde{\alpha}_1(p_\nu x^\nu + a_1) - \\
& - \tilde{\alpha}_2(\alpha_\nu x^\nu + a_2) - \tilde{\alpha}_3(\beta_\nu x^\nu + a_3) \}^2 + a \cdot \{ \tilde{\alpha}_1(p_\nu x^\nu + a_1) - \tilde{\alpha}_2(\alpha_\nu x^\nu + a_2) - \\
& - \tilde{\alpha}_3(\beta_\nu x^\nu + a_3) \} \{ \tilde{\beta}_1(p_\nu x^\nu + a_1) - \tilde{\beta}_2(\alpha_\nu x^\nu + a_2) - \tilde{\beta}_3(\beta_\nu x^\nu + a_3) \} \\
& + a^2 \{ \tilde{\gamma}_1(p_\nu x^\nu + a_1) - \tilde{\gamma}_2(\alpha_\nu x^\nu + a_2) - \tilde{\gamma}_3(\beta_\nu x^\nu + a_3) \}
\end{aligned}$$

где $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\alpha}^\mu = \tilde{\alpha}_\mu \tilde{\beta}^\mu = \tilde{\beta}_\mu \tilde{\gamma}^\mu = 0$, $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\gamma}^\mu = -\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}^\mu = \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}^\mu = b \neq 0$
 $\mu = \overline{1,3}, \nu = \overline{0,3}$

7) $\Lambda = \Lambda_{10} = b \neq 0 (b > 0)$, $\omega = \omega_{10} = \tilde{\alpha}_1 p_\nu x^\nu - \tilde{\alpha}_2 \alpha_\nu x^\nu - \tilde{\alpha}_3 \beta_\nu x^\nu$,

где $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\alpha}^\mu = b \neq 0$, $\mu = \overline{1,3}, \nu = \overline{0,3}$

8) $\Lambda = \Lambda_{13} = \frac{1}{b_3} \neq 0 (b_3 < 0)$, $\omega = \omega_{13} = \Phi(\alpha_\nu x^\nu + p_\nu x^\nu) +$
 $+ \arctg \frac{\beta_\nu x^\nu - \alpha_\nu x^\nu - p_\nu x^\nu}{\gamma_\nu x^\nu}$

где Φ — произвольная, дважды непрерывно-дифференцируемая функция, $b_3 = (\beta_\nu x^\nu - \alpha_\nu x^\nu - p_\nu x^\nu)^2 + (\gamma_\nu x^\nu)^2 \neq 0$, $\nu = \overline{0,3}$

9) $\Lambda = \Lambda_{14} = \frac{1}{b_3} \neq 0 (b_3 < 0)$, $b_3 = (\beta_\nu x^\nu)^2 + (\gamma_\nu x^\nu)^2 \neq 0$,

$\omega = \omega_{14} = \Phi(\alpha_\nu x^\nu + p_\nu x^\nu) + \arctg \frac{\beta_\nu x^\nu}{\gamma_\nu x^\nu}$, $\nu = \overline{0,3}$

где Φ — произвольная, дважды непрерывно-дифференцируемая функция;

I0) $H = H_{15} = b \neq 0 (b < 0)$, $\omega = \omega_{15} = d_3 p_\nu x^\nu - d_2 \gamma_\nu x^\nu$, $\nu = \overline{0,3}$
 где $d_3^2 - d_2^2 = b \neq 0$

II) $H = H_{16} = b \neq 0 (b < 0)$, $\omega = \omega_{16} = d_3 \alpha_\nu x^\nu - d_2 \beta_\nu x^\nu$, $\nu = \overline{0,3}$
 где $d_3^2 + d_2^2 = b \neq 0$

I2) $H = H_{19} = \frac{1}{b_4^2} \neq 0 (\frac{1}{b_4^2} < 0)$, $\omega = \omega_{19} = \varepsilon_1 (p_\nu x^\nu - \alpha_\nu x^\nu) +$
 $+ \arctg \frac{\beta_\nu x^\nu}{\gamma_\nu x^\nu}$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $b_4 = \{(p_\nu x^\nu)^2 + (\gamma_\nu x^\nu)^2\}^{1/2}$ (I.2.76)

I3) $H = H_{20} = 1 - \frac{\beta^2}{b_5^2} \neq 0 (1 - \frac{\beta^2}{b_5^2} > 0)$, $b_5 = \{(\alpha_\nu x^\nu)^2 + (\beta_\nu x^\nu)^2\}^{1/2} \neq 0$

$\omega = \omega_{20} = p_\nu x^\nu + \beta \cdot \arctg \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\nu x^\nu}$, $\beta \neq 0$, $\nu = \overline{0,3}$

I4) $H = H_{21} = 1 + \frac{\beta^2}{b_5^2} \neq 0 (1 + \frac{\beta^2}{b_5^2} < 0)$,

$\omega = \omega_{21} = \gamma_\nu x^\nu + \beta \cdot \arctg \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\nu x^\nu}$, $\beta \neq 0$, $\nu = \overline{0,3}$

I5) $H = H_{23} = 4b_6 \neq 0 (b_6 > 0)$, $b_6 = \beta_\nu x^\nu + \frac{1}{4}(p_\nu x^\nu + \alpha_\nu x^\nu)^2 \neq 0$

$\omega = \omega_{23} = p_\nu x^\nu - \alpha_\nu x^\nu + (p_\nu x^\nu + \alpha_\nu x^\nu)\beta_\nu x^\nu + \frac{1}{6}(p_\nu x^\nu + \alpha_\nu x^\nu)^3$, $\nu = \overline{0,3}$

I6) $H = H_{25} = 1 + b_7^2 \neq 0 (1 + b_7^2 > 0)$, $b_7 = \alpha_\nu x^\nu + p_\nu x^\nu \neq 0$,

$\omega = \omega_{25} = \beta_\nu x^\nu + \varepsilon_1 (\alpha_\nu x^\nu + p_\nu x^\nu) \gamma_\nu x^\nu$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\nu = \overline{0,3}$

$$\begin{aligned}
u = & c_1 \exp \frac{p}{\sqrt{A}} \omega + c_2 \exp \left(-\frac{p}{\sqrt{A}} \omega \right) + \varepsilon \cdot \left\{ c_3 \exp \frac{p}{\sqrt{A}} \omega + c_4 \exp \left(-\frac{p}{\sqrt{A}} \omega \right) \right. \\
& + \frac{c_1^3}{8p^2} \exp \frac{3p}{\sqrt{A}} \omega + \frac{c_2^3}{8p^2} \exp \left(-\frac{3p}{\sqrt{A}} \omega \right) \left. \right\} + \varepsilon^2 \cdot \left\{ c_5 \exp \frac{p}{\sqrt{A}} \omega + \right. \\
& + c_6 \cdot \exp \left(-\frac{p}{\sqrt{A}} \omega \right) \left. \right\} + \frac{1}{8p^2} (3c_1^2 c_3 + \frac{3}{8} \frac{c_1^4 c_2}{p^2}) \exp \frac{3p}{\sqrt{A}} \omega + \\
& + \frac{1}{8p^2} (3c_2^2 c_4 + \frac{3}{8} \frac{c_2^4 c_1}{p^2}) \exp \left(-\frac{3p}{\sqrt{A}} \omega \right) + \frac{1}{64} \frac{c_1^5}{p^4} \exp \frac{5p}{\sqrt{A}} \omega + \\
& + \frac{1}{64} \frac{c_2^5}{p^4} \exp \left(-\frac{5p}{\sqrt{A}} \omega \right) \left. \right\}, \\
\text{где } p^2 = & m^2 + 3\varepsilon c_1 c_2 + \varepsilon^2 (3c_2 c_3 + 3c_1 c_4 + \frac{3}{8} \frac{c_1^2 c_2^2}{m^2})
\end{aligned}
\tag{I.2.77}$$

A и ω задаются формулами

$$\begin{aligned}
\text{I)} \quad A = A_1 = 1, \quad \omega = \omega_1 = & \tilde{\beta}_1 (\alpha_v x^v + a_1) + \tilde{\beta}_2 (\beta_v x^v + a_2) + \\
& + \tilde{\beta}_3 (\gamma_v x^v + a_3),
\end{aligned}$$

где $\tilde{\beta}_\mu \beta_\mu = 1$, $\mu = \overline{1,3}$; $v = \overline{0,3}$

$$2) A = -A_2, \quad \omega = \omega_2$$

$$3) A = |A_3|, \quad \omega = \omega_3$$

$$4) A = |A_4|, \quad \omega = \omega_4$$

$$\begin{aligned}
5) A = A_6 = 1, \quad \omega = \omega_6 = & \tilde{\beta}_1 (p_v x^v + a_1) - \tilde{\beta}_2 (\alpha_v x^v + a_2) - \\
& - \tilde{\beta}_3 (\beta_v x^v + a_3) + a \cdot \ln \{ \tilde{\alpha}_1 (p_v x^v + a_1) - \tilde{\alpha}_2 (\alpha_v x^v + a_2) - \\
& - \tilde{\alpha}_3 (\beta_v x^v + a_3) \}
\end{aligned}$$

где $\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}^\mu = 1$, $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\alpha}^\mu = \tilde{\alpha}_\mu \tilde{\beta}^\mu = 0$, $\mu = \overline{1,3}$ (I.2.78)

$$6) A = -A_7, \quad \omega = \omega_7$$

$$7) A = A_8 = 1, \quad \omega = \omega_8 = \frac{1}{2} \{ \tilde{\alpha}_1 (p_v x^v + a_1) -$$

$$-\tilde{\alpha}_3(\beta_\nu x^\nu + a_3)\}^2 + a \cdot \{\tilde{\beta}_1(\rho_\nu x^\nu + a_1) - \tilde{\beta}_2(\alpha_\nu x^\nu + a_2) - \tilde{\beta}_3(\beta_\nu x^\nu + a_3)\},$$

где $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\alpha}^\mu = \tilde{\alpha}_\mu \tilde{\beta}^\mu = \tilde{\beta}_\mu \tilde{\gamma}^\mu = 0$, $\tilde{\alpha}_\mu \tilde{\gamma}^\mu = -\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}^\mu = \tilde{\gamma}_\mu \tilde{\gamma}^\mu = 0$,
 $\mu = \overline{1,3}$, $\nu = \overline{0,3}$

8) $A = -A_9$, $\omega = \omega_9$

9) $A = -A_{10}$, $\omega = \omega_{10}$

10) $A = A_{12} = 1$, $\omega = \omega_{12} = \tilde{\beta}_1 \rho_\nu x^\nu - \tilde{\beta}_2 \alpha_\nu x^\nu - \tilde{\beta}_3 \beta_\nu x^\nu$,

где $-\tilde{\beta}_\mu \tilde{\beta}^\mu = 1$, $\mu = \overline{1,3}$, $\nu = \overline{0,3}$

II) $A = |A_{13}|$, $\omega = \omega_{13}$

I2) $A = |A_{14}|$, $\omega = \omega_{14}$

I3) $A = |A_{15}|$, $\omega = \omega_{15}$

I4) $A = |A_{16}|$, $\omega = \omega_{16}$

I5) $A = A_{17} = 1$, $\omega = \omega_{17} = \gamma_\nu x^\nu$, где $\gamma_\nu \gamma^\nu = 1$, $\nu = \overline{0,3}$

I6) $A = |A_{19}|$, $\omega = \omega_{19}$

I7) $A = -A_{20}$, $\omega = \omega_{20}$

I8) $A = |A_{21}|$, $\omega = \omega_{21}$

I9) $A = A_{22} = 1$, $\omega = \omega_{22} = \beta_\nu x^\nu + \beta \ln(\alpha_\nu x^\nu + \rho_\nu x^\nu)$, $\beta \neq 0$

$\nu = \overline{0,3}$

20) $A = -A_{23}$, $\omega = \omega_{23}$

$$21) A = A_{24} = 1, \quad \omega = \beta_\nu x^\nu + \frac{1}{4} (p_\nu x^\nu + \alpha_\nu x^\nu)^2, \quad \nu = \overline{0,3}$$

$$22) A = |A_{25}|, \quad \omega = \omega_{25}$$

Таким образом, формулы (I.2.75), (I.2.76) в явном виде определяют многопараметрические семейства асимптотических решений многомерного нелинейного волнового уравнения (I.2.I).

В заключение приведем в неявном виде некоторые семейства точных решений уравнения (I.2.I), полученные с использованием редуцированных уравнений типа Дурффинга. Неявные решения уравнения (I.2.I) задаются следующими интегралами

$$\omega = \pm \int \frac{\sqrt{A} du}{(2C + m^2 u^2 + \frac{1}{2} \varepsilon u^4)^{1/2}} \quad (\text{I.2.79})$$

где A и ω имеют вид (I.2.78)

$$\omega = \pm \int \frac{\sqrt{A} du}{(2C - m^2 u^2 - \frac{1}{2} \varepsilon u^4)^{1/2}} \quad (\text{I.2.80})$$

где A и ω имеют вид (I.2.76).

§ 3. Асимптотические и точные решения многомерного нелинейного уравнения Шредингера

В этом параграфе рассмотрим уравнение

$$i \frac{\partial u}{\partial x_0} + \lambda \Delta u + \varepsilon |u|^k u = 0, \quad (k=2,4) \quad (\text{I.3.I})$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $u(x) = u_1(x) + i u_2(x)$

ε - малый параметр, x - действительный вектор, $\lambda = -\frac{1}{2m}$

Нелинейное уравнение Шредингера (I.3.I) широко встречается-

ся в квантовой механике, теории плазмы, теоретической биофизике. К настоящему времени детально исследовано одномерное уравнение (I.3.1) $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_0, \mathcal{X}_1)$. Построению солитонных решений одномерного уравнения (I.3.1) с квадратичной нелинейностью $K=2$ посвящены многочисленные работы (обширную литературу по этой тематике см. [12, 13]).

Известно, что уравнение (I.3.1) при произвольном K инвариантно относительно расширенной алгебры Галилея $\mathcal{H} G_1(1,3)$ базисные элементы которой имеют вид [32]

$$\begin{aligned} P_0 &= i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = (-i) \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \\ G_a &= x_0 P_a - m x_a u \frac{\partial}{\partial u}, \\ D &= x_0 P_0 - \vec{x} \cdot \vec{P} + \frac{2i}{K} u \frac{\partial}{\partial u}, \quad a, b = 1, 3 \end{aligned} \quad \text{I.3.2)}$$

преобразования, относительно которых уравнение (I.3.1) инвариантно, задаются формулой (I.2.3). При этом $\xi^\mu(x, u)$ и $\chi(x, u)$ имеют вид

$$\xi^0 = 2bx_0 + d_0 \quad \text{(I.3.3a)}$$

$$\xi = b\vec{x} + \vec{g}x_0 + \vec{\alpha} \times \vec{x} + \vec{d}$$

$$\chi = -[im\vec{g}\vec{x} + \frac{2}{K}b]u \quad \text{(I.3.3б)}$$

$b, g (g_1, g_2, g_3), \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), d = (d_1, d_2, d_3), d_0$
параметры группы $G_1(1,3)$

Как и в предыдущем параграфе, здесь ставится задача об отыскании асимптотических и точных решений уравнения (I.3.1) способом, описанным в § I настоящей главы. Следуя этому методу и учитывая явный вид χ (I.3.3б), решения уравнения (I.3.1) бу-

дем искать в виде

$$u(x) = f(x) \cdot \varphi(\omega) \quad (I.3.4)$$

где $\varphi(\omega)$ — неизвестная функция, зависящая от новых независимых переменных $\omega(x) = \omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$ и $f(x)$ — известная функция. Новые переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и функция $f(x)$ ищутся из уравнений Лагранжа (I.I.). В данном случае уравнения Лагранжа запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{2bx_0 + d_0} &= \frac{dx_1}{bx_1 - g_1x_0 + \alpha_2x_3 - \alpha_3x_2 + d_1} = \\ &= \frac{dx_2}{bx_2 + g_2x_0 + \alpha_3x_1 - \alpha_1x_3 + d_2} = \\ &= \frac{dx_3}{bx_3 + g_3x_0 + \alpha_1x_2 - \alpha_2x_1 + d_3} = \frac{du}{-[\operatorname{Im} \bar{g} \bar{x} + \frac{1}{k} 2b]u} \end{aligned} \quad (I.3.5)$$

В зависимости от соотношений между параметрами группы имеем несколько решений системы (I.3.5)

$$\omega_1 = \frac{\alpha \bar{x}}{\sqrt{x_0}}, \quad \omega_2 = \frac{\bar{x}^2}{x_0}, \quad \omega_3 = -\ln x_0 + \operatorname{arctg} \frac{\beta \bar{x}}{\gamma \bar{x}}, \quad f(x) = x_0^{-\frac{1}{k}} \quad (I.3.6)$$

$$\omega_1 = \frac{\alpha \bar{x}}{\sqrt{x_0}}, \quad \omega_2 = \frac{\beta \bar{x}}{\sqrt{x_0}}, \quad \omega_3 = \frac{\gamma \bar{x}}{\sqrt{x_0}}, \quad f(x) = x_0^{-\frac{1}{k}} \quad (I.3.7)$$

$$\omega_1 = \alpha \bar{x}, \quad \omega_2 = \bar{x}^2, \quad \omega_3 = -x_0 + \operatorname{arctg} \frac{\beta \bar{x}}{\gamma \bar{x}}, \quad f(x) = 1 \quad (I.3.8)$$

$$\omega_1 = \alpha \bar{x}, \quad \omega_2 = \bar{x}^2, \quad \omega_3 = x_0, \quad f(x) = 1 \quad (I.3.9)$$

$$\omega_1 = \alpha \bar{x}, \quad \omega_2 = \beta \bar{x}, \quad \omega_3 = x_0, \quad f(x) = 1 \quad (I.3.10)$$

где $\vec{\alpha} \vec{\alpha} = \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 + \alpha_3 \alpha_3 = \alpha_a \alpha_a$, $\vec{\beta} \vec{\alpha} = \beta_a \alpha_a$, $\vec{\gamma} \vec{\alpha} = \gamma_a \alpha_a$
 $\vec{\alpha}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \alpha_a \alpha_a = 1$, $\vec{\beta}^2 = \beta_a \beta_a = 1$, $\vec{\gamma}^2 = \gamma_a \gamma_a = 1$
 $\vec{\alpha} \vec{\beta} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 = \alpha_a \beta_a = 0$, (I.3.II)
 $\vec{\beta} \vec{\gamma} = \beta_a \gamma_a = 0$, $\vec{\gamma} \vec{\alpha} = \gamma_a \alpha_a = 0$, $a = \overline{1,3}$

Подставляя (I.3.4) в (I.3.I) и используя инварианты (I.3.6)–(I.3.I0), получим, соответственно, следующие редуцированные уравнения

$$\Psi_{11} + 4\omega_2 \Psi_{22} + (\omega_2 - \omega_1^2)^{-1} \Psi_{33} + 4\omega_1 \Psi_{12} + im\omega_1 \Psi_1 + 2(im\omega_2 + 3)\Psi_2 + 2im\Psi_3 + \frac{2im}{K}\Psi - 2m\epsilon|\Psi|^K\Psi = 0 \quad (I.3.I2)$$

$$\Psi_{11} + \Psi_{22} + \Psi_{33} + im(\omega_1 \Psi_1 + \omega_2 \Psi_2 + \omega_3 \Psi_3) + 2im\frac{1}{K}\Psi - 2m\epsilon|\Psi|^K\Psi = 0 \quad (I.3.I3)$$

$$\Psi_{11} + 4\omega_2 \Psi_{22} + (\omega_2 - \omega_1^2)^{-1} \Psi_{33} + 4\omega_1 \Psi_{12} + 6\Psi_2 + 2im\Psi_3 - 2m\epsilon|\Psi|^K\Psi = 0 \quad (I.3.I4)$$

$$\Psi_{11} + 4\omega_2 \Psi_{22} + 4\omega_1 \Psi_{12} + 6\Psi_2 - 2im\Psi_3 - 2m\epsilon|\Psi|^K\Psi = 0 \quad (I.3.I5)$$

$$\Psi_{11} + \Psi_{22} - 2im\Psi_3 - 2m\epsilon|\Psi|^K\Psi = 0 \quad (I.3.I6)$$

где $\Psi_a = \frac{\partial \Psi}{\partial \omega_a}$, $\Psi_{aa} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega_a^2}$, $\Psi_{ab} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \omega_a \partial \omega_b}$, $a, b = \overline{1,3}$

Группа симметрии уравнений (I.3.I2)–(I.3.I5) вообще говоря, уже, чем группа симметрии уравнения (I.3.I), поэтому мы не приводим дальнейшую их редукцию. Предположив же, что в (I.3.I2)–(I.3.I5) Ψ зависит только от одной переменной ω_a (ω_1 ,

либо ω_2 , либо ω_3), мы приходим к нелинейным ОДУ.

Рассмотрим уравнение (I.3.12). Если предположить, что

$\varphi = \varphi(\omega_1)$, $\varphi = \varphi(\omega_2)$, $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то из (I.3.12) для функции φ получим соответственно обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка

$$\varphi_{11} + im\omega_1\varphi_1 + \frac{2im}{\kappa}\varphi - 2m\varepsilon|\varphi|^\kappa\varphi = 0 \quad (\text{I.3.17})$$

$$4\omega_2\varphi_{22} + 2(im\omega_2 + 3)\varphi_2 + \frac{2im}{\kappa}\varphi - 2m\varepsilon|\varphi|^\kappa\varphi = 0 \quad (\text{I.3.18})$$

$$(\omega_2 - \omega_1^2)^{-1}\varphi_{33} + 2im\varphi_3 + \frac{2im}{\kappa}\varphi - 2m\varepsilon|\varphi|^\kappa\varphi = 0 \quad (\text{I.3.19})$$

Рассмотрим уравнение (I.3.13) и предположим, что $\varphi = \varphi(\omega_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$. Тогда для функции φ имеем ОДУ

$$\varphi_{\alpha\alpha} + im\omega_\alpha\varphi_\alpha + \frac{2im}{\kappa}\varphi - 2m\varepsilon|\varphi|^\kappa\varphi = 0 \quad (\text{I.3.20})$$

Рассмотрим уравнение (I.3.14). Если предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то из (I.3.14) для φ получим ОДУ

$$\varphi_{11} - 2m\varepsilon|\varphi|^\kappa\varphi = 0 \quad (\text{I.3.21})$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{m\varepsilon}}(\omega_1 - c_1)^{-1} \quad (\text{когда } \kappa = 2) \quad (\text{I.3.22})$$

$$\varphi = \pm B(\omega_1 + c_1)^{-\frac{1}{\kappa}}, \text{ где } B = (-2\sqrt{\frac{2}{3}}m\varepsilon)^{-\frac{1}{\kappa}} \quad (\text{когда } \kappa = 4)$$

Тогда из (I.3.22), (I.3.4) получим решения уравнения (I.3.1)

$$u = \frac{1}{m\varepsilon}(\alpha\bar{\alpha} - c_1)^{-1} \quad (\text{когда } \kappa = 2)$$

$$u = B(\alpha\bar{\alpha} - c_1)^{-\frac{1}{\kappa}} \quad (\text{I.3.23})$$

$$, \text{ где } B = (-2\sqrt{\frac{2}{3}}m\varepsilon)^{-\frac{1}{\kappa}} \quad (\text{когда } \kappa = 4)$$

Если в уравнении (I.3.I4) предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_2)$ то из него получим уравнение

$$4\omega_2 \varphi_{22} + 6\varphi_2 - 2m\varepsilon |\varphi|^k \varphi = 0 \quad (\text{I.3.24})$$

Решение уравнения (I.3.24) ищем в виде

$$\varphi = \omega_2^{-\frac{1}{k}} \psi(v), \quad dv = \omega_2^{-1} d\omega_2 \quad (\text{I.3.25})$$

Подставляя (I.3.25) в (I.3.24) для функции $\psi(v)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 \psi}{dv^2} + \frac{k-4}{2k} \frac{d\psi}{dv} + \frac{2-k}{2k^2} - \frac{m\varepsilon}{2} |\psi|^k \psi = 0 \quad (\text{I.3.26})$$

В случае $k=4$ из (I.3.26) получим уравнение

$$\frac{d^2 \psi}{dv^2} - \frac{1}{16} \psi - \frac{m\varepsilon}{2} |\psi|^4 \psi = 0 \quad (\text{I.3.27})$$

В случае $k=2$ из (I.3.26) получим уравнение

$$\frac{d^2 \psi}{dv^2} - \frac{1}{2} \frac{d\psi}{dv} - \frac{m\varepsilon}{2} |\psi|^2 \psi = 0 \quad (\text{I.3.28})$$

Таким образом, для нахождения решения уравнения (I.3.24) надо решить уравнения (I.3.27) и (I.3.28).

Можно также найти частное точное решение уравнения (I.3.24).

В случае $k=4$ решением (I.3.24) является функция

$$\varphi = \omega_2^{-\frac{1}{4}} \quad \left(\text{когда } 2m\varepsilon = -\frac{1}{4} \right) \quad (\text{I.3.29})$$

Из (I.3.29) и (I.3.4) получим решение уравнения (I.3.I) ($k=4$)

$$u = \left\{ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \right\}^{-\frac{1}{4}} \quad \left(\text{когда } 2m\varepsilon = -\frac{1}{4} \right)$$

Если в уравнении (I.3.I4) $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то получим уравнение

$$(\omega_2 - \omega_1^2) \varphi_{22} + 2im\varphi_2 - 2m\varepsilon |\varphi|^k \varphi = 0 \quad (\text{I.3.30})$$

причем $\omega_2 - \omega_1^2 = \lambda$

Рассмотрим уравнение (I.3.15). Если предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_1)$ и $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то из него получим уравнения типа (I.3.21) и (I.3.24). Если же $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то из (I.3.15) получим уравнение

$$i\varphi_3 + \varepsilon |\varphi|^K \varphi = 0 \quad (\text{I.3.31})$$

общим решением которого есть функция

$$\varphi = \left(\frac{K\varepsilon}{i} \omega_3 + C_1 \right)^{-\frac{1}{K}} \quad (\text{I.3.32})$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Тогда частное точное решение уравнения (I) имеет вид

$$u = \left\{ \frac{K\varepsilon}{i} x_0 + C_1 \right\}^{-\frac{1}{K}} \quad (K=2,4) \quad (\text{I.3.33})$$

Рассмотрим теперь уравнение (I.3.16). Это уравнение, в отличие от (I.3.12)–(I.3.15), при $K=2$ обладает более широкой группой симметрии, чем исходное уравнение (I.3.1), а при $K=4$ его группа симметрии не изменяется.

В случае $K=2$ уравнение (I.3.16) инвариантно относительно расширенной алгебры Галилея $AG_2(1,2)$ ($AG_2(1,2) = AG_4(1,2)$), базисные элементы которой имеют вид

$$P_3 = i \frac{\partial}{\partial \omega_3}, \quad P_a = (-i) \frac{\partial}{\partial \omega_a}, \quad J_{ab} = \omega_a P_b - \omega_b P_a, \quad (\text{I.3.34})$$

$$G_a = \omega_3 P_a + m \omega_a \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad D = \omega_3 P_3 - \omega P + \frac{2i}{K} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

$$H = \omega_3 (\omega_3 P_3 - \omega P + \frac{2i}{K} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}) + \frac{m}{2} \omega^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (\text{I.3.35})$$

$$a, b = 1, 2$$

В случае $K=4$ (I.3.16) инвариантно относительно расширенной алгебры Галилея $AG_4(1,2)$, базисные элементы за-

даются формулой (I.3.34) (K=4)

Преобразования, относительно которых уравнение (I.3.16) инвариантно, определяются формулой (I.3.36). При этом $\xi'(\omega, \varphi)$ и $\gamma(\omega, \varphi)$ имеют вид:

Случай K=2

$$\xi^3 = \tilde{a}\omega_3^2 + 2\tilde{b}\omega_3 + \tilde{d}_3$$

$$\xi^1 = (\tilde{a}\omega_3 + \tilde{b})\omega_1 + \tilde{\alpha}_1\omega_2 + \tilde{g}_1\omega_3 + \tilde{d}_1 \quad (\text{I.3.36a})$$

$$\xi^2 = (\tilde{a}\omega_3 + \tilde{b})\omega_2 - \tilde{\alpha}_1\omega_1 + \tilde{g}_2\omega_3 + \tilde{d}_2$$

$$\gamma = - \left[i m \left(\frac{\tilde{a}}{2} \overline{\omega}^2 + \tilde{g} \overline{\omega} \right) + \tilde{a}\omega_3 + \tilde{b} \right] \times \varphi, \quad \text{где } \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad (\text{I.3.36b})$$

Случай K=4

$$\xi^3 = 2\tilde{b}\omega_3 + \tilde{d}_3$$

$$\xi^1 = \tilde{b}\omega_1 + \tilde{\alpha}_1\omega_2 + \tilde{g}_1\omega_3 + \tilde{d}_1 \quad (\text{I.3.37a})$$

$$\xi^2 = \tilde{b}\omega_2 - \tilde{\alpha}_1\omega_1 + \tilde{g}_2\omega_3 + \tilde{d}_2$$

$$\gamma = - \left[i m \tilde{g} \overline{\omega} + \frac{\tilde{b}}{2} \right] \varphi, \quad \text{где } \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad (\text{I.3.37b})$$

Исходя из явного вида γ (I.3.36b) и (I.3.37b), решение уравнения (I.3.16) ищем в виде

$$\varphi = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}) \tilde{f}(\omega) \quad (\text{I.3.38})$$

где $\tilde{\varphi}$ — неизвестная функция от двух новых независимых переменных $\tilde{\omega} \{ \tilde{\omega}_1(\omega), \tilde{\omega}_2(\omega) \}$, $\tilde{f}(\omega)$ — известная функция. Новые переменные $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ и функция $\tilde{f}(\omega)$ определяются как первые интегралы уравнений Лагранжа

$$\frac{d\omega_1}{\xi^1} = \frac{d\omega_2}{\xi^2} = \frac{d\omega_3}{\xi^3} = \frac{d\varphi}{\eta} \quad (\text{I.3.39})$$

где ξ^1, ξ^2, ξ^3 и η даны формулами (I.3.36a, б) и (I.3.37 а, б).

В зависимости от соотношений между параметрами $\tilde{a}, \tilde{b}$, $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2)$, $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2)$, $\tilde{d} = (d_1, d_2)$, $\tilde{d}_3$ имеем следующие наборы возможных $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$

$$\begin{aligned} \text{I. } \tilde{\omega}_1 &= \frac{\overline{\omega}^2}{1 - \omega_3^2}, \quad \tilde{\omega}_2 = \operatorname{arctg} \omega_3 + \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\omega_2} \\ \tilde{f}(\omega) &= (1 - \omega_3^2)^{-\frac{1}{k}} \cdot e^{\frac{im}{2} \frac{\omega_3 \overline{\omega}^2}{1 - \omega_3^2}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.40})$$

$$\begin{aligned} 2. \tilde{\omega}_1 &= \frac{\overline{\omega}^2}{1 + \omega_3^2}, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_3^{-1} + \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\omega_2}, \\ \tilde{f}(\omega) &= \omega_3^{-\frac{2}{k}} \cdot e^{-\frac{im}{2} \frac{\overline{\omega}^2}{\omega_3}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.41})$$

$$\begin{aligned} 3. \tilde{\omega}_1 &= \frac{\overline{\omega}^2}{1 + \omega_3^2}, \quad \tilde{\omega}_2 = -\operatorname{arctg} \omega_3 + \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\omega_2} \\ \tilde{f}(\omega) &= (1 + \omega_3^2)^{-\frac{1}{k}} \cdot e^{-\frac{im}{2} \frac{\omega_3 \overline{\omega}^2}{1 + \omega_3^2}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.42})$$

$$4. \tilde{\omega}_1 = \frac{\overline{\omega}^2}{\omega_3}, \quad \tilde{\omega}_2 = -\ln \omega_3 - \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \tilde{f}(\omega) = \omega_3^{-\frac{1}{k}} \quad (\text{I.3.43})$$

$$5. \tilde{\omega}_1 = \frac{\vec{\beta} \vec{\omega}}{\sqrt{\omega_3}}, \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{\vec{\delta} \vec{\omega}}{\sqrt{\omega_3}}, \quad \tilde{f}(\omega) = \omega_3^{-\frac{1}{k}} \quad (\text{I.3.44})$$

$$6. \tilde{\omega}_1 = \overline{\omega}^2, \quad \tilde{\omega}_2 = -\omega_3 + \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad \tilde{f}(\omega) = 1 \quad (\text{I.3.45})$$

$$7. \tilde{\omega}_1 = \overline{\omega}^2, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_3, \quad \tilde{f}(\omega) = 1 \quad (\text{I.3.46})$$

$$\begin{aligned} 8. \tilde{\omega}_1 &= \vec{\alpha} \vec{\omega} + \omega_3 \cdot \vec{\chi} \vec{\omega}, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_3 \\ \tilde{f}(\omega) &= e^{-\frac{im}{2} \frac{(\vec{\alpha} \vec{\omega})^2}{\omega_3}} \end{aligned} \quad (\text{I.3.47})$$

$$9. \omega_1 = \vec{\alpha} \vec{\omega}, \quad \omega_2 = \omega_3, \quad \tilde{f}(\omega) = 1 \quad (\text{I.3.48})$$

где параметры $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2)$, $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2)$ удовлетворяют условиям

$$\vec{\alpha} \vec{\alpha} = \vec{\beta} \vec{\beta} = \vec{\gamma} \vec{\gamma} = 1, \quad \vec{\alpha} \vec{\beta} = \vec{\beta} \vec{\gamma} = \vec{\gamma} \vec{\alpha} = 0 \quad (\text{I.3.49})$$

В случае $K=2$ имеем девять наборов инвариантных переменных (I.3.40)–(I.3.48). В этом случае, когда $K=4$ имеем только пять наборов инвариантов (I.3.43)–(I.3.46), (I.3.48). Подставляя (I.3.38) в (I.3.16) и используя инварианты (I.3.40)–(I.3.48), получим, соответственно, следующие редуцированные уравнения

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 - 2im \tilde{\varphi}_2 + m^2 \tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_1 - 2m\varepsilon |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.50})$$

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 + 2im \tilde{\varphi}_2 - 2m\varepsilon |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.51})$$

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 + 2im \tilde{\varphi}_2 - m^2 \tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_1 - 2m\varepsilon |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.52})$$

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_{22} + 2(im\tilde{\omega}_1 + 2)\tilde{\varphi}_1 + 2im \tilde{\varphi}_2 + \frac{2im}{K} \tilde{\varphi} - 2m\varepsilon |\tilde{\varphi}|^K \tilde{\varphi} = 0 \quad (K=2,4) \quad (\text{I.3.53})$$

$$\tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\varphi}_{22} + im(\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\omega}_2 \tilde{\varphi}_2) + \frac{2im}{K} \tilde{\varphi} - 2m\varepsilon |\tilde{\varphi}|^K \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.54})$$

(K=2,4)

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + \tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_{22} + 4\tilde{\varphi}_1 + 2im \tilde{\varphi}_2 - 2m\varepsilon |\varphi|^k \varphi = 0 \quad (I.3.55)$$

$$(k=2,4)$$

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + 4\tilde{\varphi}_1 - 2im \tilde{\varphi}_2 - 2m\varepsilon |\varphi|^k \varphi = 0 \quad (k=2,4) \quad (I.3.56)$$

$$-\frac{1}{2m}(1+\tilde{\omega}_2^2)\tilde{\varphi}_{11} + i\tilde{\omega}_2^{-1}(\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\omega}_2 \tilde{\varphi}_2 + \frac{1}{2}\tilde{\varphi}) +$$

$$+ \varepsilon |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (I.3.57)$$

$$i\tilde{\varphi}_2 - \frac{1}{2m} \tilde{\varphi}_{11} + \varepsilon |\varphi|^k \varphi = 0 \quad (k=2,4) \quad (I.3.58)$$

где $\tilde{\varphi}_a = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\omega}_a}$, $\tilde{\varphi}_{aa} = \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\omega}_a^2}$, $\tilde{\varphi}_{ab} = \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{\omega}_a \partial \tilde{\omega}_b}$

Рассмотрим уравнение (I.3.50). Если предположить, что $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$, $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то из (I.3.50) для функции $\tilde{\varphi}$ получим соответственно обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + 4\tilde{\varphi}_1 + m^2 \tilde{\varphi} \tilde{\omega}_1 - 2m\varepsilon |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (I.3.59)$$

$$\tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_{22} - 2m\varepsilon \tilde{\varphi}_2 + m^2 \tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi} - 2m\varepsilon |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (I.3.60)$$

причем $\tilde{\omega}_1 = \lambda$

Рассмотрим уравнение (I.3.51). Если предположить, что $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\omega_1)$, то из него получим уравнение

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + 4\tilde{\varphi}_1 - 2m\varepsilon |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (I.3.61)$$

Решение уравнения (I.3.61) ищем в виде

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\omega}_1^{-\frac{1}{2}} \tilde{\Psi}(\tilde{v}), \quad d\tilde{v} = \tilde{\omega}_1^{-1} d\tilde{\omega}_1 \quad (I.3.62)$$

Подставляя (I.3.62) в (I.3.61), для функции $\tilde{\Psi}(\tilde{v})$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}}{d\tilde{r}^2} - \frac{d\tilde{\Psi}}{d\tilde{r}^2} + \frac{1}{4} \tilde{\Psi} - \frac{1}{2} m\epsilon |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi} = 0 \quad (\text{I.3.63})$$

Таким образом, для нахождения решения уравнения (I.3.6I) следует решить уравнение (I.3.63). Можно также найти частное точное решение уравнения (I.3.6I).

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\omega}_1^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{когда } 2m\epsilon = 1) \quad (\text{I.3.64})$$

Из (I.3.64) и (I.3.38) получим частное точное решение уравнения (I.3.I) ($k=2$)

$$u = \pm \left\{ (\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\vec{\beta} \vec{x})^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{im}{2} \frac{(\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\vec{\beta} \vec{x})^2}{x_0}} \quad (\text{I.3.65})$$

(когда $2m\epsilon = 1$)

Если в уравнении (I.3.5I) предположить, что $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то из него получим уравнение

$$\tilde{\omega}_1^{-1} \cdot \tilde{\varphi}_{22} + 2im \tilde{\varphi}_2 - 2m\epsilon |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.66})$$

причем $\tilde{\omega}_1 = \lambda$

Рассмотрим уравнение (I.3.52). Предположим, что $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\omega_1)$ и $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$. Тогда приходим к ОДУ вида

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + 4\tilde{\varphi}_1 - m^2 \tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi} - 2m\epsilon |\tilde{\varphi}|^2 \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.67})$$

$$\tilde{\omega}_1^{-1} \cdot \varphi_{22} + 2im \tilde{\varphi}_2 - m^2 \tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi} - 2m\epsilon |\varphi|^2 \varphi = 0 \quad (\text{I.3.68})$$

причем $\tilde{\omega}_1 = \lambda$

Рассмотрим уравнение (I.3.53). Если предположить, что $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$ и $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\omega_2)$, то получаем ОДУ

$$4\tilde{\omega}_1^{-1} \tilde{\varphi}_{11} + 2(im \tilde{\omega}_1 + 2) \tilde{\varphi}_1 + \frac{2im}{K} \tilde{\varphi} - 2m\epsilon |\tilde{\varphi}|^K \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.69})$$

$$\tilde{\omega}_1^{-1} \cdot \tilde{\varphi}_{22} + 2im \tilde{\varphi}_2 + \frac{2im}{K} \tilde{\varphi} - 2m\epsilon |\tilde{\varphi}|^K \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.70})$$

причем $\tilde{\omega}_1 = \lambda$

Рассмотрим далее уравнение (I.3.54). Если предположить, что $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_a)$, $a=1, 2$, то из (I.3.54) получаем уравнения вида

$$\tilde{\varphi}_{aa} + im\tilde{\omega}_a \tilde{\varphi}_a + \frac{2im}{\kappa} \tilde{\varphi} - 2m\epsilon |\tilde{\varphi}|^{\kappa} \tilde{\varphi} = 0 \quad (\kappa=2,4) \quad (I.3.71)$$

Рассмотрим уравнение (I.3.55). Если предположить, что $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1)$ то из него получаем уравнение

$$4\tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi}_{11} + 4\tilde{\varphi}_1 - 2m\epsilon |\tilde{\varphi}|^{\kappa} \tilde{\varphi} = 0 \quad (\kappa=2,4) \quad (I.3.72)$$

С помощью замены

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\omega}_1^{-\frac{1}{\kappa}} \tilde{\Psi}(\tilde{v}), \quad d\tilde{v} = \tilde{\omega}_1^{-\frac{1}{\kappa}} d\tilde{\omega}_1 \quad (I.3.73)$$

уравнение (I.3.72) приводится к уравнению вида

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}}{d\tilde{v}^2} - \frac{2}{\kappa} \frac{d\tilde{\Psi}}{d\tilde{v}} - \frac{1}{\kappa^2} \tilde{\Psi} - \frac{m\epsilon}{2} |\tilde{\Psi}|^{\kappa} \tilde{\Psi} = 0 \quad (I.3.74)$$

Таким образом, для нахождения решения уравнения (I.3.72) следует решить уравнение (I.3.74). В общем случае это уравнение можно решить только приближенными методами, а следовательно, и решения вида (I.3.73) будут приближенными. Однако, в случае, когда $\tilde{\Psi}(\tilde{v}) = \text{const} = \lambda \neq 0$, мы будем получать частные точные решения уравнения (I.3.72)

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\omega}_1^{-\frac{1}{\kappa}} \lambda \quad \left(\text{когда } 2m\epsilon = \frac{4}{\kappa^2} \lambda^{-\kappa} \right) \quad (\kappa=2,4) \quad (I.3.75)$$

Исходя из (I.3.75) и (I.3.38), частные точные решения уравнения (I.3.1) имеют вид

$$u(\infty) = \lambda \left\{ (\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\vec{\beta} \vec{x})^2 \right\} \quad \left(\text{когда } 2m\epsilon = \frac{4}{\kappa^2} \lambda^{-\kappa} \right) \quad (I.3.76)$$

Если предположить, что в уравнении (I.3.55) $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то из него получим

$$\tilde{\omega}_2^{-1} \cdot \tilde{\varphi}_{22} + 2im\tilde{\varphi}_2 - 2m\varepsilon |\varphi|^k \varphi = 0 \quad (\text{I.3.77})$$

причем $\tilde{\omega}_2 = \lambda$

Рассмотрим уравнение (I.3.56). Если $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$, то из него получим уравнение

$$i\tilde{\varphi}_2 + \varepsilon |\tilde{\varphi}|^k \tilde{\varphi} = 0 \quad (k=2,4) \quad (\text{I.3.78})$$

Решением этого уравнения есть функция

$$\tilde{\varphi} = \left(\frac{k\varepsilon}{i} \tilde{\omega}_2 + c \right)^{-\frac{1}{k}} \quad (k=2,4) \quad (\text{I.3.79})$$

Из (I.3.79) и (I.3.38) получаем частное точное решение уравнения (I.3.1)

$$u(x) = \left(\frac{k\varepsilon}{i} x_0 + c \right)^{-\frac{1}{k}} \quad (k=2,4) \quad (\text{I.3.80})$$

Рассмотрим уравнение (I.3.57). Если предположить, что $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_2)$ является функцией только одной переменной, то из него получим уравнение

$$i\tilde{\varphi}_2 + \frac{i}{2} \tilde{\omega}_2^{-1} \tilde{\varphi} + \varepsilon |\tilde{\varphi}|^k \tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.81})$$

которое с помощью замены

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\varphi}^{-2} \quad (\text{предполагая, что } \tilde{\varphi} \text{ - действительная функция}) \quad (\text{I.3.82})$$

приводится к уравнению

$$\frac{d\tilde{\Psi}}{d\tilde{\omega}_2} - \tilde{\omega}_2^{-1} \tilde{\Psi} + 2i\varepsilon = 0 \quad (\text{I.3.83})$$

Общим решением уравнения (I.3.83) является функция

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\omega}_2 \cdot (c_1 - 2i\varepsilon \ln \tilde{\omega}_2) \quad (\text{I.3.84})$$

Из (I.3.84) и (I.3.82) следует, что функция $\tilde{\varphi}$ имеет следующий вид

$$\tilde{\varphi} = \pm \tilde{\omega}_2^{-\frac{1}{2}} (C_1 - 2i\varepsilon \ln \tilde{\omega}_2)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{I.3.85})$$

Из формул (I.3.38) и (I.3.4) следует, что частным точным решением уравнения (I.3.1) ($K=2$) является функция

$$u(x) = \pm x_0^{-\frac{1}{2}} (C_1 - 2i\varepsilon \ln x_0)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left\{-\frac{im}{2} \frac{\tilde{\alpha}_1^2 (\tilde{\alpha} \tilde{x})^2 + \tilde{\alpha}_2^2 (\tilde{\beta} \tilde{x})^2}{x_0}\right\} \quad (\text{I.3.86})$$

где C_1 — произвольная постоянная, параметры $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ удовлетворяют условию (I.3.49).

Рассмотрим уравнение (I.3.58) ($K=2, 4$). Это уравнение в новых переменных $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ является одномерным нелинейным уравнением Шредингера. В случае, когда $K=2$ и $\frac{1}{2m}=1$ уравнение (I.3.58) имеет хорошо известное солитонное решение в переменных $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ [12]

$$\tilde{\varphi}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2) = A \cdot \frac{\exp\left\{i\left(\varphi_0 + \frac{\tilde{v}}{2} \tilde{\omega}_1 + \frac{\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2}{4} \tilde{\omega}_2 - \frac{\tilde{v}}{2}\right)\right\}}{\text{ch}\left\{\frac{\tilde{u}}{2}(\tilde{\omega}_1 - \tilde{v} \cdot \tilde{\omega}_2 - x_0)\right\}} \quad (\text{I.3.87})$$

где $A = \frac{\sqrt{2} m_1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{u} = 2m_1$, $2m=1$; $m_1, \varphi_0, \tilde{v}, x_0, \tilde{u}$ — параметры

Воспользовавшись формулами (I.3.38) и (I.3.4), солитонное решение уравнения (I.3.1) ($K=2$) имеет вид

$$u(x) = A \cdot \frac{\exp\left\{i\left(\varphi_0 + \frac{\tilde{v}}{2}(\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha} \tilde{x} + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta} \tilde{x}) - \frac{\tilde{u}^2 - \tilde{v}^2}{4} x_0 - \frac{\tilde{v}}{2}\right)\right\}}{\text{ch}\left\{\frac{\tilde{u}}{2}(\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha} \tilde{x} + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta} \tilde{x} - \tilde{v} x_0 - x_0)\right\}} \quad (\text{I.3.88})$$

где $A = \frac{\sqrt{2} m_1}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{u} = 2m_1$, $2m=1$; $m_1, \varphi_0, \tilde{v}, x_0, \tilde{u}$ — параметры

Для уравнения (I.3.58) ($K=4$) солитонных решений не найдено. Но можно заметить, что алгеброй инвариантности уравнения (I.3.58) ($K=4$) является алгебра $\mathcal{H}\mathcal{G}_2(1,1)$ ($\mathcal{H}\mathcal{G}_2(1,1) \supset \mathcal{H}\mathcal{G}_1(1,1)$) и она шире, чем алгебра инвариантности уравнения (I.3.16) ($K=4$). Базисные элементы расширенной алгебры Галилея $\mathcal{H}\mathcal{G}_2(1,1)$ имеют вид

$$P_2 = i \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_2}, \quad P_1 = (-i) \frac{\partial}{\partial \tilde{\omega}_1},$$

$$G_1 = \tilde{\omega}_2 P_1 + m \cdot \tilde{\omega}_1 \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}, \quad D = \tilde{\omega}_2 P_2 - \tilde{\omega}_1 P_1 + \frac{i}{2} \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} \quad (\text{I.3.89})$$

$$H = \tilde{\omega}_2 (\tilde{\omega}_2 P_2 - \tilde{\omega}_1 P_1 + \frac{i}{2} \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}) + \frac{m}{2} \tilde{\omega}_1^2 \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}}$$

Преобразования, относительно которых уравнение (I.3.58) ($K=4$) инвариантно задаются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}'_{\mu} &= \tilde{\omega}_{\mu} + \theta \cdot \xi^{\mu}(\tilde{\omega}, \tilde{\varphi}) + \mathcal{O}(\theta^2), \quad \mu=1,2 \\ \tilde{\varphi}' &= \tilde{\varphi} + \theta \cdot \eta(\tilde{\omega}, \tilde{\varphi}) + \mathcal{O}(\theta^2) \end{aligned} \quad (\text{I.3.90})$$

При этом $\xi^{\mu}(\tilde{\omega}, \tilde{\varphi})$ и $\eta(\tilde{\omega}, \tilde{\varphi})$ имеют вид

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \tilde{a} \tilde{\omega}_2^2 + 2\tilde{b} \tilde{\omega}_2 + \tilde{d}_2 \\ \xi^1 &= (\tilde{a} \tilde{\omega}_2 + \tilde{b}) \tilde{\omega}_1 + \tilde{g} \tilde{\omega}_2 + \tilde{d}_1 \\ \eta &= -[im(\frac{\tilde{a}}{2} \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{g} \tilde{\omega}_1) + \frac{1}{2}(\tilde{a} \tilde{\omega}_2 + \tilde{b})] \tilde{\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{I.3.91})$$

где $\varphi = \tilde{\varphi}_1 + i \tilde{\varphi}_2$

Исходя из явного вида η (I.3.91), решение уравнения (I.3.58) ($K=4$) ищем в виде

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\tilde{\omega}) \tilde{f}(\tilde{\omega}) \quad (\text{I.3.92})$$

где $\tilde{\varphi}$ — неизвестная функция от одной переменной $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$, $\tilde{f}(\tilde{\omega})$ — известная функция. Новая инвариантная переменная $\tilde{\omega}$ и функция $\tilde{f}(\tilde{\omega})$ определяются как первые интегралы уравнений Лагранжа.

$$\frac{d\tilde{\omega}_1}{(\tilde{a}\tilde{\omega}_2 + \tilde{b})\tilde{\omega}_1 + \tilde{g}\tilde{\omega}_2 + \tilde{d}_1} = \frac{d\tilde{\omega}_2}{\tilde{a}\tilde{\omega}_2^2 + 2\tilde{b}\tilde{\omega}_2 + \tilde{d}_2} = \frac{d\tilde{\varphi}}{[\text{im}(\frac{1}{2}\tilde{a}\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{g}\tilde{\omega}_1) + \frac{1}{2}(\tilde{a}\tilde{\omega}_2 + \tilde{b})]\tilde{\varphi}} \quad (\text{I.3.93})$$

В зависимости от соотношений между параметрами $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{g}, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2$ имеем различные наборы инварианта $\tilde{\omega}$ и функции $\tilde{f}(\tilde{\omega})$

$$1. \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega_1^2}{1 - \omega_2^2}, \quad \tilde{f}(\tilde{\omega}) = (1 - \tilde{\omega}_2^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{\frac{im}{2}\tilde{\omega}\tilde{\omega}_2} \quad (\text{I.3.94})$$

$$2. \quad \tilde{\omega} = -\frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_2}, \quad \tilde{f}(\tilde{\omega}) = (-\tilde{\omega}_2^{-1})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{im}{2}\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}_2} \quad (\text{I.3.95})$$

$$3. \quad \tilde{\omega} = \frac{\tilde{\omega}_1^2}{1 + \tilde{\omega}_2^2}, \quad \tilde{f}(\tilde{\omega}) = (1 + \tilde{\omega}_2^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot e^{-\frac{im}{2}\tilde{\omega}\tilde{\omega}_2} \quad (\text{I.3.96})$$

Подставляя (I.3.92) в (I.3.58) ($K=4$) и используя инварианты (I.3.94)–(I.3.96), получим, соответственно, следующие редуцированные уравнения

$$4\tilde{\omega}\tilde{\varphi}'' + 2\tilde{\varphi}' + m^2\tilde{\omega}\tilde{\varphi} - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^4\tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.97})$$

$$\tilde{\varphi}'' - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^4\tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.98})$$

$$4\tilde{\omega}\tilde{\varphi}'' + 2\tilde{\varphi}' - m^2\tilde{\omega}\tilde{\varphi} - 2m\varepsilon|\tilde{\varphi}|^4\tilde{\varphi} = 0 \quad (\text{I.3.99})$$

Рассмотрим уравнение (I.3.98). Если предположить, что $\tilde{\varphi} =$

действительная функция, то общее решение уравнения (I.3.98) имеет вид

$$\tilde{\psi} = \pm B (\tilde{\omega} + c_1)^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{где } B = (-2\sqrt{\frac{2}{3}} m \epsilon)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{I.3.100})$$

Воспользовавшись (I.3.92), (I.3.38) и (I.3.4), можно выписать частное точное решение уравнения (I.3.1)

$$u(x) = \pm B \cdot \left(\frac{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha} \tilde{x} + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta} \tilde{x}}{x_0} + c_1 \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-x_0^{-1})^{\frac{1}{2}} \times \quad (\text{I.3.101})$$

$$\times e^{-\frac{im}{2} \frac{(\tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha} \tilde{x} + \tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta} \tilde{x})^2}{x_0}}$$

где $B = (-2\sqrt{\frac{2}{3}} m \epsilon)^{-\frac{1}{2}}$

Итак, в том случае, когда нам удастся решить редуцированные уравнения точно, мы получаем семейства частных точных решений уравнения (I.3.1). Среди найденных редуцированных уравнений имеются такие, которые решить точно не представляется возможным, но можно к ним применить асимптотические методы [4, 19], и тем самым получить семейства асимптотических решений. К таким уравнениям относятся уравнения (I.3.19), (I.3.27), (I.3.60), (I.3.63), (I.3.68), (I.3.70), (I.3.74). Не вдаваясь в подробности применения асимптотических методов [4, 19] к перечисленным выше уравнениям, приведем окончательный вид асимптотических решений уравнения (I.3.1) в первом приближении.

Случай $K = 2$

$$u(x) = \{a \cdot \cos \psi + \epsilon H_3^{(3)} a^3 \cos 3\psi + \epsilon B_3^{(3)} a^3 \sin 3\psi\} f(x) \quad (\text{I.3.102})$$

где $a = a_0 \cdot e^{-\gamma \omega} \cdot (1 + a_0^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma} \cdot A_3^{(1)} \cdot e^{-2\gamma \omega})^{-\frac{1}{2}}$

$$\Psi = \Psi_0 + \omega_0 \cdot \omega - \frac{1}{2} \frac{B_3^{(1)}}{A_3^{(1)}} \cdot \ln(1 + a_0^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma} A_3^{(1)} \cdot e^{-2\gamma \omega})$$

a_0, Ψ_0 - произвольные постоянные

$\omega_0, \omega, A_3^{(1)}, B_3^{(1)}, A_3^{(3)}, B_3^{(3)}, \gamma, f(x)$

смотреть в

таблице I.3.II, α, β, γ удовлетворяют условию (I.3.II)

Таблица I.3.I.

	ω_0	ω	$A_3^{(1)}$	$B_3^{(1)}$	$A_3^{(3)}$
1.	$(im\lambda + m^2\lambda^2)^{\frac{1}{2}}$	$-\ln x_0 + \operatorname{arctg} \frac{\beta \vec{x}}{\gamma \vec{x}}$ $\frac{x^2}{x_0^2} - \frac{(\vec{\alpha} \vec{x})^2}{x_0^2} = \lambda$	$-\frac{3}{4} m\lambda$	$-\frac{3}{4} \frac{(im\lambda + m^2\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{i}$	$\frac{3im\lambda - 2}{8(3m\lambda + 4i)}$
2.	$\sqrt{2} m\lambda$	$\operatorname{arctg} x_0 + \operatorname{arctg} \frac{\beta \vec{x}}{\gamma \vec{x}}$ $\frac{(\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\beta \vec{x})^2}{1 - x_0^2} = \lambda$	$\frac{3}{4} i$	$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$	$-\frac{5}{56} m\lambda$
3.	0	$-\operatorname{arctg} x_0 + \operatorname{arctg} \frac{\beta \vec{x}}{\gamma \vec{x}}$ $\frac{(\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\beta \vec{x})^2}{1 + x_0^2} = \lambda$	$\frac{3}{4} i$	0	$-\frac{1}{8m\lambda}$
4.	0	$\ln \left\{ \frac{(\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\beta \vec{x})^2}{x_0^2} \right\} c$	$\frac{3}{8} m$	0	$\frac{m}{8}$
5.	0	$\ln \{ (\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\beta \vec{x})^2 \} c$	$\frac{3}{8} m$	0	$\frac{m}{8}$
	$B_3^{(3)}$	γ	$f(x)$		
1.	$-\frac{3}{8} \frac{(im\lambda + m^2\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{(4i + 3m\lambda)}$	$im\lambda$	$x_0^{-\frac{1}{2}}$		
2.	$\frac{3\sqrt{2}i}{56m\lambda}$	$-im\lambda$	$\{1 - x_0^2\}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{im}{2} \frac{x_0 \{ (\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\beta \vec{x})^2 \}}{1 - x_0^2}}$		
3.	0	$im\lambda$	$\{1 + x_0^2\}^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{im}{2} \frac{x_0 \{ (\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\beta \vec{x})^2 \}}{1 + x_0^2}}$		
4.	0	$-\frac{1}{2}$	$\{ (\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\beta \vec{x})^2 \} \cdot e^{-\frac{im}{2} \frac{(\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\beta \vec{x})^2}{x_0^2}}$		
5.	0	$-\frac{1}{2}$	$\{ (\vec{\alpha} \vec{x})^2 + (\beta \vec{x})^2 \}$		

В случае $K=4$

получены следующие решения

$$u(x) = \left\{ a \cdot \cos \Psi + \varepsilon A_5^{(3)} a^5 \cos 3\Psi + \varepsilon B_5^{(3)} a^5 \sin 3\Psi + \right. \\ \left. + \varepsilon A_5^{(5)} a^5 \cos 5\Psi + \varepsilon B_5^{(5)} a^5 \sin 5\Psi \right\} f(x) \quad (I.3.I03)$$

где $a = a_0 \cdot e^{-\gamma \omega} \cdot \left(1 + a_0^4 \cdot \frac{\varepsilon}{\gamma} A_5^{(1)} e^{-4\gamma \omega} \right)^{-\frac{1}{4}}$

$$\Psi = \Psi_0 + \omega_0 \cdot \omega - \frac{1}{4} \frac{B_5^{(1)}}{A_5^{(1)}} \ln \left(1 + a_0^4 \frac{\varepsilon}{\gamma} A_5^{(1)} e^{-4\gamma \omega} \right)$$

a_0, Ψ_0 - произвольные постоянные; $\omega_0, \omega, A_5^{(1)}, B_5^{(1)}, A_5^{(3)}, B_5^{(3)}, A_5^{(5)}, B_5^{(5)}, \gamma, f(x)$ приведены в таблице 1.3.2.

(α, β, γ удовлетворяют условию (I.3.II))

Таблица 1.3.2.

ω_0	ω	$A_5^{(1)}$	$B_5^{(1)}$	$A_5^{(3)}$
$\left(\frac{i m \lambda}{2} + m^2 \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}$	$-\ln x_0 + \operatorname{arctg} \frac{\beta \bar{x}}{\gamma x}$ $\frac{x^2}{x_0} - \frac{(\alpha x)^2}{x_0} = \lambda$	$-\frac{5}{2} \frac{m \lambda}{1 + 6 i m \lambda}$	$-\frac{5}{4} \frac{\left(\frac{i m \lambda}{2} + m^2 \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{i - 6 m \lambda}$	$-\frac{5}{32} \frac{1 - 6 i m \lambda}{i - 6 m \lambda}$
0	$\ln \{ (\alpha x)^2 + (\beta x)^2 \}$	$\frac{5}{16} m \lambda$	0	$\frac{5}{32} m$
$B_5^{(3)}$	$A_5^{(5)}$	$B_5^{(5)}$	γ	$f(x)$
$-\frac{5}{16} \frac{\left(\frac{i m \lambda}{2} + m^2 \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{i - 6 m \lambda}$	$\frac{1}{32} \frac{10 i m \lambda - 3}{9 i + 10 m \lambda}$	$-\frac{5}{16} \frac{\left(\frac{i m \lambda}{2} + m^2 \lambda^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{9 i + 10 m \lambda}$	$i m \lambda$	$x_0^{-\frac{1}{4}}$
0	$\frac{m}{32}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\{ (\alpha x)^2 + (\beta x)^2 \}^{-\frac{1}{4}}$

§ 4. Решения обобщенного уравнения

Ван-дер-Поля

Как и в предыдущих двух параграфах, здесь ставится задача отыскания решений уравнения

$$S: \square u + m^2 u - \varepsilon(1-u^2) \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (\text{I.4.I})$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $x_0 = t$, $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta$

Теорема I.4.I. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (I.4.I) является 7-мерная алгебра, базисные элементы которой имеют вид

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = (-i) \frac{\partial}{\partial x_a} \quad (\text{I.4.2})$$

$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad a, b = 1, 3; \quad a \neq b$$

Преобразования, относительно которых уравнение (I.4.I) инвариантно, задаются формулой (I.2.3) ($n=4$)

При этом $\xi^\mu(x, u)$ и $\eta(x, u)$ имеют вид

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu, \quad \eta = 0 \quad (\text{I.4.3})$$

где $c_{\mu\nu}$, d_μ , $\mu, \nu = 0, 3$ — произвольные постоянные, причем

$$c_{00} = c_{11} = c_{22} = c_{33} = 0, \quad c_{0a} = c_{a0} = 0, \quad c_{ab} = -c_{ba}, \quad a, b = 1, 3, \quad a \neq b$$

Доказательство теоремы не приводим, так как оно сводится к применению алгоритма Ли к (I.4.I). Исходя из явного вида ξ (I.4.3), инвариантные решения уравнения (I.4.I) ищем в виде

$$u(x) = \varphi(\omega) \quad (\text{I.4.4})$$

При этом новые переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ находятся из уравнений Лагранжа

$$\dot{x}_\mu = c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu \quad (\text{I.4.5})$$

где $c_{\mu\nu}$ и d_μ удовлетворяют условию (I.4.3)

В зависимости от соотношений между коэффициентами $c_{\mu\nu}$ и d_μ имеем случаи:

$$\begin{aligned} \text{Случай 1. } \omega_1 &= \beta_\nu x^\nu, \quad \omega_2 = \frac{(\alpha_a y_a)^2}{\alpha^2} + y_a y_a, \\ \omega_3 &= x_0 - b_1 \arctg \frac{l_a y_a}{\delta_a y_a} \end{aligned} \quad (\text{I.4.6})$$

$$\begin{aligned} \text{где } \alpha_a \alpha_a &= -\alpha_\nu \beta^\nu = \alpha^2, \quad l_a l_a = \delta_a \delta_a = l^2 \neq 0, \quad \beta_\nu \beta^\nu = \beta \neq 0, \\ \alpha_a l_a &= \alpha_a \delta_a = l_a \delta_a = l_\nu \beta^\nu = \beta_\nu \delta^\nu = 0, \quad a=1,3, \nu=0,3, \end{aligned} \quad (\text{I.4.6a})$$

$y_a = x_a - \frac{\gamma_a}{\gamma^2}$; $\alpha_a, l_a, \delta_a, \beta_\nu, \gamma_a$ — произвольные постоянные

$$\begin{aligned} \text{Случай 2. } \omega_1 &= \beta_\nu x^\nu, \quad \omega_2 = \frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2} + y_a y_a, \\ \omega_3 &= x_0 + b_2 \ln b_a z_a, \end{aligned} \quad (\text{I.4.7})$$

$$\begin{aligned} \text{где } \alpha_a \alpha_a &= -\alpha_\nu \beta^\nu = -\alpha^2 \neq 0, \quad \beta_\nu \beta^\nu = \beta, \quad \alpha_a b_a = b_a b_a = \beta_\nu b^\nu = \\ &= \alpha_a \gamma_a = 0, \quad a=1,3, \nu=0,3; \quad y_a = x_a + \frac{\gamma_a}{\alpha^2}, \quad z_a = x_a + \frac{d_a}{\alpha^2}, \end{aligned} \quad (\text{I.4.7a})$$

$$\begin{aligned} \text{Случай 3. } \omega_1 &= \beta_\nu x^\nu, \quad \omega_2 = \frac{(\alpha_a y_a)^2}{2} - b_3 l_a y_a, \\ \omega_3 &= \frac{(\alpha_a y_a)^3}{3} - b_3 \alpha_a y_a l_a y_a - b_3^2 \delta_a y_a \end{aligned} \quad (\text{I.4.8})$$

$$\begin{aligned} \text{где } l_a l_a &= \delta_a \alpha_a = \delta_a \delta_a = -l^2 \neq 0, \quad \delta_a l_a = \alpha_a \alpha_a = \alpha_a l_a = 0, \\ \beta_\nu \beta^\nu &= -(\alpha_a \alpha_a)^2 = -\beta^2 \neq 0, \quad a=1,3, \nu=0,3; \end{aligned} \quad (\text{I.4.8a})$$

$y_1 = x_1 - \frac{d_1}{c_{12}}, \quad y_2 = x_2 + \frac{d_1}{c_{12}}, \quad y_3 = x_3; \quad l_a, \alpha_a, \delta_a, \beta_\nu$ — произвольные постоянные

Случай 4. $\omega_1 = \alpha_a x_a$, $\omega_2 = x_a x_a$,

$$\omega_3 = x_0 - b_4 \cdot \arctg \frac{l_a x_a}{\delta_a x_a} \quad (I.4.9)$$

где $\alpha_a \alpha_a = \alpha^2 \neq 0$, $l_a l_a = \delta_a \delta_a = l \neq 0$, $\alpha_a l_a = \alpha_a \delta_a =$
 $= l_a \delta_a = 0$, $a = \overline{1,3}$; α_a, l_a, δ_a - произвольные постоянные (I.4.9a)

Подставив (I.4.4) в (I.4.I) и используя инварианты (I.4.6) - (I.4.9), получим, соответственно, следующие редуцированные уравнения

$$\beta \varphi_{11} - 4 \omega_2 \varphi_{22} + \left(1 - \frac{b_1^2}{\omega_2}\right) \varphi_{33} + 2 \beta_0 \varphi_{13} - 4 \varphi_2 + m^2 \varphi - \varepsilon (1 - \varphi^2) (\beta_0 \varphi_1 + \varphi_3) = 0 \quad (I.4.I0)$$

$$\beta \varphi_{11} - 4 \omega_2 \varphi_{22} + \varphi_{33} + 2 \beta_0 \varphi_{13} - 4 b_2 \varphi_{23} - 4 \varphi_2 + m^2 \varphi - \varepsilon (1 - \varphi^2) (\beta_0 \varphi_1 + \varphi_3) = 0 \quad (I.4.II)$$

$$-\beta^2 \varphi_{11} + b_3^2 l^2 \varphi_{22} + b_3^2 l^2 (b_3^2 - 2 \omega_2) \varphi_{33} + 2 b_3^2 l^2 \varphi_{13} + m^2 \varphi - \varepsilon (1 - \varphi^2) \beta_0 \varphi_1 = 0 \quad (I.4.I2)$$

$$-\alpha^2 \varphi_{11} - 4 \omega_2 \varphi_{22} + \left(1 - \frac{b_4^2}{\omega_2}\right) \varphi_{33} - 2 \omega_1 \varphi_{12} - 6 \varphi_2 + m^2 \varphi - \varepsilon (1 - \varphi^2) \varphi_3 = 0 \quad (I.4.I3)$$

Рассмотрим далее уравнение (I.4.I0). Если предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то приходим к ОДУ

$$\varphi_{11} + \frac{m^2}{\beta} \varphi - \varepsilon \frac{\beta_0}{\beta} (1 - \varphi^2) \varphi_1 = 0 \quad (I.4.I4)$$

Если предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_2)$ и $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то из (I.4.10) получим, соответственно, уравнения

$$4\omega_2 \varphi_{22} + 4\varphi_2 - m^2 \varphi = 0 \quad (\text{I.4.15})$$

$$\varphi_{33} + \frac{m^2}{\lambda_1} - \varepsilon \frac{1}{\lambda_1} (1 - \varphi^2) \varphi_3 = 0 \quad (\text{I.4.16})$$

где $\lambda_1 = 1 - \frac{b_1^2}{\omega_2}$

Рассмотрим уравнение (I.4.11). Если предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то уравнение (I.4.11) приходит к ОДУ

$$\varphi_{33} + m^2 \varphi - \varepsilon (1 - \varphi^2) \varphi_3 = 0 \quad (\text{I.4.17})$$

Рассмотрим уравнение (I.4.12). Предположим, что $\varphi = \varphi(\omega_1)$ тогда получим ОДУ

$$\varphi_{11} + \frac{m^2}{-\beta^2} - \varepsilon \frac{\beta_0}{-\beta^2} (1 - \varphi^2) \varphi_1 = 0 \quad (\text{I.4.18})$$

В случае, когда $\varphi = \varphi(\omega_a)$, $a = 2, 3$, из уравнения (I.4.12) имеем ОДУ

$$\varphi_{aa} + \lambda_a \varphi = 0, \quad a = 2, 3 \quad (\text{I.4.19})$$

$$\text{где } \lambda_2 = \frac{m^2}{b_3^2 l^2}, \quad \lambda_3 = \frac{m^2}{b_3^2 l^2 (b_3^2 - 2\omega_2)} \quad (b_3^2 - 2\omega_2 = \lambda_5) \quad (\text{I.4.19a})$$

Общим решением уравнения (I.4.19) являются функции

$$\begin{aligned} \varphi &= c_1 \cdot \cos \sqrt{\lambda_a} \omega_a + c_2 \cdot \sin \sqrt{\lambda_a} \omega_a \quad (\lambda_a > 0), \quad a = 2, 3 \\ \varphi &= c_1 \cdot \exp\{\sqrt{-\lambda_a} \omega_a\} + c_2 \cdot \exp\{-\sqrt{-\lambda_a} \omega_a\} \quad (\lambda_a < 0) \end{aligned} \quad (\text{I.4.20})$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а значения постоянной

λ_a ($a = 2, 3$) даются формулой (I.4.19a). Тогда, согласно формуле (I.4.4), решения уравнения (I.4.1) задаются выражениями

$$u = C_1 \cdot \cos \sqrt{\lambda_a} \omega_a + C_2 \cdot \sin \sqrt{\lambda_a} \omega_a \quad (\lambda_a > 0), \quad a = 2, 3 \quad (\text{I.4.21})$$

$$u = C_1 \cdot \exp\{\sqrt{-\lambda_a} \omega_a\} + C_2 \cdot \exp\{-\sqrt{-\lambda_a} \omega_a\} \quad (\lambda_a < 0), \quad a = 2, 3$$

при этом λ_a и ω_a

$$1) \quad \lambda_2 = \frac{m^2}{b_3^2 l^2}, \quad \omega_2 = \frac{(\alpha_a \gamma_a)^2}{2} - b_3 l_a \gamma_a,$$

причем α_a, l_a удовлетворяют условию (I.4.8a)

$$2) \quad \lambda_3 = \frac{m^2}{b_3^2 l^2 (b_3^2 - 2\omega_2)}, \quad \omega_3 = \frac{(\alpha_a \gamma_a)^3}{3} - b_3 \alpha_a \gamma_a l_a \gamma_a - b_3^2 \delta_a \gamma_a$$

$$\text{причем } b_3^2 - 2 \left\{ \frac{(\alpha_a \gamma_a)^2}{2} - b_3 l_a \gamma_a \right\} = \lambda_5, \quad \alpha_a, \delta_a, l_a$$

удовлетворяют условию (I.4.8б)

Рассмотрим уравнение (I.4.13). Если $\varphi = \varphi(\omega_i)$, то приходим к ОДУ

$$\varphi_{ii} + \frac{m^2}{-\alpha^2} \varphi = 0 \quad (\text{I.4.22})$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi = C_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{m^2}{-\alpha^2}} \omega_i + C_2 \cdot \sin \sqrt{\frac{m^2}{-\alpha^2}} \omega_i \quad \left(\frac{m^2}{\alpha^2} < 0 \right) \quad (\text{I.4.23})$$

$$\varphi = C_1 \cdot \exp\left\{\sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2}} \omega_i\right\} + C_2 \cdot \exp\left\{-\sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2}} \omega_i\right\} \quad \left(\frac{m^2}{\alpha^2} > 0 \right)$$

Воспользовавшись анзацем (I.4.4), частное точное решение уравнения (I.4.I) запишется в виде

$$u(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2}} \alpha_a x_a\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2}} \alpha_a x_a\right) \left(\frac{m^2}{\alpha^2} < 0\right) \quad (\text{I.4.24})$$

$$u(x) = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2}} \alpha_a x_a\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2}} \alpha_a x_a\right) \left(\frac{m^2}{\alpha^2} > 0\right),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а постоянная α_a удовлетворяет условию (I.4.9a).

Если предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то из (I.4.I3) получим уравнение

$$\left(1 - \frac{b_4^2}{\omega_2^2}\right) \varphi_{33} + m^2 \varphi - \varepsilon (1 - \varphi^2) \varphi_3 = 0 \quad (\text{I.4.25})$$

где $\lambda_4 = 1 - \frac{b_4^2}{\omega_2^2}$

Рассмотрим уравнения (I.4.I4), (I.4.I6), (I.4.I7), (I.4.I8), (I.4.25). Все эти уравнения относятся к одному типу, а именно, они являются уравнениями Ван-дер-Поля. Точные решения, как известно, уравнения Ван-дер-Поля получить нельзя. Однако можно построить приближенные решения, например, методом Крылова-Боголюбова-Митропольского. Следуя [4, 19], мы построили асимптотические решения уравнений (I.4.I4), (I.4.I6)–(I.4.I8), (I.4.25) во втором приближении. Решения ищем в виде

$$\varphi = a \cos \psi - \frac{\lambda \varepsilon a^3}{\omega_0} \frac{1}{32} \sin 3\psi \quad (\text{I.4.26})$$

$$\frac{d\psi}{d\omega_0} = \omega_0 - \frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{8} - \frac{a^2}{8} + \frac{7}{256} a^4 \right)$$

$$\frac{da}{d\omega_0} = \frac{\varepsilon \lambda}{2} a \left(1 - \frac{a^2}{4} \right)$$

где λ, ω_0 — некоторые постоянные (смотреть таблицу I.4.I)

Таблица 1.4.1.

Номер уравнения	λ	ω_b	ω_o^2
(1.4.14)	$\frac{\beta_o}{\beta}$	ω_1	$\frac{m^2}{\beta}$
(1.4.16)	$\frac{1}{\lambda_1}$, где $\lambda_1 = 1 - \frac{b_1^2}{\omega_2^2}$	ω_3	$\frac{m^2}{\lambda_1}$
(1.4.17)	1	ω_3	m^2
(1.4.18)	$\frac{\beta_o}{-\beta^2}$	ω_1	$\frac{m^2}{-\beta}$
(1.4.25)	$\frac{1}{\lambda_4}$, где $\lambda_4 = 1 - \frac{b_4^2}{\omega_2^2}$	ω_3	$\frac{m^2}{\lambda_4}$

Таблица 1.4.2.

λ	ω	ω_o^2
$\frac{\beta_o}{\beta}$	$(\beta_v \beta^v = \beta \neq 0, v=0,3) \beta_v x^v$	$\frac{m^2}{\beta}$
$\frac{1}{\lambda_1}$ где $\lambda_1 = 1 - b_1^2 \cdot \left[\frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2} + y_a y_a \right]^{-1}$	$x_o - b_1 \cdot \arctg \frac{l_a y_a}{\delta_a y_a}$ где l_a, δ_a удовлетворяют (1.4.6.а)	$\frac{m^2}{\lambda_1}$
1	$x_o + b_2 \cdot \ln \bar{b}_a z_a \quad (\bar{b}_a \bar{b}_a = 0, a=1,3)$	m^2
$\frac{\beta_o}{-\beta^2}$	$\beta_v x^v \quad (\beta_v \beta^v = -\beta^2 \neq 0, v=0,3)$	$\frac{m^2}{-\beta^2}$
$\frac{1}{\lambda_4}$ где $\lambda_4 = 1 - b_4^2 \cdot (x_a x_a)^{-1}$	$x_o - b_4 \cdot \arctg \frac{l_a x_a}{\delta_a x_a}$ $(l_a l_a = \delta_a \delta_a = l \neq 0, l_a \delta_a = 0, a=1,3)$	$\frac{m^2}{\lambda_4}$

Воспользовавшись анзацем (I.4.4), можно написать решения уравнения (I.4.1) во втором приближении

$$u = a \cdot \cos \Psi - \frac{\lambda \varepsilon a^3}{\omega_0} \cdot \frac{1}{32} \cdot \sin 3\Psi \quad (\text{I.4.27})$$

где $a = a_0 \cdot e^{\frac{1}{2} \varepsilon \lambda \omega} \cdot \left\{ 1 + a_0^2 \cdot (e^{\varepsilon \lambda \omega} - 1) / 4 \right\}^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_0 + \omega_0 \cdot \omega - \frac{\varepsilon^2 \lambda^2}{\omega_0^2} \cdot \left[\frac{1}{8} \omega - \frac{1}{16 \varepsilon \lambda} \cdot \ln \left\{ 1 + a_0^2 \cdot (e^{\varepsilon \lambda \omega} - 1) / 4 \right\} \right. \\ \left. - \frac{7}{64} \frac{a_0^2 - 4}{\varepsilon \lambda} \cdot \left\{ 1 + a_0^2 \cdot (e^{\varepsilon \lambda \omega} - 1) / 4 \right\}^{-1} \right] \end{aligned}$$

a_0, Ψ_0 — произвольные постоянные

$\omega_0, \omega, \lambda$ приведены в таблице I.4.2.

§ 5. О частных точных решениях волнового уравнения с кубической нелинейностью

Рассмотрим уравнение

$$S: \square u + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_0} + \lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right)^3 = 0, \quad (\text{I.5.1})$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $x_0 = t$, $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \Delta$

Теорема I.5.1. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения (I.5.1) является 8-мерная алгебра, базисные элементы которой имеют вид

$$P_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = (-i) \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \quad (I.5.2)$$

$$D = x_\nu P^\nu - \frac{i}{2} (\lambda_1 = 0)$$

Преобразования, относительно которых уравнение (I.5.1) инвариантно, задаются формулой (I.2.3) ($n=4$). При этом $\xi^\mu(x, u)$ и $\eta(x, u)$ имеют вид

$$\xi^\mu = C_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu \quad (I.5.3a)$$

$$\eta = \frac{C_{00}}{2} u + b_\gamma (x_1, x_2, x_3) \quad (I.5.3b)$$

где $C_{\mu\nu}, d_\mu, \mu, \nu = \overline{0, 3}$ — произвольные постоянные, причем $C_{00} = C_{11} = C_{22} = C_{33} \neq 0$ (когда $\lambda_1 = 0$) и $C_{00} = C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0$ (когда $\lambda_1 \neq 0$), $C_{ab} = C_{ba}$, $C_{ab} = -C_{ba}$, $a, b = \overline{1, 3}$, $a \neq b$ (I.5.3в)

Доказательство. Доказательство проведем методом Ли [26]

Инфинитезимальный оператор будем искать в виде

$$X = \xi^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (I.5.4)$$

Из условия инвариантности уравнения (I.5.1) относительно оператора (I.5.4)

$$\overline{X}^2(s) \Big|_{s=0} = 0 \quad (I.5.5)$$

где $\overline{X}^2 = \overline{X} \Big|_{s=0} + g^\mu \frac{\partial}{\partial u_\mu} + b^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_{\mu\nu}}$ — второе продолжение оператора X , а

$$g^\mu = D_\mu(\eta) - u_t D_\mu(\xi^t), \quad D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + u_\mu \frac{\partial}{\partial u}$$

$$b^{\mu\nu} = \dot{D}_\mu(\eta) - u_{t\nu} D_\mu(\xi^t), \quad \dot{D}_\mu = D_\mu + u_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_\nu}$$

после довольно громоздких преобразований находим следующую систему определяющих уравнений для координат оператора (I.5.4) ξ^μ

и η :

$$\xi_0^a = \xi_a^0 = 0, \quad \xi_b^a + \xi_a^b = 0, \quad \xi_0^0 = \xi_a^a = \begin{cases} 0, & \text{когда } \lambda_1 \neq 0 \\ \neq 0, & \text{когда } \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\eta_{ab} = \eta_{ba} = 0, \quad a, b = 1, 3, \quad a \neq b$$

$$\square \eta + 2u_0 \eta_{00} - (\lambda_1 u_0 + \lambda_2 u_0^3)(\eta_{11} - 2\xi_0^0) + \lambda_1 \{ \eta_0 + u_0(\eta_{11} - \xi_0^0) \} + (I.5.6) \\ + 3\lambda_2 u_0^2 \{ \eta_0 + u_0(\eta_{11} - \xi_0^0) \} = 0,$$

$$\text{где } \eta_{ab} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial u^a \partial u^b}, \quad \eta_{ab} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial x_a}, \quad \xi_b^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x_b}$$

Из (I.5.6) и (I.5.7) получаем, что $\xi^M(x, u)$ и $\eta(x, u)$ имеют вид (I.5.3a) и (I.5.3б). Используя выражения для $\xi^M(x, u)$ и $\eta(x, u)$, находим алгебру инвариантности уравнения (I.5.1) с базисными операторами (I.5.2). Необходимость доказана. Достаточность доказывается непосредственной проверкой, используя алгоритм условия (I.5.5).

В этом параграфе так же как и в предыдущих решается задача о построении решений уравнения (I.5.1). При этом решения уравнения (I.5.1), учитывая явный вид η (I.5.3б), ищем в виде

$$u(x) = g(x) \cdot \varphi(\omega) + f(x) \quad (I.5.8)$$

где φ — неизвестная функция, зависящая от трех инвариантных переменных $\omega = \omega(x) = \{ \omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x) \}$. При этом новые переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ находятся из уравнений Лагранжа

$$\dot{x}_\mu = c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu, \quad \mu = \overline{0, 3} \\ \dot{u} = \frac{c_{00}}{2} u + b(x_1, x_2, x_3) \quad (I.5.9)$$

где $C_{\mu\nu}$ и A_μ удовлетворяют условию (I.5.3в). В зависимости от того, какие соотношения между коэффициентами $C_{\mu\nu}$ и A_μ имеем различные наборы новых переменных ω_1, ω_2 и ω_3 , и функций $f(x)$ и $g(x)$, а именно:

$$1. \omega_1 = \frac{\alpha_a y_a}{y_0}, \quad \omega_2 = \frac{y_a y_a}{y_0^2}, \quad \omega_3 = y_0 \cdot \exp(b_1 \arctg \frac{\gamma_a y_a}{\beta_a y_a})$$

(I.5.10)

$$g(x) = y_0^{\frac{1}{2}}, \quad f(x) = 0, \quad \text{причем } \alpha_a \alpha_a = \alpha^2 \neq 0, \quad \beta_a \beta_a = \gamma_a \gamma_a \neq 0,$$

$$\alpha_a \beta_a = \alpha_a \gamma_a = \beta_a \gamma_a = 0, \quad (\beta_a \gamma_a)^2 + (\gamma_a \gamma_a)^2 = \frac{b_1^2}{\alpha^2} (\alpha^2 \omega_2 - \omega_1^2) \quad (I.5.10a)$$

$a = \overline{1,3}$

$$2. \omega_1 = \frac{\alpha_a y_a}{y_0}, \quad \omega_2 = \frac{y_a y_a}{y_0^2},$$

$$\omega_3 = \frac{\beta_a y_a}{\alpha_a y_a} - b_2 \ln \alpha_a y_a, \quad g(x) = y_0^{\frac{1}{2}}, \quad f(x) = 0$$

(I.5.11)

$$\text{где } \beta_a \beta_a = \beta \neq 0, \quad \alpha_a \alpha_a = \alpha_a \beta_a = 0, \quad a = \overline{1,3}$$

(I.5.11a)

$$3. \omega_1 = \frac{\alpha_a y_a}{y_0}, \quad \omega_2 = \frac{y_a y_a}{y_0^2}, \quad \omega_3 = \frac{\beta_a y_a}{y_0^{b_3}},$$

$$f(x) = 0, \quad g(x) = y_0^{\frac{1}{2}}$$

(I.5.12)

$$\text{где } \alpha_a \alpha_a = -\alpha^2 \neq 0, \quad \alpha_a \beta_a = \beta_a \beta_a = 0, \quad a = \overline{1,3}$$

(I.5.12a)

$$4. \omega_1 = \frac{\alpha_a y_a}{y_0}, \quad \omega_2 = \frac{\bar{\sigma}_a z_a}{y_0}, \quad \omega_3 = \sigma_a x_a - b_4 \cdot \ln y_0,$$

$$f(x) = 1, \quad g(x) = y_0^{\frac{1}{2}}$$

(I.5.13)

$$\text{где } \alpha_a \alpha_a = -\alpha^2 \neq 0, \quad \alpha_a \bar{\sigma}_a = \alpha_a \bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_a \bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_a \sigma_a = 0,$$

$$\bar{\sigma}_a \bar{\sigma}_a = \tilde{\alpha} \neq 0, \quad a = \overline{1,3}$$

(I.5.13a)

$$5. \omega_1 = \beta_\nu x^\nu, \quad \omega_2 = \frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2} + y_a y_a, \\ \omega_3 = x_0 - b_5 \cdot \operatorname{arctg} \frac{l_a y_a}{\delta_a y_a}, \quad g(x) = 1, \quad f(x) = b \beta_0 x_0 \quad (I.5.I4)$$

$$\text{где } \alpha_a l_a = \alpha_a \delta_a = l_a \delta_a = \alpha_a y_a = l_\nu \beta^\nu = \beta_\nu \delta^\nu = 0,$$

$$l_a l_a = \delta_a \delta_a = l \neq 0, \quad \alpha_a \alpha_a = -\alpha_\nu \beta^\nu = \alpha^2 \neq 0, \quad (I.5.I4a)$$

$$(l_a y_a)^2 + (\delta_a y_a)^2 = l \omega_2, \quad a = \overline{1,3}; \quad \nu = \overline{0,3}, \quad \beta_\nu \beta^\nu = \beta \neq 0$$

$$6. \omega_1 = \beta_\nu x^\nu, \quad \omega_2 = \frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2} + y_a y_a, \\ \omega_3 = x_0 + b_6 \cdot \ln \sigma_a z_a, \quad g(x) = 1, \quad f(x) = \beta_0 b x_0 \quad (I.5.I5)$$

$$\text{где } \alpha_a \alpha_a = -\alpha_\nu \beta^\nu = \alpha^2 \neq 0, \quad \beta_\nu \beta^\nu = \beta \neq 0, \quad \alpha_a \sigma_a = \\ = \sigma_a \sigma_a = \beta_\nu \sigma^\nu = 0, \quad a = \overline{1,3}, \quad \nu = \overline{0,3} \quad (I.5.I5a)$$

$$7. \omega_1 = \beta_\nu x^\nu, \quad \omega_2 = \frac{(\alpha_a y_a)^2}{2} + b_4 \cdot l_a y_a, \\ \omega_3 = \frac{(\alpha_a y_a)^3}{3} - b_4 \cdot \alpha_a y_a l_a b_4^2 \cdot \delta_a y_a, \quad g(x) = 1, \quad f(x) = b \beta_0 x_0 \quad (I.5.I6)$$

$$\text{где } \beta_\nu \beta^\nu = \beta \neq 0, \quad l_a l_a = \delta_a \alpha_a = \delta_a \delta_a = l \neq 0, \\ \delta_a l_a = \alpha_a \alpha_a = \alpha_a l_a = 0, \quad a = \overline{1,3}, \quad \nu = \overline{0,3} \quad (I.5.I6a)$$

$$8. \omega_1 = \alpha_a x_a, \quad \omega_2 = x_a x_a, \quad \omega_3 = x_0 - b_8 \cdot \operatorname{arctg} \frac{l_a x_a}{\delta_a x_a}, \\ g(x) = 1, \quad f(x) = b \beta_0 x_0 \quad (I.5.I7)$$

$$\text{где } \alpha_a \alpha_a = \alpha^2 \neq 0, \quad l_a l_a = \delta_a \delta_a = l \neq 0, \quad \alpha_a l_a = \alpha_a \delta_a = \\ = l_a \delta_a = 0, \quad a = \overline{1,3} \quad (I.5.I7a)$$

$$9. \omega_a = \frac{y_a}{y_0}, \quad f(x) = 0, \quad g(x) = y_0^{\frac{1}{2}}, \quad a = \overline{1,3} \quad (\text{I.5.I8})$$

В формулах (I.5.I0)–(I.5.I6)

$$y_v = x_v + a_v, \quad z_v = x_v + \frac{1}{2}a_v, \quad (\text{I.5.I9})$$

$a_v, b_k, l_a, d_a, \tilde{b}_a, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v$ – постоянные, которые выражаются через параметры группы $C_{\mu\nu}$ и d_μ .

В том случае, когда в уравнении (I.5.I) $\lambda_1 \neq 0$ будем иметь только четыре набора инвариантных переменных (I.5.I4)–(I.5.I7). В случае, когда $\lambda_1 = 0$ имеем девять наборов инвариантов (I.5.I0)–(I.5.I8).

Подставляя анзац (I.5.8) в (I.5.I) и используя инварианты (I.5.I0)–(I.5.I8), получим, соответственно, следующие редуцированные уравнения

$$\begin{aligned} \text{I. } & (\omega_1^2 - \alpha^2) \varphi_{11} + 4\omega_2 (\omega_2 - 1) \varphi_{22} - \omega_3^2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2 b_1^2}{\alpha^2 \omega_2 - \omega_1^2}\right) \times \\ & \times \varphi_{33} - 4\omega_1 (1 - \omega_2) \varphi_{12} - 4\omega_2 \omega_3 \varphi_{23} + \omega_1 \varphi_1 + (4\omega_2 - 6) \varphi_2 \quad (\text{I.5.20}) \\ & + \omega_3 \cdot \left(1 - \frac{\alpha^2 b_1^2}{\alpha^2 \omega_2 - \omega_1^2}\right) \varphi_3 - \frac{1}{4} \varphi + \lambda_2 \cdot \left(-\omega_1 \varphi_1 - 2\omega_2 \varphi_2 + \omega_3 \varphi_3 + \frac{1}{2} \varphi\right)^3 = 0 \\ \\ \text{2. } & \omega_1^2 \varphi_{11} + 4\omega_2 (\omega_2 - 1) \varphi_{22} - \frac{\beta}{\omega_1^2} \varphi_{33} + 4\omega_1 (\omega_2 - 1) \varphi_{12} - 4b_2 \varphi_{23} + \\ & + \omega_1 \varphi_1 + (4\omega_2 - 6) \varphi_2 - \frac{1}{4} \varphi + \lambda_2 \cdot \left(-\omega_1 \varphi_1 - 2\omega_2 \varphi_2 + \frac{1}{2} \varphi\right)^3 = 0 \quad (\text{I.5.21}) \\ \\ \text{3. } & (\omega_1^2 + \alpha^2) \varphi_{11} + 4\omega_2 (\omega_2 - 1) \varphi_{22} + b_3^2 \omega_3^2 \varphi_{33} + 4\omega_1 (\omega_2 - 1) \varphi_{12} + \\ & + 2b_3 \omega_1 \omega_3 \varphi_{13} + 4\omega_3 (b_3 \omega_2 - 1) \varphi_{23} + \omega_1 \varphi_1 + (4\omega_2 - 6) \varphi_2 + \\ & + b_3^2 \omega_3 \varphi_3 - \frac{1}{4} \varphi + \lambda_2 \cdot \left(-\omega_1 \varphi_1 - 2\omega_2 \varphi_2 - b_3 \omega_3 \varphi_3 + \frac{1}{2} \varphi\right)^3 = 0 \quad (\text{I.5.22}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & (\omega_1^2 + \omega_2^2) \varphi_{11} + \omega_2^2 \varphi_{22} + b_4^2 \varphi_{33} + 2\omega_1 \omega_2 \varphi_{12} + 2b_4 \omega_1 \varphi_{13} + \\
& + 2b_4 \omega_2 \varphi_{23} + \omega_1 \varphi_1 + \omega_2 \varphi_2 - \frac{1}{4} \varphi + \lambda_2 \cdot (-\omega_1 \varphi_1 - \omega_2 \varphi_2 - \\
& - b_4 \varphi_3 + \frac{1}{2} \varphi)^3 = 0
\end{aligned} \tag{I.5.23}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad & \beta \varphi_{11} - 4\omega_2 \varphi_{22} + (1 - \frac{b_5^2}{\omega_2}) \varphi_{33} + 2\beta_0 \varphi_{13} - 4\varphi_2 + \\
& + \lambda_1 (\beta_0 \varphi_1 + \varphi_3 + b\beta_0) + \lambda_2 (\beta_0 \varphi_1 + \varphi_3 + b\beta_0)^3 = 0
\end{aligned} \tag{I.5.24a}$$

$$\begin{aligned}
& \beta \varphi_{11} - 4\omega_2 \varphi_{22} + (1 - \frac{b_5^2}{\omega_2}) \varphi_{33} + 2\beta_0 \varphi_{13} - 4\varphi_2 + \\
& + \lambda_2 (\beta_0 \varphi_1 + \varphi_3 + b\beta_0)^3 = 0
\end{aligned} \tag{I.5.24b}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & \beta \varphi_{11} - 4\omega_2 \varphi_{22} + \varphi_{33} + 2\beta_0 \varphi_{13} - 4b_6 \varphi_{23} - 4\varphi_2 + \\
& + \lambda_1 (\beta_0 \varphi_1 + \varphi_3 + b\beta_0) + \lambda_2 (\beta_0 \varphi_1 + \varphi_3 + b\beta_0)^3 = 0
\end{aligned} \tag{I.5.25a}$$

$$\begin{aligned}
& \beta \varphi_{11} - 4\omega_2 \varphi_{22} + \varphi_{33} + 2\beta_0 \varphi_{13} - 4b_6 \varphi_{23} - 4\varphi_2 + \\
& + \lambda_2 (\beta_0 \varphi_1 + \varphi_3 + b\beta_0)^3 = 0
\end{aligned} \tag{I.5.25b}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & -\beta^2 \varphi_{11} + b_7^2 l^2 \varphi_{22} + b_7^2 l^2 (b_7^2 - 2\omega_2) \varphi_{33} + 2b_7^2 l^2 \varphi_{13} + \\
& + \lambda_1 (\beta_0 \varphi_1 + b\beta_0) + \lambda_2 (\beta_0 \varphi_1 + b\beta_0)^3 = 0
\end{aligned} \tag{I.5.26a}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta^2 \varphi_{11} + b_7^2 l^2 \varphi_{22} + b_7^2 l^2 (b_7^2 - 2\omega_2) \varphi_{33} + 2b_7^2 l^2 \varphi_{13} + \\
& + \lambda_2 (\beta_0 \varphi_1 + b\beta_0)^3 = 0
\end{aligned} \tag{I.5.26b}$$

$$8. -\alpha^2 \varphi_{11} - 4\omega_2 \varphi_{22} + \left(1 - \frac{b_2^2}{\omega_2^2}\right) \varphi_{33} - 2\omega_1 \varphi_{12} - 6\varphi_2 + \lambda_1 (\varphi_3 + b\beta_0) + \lambda_2 (\varphi_3 + b\beta_0)^3 = 0 \quad (\text{I.5.27a})$$

$$-\alpha^2 \varphi_{11} - 4\omega_2 \varphi_{22} + \left(1 - \frac{b_2^2}{\omega_2^2}\right) \varphi_{33} - 2\omega_1 \varphi_{12} - 6\varphi_2 + \lambda_2 (\varphi_3 + b\beta_0)^3 = 0 \quad (\text{I.5.27b})$$

$$9. (\omega_1^2 - 1)\varphi_{11} + (\omega_2^2 - 1)\varphi_{22} + (\omega_3^2 - 1)\varphi_{33} + 2\omega_1 \omega_2 \varphi_{12} + 2\omega_1 \omega_3 \varphi_{13} + 2\omega_2 \omega_3 \varphi_{23} + \omega_1 \varphi_1 + \omega_2 \varphi_2 + \omega_3 \varphi_3 - \frac{1}{4}\varphi + \lambda_2 (-\omega_1 \varphi_1 - \omega_2 \varphi_2 - \omega_3 \varphi_3 + \frac{1}{2}\varphi)^3 = 0 \quad (\text{I.5.28})$$

Рассмотрим уравнение (I.5.2I). Если предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_i)$, то приходим к ОДУ

$$\omega_1^2 \varphi_{11} + \omega_1 \varphi_1 - \frac{1}{4}\varphi + \lambda_2 (-\omega_1 \varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi)^3 = 0 \quad (\text{I.5.29})$$

которое с помощью замены

$$-\omega_1 \varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi = Z(\omega_1) \quad (\text{I.5.30})$$

перепишется в форме

$$\omega_1 \frac{dZ}{d\omega_1} + \frac{1}{2}Z - \lambda_2 Z^3 = 0 \quad (\text{I.5.31})$$

Общее решение (I.5.31) имеет вид

$$Z(\omega_1) = \pm \frac{1}{\sqrt{\omega_1 c_1 + 2\lambda_2}} \quad (\text{I.5.32})$$

Учитывая (I.5.32), уравнение (I.5.30) запишется следующим образом

$$-\omega_1 \varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{\omega_1 c_1 + 2\lambda_2}} \quad (\text{I.5.33})$$

Общее решение этого уравнения задается выражением

$$\varphi(\omega_1) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2 + C_2 \omega_1} + C_1 \sqrt{\omega_1} \quad (I.5.34)$$

По формуле (I.5.8a) находим решение исходного уравнения (I.5.1)

$$u(x) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2 y_0 + C_2 \alpha y_a} + C_1 \sqrt{\alpha y_a} \quad (I.5.35)$$

где α_a, C_1, C_2 — произвольные постоянные, причем α_a удовлетворяет условию (I.5.IIa).

В случае, когда в уравнении (I.5.2I) $\varphi = \varphi(\omega_3)$, из него получим

$$-\frac{\beta}{\omega_1^2} \varphi_{33} - \frac{1}{4} \varphi + \lambda_2 \frac{1}{8} \varphi^3 = 0 \quad (I.5.36)$$

где $\omega_1^2 = \lambda_3$

Рассмотрим уравнение (I.5.22). Если предположить, что

$\varphi = \varphi(\omega_3)$, то приходим к ОДУ

$$b_3^2 \omega_3^2 \varphi_{33} + b_3^2 \omega_3 \varphi_3 - \frac{1}{4} \varphi + \lambda_2 \left(-b_3 \omega_3 \varphi_3 + \frac{1}{2} \varphi \right)^3 = 0 \quad (I.5.37)$$

которое с помощью замены

$$-b_3 \omega_3 \varphi_3 + \frac{1}{2} \varphi = Z(\omega_3) \quad (I.5.38)$$

приводится к

$$-b_3 \omega_3 \frac{dZ}{d\omega_3} - \frac{1}{2} Z + \lambda_2 Z^3 = 0 \quad (I.5.39)$$

Общим решением (I.5.39) является функция

$$Z(\omega_3) = \pm \frac{1}{\sqrt{C_1 \omega_3^{1/2} + 2\lambda_2}} \quad (I.5.40)$$

После подстановки (I.5.40) в (I.5.38) получаем неоднородное ОДУ

$$-b_3 \omega_3 \varphi_3 + \frac{1}{2} \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{C_1 \omega_3^{1/2} + 2\lambda_2}} \quad (I.5.41)$$

Общим решением (I.5.4I) является функция

$$\varphi(\omega_3) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2 + c_2 \omega_3^{1/b_3}} + c_1 \omega_3^{1/2 b_3} \quad (\text{I.5.42})$$

По формуле (I.5.9a) находим семейство решений уравнения (I.5.I)

$$u(x) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2 y_0 + c_2 (\beta_a y_a)^{1/b_3}} + c_1 (\beta_a y_a)^{1/2 b_3} \quad (\text{I.5.43})$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а параметры β_a удовлетворяют условию (I.5.I2a).

Рассмотрим уравнение (I.5.23). Пусть $\varphi = \varphi(\omega_2)$. Тогда из (I.5.23) получаем уравнение

$$\omega_2^2 \varphi_{22} + \omega_2 \varphi_2 - \frac{1}{4} \varphi + \lambda_2 \left(-\omega_2 \varphi_2 + \frac{1}{2} \varphi \right)^3 = 0 \quad (\text{I.5.44})$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi(\omega_2) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2 + c_2 \omega_2} + c_1 \sqrt{\omega_2} \quad (\text{I.5.45})$$

По формуле (I.5.8a) находим семейство частных точных решений уравнения (I.5.I)

$$u(x) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2 y_0 + c_2 \beta_a z_a} + c_1 \sqrt{\beta_a z_a} \quad (\text{I.5.46})$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а параметр β_a удовлетворяет условию (I.5.I3a).

Если в уравнении (I.5.23) предположить, что $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то из него получаем

$$b_4^2 \varphi_{33} - \frac{1}{4} \varphi + \lambda_2 \left(-b_4 \varphi_3 + \frac{1}{2} \varphi \right)^3 = 0 \quad (\text{I.5.47})$$

которое при помощи замены

$$-b_4 \varphi_3 + \frac{1}{2} \varphi = Z(\omega_3) \quad (\text{I.5.48})$$

сводится к уравнению

$$-b_4 \frac{dz}{d\omega_3} - \frac{1}{\lambda} z + \lambda_2 z^3 = 0 \quad (I.5.49)$$

Общим решением которого есть функция

$$Z(\omega_3) = \pm \frac{1}{\sqrt{C_1 e^{(1/b_4)\omega_3} + 2\lambda_2}} \quad (I.5.50)$$

После подстановки (I.5.50) в (I.5.48), имеем

$$-b_4 \varphi_3 + \frac{1}{\lambda} \varphi = \pm \frac{1}{\sqrt{C_1 e^{(1/b_4)\omega_3} + 2\lambda_2}} \quad (I.5.51)$$

Общим решением этого уравнения есть функция

$$\varphi(\omega_3) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2 + C_2 \cdot e^{(1/b_4)\omega_3}} + C_1 \cdot e^{(1/2b_4)\omega_3} \quad (I.5.52)$$

По формуле (I.5.8a) находим семейство частных точных решений уравнения (I.5.1) вида

$$u(x) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2 y_0 + C_2 \cdot e^{\sigma_a x_0}} + C_1 \cdot e^{(\sigma_a x_0)/2b_4} (\lambda_1 = 0) \quad (I.5.53)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а параметр σ_a удовлетворяет условию (I.5.13a).

Рассмотрим уравнения (I.5.24a) и (I.5.24б). Пусть

Тогда приходим к нелинейным ОДУ

$$\beta \varphi_{11} + \lambda_1 (\beta_0 \varphi_1 + b \beta_0) + \lambda_2 (\beta_0 \varphi_1 + b \beta_0)^3 = 0 \quad (I.5.54a)$$

и

$$\beta \varphi_{11} + \lambda_2 (\beta_0 \varphi_1 + b \beta_0)^3 = 0 \quad (I.5.54б)$$

Общими решениями которых являются функции

$$\varphi(\omega_1) = \pm K_1 \operatorname{arctg} \sqrt{\exp(K_2 \omega_1 + C_1) - 1} - b \omega_1 + C_2 \quad (I.5.55a)$$

где $K_1 = \frac{\beta}{\beta_0^2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$, $K_2 = \frac{2\lambda_1 \beta_0}{\beta}$

$$\varphi(\omega_1) = \mp \frac{2}{K_3} \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}} \cdot \sqrt{K_3 \omega_1 + C_1} - b \omega_1 + C_2 \quad (I.5.55b)$$

где $K_3 = -\lambda_2 \beta_0^3$

По формуле (I.5.8a) находим семейство частных точных решений уравнения (I.5.1)

$$u(x) = \pm K_1 \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\exp(K_3 \beta_0 x^3 + C_1) - 1} + b \beta_0 x_0 + C_2, \quad (I.5.56a) \\ (\lambda_1 \neq 0)$$

$$u(x) = \mp \frac{2}{K_3} \cdot \sqrt{-\frac{b}{2}} \cdot \sqrt{K_3 \beta_0 x^3 + C_1} + b \beta_0 x_0 + C_2, \\ (\lambda_1 = 0) \quad (I.5.56b)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а параметры β_0 удовлетворяют условию (I.5.14a).

Если предположить, что в (I.5.24a) и (I.5.24b) $\varphi = \varphi(\omega_2)$ то имеем

$$-4\omega_2 \cdot \varphi_{22} - 4\varphi_2 + \lambda_1 b \beta_0 + \lambda_2 b^3 \beta_0^3 = 0 \quad (I.5.57a)$$

и

$$-4\omega_2 \cdot \varphi_{22} - 4\varphi_2 + \lambda_2 b^3 \beta_0^3 = 0 \quad (I.5.57b)$$

Общим решением этих уравнений есть функции

$$\varphi(\omega_2) = \frac{\lambda_1 b \beta_0 + \lambda_2 b^3 \beta_0^3}{4} \omega_2 + C_1 \ln \omega_2 + C_2 \quad (I.5.58a)$$

и

$$\varphi(\omega_2) = \frac{\lambda_2 b^3 \beta_0^3}{4} \omega_2 + C_1 \ln \omega_2 + C_2 \quad (I.5.58b)$$

По формуле (I.5.8a) находим решения уравнения (I.5.1)

$$u(x) = \frac{K_4}{4} \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2} + y_a y_a \right\} + C_1 \cdot \ln \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2} + y_a y_a \right\} + b \beta_0 x_0 + C_2 \quad (I.5.59a) \\ (\lambda_1 \neq 0)$$

и

$$u(x) = \frac{K_5}{4} \cdot \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2} + y_a y_a \right\} + C_1 \ln \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^2}{-\alpha^2} + y_a y_a \right\} + b \beta_0 x_0 + C_2, \quad (I.5.59c)$$

$$(\lambda_1 = 0)$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные, параметры α_a удовлетворяют условию (I.5.14a), и $K_4 = \lambda_1 b \beta_0 + \lambda_2 b^3 \beta_0^3$, $K_5 = \lambda_2 b^3 \beta_0^3$

Пусть в (I.5.24a) и (I.5.24б) $\varphi = \varphi(\omega_3)$. Тогда из них получим уравнения

$$\left(1 - \frac{b_5^2}{\omega_2^2}\right) \varphi_{33} + \lambda_1 (\varphi_3 + b \beta_0) + \lambda_2 (\varphi_3 + b \beta_0)^3 = 0 \quad (I.5.60a)$$

и

$$\left(1 - \frac{b_5^2}{\omega_2^2}\right) \varphi_{33} + \lambda_2 (\varphi_3 + b \beta_0)^3 = 0 \quad (I.5.60б)$$

где $1 - \frac{b_5^2}{\omega_2^2} = \lambda_4$

Общими решениями этих уравнений есть, соответственно, функции

$$\varphi(\omega_3) = \pm \frac{\lambda_4}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \cdot \left\{ e^{2 \frac{\lambda_1}{\lambda_4} (\omega_3 + c_1)} - \lambda_2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (I.5.61a)$$

$$\varphi(\omega_3) = \pm \frac{\lambda_4}{\lambda_2} \sqrt{2 \frac{\lambda_2}{\lambda_4} \omega_3 + C_1} - b \beta_0 \omega_3 + C_2 \quad (I.5.61б)$$

Согласно (I.5.8a) решения уравнения (I.5.1) имеют вид

$$u(x) = \pm K_6 \cdot \operatorname{arctg} \left\{ K_7 \cdot \left(e^{K_8 (x_0 - b_5 \cdot \operatorname{arctg} \frac{b_a y_a}{\alpha_a y_a} + c_1)} - \frac{1}{K_7^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (I.5.62a)$$

$$- b \beta_0 \left\{ x_0 - b_5 \cdot \operatorname{arctg} \frac{b_a y_a}{\alpha_a y_a} \right\} + b \beta_0 x_0 + C_2, \quad (\lambda_1 \neq 0)$$

$$u(x) = \pm K_3 \cdot \frac{2}{K_3} (x_0 - b_5 \cdot \operatorname{arctg} \frac{l_a y_a}{\delta_a y_a}) + C_1 + \\ + b \beta_0 b_5 \cdot \operatorname{arctg} \frac{l_a y_a}{\delta_a y_a} + C_2, \quad (\lambda_1 = 0) \quad (\text{I.5.62б})$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, параметры l_a, δ_a удовлетворяют условию (I.5.14а), $K_6 = \frac{\lambda_4}{\lambda_1 \sqrt{\lambda_2}}$, $K_7 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$,

$$K_8 = 2 \frac{\lambda_1}{\lambda_4}, \quad K_9 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}, \quad 1 - \frac{b_5^2}{\frac{(x_0 y_a)^2}{\alpha^2} + y_a y_a} = \lambda_4$$

Рассмотрим уравнение (I.5.25а) и (I.5.25б). Если предположить, что $\Psi = \Psi(\omega_3)$, то получим уравнения

$$\Psi_{33} + \lambda_1 (\Psi_3 + b \beta_0) + \lambda_2 (\Psi_3 + b \beta_0)^3 = 0 \quad (\text{I.5.63а})$$

и

$$\Psi_{33} + \lambda_2 (\Psi_3 + b \beta_0)^3 = 0 \quad (\text{I.5.63б})$$

Общими решениями которых есть функции

$$\Psi(\omega_3) = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1} \sqrt{\lambda_2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \left\{ e^{2\lambda_1 (\omega_3 + C_1)} - \lambda_2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \\ - b \beta_0 \omega_3 + C_2 \quad (\text{I.5.64а})$$

и

$$\Psi(\omega_3) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2 \omega_3 + C_1} - b \beta_0 \omega_3 + C_2 \quad (\text{I.5.64б})$$

Тогда по формуле (I.5.8а) находим решения уравнения (I.5.1)

$$u(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \left\{ e^{2\lambda_1 (x_0 + b_6 \ln b_a z_a + C_1)} - \lambda_2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \\ - b \beta_0 b_6 \ln b_a z_a + C_2, \quad (\lambda_1 \neq 0) \quad (\text{I.5.65а})$$

$$u(x) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2 (x_0 + b_6 \ln b_a z_a) + C_1} - \\ - b \beta_0 b_6 \ln b_a z_a + C_2, \quad (\lambda_1 = 0) \quad (\text{I.5.65б})$$

Результат (I.5.65a) и (I.5.65б) может быть обобщен, а именно

$$u(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \cdot \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \left(e^{2\lambda_1(x_0 + g(\beta_a z_a)) + C_1} - \lambda_2 \right)^{\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - b\beta_0 g(\beta_a z_a) + C_2, \right. \quad (\lambda_1 \neq 0) \quad (\text{I.5.66a})$$

$$u(x) = \pm \frac{1}{\lambda_2} \sqrt{2\lambda_2(x_0 + g(\beta_a z_a)) + C_1} - b\beta_0 g(\beta_a z_a) + C_2, \\ (\lambda_1 = 0) \quad (\text{I.5.66б})$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, $g(\beta_a z_a)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция, параметры β_a должны удовлетворять условию (I.5.15a).

Рассмотрим уравнение (I.5.26a, б). Предположим, что $\varphi = \varphi(\omega_i)$. Тогда получим уравнения

$$-\beta^2 \varphi_{11} + \lambda_1 (\beta_0 \varphi_1 + b\beta_0) + \lambda_2 (\beta_0 \varphi_1 + b\beta_0)^3 = 0 \quad (\text{I.5.67a})$$

$$-\beta^2 \varphi_{11} + \lambda_2 (\beta_0 \varphi_1 + b\beta_0)^3 = 0 \quad (\text{I.5.67б})$$

Общими решениями (I.5.67) есть, соответственно, функции

$$\varphi(\omega_i) = \pm K_{10} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\exp(K_{11} \omega_i + C_1) - 1} - b\omega_i + C_2 \quad (\text{I.5.68a})$$

$$\varphi(\omega_i) = \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{2}} \frac{2}{K_{12}} \sqrt{K_{12} \omega_i + C_1} + b\beta_0 \omega_i^2 + C_2 \quad (\text{I.5.68б})$$

где $K_{10} = \frac{-\beta^2}{\beta_0^2 \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}$, $K_{11} = \frac{2\lambda_1 \beta_0}{-\beta^2}$, $K_{12} = -\lambda_2 \beta_0^3$

Решения уравнения (I.5.1) имеют вид

$$u(x) = \pm K_{10} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\exp(K_{11} \beta_0 x^2 + C_1) - 1} + b\beta_a x_a + C_2 \quad (\text{I.5.69a}) \\ (\lambda_1 \neq 0).$$

$$u(x) = \mp \sqrt{\frac{\beta_0^2}{2}} \cdot \frac{2}{K_{12}} \sqrt{K_{12} \beta_0 x^2 + C_1} + b \beta_0 x_0 + C_2, \quad (\lambda_1 = 0) \quad (I.5.69b)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а параметры β_0 удовлетворяют условию (I.5.16a).

Если предположить теперь, что в уравнениях (I.5.26a, б)

$\varphi = \varphi(\omega_2)$, то из них получим, соответственно,

$$b_7^2 l^2 \varphi_{22} + \lambda_1 b \beta_0 + \lambda_2 b^3 \beta_0^3 = 0 \quad (I.5.70a)$$

и

$$b_7^2 l^2 \varphi_{22} + \lambda_2 b^3 \beta_0^3 = 0 \quad (I.5.70б)$$

Общими решениями этих уравнений есть функции

$$\varphi(\omega_2) = K_{13} \omega_2^2 + C_1 \omega_2 + C_2 \quad (I.5.71a)$$

и

$$\varphi(\omega_2) = K_{14} \omega_2^2 + C_1 \omega_2 + C_2 \quad (I.5.71б)$$

где $K_{13} = -\frac{\lambda_1 b \beta_0 + \lambda_2 b^3 \beta_0^3}{2 b_7^2 l^2}$, $K_{14} = -\frac{\lambda_2 b^3 \beta_0^3}{2 b_7^2 l^2}$

Пользуясь формулой (I.5.8a) получаем семейство частных точных решений уравнения (I.5.1)

$$u(x) = K_{13} \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^2}{2} + b_7 l_a y_a \right\}^2 + C_1 \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^2}{2} + b_7 l_a y_a \right\} + b \beta_0 x_0 + C_2, \quad (\lambda_1 \neq 0) \quad (I.5.72a)$$

$$u(x) = K_{14} \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^2}{2} + b_7 l_a y_a \right\}^2 + C_1 \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^2}{2} + b_7 l_a y_a \right\} + b \beta_0 x_0 + C_2, \quad (\lambda_1 = 0) \quad (I.5.72б)$$

Если (I.5.26a, б) $\varphi = \varphi(\omega_3)$, то приходим к уравнениям

$$b_4^2 l^2 (b_4^2 - 2\omega_2) \varphi_{33} + \lambda_1 b \rho_0 + \lambda_2 b^3 \rho_0^3 = 0 \quad (\text{I.5.73a})$$

$$b_4^2 l^2 (b_4^2 - 2\omega_2) \varphi_{33} + \lambda_2 b^3 \rho_0^3 = 0 \quad (\text{I.5.73б})$$

где $b_4^2 - 2\omega_2 = \lambda_5$

Решением этих уравнений являются, соответственно, функции

$$\varphi(\omega_2) = K_{15} \omega_3^2 + C_1 \omega_3 + C_2 \quad (\text{I.5.74a})$$

$$\varphi(\omega_2) = K_{16} \omega_3^2 + C_1 \omega_3 + C_2 \quad (\text{I.5.74б})$$

где $K_{15} = -\frac{\lambda_1 b \rho_0 + \lambda_2 b^3 \rho_0^3}{b_4^2 l^2 \lambda_5}$, $K_{16} = -\frac{\lambda_2 b^3 \rho_0^3}{b_4^2 l^2 \lambda_5}$

Частные точные решения уравнения (I.5.I) даются выражениями

$$u(x) = K_{15} \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^3}{3} - b_4 \alpha_a y_a l_a y_a - b_4^2 \delta_a y_a \right\}^2 + \quad (\text{I.5.75a})$$

$$+ C_1 \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^3}{3} - b_4 \alpha_a y_a l_a y_a - b_4^2 \delta_a y_a \right\} + b \rho_0 x_0 + C_2, \quad (\lambda_1 \neq 0)$$

$$u(x) = K_{16} \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^3}{3} - b_4 \alpha_a y_a l_a y_a - b_4^2 \delta_a y_a \right\}^2 + \quad (\text{I.5.75б})$$

$$+ C_1 \left\{ \frac{(\alpha_a y_a)^3}{3} - b_4 \alpha_a y_a l_a y_a - b_4^2 \delta_a y_a \right\} + b \rho_0 x_0 + C_2, \quad (\lambda_1 = 0)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, параметры α_a, l_a, δ_a удовлетворяют условию (I.5.I6a).

Рассмотрим уравнения (I.5.27a, б). Если $\varphi = \varphi(\omega_1)$, то получим

$$\alpha^2 \varphi_{11} - \lambda_1 b \rho_0 - \lambda_2 b^3 \rho_0^3 = 0 \quad (\text{I.5.76a})$$

$$\alpha^2 \varphi_{11} - \lambda_2 b^3 \rho_0^3 = 0 \quad (\text{I.5.76б})$$

Общими решениями которых, соответственно являются функции

$$\varphi(\omega_1) = K_{17} \omega_1^2 + C_1 \omega_1 + C_2 \quad (\text{I.5.77a})$$

$$\varphi(\omega_1) = K_{18} \omega_1^2 + C_1 \omega_1 + C_2 \quad (\text{I.5.77б})$$

где
$$K_{17} = \frac{\lambda_1 b \beta_0 + \lambda_2 b^3 \beta_0^3}{2 \alpha^2}, \quad K_{18} = \frac{\lambda_2 b^3 \beta_0^3}{2 \alpha^2}$$

По формуле (I.5.8) находим частные точные решения уравнения (I.5.1)

$$u(x) = K_{17} (\alpha_a y_a)^2 + C_1 \alpha_a y_a + b \beta_0 x_0 + C_2, \quad (\lambda_1 \neq 0) \quad (\text{I.5.78a})$$

$$u(x) = K_{18} (\alpha_a y_a)^2 + C_1 \alpha_a y_a + b \beta_0 x_0 + C_2, \quad (\lambda_1 = 0) \quad (\text{I.5.78б})$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, параметры α_a удовлетворяют условию (I.5.17a).

Если $\varphi = \varphi(\omega_2)$, то из (I.5.27a, б) получаем уравнения

$$-4\omega_2 \varphi_{22} - 6\varphi_2 + \lambda_1 b \beta_0 + \lambda_2 b^3 \beta_0^3 = 0 \quad (\text{I.5.79a})$$

$$-4\omega_2 \varphi_{22} - 6\varphi_2 + \lambda_2 b^3 \beta_0^3 = 0 \quad (\text{I.5.79б})$$

Общими решениями которых являются, соответственно, функции

$$\varphi(\omega_2) = -\frac{C_1}{3} \omega_2^{-\frac{1}{2}} + K_{19} \omega_2 + C_2 \quad (\text{I.5.80a})$$

$$\varphi(\omega_2) = -\frac{C_1}{3} \omega_2^{-\frac{1}{2}} + K_{20} \omega_2 + C_2 \quad (\text{I.5.80б})$$

где
$$K_{19} = \frac{\lambda_1 b \beta_0 + \lambda_2 b^3 \beta_0^3}{6}, \quad K_{20} = \frac{\lambda_2 b^3 \beta_0^3}{6}$$

По формуле (I.5.8a) находим решения уравнения (I.5.1)

$$u(x) = -\frac{C_1}{3} (x_a x_a)^{-\frac{1}{2}} + K_{19} x_a x_a + b \beta_0 x_0 + C_2, \quad (\lambda_1 \neq 0) \quad (\text{I.5.81a})$$

$$u(x) = -\frac{C_1}{3} (x_a x_a)^{-\frac{1}{2}} + K_{20} x_a x_a + b \beta_0 x_0 + C_2, \quad (\lambda_1 = 0) \quad (\text{I.5.81б})$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

ГЛАВА 2. СИММЕТРИЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

В этой главе, по заданному представлению алгебры Ли, описаны двумерные нелинейные уравнения, инвариантные относительно подалгебры $AC(1,1)$ и бесконечномерной алгебры. Установлено, что симметрия линейного волнового уравнения может быть существенно расширена, если к нему добавить нелинейное уравнение Гамильтона. Показано, что при решении методом теории возмущений нелинейного конформно-инвариантного уравнения не нарушается его симметрия, т.е. аппроксимирующая система уравнений также обладает конформной симметрией.

§ I. Симметричный анализ двумерного квазилинейного волнового уравнения

Рассмотрим квазилинейное волновое уравнение

$$S: \square u + F(x, u) = 0, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \quad (2.1.1)$$

$$u = u(x), \quad x = (x_0, x_1), \quad x_0 = t$$

Хорошо известно [14], что если вектор $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, $u = u(x)$, то многомерное волновое уравнение (2.1.1) инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1, n-1)$ только в том случае, когда функция $F(x, u) = \lambda \cdot u^{\frac{n+2}{n-2}}$ ($n \neq 2$, λ — произвольная константа). Как мы видим, случай $n=2$ является особым, поэтому важно его исследовать.

В настоящем параграфе опишем все функции $F(x, u)$, при которых двумерное уравнение (2.1.1) инвариантно относительно под-

алгебры конформной алгебры $AC(1,1)$. Для решения этой задачи используем следующий вид базисных элементов алгебры $AC(1,1)$ [35]

$$\begin{aligned} J_0 &= x_0 P_1 - x_1 P_0, \quad P_0 = i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_1 = (-i) \frac{\partial}{\partial x_1}, \\ K_\mu &= 2x_\mu (x_\nu p^\nu + iK) - x_\nu x^\nu p_\mu, \quad \mu, \nu = 0, 1 \\ P_0 &= p_0, \quad P_1 = p_1 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Символом $\Pi(1,1)$ обозначим подалгебру алгебры $C(1,1) \supset \Pi(1,1)$ с базисными элементами $\{J_0, K_0, K_1\}$

Теорема 2.1.1. Для того, чтобы уравнение (2.1.1) было инвариантно относительно алгебры $\Pi(1,1)$, с базисными элементами (2.1.2), необходимо и достаточно, чтобы F имела вид

$$F(x, u) = (x_\nu x^\nu)^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{\lambda_1}{2} (x_\nu x^\nu)^{-1} - \frac{\lambda_2}{2} \ln(x_\nu x^\nu) + u\right) \quad (2.1.3)$$

где $\lambda_1, \lambda_2 = \text{const}$, f — произвольная гладкая функция.

Доказательство. Докажем только необходимость. Достаточность устанавливается непосредственной проверкой, применяя алгоритм Ли. Для отыскания функций $F(x, u)$, при которых уравнение (2.1.1) инвариантно относительно алгебры $\Pi(1,1)$, воспользуемся лиевским условием инвариантности.

Пусть $\hat{X}$ — второе продолжение инфинитезимального оператора X

$$\hat{X} = \xi^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.1.4)$$

$$\hat{\hat{X}} = \hat{X} + \xi^\mu \frac{\partial}{\partial u_\mu} + \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u^{\mu\nu}} \quad (2.1.5)$$

$$\text{где } \xi^\mu = D_\mu(\eta) - u_t D_\mu(\xi^t), \quad D_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + u_\mu \frac{\partial}{\partial u} \\ \sigma_{\mu\nu} = \hat{D}_\mu(\eta) - u_{t\nu} D_\mu(\xi^t), \quad \hat{D}_\mu = D_\mu + u_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_\nu} \quad (2.1.6)$$

$$\mu, \nu = 0, 1$$

$$\tilde{\sigma}_{\mu\nu} = \tilde{\partial}_\mu(\eta) - u_{\mu\nu} \tilde{\partial}_\mu(\xi^t), \quad \tilde{\partial}_\mu = \partial_\mu + u_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_\nu} \quad (2.1.7)$$

Тогда из условия инвариантности уравнения (2.1.1)

$$\left. \sum_{\mu}^2 (s) \right|_{s=0} = 0 \quad (2.1.8)$$

имеем, что

$$\xi^\mu = -b_\mu x_\nu x^\nu + 2x_\mu b_\nu x^\nu + c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu \quad (2.1.9)$$

$$\eta = 2k b_\nu x^\nu + b(x), \quad \text{где } b(x) = b_0 a^0(x) - b_1 a^1(x)$$

где $b_\mu, c_{\mu\nu}, d_\mu - \text{const}$, $b(x)$ — произвольная функция из класса $C^2(R^2)$ ($c_{00} = c_{11} = 0, d_\mu = 0$), а функция $F(x, u)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\left. \sum F + \tilde{\sigma}_{00} - \tilde{\sigma}_{11} \right|_{s=0} = 0 \quad (2.1.10)$$

Уравнение (2.1.10) можно переписать в виде

$$\tilde{\sigma}_{00} - \tilde{\sigma}_{11} + \xi^\mu \frac{\partial F}{\partial x_\mu} + \eta \frac{\partial F}{\partial u} = 0 \quad (2.1.11)$$

Воспользовавшись (2.1.9) и (2.1.7), уравнение (2.1.11) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & b_0 \square a^0(x) - b_1 \square a^1(x) + 4k(b_0 u_0 + b_1 u_1) - 2(k-2)(b_0 x_0 - b_1 x_1) F + \\ & + \{2k(b_0 x_0 - b_1 x_1)u + b_0 a^0(x) - b_1 a^1(x)\} \frac{\partial F}{\partial u} + \\ & + \{-b_0(x_0^2 - x_1^2) + 2x_0(b_0 x_0 - b_1 x_1) + c_{01} x_1\} \frac{\partial F}{\partial x_0} + \\ & + \{-b_1(x_0^2 - x_1^2) + 2x_1(b_0 x_0 - b_1 x_1) + c_{01} x_0\} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Уравнение (2.1.12) расщепляем по параметрам b_0, b_1, c_{01} и получаем систему дифференциальных уравнений в частных производ-

НЬХ

$$\square a^0(x) + 4\kappa u_0 - 2(\kappa - 2) \cdot x_0 \cdot F + \{2\kappa x_0 u + a^0(x)\} \frac{\partial F}{\partial u} - \quad (2.1.13a)$$

$$- (x_0^2 - x_1^2) \frac{\partial F}{\partial x_0} + 2x_0^2 \cdot \frac{\partial F}{\partial x_0} + 2x_1 x_0 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$

$$- \square a^1(x) + 4\kappa u_1 + 2(\kappa - 2) x_1 \cdot F + \{-2\kappa x_1 u - a^1(x)\} \frac{\partial F}{\partial u} \quad (2.1.13б)$$

$$- 2x_0 x_1 \frac{\partial F}{\partial x_0} - (x_0^2 - x_1^2) \frac{\partial F}{\partial x_1} - 2x_1^2 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad (2.1.13в)$$

Уравнения (2.1.13a) и (2.1.13б) можно расщепить по переменной u_0 . Тогда получим, что $\kappa = 0$. Учитывая это обстоятельство, уравнения (2.1.13a) и (2.1.13б) перепишем в виде

$$\square a^0(x) + 4x_0 \cdot F + a^0(x) \frac{\partial F}{\partial u} - (x_0^2 - x_1^2) \frac{\partial F}{\partial x_0} + \quad (2.1.14a)$$

$$+ 2x_0^2 \frac{\partial F}{\partial x_0} + 2x_1 x_0 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0$$

$$- \square a^1(x) - 4x_1 \cdot F - a^1(x) \frac{\partial F}{\partial u} - (x_0^2 - x_1^2) \frac{\partial F}{\partial x_1} - \quad (2.1.14б)$$

$$- 2x_1^2 \frac{\partial F}{\partial x_1} - 2x_1 x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0$$

$$x_1 \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \quad (2.1.14в)$$

Система (2.1.14a)–(2.1.14в) эквивалентна системе

$$(x_0 + x_1)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + (a^0(x) + a^1(x)) \frac{\partial F}{\partial u} + 4(x_0 + x_1) F + \quad (2.1.15a)$$

$$+ \square a^0(x) + \square a^1(x) = 0$$

$$(x_0 - x_1)^2 \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} - \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + (a^0(x) - a^1(x)) \frac{\partial F}{\partial u} + 4(x_0 - x_1) F^+ \quad (2.1.15a)$$

$$+ \square a^0(x) - \square a^1(x) = 0$$

$$x_0 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0 \quad (2.1.15b)$$

где $a^0(x)$, $a^1(x)$ — произвольные функции независимых переменных x_0 и x_1

Общим решением уравнения (2.1.15b) является функция

$$F = f(x_0^2 - x_1^2, u) = f(\omega, u) \quad (2.1.16)$$

где $\omega = x_0^2 - x_1^2 = x_\nu x^\nu$

Учитывая (2.1.16), уравнения (2.1.15a) и (2.1.15b) принимает форму

$$2\omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + \frac{a^0(x) + a^1(x)}{x_0 + x_1} \frac{\partial f}{\partial u} + 4f + \frac{\square a^0(x) + \square a^1(x)}{x_0 + x_1} = 0 \quad (2.1.17a)$$

$$2\omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + \frac{a^0(x) - a^1(x)}{x_0 - x_1} \frac{\partial f}{\partial u} + 4f + \frac{\square a^0(x) - \square a^1(x)}{x_0 - x_1} = 0 \quad (2.1.17b)$$

Система (2.1.17a), (2.1.17b) имеет решение, если

$$\frac{a^0(x) + a^1(x)}{x_0 + x_1} = \varphi^0(\omega) \quad (2.1.18a)$$

$$\frac{a^0(x) - a^1(x)}{x_0 - x_1} = \varphi^1(\omega) \quad (2.1.18b)$$

$$\frac{\square a^0(x) + \square a^1(x)}{x_0 + x_1} = \psi^0(\omega) \quad (2.1.18b)$$

$$\frac{\square a^0(x) - \square a^1(x)}{x_0 - x_1} = \psi^1(\omega) \quad (2.1.18g)$$

С учетом (2.1.18a)–(2.1.18g), уравнения (2.1.17a) и (2.1.17b) переписутся в виде

$$2\omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + \varphi^0(\omega) \frac{\partial f}{\partial u} + 4f + \Psi^0(\omega) = 0 \quad (2.1.19a)$$

$$2\omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + \varphi'(\omega) \frac{\partial f}{\partial u} + 4f + \Psi'(\omega) = 0 \quad (2.1.19б)$$

(2.1.19a), (2.1.19б) эквивалентна системе

$$2\omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + \varphi^0(\omega) \frac{\partial f}{\partial u} + 4f + \Psi^0(\omega) = 0 \quad (2.1.20a)$$

$$\{\varphi^0(\omega) - \varphi'(\omega)\} \frac{\partial f}{\partial u} + \Psi^0(\omega) - \Psi'(\omega) = 0 \quad (2.1.20б)$$

Пусть $\frac{\partial f}{\partial u} = \tilde{f}(u, \omega)$, где $\tilde{f}$ — произвольная функция.

Тогда уравнения (2.1.20a) и (2.1.20б) можно расщепить, а именно, система (2.1.20a), (2.1.20б) эквивалентна системе

$$2\omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + \varphi^0(\omega) \frac{\partial f}{\partial u} + 4f = 0 \quad (2.1.21a)$$

$$\Psi^0(\omega) = 0 \quad (2.1.21б)$$

$$\varphi^0(\omega) - \varphi'(\omega) = 0 \quad (2.1.21в)$$

$$\Psi^0(\omega) - \Psi'(\omega) = 0 \quad (2.1.21г)$$

которую можно переписать в виде

$$2\omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + \varphi^0(\omega) \frac{\partial f}{\partial u} + 4f = 0 \quad (2.1.22a)$$

$$\Psi^0(\omega) = \Psi'(\omega) = 0 \quad (2.1.22б)$$

$$\varphi^0(\omega) = \varphi'(\omega) \quad (2.1.22в)$$

$$\text{Обозначим } \varphi^0(\omega) = \varphi'(\omega) = \varphi(\omega) \quad (2.1.23).$$

Учитывая (2.1.23), (2.1.18a)–(2.1.18г), систему (2.1.22a)–

(2.1.22в) можно записать в виде

$$2\omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + \varphi(\omega) \frac{\partial f}{\partial u} + 4f = 0 \quad (2.1.24a)$$

$$\frac{a^0(x) + a^1(x)}{x_0 + x_1} = \varphi(\omega) \quad (2.1.24б)$$

$$\frac{a^0(x) - a^1(x)}{x_0 - x_1} = \varphi(\omega) \quad (2.1.24в)$$

$$\frac{\square a^0(x) + \square a^1(x)}{x_0 + x_1} = \frac{\square a^0(x) - \square a^1(x)}{x_0 - x_1} = 0 \quad (2.1.24г)$$

Из уравнений (2.1.24б), (2.1.24в) имеем

$$a^0(x) = x_0 \cdot \varphi(\omega) \quad (2.1.25a)$$

$$a^1(x) = x_1 \cdot \varphi(\omega) \quad (2.1.25б)$$

Из (2.1.24г) следует, что $\square a^0(x) = \square a^1(x) = 0$ (2.1.26)

Но с другой стороны, из формул (2.1.25a) и (2.1.25б) следует, что

$$\square a^0(x) = 4x_0 [2\varphi_\omega + \omega \cdot \varphi_{\omega\omega}] \quad (2.1.27a)$$

$$\square a^1(x) = 4x_1 [2\varphi_\omega + \omega \cdot \varphi_{\omega\omega}] \quad (2.1.27б)$$

Учитывая (2.1.26) и (2.1.27a), (2.1.27б), получаем

$$2\varphi_\omega + \omega \cdot \varphi_{\omega\omega} = 0 \quad (2.1.28)$$

где $\varphi_\omega = \frac{d\varphi}{d\omega}$, $\varphi_{\omega\omega} = \frac{d^2\varphi}{d\omega^2}$

Общим решением уравнения (2.1.28) является функция

$$\varphi(\omega) = \lambda_1 \omega^{-1} + \lambda_2 \quad (2.1.29)$$

где $\lambda_1, \lambda_2 - \text{const}$

После подстановки (2.1.29) в (2.1.24a), получаем уравнение

$$2\omega \frac{\partial f}{\partial \omega} + (\lambda_1 \omega^{-1} + \lambda_2) \frac{\partial f}{\partial u} + 4f = 0 \quad (2.1.30)$$

общим решением которого есть функция

$$f = \omega^{-2} \cdot \tilde{F} \left(\frac{\lambda_1}{2} \omega^{-1} - \frac{\lambda_2}{2} \ln \omega + u \right) \quad (2.1.31)$$

или

$$f = (x_\nu x^\nu)^{-2} \cdot \tilde{F} \left(\frac{\lambda_1}{2} (x_\nu x^\nu)^{-1} - \frac{\lambda_2}{2} \ln(x_\nu x^\nu) + u \right), \quad (2.1.32)$$

где $\tilde{F}$ — произвольная гладкая функция. Переобозначив f через F и $\tilde{F}$ через f , получим формулу (2.1.3). Теорема доказана.

§ 2. Об одном нелинейном двумерном волновом уравнении, обладающим бесконечномерной алгеброй Ли

Известно, что для уравнений, обладающих бесконечномерной алгеброй Ли ($\mathcal{A}_\infty$) можно написать общее решение. Поэтому представляется интересной задача отыскания нелинейных уравнений, инвариантных относительно $\mathcal{A}_\infty$.

В настоящем параграфе рассмотрена одна из таких задач, а именно, описаны все двумерные нелинейные уравнения вида

$$S: \square u + F(u, u_0^2 - u_1^2) = 0, \quad (2.2.1)$$

$$u_0 = \frac{\partial u}{\partial x_0}, \quad u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}$$

инвариантные относительно бесконечномерной алгебры Ли ($\mathcal{A}_\infty$)

Теорема 2.2.1. Уравнение (2.2.1) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли $(\mathcal{A}_\infty)$ тогда и только тогда, когда

$$F(u, u_0^2 - u_1^2) = (u_0^2 - u_1^2) \cdot f(u) \quad (2.2.2)$$

$$F(u, u_0^2 - u_1^2) = \lambda \cdot \exp u \quad (2.2.3)$$

где λ — произвольная постоянная, f — произвольная дифференцируемая функция.

Доказательство. Необходимость. Как и при доказательстве теоремы 2.1.1, здесь воспользуемся методом Ли.

Из условия инвариантности уравнения (2.2.1) относительно

$$\sum^2 (s) \Big|_{s=0} = 0 \quad (2.2.4)$$

имеем, что

$$\begin{aligned} \xi^0 &= f(x_0 - x_1) + g(x_0 + x_1) \\ \xi^1 &= -f(x_0 - x_1) + g(x_0 + x_1) \\ \eta &= \kappa u + b(x) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

где $f, g, b(x)$ — произвольные функции класса $C^2(R^2)$ а функция $F(u, u_0^2 - u_1^2)$ должна удовлетворять уравнению

$$b_{x_0} - b_{x_1} + \eta \cdot \frac{\partial F}{\partial u} + 2u_0 \xi^0 \frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} - 2u_1 \xi^1 \frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} = 0 \quad (2.2.6)$$

Используя формулы (2.1.6), (2.1.7), (2.2.5), уравнение (2.2.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &(\kappa u + b(x)) \frac{\partial F}{\partial u} + 2 \cdot \left\{ u_0 \frac{\partial b(x)}{\partial x_0} - u_1 \frac{\partial b(x)}{\partial x_1} + (u_0^2 - u_1^2) (\kappa - \xi_0^0) \right\} \cdot \\ &\times \frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} + (2\xi_0^0 - \kappa) \cdot F + \square b(x) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

где $\xi_0^0 = \frac{\partial}{\partial x_0} \xi^0(x)$, $\xi_1^1 = \frac{\partial}{\partial x_1} \xi^1(x)$

Уравнение (2.2.7) можно расщепить по u_0, u_1 , в результате чего получаем систему

$$(ku + b(x)) \frac{\partial F}{\partial u} + 2(k - \xi_0^0)(u_0^2 - u_1^2) \frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} + (2\xi_0^0 - k)F + \square b(x) = 0 \quad (2.2.8a)$$

$$2 \frac{\partial b(x)}{\partial x_0} \frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} = 0 \quad (2.2.8б)$$

$$2 \frac{\partial b(x)}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} = 0 \quad (2.2.8в)$$

Из уравнений (2.2.8б) и (2.2.8в) следует две возможности

1) $\frac{\partial b(x)}{\partial x_0} = \frac{\partial b(x)}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} \neq 0$

2) $\frac{\partial b(x)}{\partial x_0} \neq 0$, $\frac{\partial b(x)}{\partial x_1} \neq 0$, $\frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} = 0$

Рассмотрим 1) возможность. Пусть $\frac{\partial b(x)}{\partial x_0} = \frac{\partial b(x)}{\partial x_1} = 0$

Это значит, что $b(x) = \text{const} = b$. Тогда уравнение (2.2.8a)

можно переписать в виде

$$(ku + b) \frac{\partial F}{\partial u} + 2(k - \xi_0^0)(u_0^2 - u_1^2) \frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} + (2\xi_0^0 - k)F = 0 \quad (2.2.9)$$

Перепишем уравнение (2.2.9) следующим образом

$$\left(\frac{k}{\xi_0^0} u + \frac{b}{\xi_0^0} \right) \frac{\partial F}{\partial u} + 2 \left(\frac{k}{\xi_0^0} - 1 \right) (u_0^2 - u_1^2) \frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} + \left(2 - \frac{k}{\xi_0^0} \right) F = 0 \quad (2.2.10)$$

Исходя из формулы (2.2.5), для ξ_0^0 получаем выражение

$$\xi_0^0 = \frac{db}{d(x_0 - x_1)} + \frac{dg}{d(x_0 + x_1)} \quad (2.2.11)$$

т.е. функция ξ^0 также как и функция ξ^0 является суммой двух произвольных функций, зависящих от x_0 и x_1 .

Учитывая это обстоятельство, можно утверждать, что уравнение (2.2.10) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{K}{\xi^0} = C_1 = \text{const} \quad (2.2.12a)$$

$$\frac{b}{\xi^0} = C_2 = \text{const} \quad (2.2.12b)$$

Из (2.2.12a) и (2.2.12b) видно, что условие произвольности функции ξ^0 будет выполнено только тогда, когда

$$K=0, b=0 \quad (2.2.13)$$

С учетом (2.2.13) уравнение (2.2.10) переписывается в виде

$$0 \cdot \frac{\partial F}{\partial u} + 2F - 2(u_0^2 - u_1^2) \frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} = 0 \quad (2.2.14)$$

Общим решением уравнения (2.2.14) является функция

$$F(u, u_0^2 - u_1^2) = (u_0^2 - u_1^2) \cdot f(u) \quad (2.2.15)$$

где f — произвольная функция.

Рассмотрим теперь 2) возможность. Пусть $\frac{\partial b(x)}{\partial x_0} \neq 0$,

$$\frac{\partial b(x)}{\partial x_1} \neq 0, \quad \frac{\partial F}{\partial (u_0^2 - u_1^2)} = 0.$$

В этом случае уравнение (2.2.8a) примет вид

$$(Ku + b(x)) \frac{dF}{du} + (2\xi^0 - K)F + \square b(x) = 0 \quad (2.2.16)$$

Перепишем (2.2.16) следующим образом

$$\left(\frac{K}{\xi^0} u + \frac{b(x)}{\xi^0} \right) \frac{dF}{du} + \left(2 - \frac{K}{\xi^0} \right) F + \frac{\square b(x)}{\xi^0} = 0 \quad (2.2.17)$$

Могут быть рассмотрены следующие случаи

$$а) \quad \frac{\kappa}{\xi_0^0} = 0, \quad \frac{b(x)}{\xi_0^0} \neq 0$$

$$б) \quad \frac{\kappa}{\xi_0^0} \neq 0, \quad \frac{b(x)}{\xi_0^0} = 0$$

$$в) \quad \kappa = \kappa(x)$$

Рассмотрим случай а). Поскольку $\frac{\kappa}{\xi_0^0} = 0$, то это значит, что $\kappa = 0$. Тогда уравнение (2.2.17) примет вид

$$\frac{dF}{du} + \frac{2\xi_0^0}{b(x)} F + \frac{\square b(x)}{b(x)} = 0 \quad (2.2.18)$$

Уравнение (2.2.18) имеет нетривиальное решение, если

$$\frac{2\xi_0^0}{b(x)} = -C_3 = \text{const} \quad (2.2.19a)$$

$$\frac{\square b(x)}{b(x)} = C_4 = \text{const} \quad (2.2.19б)$$

Подстановка (2.2.19a), (2.2.19б) в (2.2.18) дает

$$\frac{dF}{du} - C_3 F + C_4 = 0 \quad (2.2.20)$$

Общим решением этого уравнения есть функция

$$F = \frac{C_4}{C_3} + C_5 e^{C_3 u} \quad (2.2.21)$$

где C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

Из (2.2.19a) следует, что

$$b(x) = - \frac{2\xi_0^0}{C_3} \quad (2.2.22)$$

А из (2.2.22) и (2.2.5) в свою очередь следует, что

$$\square b(x) = 0 \quad (2.2.23)$$

Учитывая (2.2.23) и (2.2.19б), имеем $C_4 = 0$, а значит (2.2.21) имеет следующий вид

$$F = C_5 \exp(C_3 u) \quad (2.2.24)$$

и при этом функции ξ^0, ξ^1, η имеют вид

$$\begin{aligned} \xi^0 &= f(x_0 - x_1) + g(x_0 + x_1) \\ \xi^1 &= -f(x_0 - x_1) + g(x_0 + x_1) \\ \eta &= -2 \frac{\partial}{\partial x_0} \xi^0(x) \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Рассмотрим случай б) $b(x) = 0$. В этом случае уравнение (2.2.17) примет вид

$$\frac{dF}{du} + \left(\frac{2\xi_0^0}{\kappa} - 1 \right) \frac{F}{u} = 0 \quad (2.2.26)$$

Для того, чтобы уравнение (2.2.26) имело нетривиальное решение надо, чтобы

$$\frac{2\xi_0^0}{\kappa} = C_6 = \text{const} \quad (2.2.27)$$

Но, с другой стороны, условие (2.2.27) означает, что функции ξ^0 и ξ^1 не являются произвольными функциями переменных x_0 и x_1 . Из этого следует, что случай б) отпадает.

Рассмотрим случай в) $\kappa = \lambda_1 b(x)$. В данном случае уравнение (2.2.17) примет вид

$$(\lambda_1 u + 1) \frac{dF}{du} + \left(\frac{2\xi_0^0}{b(x)} - \lambda_1 \right) F = 0 \quad (2.2.28)$$

Для того, чтобы (2.2.28) имело нетривиальное решение надо, чтобы

$$\frac{2\xi_0^0}{b(x)} = C_7 = \text{const} \quad (2.2.29)$$

Но с другой стороны $b(x) = \frac{K}{\lambda_1}$, а значит

$$\xi^0 = \frac{C_4 K}{2\lambda_1},$$

что противоречит тому, что ξ^0 является произвольной функцией от переменных x_0 и x_1 . Таким образом, случай в) также можно отбросить. Необходимость доказана.

Достаточность доказывается непосредственным применением алгоритма Ли [26] к уравнению (2.2.1) с нелинейностями (2.2.2) и (2.2.3).

§ 3. Симметрия уравнения Даламбера с нелинейным дополнительным условием

В квантовой теории поля широко встречается нелинейное уравнение

$$\square u + u_{,\mu} u^{,\mu} \cdot F(u) = 0 \quad (2.3.1)$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $u_{,\mu} = \frac{\partial u}{\partial x_{\mu}}$, $u_{,\mu} u^{,\mu} = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2$.

Для построения семейств частных решений (2.3.1) поступим следующим образом. Вместо (2.3.1) рассмотрим уравнения:

$$S_1: \square u = 0 \quad (2.3.2)$$

$$S_2: u_{,\mu} u^{,\mu} = 0 \quad (2.3.3)$$

Очевидно, что решения переопределенной системы (2.3.2), (2.3.3) дает нам частные решения (2.3.1). Система (2.3.2), (2.3.3) впервые встречалась в трудах Г.Бейтмана [2], В.И.Смирнова и С.Л.Соболева [27] для описания электромагнитных и сейсмичес-

ких волн.

В настоящем параграфе изучим симметрию уравнений (2.3.2) и (2.3.3), и построим частные решения этой системы. Следовательно, будут построены и решения уравнения (2.3.1).

Теорема 2.3.1. Система (2.3.2), (2.3.3) инвариантна относительно бесконечномерной алгебры. Операторы этой алгебры имеют вид

$$X = \xi^{\mu}(x, u) \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.3.4)$$

где $\xi^{\mu} = c_{00}(u)x_{\mu} + c_{\mu\nu}(u)x^{\nu} + d_{\mu}(u)$, $\eta(x, u) = \int c_{00}(u) du$,

причем $c_{00}(u)$, $c_{\mu\nu}(u)$, $d_{\mu}(u)$ — произвольные действительно гладкие функции, зависящие только от u , причем $c_{0a} = c_{a0}$, $c_{ab} = -c_{ba}$, $a \neq b$, $a, b = 1, 2$; $\mu, \nu = 0, 3$

Доказательство проводим методом Ли. Для доказательства теоремы необходимо использовать дифференциальное следствие из уравнения (2.3.3)

$$S_3: u_{\nu} u^{\mu\nu} = 0 \quad (2.3.5)$$

Допускаемый оператор будем искать в виде (2.3.4). Из условия инвариантности уравнений (2.3.2), (2.3.3) относительно оператора (2.3.4)

$$X^2(s_1) \Big|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.3.6)$$

$$X^2(s_2) \Big|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.3.7)$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} b_{00} - b_{11} - b_{22} - b_{33} \end{aligned} \right|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} u_0 s_0 - u_1 s_1 - u_2 s_2 - u_3 s_3 \end{aligned} \right|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.3.9)$$

где выражения для $b_{\mu\mu}$ и s_{μ} , $\mu = \overline{0,3}$ даются формулами (I.I.7) и (I.I.7).

Воспользовавшись формулами (I.I.7) и (I.I.7), уравнения (2.3.8) и (2.3.9) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \square \eta + 2u_{\mu} \eta_{\mu}^M + u_{\mu} u^M \eta_{uu} + (\square u) \eta_u - u^M \square \xi^M - \\ & - 2u_{\nu} u^M \xi_{uv}^M - u_{\mu} u^M u_{\nu} \xi_{uu}^{\nu} - 2u_{\nu}^M \xi_v^M - (\square u) u^M \xi_u^M - \\ & - 2u_{\nu} u^{\nu} \xi_u^M \Big|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

$$\left. \begin{aligned} 2u_{\mu} \eta^M + 2u_{\mu} u^M \eta_u - 2u_{\nu} u_{\mu} u^M \xi_u^{\nu} + 2u_{\nu} u^M \xi_v^M \end{aligned} \right|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.3.11)$$

где $\eta^M = \frac{\partial \eta}{\partial x_{\mu}}$, $\eta_u^M = \frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial x^M}$, $u_{\mu} = \frac{\partial u}{\partial x_{\mu}}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\mu} \partial x_{\nu}}$
 $\xi_v^M = \frac{\partial \xi^M}{\partial x^{\nu}}$, $\xi_u^M = \frac{\partial \xi^M}{\partial u}$

Учитывая уравнения (2.3.2), (2.3.3) и дифференциальное следствие (2.3.5), уравнения (2.3.10) и (2.3.11) примут вид

$$\square \eta + 2u_\mu \eta_\mu^M - u^M \square \xi^M - 2u_\nu^M \xi_\nu^M = 0 \quad (2.3.12)$$

$$u_\mu u^M + u_\nu u^M \xi_\nu^M = 0, \quad \mu, \nu = \overline{0,3} \quad (2.3.13)$$

После расщепления уравнений (2.3.12) и (2.3.13) по u_μ и u_μ^M , находим систему определяющих уравнений относительно координат инфинитезимального оператора (2.3.4) ξ^M и η :

$$\xi_0^0 = \xi_1^1 = \xi_2^2 = \xi_3^3; \quad \xi_\mu^0 = \xi_0^M; \quad \xi_b^a = -\xi_a^b \quad (2.3.14)$$

$$2\eta_{\mu 0} = \square \xi_0^0, \quad 2\eta_{\mu a} = -\square \xi_a^a, \quad a, b = 1, 3; \quad a \neq b \quad (2.3.15)$$

$$\eta_0 = \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0, \quad \square \eta = 0 \quad (2.3.16)$$

Решив систему (2.3.14), (2.3.15), (2.3.16), имеем

$$\xi^M = c_{00}(u)x_\mu + c_{\mu\nu}(u)x^\nu + d_\mu(u), \quad \eta(x, u) = \int c_{00}(u) du$$

где $c_{00}(u)$, $c_{\mu\nu}(u)$, $d_\mu(u)$ — произвольные действительно гладкие функции, зависящие только от u , причем $c_{0a} = c_{a0}$, $c_{ab} = -c_{ba}$, $a, b = 1, 3$, $a \neq b$; $\mu, \nu = \overline{0,3}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 2.3.1 может быть распространена и на случай $\mu = \overline{0, n-1}$, т.е. когда $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$

Замечание 2. Хорошо известно, что максимальной локальной группой инвариантности линейного уравнения (2.3.2) является 15-параметрическая группа Ли. Теорема 2.3.1. показывает, что дополнительное условие выделяет такое подмножество из всего множества решений уравнения (2.3.2), которое имеет симметрию значительно более широкую, чем исходное линейное уравнение (2.3.2). Следствием

этого факта является то, что если u_1 — решение системы (2.3.2), (2.3.3), то и произвольная гладкая функция $u_2 = \Phi(u_1)$ является также решением этой системы.

Следующие выражения являются решениями системы (2.3.2), (2.3.3):

$$u(x) = \bar{\Phi}_1(\alpha_\mu x^\mu + \beta_\mu x^\mu), \quad \alpha_\mu \alpha^\mu = -\beta_\mu \beta^\mu = 1, \quad \alpha_\mu \beta^\mu = 0$$

$$u(x) = \bar{\Phi}_2(\alpha_\mu x^\mu - \beta_\mu x^\mu), \quad \alpha_\mu \alpha^\mu = -\beta_\mu \beta^\mu = 1, \quad \alpha_\mu \beta^\mu = 0$$

$$u(x) = \bar{\Phi}_3(\alpha_\mu x^\mu), \quad \alpha_\mu \alpha^\mu = 0, \quad \mu = \overline{0,3}$$

где $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \bar{\Phi}_3$ — произвольные гладкие функции.

§ 4. Симметрия систем уравнений, аппроксимирующих нелинейные волновые уравнения

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся в литературе нелинейные волновые уравнения

$$\square u + \varepsilon u^3 = 0, \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (2.4.1)$$

$$\square u - \varepsilon \exp u = 0, \quad u = u(x), \quad x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (2.4.2)$$

Если к уравнениям (2.4.1), (2.4.2) применить метод последовательных приближений, т.е. искать решения (2.4.1), (2.4.2) в виде

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (2.4.3)$$

то, как известно, приходим к следующей бесконечной системе уравнений для

$$S_1: \square u_0 = 0 \quad (2.4.4)$$

$$S_2: \square u_1 + u_0^3 = 0 \quad (2.4.5)$$

$$S_3: \square u_2 + 3u_0^2 u_1 = 0 \quad (2.4.6)$$

.....

$$S_4: \square u_0 = 0 \quad (2.4.7)$$

$$S_5: \square u_1 = \exp u_0 \quad (2.4.8)$$

$$S_6: \square u_2 = \exp(u_0 + u_1) - \exp u_0 \quad (2.4.9)$$

Хорошо известно, что уравнение (2.4.1) инвариантно относительно I5-параметрической конформной группы $C(1,3)$, а уравнение (2.4.2) инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, т.е. группы Пуанкаре $P(1,3)$, дополненной однопараметрической группой масштабных преобразований.

В этом параграфе приведены теоремы о симметричных свойствах систем уравнений (2.4.4)–(2.4.6), (2.4.7)–(2.4.9), аппроксимирующих уравнения (2.4.1), (2.4.2)

Инфинитезимальные операторы симметрии будем искать в виде

$$X = \xi^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta^\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial u_\mu} \quad (2.4.10)$$

$$u = (u_0, u_1, u_2), \quad \mu = \overline{0,2}$$

Теорема 2.4.1. Система (2.4.4)–(2.4.6) инвариантна относительно оператора X , координаты которого имеют вид

$$\xi^{\mu} = -b_{\mu}(x_{\nu}x^{\nu}) + 2x_{\mu}(b_{\nu}x^{\nu}) + c_{\mu\nu}x^{\nu} + d_{\mu}$$

$$\gamma_0 = (-2b_{\nu}x^{\nu} + \lambda_{00})u_0$$

$$\gamma_1 = \lambda_{10}u_0 + (-2b_{\nu}x^{\nu} + 2c_{00} + 3\lambda_{00})u_1 \quad (2.4.II)$$

$$\gamma_2 = \lambda_{20}u_0 + 3\lambda_{10}u_1 + (-2b_{\nu}x^{\nu} + 4c_{00} + 5\lambda_{00}) + A_2(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

где A_2 — произвольное решение уравнения $\square A_2 = 0$

Доказательство. Доказательство проводим лиевским методом, согласно которому система (2.4.4)–(2.4.6) инвариантна относительно оператора $\bar{X}$ тогда, когда выполнено условие

$$\bar{X}^2(s_1) \Big|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.4.I2)$$

$$\bar{X}^2(s_2) \Big|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.4.I3)$$

$$\bar{X}^2(s_3) \Big|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.4.I4)$$

где $\bar{X}$ — это второе продолжение оператора X

$$\begin{aligned}
\bar{X}^2 = & \xi^4(x, u) \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \eta_\mu(x, u) \frac{\partial}{\partial u_\mu} + \xi_\mu^0 \frac{\partial}{\partial u_{0\mu}} + \\
& + \xi_\mu^1 \frac{\partial}{\partial u_{1\mu}} + \xi_\mu^2 \frac{\partial}{\partial u_{2\mu}} + \bar{\sigma}_{\mu\nu}^0 \frac{\partial}{\partial u_{0\mu\nu}} + \\
& + \bar{\sigma}_{\mu\nu}^1 \frac{\partial}{\partial u_{1\mu\nu}} + \bar{\sigma}_{\mu\nu}^2 \frac{\partial}{\partial u_{2\mu\nu}}
\end{aligned} \quad (2.4.15)$$

и при этом выражения для ξ_μ^i и $\bar{\sigma}_{\mu\nu}^i$ ($i=0,1,2$) смотреть в [26].

Учитывая (2.4.15), условия (2.4.12)–(2.4.14) переписутся в виде

$$\boxed{\bar{\sigma}^0} \bigg|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.4.16)$$

$$\boxed{\bar{\sigma}^1 + 2\eta_0 u_0^2} \bigg|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.4.17)$$

$$\boxed{\bar{\sigma}^2 + 6\eta_0 u_0 u_1 + 3u_0^2 \eta_1} \bigg|_{\substack{s_1=0 \\ s_2=0 \\ s_3=0}} = 0 \quad (2.4.18)$$

После подстановки выражений $\bar{\sigma}_{\mu\nu}^i$ ($i=0,1,2$) в (2.4.16)–(2.4.18), и последующего расщепления, получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида

$$\xi_0^0 = \xi_a^a; \quad \xi_a^0 = \xi_0^a; \quad \xi_b^a + \xi_a^b = 0, \quad a, b = \overline{1, 2}; \quad a \neq b \quad (2.4.19)$$

$$\eta_{u_0 0} = \frac{1}{2} \square \xi^0, \quad \eta_{u_0 a} = -\frac{1}{2} \square \xi^a, \quad \eta_{u_1 \mu} = \eta_{u_2 \mu} = 0$$

$$\eta_{\mu u_0 u_0} = \eta_{\mu u_1 u_1} = \eta_{\mu u_2 u_2} = \eta_{\mu u_3 u_3} = 0, \quad \mu = \overline{0, 2} \quad (2.4.20)$$

$$\eta_{1 u_0} = \frac{1}{2} \square \xi^0, \quad \eta_{1 u_1 a} = -\frac{1}{2} \square \xi^a, \quad \eta_{1 u_0 \mu} = \eta_{1 u_2 \mu} = 0$$

$$\eta_{2 u_0} = \frac{1}{2} \square \xi^0, \quad \eta_{2 u_2 a} = -\frac{1}{2} \square \xi^a, \quad \eta_{2 u_0 \mu} = \eta_{2 u_1 \mu} = 0$$

$$\square \eta_0 - u_0^3 \eta_{0 u_1} - 3 u_0^2 u_1 \eta_{0 u_2} = 0 \quad (2.4.21)$$

$$\square \eta_1 - u_0^3 \eta_{1 u_1} - 3 u_0^2 u_1 \eta_{1 u_2} + 2 u_0^3 \xi_0^0 + 3 \eta_0 u_0^2 = 0 \quad (2.4.22)$$

$$\square \eta_2 - u_0^3 \eta_{2 u_1} - 3 u_0^2 u_1 \eta_{2 u_2} + 6 u_0^2 u_1 \xi_0^0 + 6 \eta_0 u_0 u_1 + 3 \eta_1 u_0^2 = 0 \quad (2.4.23)$$

где $\xi_b^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x_b}$, $\eta_{a u_\mu} = \frac{\partial \eta_a}{\partial u_\mu}$, $\eta_{a u_\mu v} = \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial u_\mu \partial x_v}$

Решением системы (2.4.19)–(2.4.23) и есть выражения (2.4.11). Теорема доказана.

Следствие 2.4.1. Симметрия системы (2.4.4)–(2.4.6) шире, чем симметрия уравнения (2.4.1). Система (2.4.4)–(2.4.6) инвариантна относительно бесконечномерной алгебры, поскольку координаты вектора η_a задаются через произвольное решение уравнения Даламбера.

Теорема 2.4.2. Система (2.4.7)–(2.4.9) инвариантна относительно оператора X , координаты которого имеют вид

$$\xi^\mu = c_{\mu\nu} x^\nu + d_\mu'$$

$$\eta_0 = -2c_{00}$$

$$\eta_1 = d_1$$

(2.4.24)

$$\eta_2 = \lambda_{20} u_0 + d_1(u_1 + u_2) + A_2(x),$$

где A_2 — произвольное решение уравнения $\square A_2 = 0$ и $c_{00} = c_{11} = c_{22} = c_{33}$, $c_{0a} = c_{a0}$, $c_{ab} = -c_{ba}$, $a \neq b$, $a, b = \overline{1, 3}$

Следствие 2.4.2. Система (2.4.7)–(2.4.9) инвариантна относительно группы $\tilde{P}(1, 3)$, так же как и (2.4.2) инвариантно относительно группы $\tilde{P}(1, 3)$. Система (2.4.7)–(2.4.9) инвариантна относительно бесконечномерной алгебры, поскольку координата оператора η_2 задается через произвольное решение уравнения Даламбера.

Теорема 2.4.3. Двумерная система (2.4.7)–(2.4.9) ($x = (x_0, x_1)$) инвариантна относительно бесконечномерной алгебры, при этом координаты оператора X имеют вид

$$\xi^0 = f(x_0 - x_1) + g(x_0 + x_1)$$

$$\xi^1 = -f(x_0 - x_1) + g(x_0 + x_1)$$

(2.4.25)

$$\eta_0 = A_0(x_0, x_1)$$

$$\eta_1 = d_2$$

$$\eta_2 = \lambda_{20} u_0 + d_2(u_1 + u_2) + A_2(x_0, x_1), \quad \lambda \xi^0 + A_2(x_0, x_1) = c$$

где A_0 — произвольное решение уравнения $\square A_0 = 0$; A_2 — произвольное решение уравнения $\square A_2 = 0$.

Доказательство теорем 2.4.2 и 2.4.3 можно провести аналогично доказательству теоремы 2.4.1.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987. — 480 с.
2. Бейтмен Г. Математическая теория распространения электромагнитных волн. — М.: Изд-во физ.-мат.лит., 1958. — 180 с.
3. Беркович Л.М., Нечаевский М.Л. О групповых свойствах и интегрируемости уравнений типа Фаулера-Эмдена. Теоретико-групповые методы в физике. — М.: Наука, 1983. — 2. — С.463-471.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.:Наука, 1974. — 501 с.
5. Бицадзе А.В. К теории одного класса нелинейных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. — 1977. — 13, № II. — С.1994.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967. — 436 с.
7. Волосов В.М. Асимптотические методы исследования нелинейных волн в стратифицированной среде с приложениями к теории внутренних волн в океане. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972. — 129 с.
8. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. — М.: Наука, 1979. — 431 с.
9. Джарджадзе Г.П., Погребков А.К., Поливанов М.К. Сингулярные решения и динамика особенностей // теорет. и мат. физика. — 1979. — 40, № 3. — С. 221-234.
10. Жибер А.В. Уравнения n -волн и система нелинейных уравнений Шредингера // Там же. — 1982. — 52, № 3. — С.405-413.
11. Жибер А.В., Ибрагимов Н.Х., Шабаш А.Б. Уравнения типа Лиувилля // Докл. АН СССР. — 1979. — 249, № I. — С. 26-29.

12. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.
Под редакцией Новикова С.П. Теория солитонов. - М.: Наука,
1980. - 317 с.
13. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокуси-
ровки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах //
Журн. эксперимент. и теорет. физики. - 1971. - 61. - С. 118-
134.
14. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической
физики. - Новосибирск: Новосиб.гос.ун-т, 1972. - 159 с.
15. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике.
- М.: Наука, 1983. - 278 с.
16. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравне-
ниям. - М.: Наука, 1965. - 702 с.
17. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Введение в нелинейную механику.
- Киев: Изд-во АН УССР, 1937. - 123 с.
18. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения
уравнений в частных производных. - Киев: Изд-во вища шк. -
- 592 с.
19. Митропольский Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных ко-
лебательных системах. - Киев: Изд-во АН УССР, 1955. - 280 с.
20. Митропольский Ю.А., Хом Г.П. Математическое обоснование ме-
тодов нелинейной механики. - Киев: Наук.думка, 1983. - 212 с.
21. Митропольский Ю.А., Шульга М.В. Асимптотические решения мно-
гомерного нелинейного волнового уравнения // Докл. АН СССР.
- 1987. - 295, № 1. - С.30-33.
22. Митропольский Ю.А., Шульга М.В. Асимптотические и точные ре-
шения многомерного нелинейного уравнения типа Шредингера //
Укр.мат.журн. - 1987. - 39, № 6.-С.744-751.
23. Найфэ А.Х. Методы возмущений. - М.: Мир, 1976. -

24. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. -
25. Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Новосиб. гос.ун-т, 1966. -
26. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400 с.
27. Смирнов В.И., Соболев С.Л. Новый метод решения плоской задачи упругих колебаний // Тр. сейсмолог. ин-та АН СССР.- 1932. - № 20. - 37 с.
28. Смирнов В.И., Соболев С.Л. О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии // Там же. - 1933. - № 29. - С.43-51.
29. Сирченко З.Ф. Применение метода усреднения к решению уравнений в частных производных // Укр.мат.журн. - 1962. - 14, № 2, - С.222-227.
30. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. - М.: Мир, 1977. - 628 с.
31. Фуцич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. - С.6-27.
32. Фуцич В.И., Чернига Р.М. О точных решениях двух многомерных нелинейных уравнений шредингеровского типа. - Киев, 1986. - 43 с. - (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 86.85).
33. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. - М.: Машиностроение, 1970. - 734 с.
34. Хамермет М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. - М.: Мир, 1966. - 588 с.

35. Фушч В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. - Киев: Наукова думка, 1983. - 200с.
36. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. - М.: Гостехиздат, 1949.
37. Шульга М.В. О частных решениях волнового уравнения с кубической нелинейностью // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. - С.35-41.
38. Шульга М.В. О точных и приближенных решениях одного нелинейного волнового уравнения // Методы нелинейной механики и их приложения. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. - С.149-155.
39. Шульга М.В. О двумерных нелинейных волновых уравнениях, инвариантных относительно некоторых алгебр Ли // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. - С.84-86.
40. Шульга М.В. Симметрия и некоторые частные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. - С.36-38.
41. Элеонский В.М., Кулагин Н.Е., Новожилова Н.С., Силин В.П. Метод асимптотических разложений и качественный анализ конечномерных моделей в теории нелинейного поля. - М., 1983. - 18с. - (Препр./АН СССР. Физический ин-т им. П.И.Лебедева; 83.)
42. Ames W.F. Nonlinear partial differential equation in engineering - New York: Academic Press, 1972. - 304p.
43. Chikwendu S.C., Kevorkian J. A perturbation method for hyperbolic equations with small nonlinearities // SIAM J. on Appl. Math. - 1972. - 22. - P.235-258.

44. Dicson L.E. Differential equations from the group stand-point // Ann. Math. - 1924. - P.287-378.
45. Eckhous W. New approach to the asymptotic theory of nonlinear oscillations and wave-propagation // J. Math. Anal. and Appl. - 1975. - 49. - P.575-611.
46. Grunland A.M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys., 1984. - 25, N 4. - P.791-806.
47. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. - 1967. - 19. - P.1095-1097.
48. Kevorkian J., Cole J.D. Perturbation method in applied mathematics. - New York: Springer-Verlag, 1980. - 545p.
49. Keller J.B., Kogelman S. Asymptotic solutions of initial value problems for nonlinear partial differential equations // SIAM J. Appl. Math. - 1970. - P.748-758.
50. Kakutani T., Sugimoto N. Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky method for nonlinear wave modulation // Phys. of Fluids. - 1974. - 17, N 8. - P.1617-1625.
51. Kumei S. Invariance transformation, invariance group transformations, and invariance group of the sine-Gordon equations // J. Math. Phys. - 1975. - 16. - P.2461-2468.
52. Lardner R.W. Asymptotic solution of nonlinear wave equations using the method of averaging and two-timing // Quarterly of Appl. Math. - 1977. - 35. - P.225-238.
53. Luke J.C. A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems // Proc. Roy. Soc. - 1966. - A292. - P.403-412.
54. Lie S. Begründung einer invarianten theorie der Berührungstransformationen // Math. Ann. - 1874. - 8. - P.215-288.

55. Lie S. Uber die integration durch bestimmte integrale von einer klasse linear partieller differentcalgleichung // Arch. for Math. -1881. - 6, - P.328-368.
56. Montgomery D., Tidman D.A. Secular and nonsecular behavior for the cold plasme equations // Phys. of Fluids. - 1964. - 7. - P. 242-249.
57. Nayfeh A.H. Nonlinear oscillations in a hot electron plasma // Phys. of Fluids. - 1965. - 8. - P.1896-1898.
58. Niederer V. The maximal kinematical invariance group of the free Schrodinger equation // Helv. Phys. acta. - 1972. - 45. - P.802-820.
59. Olver P.J. Applications of Lie groups to differential equations. - New York: Springer-Verlag, 1986. - 500p.
60. Tagiri M. Some remarks on similarity and soliton solution of non-linear Klein-Gordon equation // J. of Phys. Soc. Japan. - 1984. - 53., II. - P.3759-3764.