АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

СЕРОВ Николай Иванович

УСЛОВНАЯ СИММЕТРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.03 – математическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Киев – 1993

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 3. Нелокальные симметрии некоторых нелинейных дифференциальных уравнений................................... 154

ВВЕДЕНИЕ

Поиск точных решений дифференциальных уравнений (ДУ), щих реальные процессы, является важнейшим этапом матема описания природы. На сегодняшний день создано множество методов для решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП): метод специальных подстановок, метод разделения переменных, метод Пуассона, метод разложения в ряды Фурье, метод обратной задачи теории рассеяния и др. Все эти методы основаны на идеях симметрии и эффективно используются для решения тех задач, уравнения которых ладают явной или скрытой симметрией.

Принципы симметрии играют фундаментальную тествознании. Законы сохранения энергии, импульс количества движения являются следствием однородности, из четырехмерного пространства- времени. Симметрию в матема теоретической физике можно также рассматривать как помощью которого из всевозможных логически допустимых моделей (уравнений, соотношений) отбираются только те, которые обладают высокой симметрией [80]. Все основные уравнения математической физики (уравнения Ньютона, Лапласа, Д'Аламбера, Шредингера, Лиувилля, Дирака, Максвелла и т.д.) инвариантны относительно достаточно широких гру преобразований.

Математические основы теории симметрии ДУ заложил вежский математик Софус Ли (1881-1885 гг.). Он же первый эту теорию к конкретным уравнениям и нашел, используя пре групп, их решения. С.Ли установил многие фундаментальные теории групповых свойств ДУ. Фундаментальное открытие Ли с том, что сложные нелинейные условия инвариантности ДУ относительн преобразований из группы можно в случае непрерывных групп заменить эквивалентными, но гораздо более простыми линейными условиями, отражающими "инфинитезимальную инвариантность" ДУ относительно разующих этой группы. Почти для каждой, важной с точки зрения , системы ДУ эти условия инфинитезимальной симметрии – та емые определяющие уравнения полной группы симметрий систе жно решить явно в замкнутом виде, и, таким образом, наиболе руппа непрерывных симметрий системы может быть определена явно вский метод довольно громоздкий и состоит из соверш механических вычислений, и для этой задачи уже разработано несколь компьютерных систем вычислений.

Когда найдена полная группа симметрий системы ДУ, то можн решать следующие задачи:

- размножение решений;
- построение инвариантных решений;
- классификация решений по их симметрийным свойствам;
- классификация ДУ относительно данной группы преобразова
- построение законов сохранения, интегралов движения;
- линеаризация нелинейных ДУ

и др.

Многие исследователи использовали и развивали теорию С.Ли. 1918 г. Э.Нетер доказала две замечательные теоремы, связывающи группы симметрий с законами сохранения. Г.Бейтмен эффективно использовал симметрию линейных волновых уравнений для нахождения их точны решений. Важные идеи по отысканию инвариантных решений предложи Г.Биркгоф [11].

Дальнейшее развитие теория С.Ли получила в работах Л.В.Ов 47] и его школы, где, в частности, построена теория инва х и частично-инвариантных решений ДУ. Важные идеи в данном лении предложены Н.Х.Ибрагимовым [31], П.Олвером [188], П.Вин [190], Блуменом и Коулом [142] и многими другими авторами.

Новый подход к исследованию алгебр инвариантности ДУ разработан В.И.Фущичем и его учениками [77]. Этот метод существенно отличается от классического метода С.Ли. Основное отличие состоит в том, что базисные элементы алгебры инвариантности соответствующих ДУ являются, как правило, интегродифференциальными (псевдодифферециальными) операторами. С помощью данного метода обнаружены новые, [illegible] ранее неизвестные, симметрии многих ДУЧП: Дирака, Максвелла [92] и др. Этот метод впоследствии получил название нелие[illegible] исследования симметрийных свойств ДУЧП.

В большой серии работ В.И.Фущича и его учеников пр[illegible] разработан метод условной симметрии. Определения, основные понятия некоторые приложения этого метода изложены нами во второй главе данной диссертации.

ОСНОВНОЙ ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ диссертационной работы – одномерные и многомерные нелинейные ДУ математической и теоретичес[illegible] физики. Главное внимание уделено классификации нелинейных ДУ 2-порядка относительно групп Галилея, Пуанкаре, конформной; по[illegible] [illegible] инвариантов алгебр Пуанкаре и Галилея; редукции и нахождени[illegible] [illegible] решений основных нелинейных ДУ математической физики, относительно указанных выше групп; применению метода [illegible] симметрии для исследования инвариантности, нахождения [illegible] решений и классификации ДУ; исследованию нелокальной симметр[illegible] [illegible] использованию нелокальной симметрии для построения нелокальных анзацев, редуцирующих данное ДУ к системам ДУЧП с меньшим количеством независимых переменных и к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ); построению формул нелокального размножения и нелинейной зиции решений нелинейных ДУ; исследованию инвариантн ных ДУ относительно негрупповых преобразований.

АУЧНАЯ НОВИЗНА И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Развитые в диссертации методы и полученные результаты являются новыми и представляют собой важную часть современной математической физики. Эти методы и результаты могут найти применение при исследовании широго круга вопросов математической физики. Развиваемые в работе направления тесно примыкают к тем исследованиям в области математической и теоретичес- физики, которые интенсивно проводятся в ИМ АН Украины, ИПММ АН ИТФ АН России им. Н.В.Келдыша, ОИЯИ (Дубна), Институте гид- и вычислительном Центре СО АН России, Миннесотско итете (США), Монреальском университете (Канада) и др.

ПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты, изложенные в диссертации, опубли- в 44 работах и монографиях [124,167]. Они докладывались на 1Х Международной конференции по нелинейным колебаниям (Киев 1981), на Международном семинаре "Теоретико-групповые методы в физике" (Звенигород 1983), на семинаре Всесоюзной школы молодых ученых "Комплексные методы в математической физике" (Донецк 1984), на семинарах ИПММ АН Украины и отдела прикладных исследований ИМ АН ины.

КТУРА И ОБЬЕМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения, 3-х ключения, общим объемом 217 страниц. Список литературы т 194 наименования.

РАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

глава диссертации посвящена исследованиям, связанным с кой симметрией нелинейных ДУ. В §1.1 проведена классификация нелинейных волновых уравнений, инвариантных относительно групп Пуанкаре, а в §1.3 – относительно групп Галилея. И если результатом исследований §1.1 явились только вестные уравнения Д'Аламбера, Лиувилля, эйконала, Борна-Инфельда, Монжа-Ампера, то в §1.3 найдено новое, ранее не встречавшееся в литературе, уравнение, являющееся "параболическим" аналогом уравнения Борна-Инфельда. В §1.2 исследованы нелинейные поливолновые уравнения, инвариантные относительно конформной группы. В первых трех параграфах реше- задачи классификационного характера, т.е. найдены ределенного класса, инвариантные относительно наперед за ной группы. В §1.4 обсуждены вопросы построения анзац помощи лиевских преобразований инвариантности ДУ), которые дуцируют данное ДУ к ДУЧП с меньшим количеством независи переменных или к ОДУ. В §§ 1.6- 1.10 при помощи инвариант групп Пуанкаре и конфомной, найденных в §1.5, построены анзацы, проведена редукция и получены классы точных решений нелинейных уравнений Д'Аламбера, Лиувилля, Борна-Инфельда, эйконала. В §1.11 приведены инварианты группы Галилея, проведена редукция и найдены точные решения нелинейного уравнения Шредингера.

Во второй главе диссертации введено понятие усл инвариантности ДУ, которое включает в себя понятие инвариантности, существенно при этом его расширяя. позволило обнаружить дополнительную симметрию ДУ, кот обычным лиевским способом получить нельзя. Из результат рой главы видно, что многие основные ДУ математической физики обладают условной инвариантностью. Для нелинейных уравнений теплопроводности, фильтрации, Д'Аламбера, Лиувилля, Борна-Инфельда, Монжа-Ампера, Буссинеска, газовой динамики, Кортеве-

Фриза и других, при помощи условной симметрии, найдены классы точных решений, которые не могут быть получены посредством лиевской симметрии этих уравнений. Особенно эффективно применяется условная симметрия для нахождения точных решений к тем ДУ, которые имеют очень бедную симметрию в классе лиевских образований. Это проиллюстрировано на примерах нелинейного ния теплопроводности (§2.2), нелинейного волнового урав- 8) и уравнения Буссинеска (§2.10).

ья глава посвящена исследованию нелокальной симметрии йных ДУ. Существует универсальный метод исследования не- ьной симметрии ДУ – это метод Ли–Беклунда. Однако, как ывают конкретные исследования, применение этого метода связано с принципиальными трудностями. Поскольку многообразие, на котором реализуется алгоритм Ли–Беклунда, бесконечномерно, то реализовать его в общем виде удается довольно редко. Поэтому любые результаты о нелокальной симметрии ДУ, полученные для конкретного ДУ, имеют большое значение.

В §3.1 при помощи нелокальных преобразований для о уравнения теплопроводности найдены нелокальные ан- дуцирующие его к ОДУ, нелокальные формулы размножения ерпозиции решений данного уравнения. В §3.2 известные разования Беклунда для уравнения синус Гордона переписаны аметрическом виде. Это позволило применить их для получения целой цепочки точных решений этого уравнения, среди которых оказались как известные солитонные, так и новые, ранее не встречавшиеся в литературе, решения данного уравнения. В §§3.3 – 3.4 при помощи нелокальной симметрии построены нелокальные анзацы, редуцирующие нелинейные уравнения газовой динамики и несжимаемой жидкости к системам ОДУ. Найдены семейства точных решений указанных уравнений. В §3.5 исследованы некоторые вопросы, связанные с негрупповой симметрией нелинейных ДУ.

В заключении перечислены основные результаты диссертации выдвигаемые для защиты.

Данная работа выполнена в отделе прикладных иссле Института математики АН Украины. Выражаю искрен благодарность члену-корреспонденту АН Украины В.И.Фущичу многолетнее сотрудничество, постоянную поддержку и внимание работе, а также сотрудникам отдела за обсуждение полученных результатов и творческое взаимодействие.

ГЛАВА 1.

ЛИЕВСКАЯ СИММЕТРИЯ, РЕДУКЦИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

роко и разнообразно применение лиевской симметрии ди ых уравнений. Одними из самых важных задач в этом напра яются задачи групповой классификации ДУ и нахождение ых решений. Решению этих задач для основных уравнений мат й и теоретической физики посвящена данная глава. В ней пр классификация ДУ относительно основных групп движения кл ческой и квантовой механики: Пуанкаре, конформной и Галилея. Результатом проведенной классификации являются классические уравнения Д'Аламбера, Лиувилля, Борна-Инфельда, Монжа-Ампера, эйконала, а также новые, ранее не встречавшиеся в приложениях, уравнения: нелиней- поливолновое уравнение и "параболический" аналог уравнения Бор- ьда. Эти новые уравнения в силу своих симметрийных свойств етендентами на описание физических процессов.

й главе также при помощи групп Пуанкаре, конформной остроены анзацы, проведена редукция и найдены многопараме семейства точных решений нелинейных уравнений Д'Алам лля, Борна-Инфельда, эйконала, Шредингера.

§ 1.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУПП ПУАНКАРЕ

В настоящем параграфе решаются следующие задачи: описать дифференциальные уравнения первого порядка

$$L(x,u,\underset{1}{u}) = 0 \qquad (1.1.1)$$

и второго порядка

$$L(x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u}) = 0, \qquad (1.1.2)$$

где $u=u(x) \in \mathbb{R}_1$, $x=(x_0,\vec{x}) \in \mathbb{R}_{1+n}$, $\underset{1}{u}=\{u_0, u_1, \ldots, u_n\}$,

$$\underset{2}{u}=\{u_{00},u_{11},\ldots,u_{nn}\}, \quad u_\mu=\frac{\partial u}{\partial x_\mu}\ ; \quad u_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\ ; \quad \mu,\nu=\overline{0}$$

инвариантны относительно групп Пуанкаре $\tilde{\mathbb{P}}(1,n)$; $\approx{\mathbb{P}}(1,n)=\mathbb{C}(1,n)$, $\tilde{\mathbb{P}}(1,n+1)$, $\overset{\approx}{\mathbb{P}}(1,n+1)=\mathbb{C}(1,n+1)$, $\tilde{\mathbb{P}}(2,n)$, $\overset{\approx}{\mathbb{P}}(2,n)=\mathbb{C}(2,n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.1. Группой Пуанкаре $\mathbb{P}(1,n)$ называется группа, порождаемая операторами

$$\mathbb{P}_0=\partial_0=\frac{\partial}{\partial x_0}\ , \quad -\mathbb{P}_a=\partial_a=\frac{\partial}{\partial x_a}\ ; \quad a=\overline{1,n}\ ;$$

$$J_{\mu\nu}=x_\mu \mathbb{P}_\nu - x_\nu \mathbb{P}_\mu\ ; \quad \mu,\nu=\overline{0,n}\ ,$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\mathbb{P}_\mu,\mathbb{P}_\nu] = 0, \quad [\mathbb{P}_\alpha,J_{\mu\nu}] = g_{\alpha\mu}\mathbb{P}_\nu - g_{\alpha\nu}\mathbb{P}_\mu, \qquad (1.1.4)$$

$$[J_{\mu\nu},J_{\alpha\beta}] = g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} + g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha}, \quad \mu,\nu,\alpha,\beta = \overline{0}$$

где $g_{\mu\nu}$ – метричный тензор пространства $\mathbb{R}_{1+n}$ с сигнатурой ,...,–). Алгебра операторов (1.1.3), удовлетворяющих (1.1.4) называется алгеброй Пуанкаре $A\mathbb{P}(1,n)$.

Поскольку группа Ли однозначно определяется соответствующей ей алгеброй Ли, то в дальнейшем будем определять только алгебру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.2. Расширенной алгеброй Пуанкаре $A\tilde{\mathbb{P}}(1$ назовем алгебру Пуанкаре $A\mathbb{P}(1,n)$ дополненную оператором д

$$\mathbb{D} = x_\mu \partial_\mu + \eta(u)\partial_u \ , \qquad (1.1.5)$$

где $\eta(u)$ – произвольная дифференцируемая функция, $\partial_u = \frac{\partial}{\partial u}$. Коммутационные соотношения (1.1.4) при этом дополнятся следующими усло-

$$\mathbb{D}] = \mathbb{P}_\mu \ , \quad [\mathbb{J}_{\mu\nu},\mathbb{D}] = 0 \ ; \quad \mu,\nu=\overline{0,n} \qquad (1.1.6)$$

ДЕЛЕНИЕ 1.1.3. Алгебру Пуанкаре $\overset{\approx}{A\mathbb{P}}(1,n)$, дополненн

рмными операторами

$$\mathbb{K}_\mu = 2x_\mu\mathbb{D} - x_\nu x^\nu \mathbb{P}_\mu \ , \qquad (1.1.7)$$

овем расширенной алгеброй Пуанкаре $\overset{\approx}{A\mathbb{P}}(1,n)$ или конформной алгеброй $A\mathbb{C}(1,n)$. Коммутационные соотношения (1.1.4), (1.1.6) дополнятся условиями

$$[\mathbb{K}_\mu,\mathbb{K}_\nu] = 0 \ , \ [\mathbb{K}_\alpha,\mathbb{J}_{\mu\nu}] = g_{\alpha\mu}\mathbb{K}_\nu - g_{\alpha\nu}\mathbb{K}_\mu \ , \qquad (1.1.8)$$

$$[\mathbb{K}_\mu,\mathbb{D}] =- \mathbb{K}_\mu, \ [\mathbb{K}_\mu,\mathbb{P}_\nu] =2(g_{\mu\nu}\mathbb{D} - \mathbb{J}_{\nu\mu}), \quad \mu,\nu,\alpha =\overline{0,n}$$

ЕМА 1.1.1. Уравнение (1.1.1) инвариантно относител

$\tilde{A\mathbb{P}}(1,n)$ тогда и только тогда, когда оно локаль

алентно одному из уравнений

$$u_\mu u^\mu = 1, \qquad (1.1.9)$$
$$u_\mu u^\mu = 0, \qquad (1.1.10)$$
$$u_\mu u^\mu = -1, \qquad (1.1.11)$$

причем оператор дилатации (1.1.5) имеет вид

$$\mathbb{D} = x_\mu \partial_\mu + u\partial_u \ . \qquad (1.1.12)$$

Доказательство. Из требования инвариантности уравнения(1.1.1) отно–

льно алгебры $A\mathbb{P}(1,n)$ следует, что оно имеет вид

$$u_\mu u^\mu = F(u), \qquad (1.1.13)$$

$(u)>0$, то заменой

$$\int \frac{du}{\sqrt{F(u)}} \longrightarrow u$$

уравнение (1.1.13) сводится к (1.1.9). Если $F(u)<0$, то замено

$$\int \frac{du}{\sqrt{-F(u)}} \longrightarrow u$$

уравнение (1.1.13) сводится к (1.1.11). При $F(u)=0$ (1. дает с (1.1.10). Непосредственной проверкой по методу С.Ли убеждаемся в том, что уравнения (1.1.9)–(1.1.11) инвариантны тельно оператора (1.1.12).

ТЕОРЕМА 1.1.2. Уравнение (1.1.1) инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1,n)$ с операторами (1.1.3), (1.1.12), (1.1.7) тогда и только тогда, когда оно имеет вид (1.1.10).

Доказательство. Несложно убедиться, что в классе уравне (1.1.13) только уравнение (1.1.10) инвариантно относительно оп в (1.1.7).

Исследуя инвариантноть уравнения второго порядка сительно алгебр Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$ и $AC(1,n)$, ограничимс ниями вида

$$\square u = F(x,u,\underset{1}{u}), \qquad (1.1.14)$$

где $\square u = g^{\mu\nu}u_{\mu\nu}$, F– произвольная гладкая функция.

ТЕОРЕМА 1.1.3. Уравнение (1.1.14) инвариантно относительно алгебры $A\tilde{P}(1,n)$ тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно одному из уравнений

$$\square u = u^k f^1(u_\mu u^\mu u^{-k-1}), \qquad (1.1.15)$$

$$\square u = e^u f^2(u_\mu u^\mu e^{-u}), \qquad (1.1.16)$$

где f^1 и f^2 – произвольные гладкие функции, причем оп тации (1.1.5) для каждого из уравнений (1.1.15) и (1.1.1

ственно задается формулой

$$\mathbb{D} = x_\mu \partial_\mu + \frac{2}{1-k} u\partial_u \qquad (1.1.17)$$

$$\mathbb{D} = x_\mu \partial_\mu - 2\partial_u \qquad (1.1.18)$$

зательство. Из инвариантности уравнения (1.1.14) относите- гебры $A\mathbb{P}(1,n)$ следует, что оно имеет вид

$$\Box u = F(u, u_\mu u^\mu) \qquad (1.1.19)$$

ьку класс уравнений (1.1.19) инвариантный относительно замены

$$u \longrightarrow \Phi(u),$$

где $\Phi(u)$ – произвольная гладкая функция, то подберем $\Phi(u)$ так, чтобы оператор (1.1.5) имел вид

$$\mathbb{D} = x_\mu \partial_\mu - (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u , \qquad (1.1.20)$$

$,\lambda_2$ – произвольные постоянные.

условия инвариантности уравнения (1.1.19) относительно опе- 1.20) находим, что функция F должна удовлетворять диффе- ьному уравнению

$$(\lambda_1 u + \lambda_2)F_u + 2(\lambda_1 - 1)\omega F_\omega - (\lambda_1 - 2)F = 0 \qquad (1.1.21)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}, \quad F_\omega = \frac{\partial F}{\partial \omega}, \omega = u_\mu u^\mu .$$

Решения уравнеия (1.1.21) существенно отличаются только в двух случаях

а) $\lambda_1 = \frac{2}{1-k}$, $\lambda_2 = 0$, $(k \neq 1)$

$$F = u^k f^1(u_\mu u^\mu u^{-k-1}),$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$

$$F = e^u f^2(u_\mu u^\mu e^{-u}),$$

а доказана.

Следствие 1.1.1. В классе уравнений

$$\Box u = F(x,u), \qquad (1.1.22)$$

только два уравнения инвариантны относительно алгебры $A\tilde{P}(1,n)$:

линейное волновое уравнение

$$\Box u = \lambda u^{k}, \quad (\lambda, k\neq 1 - \mathrm{const}) \qquad (1.1.23)$$

и уравнения Лиувилля

$$\Box u = \lambda e^{-}, \quad (\lambda - \mathrm{const}) \qquad (1.1.24)$$

ТЕОРЕМА 1.1.4. Если уравнение (1.1.14) инвариантно относительно конформной группы $C(1,n)$ с операторами (1.1.3), (1.1.5), (1.1.7), то оно локально эквивалентно уравнению

$$\Box u = \lambda u^{\frac{n+2}{n-1}}, \quad (n\neq 1) \qquad (1.1.25)$$

и

$$\Box u = \lambda e^{u}, \quad (n=1) \qquad (1.1.26)$$

Доказательство. Конформная иварыатость уравнения (1 тановлена в [30]. Методом С.Ли несложно убедиться в то нение (1.1.26) инвариантно относительно алгебры $C(1,1)$ рами (1.1.3), (1.1.5), (1.1.7), причем $\eta(u) = -2$. Так как $AC(1,n)$ входит в качестве подалгебры алгебра $A\tilde{P}(1,n)$, то и 1.1.3 следует, что уравнение (1.1.14) имеет вид (1.1 15) или (1.1.16). Потребуем теперь инвариантности уравнений (1.1.15) и (1.1.16) относительно операторов (1.1.7). Рассмотрим сначала уравнение (1.1.15). Из условия инвариантности (1.1.15) относительно (1.1.7) получим, что функция f^1 должна удовлетворять условию

$$\frac{4}{1-k} + n - 1 - \frac{4}{1-k}\dot{f}^1 = 0 \qquad (1.1.27)$$

или

$$f^1 = [1 - \frac{(1-n)(1-k)}{n}]\, u_\mu u^\mu u^{-k+1} + A \qquad (1.1.28)$$

дставив (1.1.27) в (1.1.15), приходим к уравнению

$$= \frac{4-(1-n)(1-k)}{4u} u_\mu u^\mu + \lambda u^k \qquad (1.1.29)$$

(1.1.29) сделаем замену

$$u = \Phi(w),$$

–новая неизвестная функция, а Φ – функция, подлежащая опреде– После этого уравнение (1.1.29) принимает вид

$$w + \left[\dot{\Phi}^{\cdot} - \frac{4-(1-n)(1-k)}{4} \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi} \right] w_\mu w^\mu = \lambda \Phi^k \qquad (1.1.30)$$

Подберем функцию Φ так, чтобы

$$\dot{\Phi}^{\cdot} - \frac{4-(1-n)(1-k)}{4} \frac{\dot{\Phi}^2}{\Phi} = 0 \qquad (1.1.31)$$

я уравнения (1.1.31) принципиально отличаются в двух случаях:

$$\Phi = w^{\frac{4}{(1-n)(1-k)}} ; \qquad (1.1.32)$$

$$\Phi = e^{\frac{w}{k-1}} ; \qquad (1.1.33)$$

ляя (1.1.32) и (1.1.33) в (1.1.30) приходим к уравнениям 5), (1.1.26) соответственно. Аналогично доказывается, что кон- инвариантное уравнение (1.1.16) локально эквивалентно одному из уравнений (1.1.25) или (1.1.26). Теорема доказана.

В работе [166] установлено, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1.1.9) является алгебра, состоящая из операторов (1.1.3), (1.1.12) и операторов вида

$$\partial = \frac{\partial}{\partial u} ; \qquad J_{\mu u} = x_\mu P_u - u P_\mu ; \qquad (1.1.34)$$

$$- (x_\nu x^\nu - u^2) P_\mu , \quad K_u = 2uD - (x_\nu x^\nu - u^2) P_u$$

означить $u \equiv x_{n+1}$, то данные операторы перепишуться следу

$$\mathbb{P}_A = g_{AB}\partial_B \; ; \qquad \mathbb{J}_{AB} = x_A\mathbb{P}_B - x_B\mathbb{P}_A \; ; \qquad (1.1.35)$$

$$\mathbb{D} = x_A \mathbb{P}^A \qquad (1.1.36)$$

$$_A = 2x_A\mathbb{D} - x_B x_B \mathbb{P}_A ; \quad A,B = \overline{0,n+1} \qquad (1.1.37)$$

где g_{AB} – метрический тензор пространства $\mathbb{R}_{1+n+1}$ с $(+,-,\ldots,-)$.

Операторы алгебры (1.1.35)–(1.1.37) удовлетворяют таким ком ным соотношениям:

$$[\mathbb{P}_A,\mathbb{P}_B] = 0, \quad [\mathbb{P}_C,\mathbb{J}_{AB}] = g_{CA}\mathbb{P}_B - g_{CB}\mathbb{P}_A,$$

$$[\mathbb{J}_{AB},\mathbb{J}_{CD}] = g_{BC}\mathbb{J}_{AD} + g_{AD}\mathbb{J}_{BC} - g_{BD}\mathbb{J}_{AC} - g_{AC}\mathbb{J}_{BD},$$

$$[\mathbb{P}_A,\mathbb{D}] = 0, \quad [\mathbb{J}_{AB},\mathbb{D}] = 0, \qquad (1.1.37)$$

$$[\mathbb{K}_A,\mathbb{K}_B] = 0, \quad [\mathbb{K}_C,\mathbb{J}_{AB}] = g_{CA}\mathbb{K}_B - g_{CB}\mathbb{K}_A,$$

$$[\mathbb{K}_A,\mathbb{D}] = -\mathbb{K}_A, \quad [\mathbb{K}_A,\mathbb{P}_B] = 2(g_{AB}\mathbb{K} - \mathbb{J}_{AB})$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1.4. Алгебру операторов (1.1.34); (1.1.35); (1.1.34)–(1.1.36) назовем алгеброй Пуанкаре, р алгеброй Пуанкаре, конформной алгеброй и обозначим $A\mathbb{P}$ $A\tilde{\mathbb{P}}(1,n+1)$, $A\tilde{\tilde{\mathbb{P}}}(1,n+1)$ соответственно.

Из результатов [166] и теоремы 1.1.1 следует, что в классе уравнений первого порядка (1.1.1)существует единственное уравнение вида (1.1.9), инвариатное относительно алгебры $A\mathbb{P}(1,n+1)$, $A\tilde{\mathbb{P}}(1,n+1)$ или $AC(1,n+1)$. Поставим теперь задачу исследовать ин риантность уравнения второго порядка (1.1.2) относительно алг $(1,n+1)$, $A\tilde{\mathbb{P}}(1,n+1)$, $AC(1,n+1)$. Рассмотрим сначала случ

ТЕОРЕМА 1.1.5. Уравнение (1.1.2) при $n=1$ тогда да инвариантно относительно алгебры а) $A\mathbb{P}(1,2)$, когда оно эквивалентно одному из следующих уравнений:

$$W_1 \equiv 1 - u_\nu u^\nu = 0, \qquad (1.1.38)$$

$$- u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0, \qquad (1.1.39)$$

$$= \det (u_{\mu\nu}) \equiv \begin{vmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.1.40)$$

$$L\left(\frac{W_2}{W_1}, \frac{W_3}{W_1} \right) = 0\ ; \qquad (1.1.41)$$

б) $A\tilde{\mathbb{P}}(1,n+1)$, когда оно эквивалентно одному из уравнений (1.1.38)-(1.1.40) и ·

$$\lambda_1[(1-u_\mu u^\mu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu}] + \lambda_2[(1-u_\mu u^\nu)\det(u_{\mu\nu})]^{1/2}\ ;(1.1.42)$$

в) $A\mathbb{C}(1,2)$, когда оно имеет вид (1.1.38).

Доказательство. Используя дифференциальные инварианты алгебры получим, что уравнение (1.1.2) должно иметь вид

$$_2,\ \omega_3,\ \omega_4\ ) \equiv L(u,\ u_\mu u^\mu,\ u^\mu u^\nu u_{\mu\nu},\ \Box u,\ \det(u_{\mu\nu})) = 0 \qquad (1.1.43)$$

ем теперь инвариантности уравнения (1.1.43) относительно опе в $\mathbb{P}_2$, J_{02}, J_{12}, дополняющих алгебру $A\mathbb{P}(1,1)$ до алгебры .2). Тогда будем иметь

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \omega_0}\right|_{L=0} = 0,$$

$$\left.\left[(\omega_1 - 1)\frac{\partial L}{\partial \omega_2} + \frac{\partial L}{\partial \omega_3}\right]\right|_{L=0} = 0, \qquad (1.1.44)$$

$$\left.\omega_1 - 1)\frac{\partial L}{\partial \omega_1} + \omega_2\frac{\partial L}{\partial \omega_2} + \omega_4\frac{\partial L}{\partial \omega_4}\ \right]\right|_{L=0} = 0.$$

.44) получаем результаты (1.1.38)-(1.1.41). Уравнени 8)-(1.1.40) инвариантны относительно оператора $\mathbb{D}$, а требо ние инвариантности уравнения (1.1.41) относительно D приводит к условию

$$\left[Z_1 \frac{\partial L}{\partial Z_1} + 2Z_2 \frac{\partial L}{\partial Z_2} \right] \Bigg|_{L=0} = 0, \qquad (1.1.45)$$

где $Z_1 = \frac{W_2}{W_1}$, $Z_2 = \frac{W_3}{W_1}$. Решив уравнение (1.1.45), при

(1.1.42).

Последнее утверждение теоремы доказывается непосре проверкой. Применяя алгоритм С.Ли, убеждаемся в том, что среди уравнений(1.1.38)-(1.1.42) относительно алгебры $AC(1,2)$ инвариантно только первое.

Таким образом, при $n=1$ в классе уравнений (1.1.2) относительно алгебры $A\tilde{P}(1.$ инвариантны только известные уравнения эйкон (1.1.38), Борна-Инфельда (1.1.38), Монжа-Ампера (1.1.40) и их ле йная комбинация (1.1.42). В классе уравнений 2-го пор 1 нет уравнений. инвариантных относительно алгебры $AC($ зисные элементы которой задаются формулами (1.1.34)-(1.1.

Замечание 1.1.1. Все результаты теоремы 1.1.5 обобщ случай произвольного n, однако условия теоремы будут тол ходимыми, но не достаточными. При этом уравнение (1.1.40) обобщитс следующим образом

$$\det (u_{\mu\nu}) \equiv \begin{vmatrix} u_{00} & u_{01} & & u_{0n} \\ u_{10} & u_{11} & & u_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n0} & u_{n1} & & u_{nn} \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.1.46)$$

которое мы назовем многомерным аналогом уравнения Монжа-

нение (1.1.42) в n-мерном случае будет иметь вид

$$\lambda_1[(1-u_\mu u^\mu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu}] + \lambda_2[(1-u_\mu u^\mu) \det(u_{\mu\nu})]^{3/(n+5)} \qquad (1.1$$

Замечание 1.1.2. Максимальной алгеброй инвариантности уравне-
ния (1.1.11), как установлено в [124], является конформная алгебра
n), с операторами вида (1.1.34)- (1.1.36), где метрический тен-
имеет сигнатуру (+,+,−,...,−), а роль второго времени иг-
ия u. Если по аналогии с определением 1.1.4 ввести поня-
эбр $\mathbb{AP}(2,n)$, $\mathbb{A}\tilde{\mathbb{P}}(2,n)$, то можно получить результаты, ан
теореме 1.1.5. При этом в формулах (1.1.38)-(1.1.42) сигнату-
−,...,−,−) изменится на (+,+,−,...,−), а выражение $1-u_\mu u^\mu$
$-1-u_\mu u^\mu$.

§1.2. ПОЛИВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ.

Хорошо известно (см.[12]), что при описании физических про

сов широко применяется уравнение

$$\Delta^m u = 0, \qquad (1.2.1)$$

где $u=u(\vec{x})$, $\vec{x}\in R_n$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, $\Delta^m = \Delta^{m-1}\Delta$,

ло. В то же время "гиперболический" аналог (1.2.1), а имен

ние

$$\Box^m u = 0, \qquad (1.2.2)$$

где $u=u(x)$, $x=(x_0, \vec{x})\in R_{1+n}$. $\Box = \frac{\partial}{\partial x_0{}^2} - \Delta$, мало изучено.

В настоящем параграфе исследована конформная инвариантность уравнения (1.2.2), его нелинейного обобщения

$$\Box^m u = F(x,u), \qquad (1.2.3)$$

а также псевдодифференциального уравнения

$$\Box^r u = F(x,u), \qquad (1.2.4)$$

где r– произвольное число, оператор $\Box^r$, когда r– не

определяется с помощью интегрального преобразования Фурь

$$\Box^r = \frac{-1}{(2\pi)^{n+1}} \int\int (p_\nu p^\nu)^r e^{i(x-y)p} u(y)\, dydp \qquad (1.2.5)$$

$$dy=dy_0 dy_1 \ldots dy_n, \quad dp=dp_0 dp_1 \ldots dp_n.$$

ТЕОРЕМА 1.2.1. Линейное поливолновое уравнение (1.2.2) инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1,n)$, базисные элементы которой задаются формулами (1.1.3), (1.1.5), (1.1.7) при $\eta = 1/2(n-2m+1)u$.

Доказательство. Поскольку уравнение (1.2.2) линейное, т

пользуемся для него условием инвариантности в оператор

(см.[124]):

$$[\Box^m, X] = \lambda(x,\theta)\Box^m, \qquad (1.2.6)$$

где X– любой из операторов алгебры $AC(1,n)$, λ– некоторая функция.

При $m=1$ соотношения (1.2.6) имеют вид

$$[\square,P_\mu] = [\square,J_{\mu\nu}] = 0 \qquad (1.2.7)$$

$$[\square,D^{(1)}] = 2\square, \qquad [\square,K_\mu^{(1)}] = 4x_\mu\square.$$

воспользуемся методом математической индукции. Предполож

ри $m=k-1$ справедливы равенства

$$[\square^{k-1},P_\mu] = [\square^{k-1},J_{\mu\nu}] = 0 \qquad (1.2.8)$$

$$[\square^{k-1},D^{(k-1)}] = 2(k-1)\square^{k-1},$$

$$[\square^{k-1},K_\mu^{(k-1)}] = 4(k-1)x_\mu\square^{k-1},$$

где $D^{(l)}= x_\mu P^\mu + \frac{1}{2}(n+1-2l)$, $K_\mu^{(l)}= 2x_\mu D^{(l)} - x_\nu x^\nu P_\mu$.

Докажем теперь, что соотношения (1.2.8) справедливы и при $m=k$.

ем

$$[\square^k,P_\mu] = [\square^k,J_{\mu\nu}] = 0,$$

$${}^{(k)}] = [\square\,\square^{k-1},D^{(k-1)}-1] = \square\,[\square^{k-1},D^{(k-1)}]+[\square,D^{(k-1)}]\,\square^{k-1} =$$

$$-1)\square^k + 2\square^k = 2k\square^k,$$

$$,K_\mu^{(k)}] = [\square\,\square^{k-1},K_\mu^{(k-1)} - 2x_\mu] = \square([\square^{k-1},K_\mu^{(k-1)}] - 2[\square^{k-1},x_\mu]) +$$

$$+([\square,K_\mu^{(k-1)}] - 2[\square,x_\mu])\square^{k-1} = \square(4(k-1)x_\mu\square^{k-1} + 4(k-1)P_\mu\square^{k-1}) +$$

$$+(4x_\mu\square + 4(k-2)P_\mu + 4P_\mu)\square^{k-1} = 4kx_\mu\square^k\ .$$

Здесь использовано тождество

$$[\square^k,x_\mu] = 2kP_\mu\square^{k-1}, \qquad (1.2.9)$$

дливости которого несложно убедиться.

доказана.

ыясним теперь при каких функциях $F(x,u)$ уравнение (1

няет инвариантность относительно конформной алгебры $AC(1,$

При $m=1$ ответ на этот вопрос хорошо известен [30] (см. также §1.1):

$$F(x,u) = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}, \quad n \neq 1,$$

$$F(x,u) = \lambda e^{u}, \quad n = 1.$$

При $m \geqslant 1$ справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.2.2. Уравнение (1.2.3) инвариантно относите формной алгебры $AC(1,n)$ тогда и только тогда, когда

а) $F(x,u) = \lambda_1 u^{\frac{n+1+2m}{n+1-2m}}$, $\eta(u) = \frac{n+1-2m}{2} u$, $n+1-2m$

(1.2.1

б) $F(x,u) = \lambda_2 e^{u}$, $\eta(u) = -2m$, $n+1-2m = 0$; (1.2.11)

где λ_1, λ_2 – произвольные постоянные.

Доказательство. При преобразованиях, порождаемых операторами P_μ: $x_\mu \longrightarrow x'_\mu = x_\mu + a_\mu$ (трансляции), $u(x) \longrightarrow u'(x') == u(x)$, урав ние (1.2.3) принимает вид $\Box^m u = F(x+a,u)$, откуда в силу треб инвариантности получаем $F(x+a,u) = F(x,u)$. Решением этого нального соотношения, очевидно, будет $F(x,u) = F(u)$.

Далее используем условия инвариантности уравнения (сительно операторов D и K_μ, задаваемых соответственн (1.1.5) и (1.1.7). Тогда получим, что

$$\eta(u) = C_1 u + C_2,$$

$$(C_1 - 2m)F - (C_1 u + C_2)\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \qquad (1.2.12)$$

где $C_1 = \frac{1}{2}(n+1-2m)$, $C_2 = -2m$. Из условия (1.1.12) следуют формулы (1.2.10), (1.2.11). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.2.3. Псевдодифференциальное нелинейное урав

2.4) инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1,n)$ с базисными операторами (1.1.3), (1.1.5), (1.1.7) при $\eta(u) = \frac{1}{2}(n+1-2r)u$ тогда и только тогда, когда

$$F(x,u) = \lambda u^{\frac{n+1+2r}{n+1-2r}}, \quad n+1-2r \neq 0; \qquad (1.2.13)$$

Доказательство. Аналогично, как и в предыдущей теореме доказы-я, что правая часть уравнения (1.2.4) не зависит от переменных

пользуемся теперь формулами (П.3.5)–(П.3.6) из [124]. Резу-м применения этих формул будут следующие соотношения:

$$] = 0, \quad [\Box^r, J_{\mu\nu}] = [\Box, J_{\mu\nu}]\, r\Box^{r-1} + \ldots = 0, \qquad (1.2.14)$$

$$= [\Box, D]\, r\Box^{r-1} + \frac{1}{2!}[\Box,[\Box,D]]r(r-1)\Box^{r-2} + \ldots = 2r\Box^r,$$

$$[\Box^r, K_\mu] = [\Box, K_\mu]\, r\Box^{r-1} + \frac{1}{2!}[\Box,[\Box,K_\mu]]r(r-1)\Box^{r-2} + \ldots = 4rx_\mu\Box^r,$$

При выводе формул (1.2.14) использованы также соотношения (1.2.8), (1.2.9). Воспользовавшись критерием инвариантности уравнения (1.2.4) относительно операторов (1.1.3), (1.1.5), (1.1.7) и формулами .14) приходим к выводу, что функция F должна удовлетворять

нию

$$1+2r)F - (n+1-2r)u\frac{\partial F}{\partial u} = 0. \qquad (1.2.15)$$

ю, что общим решением уравнения (1.2.15) является функци 3).

Из результатов данного параграфа следует, что поливолновое равнение удовлетворяет принципам относительности Пуанкаре-Эйнштейна, а значит может быть применено, как и уравнение (1.2.1), для описания реальных физических процессов.

1.3. УРАВНЕНИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБР ГАЛИЛЕ

Среди уравнений, инвариантных относительно групп наиболее известными являются уравнения теплопроводности

$$u_0 + \frac{1}{2m}\Delta u = 0 \qquad (1.3.1)$$

и Шредингера

$$i\varphi_0 - \frac{1}{2m}\Delta\varphi = 0 \qquad (1.3.2)$$

где $u=u(x_0,\vec{x})$ – действительная, а $\varphi = \varphi(x_0,\vec{x})$ – комплексная функции действительных переменных $(x_0,\vec{x}) \in \mathbb{R}_{1+n}$, m – произвольная постоянная.

Хорошо известна симметрия уравнений (1.3.1), (1.3.2) в кл преобразований С.Ли. В случае двух независимых переменных $x=($ имметрию уравнения (1.3.1) исследовал еще С.Ли [180]. Тако льтат Ли легко обобщается и на случай произвольного колич менных.

ТЕОРЕМА 1.3.1. Максимальной в смысле С.Ли алгеброй и ности уравнения (1.3.1) является алгебра операторов

$$\partial_0, \ \partial_a, \quad \mathbb{I} = u\partial_u \qquad (1.3.3)$$

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a; \quad \mathbb{G}_a = x_0\partial_a + mx_a u\partial_u$$

$$\mathbb{D} = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a \qquad (1.3.4)$$

$$\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_a\partial_a + \frac{n}{2}u\partial_u) + m\frac{\vec{x}^2}{2}u\partial_u, \qquad (1.3.5)$$

где $a,b = \overline{1,n}$.

ТЕОРЕМА 1.3.2. Максимальной алгеброй инвариантности у ен Шредингера (1.3.2) является алгебра

$$\partial_0, \ \partial_a, \quad \mathbb{I} = \varphi\partial_\varphi \qquad (1.3.6)$$

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a; \quad \mathbb{G}_a = x_0\partial_a + imx_a\varphi\partial_\varphi,$$

$$\mathbb{D} = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a \qquad (1.3.7)$$

$$\Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_a\partial_a + \frac{in}{2}\varphi\partial_\varphi) + im\frac{\vec{x}^2}{2}\varphi\partial_\varphi, \qquad (1.3.8)$$

ебра инвариантности трехмерного уравнения (1.3.2) найдена

дальнейшем алгебру операторов (1.3.3) или (1.3.6) будем на алгеброй Галилея и обозначать $AG(1,n)$. Алгебру $AG(1,n)$ ненную оператором D , обозначим $A\tilde{G}(1,n)$, а алгебру (1.3.3)-.3.5) или (1.3.6)-(1.3.8) назовем расширенной алгеброй Галилея и обозначим $A\overset{\approx}{G}(1,n)$.

К сожалению, многие реальные процессы диффузии, теплопроводности и другие не описываются удовлетворительно линейным уравнием (1.3.1). Известное нелинейное обобщение уравнения (1.3.1)

$$u_0 + \vec{\nabla}(f(u)\,\vec{\nabla}u) = 0 \qquad (1.3.9)$$

существенный недостаток: оно инвариантно относительно группы олько при $f(u)=\text{const}$, т.е. фактически не существует не-го уравнения (1.3.9), удовлетворяющего принципу относи Галилея. В §2.4 будет показано, что уравнение (1.3.9) галилеинвариантно только при некоторых дополнительных условиях на ия этого уравнения.

В настоящем параграфе описаны галилеево-инвариантные нелинейные обобщения уравнений (3.3.1) и (3.3.2).

1. Рассмотрим уравнения

$$u_0 + F_1(x_0,\vec{x},u,\underset{1}{u}) = 0, \qquad (1.3.10)$$

$$u_0 + F_2(x_0,\vec{x},u,\underset{1}{u},\underset{2}{u}) = 0, \qquad (1.3.11)$$

$(u_1,\ldots,u_n)$, $\underset{2}{u} = (u_{11},u_{12},\ldots,u_{nn})$ – совокупность первых производных функции u по пространственным переменным x.

ЕОРЕМА 1.3.3. Если уравнение (1.3.10) инвариантно относител ебры Галилея $AG(1,n)$ с операторами

$$\partial_a, \quad J_{ab}, \quad G_a = x_0\partial_a + x_a R(x,u)\partial_u, \qquad (1.3.12)$$

то оно локально эквивалентно уравнению Гамильтона-Якоби

$$u_0 + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla}u)^2 = 0 \qquad (1.3.13)$$

Доказательство. Координаты ξ^0, ξ^a, η инфинитезималь ратора $X = \xi^0\partial_0 + \xi^a\partial_a + \eta\partial_u$ алгебры (1.3.12) имеют

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^a = g_a x_0 + c_{ab}x_b + d_a,$$

$$\eta = \mathbb{R}(x,u)g_c x_a + T(x,u); \quad a,b = \overline{1,n}, \qquad (1.3.14)$$

где d_0, d_a, $c_{ab} = -c_{ba}$, g_a – групповые параметры.

Очевидно, что из инвариантности уравнения (1.3.10) относительно сдвигов и вращений следует

$$F_1(x_0,\vec{x},u,\underset{1}{u}) = \Phi(w_1,w_2), \qquad (1.3.15)$$

где $w_1 = u$, $w_2 = (\vec{\nabla}u)^2$. Из условия инвариантности относительн торов G_a находим

$$\eta_0 = 0, \quad 2\eta_a\Phi_2 = g_a, \qquad (1.3.16)$$

$$2\eta_u w_2\Phi_2 + \eta\Phi_1 - \eta_u\Phi = 0,$$

где $\Phi_1 = \dfrac{\partial\Phi}{\partial w_1}$, $\Phi_2 = \dfrac{\partial\Phi}{\partial w_1}$. Решением (1.3.16) являются функ

$$\Phi = A'(u)\,\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}u)^2 + \frac{\lambda_1}{A'(u)}, \qquad (1.3.17)$$

$$\eta = \frac{1}{A'(u)}(\,m g_a x_a + \lambda_2),$$

где λ_1, λ_2, m – произвольные постоянные, $A(u)$ – произвольная гладкая функция.

Таким образом, уравнение (1.3.10), инвариантное относите алгебры Галилея (1.3.12), имеет вид

$$u_0 + A'(u)\,\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}u)^2 + \frac{\lambda_1}{A'(u)} = 0, \qquad (1.3.18)$$

Уравнение (1.3.18), как нетрудно убедиться, $A(u) + \lambda_1 x_0 \longrightarrow u$ приводится к уравнению Гамильтона-Якоби Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 1.3.4. Уравнение (1.3.11) инвариантно относительно $.n)$, $A\tilde{G}(1,n)$, $A\overset{\approx}{G}(1,n)$ тогда и только тогда, когда оно ответственно вид

$$\frac{1}{2m}(\vec{\nabla u})^2 + \Phi^1(\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \ldots, \langle n\rangle) = 0, \qquad (1.3.19)$$

$$\frac{1}{2m}(\vec{\nabla u})^2 + \Delta u\Phi^2(w_2, w_3, \ldots, w_n) = 0, \qquad (1.3.20)$$

$$u_0 + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla u})^2 + \sqrt{(\Delta u)^2 + \frac{2n}{1-n}\langle 2\rangle}\ \Phi^3(J_3, J_4, \ldots, J_n) = 0,$$

$$(1.3.21)$$

где Φ^1, Φ^2, Φ^3 – произвольные дифференцируемые функции своих аргу- ентов; $w_k = \frac{\langle k\rangle}{(\langle 1\rangle)^k}$, J_k – первые интегралы системы обыкновенных

$$\frac{}{-1)w_1} = \frac{d\,w_2}{3nw_3-(n-1)w_2} = \ldots = \frac{d\,w_n}{n^2w_n-(n-1)w_{n-1}}$$

сумма всевозможных миноров k-го порядка главной диаго

$A = ||u_{ab}||$, т.е.

$$= u_{11} + u_{22} + \ldots + u_{nn},$$

$$\langle 2\rangle = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & u_{13} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} u_{n-1\,n-1} & u_{n-1\,n} \\ u_{n\,n-1} & u_{n\,n} \end{vmatrix}$$

....

$$n\ = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{3n} \end{vmatrix} = \det A.$$

азательство. Необходимость. Из условия инвариантности у 1.3.11) относительно алгебры $A\overset{\approx}{G}(1,n)$ следует , что функция $\vec{x}$, u, $\underset{1}{u}$, $\underset{2}{u}$) должна удовлетворять системе дифференциальных авнений

$$d_0 \frac{\partial F_2}{\partial x_0} = d_a \frac{\partial F_2}{\partial x_a} = d_{n+1} \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

$$g_a(m \frac{\partial F_a}{\partial u_a} - u_a) = 0, \qquad (1.3.$$

$$c_{ab}u_b \frac{\partial F_2}{\partial u_a} + (c_{bc}u_{ac} + c_{ac}u_{bc}) \frac{\partial F_2}{\partial u_{ab}} = 0, \qquad (1.3.24)$$

$$k\,(2u_{ab} \frac{\partial F_2}{\partial u_{ab}} + u_a \frac{\partial F_2}{\partial u_a} - 2F_2) = 0, \qquad (1.3.25)$$

$$a\delta_{ab} \frac{\partial F_2}{\partial u_{ab}} = 0, \qquad (1.3.26)$$

где d_0, d_1, d_{n+1} – параметры группы сдвигов, соответству
торам ∂_0, ∂_a, ∂_u; g_a – параметры преобразований Галиле
ствующие операторам G_a; $c_{ab} = -c_{ba}$ – параметры группы вра
и a – параметры масштабных и проективных преобразований,
символ Кронекера.

Из уравнений (1.3.22) получаем, что функция F_2 не зависит от переменных x_0, $\vec{x}$, u, а из (1.3.23) следует

$$F_2 = \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} u)^2 + \Phi(\underset{2}{u}) . \qquad (1.3.27)$$

Подставив (1.3.27) в (1.3.24)–(1.3.26), будем иметь

$$(c_{bc}u_{ac} + c_{ac}u_{bc}) \frac{\partial \Phi}{\partial u_{ab}} = 0 \qquad (1.3.28)$$

$$k\,(u_{ab} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{ab}} - \Phi) = 0, \qquad (1.3.$$

$$a\delta_{ab} \frac{\partial \Phi}{\partial u_{ab}} = 0, \qquad ($$

Решая последовательно уравнения (1.3.28)–(1.3.30), приходим
лам (1.3.19)–(1.3.21). Необходимость теоремы 1.3.4 доказ
точность устанавливается непосредственной проверкой с помощью алго

АНИЕ 1.3.1. Уравнения (1.3.19)–(1.3.21) являются нелиней- общением уравнения (1.3.1). Это очевидно, если от урав с помощью локальной замены $u \longrightarrow \exp u$ перейти к эквива- му уравнению

$$u_0 + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla} u)^2 + \frac{1}{2m}\Delta u = 0.$$

2. Рассмотрим нелинейное обобщение уравнения Шредингера (1.3.2) для частицы с переменной массой $m=M(x_0)$ вида

$$i\psi_0 - \frac{1}{2M(x_0)}\Delta\psi = F(x_0,\ \psi,\ \psi^*) \quad (1.3.31)$$

тно (см.[*124*]), что в случае $M=\mathrm{const}$ уравнение нвариантно относительно алгебры Галилея $AG(1,n)$, $A\tilde{G}(1,n)$, с операторами (1.3.6)–(1.3.8), если соответственно

$$F(x_0,\ \psi,\ \psi^*) = f(|\psi|)\psi, \quad (1.3.32)$$

$$F(x_0,\ \psi,\ \psi^*) = \lambda|\psi|^k\psi, \quad (1.3.33)$$

$$F(x_0,\ \psi,\ \psi^*) = \lambda|\psi|^{\frac{4}{n}}\psi, \quad (1.3.34)$$

где f – произвольная гладкая функция, $\lambda=\mathrm{const}$.

В случае переменной массы справедливо следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 1.3.5. Уравнение (1.3.31) инвариантно относительно ал- Галилея $AG(1,n)$:

$$\partial_{\mu}, \qquad J_{ab}, \qquad I = (\psi\partial_{\psi} - \psi^*\partial_{\psi^*})\,M(x_0),$$

$$G_a = x_0\partial_a + x_a I \quad (1.3.35)$$

тогда, когда оно имеет вид

$$\frac{1}{2M(x_0)}\Delta\psi = f(x_0,\ |\psi|)\psi - i\frac{M'}{M}\psi\ln\psi. \quad (1.3.36)$$

Доказательство. Применим метод С.Ли. Для этого уравнению (1.3.31) сопоставим систему двух уравнений

$$\begin{cases} i\psi_0 + \frac{1}{2M}\Delta\psi = F^1(x_0,\ \psi,\ \psi^*), \\ -i\psi_0^* + \frac{1}{2M}\Delta\psi^* = F^2(x_0,\ \psi,\ \psi^*), \end{cases} \qquad (1.3.37)$$

Инфинитезимальный оператор группы $G(n)$ имеет вид

$$X = \xi^0\partial_0 + \xi^a\partial_a + \eta\partial_\psi + \eta^*\partial_{\psi^*}\ , \qquad (1.3.38)$$

где

$$\begin{cases} \xi^0 = 0, \quad \xi^a = g_a x_0 + c_{ab}x_b + d_a, \\ \eta = A(x)\ \psi \end{cases}$$

Из условия инвариантности уравнений (1.3.37) относительно оператора (1.3.38), (1.3.39) находим, что функции F^1, F^2, A должны удовлетворять системе ДУ

$$A_a = iMg_a,$$

$$\left[iA_0 - \frac{\Delta A}{2M}\right]\psi + A\left(\psi\frac{\partial F^1}{\partial\psi} + \psi^*\frac{\partial F^1}{\partial\psi^*} - F^1\right) = 0 \qquad (1.3.40)$$

$$\left[-iA_0 - \frac{\Delta A}{2M}\right]\psi + A\left(\psi\frac{\partial F^2}{\partial\psi} + \psi^*\frac{\partial F^2}{\partial\psi^*} - F^2\right) = 0$$

Решая систему уравнений (1.3.40) приходим к формулам (1.3.35), (1.3.36).

3. В [146] показано, что максимальная алгебра инвариантности уравнения Гамильтона-Якоби (1.3.13) состоит из операторов

$$\partial_0\ , \quad \partial_a\ , \quad \partial_u\ , \quad J_{ab}, \qquad (1.3.41)$$

$$G_a^{(1)} = x_0\partial_a + mx_a\partial_u, \qquad (1.3.42)$$

$$G^{(2)} = u\partial \ + mx\,\partial \ ,$$

$$D^{(1)} = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a, \qquad (1.3.43)$$

$$D^{(2)} = 2u\partial_u + x_a\partial_a,$$

$$\Pi^{(1)} = x_0(x_0\partial_0 + x_a\partial_a) + m\,\frac{\vec{x}^{2}}{2}\,\partial_u \qquad (1.3.44)$$

$$\Pi^{(2)} = u(u\partial_u + x_a\partial_a) + m\,\frac{\vec{x}^{2}}{2}\,\partial_0$$

$$2x_a(x_0\partial_0 + x_b\partial_b + u\partial_u) - \left(\frac{2}{m}x_0u - \vec{x}^{2}\right)\partial_a \qquad (1.3.45)$$

ры операторов (1.3.41)–(1.3.42), (1.3.41)–(1.3.43), (1.3.41)–.3.44) соответственно обозначим $AG(2,n)$, $A\tilde{G}(2,n)$, $A\overset{\approx}{G}(2,n)$. Данные алгебры являются аналогом алгебр Пуанкаре $AP(1,n+1)$, $A\tilde{P}(1,n+1)$, $AC(1,n+1)$, рассмотреных в §1.1.

Как следует из теоремы 1.3.3, в классе ДУ первого порядка только уравнение Гамильтона–Якоби (1.3.13) инвариантно относительно алгебры $AG(2,n)$. Для ДУ второго порядка нами получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1.3.6. Одномерное ДУ второго порядка

$${}_0,\ x_1,\ u,\ u_0,\ u_1,\ u_{00},\ u_{01},\ u_{11}\ ) = 0, \qquad (1.3.46)$$

$u=u(x_0,\ x_1)$, инвариантно относительно

алгебры Галилея $AG(2,1)$ тогда и только тогда, когда оно имеет ид

$$W_1 \equiv u_0 + \frac{u_1^2}{2m} = 0, \qquad (1.3.47)$$

$$W_2 \equiv \begin{vmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{vmatrix} = 0, \qquad (1.3.48)$$

$$W_3 = m^2u_{00} - 2m\left(u_0 + \frac{u_1^2}{2m}\right)u_{11} + 2mu_1u_{01} + u_1^2u_{11} = 0 \qquad (1.3.49)$$

$$F(w_1,\ w_2,\ w_3\ ) = 0\ , \qquad (1.3.50)$$

где F – произвольная функция своих аргументов;

2) алгебры Галилея $A\tilde{G}(2,1)$ тогда и только тогда, когда оно имеет вид (1.3.47), (1.3.48), (1.3.49) и

$$\lambda_1\sqrt{w_1 w_2} + \lambda_2 w_3 = 0 \qquad (1.3.51)$$

3) алгебры Галилея $A\overset{\approx}{G}(2,1)$ тогда и только тогда, когда оно совпадает с уравнением Гамильтона–Якоби (1.3.47).

Доказательство. Докажем только первое утверждение данной теоремы. Доказательство второго и третьего утверждения аналогично.

Необходимость. Из условия инвариантности уравнения (1.3.46) относительно алгебры $AG(2,1)$ находим, что функция F должна удовлетворять следующей системе ДУ:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

$$u_1\frac{\partial F}{\partial u_0} - m\frac{\partial F}{\partial u_1} + 2u_{01}\frac{\partial F}{\partial u_{00}} + u_{11}\frac{\partial F}{\partial u_{01}} = 0,$$

$$(4u_0u_{01} - 2u_1u_{00})\frac{\partial F}{\partial u_{00}} + (2u_0u_{11} + mu_{00})\frac{\partial F}{\partial u_{01}} + \qquad (1.3.52)$$

$$+ 2(u_1u_{11} + mu_{01})\frac{\partial F}{\partial u_{11}} = 0.$$

Общее решение (1.3.52), как нетрудно убедиться, имеет вид (1.3.47)–(1.3.50).

Доказательство достаточности проводиться непосредственной проверкой по методу Ли.

Из теоремы 1.3.6 следует, что в одномерном случае (x_0, x_1) относительно алгебры Галилея $AG(2,1)$ кроме известных уравнений мильтона-Якоби (1.3.47) и Монжа-Ампера (1.3.48) инвариантно еще дно, ранее неизвестное, уравнение вида (1.3.49). Изучим это уравнение более подробно.

Многомерным аналогом уравнения (1.3.49) является уравнение

$$m^2 u_{00} - 2m \left[u_0 + \frac{(\vec{\nabla} u)^2}{2m}\right] \Delta u + 2m u_a u_{0a} + u_a u_b u_{ab} = 0, \tag{1.3.53}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x}) \in \mathbb{R}_{1+n}$, m – const, $a,b = \overline{1,2}$.

Методом Ли устанавливается следующее утверждение.

ЕОРЕМА 1.3.7. Максимальной алгеброй инвариантности уравнения 3) является алгебра Галилея $A\tilde{G}(2,n)$ с операторами (1.3.41)–43).

В [146] отмечено, что в случае $n=3$ алгебра операторов .3.41)–(1.3.45) локально изоморфна конформной алгебре $AC(1.4)$. Этот факт справедлив и для произвольного количества переменных $\vec{x} \in \mathbb{R}_n$.

ТЕОРЕМА 1.3.8. Алгебра (1.3.41)–(1.3.45) локально изоморфна конформной алгебре $AC(1,n+1)$.

Доказательство. Если ввести новые переменные

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_0 + \frac{u}{m}\right), \quad \vec{y} = \vec{x}_a, \quad y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x_0 - \frac{u}{m}\right), \tag{1.3.54}$$

коварнантные обозначения

$$y^A = g^{AB} y_B \ ; \quad A,B = 0, \overline{n+1}$$

рическим тензором $g^{00} = -g^{11} = \ldots = -g^{n+1n+1} = 1$,

$= 0$, $A \neq B$, то будем иметь

$$\partial_a = \mathbb{P}_a \ ; \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_0 + m\partial_u) = \mathbb{P}_0 \ ; \qquad \partial_0 - m\partial_u = \mathbb{P}_{n+1} \ ;$$

$$J_{ab} = \mathbb{J}_{ab} \ ; \qquad \frac{1}{2} (\mathbb{D}^{(2)} - \mathbb{D}^{(1)}) = \mathbb{J}_{0n+1} \ ;$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{G}_a^{(1)}+\frac{1}{m}\mathbb{G}_a^{(2)}\right)=\mathbb{J}_{a0} \quad ;$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{G}_a^{(1)}-\frac{1}{m}\mathbb{G}_a^{(2)}\right)=\mathbb{J}_{n+1\ a} \quad ; \qquad (1.3.55)$$

$$\frac{1}{2}(\mathbb{D}^{(1)}+\mathbb{D}^{(2)})=\mathbb{D} \quad ; \qquad -\hat{\mathbb{K}}_a=\mathbb{K}_{n+1} \quad ;$$

$$\sqrt{2}\left(\Pi^{(1)}+\frac{1}{m}\Pi^{(2)}\right)=\mathbb{K}_0 \ ; \ -\sqrt{2}\left(\Pi^{(1)}-\frac{1}{m}\Pi^{(2)}\right)=\mathbb{K}_{n+1},$$

где $a,b=\overline{1,n}$, а операторы

$$\mathbb{P}_A=\frac{\partial}{\partial y_A} \ ; \quad \mathbb{J}_{AB}=y^A\mathbb{P}_B-y^B\mathbb{P}_A; \qquad (1.3.56)$$

$$\mathbb{D}=x_A\mathbb{P}_A \ ; \quad \mathbb{K}_A=2y^A\mathbb{D}-y_By^B\mathbb{P}_A \ , \quad A,B=\overline{0,n+1}$$

удовлетворяет коммутационным соотношениям алгебры АС n+ (1.1.37). Теорема доказана.

Подстановка (1.3.54), где $y_{n+1}=V(y_0,\vec{y})$ переводит уравнение Гамильтона-Якоби (1.3.13) в уравнение эйконала (1.1.9) для функции $V(y_0,\vec{y})$ и наоборот:

$$\frac{4m}{(m+u_0)^2}\left(u_0+\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}u)^2\right)=0 \longrightarrow 1-v_\mu v^\mu=0, \qquad (1.3.57)$$

$$\frac{m}{(1+v_0)^2}(1-v_\mu v^\mu)=0 \longrightarrow u_0+\frac{1}{2m}(\vec{\nabla}u)^2=0 \qquad (1.3.58)$$

Однако, отмеченная эквивалентность , как видно из (.3. (1.3.58), нарушается тогда , когда $m+u_0=0$ или $1+v_0=$

Таким образом, если от множества решений Гамильто к (1.3.13) отбросить решения

$$u=-mx_0+\varphi(\vec{x}),$$

где $\varphi(\vec{x})$– произвольное решение уравнения $(\vec{\nabla}\varphi)^2=2m^2$, а от множества решений уравнения эйконала $1-v_\mu v^\mu=0$ – решения

$$V = -y_0 + \mathrm{const},$$

то оставшиеся множества решений этих уравнений будут эквивалентны и связь между ими дается формулами (1.3.54) при $y_{n+1} \equiv V(y_0, \vec{y})$.

Уравнение Монжа-Ампера (1.1.46) инвариантно относительно замены (1.3.54), а вот уравнение (1.3.53) при тех же предположениях, что и для уравнения Гамильтона-Якоби, переходит в уравнение Борна-Инфельда

$$(1 - v_\mu v^\mu)\Box v + v^\mu v^\nu v_{\mu\nu} = 0 \qquad (1.3.59)$$

и наоборот. В силу вышесказанного, уравнение (1.3.53) можно рассматривать как нерелятивистский ("параболический") аналог уравнения Бор[illegible]льда.

§1.4. АНЗАЦЫ И РЕДУКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$S(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \underset{2}{u},\ldots) = 0, \qquad (1.4.1)$$

где $u=u(x) \in R_1$, $x=(x_0, \vec{x}) \in R_{1+n}$, $\underset{k}{u}$ – совокупность частных производных k-го порядка функции u по переменным x ; $k=$ $= 1,2,3,\ldots$Решения уравнения (1.4.1) образуют некоторое многообразие

$$\Phi(x,\ u) = 0, \qquad (1.4.2)$$

заданное в пространстве $(x,\ u) \in Z = R_{1+n} \times R_1$.

Предположим известной и фиксированной некоторую группу Ли преобразований пространства Z

$$x'_\mu = x_\mu + a\xi^\mu(x,u) + O(a^2), \qquad \mu = \overline{0,n}\ ;$$
$$u' = u + a\eta(x,u) + O(a^2), \qquad (1.4.3)$$

допускаемую уравнением (1.4.1), причем

$$X = \xi^\mu(x,u)\,\partial_\mu + \eta(x,u)\,\partial_u \qquad (1.4.4)$$

инфинитезимальный оператор группы G.

Поставим задачу о нахождении решений уравнения (1.4.1), инвариантных относительно группы G. Критерием инвариантности многообразия (1.4.2) относительно группы G является условие

$$X\Phi\,\big|_{\Phi=0} = 0 \qquad (1.4.5)$$

Условие (1.4.5) – это линейное ДУ первого порядка относительно функции $\Phi(x,u)$. Общее решение уравнения (1.4.5) имеет вид

$$\Phi(\omega_1,\ldots,\ \omega_{n+1}) = 0, \qquad (1.4.6)$$

где $\omega_k = \omega_k(x,u)$ – фундаментальная система первых интегралов системы обыкновенных ДУ

$$\frac{dx_0}{\xi^0(x,u)} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi^n(x,u)} = \frac{du}{\eta(x,u)}, \qquad (1.4.7)$$

соответствующей уравнению (1.4.5). Функции $\omega_k(x,u)$ составляют фундаментальную систему инвариантов группы G.

При нахождении инвариантов $\omega_k(x,u)$ возникает затруднение, ючающееся в том, что интегрирование системы (1.4.7) зависит от значений параметров группы G, входящих в функции $\xi^{\mu}(x,u)$ и $\eta(x,u)$. Чтобы обойти эту трудность, Овсянников в [47] предложил алгоритм нахождения так называемых H–инвариантных решений уравнения (1.4.1). Он заключается в том, что находятся решения, инвариантные относительно несопряженных подгрупп группы G, из которых посредством размножения можно получить все остальные решения, соответствующие тому или иному набору параметров группы G. Задачи такого типа шно решаются авторами работ [4-8, 191], где перечислены подгруппы ых групп Пуанкаре, Галилея, конформной и т.д.

ы подойдем к интегрированию системы (1.4.7) с другой стороны.

отрим частный случай преобразований группы G (1.4.3), для орых функции ξ^{μ} и η являются линейными по переменным (x,u), т.е.

$$\xi^{A}(x,u) = c_{AB}x_{B} + d_{A}, \qquad (1.4.8)$$

где c_{AB}, d_{A} – постоянные параметры, $A,B = \overline{0,n+1}$, $x_{n+1} \equiv u$, $\xi^{n+1} \equiv \eta$. Самой широкой группой, для которой выполняются условия (1.4.8), является группа линейных неоднородных преобразований $IGL(n+2,R)$. Эта группа содержит в качестве подгрупп группы Пуанкаре, Галилея, Лоренца, Евклида и др. Выделение группы $IGL(n+2,R)$ и перечисленных подгрупп существенно по двум причинам. Во–первых, многие основные ематической физики инвариантны относительно одной из этих Во–вторых, представление этих групп дает возможность получить езависимые решения системы (1.4.7), не прибегая к перечислению упп. Последнее утверждение можно сформулировать в виде леммы.

ЛЕММА 1.4.1. Если выполнены условия (1.4.8), то количество независимых решений системы (1.4.7) конечно и полностью перечисляется количеством различных корней λ характеристического уравнения

$$\det \| A - \lambda E \| = 0, \qquad (1.4.9)$$

где $A = \|c_{AB}\|$ – матрица, составленная из параметров c_{AB}, E – единичная матрица.

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{dx_1}{\xi^1} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi^n} = \frac{dx_{n+1}}{\xi^{n+1}} = dt \qquad (1.4.10)$$

Тогда система (1.4.7) при условиях (1.4.8) будет системой обыкновенных ДУ первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\dot{X} = AX + B, \qquad (1.4.11)$$

где $X = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} d_0 \\ \vdots \\ d_{n+1} \end{bmatrix}$, $\dot{x}_A = \dfrac{dx_A}{dt}$. Так как утверждение леммы справедливо для системы (1.4.11), то оно будет справедливо и для системы (1.4.7). Лемма доказана.

Пусть (1.4.6) можно разрешить относительно ω_{n+1}. Тогда будем

$$\omega_{n+1}(x,u) = \varphi(\omega), \qquad (1.4.12)$$

где $\omega = \{\omega_1 x,u), \ldots, \omega_n(x,u)\}$.

Выражения типа (1.4.12) в дальнейшем будем называть анзацами.

Справедливо следущее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.4.1. Если (ω_{n+1}, ω) – инварианты группы инвариантности уравнения (1.4.1), то анзац (1.4.12) редуцирует уравнение (1.4.1) к уравнению

$$\hat{S}\,(\omega, \varphi, \underset{1}{\varphi}, \underset{2}{\varphi}, \ldots) = 0 \qquad (1.4.13)$$

относительно функции φ, зависящей от переменных $\omega \in R_n$.

Доказательство. Пусть A – алгебра операторов, соответствующая группе G и $Q \in A$. Рассмотрим сначала случай, ког[illegible]

Запишем условие инвариантности уравнения (1.4.1) относительно оператора:

$$\tilde{Q}S = \lambda S, \qquad (1.4.14)$$

где $\tilde{Q}$ – продолжение оператора Q, $\lambda = \lambda(x,u,\underset{1}{u},\ldots)$ – некоторая заданная функция. Очевидно, что $\tilde{Q} = Q = \partial_o$. В этом случае (1.4.14) – это ОДУ для функции S по переменной x_o, в которое все остальные переменные входят как параметры. Его общее решение можно представить в форме произведения двух функций $S = \hat{\lambda}\hat{S}$, где $\hat{\lambda} = \exp\int\lambda$, а $\hat{S}$ не зависит от переменной x_o, т.е.

$$x_o ,\vec{x}, u, \underset{1}{u}, \ldots) \quad \hat{S}(\vec{x}, u, \underset{1}{u}, \ldots) \qquad (1.4.15)$$

(1.4.12), построенный при помощи оператора $Q = \partial_o$, имеет вид

$$u = \varphi(\vec{x}) \qquad (1.4.16)$$

как $\hat{\lambda} \neq 0$, то подставляя (1.4.16) в (1.4.1), использовав при этом (1.4.15), приходим к (1.4.13).

Если $Q \neq \partial_o$, то по теореме Фробениуса существует система координат $(x_o', \vec{x}', u')$, в которой оператор Q имеет вид $Q = \dfrac{\partial}{\partial x_o'}$.

При этом уравнение (1.4.1), записанное в новой системе координат

$$S'(x', u', \underset{1}{u'}, \underset{2}{u'}, \ldots) = 0 , \qquad (1.4.17)$$

ся инвариантным относительно оператора $Q = \dfrac{\partial}{\partial x_o'}$. Поскольку

полученный при помощи оператора $Q = \dfrac{\partial}{\partial x_o'}$, редуцирует урав-

(1.4.17), то он редуцирует и уравнение (1.4.1).

Доказательство теоремы 1.4.1 можно также найти и в [185].

Если ω не зависят от переменной u, а ω_{n+1} – линейно по u, то анзац (1.4.12) принимает вид [124]

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x) \qquad (1.4.18)$$

Отметим, что утверждение теоремы 1.3.1 является необходимым, но не достаточным для редукции уравнения (1.4.1) при помощи анзацев (1.4.12), (1.4.18). В последующих главах посредством условной и нелокальной инвариантности существенно расширен класс анзацев, реду-

х уравнение (1.4.1)

§1.5. ИНВАРИАНТЫ ГРУПП ПУАНКАРЕ $P(1,2)$, $\tilde{P}(1,2)$ И КОНФОРМНОЙ ГРУППЫ $C(1,2)$.

В этом параграфе мы на примерах групп Пуанкаре и конфор
проследим какой вид будут иметь их инварианты в простра
(x_0, x_1, x_2).

Инфинитезимальные операторы групп $P(1,2)$, $\tilde{P}(1,2)$ и $C(1,2)$ соответственно имеют вид

$$X = (c_{AB}x^B + d_A)\,\partial_A\,, \qquad (1.5.1)$$

$$X = (kx_A + c_{AB}x^B + d_A)\,\partial_A\,, \qquad (1.5.2)$$

$$X = (-b_A x_B x^B + 2x_A b_B x^B + kx_A + c_{AB}x^B + d_A)\,\partial_A\,, \qquad (1.5.3)$$

где b_A, k, $c_{AB} = -c_{BA}$, d_A – произвольные групповые параметры. $A,B = 0,1,2$.

Очевидно, что координаты инфинитезимальных операторов (1.5.1)
(1.5.2) являются частным случаем формулы (1.4.8). Этот факт позво
ет для определения инвариантов групп $P(1,2)$ и $\tilde{P}(1,2)$ пр
метод, предложенный в §1.4.

Рассмотрим сначала группу $P(1,2)$. Система ОДУ (1.4.11) имеет вид

$$\dot{x}_A = c_{AB}x^B + d_A\,, \qquad A = 0,1,2. \qquad (1.5.4)$$

Таким образом, для нахождеия инвариантов группы $P(1,2)$ необходимо решить неоднородную систему ОДУ первого порядка с постоянными коэффициентами. Методы решения таких систем хорошо известны. Отметим, что характеристическое уравнение (1.4.9) для данной системы имеет вид

$$\lambda(\lambda^2 + c_{AB}c^{AB}) = 0. \qquad (1.5.5.)$$

Поэтому характеристические корни λ принимают то или иное значе
в зависимости от знака выражения $c_{AB}c^{AB}$.

Определив из (1.5.5) λ, построим соответствующее реше x
системы (1.5.4), а затем исключим из него t, используя (1.4.10), и таким путем найдем искомые инварианты ω.

е вдаваясь в подробности этих простых, но громоздких вычисле- приведем конечный результат. В зависимости от значений парамет- c_{AB} и d_A (таблица 5.1.1), получаем неэквивалентные инварианты пы P(1,2).

ТАБЛИЦА 1.5.1. Инвариантные переменные группы P(1,2)

№ п/п	$\omega_1 = \omega_1(x)$	$\omega_2 = \omega_2(x)$
1.	ly	my
2.	ly	y^2
3.	$y^2 + (cy)^2$	$cy + p \ln \alpha y$
4.	$y^2 - (ay)^2$	$ay - \mathrm{arctg}\frac{cy}{by}$
5.	$(\alpha y)^2 + cy$	$\frac{2}{3}(\alpha y)^3 + (\alpha y)(cy) + \frac{1}{4}(\beta y)$

алогично строятся инварианты группы $\breve{P}(1,2)$, которые мы при- таблице 1.5.2.

ТАБЛИЦА 1.5.2. Инвариантные переменные группы $\breve{P}(1,2)$

п/п	$\omega_1 = \omega_1(x)$	$\omega_2 = \omega_2(x)$
1.	ly	my
2.	ly	y^2
3.	$y^2 + (cy)^2$	$cy + p \ln \alpha y$
4.	$y^2 - (ay)^2$	$ay - \mathrm{arctg}\frac{cy}{by}$
5.	$(\alpha y)^2 + cy$	$\frac{2}{3}(\alpha y)^3 + (\alpha y)(cy) + \frac{1}{4}(\beta y)$
6.	$(\alpha y)(cy)^q$	$y^2(cy)^{-2}$
7.	$(cy)(\alpha y)^{-1} + \ln \alpha y$	$y^2(\alpha y)^{-2}$
8.	$\ln ay + \mathrm{arctg}\frac{cy}{by}$	$y^2(ay)^{-2}$
	$\alpha y + \ln cy$	$\beta y(cy)^{-2}$
	$(by)(ay)^{-1}$	$(cy)(ay)^{-1}$

Поскольку координаты инфинитезимального оператора (1.5.3) кон- ной группы C(1,2) нелинейным образом зависят от переменных x , то для нахождения инвариантов этой группы невозможно применить методы §1.4.4. В таких случаях целесообразно применять методы подгруппового анализа, разработанные в работах [4- 8].

Используя результаты этих работ, находим инварианты ω группы $C(1,2)$, которые мы представили в таблице 1.5.3.

ТАБЛИЦА 1.5.3. Инвариантные переменные группы $C(1,2)$

№ п/п	$\omega_1 = \omega_1(x)$	$\omega_2 = \omega_2(x)$
1.	ly	my
2.	ly	y^2
3.	$y^2 + (cy)^2$	$cy + p\,\ln\alpha y$
4.	$y^2 - (ay)^2$	$ay - \mathrm{arctg}\frac{cy}{by}$
5.	$(\alpha y)^2 + cy$	$\frac{2}{3}(\alpha y)^3 + (\alpha y)(cy) + \frac{1}{4}\beta y)$
6.	$(\alpha y)(cy)^q$	$y^2(cy)^{-2}$
7.	$(cy)(\alpha y)^{-1} + \ln\alpha y$	$y^2(\alpha y)^{-2}$
8.	$\ln ay + \mathrm{arctg}\frac{cy}{by}$	$y^2(ay)^{-2}$
9.	$\alpha y + \ln cy$	$\beta y(cy)^{-2}$
10.	$(by)(ay)^{-1}$	$(cy)(ay)^{-1}$
11.	$(cy)(by)^{-1}$	$(y^2+1)(by)^{-1}$
12.	$\frac{(y^2+1)^2}{y^2-(ay)^2}$	$\mathrm{arctg}\frac{y^2-1}{2ay} + 2p\,\mathrm{arctg}\frac{cy}{by}$
13.	$\frac{(cy)^2}{(\beta y)^2+1}$	$\alpha y - \omega_1\beta y + p\,\mathrm{arctg}\beta y$
14.	$\frac{(\beta y)^2+2p\beta y+1}{(cy)^2}$	$\beta y - \omega_1\alpha y$

В таблицах 1.5.1–1.5.3 введены следующие обозначения:

$y_A = x_A + \theta_A$, $ay \equiv a_A y^A = g^{AB}a_A y_B = a_0y_0 - a_1y_1 - a_2y_2$,

$y^2 \equiv y_A y^A = g^{AB}y_A y_B = y_0^2 - y_1^2 - y_2^2$, g^{AB} – метрический тензор с сигнатурой $(+,-,-)$; a_A, b_A, c_A, α_A, β_A, θ_A, l_A, m_A, p, q – произволь постоянные, удовлетворяющие условиям

$a^2 = -b^2 = -c^2 = 1$, $ab = ac = bc = 0$, $\alpha_A = a_A + b_A$,

$\beta_A = a_A - b_A$, $p \neq 0$, $q \neq 0;1$, $A,B = 0,1,2$.

1.6. РЕДУКЦИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДАЛАМБЕРА $\Box u + F(u) = 0$ И УРАВНЕНИЯ SINE-ГОРДОНА.

Волновое уравнение

$$\Box u + F(u) = 0 \qquad (1.6.1)$$

ывает широкий класс физических явлений: распространение дислокации в кристалле, движение стенок Блоха в магнитных кристаллах, распространение "скошенной волны" вдоль липидной мембраны, унитарную теорию элементарных частиц, распространение магнитных потоков в линии Джозефсона и др. (см.[69] и цитируемую там литературу).

Как показано в §1.1, максимальной в смысле С.Ли алгеброй инвариантности уравнения (1.6.1) является алгебра $AP(1,n)$, базисные нераторы которой имеют вид (1.1.3).

Из представления операторов (1.1.3) следует, что анзацы, полуе при помощи этих операторов записываются в виде

$$u = \varphi(\omega) , \qquad (1.6.2)$$

ω – инварианты алгебры $AP(1,n)$, φ – новая неизвестная функция.

В случае $u{=}u(x)$, $x{=}(x_0, x_1, x_2)$ воспользуемся результатами §1.5. Подставляя инвариантные переменые ω , выписанные в таблице 1.5.1, будем иметь 5 неэквивалетных анзацев. Подставив эти анзацы в уравнение (1.6.1), получим соответственно 5 редуцированных уравнений:

$$l^2\varphi_{11} + 2lm\varphi_{12} + m^2\varphi_{22} + F(\varphi) = 0,$$
$$l^2\varphi_{11} + 4\omega_1\varphi_{12} + 4\omega_2\varphi_{22} + 6\varphi_2 + F(\varphi) = 0,$$
$$4\omega_1\varphi_{11} + 4p\varphi_{12} - \varphi_{22} + 4\varphi_1 + F(\varphi) = 0,$$
$$4\omega_1\varphi_{11} + (1-\omega_1^{-1})\varphi_{22} + 4\varphi_1 + F(\varphi) = 0,$$
$$-\varphi_{11} + \omega_1\varphi_{22} + F(\varphi) = 0, \qquad (1.6.3)$$

$$\varphi_a = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_a} , \ \varphi_{ab} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_a\partial\omega_b} .$$

Если $l_\mu = c_\mu$, $m_\mu = \alpha_\mu$, то из первого уравнения (1.6.3) имеем

$$\varphi_{11} = F(\varphi). \qquad (1.6.3)$$

Последнее уравнение нетрудно проинтегрировать. Тогда из (1.6.3) находим решение уравнения (1.6.1):

$$\int\limits_0^u \frac{d\tau}{\left[f^1(\alpha y) \pm 2\int\limits_0^\tau F(\theta)d\theta\right]^{1/2}} = cy + f^2(\alpha y), \qquad (1.6.4)$$

где $f^1(\alpha y)$, $f^2(\alpha y)$ – произвольные гладкие функции.

Положив в (1.6.1) $F(u) = \sin u$, получим уравнение sine-Гордона

$$\Box u + \sin u = 0 \qquad (1.6.5)$$

Если в (1.6.4) $f^1 = 2$, то решение уравнения (1.6.5) можно определить явно:

$$u = 4\ \mathrm{arctg\ th}\,[cy + f^2(\alpha y)]. \qquad (1.6.6)$$

Решение (1.6.6) при $f^2 = 0$ совпадает с известным солитонным решением уравнения sine-Гордона (1.6.5).

Если $f^1 = \frac{4}{k^2} \pm 2$, где k– произвольная постоянная

(1.6.5) находим, что решение уравнения (1.6.5) задается эллиптическим интегралом

$$k\int\limits_0^{u/2} \frac{d\tau}{\sqrt{1 \pm k^2\sin^2\tau}} = cy + f^2(\alpha y). \qquad (1.6.7)$$

Аналогично можно получить следущее решение уравнения (1.6.5)

$$u = 4\ \mathrm{arctg\ exp}\ \alpha y. \qquad (1.6.8)$$

При $F(u) = -u^2$ из последнего уравнения (1.6.3) находим

$$\varphi = \omega_1 W(\omega_2)\ , \qquad (1.6.9)$$

где W – функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению W'' W

Тогда

$$u = [(\alpha y)^2 + cy]\,W(\frac{2}{3}(\alpha y)^3 + (\alpha y)(cy) + \frac{1}{4}(\beta y)) \ - \qquad (1.6.10)$$

решение уравнения

$$\Box u = u^2. \qquad (1.6.11)$$

НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ДАЛАМБЕРА СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

В настоящем параграфе рассмотрим нелинейное волновое уравнение

$$\Box u + \lambda u^k = 0 , \qquad (1.7.1)$$

$u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2) \in R_3$; λ и $k \neq 1$ – произвольные постоянные.

Решение уравнения (1.7.1) ищем в виде

$$u = f(x)\ \varphi(\omega), \qquad (1.7.2)$$

где $f(x)$, $\varphi(\omega)$, $\omega = \{\omega_1(x),\ \omega_2(x)\}$ – произвольные гладкие функции. Подставляя (1.7.) в (1.7.1), имеем

$$f \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^\mu} \varphi_{ij} + \left(f \Box \omega_i + 2 \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^\mu}\right) \varphi_i + $$
$$+ \Box f\ \varphi + \lambda f^k \varphi^k = 0. \qquad (1.7.3)$$

выполняются условия

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^\mu} = A^{ij}(\omega)\ f^{k-1},$$
$$f \Box \omega_i + 2 \frac{\partial f}{\partial x_\mu} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^\mu} = B^i(\omega)\ f^k , \qquad (1.7.4)$$
$$\Box f = C(\omega)\ f^k ,$$

где A^{ij}, B^i, C – некоторые функции, зависящие только от ω, то для функции φ получаем редуцированное уравнение

$$A^{ij}(\omega)\ \varphi_{ij} + B^i(\omega)\ \varphi_i + C(\omega)\ \varphi + \lambda\varphi^k = 0. \qquad (1.7.5)$$

Условия (1.7.4), которые мы назовем условиями расщепления, представляют собой систему уравнений для определения новых перемен-

ω и функций f, A^{ij}, B^i, C. Из теоремы 1.4.1 следует, что

ω являются инвариантами АИ уравнения (1.7.1), то условия

4) выполняются. При этом из системы (1.7.4) однозначно определяся функции f, A^{ij}, B^i и C.

Как показано в §1.1, МАИ уравнения (1.7.1) является расширенная алгебра Пуанкаре $\tilde{P}(1,2)$. Инварианты этой алгебры приведены в таблице 1.5.2. Воспользовавшись этими инвариантами и формулами (1.7.4) находим

$$f(x) = [h(x)]^{\frac{2}{1-k}} , \qquad (1.7.6)$$

где $1^\circ.-5^\circ.$ $h(x) = 1$;
$6^\circ.$ $h(x) = Cx$;
$7^\circ.$ $h(x) = \alpha x$; (1.7.7)
$8^\circ.$ $h(x) = ax$;
$9^\circ.$ $h(x) = ax$;
$10^\circ.$ $h(x) = ax$.

В формулах (1.7.7) $1^\circ - 10^\circ$ соответствуют нумерации инвариантных переменных в таблице 1.5.2.

Уравнение (1.7.5) соответственно имеет вид

$1^\circ.$ $\alpha^2\varphi_{11} + 2\alpha в\varphi_{12} + в^2\varphi_{22} + \lambda\varphi^k = 0$;

$2^\circ.$ $\alpha^2\varphi_{11} + 4\omega_1\varphi_{12} + 4\omega_2\varphi_{22} + \varphi_2 + \lambda\varphi^k = 0$;

$3^\circ.$ $-\varphi_{11} + 4m\varphi_{12} + 4\omega_2\varphi_{22} + 4\varphi_2 + \lambda\varphi^k = 0$;

$4^\circ.$ $(1 + \omega_2^{-1})\ \varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + 4\varphi_2 + \lambda\varphi^k = 0$;

$5^\circ.$ $-\varphi_{11} + \omega_1\varphi_{22} + \lambda\varphi^k = 0$; (1.7.8)

$6^\circ.$
$$-m^2\omega_1^2\varphi_{11} + 4\omega_1(m\omega_2 + m + 1)\ \varphi_{12} - 4\omega_2(\omega_2 + 1)\ \varphi_{22} + $$
$$+ (m - 1 - \frac{4}{1-k})\ m\omega_1\varphi_1 + \frac{2}{1-k}\ [(3k + 1)\omega_2 + k + 3]\ \varphi_2 + $$
$$+ \frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\ \varphi + \lambda\varphi^k = 0 ;$$

$7^\circ.$
$$\varphi_{11} + 4\varphi_{12} - 4\omega_2\varphi_{22} + \frac{2(3+k)}{1-k}\ \varphi_2 + \lambda\varphi^k = 0 ;$$

$8^\circ.$
$$(1 - \frac{1}{\omega_2-1})\ \varphi_{11} - 4(\omega_2 - 1)\ (\varphi_{12} - \omega_2\varphi_{22}) + \frac{3+k}{1-k}\ \varphi_1 -$$
$$- \frac{4}{1-k}\ [(3-k)\omega_2 - 1 - k]\ \varphi_2 + \frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\ \varphi + \lambda\varphi^k = 0 ;$$

$9^\circ.$
$$-\varphi_{11} + 4(\omega_2 + 1)\ \varphi_{12} - 4\omega_2^2\varphi_{22} + \frac{5-k}{1-k}\ \varphi_1 -$$
$$- 2(3\omega_2 - \frac{2}{1-k})\ \varphi_2 + \frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\ \varphi + \lambda\varphi^k = 0 ;$$

$10^\circ.$
$$(\omega_1^2 + 1)\ \varphi_{11} + 2\omega_1\omega_2\varphi_{12} + (\omega_2^2 + 1)\ \varphi_{22} -$$
$$- \frac{2(1+k)}{1-k}\ (\omega_1\varphi_1 + \omega_2\varphi_2) + \frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\ \varphi + \lambda\varphi^k = 0.$$

Перейдем к более детальному анализу редуцированных уравнений (1.7.8).

Если в 6° из (1.7.8) (в дальнейшем будем писать 6°(1.7.8))

$$\varphi = \omega_1^{\frac{k+1}{k-1}} V(\omega_1), \qquad (1.7.9)$$

нкция $V(\omega_1)$ является решением уавнения Эмдена-Фаулера

$$\omega_1^2 \ddot{V} + 2\omega_1 \dot{V} + \lambda\omega_1^{k+1} V^k = 0, \qquad (1.7.10)$$

очкой обозначено дифференцирование по ω_1.

Частное решение (1.7.10) ищем в виде $V(\omega_1) = \mu\omega_1^s$, где μ и постоянные. Подставляя это выражение в (1.7.10), находим

$$s = \frac{1 + k}{1 - k}, \quad \mu = \frac{-2(1 + k)}{(1 - k)^2}.$$

В итоге приходим к решению уравнения (1.7.1):

$$u(x) = (\alpha x)^{\frac{2}{1-k}}, \quad \alpha^2 = \frac{-\lambda(1-k)^2}{2(1+k)}.$$

Положив в 7°(1.7.8) $\varphi_2 = 0$, получим ОДУ

$$\varphi_{11} + \lambda\varphi^k = 0, \qquad (1.7.11)$$

решение которого задается интегралом

$$\frac{d\tau}{c_2 + \tau^{k+1}} = \pm(\omega_1 + c_1)\sqrt{\frac{-2\lambda}{1 + k}} \qquad (1.7.12)$$

c_1, c_2 – постоянные интегрирования. В частности, при $c_2 = 0$

$$\varphi(\omega_1) = (\omega_1 + c_1)^{\frac{2}{1-k}} \left[\frac{-\lambda(1-k)^2}{2(1+k)}\right]^{\frac{1}{1-k}}, \qquad (1.7.13)$$

а при $k=3$ решения уравнения (1.7.11) выражаются через эллиптические функции.

По (1.7.13), (1.7.2) и (1.7.7) строим решение уравнения 1.7.1):

$$[\alpha x + \alpha x\,(c_1 + \ln \alpha x)]^{\frac{2}{1-k}}, \quad \alpha^2 = \frac{-\lambda(1-k)^2}{2(1+k)}.$$

Положив в 7°(1.7.8) $\varphi_1 = 0$, получим

$$-4\omega_2\varphi_{22} + 2\,\frac{3+k}{1-k}\,\varphi_2 + \lambda\varphi^k = 0, \qquad (1.7.14)$$

частным решением которого, как легко проверить, будет функция

$$\varphi(\omega_2) = \left[\frac{\lambda(k-1)^2}{2(k-3)}\,\omega_2\right]^{\frac{1}{1-k}}, \quad k \neq 3.$$

Тогда

$$u(x) = \left[\frac{\lambda(k-1)^2}{2(k-3)}\,x_\mu x^\mu\right]^{\frac{1}{1-k}}$$

решение уравнения (1.7.1) при $k \neq 3$.

Уравнение 10^c(1.7.8) при $\varphi = \varphi(\omega_1)$ имеет вид

$$(\omega_1^2 + 1)\,\varphi_{11} - \frac{2(1+k)}{1-k}\,\omega_1\varphi_1 + \frac{2(1+k)}{(1-k)^2}\,\varphi + \lambda\varphi^k = 0 \qquad (1.7.15)$$

При $k = -3$ уравнение (1.7.15) удается проинтегрировать. В конечном результате приходим к следующим решениям уравнения (1.7.1) ($k = -3$):

$$u(x) = \begin{cases} \pm\,[\,ax(c_1 + c_2\,\mathrm{ch}\,Q(x))]^{\frac{1}{2}}, & c_1^2 - c_2^2 = 4\lambda, \\ \pm\,[\,ax(c_1 + c_2\,\mathrm{sh}\,Q(x))]^{\frac{1}{2}}, & c_1^2 + c_2^2 = 4\lambda, \\ \pm\,[\,ax\,Q(x))]^{\frac{1}{2}}. & \end{cases}$$

где $Q(x) = \dfrac{bx}{ax} + \left[\dfrac{(bx)^2}{(ax)^2} + 1\right]^{\frac{1}{2}}$.

Положив в 3°(1.7.8) $\varphi_1 = 0$, получим ОДУ

$$\omega_2\varphi_{22} + \varphi_2 + \frac{\lambda}{4}\,\varphi^k = 0,$$

частное решение которого

$$\varphi(\omega_2) = \left[-\frac{\lambda}{4}\,(1-k)^2\,\omega_2\right]^{\frac{1}{1-k}}. \qquad (1.7.16)$$

Формула (1.7.16) определяет решение уравнения (1.7.1)

$$u(x) = \left\{-\frac{\lambda}{4}\,(1-k)^2\,[(bx)^2 + x^2]\right\}^{\frac{1}{1-k}}.$$

Уравнение 1°(1.7.8) при $d=a$, $e=b$ является двумерным ел волновым уравнением

$$\varphi_{11} - \varphi_{22} + \lambda\varphi^{k} = 0 , \qquad (1.7.17)$$

а при $d=\alpha$, $e=c$ имеет вид

$$- \varphi_{22} + \lambda\varphi^{k} = 0. \qquad (1.7.18)$$

уравнение (1.7.18) $\omega_1 = \alpha x$ входит как параметр. Поэтому его рассматривать как ОДУ. Общее решение уравнения (1.7.18) за я интегралом

$$\int_{0} \frac{d\,\tau}{\sqrt{F + \tau^{k+1}}} = (\omega_2 + H) \sqrt{\frac{2\lambda}{1 + K}} , \qquad (1.7.19)$$

где $F = F(\omega_1)$, $H = H(\omega_1)$ – произвольные гладкие функции аргумента ω_1. Решение уравнения (1.7.1) в данном случае следующее

$$\int^{\varphi} \frac{d\,\tau}{\sqrt{F(\alpha x) + \tau^{k+1}}} = \pm[cx + H(\alpha x)] \sqrt{\frac{2\lambda}{1 + K}} , \qquad (1.7.20)$$

тности, при $F(\alpha x) \equiv 0$ из (1.7.20) функция u определяется явно

$$= \left\{ [cx + H(\alpha x)] \frac{1-k}{2} \sqrt{\frac{2\lambda}{1 + K}} \right\}^{\frac{2}{1-k}} . \qquad (1.7.21)$$

Сделав в уравнении 2°(1.7.8) замену переменных

$$\tau_0 = \sqrt{\omega_1^2 - \omega_2} , \quad \tau_1 = \omega_1 , \qquad (1.7.22)$$

получим нелинейное уравнение Дарбу

$$\varphi_{\tau_0\tau_0} - \varphi_{\tau_1\tau_1} + \frac{\varphi_{\tau_0}}{\tau_0} = \lambda\varphi^{k} . \qquad (1.7.23)$$

Для нахождения решений уравнения (1.7.23) применим ту же процедуру, что и для уравнения (1.7.1). Т.е. исследуем его симметрию, пределим анзац, инвариантные переменные, проведем редукцию n, если я, найдем решение редуцированного уравнения. Это позволит, енно возвращаясь по этапам назад, построить решение уравнения .1). Назовем весь этот процесс повторной редукцией уравнения

(1.7.1). Очевидно, что если исходное уравнение зависит от многих переменных, то редукцию можно осуществить несколько раз.

Результатом исследования симметрии нелинейного уравнения Дарбу являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1.7.1. Максимальная локальная группа инвариантности нелинейного уравнения Дарбу (1.7.23) – 2–параметрическая генерируемая операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau_1}, \quad X_2 = \tau_0 \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \tau_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \frac{2}{1-k} \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}. \qquad (1.7.24)$$

ТЕОРЕМА 1.7.2. Максимальная локальная группа инвариантности n–мерного нелинейного уравнения Дарбу

$$\Box u + \frac{\lambda_1}{x_0} u_0 + \lambda_2 u^k = 0 \qquad (1.7.25)$$

при $\lambda_1 = 2 - \frac{k-1}{k+1} n$, $k \neq -1$ – конформная группа $C(n-1)$, генераторы которой имеют вид

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a \ ; \quad a,b = \overline{1,n-1},$$

$$D = x_0 \partial_0 + x_a \partial_a + \frac{n}{1+k} u \partial u, \qquad (1.7.26)$$

$$K_a = 2x_a D + (x_0^2 - \vec{x}^2)\, \partial_a \ ;$$

при $\lambda_1 \neq 2 - \frac{k-1}{k+1} n$ – расширенная группа Евклида $\tilde{E}(n-1)$, порождаемая операторами

$$\partial_a, \ J_{ab}, \ D = x_0 \partial_0 + x_a \partial_a + \frac{2}{1-k} u \partial u. \qquad (1.7.27)$$

Теоремы 1.7.1 и 1.7.2 доказываются стандартно методом С.Ли.

Анзац, построенный при помощи операторов (1.7.24) для уравнения (1.7.23), имеет вид

$$\varphi(\tau_0, \tau_1) = \tau_0^{\frac{2}{1-k}} \Phi(z), \quad z = \frac{\tau_1 + c_1}{\tau_0}. \qquad (1.7.28)$$

Он редуцирует (1.7.23) к ОДУ

$$(z^2 - 1)\, \Phi_{zz} + \frac{k+3}{k-1} z \Phi_z + \frac{4}{(k-1)^2} \Phi + \lambda \Phi^k = 0, \qquad (1.7.29)$$

которое при $k = 5$ совпадает с нелинейным обобщением уравнения Лежандра

$$\left[(1 - z^2)\frac{d\Phi}{dz}\right] - \frac{1}{4}\Phi = \lambda\Phi^5. \tag{1.7.30}$$

решить уравнения (1.7.29), (1.7.30) не удается, однако дл

ОДУ эффективно применяются приближенные методы решения, приме-

которые, можно в итоге найти приближенные решения уравнения .7.1).

Полученные нами решения уравнения (1.7.1), зависящие от произвольных параметров и функций, могут оказаться весьма полезными при решении различных задач математической физики, например, задачи Коши или некоторых краевых задач.

УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ.

Уравнение Лиувилля

$$\Box u + \lambda e^{u} = 0 \qquad (1.8.1)$$

возникает в задачах дифференциальной геометрии, теории нелиней волн, в квантовой теории поля и др.

В двумерном случае решение уравнения (1.8.1)

$$u(x_0,x_1) = \operatorname{Ln}\left\{ -\frac{8}{\lambda}\,\frac{\dot f(x_0+x_1)\,\dot g(x_0-x_1)}{[f(x_0+x_1)+g(x_0-x_1)]^2} \right\} \qquad (1.8.2)$$

(f, g – произвольные дифферецируемые функции; $\dot f$, $\dot g$ – производные по соответственному аргументу; $\lambda \dot f \dot g < 0$) построил в 1853 г. Лиувилль.

Сингулярные решения уравнения (1.8.1) получены в работе [19].

В настоящем параграфе рассмотрим трехмерное уравнение (1.8.1). При помощи алгоритма, описанного в §1.4, проведем редукцию данного уравнения и построим некоторые классы его точных решений.

Из представления операторов алгебры инвариантности уравнен (1.8.1) следует, что его инвариантные решения имеют вид

$$u(x) = \varphi(\omega) + g(x), \qquad (1.8.3)$$

где $\varphi(\omega)$, $\omega = \{\omega_1(x), \omega_2(x)\}$, $g(x)$ – некоторые гла

Подставляя анзац (1.8.3) в уравнение (1.8.1), имеем

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial x^\mu}\,\varphi_{ij} + \Box\omega_i\varphi_i + \Box g + \lambda e^{g} e^{\varphi} = 0. \qquad (1.8.4)$$

В том случае, когда выполнены условия расщепления

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x_\mu}\,\frac{\partial\omega_j}{\partial x^\mu} = A^{ij}(\omega)\, e^{g},$$

$$\Box\omega_i = B^{i}(\omega)\, e^{g},\ \Box g = C(\omega)\, e^{g}, \qquad (1.8.5)$$

для функции $\varphi(\omega)$ получим редуцированное уравнение

$$A^{ij}(\omega)\,\varphi_{ij} + B^{i}(\omega)\,\varphi_i + C(\omega) + \lambda e^{\varphi} = 0. \qquad (1.8.6)$$

Если ω – инварианты алгебры инвариантности уравнения (1.

условия (1.8.5) выполняются и из них однозначно определ

$g(x)$.

Итак, для редукции уравнения (1.8.1) используем инварианты ал- $\widetilde{AP}(1,2)$, приведенные в таблице 1.5.2. При этом получаем, что

$$g(x) = -\mathrm{Ln}\, h(x), \qquad (1.8.7)$$

$h(x)$ задана (1.7.7). Тогда уравнения (1.8.6) будут иметь вид

$$d^2\varphi_{11} + 2de\varphi_{12} + e^2\varphi_{22} + \lambda e^{\varphi} = 0,$$

$$d^2\varphi_{11} + 4\omega_1\varphi_{12} + 4\omega_2\varphi_{22} + 6\varphi_2 + \lambda e^{\varphi} = 0,$$

$$-\varphi_{11} + 4m\varphi_{12} + 4\omega_2\varphi_{22} + 4\varphi_2 + \lambda e^{\varphi} = 0,$$

4°. $(1 + \frac{1}{\omega_2})\,\varphi_{11} + 4\omega_2\varphi_{22} + 4\varphi_2 + \lambda e^{\varphi} = 0,$

5°. $-\varphi_{11} + \omega_1\varphi_{22} + \lambda e^{\varphi} = 0, \qquad (1.8.8)$

6°. $-m^2\omega_1^2\varphi_{11} + 4\omega_1(\omega_2 + m + 1)\,\varphi_{12} - 4\omega_2(\omega_2 + 1)\,\varphi_{22} -$

$- m(m-1)\,\omega_1\varphi_1 + 2(3\omega_2 + 1)\,\varphi_2 - 2 + \lambda e^{\varphi} = 0,$

$$-\varphi_{11} + 4\varphi_{12} + 4\omega_2(\omega_2 - 1)\,\varphi_{22} + 2(3\omega_2 - 1)\,\varphi_2 + \lambda e^{\varphi} = 0,$$

$$\frac{2}{\omega_2 - 1}\,\varphi_{11} - 4(\omega_2 - 1)\,\varphi_{12} + 4\omega_2(\omega_2 - 1)\,\varphi_{22} - \varphi_1 +$$

$$3\omega_2 - 1)\,\varphi_2 + 2 + \lambda e^{\varphi} = 0,$$

$$-\varphi_{11} + 2(\omega_2 + 1)\varphi_{12} - 4\omega_2\varphi_{22} + \varphi_1 - 6\omega_2\varphi_2 - 2 + \lambda e^{\varphi} = 0,$$

0°. $(\omega_1^2 - 1)\varphi_{11} + 2\omega_1\omega_2\varphi_{12} + (\omega_2^2 - 1)\varphi_{22} + 2\omega_1\varphi_1 + 2\omega_2\varphi_2 +$

$+ 2 + \lambda e^{\varphi} = 0.$

Исследуем теперь редуцированные уравнения (1.8.8).

При $d = \alpha$, $e = C$ уравнение 1°(1.8.8) имеет вид

$$-\varphi_{22} + \lambda e^{\varphi} = 0. \qquad (1.8.9)$$

Общее решение уравнения (1.8.9) задается одной из формул

$$2\,\mathrm{Ln}\,\frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\;F(\omega_1)}{\mathrm{sh}\,[\omega_2 F(\omega_1) + H(\omega_1)]}, \qquad \lambda > 0\,;$$

$$(1.8.10)$$

$$2\,\mathrm{Ln}\,\frac{\sqrt{-\frac{2}{\lambda}}\;F(\omega_1)}{\mathrm{ch}\,[\omega_2 F(\omega_1) + H(\omega_1)]}, \qquad \lambda < 0\,;$$

$$\varphi = 2\,\mathrm{Ln}\,\frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\;F(\omega_1)}{\cos\,[\omega_2 F(\omega_1) + H(\omega_1)]}, \qquad \lambda > 0\,;$$

$$\varphi = 2\,\mathrm{Ln}\,\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,[\,\omega_2 + H(\omega_1)]\,, \qquad \lambda > 0\,,$$

где $F(\omega_1)$, $H(\omega_1)$ – произвольные гладкие функции.
Тогда

$$u = 2\,\mathrm{Ln}\,\frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\;F(\alpha x)}{\mathrm{sh}\,[cxF(\alpha x) + H(\alpha x)]}, \qquad \lambda > 0\,;$$

$$u = 2\,\mathrm{Ln}\,\frac{\sqrt{-\frac{2}{\lambda}}\;F(\alpha x)}{\mathrm{ch}\,[cxF(\alpha x) + H(\alpha x)]}, \qquad \lambda < 0\,; \tag{1.8.11}$$

$$u = 2\,\mathrm{Ln}\,\frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\;F(\alpha x)}{\cos\,[cxF(\alpha x) + H(\alpha x)]}, \qquad \lambda > 0\,;$$

$$u = 2\,\mathrm{Ln}\,\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\,[\,cx + H(\alpha x)]\,, \qquad \lambda > 0\,,$$

решение уравнения (1.8.1).

При $d = a$, $e = b$ уравнение 1°(1.8.8) – это двумер ние Лиувилля

$$\varphi_{11} - \varphi_{22} + \lambda e^{\varphi} = 0. \tag{1.8.12}$$

Воспользовавшись формулой (1.8.2) находим еще одно семейство точны решений уравнения (1.8.1):

$$u = \mathrm{Ln}\left\{-\frac{8}{\lambda}\;\frac{\dot{F}(\alpha x)\,\dot{H}(\beta x)}{[\,F(\alpha x) + H(\beta x)]^2}\right\}, \tag{1.8.13}$$

зависящие от двух произвольных гладких функций $F(\alpha x)$ и $H(\beta x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8.1. В случае двух независимых переменных симметри уравнения Лиувилля значительно богаче расширенной группы Пуанкар $\tilde{P}(1,1)$. Этот факт устанавливает следующее утверждение

ТЕОРЕМА 1.8.1. Максимальная в смысле С.Ли груп ти уравнения (1.8.1) при $x = (x_0, x_1) \in R_2$ бесконечноме дается операторами

$$X = (f + g) \frac{\partial}{\partial x_0} + (f - g) \frac{\partial}{\partial x_1} - 2(\dot{f} + \dot{g}) \frac{\partial}{\partial u} , \qquad (1.8.14)$$

где $f = f(x_0+x_1)$, $g = g(x_0-x_1)$ – произвольные дифференцируемые функции; $\dot{f}$, $\dot{g}$ – производные по соответствующему аргументу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия инвариантности

$$\tilde{X} S \Big|_{S=0} = 0$$

уравнения

$$S \equiv u_{00} - u_{11} + \lambda e^{u} = 0$$

относительно оператора

$$X = \xi^0(x_0,x_1,u) \frac{\partial}{\partial x_0} + \xi^1(x_0,x_1,u) \frac{\partial}{\partial x_1} + \eta(x_0,x_1,u) \frac{\partial}{\partial u}$$

получаем систему уравнений для определения координат ξ^0, ξ^1, η инфинитезимального оператора X:

$$\xi^u_u = \eta_u = 0 , \quad \xi^0_0 = \xi^1_1 , \quad \xi^1_0 = \xi^0_1 , \quad \eta = -2\dot{\xi}^0_0 . \qquad (1.8.15)$$

Общее решение системы (1.8.15) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^0 &= f(x_0 + x_1) + g(x_0 - x_1), \\ \xi^1 &= f(x_0 + x_1) - g(x_0 - x_1), \qquad (1.8.16) \\ \eta &= -2[\dot{f}(x_0 + x_1) + \dot{g}(x_0 - x_1)] \end{aligned}$$

определяет оператор (1.8.14). Теорема доказана.

Если в уравнении 6°(1.8.8) $m = -1$, то его частное решение ищем в виде

$$\varphi = \psi(t) - 2\mathrm{Ln}\, \omega_1 , \quad t = \omega_1^{-1} \omega_2^{1/2} . \qquad (1.8.17)$$

Подставляя (1.8.17) в 6°(1.8.8), приходим к ОДУ

$$\ddot{\psi} + \lambda e^{\psi} = 0 . \qquad (1.8.18)$$

Общее решение уравнения (1.8.18) задается формулами (1.8.10), в которых вместо φ, λ, F, H необходимо положить соответственно φ, $-\lambda$, c_1, c_2, где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

В результате имеем следующие решения уравнения (1.8.1):

$$\mathrm{Ln} \frac{c_1 \sqrt{-\frac{2}{\lambda}} \; P(x)}{\mathrm{sh}\, [c_1 Q(x) + c_2]} , \qquad \lambda < 0 ;$$

$$u = 2\,\mathrm{Ln}\,\frac{c_1\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\;P(x)}{\mathrm{ch}\,[c_1Q(x) + c_2]}\,, \qquad \lambda > 0\,; \qquad (1.8.19)$$

$$u = 2\,\mathrm{Ln}\,\frac{c_1\sqrt{-\frac{2}{\lambda}}\;P(x)}{\cos\,[c_1Q(x) + c_2]}\,, \qquad \lambda < 0\,;$$

$$u = 2\,\mathrm{Ln}\sqrt{\frac{-\lambda}{2}}\;[Q(x) + c_2]\,, \qquad \lambda < 0\,,$$

где $P(x) = \alpha x$, $Q(x) = (\alpha x)^{-1}\sqrt{x^2}$.

Частное решение уравнения 3°(1.8.8) будем находить в виде

$$\varphi = \psi(t) - t\,, \quad t = \mathrm{Ln}\,\omega_2\,. \qquad (1.8.20)$$

После подстановки (1.8.20) в 3°(1.8.8) для определения функции $\psi(t)$ получим уравнение (1.8.18). Тогда решение уравнения (1.8.1) записывается формулами (1.8.19) при $P(x) = x^2 + (Cx)^2$, $Q(x) = \mathrm{Ln}\,P(x)$.

Из частного решения уравнения 2°(1.8.8) строим еще одно решение уравнения (1.8.1):

$$u(x) = -\,\mathrm{Ln}\,\frac{\lambda}{2}\,x^2\,. \qquad (1.8.21)$$

Полученные нами решения для трехмерного уравнения [illegible] видным образом обобщаются на случай произвольного количес[illegible] менных.

Одним из характерных свойств приведенныхрешений уравнения (1.8.1) является их особенность в точке $\lambda = 0$. Это означает, что с помощью регулярных методов теории возмущений невозможно получить решения, близкие к точным решениям (1.8.11), (1.8.13), (1.8.19), (1.8.21).

§1.9 УРАВНЕНИЕ БОРНА–ИНФЕЛЬДА.

Рассмотрим уравнение Борна–Инфельда

$$(1-u_\mu u^\mu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0, \qquad (1.9.1)$$

$= u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_\mu = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_{\mu\nu} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $u^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu$, $g^{00} =$

, $g^{01} = g^{10} = 0$; $\mu, \nu = 0,1$.

Максимальной в смысле С.Ли алгеброй инвариантности уравнения .9.1) является расширенная алгебра Пуанкаре $\tilde{P}(1,2)$ (см.[116]), базисные операторы которой имеют вид

$$\partial_A = \frac{\partial}{\partial x_A}, \quad J_{AB} = x^A \partial_B - x^B \partial_A, \quad D = x_A \partial_A, \qquad (1.9.2)$$

где $x^A = g^{AB} x_B$; $A, B = 0,1,2$; $x_2 = u$, g^{AB}– метрический тензор пространства R_{1+2} с сигнатурой $(+,-,-)$.

В работах [96,98] исследована симметрия одномерного и многомер– уравнения (1.9.1). Симметрийные свойства данного уравнения час– спользованы для нахождения его точных решений.

настоящем параграфе в одномерном случае использован по инвариантов алгебры (1.9.2) для редукции уравнения (1.9.1) к овенным дифференциальным уравнениям. Это позволило найти новые, сравнению с [96,98], решения уравнения Борна–Инфельда.

Из представления алгебры (1.9.2) вытекает, что инвариантные решения уравнения (1.9.1) следует искать в виде

$$z = \varphi(\omega), \qquad (1.9.3)$$

где $\omega = \omega(x_0, x_1, u)$, $z = z(x_0, x_1, u)$ – инварианты данной алгебры, φ – новая неизвестная функция.

ный набор инвариантов алгебры $A\tilde{P}(1,2)$ приведен в таблице 1.5.2. дставляя анзац (1.9.3) в уравнение (1.9.1), имеем

$$\omega_A \omega^A z_B z^B - (\omega_A z^A)^2] \dot\varphi + [(\dot\varphi\omega_C - z_C)(\dot\varphi\omega^C - z^C) g^{AB} -$$

$$\varphi\omega^A - z^A)(\dot\varphi\omega^B - z^B)] (\dot\varphi\omega_{AB} - z_{AB}) = 0 \qquad (1.9.4)$$

$$z_B z^B - (\omega_A z^A)^2] \ddot\varphi - (-\omega_A \omega^A \Box\omega + \omega^A \omega^B w_{AB}) \dot\varphi^3 + (-\omega_A \omega^A \Box z +$$

$$+ \omega^A\omega^B z_{AB} - 2\omega_A z^A \Box\omega + 2\omega^A z^B \omega_{AB})\, \dot\varphi^2 - (-\, 2\omega_A z^A \Box z + 2\omega^A z^B z_{AB} - z_A z^A \Box\omega +$$

$$+ z^A z^B \omega_{AB})\, \dot\varphi + (-\, z_A z^A \Box z + z^A z^B z_{AB}) = 0, \qquad (1.9.5)$$

где $\omega_A = \dfrac{\partial\omega}{\partial x_A}$, $\omega^A = g^{AB}\omega_B$, $\omega_{AB} = \dfrac{\partial^2\omega}{\partial x_A \partial x_B}$, $\Box\omega = g^{AB}\omega$

Если ω и z принимают значения, приведенные в табли 1 то для определения функции φ получаем обыкновенные диффе ные уравнения:

1). $[L_A L^A m_B m^B - (L_A m^A)^2]\, \ddot\varphi = 0,$

2). $2(\omega^2 - L_A L^A \varphi)\, \ddot\varphi + L_A L^A \dot\varphi^2 - 4\omega\dot\varphi + 4\varphi = 0,$

3). $(\omega + k^2)\, \ddot\varphi - 2\omega\dot\varphi^3 - 3k\dot\varphi^2 + \dot\varphi = 0,$

4). $2\omega(\omega+1)\, \ddot\varphi + 4\omega^2\dot\varphi^3 + (2\omega + 3)\, \dot\varphi = 0,$

5). $(2\omega + k^2)\, \ddot\varphi - \dot\varphi = 0,$

6). $[m(m-2)\omega-(m-1)^2]\dot\psi+2\omega(\omega+1)\psi^3+[(m+2)\omega-(m-1)(2m-3)]\psi^2+m(m-1)\psi=0$

7). $(\omega-1)\, \ddot\varphi - 2\omega\dot\varphi^3 + \dot\varphi^2 = 0,$

8). $4(2\omega-1)(\omega-1)\, \ddot\varphi + 8\omega(\omega-1)^2\dot\varphi^3 + 4(\omega-1)^2\dot\varphi^2 + (10\omega - 4)\dot\varphi +$

9). $(2\omega+1)\, \ddot\varphi - 2\omega\dot\varphi^2 + \dot\varphi = 0,$

10). $(1 - \omega^2 - \dot\varphi^2)\, \ddot\varphi = 0,$

где $\psi = \dot\varphi\varphi^{-1}$.

Уравнения 1)., 2). и 10). решены в [98], а общие решения уравнений 4)., 5). и 9). соответственно имеют вид

$$\varphi + c_2 = \begin{cases} -\operatorname{arctg} c_1\sqrt{-\dfrac{\omega+1}{\omega+c_1^2}} + c_1 \operatorname{arctg} \sqrt{-\dfrac{\omega+1}{\omega+c_1^2}} \\ -\operatorname{arctg} c_1\sqrt{\dfrac{\omega+1}{\omega-c_1^2}} + c_1 \operatorname{arcth} \sqrt{\dfrac{\omega+1}{\omega-c_1^2}}\,, \\ -\operatorname{arctg} \sqrt{-(\omega+1)} \quad + \sqrt{-(\omega+1)}\;; \end{cases}$$

$$\varphi + c_2 = c_1(2\omega + k^2)^{3/2}\;;$$

$$\Bigg| -\frac{1}{2}\ln(\omega+1-\cos c_1\sqrt{2\omega+1}) - \operatorname{ctg} c_1 \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\omega+1} - \cos}{\sin c_1}$$

$$\varphi+c_2=\left|\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\ln(\omega+1-\mathrm{ch}\ c_1\sqrt{2\omega+1})-\mathrm{cth}\ c_1\mathrm{arcth}\frac{\sqrt{2\omega+1}-\mathrm{ch}\ c_1}{\mathrm{sh}\ c_1} \\ -\frac{1}{2}\ln(\omega+1\pm\sqrt{2\omega+1})+\frac{1}{1\pm\sqrt{2\omega+1}}\ . \end{array}\right.$$

спользуя формулу (1.9.3) и значение инвариантных переменных ω из таблицы 1.5.2, находим следующие решения уравнения (1.9.1):

$$mx = \varphi(\iota x),$$

$\iota^2 m^2 - (\iota m)^2 = 0$, φ – произвольная гладкая функция;

$$\sqrt{\iota^2 x^2-(\iota x)^2} + \sqrt{\iota^2 x^2-(\iota x)^2-c_1^{-2}} = \exp(c_1\iota x + c_2),$$

где $\iota^2 \neq 0$, c_1, c_2 – произвольные постоянные;

$$x-\mathrm{arctg}\frac{cx}{bx} = \left\{\begin{array}{l} -\mathrm{arctg}\ c_1A^- + c_1\mathrm{arctg}\ A^-\ , \\ -\mathrm{arctg}_1 c\ A^+ +_1 c\ \mathrm{arctg}\ A^+\ , \\ -\mathrm{arctg}\sqrt{(ax)^2-x^2-1}+\sqrt{(ax)^2-x^2-1}\ , \end{array}\right.$$

$$A^{\pm} = \sqrt{\frac{x^2-(ax)^2+1}{\pm(x^2-(ax)^2)-c_1^2}}\ ;$$

$$\frac{\ }{3}(\alpha x)^3 + kcx\alpha x + k^2 ax = c_1[(\alpha x)^2 + 2kcx + k^2]^{3/2}\ ;$$

$$\alpha x = \left|\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\ln V_1 - k_1\mathrm{arctg}\ w_1\ , \\ -\frac{1}{2}\ln V_2 - k_2\mathrm{arcth}\ w_2\ , \\ -\frac{1}{2}\ln V_3 + (1\pm T)^{-1}\ , \end{array}\right.$$

$$\beta x + (cx)^2 - a_\iota cxT,\quad w_m = \frac{k_m}{d_m}(T-d_m)\ ,$$

$$\overline{\frac{2\beta x}{(cx)^2}+1}\ ;\quad d_1 = \cos c_1,\quad d_2 = \mathrm{ch}\ c_1;\quad d_3 = \pm 1;$$

$\mathrm{g}\ c_1$, $k_2 = \mathrm{cth}\ c_1$; $\iota = \overline{1,3}$; $m = \overline{1,2}$, суммы по m нет.

§1.10 ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭИКОНАЛА, ОПИСЫВАЮЩЕГО НЕКОТОРЫЕ ПРОЦЕССЫ КОРРОЗИИ

Наиболее интенсивно коррозионные процессы на металле в атмосферных условиях протекают при периодическом увлажнении и высушивании его поверхности. Скорость протекания процессов коррозии будет зависеть от толщины пленки влаги на поверхности образ связи с этим актуальной является следующая задача: установит форму примает данная пленка, и как эта форма изменяется с течением времени.

Построим математическую модель, описывающую поведение формы пленки влаги на повехности образца. Согласно закону Дальтона скорость испарения жидкости пропорциональна ее площади поверхности, т.е. $v = kS$ или

$$\frac{\partial V}{\partial t} = kS, \qquad (1.10.1)$$

где v – скорость испарения, S – площадь поверхности, V – объем, k – коэффициент пропорциональности. Пусть повехность жидкос вается функцией $u = u(t,x,y)$. Тогда, подставляя формулы

$$V = \iint_D u \, dx \, dy \, , \qquad S = \iint_D \left[1 + u_x^2 + u_y^2 \right]^{1/2} dx \, dy$$

в (1.10.1), будем иметь

$$0 = \iint_D \left[u_t - k \left[1 + u_x^2 + u_y^2 \right]^{1/2} \right] dx \, dy \qquad (1.10.2)$$

Так как область интегрирования D произвольная, то из (1.10.2) следует, что

$$\frac{1}{k^2} u_t^2 - u_x^2 - u_y^2 = 1, \qquad (1.10.3)$$

где $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Таким образом мы получили, что функция, описывающая фо ки жидкости на поверхности образца в процессе испарения, решением уравнения эйконала (1.10.3).

Следует отметить, что уравнение эйконала (1.10.3) является одним из основных уравнений геометрической оптики, а также, – уравнением характеристик для волнового уравнения (см., например, [37]). В [124,166] исследована симметрия уравнения (1.10.3) в классе ых и касательных преобразований.

В этом параграфе симметрийные свойства уравнения (1.10.3) использованы для построения анзацев, редуцирующих его к обыкновенным еренциальным уравнениям. Это позволило найти многопараметрические семейства точных решений данного уравнения.

В тех случаях, когда для решения первоначальной задачи достаточно рассмотреть только продольное сечение образца (случай трубопровода, арматуры и т.п.), будем считать, что функция u зависит от двух переменных $x_0 = kt$, $x_1 = x$.

При этих предположениях уравнение (1.10.3) преобразуется к виду

$$u_0^2 - u_1^2 = 1, \qquad (1.10.4)$$

$$= u(x_0, x_1), \quad u_0 = \frac{\partial u}{\partial x_0}, \quad u_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1}.$$

Для нахождения решений уравнения (1.10.4) применим метод С.Ли, анный на симметрийных свойствах данного уравнения. Как следует результатов работы [166], максимальной алгеброй инвариантности уравнения (1.10.4) в классе операторов С.Ли является алгебра АС(1,2). Исходя из представления операторов алгебры АС(1,2), инвариантные решения уравнения (1.10.4) будем искать в виде

$$z = \varphi(\omega), \qquad (1.10.5)$$

где $z = z(x_0, x_1, x_2)$, $\omega = \omega(x_0, x_1, x_2)$ – инварианты данной алгебры, φ – новая неизвестная функция, $x_2 = u$.

Подставляя анзац (1.10.5) в уравнение (1.10.4), будем иметь

$$\omega_{\wedge}\omega^{\wedge}\dot{\varphi}^2 - 2\omega_{\wedge}z^{\wedge}\dot{\varphi} + z_{\wedge}z^{\wedge} = 0, \qquad (1.10.6)$$

где $\omega_A = \frac{\partial\omega}{\partial x_A}$, $z_A = \frac{\partial z}{\partial x_A}$, $\omega^A = g^{AB}\omega_B$, $z^A = g^{AB}z_B$; $A, B = 0,1$

g^{AB}– метрический тензор трехмерного пространства с сигнату

–),по повторяющимся индексам предполагается суммирование от

$\varphi = = \frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$.

Инварианты алгебры AC(1,2) приведены в таблице 1.5.3. Используя эти инварианты и анзац (1.10.5), редуцируем уравнение (1.10.4) к следующим ОДУ : (1.10 7)

$$L^2\dot{\varphi}^2 - 2Le\dot{\varphi} + m^2 = 0$$
$$L^2\dot{\varphi}^2 - 4\omega\dot{\varphi} + 4\varphi = 0$$
$$\dot{\varphi}^2 + 4k\dot{\varphi} - 4\varphi = 0$$
$$(\varphi + 1)\,\dot{\varphi}^2 + 4\varphi^2 = 0$$
$$\dot{\varphi}^2 - 2\omega = 0$$
$$m^2\omega^2\dot{\varphi}^2 + 4\omega\,(m\varphi + m + 1)\,\dot{\varphi} + 4\varphi\,(\varphi + 1) = 0$$
$$\dot{\varphi}^2 + 4\dot{\varphi} + 4\varphi = 0$$
$$\varphi\dot{\varphi}^2 + 4(\varphi - 1)^2\,(\dot{\varphi} + \varphi) = 0$$
$$\dot{\varphi}^2 + 4(\varphi + 1)\,\dot{\varphi} + 4\varphi^2 = 0$$
$$(\omega^2 - 1)\,\dot{\varphi}^2 - 2\omega\varphi\dot{\varphi} + \varphi^2 - 1 = 0$$
$$(\omega\dot{\varphi} - \varphi)^2 + \dot{\varphi}^2 + 4 = 0$$
$$\omega\,(\omega - 4)\,\dot{\varphi}^2 + (\omega - 4)^{-1} + k^2 = 0$$
$$\omega\dot{\varphi}^2 + \omega - k = 0$$
$$(\omega\dot{\varphi} + \varphi + k)^2 + 1 - k^2 = 0$$

Проинтегрировав редуцированные уравнения и воспользовавшись формулой (1.10.5), находим решения уравнения (1.10.4):

$\alpha y = 0$; $y^2 = 0$; $y^2 + (cy)^2 = \alpha y$; $y^2 + (\alpha y - cy)^2 = 0$; (1.10.

$$cy \pm \left[(ay)^2 - (by)^2 + k^2\right]^{\frac{1}{2}} + k\,\mathrm{Ln}\left[\alpha y\left[k \mp \left[(ay)^2 - (by)^2 + k^2\right]^{\frac{1}{2}}\right]\right] = 0;$$

$$ay - \left[(by)^2 + (cy)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}} = \mathrm{arctg}\,\frac{cy}{by} - \mathrm{arctg}\left[(by)^2 + (cy)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[2(ay)^3 + 3(\alpha y)(cy) + \frac{3}{4}\beta y\right]^2 = 8\left[(\alpha y)^2 + cy\right]^3 ;$$

$$\left[(1 + m)cy + A\right]^{1+m}\left[(1 - m)cy - A\right]^{1-m} = (\alpha y)^{1-m},$$

где $A = \pm\left[4my^2 + (1 + m)^2(cy)^2\right]^{\frac{1}{2}}$;

$$\left[cy \pm \left[(\alpha y)^2 - y^2\right]^{\frac{1}{2}}\right](\alpha y)^{-1} = \mathrm{Ln}\left[\left[\alpha y \pm \left[(\alpha y)^2 - y^2\right]^{\frac{1}{2}}\right](\alpha y)^{-2}\right] = 0;$$

$$\mathrm{arctg}\left[(cy)(by)^{-1}\right] \pm \mathrm{arctg}\left[1-(2y^2)(ay)^{-2}\right]^{\frac{1}{2}} = \mathrm{Ln}\left[\left[ay \pm \left[(ay)^2-2y^2\right]^{\frac{1}{2}}\right]y^{-2}\right];$$

$$\alpha y + cyB^{-1} + \mathrm{Ln}\,B = 0, \quad \text{где} \quad B = cy \pm \left[2\beta y + (cy)^2\right]^{\frac{1}{2}};$$

$$\mathrm{arctg}(y^2-1)(2ay)^{-1} + m^{-1}\mathrm{arctg}(cy)(by)^{-1} + 2a\mathrm{ctg}\,D - 2m\mathrm{arctg}\,Dm^{-1} = 0$$

$$\text{где} \quad D = \left[\left[4(m^2-1)((ay)^2 - y^2)(cy)^{-1}\right] - 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

исимость приведенных решений от произвольных параметров поз- удовлетворять конкретным начальным и граничным условиям, нала- м дополнительно к уравнению (1.10.4). Так как диффузионная сть коррозионного тока связана известной зависимостью с толщи- пленки жидкости на корродирующем образце [28], то решения .10.8) позволяют описывать коррозионные процессы и прогнозировать их развитие со временем.

В настоящем параграфе рассмотрим нелинейное уравнен Шредингера

$$iu_0 + \frac{1}{2m}\Delta u + \lambda|u|^{\frac{4}{3}} u = 0 \ , \qquad (1.11.$$

где $u = u(x)$ – комплекснозначная функция, $|u| = \sqrt{uu^*}$, $x = (x_0,\vec{x})$, $\vec{x} \in R_3$; m, λ – произвольные постоянные.

Максимальной в смысле С.Ли алгеброй инвариантности (1.11.1) является расширенная алгебра Галилея $\overset{2}{AG}(1,3$ ми (1.3.6)– (1.3.8). Из представления операторов этой алг ет, что инвариантные решения уравнения (1.11.1) неободим виде

$$u(x) = f(x)\,\varphi(\omega) \ , \qquad (1.11.2)$$

где $\omega = \{\omega_1(x),\ \omega_2(x),\ \omega_3(x)\}$. Подставим анзац (1.11.2) в уравнение (1.11.1):

$$\frac{1}{2m} f \frac{\partial\omega_i}{\partial x_a}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_a}\varphi_{ij} + \Bigg[f \left[i \frac{\partial\omega_j}{\partial x_0} + \frac{1}{2m}\Delta\omega_j \right] + \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x_a}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_a} \Bigg]\varphi_j + \left(if_0 + \frac{1}{2m}\Delta f \right)\varphi + \lambda|f|^{\frac{4}{3}} f|\varphi|^{\frac{4}{3}}\varphi = \qquad (1.11.3$$

Если выполнены условия расщепления

$$\frac{\partial\omega_i}{\partial x_a}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_a} = A^{ij}(\omega)\ 2m\ |f|^{\frac{4}{3}} \ , \qquad (1.1$$

$$i\frac{\partial\omega_j}{\partial x_0} + \frac{1}{2m}\Delta\omega_j + \frac{1}{mf}\frac{\partial f}{\partial x_a}\frac{\partial\omega_j}{\partial x_a} = B^j(\omega)\ |f|$$

$$if_0 + \frac{1}{2m}\Delta f = C(\omega)\ |f|^{\frac{4}{3}} f \ ,$$

то для определения функции $\varphi(\omega)$ получаем редуцированное уравнение

$$A^{ij}(\omega)\,\varphi_{ij} + B^j(\omega)\,\varphi_j + C(\omega)\,\varphi + \lambda\,|\varphi|^{\frac{4}{3}}\varphi = 0 \ . \qquad (1.11.5)$$

Как следует из теоремы 1.4.1, условия (1.11.4) выполняются том случае, когда ω – инварианты алгебры инвариантности уравн

.11.1). При этом из (1.11.4) однозначно определяется функция f(x).

Инварианты алгебры $\overset{2}{AG}(1,3)$ и соответствующие им значения фун- щии f(x) приведем в виде таблицы.

ТАБЛИЦА 1.11.1. Некоторые инвариантные переменные расширенной ебры Галилея $\overset{2}{AG}(1,3)$.

п	Инвариантные переменные $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$	Функция f(x)
1.	$\dfrac{\vec{\alpha}\,\vec{x}}{\sqrt{1-x_0^2}}, \quad \dfrac{\vec{x}^2}{1-x_0^2},$ $\operatorname{arctg} x_0 + \operatorname{arctg}\dfrac{\vec{\beta}\,\vec{x}}{\vec{\gamma}\,\vec{x}}$	$(1-x_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{\dfrac{im}{2}\,\dfrac{x_0\vec{x}^2}{1-x_0^2}\right\}$
2.	$\dfrac{\vec{\alpha}\,\vec{x}}{x_0}, \quad \dfrac{\vec{x}^2}{x_0^2},$ $x_0^{-1} + \operatorname{arctg}\dfrac{\vec{\beta}\,\vec{x}}{\vec{\gamma}\,\vec{x}}$	$x_0^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\dfrac{im}{2}\,\dfrac{\vec{x}^2}{x_0}\right\}$
3.	$\dfrac{\vec{\alpha}\,\vec{x}}{\sqrt{1+x_0^2}}, \quad \dfrac{\vec{x}^2}{1+x_0^2},$ $-\operatorname{arctg} x_0 + \operatorname{arctg}\dfrac{\vec{\beta}\,\vec{x}}{\vec{\gamma}\,\vec{x}}$	$(1+x_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{-\dfrac{im}{2}\,\dfrac{x_0\vec{x}^2}{1+x_0^2}\right\}$
4.	$\dfrac{\vec{\alpha}\,\vec{x}}{\sqrt{x_0}}, \quad \dfrac{\vec{x}^2}{x_0},$ $-\ln x_0 + \operatorname{arctg}\dfrac{\vec{\beta}\,\vec{x}}{\vec{\gamma}\,\vec{x}}$	$x_0^{-\frac{3}{4}}$
5.	$\dfrac{\vec{\alpha}\,\vec{x}}{\sqrt{x_0}}, \quad \dfrac{\vec{\beta}\,\vec{x}}{\sqrt{x_0}},$ $\dfrac{\vec{\gamma}\,\vec{x}}{\sqrt{x_0}}$	$x_0^{-\frac{3}{4}}$
6.	$\vec{\alpha}\,\vec{x} + x_0\vec{\beta}\,\vec{x},$ $\vec{\alpha}\,\vec{x} + x_0\vec{\gamma}\,\vec{x}, \quad x_0$	$\exp\left\{-\dfrac{im}{2}\,\dfrac{(\vec{\alpha}\,\vec{x})}{x_0}\right\}$

7.	$\vec{\alpha}\vec{x}$, $\vec{x}^2$, $x_0 + \operatorname{arctg} \frac{\vec{\beta}\vec{x}}{\vec{\gamma}\vec{x}}$	1
8.	$\vec{\alpha}\vec{x}$, $\vec{x}^2$, x_0	1
9.	$\vec{\alpha}\vec{x}$, $\vec{\beta}\vec{x}$, x_0	1

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11.1. В виду громоздкости некоторые нтов алгебры $\overset{2}{AG}(1,3)$ в таблице 1.11.1 опущены. Посто $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ удовлетворяют условиям $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2 = \vec{\gamma}^2 = 1$, $\vec{\alpha}\ \vec{\beta}$ $= \vec{\beta}\vec{\gamma} = 0$.

Используем результаты таблицы 1.11.1 и анзац (1.11.2) для редукции уравнения (1.11.1). В результате придем к следующим уравнениям для функции $\varphi(\omega)$:

1°. $L_2(\varphi) + 6\varphi_2 - 2im\varphi_3 + m^2\omega_2\varphi - 2\lambda m|\varphi|^{\frac{4}{3}}\varphi = 0,$

2°. $L_2(\varphi) + 6\varphi_2 + 2im\varphi_3 - 2\lambda m|\varphi|^{\frac{4}{3}}\varphi = 0,$

$L_2(\varphi) + 6\varphi_2 + 2im\varphi_3 - m^2\omega_2\varphi - 2\lambda m|\varphi|^{\frac{4}{3}}\varphi = 0,$

4°. $L_2(\varphi) + im\omega_1\varphi_1 + 2(im\omega_2 + 3)\varphi_2 + 2im\varphi_3 + \frac{3}{2}\, im\varphi - \lambda m$

5°. $\Delta\varphi + im\omega_a\varphi_a + \frac{3}{2}\, im\varphi - 2\lambda m|\varphi|^{\frac{4}{3}}\varphi = 0,$ (1

6°. $(\omega_3^2+1)(\varphi_{11} + \varphi_{22}) + \varphi_{12} - \frac{2im}{\omega_3}\left(\omega_a\varphi_a + \frac{1}{2}\varphi\right) = -2\lambda m|\varphi|\varphi$

7°. $L_2(\varphi) + 6\varphi_2 + 2im\varphi_3 - 2\lambda m|\varphi|^{\frac{4}{3}}\varphi = 0,$

8°. $i\varphi_3 + \frac{1}{2m}(\varphi_{11} + 4\omega_1\varphi_{12} + 4\omega_2\varphi_{22}) + \lambda|\varphi|^{\frac{4}{3}}\varphi = 0,$

9°. $i\varphi_3 + \frac{1}{2m}(\varphi_{11} + \varphi_{22}) + \lambda|\varphi|^{\frac{4}{3}}\varphi = 0.$

Нумерация формул (1.11.6) соответствует нумерации .11.1, $\Delta\varphi = \varphi_{11} + \varphi_{22} + \varphi_{33}$; $a = 1,2,3;$

$$L_2(\varphi) \equiv \varphi_{11} + 2\omega_2\varphi_{22} + (\omega_2 - \omega_1^2)^{-1}\varphi_{33} + 4\omega_1\varphi_{12} .$$

Решив некоторые из уравнений (1.11.6), при помощи анзаца (1.11.2) строим следующие решения уравнения (1.11.1):

$$u(x) = x_0^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{im}{2}\frac{\vec{x}^2}{x_0}\right\} \varphi(\omega_1) , \qquad (1.11.7)$$

$\omega_1 = \dfrac{\vec{\alpha}\,\vec{x}}{x_0}$, а функция $\varphi(\omega_1)$ определяется интегралом

$$\frac{d\tau}{(c_2 + \tau)^{10/3}} = \sqrt{\frac{6}{5}\lambda m}\,(\omega_1 + c_1) , \qquad (1.11.8)$$

произвольные постоянные;

$$u(x) = x_0^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{im}{2}\frac{\vec{x}^2}{x_0}\right\} \varphi(\omega_2) , \qquad (1.11.9)$$

$\omega_2 = \dfrac{\vec{x}^2}{x_0^2}$, действительная функция $\varphi(\omega_2)$ является решением

авнения Эмдена – Фаулера

$$\omega_2\varphi_{22} + 3\varphi_2 - \lambda m\varphi^{\frac{7}{3}} = 0 ; \qquad (1.11.10)$$

$$(x) = x_0^{2\;-\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{im}{2}\frac{\vec{x}^2}{1 - x_0}\right\} , (\lambda = 6i); \qquad (1.11.11)$$

$$\vec{a}\,\vec{x})^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{im}{2}\frac{\vec{x}^2}{x_0}\right\} , \vec{a}^2 = \frac{8}{15}\lambda m; \qquad (1.11.12)$$

$$x_0^{3} \exp\left\{-\frac{im}{2}\frac{\vec{x}^2 - \vec{Б}\,\vec{x}}{x_0}\right\} , \vec{Б}^2 = -\frac{8\lambda}{m} ; \qquad (1.11.1$$

$$x = (\frac{}{3}\lambda m\vec{x}^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{-\frac{im}{2}\frac{\vec{x}^2}{x_0}\right\} ;$$

$$x) = \left(\frac{c_1}{3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}} x_0^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{ i\left[c_1 x_0^{-\frac{1}{3}} - \frac{m}{2}\frac{(\vec{\alpha}\,\vec{x})^2}{x_0}\right]\right\} ;$$

$$\left(\frac{3i}{4\lambda x_0}\right)^{\frac{3}{4}} ; \qquad (1.11.14)$$

$$u(x) = \left[\frac{c}{\lambda} \right]^{\frac{3}{4}} \exp\{icx_0\} ; \qquad u(x) = (\vec{a}\,\vec{x})^{-\frac{3}{2}} ;$$

$$u(x) = \left[\frac{8}{3} \lambda m \vec{x}^{2} \right]^{-\frac{3}{4}} ; \qquad u(x) = \exp\left\{ \frac{i}{2} \vec{b}\,\vec{x} \right\} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11.2. Из решений (1.11.12), (1.11.13) при $\lambda =$ получаем фундаментальное решение

$$u(x) = x_0^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{ -\frac{im}{2} \frac{\vec{x}^{2}}{x_0} \right\} \qquad (1.11$$

нейного уравнения Шредингера.

Покажем, что уравнение (1.11.1) обладает со

решениями. Для этого положим

$$u(x) = \exp\{icx_0\}\, \varphi(\omega) , \quad \omega = \vec{a}\,\vec{x},$$

где $\varphi(\omega)$ – действительная функция; c, $\vec{a}$ – произволь
льные постоянные.

Анзац (1.11.16) редуцирует (1.11.1) к ОДУ

$$\frac{\vec{a}^{2}}{2m} \ddot{\varphi} + c\varphi + \lambda \varphi^{\frac{7}{3}} = 0 . \qquad (1.11.17)$$

Построим частные решения уравнения (1.11.17) специального вид

$$\varphi(\omega) = a(2 \operatorname{sh} b\omega)^{k_1} (2 \operatorname{ch} b\omega)^{k_2} , \qquad (1.11.18)$$

где a, b, k_1, k_2 – некоторые постоянные, подлежащие оп

дставляя (1.11.18) в (1.11.17), получаем

$$\frac{\vec{a}^{2} b^{2}}{2m} \left[k_1 + k_2 + 2k_1k_2 + k_1(k_2 - 1)\operatorname{cth}^2 b\omega + k_2(k_2 - 1)\operatorname{th}^2 b\omega \right]$$

$$+ c + \lambda \left[a (\operatorname{sh} b\omega)^{k_1} (2\operatorname{ch} b\omega)^{k_2} \right]^{\frac{4}{3}} = 0.$$

Постоянные a, b, k_1, k_2 можно подобрать таким
(1.11.19) будет выполняться тождественно.

Пусть $k_1 = 0$, $k_2 = -\frac{3}{2}$, тогда выражение (1.11.19) принимает ви

$$c - \frac{3}{2} \frac{\vec{a}^{2} b^{2}}{2m} + \frac{15}{4} \frac{\vec{a}^{2} b^{2}}{2m} \operatorname{th}^2 b\omega + \frac{\lambda a^{\frac{4}{3}}}{4 \operatorname{ch}^2 b\omega} = 0 .$$

нство справедливо, если

$$_{1} = \pm\left(\frac{20c}{-3\lambda}\right)^{\frac{3}{4}}, \; b = b_1 = \pm\sqrt{\frac{-8mc}{9\vec{d}^{\,2}}}, \; c < 0, \; \lambda > 0. \qquad (1.11.20)$$

ким образом, получаем решение уравнения (1.11.17)

$$\varphi(\omega) = a_1(2 \operatorname{ch} b_1\omega)^{-\frac{3}{2}}. \qquad (1.11.21)$$

При $k_1 = -\frac{3}{2}$, $k_2 = 0$ из (1.11.19) имеем

$$c \quad \frac{3}{2}\,\frac{\vec{d}^{\,2}b^2}{2m} + \frac{15}{4}\,\frac{\vec{d}^{\,2}b^2}{2m}\operatorname{cth}^2 b\omega + \frac{\lambda\, a^{\frac{4}{3}}}{4\operatorname{sh}^2 b\omega} = 0 .$$

о справедливо, если

$$\frac{c}{\lambda}\Big)^{\frac{3}{4}}, \; b = b_2 = \pm\sqrt{\frac{-8mc}{9\vec{d}^{\,2}}}, \; c < 0, \; \lambda < 0. \qquad (1.11.22)$$

$$\varphi(\omega) = a_2(2 \operatorname{sh} b_2\omega)^{-\frac{3}{2}} \qquad (1.11.23)$$

решение уравнения (1.11.17).

По формулам (1.11.16), (1.11.20)–(1.11.21), (1.11.22) – .11.23) строим два решения уравнения (1.11.1):

$$u(x) = a_1(2 \operatorname{ch} b_1\vec{d}\,\vec{x})^{-\frac{3}{2}} \exp\{icx_0\}, \qquad (1.11.24)$$

$$u(x) = a_2(2 \operatorname{sh} b_2\vec{d}\,\vec{x})^{-\frac{3}{2}} \exp\{icx_0\}.$$

е (1.11.24) естественно назвать солитонными по аналогии с ешением [29]

$$= \left(-\frac{\lambda}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\left[\operatorname{ch}\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}(x_1+Vx_0)\right]^{-1}\times\exp\left\{\frac{iV}{2}\left[x_1+\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\lambda}{8V}\right)x_0\right]\right\}$$

ного одномерного уравнения Шредингера

$$i\psi_0 + \Delta\psi = \lambda\psi\,(\psi^*\psi) .$$

ГЛАВА 2

УСЛОВНАЯ СИММЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕН

В монографии Фущича и Никитина [92] и нескольких работах этих авторов, предшествующих ей, всесторонне исследована симметрия уравнений Максвелла. В ней, в частности, показано, что первая пара уравнений Максвелла лоренц-неинвариантна и становится л инвариантной только если дополнить ее до полной системы ур Максвелла. Этот факт сыграл решающую роль при разработке ловной симметрии ДУ [124].

Следует отметить несколькко работ в этом направл та Блумена и Коула [143], где введено понятие "не ("non-classical") инвариантности линейного одномерно теплопроводности. В работе [189] Олвер и Розенау ввели понят бой" симметрии ДУ и привели пример такой симметрии для нелинейно уравнения акустики. Фущич и Цифра в работе [170] ввели понятие "нарушенной" ("broken") симметрии ДУ, которое перекликается с понятиями "неклассической"[143] и "слабой" симметрии [189].

И "неклассcическая", и "слабая", и "нарушенная" симметрии ются частными случаями условной симметрии. Все эти понятия лены нами и названы Q-условной симметрией ДУ.

Окончательно понятие условной инвариантности работе [112] и потом подробно описано в монографии [124

Ряд результатов по Q-условной инвариантности с н гих позиций были получены Крускалом и Кларксоном в [149 дл ния Буссинеска.

В последствии целый ряд работ [100-105,120-128,160-163,171] был посвящен исследованию условной и Q-условной инвариантности конкретных уравнений.

вная симметрия содержит в себе и лиевскую, существенно расширяя. Введение понятия условной инвариантности повлекло собой необходимость пересмотра с этих позиций симметрии всех ос– ных уравнений математической и теоретической физики. И уже первые в этом направлении, сделанные в настоящей главе, говорят о пер– тивности таких исследований.

§2.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ

Рассмотрим некоторую систему ДУ

$$S(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots,\ \underset{k}{u}) = 0, \qquad (2.1.1)$$

где $u = u(x)$, $x \in R_{1+n}$, $u \in R_m$, $\underset{k}{u}$ – совокупность всевозможных производных k–го порядка функции u.

Пусть G – максимальная в смысле С.Ли группа инвар уравнений (2.1.1), а A – алгебра Ли, соответствующая инвариантности (2.1.1) относительно группы G следует льно данной группы инвариантно все множество ре (2.1.1). Однако такая информация о симметрийных свойс (2.1.1) далеко не полная. Многие ДУ имеют такие подм ний, симметрия которых шире, а иногда и совсем отличная от всего множества решений. Опыт показывает, что именно такие подмножества решений чаще всего используются для решения конкретных прикладных задач. Как же из всего множества решений ДУ выделять подмножества, имеющие симметрию шире, чем все множество решений? проблему можно решить при помощи условной симметрии, понятие мы введем в настоящем параграфе.

Условие инвариантности уравнений (2.1.1) относит A по Ли имеет вид

$$\tilde{X} S \Big|_{S=0} = 0 ,$$

или в эквивалентной форме (см. [77])

$$\tilde{X} S = \lambda S , \qquad (2.1$$

где $\tilde{X}$ – продолжение инфинитезимального оператора X, $\lambda = \lambda(x,u,\theta)$ – некоторая функция, θ – групповой параметр.

В [30] отмечено, что если уравнения системы (2.1.1) имеют различный порядок, то ее симметрию можно расширить, использ переходе на многообразие дифференциальные следствия уравнени

порядка. Другими словами, в формуле (2.1.3) λ может быть диффе-
нциальным оператором.

Если оператор Q не принадлежит алгебре A, то условия
1.2), (2.1.3) не выполняются. Действуя оператором $\tilde{Q}$ на уравне-
S, получаем

$$\tilde{Q} S = \lambda_0 S + \lambda_1 S_1 , \qquad (2.1.4)$$

$S_1(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{s}{u})$ – некоторые дифференциальные выраж
ельно переменных x и функции u.

РЕДЕЛЕНИЕ 2.1.1. Систему уравнений (2.1.1) назовем усл
тной относительно оператора Q, если она инвариантна в
относительно этого оператора вместе с некоторым дополни
м условием

$$S_1(x, u, \underset{1}{u}, \dots, \underset{s}{u}) = 0. \qquad (2.1.5)$$

угими словами, если кроме условия (2.1.4) выполняется еще условие

$$\tilde{Q} S_1 = \lambda_2 S + \lambda_3 S_1 , \qquad (2.1.6)$$

истема (2.1.1) называется условно инвариантной относительно опе-
Q.

$\lambda_1 = 0$ формулы (2.1.4) и (2.1.3) совпадают. Это зна
ие условной инвариантности включает в себя понятие ли
тности.

олнительное условие (2.1.5) выделяет из всего множеств
уравнения (2.1.1) подмножество, инвариантное относительно
тора Q. Решения из этого подмножества естественно назвать условно
нвариантными.

Очевидно, что понятие условной инвариантности имеет смысл толь-
в том случае, когда система уравнений (2.1.1), (2.1.5) совместна.
нахождения условно инвариантных решений необходимо решать сов-
систему уравнений (2.1.1), (2.1.5), уравнение

$$Q\,u = 0$$

и указать алгоритм нахождения оператора Q. В общем эту задачу трудно. Однако, если дополнительное условие (2.1.5 падает с (2.1.7), то удается построить конструктивный алгоритм, помощью которого эта задача решается значительно проще. Выделяя осо бо этот случай, вводим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.2. Систему уравнений (2.1.1) Q-условно инвариантной, если

$$\tilde{Q}\,S = \lambda_0 S + \lambda_1(Qu),$$

Отметим, что наличие операторов условной инвариа лиевских, позволяет строить анзацы и проводить редукц при редукции возникают некоторые особенности, на котор вимся более подробно. Для простоты рассмотрим случай ния

$$L\,(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots,\ \underset{k}{u}\,) = 0 \qquad (2.1.9)$$

относительно скалярной функции $u = u(x) \in R_1$ переменных $x \in R_{1+n}$

Пусть (2.1.9) инвариантна относительно оператора Q при допол нительном условии

$$L_1(x,\ u,\ \underset{1}{u},\ \ldots,\ \underset{s}{u}\,) = 0 \qquad (2.1.1$$

Так как система уравнений (2.1.9)–(2.1.10) инвариантна о пepатора Q в смысле С.Ли, то, как отмечалось в гл построенный по данному оператору, будет редуцировать тему. Причем редукция, вообще говоря, будет осуществля уравнений меньшей размерности. Количество уравнений системы равно количеству уравнений (2.1.9)–(2.1.10). Другим ми, условно инвариантный анзац редуцирует уравнение (2.1.9) к сис ме ДУ меньшей размерности.

Замечательный тот факт, что в случае Q-условной инвариантнос редукция исследуемого уравнения осуществляется также как и пр т.е. размерность редуцированной системы не превышает разм

ости исходной. Докажем это для скалярного уравнения (2.1.9).

ТЕОРЕМА 2.1.1 Анзац, полученный при помощи Q-условного оператора инвариантности уравнения (2.1.9) редуцирует данное уравнение к дному ДУ меньшей размерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$Q = \partial_0 \qquad (2.1.11)$$

Q-условной инвариантности уравнения (2.1.9) (в случае, ко

∂_3 , как мы уже отмечали в §1.4, согласно теореме Фробени

перейти к системе координат (x', u'), в которой $Q =$

(2.1.8) имеет вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = \lambda_0 L + \lambda_1 u_0 \ . \qquad (2.1.12)$$

ражение (2.1.12) – это ОДУ относительно функции L по переменной которое все остальные переменные входят на правах параметров.

решение уравнения (2.1.12) имеет вид

$$x_0,\ \vec{x},u,u_1,\ \dots,\ u_k) = \hat{L}(\vec{x},u,u_1,\ \dots,\ u_k)A + u_0 B\ , \qquad (2.1.13)$$

$$\mathrm{D} \int \lambda_0 \ dx_0 \ , \qquad B = A \int \frac{\lambda_1}{A} \, dx_0 \ .$$

лученный при помощи оператора (2.1.11), имеет вид

$$u = \varphi(\ \vec{x}). \qquad (2.1.1$$

яя (2.1.14) в (2.1.9) и учитывая (2.1.13), а также тот

0, получим

$$\hat{L}\ (\vec{x},\ \varphi,\ \varphi_1,\ \dots,\ \varphi_k\ ) = 0 \qquad (2.1.15$$

орема доказана.

В общем виде теорема 2.1.1 доказана в [171].

2.2. Q–УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

Основным уравнением нелинейной теплопроводности и диффу
ляется уравнение

$$u_0 + \vec{\nabla}(f(u)\,\vec{\nabla}u) = h(u)\ , \qquad (2$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+n}$, $f(u)$ и $h(u)$ – некоторые зада
ные гладкие функции.

В настоящем параграфе исследуем Q–условную инвариантност
оного $(x = (x_0, x_1))$ уравнения (2.2.1), переписав его
тной форме

$$H(u)u_0 + u_{11} = F(u)\ .$$

В работах [21,48] исследована инвариантность ура
(2.2.2) методом С.Ли. Из результатов этих работ следуе
ние (2.2.2) при $F(u) \neq const$, $H(u) \neq const$ может бы
только относительно следующих операторов:

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}\ , \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\ , \quad G = e^{x_0}\,(\partial_1 + mx_1 u\,\partial_u)\ , \qquad (2.2.$$

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + M(u)\partial_u\ , \quad X = e^{x_0}u\,\partial_u\ ,$$

где $m = const$, $M(u)$ – некоторая конкретная функция, линейно
ая от u. В настоящем параграфе мы исследуем Q–условную
ость данного уравнения.

Пусть

$$Q = A(x_0,x_1,u)\,\partial_0 + B(x_0,x_1,u)\,\partial_1 + C(x_0,x_1,u)\,\partial_u \qquad (2$$

где A, B, C – гладкие функции, дифференциальный оп
порядка, действующий на многообразии $(x_0,x_1,u) \in R_3$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. Уравнение (2.2.2) Q–условно инвариантно отно
тельно оператора (2.2.4), если функции A, B, C удовлетворяют си
теме ДУ в одном из следующих случаев:

1). $A \neq 0$ (не умаляя общности можно положить $A = 1$):

$$C_{uu} = 2(B_{1u} + HBB_u), \qquad (2.2.5)$$

$$= 2(C_{1u} + HB_uC) - (HB_0 + B_{11} + 2HBB_1 + HBC),$$

$$F - (C_u - 2B_1)F = HC_0 + C_{11} + 2HCB_1 + HC^2 \;;$$

$$A = 0,\; B = 1, \qquad (2.2.6)$$

$$F - \left(C_u + \frac{H}{H}C\right)F = HC_0 + C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu} - C\frac{H}{H}(CC_u + C_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем условие Q-условной инвариантности

$$\tilde{Q}S\Big|_{\substack{S=0\\ Qu=0}} = 0, \qquad (2.2.7)$$

$$H(u)u_0 + u_{11} - F(u), \quad Qu = Au_0 + Bu_1 - C.$$

чай 1. Из уравнения $Qu = 0$ находим $u_0 = C - Bu_1$.

(2.2.7) можно переписать следующим образом:

$$c^{11} + \left[Hu_0 - F\right]C \Big] \Bigg|_{\substack{u_0 = C - Bu_1\\ u_{11} = F - H(C - Bu_1)}} = 0, \qquad (2.2.8)$$

це

$$C_0 + u_0C_u - u_0u_1B_u - u_1B_0, \qquad (2.2.9)$$

$$C_{11} + 2u_1C_{1u} + u_1^2C_{uu} - u_1B_{11} - 2u_1^2B_{1u} - u_1^3B_{uu} + u_{11}\left[C_u - u_1B_u\right] - 2u_{11}\left[B_1 + u_1B_u\right].$$

дставив (2.2.9) в (2.2.8), получим

$$\left(-C_{uu} + 2B_{1u} + 2HBB_u\right) + u_1\Big[3B_uF - 2C_{1u} - 2HB_uC + HB_0 + B_{11} +$$

$$BC\Big] + CF - \left[C_u - 2B_1\right]F - HC_0 - C_{11} - 2HCB_1 - HC^2 = 0. \qquad (2$$

у функции B, C не зависят от u_1, то из (2.2.10)

5).

Случай 2. Из уравнения $Qu = 0$ имеем $u = C$. Тогда

$$u_{11} = C_1 + C_uu_1 = C_1 + C_uC,$$

$$u_0 = \frac{1}{H}\left[F - u_{11}\right] = \frac{1}{H}\left[F - C_1 - C_uC\right].$$

оделав выкладки, аналогичные случаю 1, получим уравнение (2.2.6).

Теорема доказана.

Чтобы найти операторы (2.2.4) необходимо проинтегрирова тему ДУ (2.2.5) или уравнение (2.2.6). В общем случае решить задачу не представляется возможным. Ниже мы рассмотрим уравнен (2.2.2) при конкретном выборе функций $F(u)$ и $H(u)$. Это облегчит задачу решения уравнений (2.2.5), (2.2.6) и нахождение оп (2.2.4).

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ.

При $F(u) = 0$ и $H(u) = -1$ имеем классиче ние теплопроводности

$$- u_0 + u_{11} = 0 \ .$$

Хорошо известно, что максимальная в смысле Ли алгебра уравнения (2.2.11) состоит из операторов

$$\partial_0 \ , \ \partial_1 \ , \quad G = x_0\partial_1 - \frac{1}{2} x_1 u\partial_u \ , \quad I = u\partial_u \ , \qquad (2.2.12)$$

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 \ , \ \Pi = x_0(x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \frac{1}{2} u\partial_u) - \frac{x_1^2}{4} u\partial_u .$$

Этот факт установил еще С.Ли.

Исследуем теперь Q-условную инвариантность уравнения Из теоремы 2.2.1 при $F = 0$ и $H = -1$ следует:

Случай 1.

$A = 1$, $B = w^1(x_0,x_1)$, $C = w^2(x_0,x_1)u + w^3(x_0,x_1)$,

где функции $\vec{w} = \{w^1, w^2, w^3 \}$ – решения системы урав

$$\left[\partial_0 + 2w^1_1 - \partial_{11} \right] \vec{w} = \vec{F} \ , \quad \vec{F} = \left\{ 2w^2_1 \ , 0, \ 0 \right\} \ ;$$

Случай 2. $A = 0$, $B = 1$.

$$C_0 = C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu} \ . \qquad (2.2.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.1. Из (2.2.14), (2.2.15) следует, что даже в случае линейного уравнения (2.2.11) задача отыскания Q-усло раторов сводится к решению нелинейных ДУ. Это обстоятельст ьно усложняет проблему полного описания Q-условной симметрии внения (2.2.11).

По решениям уравнений (2.2.14), (2.2.15) можно получить лиевс- операторы (2.2.12):

$$1, \quad B = C = 0 \longrightarrow \partial_0 ,$$

$$C = 0, \quad B = 1 \longrightarrow \partial_1 ,$$

$$= 1, \quad C = -\frac{x_1 u}{2x_0} \longrightarrow G , \qquad (2.2.16)$$

$$\frac{x_1}{2x_0}, \quad w^2 = w^3 = 0 \longrightarrow D .$$

$$w^1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad w^2 = -\frac{2x_0 + x_1}{4x_0^2}, \quad w^3 = 0 \longrightarrow П.$$

раторы, не входящие в алгебру (2.2.12). Приведем их в виде таб ы 2.2.1, причем выпишем в таблицу анзацы, найденные при помощи нных операторов и редуцированные уравнения, полученные после подс- новки этих анзацев в уравнение (2.2.11).

ТАБЛИЦА 2.2.1.

	Оператор **Q**	Анзац	Редуцированное уравнение
	$x_1\partial_0 + \partial_1$	$u = \varphi\left[x_0 + \frac{x_1^2}{2}\right]$	$\varphi = 0$
	$x_1\partial_0 + \partial_1 + x_1^3\partial_u$	$u = \varphi\left[x_0 + \frac{x_1^2}{2}\right] + \frac{x_1^4}{4}$	$\varphi = -3$
3.	$x_1^2\partial_0 - 3x_1\partial_1 - 3u\partial_u$	$u = x_1\varphi\left[x_0 + \frac{x_1^2}{6}\right]$	$\varphi = 0$
4.	$x_1^2\partial_0 - 3x_1\partial_1 - - (3u + x_1^5)\partial_u$	$u = x_1\varphi\left[x_0 + \frac{x_1^2}{6}\right] + \frac{x_1^5}{12}$	$\varphi = -15$
.	$x_1\partial_1 + u\partial_u$	$u = x_1\varphi(x_0)$	$\varphi = 0$

6.	$\mathrm{cth}\,x_1\partial_1 + u\partial_u$	$u = \mathrm{ch}\,x_1\varphi(x_0)$	$\varphi - \varphi = 0$
7.	$-\mathrm{cth}\,x_1\partial_1 + u\partial_u$	$u = \cos x_1\varphi(x_0)$	$\varphi + \varphi = 0$
8.	$\partial_1 - \left[\frac{1}{2x_0 - x_1} + 1\right] u\partial_u$	$u = (2x_0 - x_1)e^{-x_1}\varphi(x_0)$	$\varphi - \varphi = 0$
9.	$\partial_1 - \sqrt{-2(x_0+u)}\partial_u$	$u = x_0 - \frac{1}{2}\left[x_1 + \varphi(x_0)\right]^2$	φ
10.	$\left[x_0 + \frac{x_1^2}{2}\right]\partial_0 - x_1\partial_1$	$u = \varphi\left(x_0x_1 + \frac{x_1^3}{6}\right)$	

Отметим, что операторы, приведенные в таблице 2.2.1, да исчерпывают всех операторов условной симметрии, которые можн чить, решая уравнения (2.2.14), (2.2.15). Если предположить, (2.2.14) $w^2 = w^3 = 0$, то для нахождения функции w^1 получим ур нение Бюргерса

$$w^1_0 + 2w^1w^1_1 = w^1_{11} \quad . \qquad (2$$

При помощи замены Коула–Хопфа находим решение уравн виде

$$w^1 = -\partial_1(\ln f) = -\frac{f_1}{f} \quad ,$$

где $f = f(x_0, x_1)$ – произвольное решение уравнен образом, получим оператор

$$Q = f\partial_0 - f_1\partial_1 \quad .$$

Оператор (2.2.18) можно использовать для построения алгорит множения решений уравнения (2.2.11).

ТЕОРЕМА 2.2.2. Если функция f является решением уравн (2.2.11), а функция $u(x)$ – общий интеграл ОДУ

$$f_1dx_0 + fdx_1 = 0 \quad ,$$

x) – решение уравнения (2.2.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что (2.2.19) является уравнением в полных дифференциалах. Тогда его общее решение

$$u(x_0,x_1) = c$$

бладает следующим свойством

$$u_0 = f_1 , \quad u_1 = f .$$

да

$$u_0 - u_{11} = f_1 - (f)_1 \equiv 0 ,$$

бовалось доказать.

фективности приведенного алгоритма несложно убедить

Начиная с постоянного решения $u = 1$, получим сл решений

$$x_1 \longrightarrow x_0 + \frac{x_1^2}{2!} \longrightarrow x_0x_1 + \frac{x_1^3}{3!} \longrightarrow \ldots \qquad (2.2.20)$$

одолжая этот процесс, находим следующие решения уравнения (2.2.11):

$$\frac{x_1^{2m}}{2m)!} + \frac{x_0}{1!}\frac{x_1^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{x_0^2}{2!}\frac{x_1^{2m-4}}{(2m-4)!} + \ldots + \frac{x_0^{m-1}}{(m-1)!}\frac{x_1^2}{2!} + \frac{x_0^{m}}{m!},$$

$$\frac{x_1^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{x_0}{1!}\frac{x_1^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{x_0^2}{2!}\frac{x_1^{2m-3}}{(2m-3)!} + \ldots + \frac{x_0^{m-1}}{(m-1)!}\frac{x_1^3}{3!} + \frac{x_0^m}{m!}\frac{x_1}{1!},$$

, 1, 2, ...

уравнении (2.2.15)

$$C = \frac{1}{V(x_0,u)} , \qquad (2.2.21)$$

функции $V(x_0,u)$ получим нелинейное уравнение теплопрово

$$V_0 = \partial_u(V^{-2}V_u). \qquad (2.2.22)$$

оператор

$$Q = V(x_0,u)\partial_1 + \partial_u \qquad (2.2.23)$$

устанавливает связь между уравнениями (2.2.23) и (2.2.11):

$$V_0 - \partial_u(V^{-2}V_u) = \frac{1}{u_1}\partial_1\left[\frac{u_0 - u_{11}}{u_1}\right],$$

$$u_0 - u_{11} = \frac{1}{V}\int\left[V_0 - \partial_u\left[V^{-2}V_u\right]\right] du$$

при помощи замены

$$V(x_0,u) = \frac{\partial x_1(x_0,u)}{\partial u} , \qquad \frac{\partial u(x_0,u)}{\partial x_1} = \frac{1}{V(x_0,u)} .$$

Этот результат с других позиций был получен в работе [142

Если в уравнении (2.2.15)

$$C = \Phi(x_0,x_1)u ,$$

то функция $\Phi(x_0,x_1)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса

$$\Phi_0 = 2\Phi\Phi_1 + \Phi_{11} .$$

Тогда оператор

$$Q = \partial_1 + \Phi(x_0,x_1)u\partial_u$$

устанавливает связь между уравнениями (2.2.25) и (2

замены Коула–Хопфа

$$\Phi = \frac{f_1}{f} .$$

Таким образом, известные факты линеариации уравнения Бюргерс (2.2.25) и нелинейного уравнения теплопроводности (2.2.22) к линейному уравнению (2.2.11) можно получить при помощи оп Q–условной инвариантности.

П–2. УРАВНЕНИЕ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА.

При $H(u) = \frac{1}{u}$, $F(u) = 0$ уравнение (2.2.2

$$u_0 + uu_{11} = 0$$

является уравнением гейзенберговского ферромагнетика приближении (см.[69]).

Максимальная в смысле С.Ли алгебра инвариантности уравнен (2.2.27) состоит из операторов

$$\partial_0 , \ \partial_1 , \ D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 , \quad D_2 = x_1\partial_1 + 2u\partial_u .$$

Исследуем Q–условную инвариантность данного уравнения.

ТЕОРЕМА 2.2.2. Уравнение (2.2.27) Q–условно инвариантн сительно оператора (2.2.4) при $A = 1$, если функции B оряют системе ДУ:

$$- 0, \quad uC_{uu} = 2(BB_u + uB_{1u}), \qquad (2.2.28)$$

$$+ 2BB_1 - u^{-1}BC - 2B_uC - 2uC_{1u} = 0 \ ,$$

$$+ 2CB_1 - u^{-1}C^2 = 0 \ .$$

(2.2.27) Q–условно инвариантно относительно опера

$C(x,u)\partial_u$, если функция **C** является решением ДУ

$$u\left[C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu}\right] + CC_1 + C^2C_u = 0 \ . \qquad (2.2.29)$$

Теорема 2.2.2 является частным случаем теоремы 2.2.1.

Решая уравнения (2.2.28), (2.2.29), по формуле (2.2.4) строим ператоры Q–условной инвариантности уравнения (2.2.27). При помощи енных операторов находим анзацы, которые редуцируют уравнение 27) к ОДУ. Все эти результаты приведем в виде следующей

ТАБЛИЦА 2.2.2.

Оператор Q	Анзац	Редуцирова уравнен
$x_1\partial_0 + u\partial_1$	$x_0u - \frac{1}{2}x_1^2 = \varphi(u)$	$\varphi'' = 0$
$x_1^2\partial_0 + 2x_1u\partial_1 + 2u^2\partial_u$	$2\frac{x_0}{x_1}u - x_1 = \varphi\left(\frac{u}{x_1}\right)$	$\varphi'' = 0$
$\sqrt{x_0}\,\partial_1 + \sqrt{2u}\,\partial_u$	$u = \frac{1}{2}\left[\frac{x_1}{\sqrt{x_0}} + \varphi(x_0)\right]^2$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 0$
$\sqrt{2x_0}\,\partial_1 + L(u)\partial_u$	$\int L^{-1}(u)du = \frac{x_1}{\sqrt{2x_0}} + \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0}$

5.	$\partial_1 + \ln u\, \partial_u$	$\int \frac{du}{\ln u} = x_1 + \varphi(x_0)$	φ'
6.	$x_0\partial_1 + x_1\partial_u$	$u = \varphi(x_0) + \frac{x_1^2}{2x_0}$	φ'

В таблице 2.2.2 $L(u)$ – решение уравнения

$$uL'' + L' = L^{-1} .$$

Проинтегрировав редуцированные уравнения и подст

функцию φ в соответствующий анзац, получим ре

(2.2.27):

$$u = \frac{x_1^2 + c}{2x_0}, \quad c = \text{const}; \int \frac{du}{\ln u} = x_1 - x_0 \; ; \; uL'(u) = \frac{x_1}{\sqrt{2x_0}} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.2. Решения уравнения (2.2.27) можно размножить при помощи лиевских преобразований по следующей формуле

$$u(x_0,x_1) = \theta_2^2 \, f\left(\theta_1^2 x_0 + a_0, \; \theta_1\theta_2 x_1 + a_1\right) , \qquad (2.2.30)$$

где $f(x_0,x_1)$ – известное, а $u(x_0,x_1)$ – новое решение дан

ия, $\theta_1,\theta_2,a_0,a_1$ – групповые параметры.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.3. Полученные результаты для урав

можно обобщить на случай, когда функция u зависит

количества переменных, т.е. для уравнения

$$u_0 + u\Delta u = 0 \quad , \qquad (2. .31)$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0,\vec{x}) \in R_{1+n}$. Все эти результаты приведем таблице 2.2.3.

ТАБЛИЦА 2.2.3.

№ п/п	Оператор Q	Анзац	Редуцирова уравнен
1.	$x_a\partial_0 + nu\partial_a$	$x_0 u - \frac{1}{2n}\,\vec{x}^2 = \varphi(u)$	$\varphi'' =$
2.	$\alpha_i\vec{\alpha}\,\vec{x}\,\partial_0 + u\partial_a$	$x_0 u - \frac{1}{2}\left(\vec{\alpha}\,\vec{x}\right)^2 = \varphi(u)$	φ''

$\alpha_a\left[\vec{\alpha}\,\vec{x}\right]^2\partial_0 + \vec{\alpha}\,\vec{x}\,u\partial_a + \alpha_a u^2\partial_u$	$2\frac{x_0}{\vec{\alpha}\,\vec{x}}u - \vec{\alpha}\,\vec{x} = \varphi\left(\frac{u}{\vec{\alpha}\,\vec{x}}\right)$	$\varphi'' = 0$
$\sqrt{x_0}\;\partial_a + \alpha_a\sqrt{2u}\;\partial_u$	$u = \frac{1}{2}\left[\frac{\vec{\alpha}\,\vec{x}}{\sqrt{x_0}} + \varphi(x_0)\right]^2$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} =$
$\sqrt{2x_0}\;\partial_a + \alpha_a L(u)\partial_u$	$\int L^{-1}(u)du = \frac{\vec{\alpha}\,\vec{x}}{\sqrt{2x_0}} + \varphi(x_0)$	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 0$
$\partial_a + \alpha_a \ln u\,\partial_u$	$\int\frac{du}{\ln u} = \vec{\alpha}\,\vec{x} + \varphi(x_0)$	$\varphi' + 1 = 0$
$x_0\partial_a + x_a\partial_u$	$u = \varphi(x_0) + \frac{\vec{x}^2}{2nx_0}$	$\varphi' + \frac{\varphi}{x}$
$x_0\partial_a + \alpha_a\,\vec{\alpha}\,\vec{x}\,\partial_u$	$u = \varphi(x_0) + \frac{(\vec{\alpha}\,\vec{x})^2}{2x_0}$	$\varphi' + \frac{\varphi}{x_0} =$

В данной таблице $\vec{\alpha}$ – произвольный единичный вектор. Обр ание на то, что первый и шестой операторы из таблицы 2.2.2 обоб- двумя различными способами в таблице 2.2.3.

Аналогично, как и для одномерного уравнения, получим такие ре- уравнения (2.2.31);

$$\frac{\quad c}{\quad}, \quad u = \frac{(\vec{\alpha}\,\vec{x})^2 + c}{2x_0}, \quad \int\frac{du}{\ln u} = \vec{\alpha}\,\vec{x} - x_0;$$

$$uL'(u) = \frac{\vec{\alpha}\,\vec{x}}{\sqrt{2x_0}}.$$

В этом пункте мы исследуем уравнение

$$u_0 + u_{11} = F(u) .$$

Лиевская алгебра инвариантности уравнения (2.2.32) функции $F(u)$ состоит только из операторов трансляций ∂_0 и

Поскольку уравнение (2.2.32) является частным случаем урав (2.2.2), то для него справедлива теорема 2.2.1, причем в форм (2.2.5) и (2.2.6) необходимо положить $H(u) \equiv 1$. Тогда эти ф принимают следующий вид

1). $A = 1$:

$B_{uu} = 0 , \quad C_{uu} = 2(B_{1u} + BB_u),$

$3B_uF = 2(C_{1u} + B_uC) - (B_0 + B_{11} + 2BB_1),$

$CF' - (C_u - 2B_1) F = C_0 + C_{11} + 2CB_1 ;$

2). $A = 0, \; B = 1,$

$CF' - C_uF = C_0 + C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu} .$

ТЕОРЕМА 2.2.3. Уравнение (2.2.32) Q–условно инвариантно сительно оператора (2.2.4) при $A = 1, \; B_u \neq 0$ тогда и только когда оно локально эквивалентно уравнению

$$u_0 + u_{11} = \lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2 \; ; \quad \lambda, \lambda_1, \lambda_2 - \text{const}. \qquad (2.2.35)$$

При этом оператор (2.2.4) имеет вид

$$Q = \partial_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\; u\partial_1 + \frac{3}{2}(\lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u . \qquad (2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решим систему уравнений (2. нии, что $B_u \neq 0$. Интегрируя поочередно пер (2.2.33), находим

$B = a(x)u + b(x) , \quad a(x) \neq 0 ,$

$C = \frac{1}{3} a^2u^3 + (a_1 + ab)u^2 + M(x)u + N(x) ,$

где $a(x), b(x), M(x), N(x)$ – произвольные гладкие функции. из третьего уравнения (2.2.33) получаем

$$u^3 + \frac{2}{3}(2a_1 + ab)u^2 + \frac{1}{3a}(4a_{11} + 2a_1b + 2ab_1 + 2aM - a$$

$$\frac{}{3a}(2M_1 + 2aN - b_0 - b_{11} - 2bb_1). \qquad (2.2.38)$$

ольку функция F не зависит от переменных X, а функции a, b, N – от переменной u, то коэффициенты при разных степенях u в муле (2.2.38) должны быть постоянными. Это возможно только при вии, что a, b, M, N – const. После этого формулы (2.2.37), 38) – принимают вид

$$\left(u + \frac{b}{a}\right), \qquad C = \frac{3}{2} F ,$$

$$\left(u + \frac{b}{a}\right)^3 + \frac{2}{3}\left(M - b^2\right)\left(u + \frac{b}{a}\right) +$$

$$3bM + 3aN \Big) .$$

равнение (2.2.33) функции (2.2.39) удовлетворяю

сли в (2.2.32), (2.2.39) $u + \frac{b}{a}$ заменить на u и обозначить

$$a^2 = \lambda , \quad \frac{2}{3}\left(M - b^2\right) = \lambda_1 , \quad \frac{2}{9a}\left(2b^3 - 3bM + 3aN\right) = \lambda_2 ,$$

олучим формулы (2.2.35), (2.2.36).

ма доказана.

В зависимости от вида корней кубического уравнения

$$\lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2 = 0$$

ре различных случая:

$$\lambda_1 u + \lambda_2 = \lambda(u - \alpha)(u - \beta)(u - \gamma) ;$$
$$\lambda_1 u + \lambda_2 = \lambda (u - \alpha)^2 (u - \gamma) ;$$
$$\lambda_1 u + \lambda_2 = \lambda (u - \alpha)^3 ; \qquad (2.2$$
$$\lambda_1 u + \lambda_2 = \lambda (u - \alpha)(u^2 + pu + q),$$

γ, p, q — постоянные, $u^2 + pu + q$ – квадратный имеющий действительных корней.

Рассмотрим по одному типичному представителю уравнения (2.2.35) вой частью (2.2.40):

$$u_0 + u_{11} = \lambda (u^3 - u) ;$$

$u_{00} + u_{11} = \lambda (u^3 - 3u + 2)$;

$u_0 + u_{11} = \lambda u^3$;

). $u_0 + u_{11} = \lambda (u^3 + u)$.

Анзацы, полученные с помощью оператора (2.2. уравнения (2.2.41) соответственно имеют вид

1). $2\operatorname{arcth} u + \sqrt{2\lambda}\, x_1 = \varphi(\omega)$, $\omega = -\ln(1 - u^2) + 3\lambda x_0$,

2). $-\dfrac{4}{9}\ln\dfrac{u+2}{u-1} - \dfrac{2}{3}(u-1)^{-1} - \sqrt{2\lambda}\; x_1 = \varphi(\omega)$,

$$\omega = \frac{2}{9}\ln\frac{u+2}{u-1} - \frac{2}{3}(u-1)^{-1} - 3\lambda x_0, \qquad (2.2.4$$

). $\dfrac{2}{u} + \sqrt{2\lambda}\; x_1 = \varphi(\omega)$, $\omega = -\dfrac{1}{u^2} - 3\lambda x_0$;

$2\operatorname{arctg} u - \sqrt{2\lambda}\; x_1 = \varphi(\omega)$, $\omega = -\ln(1 + u^2) -$

и анзацы редуцируют соответствующие уравнения (2. .

ДУ:

1). $2\varphi = \varphi^3 - \varphi$;

2). $2\varphi = \varphi^3 - 3\varphi + 2$;

3). $2\varphi = \varphi^3$; (2.2.43)

4). $2\varphi = \varphi^3 + \varphi$.

Сравним нелинейности в правых частях уравнений (2.2.43) с не нейностями исходных уравнений (2.2.41). Мы видим, что (2.2.42) позволили не только редуцировать уравнения (2.2.4 существенно изменили их нелинейные правые части. Это поз нтегрировать уравнения (2.2.43) и представить их об ощью элементарных функций:

$\varphi = -2\operatorname{arcth}\sqrt{c_1 \exp\omega + 1} + c_2$;

). $\ln\left[c_1 - \dfrac{3}{2}\left[\varphi + 2\omega\right]\right] = \ln c_2 - \dfrac{3}{2}\left[\varphi - \omega\right]$;

3). $\varphi = 2\sqrt{c_1 - \omega} + c_2$;

4). $\varphi = 2\operatorname{arctg}\sqrt{c_1 \exp\omega - 1} + c_2$.

Отметим для сравнения, что, например, общее решение уравнения

$$2\varphi = \varphi^3$$

эллиптическим интегралом

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\,\tau}{\sqrt{c_1 + \tau^4}} = \frac{1}{2}\,(\omega + c_2)\ .$$

пользуя формулы (2.2.44) и (2.2.42), находим решения уравнений .2.41) соответственно:

$$\operatorname{arcth} u + \operatorname{arcth}\sqrt{\frac{u^2}{u^2-1}\,c_1\exp(3\lambda x_0)+1} = \frac{1}{2}\left[c_2 - \sqrt{2\lambda}\,x_1\right];$$

$$\frac{c_2\exp\left[-\frac{9}{2}\lambda x_0 - \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\,x_1\right] + 9\lambda x_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\,x_1 + c_1 - 1}{c_2\exp\left[-\frac{9}{2}\lambda x_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\,x_1\right] - 9\lambda x_0 - \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\,x_1 - c_1}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda}}\,\left[x_1 + c_1\right]}{3\left[x_0 + c_2\right] - \frac{1}{2}\left[x_1 + c_1\right]^2}\ ; \qquad (2.2.45)$$

$$\operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u^2}{u^2+1}\,c_1\exp(-3\lambda x_0)-1} = \frac{1}{2}\left[c_2 + \sqrt{2\lambda}\,x_1\right].$$

Исследуем теперь Q–условную инвариантность уравнения (2.2.32) льно оператора (2.2.4) в предположении, что

$$A_u = B_u = 0,\quad C_{uu} \neq 0\ . \qquad (2.2.46)$$

ормул (2.2.33) следует, что в случае 1 таких лучае 2 ($A = 0$, $B = 1$) функция C определяется из ура). Приведем некоторые частные решения этого уравнения жении (2.2.46). Эти результаты представим в виде следую аблицы.

ТАБЛИЦА 2.2.4.

№ п/п	1	2	
Вид функции F(u)	F – решение уравнения $FF'' = 2$	F – решение уравнения $FF'' = 2(F'-1)$	$F=\Phi'(u)$, $\Phi(u$ произвольная гладкая функ
Оператор **Q**	$2\sqrt{x_0}\partial_1+F(u)\partial_u$	$x_1\partial_1+F(u)\partial_u$	$\partial_1+\sqrt{2\Phi+c_2}\,\partial_u$
Анзац	$F'(u)=\varphi(x_0)+\frac{x_1}{\sqrt{x_0}}$	$F'(u)=x_1^2\varphi(x_0)+1$	$\int\frac{du}{\sqrt{2\Phi+c_2}} = \varphi($
Редуцированное уравнение	$\varphi' + \frac{\varphi}{2x_0} = 2$	$\varphi' - 2\varphi + 2\varphi^2 = 0$	φ
Решение редуцированного уравнения	$\varphi = \frac{c_1}{\sqrt{x_0}} + \frac{4}{3}x_0$	$\varphi = \frac{1}{1+c_1 e^{2x_0}}$	$\varphi =$
Решение уравнения(2.2.32)	$F'(u)=\frac{x_1+c_1}{\sqrt{x_0}} + \frac{4}{3}x_0$	$F'(u)=\frac{x_1^2}{1+c_1 e^{2x_0}} + 1$	$\int\frac{du}{\sqrt{2\Phi+c_2}} = x_1 + c_1$

Отметим также, что и в предположении

$$A_u = B_u = C_{uu} = 0$$

но найти операторы, не входящие в лиевскую алг
авнения (2.2.32). Проиллюстрируем это на примере у

$$u_0 + u_{11} = \lambda u^k ,$$

где λ, k – постоянные, $\lambda \neq 0$; $k \neq 0;1$.

В предположении (2.2.48), из уравнений (2.2.33) находим

$$Q = \partial_0 + B(x)\partial_1 + \alpha(x)u\partial_u , \qquad (2.2.49)$$

где $B(x)$ и $\alpha(x)$ – решения системы уравнений

$$\alpha_0 + \alpha_{11} = (k-1)\alpha^2 \ , \qquad (2.2.5$$

$$\left|\begin{aligned} B_0 &= (k-1)\alpha B + \frac{k+3}{2}\alpha_1 \ , \\ B_1 &= \frac{1-k}{2}\alpha \ . \end{aligned}\right. \qquad (2.2.51)$$

Таким образом, чтобы найти оператор (2.2.49), необходимо решить нение (2.2.50), а потом из условий (2.2.51) определить B(x). но отметить, что при $k = 2$, $\lambda = 1$ формулы (2.2.50 ожно рассматривать как формулы размножения решений ур

м совместности уравнений (2.2.50), нограничного слоя для функции B(x):

$$\frac{2}{k-1} B_{111} + BB_{11} = 0 \ , \qquad (2.2.52)$$

орое переменная x_0 входит как параметр. Уравнение (2.2. быть сведено к уравнению Абеля второго рода

$$xyy' + y^2 + \left[7x + \frac{k-1}{2}\right]y + 6x^2 + (k-1)x = 0$$

омощью цепочки замен

$P(B)$; $P(B) = B^2 x(Z)$, $Z = \ln B$; $x'(Z) = y(x)$.

Из (2.2.50), (2.2.51) находим, в частности, при $k = 3$, $\alpha(x)$

атор

$$Q = x_1^2\partial_0 + 3x_1\partial_1 + 3u\partial_u \ . \qquad (2.2.53)$$

$$u = x_1\varphi(\omega), \quad \omega = x_0 - \frac{1}{6}x_1^2 \ , \qquad (2$$

с помощью оператора (2.2.53), редуцирует уравнение

$$u_0 + u_{11} = \lambda u^3 \qquad (2.2.55)$$

$$\varphi'' = 9\lambda\varphi^3 \ . \qquad (2.2.56)$$

щее решение уравнения (2.2.56) задается эллиптическим интегралом

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\tau}{\sqrt{c_1 + \tau^4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\,\left[\omega + c_2\right].$$

гда

$$\int_0^{u/x_1} \frac{d\,\tau}{\sqrt{c_1 + \tau^4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\,\left[x_0 - \frac{1}{6}\,x_1^2\right.$$

– решение уравнения (2.2.55).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.4. Полученные выше результаты для урав (2.2.32) переносятся и на случай произвольного количества пере $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+n}$. Так для уравнения

$$u_0 + \frac{1}{2m}\,\Delta u = \lambda u^3 \ , \quad (m,\ \lambda - \text{const}) \qquad (2.2.57)$$

имеем:

а) операторы: $Q_a = 2\rho_a\partial_0 + 3\lambda u\partial_a + 3\lambda\rho_a u^3\partial_u$, где ρ_a – с

$\vec{\rho}^{\,2} = \lambda m$, $a = \overline{1, n}$;

анзац: $\frac{2}{u} + 2\vec{\beta}\,\vec{x} = \varphi(\omega)$, $\omega = -\frac{1}{u^2} - 3\lambda$

редуцированное уравнение: $2\dot\varphi = \varphi^3$;

решение уравнения (2.2.57): $u = \dfrac{2\,\vec{\beta}\,\vec{x}}{3\lambda x_0 - (\vec{\beta}\,\vec{x})}$

б) операторы: $Q_a = \alpha_a(\vec{\alpha}\,\vec{x})^2\partial_0 + 3\vec{\alpha}\,\vec{x}\,\partial_a + 3\alpha_a u\partial_u$, $\vec{\alpha}^{\,2} = 1$;

анзац: $u = \vec{\alpha}\,\vec{x}\,\varphi(\omega)$, $\omega = x_0 - \frac{1}{6}\,(\vec{\alpha}\,\vec{x})^2$;

редуцированное уравнение: $\dot\varphi = 9\lambda\varphi^3$;

решение уравнения (2.2.57):

$$\int_0^{u/\vec{\alpha}\vec{x}} \frac{d\,\tau}{\sqrt{c_1 + \tau^4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\,\left[x_0 - \frac{1}{6}(\vec{\alpha}\,\vec{x}\right.$$

для уравнения

$$u_0 + \frac{1}{2m}\,\Delta u = F(u) \ ,$$

где функция $F(u)$ является решением уравнения FF

операторы: $Q_a = 2\sqrt{x_0}\,\partial_a + \gamma_a F(u)\partial_u$, $\vec{\gamma}^{\,2} = 2m$,

$$= \frac{\gamma' \, x'}{\sqrt{x_o}} + \varphi(x_o) \ :$$

ванное уравнение: $\varphi' + \frac{\varphi}{2x_o} = 2$;

уравнения (2.2.58):

$$F'(u) = \frac{\vec{\gamma}' \, \vec{x}' + c_1}{\sqrt{x_o}} + \frac{4}{3} x_o \ .$$

УРАВНЕНИЕ (2.2.2) С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ.

ли в уравнении (2.2.2) не фиксировать наперед нелинейности $H(u)$, а несколько сузить класс операторов (2.2.4), то можно пример, следующие утверждения.

.2.4. Уравнение (2.2.2) Q-условно инвариантно

тора

$$Q = \partial_o + u\partial_1 + C(u)\partial_u \ , \qquad (2.2.59)$$

лько тогда, когда оно имеет вид

$$\frac{\lambda_2}{u} \Big| u_o + u_{11} = \left[2\lambda_1 + \frac{\lambda_2}{u} \right] P_3(u) \ , \qquad (2.2.0)$$

$C(u) = \underline{P_3(u)} = \lambda_1 u^3 + \lambda_2 u^2 + \lambda_3 u + \lambda_4$; λ_i – произвольные пос-нные, $i = 1, 4$.

Теорема 2.2.4 доказывается аналогично теореме 2.2.3.

нзац

$$\frac{udu}{u)} = \varphi(\omega) \quad , \quad \omega = x_o - \int \frac{du}{P_3(u)} \quad , \qquad (2.2.61)$$

помощи оператора (2.2.59), редуцирует у

$$\varphi + P_3(\varphi) = 0.$$

из(2.2.62) найти φ, то по формуле (2.2.61) получим

нения (2.2.60). Общее решение уравнения (2.2.62) за

метрически

$$\left|\begin{array}{l} \omega = -\int \dfrac{d\,t}{P_3(t)}\,, \\[2ex] \varphi = -\int \dfrac{t\,dt}{P_3(t)} \end{array}\right.$$

и зависит от корней кубического полинома $P_3(t)$. Возможн личных случаев.

Приведем по одному представителю из каждого случая:

1). $P_3(t) = (t-1)^3$, $(\varphi-\omega)^2 = 2\omega$,

$$u = 1 + 2\,\frac{x_1 - x_0}{2x_0 - (x_1 - x_0)^2}\,;$$

2). $P_3(t) = (t+1)(t-1)^2$, $\operatorname{th}(\varphi - \omega) -$

$$\frac{\left(x_0 + x_1 + \dfrac{1}{u-1}\right)u - 1}{x_0 + x_1 + \dfrac{1}{u-1} - u} = \operatorname{th}(x_0 - x_1)\,;$$

3). $P_3(t) = (t-2)(t^2-1)$, $\exp 3(\varphi-\omega) - 3\exp(\varphi+\omega) + 2 = 0$,

$$u = -\frac{\exp 3(x_1 - x_0) + 3\exp(x_1 + x_0) - 4}{\exp 3(x_1 - x_0) - 3\exp(x_1 + x_0) + 2}\,;$$

4). $P_3(t) = (t-1)(t^2 + 2t + 2)$,

$\sin^2(\varphi-\omega) + 4\sin(\varphi-\omega)\cos(\varphi-\omega) + 4\cos^2(\varphi-\omega) = \exp(-4$

$$u = \frac{\exp(-3x_0 - 2x_1) + 3\sin(x_0 - x_1) - \cos(x_0 -}{\exp(-3x_0 - 2x_1) - 2\sin(x_0 - x_1) - \cos(x_0}$$

5). $P_3(t) = (t-1)^2$, $\varphi = \omega + \ln\omega$, $u = 1 + \exp$

6). $P_3(t) = t^2 - 1$, $\varphi = \ln\operatorname{ch}\omega$, $u = \dfrac{\operatorname{ch} x_0 - e}{\operatorname{sh} x_0}$

7). $P_3(t) = t^2 + 1$, $\varphi = \ln\cos\omega$, $u = \dfrac{\exp x_1 - \cos x}{\sin x_0}$.

ТЕОРЕМА 2.2.5. Уравнение

$$u_0 + uu_{11} = \lambda_1 u + \lambda_2 \qquad (2.2.$$

Q–условно инвариантно относительно оператора

$$Q = \partial_0 + \frac{u}{x_1}\partial_1 + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u \qquad (2.2.65)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что

$$\tilde{Q}\, S = \tilde{\lambda}_1 S + \tilde{\lambda}_2 Qu ,$$

$$S = u_0 + uu_{11} - \lambda_1 u - \lambda_2 ,\ Qu = u_0 + \frac{u}{x_1} u_1 - \lambda_1 u - \lambda_2 .$$

йствовав оператором $\tilde{Q}$ на S после довольно громодких преобра-

ий получаем

$$\left.\frac{2u + 3x_1 u_1}{x_1^2}\right| S - \left[\frac{u_1}{x_1 u} - \frac{2u + 3x_1 u_1}{x_1^2 u} - \frac{\lambda_1 u + \lambda_2}{u^2}\right| Qu.$$

азана.

атор (2.2.65) порождает анзац

$$\int \frac{u\,du}{\lambda_1 u + \lambda_2} = \varphi(\omega) ,\ \omega = x_0 - \int \frac{du}{\lambda_1 u + \lambda_2} . \qquad (2.2.6$$

ый редуцирует уравнение (2.2.64) к ОДУ

$$- \varphi = \lambda_1 \varphi + \lambda_2 . \qquad (2.2.67)$$

роинтегрировав уравнение (2.2.67) и воспользовавшись формулой .2.66), находим решение уравнения (2.2.64)

$$\lambda_{,} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 x_0 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 x_1^2}{1 + \lambda_3 \exp(-x_0)} , \quad \lambda_1 \neq 0 ;$$

$$\frac{+ \lambda_3 + x_1^2}{2x_0} , \ \lambda_1 = 0 ,$$

остоянная интегрирования.

льшинство из рассмотренных в этом параграфе уравне ьно бедную лиевскую симметрию. Это, как правило, транс нсляции и растяжения. Поэтому лиевская симметрия позволяет найти ень узкий класс решений этих уравнений. При помощи Q-условной метрии появляется возможность найти такие решения, которые не гут быть получены классическим лиевским методом.

§2.3 Q–УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ НЕЛИН

УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛ

Для описания процессов фильтрации газа
нелинейное уравнение [36]

$$\frac{\partial v}{\partial x_0} + \frac{\partial^2 \varphi(v)}{\partial x_1^2} + \frac{N}{x_1}\,\frac{\partial \varphi(v)}{\partial x_1} = \Phi(v),$$

где $v = v(x)$, $x = (x_0, x_1) \in R_2$, $N = \mathrm{const}$; $\varphi(v)$, $\Phi(v$
ные гладкие функции. Подстановкой $u = \varphi(v)$
эквивалентному уравнению

$$H(u)u_0 + u_{11} + \frac{N}{x_1}\,u_1 = F(u)$$

В настоящем параграфе исследована ус
ния (2.3.2) при $N \neq 0$. Операторы условной
для построения анзацев, редуцирующих (2.3.2)
ренциальным уравнениям (ОДУ). Построены некото
уравнения (2.3.2), а также нелинейного многомерного уравнен
лопроводности.

ТЕОРЕМА 2.3.1. Уравнение (2.3.2) Q–условно инвариа
сительно оператора (2.2.4) тогда и только тогда, когда
B, C удовлетворяют системе уравнений:

Случай 1. $A \neq 0$ (не умаляя общности, можно пол

$$B_{uu} = 0\,, \qquad C_{uu} = 2\Big(B_{1u} + HBB_u - \frac{N}{x_1}\,B_u\Big),$$

$$B_uF = 2(C_{1u} + HB_uC) - \Big(HB_0 + B_{11} - \frac{N}{x_1}\,B_1 + \frac{N}{x_1^2}\,B$$

$$CF - (C_u - 2B_1)\,F = HC_0 + C_{11} + \frac{N}{x_1}\,C_1 + 2HCB_1 + HC$$

Случай 2. $A = 0$, $B = 1$,

$$CF - \Big(C_u + \frac{\dot H}{H}\,C\Big)\,F = HC_0 + C_{11} + \frac{N}{x_1}\,C_1 - \frac{N}{x_1^2}\,C + 2CC$$

$$+ C^2C_{uu} - C\,\frac{\dot H}{H}\Big(CC_u + C_1 + \frac{N}{x_1}\,C\Big). \tag{2.3.4}$$

ельство данной теоремы проводится аналогичн

еоремы 2.2.1.

и общее решение уравнений (2.3.3), (2.3.4) нам не уда

ем несколько частных решений этих уравнений.

ТЕОРЕМА 2.3.2. Уравнение (2.3.2) Q-условно инвариантно отно-ельно оператора (2.2.4) при $H(u) = 1$, $A = 1$, $B_u \neq 0$ тогда и ко тогда, когда оно локально эквивалентно уравнению

$$u \quad + \frac{\quad}{2x_1} u_1 = \lambda u^3 , \quad (\lambda = \mathrm{const}), \qquad (2.3.5)$$

оператор (2.2.4) имеет вид

$$\Big| \quad \overline{\quad\lambda}\; u + \frac{1}{x_1}\Big]\partial_1 + \frac{3}{4}u\Big(2\lambda u^2 - \frac{1}{x_1^2}\Big)\partial_u \qquad (2.3.6$$

тельство теоремы 2.3.2 сводится к решению системы ри $H(u) = 1$ и $B_u \neq 0$. По оператору (2.3.6) строим

$$x_0 \quad \frac{x_1^2}{3}\Big]\,\omega + 4\sqrt{2\lambda}\;x_1^{5/2} = \varphi(\omega) , \qquad (2.3.7)$$

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{2\lambda}\;ux_1}{u\sqrt{x_1}} ,$$

рый редуцирует уравнение (2.3.5) к обыкновенному дифференциаль-уравнению $\varphi = 0$. Решая полученное редуцированное уравнение уя формулу (2.3.7), находим следующее решение уравнен

$$\lambda \quad - \frac{x_1^3 - 3x_0}{x_1^3 - 15x_0x_1 + c_1\sqrt{x_1}} , \quad (c_1 = \mathrm{const}) \qquad (2$$

эквивалентных лиевских анзацев для уравнения .5) исчерпывается следующими формулами:

$$u = \varphi(x_1) , \qquad (2.3.9)$$

$$u = x_0^{-\frac{1}{2}}\,\varphi\Big(x_0^{-\frac{1}{2}}\,x_1\Big) .$$

эвидно, что (2.3.8) не содержится в (2.3.9).

Решения уравнения (2.3.5) могут быть размн

вской симметрии следующим образом

$$u(x_0,x_1) = \theta_1 \, f(\theta_1^2 x_0 + \theta_0, \, \theta_1 x_1) \, ,$$

где θ_0, θ_1 – групповые параметры, $f(x_0,x_1)$ – известное ние уравнения (2.3.5), $u(x_0,x_1)$ – новое решение.

ТЕОРЕМА 2.3.3. Уравнение

$$\frac{1}{u} \, u_0 + u_{11} + \frac{N}{x_1} \, u_1 = \frac{1}{u}(\lambda_1 u + \lambda_2), \quad (\lambda_1, \, \lambda_2 \text{ – const})$$

Q–условно инвариантно относительно оператора

$$\partial_0 + (N + 1) \, \frac{u}{x_1} \, \partial_1 + (\lambda_1 u + \lambda_2) \, \partial_u \, .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства т

ь, что имеет место соотношение

$$\tilde{Q} \, S = \tilde{\lambda}_1 S + \tilde{\lambda}_2 Q u \, ,$$

где
$$S = \frac{1}{u} \, u_0 + u_{11} + \frac{N}{x_1} \, u_1 - \frac{1}{u} \, (\lambda_1 u + \lambda_2),$$

$$Qu = u_0 + (N + 1) \, \frac{u}{x_1} \, u_1 - (\lambda_1 u + \lambda_2),$$

Q – соотвествующее продолжение оператора Q ; λ_1 , λ_2 – пр функции.

Подействовав оператором $\tilde{Q}$ на S после нескольк

образований, получаем

$$\Big[\lambda_1 + \frac{N+1}{x_1^2}\left(2u+3x_1u_1\right)\Big] S - \Big[\frac{N + 1}{x_1 u} u_1 - \frac{N+1}{x_1^2 u}\left(u+3x_1u_1\right)$$

ема доказана.

Оператор (2.3.12) порождает анзац

$$\frac{x_1^2}{2(N + 1)} - \int \frac{u \, du}{\lambda_1 u + \lambda_2} = \varphi(\omega), \quad \omega = x_0 - \int \frac{du}{\lambda_1 u + \lambda_2}$$

который редуцирует уравнение (2.3.11) к ОДУ

$$- \varphi = \lambda_1 \varphi + \lambda_2 \, . \qquad (2.3.15)$$

грировав уравнение (2.3.15) и воспользовавшись ф

аходим решение уравнения (2.3.11)

$$\frac{\lambda_2 x_0 + \frac{1}{2} \lambda_1^2 (N+1)^{-1} x_1^2}{1 + \lambda_3 \exp(-x_0)}, \quad \lambda_1$$

$$\frac{1}{2x_0}\left[\lambda_2 x_0^2 + \lambda_3 + (N+1)^{-1} x_1^2\right], \quad \lambda_1 = 0,$$

λ_3 – постоянная интегрирования.

В этом случае, также как и для уравнения (2.3.5), несложно

в том, что решения (2.3.16) не могут быть получены при

анзацев.

результаты, полученные для уравнения (2.3.2),

аблице 2.3.1, где λ_1, λ_2, λ_3 – произвольные

$w(u)$ – произвольная гладкая функция.

п/п	H(u)	F(u)	Оператор **Q**	Анзац	Редуцирован уравнение
1.	$\lambda_1 u^{\frac{2}{1-N}} +$ $+ \lambda_2$ $\lambda_2 \neq 0$	$\lambda_3 u^{\frac{3-N}{1-N}}$ $N \neq 1;3$	$\lambda_2 x_1^2 \partial_0 +$ $+ (3-N) x_1 \partial_1 +$ $+ (3-N)(1-N) u \partial_u$	$u = x_1^{1-N} \varphi(\omega)$ $\omega = \frac{x_0}{\lambda_2} +$ $+ \frac{x_1^2}{2(N-3)}$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \varphi^{\frac{2}{1-N}} \varphi$ $+ \frac{\varphi}{(N-3)}$ $= \lambda_3 \varphi^{\frac{3-N}{1-N}}$
		λ_3	$x_1^2 \partial_0 + x_1 \partial_1 -$ $-2u \partial_u$	$u = x_1^{-2} \times$ $\times \varphi(x_0 - \frac{x_1^2}{2})$	$\lambda_1 \frac{\varphi}{\varphi} + \varphi =$
	$+\lambda_2$ 0	$\lambda_3 e^u$ $N=1$	$\lambda_2 x_1^2 \partial_0 + 2x_1 \partial_1 +$ $+ 4\partial_u$	$u = \varphi(\omega) +$ $+ 2\ln x_1$ $\omega = \frac{x_0}{\lambda_2} - \frac{x_1^2}{4}$	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{\varphi} \dot{\varphi} +$ $= \lambda_3 e^{\varphi}$

4.	$\frac{\lambda_1}{w'} \times$ $\times (N -$ $- \frac{w\ddot{w}}{\dot{w}^2})$	$\frac{\lambda_2}{w\dot{w}} \times$ $\times (N -$ $- \frac{w\ddot{w}}{\dot{w}^2})$	$x_1\partial_1 + \frac{w}{\dot{w}}\partial_u$	$w(u) =$ $= x_1\ \varphi(x_0)$	$\lambda_1\varphi$ –
5.	$w(u)$ $N \ne -1$	$\lambda_1 w + \lambda_2$ $\lambda_2 \ne 0$	$\partial_1 + \frac{\lambda_2}{N+1} x_1\partial_u$	$u = \varphi(x_0) -$ $- \frac{\lambda_2 x_1^2}{2(N+1)}$	$\varphi = \lambda_1$
	$w(u)$ $N = -1$	$\lambda_1 w$	$\partial_1 + \lambda_3\ x_1\partial_u$	$u = \varphi(x_0) +$ $+ \frac{\lambda_3 x_1^2}{2}$	$\varphi = \lambda_1$
	1	$\lambda_3 u\ \ln u$	$\partial_1 + \frac{\lambda_3}{2} x_1 u\partial_u$	$u = \varphi(x_0) \times$ $\times e^{\frac{\lambda_1 x_1^2}{4}}$	$\varphi +$ $= \lambda_3\ \varphi$ [illegible]

Если проинтегрировать приведенные в таблице редуцированные уравнения и использовать соответствующие им анзацы, то получим решение уравнения (2.3.2). Приведем некоторые из них.

$$u = \lambda\left[\frac{N-3}{\lambda_2}\ \frac{x_0}{x_1} + \frac{x_1}{2}\right]^{N-1},\ \lambda = \left[\frac{\lambda_3}{(N-1)(N-2)}\right]^{\frac{N-1}{2}},\quad \lambda \ne 0;\ N$$

$$u = x_1^{-2}\ \varphi(\omega)\ ,\quad \text{где}\quad \omega = x_0 - \frac{x_1^2}{2}\ ,\ \text{а}\ \varphi(\omega) -$$

$$\varphi = -\lambda_1\ \ln\varphi + \lambda_3\omega\ ;$$

$$u = -2\ \ln\ x_1^{-1}\sqrt{2\lambda_3}\ \left(\frac{x_0}{\lambda_2} - \frac{x_1^2}{4}\right),\quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \ne 0,\ \lambda$$

$$u = -\ln\frac{x_1^{-2}}{\lambda_4}\left[\exp\frac{\lambda_1\lambda_4}{\lambda_2}\left(\frac{4x_0}{\lambda_2} - x_1^2\right) - 1\right],\quad \lambda_1 \ne 0;\ \lambda \ne 0;\ \lambda_3 = \ ,\ \lambda_4$$

$$u = -\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{4x_0}{x_1^2} - 1\right),\quad \lambda_1 \ne 0,\ \lambda_2 \ne 0,\ \lambda_3 = 0\ ;$$

$$(u) = x_1 \left[\frac{1}{\lambda_2} + \exp\left\{ -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_0 \right\} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \lambda_1 \neq 0, \ \lambda_2 \neq 0;$$

$$\sqrt{\frac{\lambda_1}{2x_0}}, \quad \lambda_2 = 0 ; \qquad (2.3.17)$$

$$+ \frac{\lambda_2 \ x_1^2}{2(N+1)} \quad ;$$

$$\lambda_1 x_0 + \frac{\lambda_3 \ x_1^2}{2} \quad ;$$

$$u = \exp \left[\exp \lambda_3 x_0 + \frac{\lambda_3}{4} x_1^2 + \frac{N+1}{2} \right] .$$

Нумерация формул (2.3.17) соответствует нумерации в таблице.

Если заменить

$$x_1 \longrightarrow r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

жить $N = n-1$, то (2.3.2) будет редуцированным уравнением йного уравнения теплопроводности

$$H(u)u_0 + \Delta u = F(u) . \qquad (2.3.18)$$

$u(x_0, \vec{x})$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. При помощи юго анзаца $u = u(x_0, r)$ (2.3.18) редуцируется к у). Поэтому многие из приведенных результатов для у .3.2) можно использовать для нахождения условно инвариантных аторов и решений многомерного уравнения (2.3.18). Представим их иде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2.3.4. Нелинейное уравнение теплопроводности (2.3.18) ловно инвариантно относительно алгебры операторов $\{AO(n), Q\}$,

$$\lambda_1 u^{\frac{2}{2-n}} + \lambda_2 , \quad F(u) = \lambda_3 u^{\frac{4-n}{2-n}} ,$$

$$(4-n)x_a\partial_a + (4-n)(2-n)u\partial_u , \qquad \lambda_2 \neq 0, \ n \neq 2;4;$$

$$\frac{\lambda_1}{u}, \quad F(u) = \lambda_3 , \quad n = 4,$$

$$Q = \vec{x}^{2}\partial_0 + x_a\partial_a - 2u\partial_u \; ; \qquad (2.3.19)$$

3). $H(u) = \lambda_1 \exp u + \lambda_2$, $F(u) = \lambda_3 \exp u$, $n = 2$,

$$Q = \lambda_2\vec{x}^{2}\partial_0 + 2x_a\partial_a + 4u\partial_u \; , \; \lambda_2 \neq 0 \; ;$$

4). $H(u) = 1$, $F(u) = \lambda_3 u \ln u$,

$$Q = x_a\partial_a + \frac{\lambda_3}{2}\vec{x}^{2}u\partial_u \; ;$$

5). $H(u) = \frac{1}{u}$, $F(u) = \frac{1}{u}(\lambda_1 u + \lambda_2)$,

$$Q = \partial_0 + \frac{n}{\vec{x}^{2}}ux_a\partial_a + (\lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u \; .$$

Под алгеброй $AO(n)$ здесь подразумевается алгебра, состоя операторов

$$J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \; ; \; a,b = \overline{1,n} \; . \qquad (2.3.20)$$

По повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до n

Аналогично, как и для уравнения (2.3.2), при помощи от $\{AO(n),Q\}$ можно построить анзацы, редуцирующие уравнение к ОДУ, решить редуцированные уравнения и, в результа ние уравнения (2.3.18). Например,

$$\lambda_1 u + \lambda_2 = \frac{\lambda_1\lambda_2 x_0 + \frac{\lambda_1^2\,\vec{x}_1^{2}}{2n}}{1 + \lambda_3 \exp(-x_0)} \; , \quad (\lambda \neq 0)$$

решение уравнения

$$\frac{1}{u}u_0 + \Delta u = \frac{1}{u}(\lambda_1 u + \lambda_2) \; ,$$

а

$$u = \ln \frac{\vec{x}^{2}}{2\lambda_3}\left[\frac{x_0}{\lambda_2} - \frac{\vec{x}^{2}}{4}\right]^{-2}$$

решение уравнения

$$\lambda_2 u_0 + \Delta u = \lambda_3 \exp u \qquad \text{при} \quad n = 2.$$

УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОПРОВОДНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОПЕРАТОРОВ ГАЛИЛЕЯ

уже отмечали в параграфе 2.2., хорошо известно, чт авнение теплопроводности

$$u_0 + \frac{1}{2m} \Delta u = 0 \qquad (2.4.1)$$

рианто относительно преобразований Галилея. Генераторы этих образований имеют вид

$$G_a = x_0 \partial_a + m x_a u \partial_u \ , \ a = \overline{1, n} \qquad (2.4.2)$$

нако нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_0 + \vec{\nabla} \left[f(u) \vec{\nabla} u \right] = 0 \qquad (2.4.3)$$

иантно относительно преобразований Галилея. Это означает го множества решений нелинейного уравнения (2.4.3) я принцип относительности Галилея. В связи с этим с: существует ли подмножество решений уравнения (2. нтное относительно преобразований Галилея? Положит а поставленный вопрос дают следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.4.1. Нелинейное уравнение теплопроводности (2.4.3) вариантно относительно операторов Галилея

$$G_a = x_0 \partial_a + M(u) x_a \partial_u \ , \qquad (2.4.4)$$

ли его решения удовлетворяют условию

$$u_0 + \frac{1}{2M(u)} \left(\vec{\nabla} u \right)^2 = 0 \ , \qquad (2.4.5)$$

$$M(u) = \frac{u}{2f(u)} \ . \qquad (2.4.6)$$

ЕЛЬСТВО. Находим продолжение операторов (2.4.4) и уравнение (2.4.3). В результате получаем

$$\left[f(u) \vec{\nabla} u \right] \Big\} = \left[M'(u) u_0 + (Mf)'' \left(\vec{\nabla} u \right)^2 + (Mf)' \Delta u \right] x_a + \left[2 (Mf) - \right. \qquad (2.4.$$

соотношения (2.4.7) получаем первое дополнительное $2(Mf)' - 1 = 0$, решением которого является (2.4.6). Подстановка

.6) в (2.4.7) дает

$$\left\{u_0+\vec{\nabla}\left[f(u)\vec{\nabla}u\right]\right\}=\frac{x_a}{2f(u)}\left\{u_0+\vec{\nabla}\left[f(u)\vec{\nabla}u\right]\right\}-\frac{x_a f'(u}{2f(u)}$$

Поскольку уравнение (2.4.5) инвариантно относи

ров (2.4.4)

$$\tilde{G}_a\left[u_0+\frac{1}{2M(u)}\left(\vec{\nabla}u\right)^2\right] = M'(u)x_a\left[u_0+\frac{1}{2M(u)}\left(\vec{\nabla}u\right)^2\right] ,$$

то теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2.4.2. Нелинейное уравнение теплопроводности Q-условно инвариантно относительно операторов Галилея (2.4.4

$$f(u) = \frac{1}{2m}u^{\gamma} , \quad M(u) = \frac{2m}{\gamma n+2}u^{1-\gamma} ,$$

m и γ – произвольные постоянные, $m \neq 0$, $\gamma n + 2$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия $G_a u = 0$ имеют вид

$$x_0 u_a - M(u)x_a = 0 ,$$

уда получаем

$$u_a = x_0^{-1}\left[G_a u + M(u)x_a\right] ,$$

$$\Delta u = x_0^{-1}\partial_a G_a u + x_0^{-2}M(u)\left[n x_0 + M'(u)x^2\right] .$$

Подставляя (2.4.12) в (2.4.7), находим

$$\tilde{G}_a\left\{u_0+\vec{\nabla}\left[f(u)\vec{\nabla}u\right]\right\} = M'(u)x_a\left\{u_0+\vec{\nabla}\left[f(u)\vec{\nabla}u\right]\right\} + \frac{x_a}{x_0^2}\left\{\left[(Mf)' - M'f'\right]\left(G_b u + 2m x_b\right) + Mf'x_0\partial_b + x_0\left[2(Mf)' - 1\right]\delta_{ab}\right\} G_b u +$$

$$+ x_0^{-2}M\left\{\left[2(Mf)'+nMf'-1\right]x_0 + M(Mf)''x^2\right\} ,$$

δ_{ab} – символ Кронекера.

Для выполнения (2.1.10) необходимо, чтобы выра

ледней фигурной скобке полученного соотношен

е. чтобы выполнялось (2.4.10). Теорема доказана.

Итак, если для описания нелинейных процессов теп и диффузии использовать уравнение (2.4.3) совместно с дополн ным условием (2.4.5), т.е. систему

$$\Big| = 0 \ ,$$ (2.4

$$(\nabla' u)^{2} = 0, \ 2M(u)f(u) = u \ ,$$

решений уже будет выполняться принцип относите

следуем максимальную в смысле С.Ли симметрию системы уравне- 2.4.13).

ТЕОРЕМА 2.4.3. Максимальной в смысле С Ли алгеброй инвариант- уравнений (2.4.13) является расширенная алгебра Галиле операторами

$$\partial_a , \qquad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \ ,$$

$$mx_a\partial_w \ , \quad G_{2a} = w\,\partial_a + mx_a\partial_u \ ,$$ (2.4.1

$$x_a\partial_a \ , \qquad D_2 = 2w\partial_w + x_a\partial_a \ ,$$

$$= \overline{1, n} \ ; \ m \neq 0 \ ;$$

$$w = 2m \int \frac{f(u)}{u}\, du \ .$$ (.4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Система уравнений (2.4.13) заменой (2.4.15) дится к системе уравнений Лапласа и Гамильтона – Якоби

$$0 \ , \qquad w_0 + \frac{1}{2m}(\nabla' w)^{2} = 0 \ .$$ (2.4.16)

тным лиевским методом доказывается, что максимальной алг антности системы уравнений (2.4.16) является алгеб

Е 2.4.1. При $\gamma \neq 0$ уравнение

$$u_{0} + \frac{1}{2m}\nabla'\Big[u^{\gamma}\,\nabla' u\Big] = 0$$ (2.4

нтно (по Ли) относительно операторов Галилея. Одна з теорем 2.4.1 – 2.4.3 , данное уравнение условно тно относительно трех различных представлений операто лея

$$G^{1}_{a} = x_0\partial_a + m x_a u^{1-\gamma}\partial_u \ ;$$

$$G^{2}_{a} = x_0\partial_a + \frac{2m x_a}{\gamma(n+2)} u^{1-\gamma}\partial_u \ , \quad \gamma^{n+2} \neq 0 \ ;$$

$$G^{3}_{a} = \frac{u^{\gamma}}{\gamma}\partial_a + m x_a \partial_u \ .$$

Анзацы, полученные при помощи операторов (2.4.18), в трех ном случае соответственно имеют вид

$$\frac{u^{\gamma}}{\gamma} = \varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2) + m\frac{(\vec{c}\ \vec{x})^2}{2x_0}, \quad \omega_0 = x_0, \quad \omega_1 = \vec{a}\vec{x}, \quad \omega_2 = \vec{б}\vec{x};$$

$$\frac{u^{\gamma}}{\gamma} = \varphi(x_0) + \frac{m}{3\gamma + 2}\frac{\vec{x}}{x_0} \ ;$$

$$\frac{u^{\gamma}}{\gamma} = \varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2) + m\frac{(\vec{c}\ \vec{x})^2}{2\omega_0}, \quad \omega_0 = -\frac{u^{\gamma}}{\gamma}, \quad \omega_1 = \vec{a}\vec{x}, \quad \omega_2 = б$$

где $\vec{a}$, $\vec{б}$, $\vec{c}$ – произвольные постоянные векторы, нормированный базис простанства R_3.

Анзацы (2.4.19), (2.4.21) редуцируют уравнение (2.4.17) к теме двух уравнений

$$\begin{cases} \varphi_{11} + \varphi_{22} + \dfrac{m}{\omega_0} = 0 \ , \\ \varphi_0 + \dfrac{1}{2m}\left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right) = 0 \ , \end{cases}$$

где $\varphi_0 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega_0}$, $\varphi_a = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega_a}$, $\varphi_{ab} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_a\partial\omega_b}$; $a, b = 1$

Если подставить анзац (2.4.20) в (2.4.17), то для ии φ получим обыкновенное ДУ

$$\varphi + \frac{3\gamma}{3\gamma + 2}\frac{1}{x_0}\varphi = 0 \ ,$$

общее решение которого

$$\varphi = \frac{\lambda}{\gamma} x_0^{-\frac{3\gamma}{3\gamma+2}} \ , \quad \lambda = \text{const} \ .$$

Тогда

$$u^{\gamma} = \lambda x_0^{-\frac{3\gamma}{3\gamma+2}} + \frac{\gamma m}{3\gamma + 2}\frac{\vec{x}^2}{x_0}$$

нвариантное решение уравнения (2.4.17).

настоящего параграфа приведем следующее утвержд

РЕМА 2.4.4. Уравнение

$$u_0 + \vec{\nabla}'\left(e^{u}\,\vec{\nabla}' u\right) + \lambda e^{-u} = 0 \qquad (2.4.24)$$

ювии

$$u_0 + \frac{n}{2} e^{u} \left(\vec{\nabla}' u\right)^2 + \frac{\lambda}{2} e^{-u} = 0 \qquad (2.4.25)$$

антно относительно конформной алгебры AC(1,n), базисные эле-

торой имеют вид

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \qquad (2.4.26)$$

$$\frac{e^{u}}{\lambda}\Big)\partial_a + \frac{x_a}{\lambda n}\partial_0, \quad D = x_0\partial_0 + x_a\partial_a + \partial_u .$$

$$\frac{e^{u}}{\lambda}\Big)D - \left[\left(x_0 + \frac{e^{u}}{\lambda}\right)^2 - \frac{\vec{x}^{\,2}}{\lambda n} - \frac{e^{2u}}{\lambda^2}\right]\partial_0 ,$$

$$2\frac{x_a}{\lambda n} D - \left[\left(x_0 + \frac{e^{u}}{\lambda}\right)^2 - \frac{\vec{x}^{\,2}}{\lambda n} - \frac{e^{2u}}{\lambda^2}\right]\partial_a ; \; a, b = \overline{1,n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы достаточно пока- что система уравнений (2.4.24)-(2.4.25) конформно инвариант- окальной заменой

$$\frac{y_0 - w}{}, \quad x_a = \sqrt{\frac{\lambda n}{2}}\, y_a, \quad u = \ln\frac{\lambda w}{\sqrt{2}}$$

сводится к системе уравнений Даламбера – Га

$$\frac{n}{w}, \quad w_\mu w^\mu = 1, \qquad (2.4$$

$$y = (y_0, \vec{y}) \in R_{1+n}, \quad \mu = \overline{0,n}, \quad w_\mu = \frac{\partial w}{\partial y_\mu} .$$

ольку система (2.4.27) конформно инвариантна ([172

ма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4.2. Утверждение теоремы 2.4.4 на первый взгляд колько неожиданное, так как в ней доказывается, что уравнение 4.24) "параболического" типа инвариантно относительно конформной

ебры. Тем не менее это так. Как же объяснить
тат? Из полученных в настоящем параграфе
о множество решений уравнения (2.4.3) или (2.
ое, что из него можно выделить как галилеевск
инвариантные подмножества решений. Для этого нес
ходного уравнения, накладывать дополнительные ограничени
решения вида (2.4.5), (2.4.25).

УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ НЕЛИНЕИНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

описания различных нелинейных волновых проц

ется уравнение

$$u_{00} - \vec{\nabla}\left[f(u)\vec{\nabla}u\right] = F(x,\ u,\ \underset{1}{u}), \qquad (2.5.1$$

$u = u(x) \in R_1$, $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+n}$, f и F – произвольные функции своих аргументов, $f(u) > 0$, $\underset{1}{u} = (u_0, u_1, \dots, u_n)$.

В работе [134] методом Ли изучены групповые свойства уравнения при $F = 0$. Бесконечная алгебра инвариантности уравнения дополнительным условием

$$f(u)\left|\vec{\nabla}u\right|^2 = m\ , \quad (m = \mathrm{const}) \qquad (2.5.2)$$

$F = m = 0$, обнаружена в [128].

ящем параграфе исследована условная инвари

(2.5.7), а также лиевская инвариантность урав

ЛИЕВСКАЯ СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЯ (2.5.2).

смотрим сначала случай $m = 0$, т.е. уравнение

$$u_0^2 - f(u)\left(\vec{\nabla}u\right)^2 = 0 \qquad (2.5.3)$$

ТЕОРЕМА 2.5.1. Максимальной в смысле С.Ли группой инвариант- уравнения (2.5.3) является бесконечномерная груп , порождаемая операторами

$$\dots u - x_a x_a\Big] + 2x_\mu\Big[b_0 x_0 f(u) - b_a x_a\Big] + \qquad (2.5.$$

$$c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu\partial_\mu + \eta\left\{-\frac{f'}{2f}\,x_0\partial_0 + \partial_u\right\},$$

c_{00}, $c_{\mu\nu}$, d_μ, η – произвольные гладкие функции арг $c_{0a}f(u)$, $c_{ab} = -c_{ba}$; $\mu, \nu = \overline{0,\ n}$; $a, b = = \overline{1,\ n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (2.5.3) заменой

$$y_0 = x_0/\sqrt{f(u)}\ , \quad y_a = x_a\ , \quad v = u$$

приводится к уравнению

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y_0}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial y_a}\,\frac{\partial v}{\partial y_a} = 0.$$

Инвариантность уравнения (2.5.6) относительно бесконечн

группы установлена в §1.2 из[124]. Используя эти результаты и

(2.5.5), получаем формулы (2.5.4).

2. Пусть $m = 1$. Тогда имеем уравнение

$$u_0^2 - f(u)\left(\vec{\nabla} u\right)^2 = 1.$$

Симметрия уравнения (2.5.7) существенно зави

пространства независимых переменных ($n = 1$ или n

рим эти два случая отдельно.

Одномерный случай. В этом случае $x = (x_0, x_1) \in R_2$,

ние имеет вид

$$u_0^2 - f(u)\, u_1^2 = 1.$$ (2.5.8

При помощи метода С.Ли [47],[180] доказываются следующи

верждения.

ТЕОРЕМА 2.5.2. Максимальная алгебра инвариантности

(2.5.8) задается следующими базисными элементами:

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}\ , \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\ ,$$

если $f(u)$ – произвольная гладкая функция;

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad D = x_0\partial_0 + \frac{k+2}{2}\, x_1\partial_1 + u\partial_u\ ,$$

если $f(u) = \lambda u^k$, (λ, k – произвольные постоянные).

Если $f(u) = z^{-2}$, где $z(u)$ – решение уравнени

$$z'' = \lambda_1 z\ , \quad (\lambda_1 = \mathrm{const})\ ,$$

то уравнение (2.5.8) обладает самой широкой алгеброй инвариант

ти, состоящей из десяти операторов. Причем, в зависимости от

λ_1, возможны четыре неэквивалентных слу

виде отдельных утверждений.

2.5.3. МАИ уравнения

$$u_0^2 - u^{-2}u_1^2 = 1 \qquad (2.5.1$$

я конформная алгебра AC(1,2), базисные операторы кото

вид

$$\partial_0,\ P_1 = -u^{1}\sin x_1\partial_1 + \cos x_1\partial_u,\ P_2 = u^{-1}\cos x_1\partial_1 + \sin x_1\partial_u\ ,$$

$$x_0P_1 + u\cos x_1P_0,\quad J_{02} = x_0P_2 + u\sin x_1P_0,\ J_{12} = \partial_1,$$

$$\partial_0 + u\partial_u\ ,\ K_0 + 2x_0D - (x_0^2 - u^2)P_0, \qquad (2.5.13)$$

$$D + (x_0^2 - u^2)P_1,\ K_2 = 2u\sin x_1D + (x_0^2 - u^2)P_2.$$

2.5.4. МАИ уравнения

$$u_0^2 - e^{2u}u_1^2 = 1$$

формная алгебра AC(1,2) с базисными операторами

$$hx_0\partial_0 - shx_0\partial_u),\ P_1 = \partial_1,\ P_2 = e^{-u}(-shx_0\partial_0 + chx_0\partial_u),$$

$$shx_0P_1 + x_1P_0,\quad J_{02} = \partial_0,\quad J_{12} = x_1P_2 - e^{u}chx_0P_1\ ,$$

$$\partial_1 + \partial_u,\quad K_0 = 2e^{u}shx_0D + (x_1^2 + e^{2u})P_0\ , \qquad (2.5.15)$$

$$2x_1D - (x_1^2 + e^{2u})P_1\ ,\quad K_2 = 2e^{u}chx_0D - (x_1^2 + e^{2u})P_2.$$

ТЕОРЕМА 2.5.5. МАИ уравнения

$$u_0^2 - ch^{-2}u\ u_1^2 = 1 \qquad (2.5.16)$$

лгебра Лоренца AO(2,2) с базисными операторами

$$u\partial_0 + shx_0chx_1ch^{-1}u\partial_1 + shx_0shx_1shu\partial_u\ ,$$

$$chu\partial_0 + shx_0shx_1ch^{-1}u\partial_1 + shx_0chx_1shu\partial_u\ ,$$

$$x_1chu\partial_0 + chx_0chx_1ch^{-1}u\partial_1 + chx_0shx_1shu\partial_u\ ,$$

$$nx_1chu\partial_0 + chx_0shx_1ch^{-1}u\partial_1 + chx_0chx_1shu\partial_u\ ,$$

$$shx_1chu\partial_0 + chx_0chu\partial_u\ , \qquad (2.5.17)$$

$$chx_0shu\partial_0 + shx_0chu\partial_u\ ,$$

$$shx_1thu\partial_1 - chx_1\partial_u\ ,$$

$$= chx_1thu\partial_1 - shx_1\partial_u\ ,\ Q_{0} = \partial_0\ ,\quad Q_{10} = \partial_1.$$

РЕМА 2.5.6. МАИ уравнения

$$u_0^2 - \cos^{-2}u \; u_1^2 = 1 \qquad (2.5.18)$$

ебра Лоренца с базисным операторами вида (2.5.17 ужно, соответственно, заменить на ix_0, ix_1, iu.

чие широкой симметрии у уравнений (2.5.12), (2.5 (2.5.18) наводит нас на мысль, что эти уравнения кально эквивалентными уравнению эйконала

$$\frac{\partial v}{\partial y_0}\Bigg)^2 - \left[\frac{\partial v}{\partial y_1}\right]^2 = 1 \ , \qquad v = v(y_0, y_1), \qquad (2.5.19)$$

которого является конформная алгебра AC(1,2). Действительно, внения (2.5.12) и (2.5.14) приводятся к уравнению (2.5.19), если и к цилиндрическим координатам

$$y_1 = u \cos x_1, \quad v = u \sin x_1 \qquad (2.5.20)$$

$$x_0, \quad y_1 = x_1, \quad v = e^u \operatorname{ch} x_0 \qquad (2.5.2$$

но. Уравнение (2.5.16) приводится к уравнени сферических координат

$$\operatorname{ch}x_1 \operatorname{ch}u, \quad y_1 = e^{x_0} \operatorname{sh}x_1 \operatorname{ch}u, \quad v = e^{x_0} \operatorname{sh}u. (2.5.22)$$

ие (2.5.18) приводится к уравнению (2.5.16), если в нем ить , x_1, u) на (ix_0, ix_1, iu).

Мно ерный случай. При $n \geq 2$ уравнения (2.5.12), 5.16) 2.5.18) не обладают симметрийными свойствами, описанными орем 2.5.3, 2.5.5, 2.5.6. Только лишь уравнение (2.5.14), ногомерном случае имеет вид

$$u_0^2 - e^{2u}\left(\vec\nabla u\right)^2 = 1 \qquad (2.5.23)$$

ариантно. Как и предыдущие утверждения, методом следующая теорема.

2.5.7. МАИ уравнения (2.5.7) задается базисным

$$= x_a\partial_b - x_b\partial_a \ , \qquad a, b = \overline{1, n} \ , \qquad (2.5.24.$$

если $f(u)$ – произвольная гладкая функция;

$\partial_o,\ \partial_a,\ J_{ab},\ D = x_o\partial_o + \frac{k+2}{2} x_a\partial_a + u\,\partial_u,$

если $f(u) = \lambda e^{k}$, (λ, k – произвольные постоянные)

$\partial_o,\ \partial_a,\ J_{ab},\ D = x_o\partial_o + u\,\partial_u,\ K_o = 2x_oD - (x_o^2 - u$

если $f(u) = u^{-2}$;

$p_o = e^{-u}(\mathrm{ch}\ x_o\partial_o - \mathrm{sh}\ x_o\partial_u),\quad p_a = \partial_a,$

$p_{n+1} = e^{-u}(-\ \mathrm{sh}\ x_o\partial_o + \mathrm{ch}\ x_o\partial_u),\quad J_{oa} = e^{u}\ \mathrm{sh}\ x_op_a +$

$J_{o\ n+1} = \partial_o,\quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a,\quad J_{a\ n+1} = x_ap_{n+1} - e^{u}\mathrm{ch}\ x_op_a,$

$D = x_a\partial_a + \partial_u,\quad K_o = 2e^{u}\mathrm{sh}x_oD + \left[\vec{x}^{2} + e^{2u}\right]p_o,$

$K_a = 2e^{u}x_aD - \left[\vec{x}^{2} + e^{2u}\right]p_a,\ K_{n+1} = 2e^{u}\mathrm{ch}x_oD - \left[\vec{x}^{2} + e^{2u}\right]p_{n+1},$

если $f(u) = e^{2u}$. Причем опеаторы (2.5.27) образуют алгебру $AC(1,\ n+1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.1. При помощи обобщенных цилиндри

ат

$y_o = e^{u}\ \mathrm{sh}\ x_o,\quad y_a = x_a,\quad v = e^{u}\ \mathrm{ch}\ x_o,\quad a = \overline{1,}$

уравнение (2.5.23) приводится к уравнению эйконала

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y_o}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial y_a}\,\frac{\partial v}{\partial y_a} = 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.2. Уравнение (2.5.2) при $m \neq 0;\ 1$ ло эквивалентно уравнению (2.5.7). В этом нетрудно убедиться, заменить в нем x на $\dfrac{x}{\sqrt{m}}$.

УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЯ (2.5.1).

Ниже будет показано, что симметрия уравнения

ьно расширяется, если его рассматривать в сист

условием (2.5.2). Это означает, что уравнение (2.5.

ва решений, обладающие более широкой симметрией,
тво решений данного уравнения.

ТЕОРЕМА 2.5.8. Уравнение (2.5.1), в котором F(x,

ловии (2.5.3) инвариантно относительно бесконечном

(1, n), порождаемой операторами (2.5.4) при b_μ –

Доказательство данной теоремы заключается в проверке выпо

ия условий (см. §2.1)

$$S \Big|_{\substack{S=0\\ S_1=0}} = 0 , \quad \tilde{X} S_1 \Big|_{\substack{S=0\\ S_1=0}} = 0 ,$$

$$u_{00} - \vec{\nabla}\left[f(u)\vec{\nabla}u\right] , \quad S_1 = u_0^2 - f(u)\left(\vec{\nabla}u\right)^2 .$$

продолжение оператора (2.5.4)

Аналогично теореме 2.5.8 доказываются следующи

ТЕОРЕМА 2.5.9. Уравнение

$$u_{00} - \partial_1(u^{-2}u_1) = - u^1,$$

и условии (2.5.12), инвариантно относительно расшир

анкаре $\tilde{AP}(1, 2)$, базисными элементами которой являются операт

, P_1, P_2, J_{01}, J_{02}, J_{12}, D, заданные формулами (2.5.13).

ТЕОРЕМА 2.5.10. Уравнение

$$u_{00} - \partial_1(u^{-2}u_1) = u^{-2}u_1 \mathrm{ctg} x_1 ,$$

условии (2.5.12), инвариантно относительно конфор

,1), состоящей из операторов P_0, P_1, J_{01}, D, K

.13).

ТЕОРЕМА 2.5.11. Уравнение

$$u_{00} - \partial_1(u_1 \,\mathrm{ch}^{-2}u) = 2\,\mathrm{sh}^{-1}2u \quad ,$$

и условии (2.5.16), инвариантно относительно

O(2,2), состоящей из операторов Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_{10}

.5.17).

2.5.12. Уравнение

$$u_{00} - \partial_1 (u_1 \mathrm{ch}^{-2}u) = -(u_0 + \mathrm{th}\, u), \qquad (2.5.35)$$

ювии (2.5.16) инвариантно относительно расширенной алгебры 1, 2) с базисными элементами

$$-Q_1,\ Q_4 - Q_2,\ Q_6 - Q_5,\ Q_7,\ Q_8,\ Q_9,\ Q_{10},$$

Q_{10} – операторы алгебры (2.5.17).

.5.13. Уравнение

$$u_1 \cos^{-2}u) = 2 \sin^{-1}2u \quad , \qquad (2.5.$$

(2.5.18), инвариантно относительно алгебры Лорен раторами Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_9, Q_{10} алгебры (2.

то (x_0, x_1, u) необходимо положить $(ix_0, ix_1, iu$ уравнениях (2.5.32) – (2.5.36) функция u зависит от дву менных (x_0, x_1). Для многомерного уравнения (2.5.1) справедследующие результаты.

ТЕОРЕМА 2.5.14. Уравнение

$$u_{00} - \vec{\nabla}\left[e^{2u}\, \vec{\nabla} u\right] = 0 \ , \qquad (2.5.37)$$

(2.5.23), инвариантно относительно расширенной алгебры (1, n+1) с базисными элементами P_0, P_a, P_{n+1}, $_{+1}$, D, заданными формулами (2.5.27).

2.5.14. Уравнение

$$\vec{\nabla}\left[e^{2u}\, \vec{\nabla} u\right] = n\left[u_0 \mathrm{th}\ x_0 + 1\right], \qquad (2.5.3$$

усло и (2.5.23), инвариантно относительно конформной алгеб , n) с базисными операторами P_0, P_a, J_{0a}, J_{ab}, D, K_0, K_a алгебры .27).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5.3. Наличие бесконечномерной алгебы инвариантности нии

$$u_{00} - \vec{\nabla}\left[f(u)\vec{\nabla} u\right] = 0, \qquad (2.5.39)$$

при условии (2.5.3), позволяет получить следующую ф ния решений. Если $u = W(x_o, \vec{x})$ решение системы уравнений 2. (2.5.39), то

$$\Phi(u) = \tau\left[x_o\sqrt{f(u)}\,,\ \vec{x}\right]$$

также решение данной системы при произвольной гладк Ф(u), где функция $\tau(y_o, \vec{x})$ находится из уравнения

$$\tau = W\left[y_o f^{-1/2}(\tau),\ \vec{x}\right],$$

з $y_o = x_o f^{1/2}(u)$.

Например, $u = (\vec{\alpha}\ \vec{x})^{-1}\,(\alpha_o x_o - 1)$ – решени (2.5.39) при $\alpha_o^2 = \vec{\alpha}^2$ и $f(u) = u^2$. Из уравне

$$\tau = \left[\vec{\alpha}\ \vec{x}\right]^{-1}\left[\alpha_o y_o \tau - 1\right]$$

находим $\tau = \left[\alpha_o y_o - \vec{\alpha}\ \vec{x}\right]^{-1}$. Тогда

$\Phi(u) = \dfrac{u}{\alpha_o x_o - u\vec{\alpha}\,\vec{x}}$ или $\varphi(u) = \alpha_o x_o - u\vec{\alpha}\,\vec{x}$ – решение уравнений (2.5.3), (2.5.39) $(f(u) = u^{-2})$ при про функции $\varphi(u)$.

УСЛОВНАЯ И Q-УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ БОРНА-ИНФЕЛЬДА И МОНЖА-АМПЕ

трим уравнение Борна-Инфельда (БИ)

$$u_1^2)u \quad - 2u_0u_1u_{01} + (-1 + u_0^2)u_{11} = 0, \qquad (2.6.1)$$

$x), \; x = (x_0, x_1) \in R_2$.

ие (2.6.1) обобщается на случай произвольного кол ых переменных $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+n}$ следующим

$$u_\nu u^\nu) \Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0 ,$$

Δ, $= g^{\mu\nu}u_\nu$, $g^{\mu\nu}$ – метрический тен

$\ldots, -)$.

ной алгеброй инвариантности уравнения алгебра Пуанкаре $\tilde{P}(1,n+1)$ с опера

$$\frac{\partial}{\partial x_u} , \quad J_{AB} = x_AP_B - x_BP_A , \quad D = x_AP_A ,$$

A,B $0, n+1$, $x_{n+1} \equiv u$, тензор g^{AB} имеет сигнатуру

лиевская симметрия уравнения (2.6.1) использова чных решений данного уравнения. В настоящем пар уравнение БИ условно инвариантно относител ана его Q-условная инвариантность, ны точные решения данного уравнения.

.6.1. Уравнение БИ (2.6.1) Q-условно операторов

$$; \qquad Q_2 = \partial_0 + \mathrm{th}\, x_1\partial_u ;$$

$$h\,(x_0 + a_3x_1)\,\partial_u ; \qquad Q_4 = x_1\partial_1 + u\partial_u ;$$

$$g\, x_0\, \partial_u ; \qquad Q = \partial_1 + \mathrm{tg}(x_1 + a_6x_0)\,\partial_u ;$$

$$2\partial_1 + a_7x_1\partial_u ; \qquad Q_8 = \alpha_\mu x^\mu \alpha_\nu\partial_\nu + \partial_u ,$$

a_7, α_μ – произвольные постоянные, $\alpha_\mu\alpha^\mu = 0$.

ТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем только для оп льных операторов оно аналогично. Нам необходи зать, что

$$\tilde{Q}_1 S = \lambda_1 S + \lambda_2 (Q_1 u),$$

где $\tilde{Q}_1$ – продолжение оператора Q_1, S – левая ть (2.6.1), λ_1, λ_2 – некоторые функции (операторы), $Q_1 u =$ Поскольку уравнение (2.6.1) 2-го порядка, то продолжение оператора Q_1:

$$\overset{2}{Q}_1 = x_0 \partial_0 + u \partial_{u_1} + u_1 \partial_{u_{00}} - u_{00} \partial_{u_{11}} + u_{11} \partial_u$$

Тогда

$$\overset{2}{Q}_1 S = 2u_1 u_{00} - 2u_0 u_1 u_{01} - u_{00}(1 + u_1^2)$$

$$= S - 2(u_1^2 - u_1 + 1)\, u_{00} = S - 2(u_1^2 - u_1$$

Теорема доказана.

Наличие операторов (2.6.4) позволяет нахо рующие уравнение (2.6.1) к обыкновенным дифференциальн ниям. Эти анзацы соответственно имеют вид

1). $u = x_0 \varphi(x_1)$; 2). $u = \varphi(x_1) + x_0 \text{ th } x_1$;

3). $u = \varphi(x_1) + \ln \text{ch}(x_0 + a_3 x_1)$; 4). $u = x_1 \varphi$

5). $u = \varphi(x_0) + x_1 \text{ tg } x_0$; 6). $u = \varphi(x_0) - \ln \cos(x_1$

7). $u = \varphi(4x_0 + a_7 x_1^2) + x_0$; 8). $u = \varphi(\alpha_\nu x^\nu) + \beta\, x^\mu$

Подставляя (2.6.4) в (2.6.1), получаем ния для функции $\varphi(\omega)$(2.6.8)

1). $(\varphi^2 - 1)\varphi'' = 2\varphi\varphi'^2$, 2). $\varphi' + \varphi$

3). $\varphi'' - \varphi'^2 = 1 - a_3^2$, 4). $(\varphi^2+1)\varphi''$

5). $\varphi'' - 2\varphi' \text{tg } \omega = 0$, 6). $\varphi'' + \varphi'^2 =$

7). $\varphi'' + a_7 \varphi'^2 + 2a_7 \varphi'^3 = 0$, 8). $\varphi'' + \frac{2}{\omega}\varphi' - 2 = 0$

Решая уравнения (2.6.8) и используя анзацы (2.6.7), следующие решения уравнения (2.6.1):

$$u = x_0 \text{th } x_1 \ ; \quad u = x_1 \text{tg } x_0 \ ; \quad u = -\ln\left[\frac{1}{x_0} \cos(x_0 \pm x_1)\right] \ ;$$

$$u = -\ln\left[\frac{1}{x_0} \text{ch}(x_0 \pm x_1)\right] \ ; \quad u = \ln \frac{\text{ch}(x_0 + kx_1)}{\cos\sqrt{1 - k^2}\ x_1} \ , \ k^2$$

$$n\,\frac{\mathrm{ch}(\;_0 + kx_1)}{\mathrm{sh}\sqrt{1-k^2}\;x_1},\; k^2 > 1;\; u = \ln\frac{\cos\sqrt{k^2-1}\;x_0}{\cos(x_1+kx_0)},\; k^2 > 1;$$

$$u = \ln\frac{\mathrm{sh}\sqrt{1-k^2}\;x_0}{\cos(x_1+kx_0)},\; k^2 < 1;$$

$$x_0))\} + c_2 = u + x_0 + \frac{1}{2}\alpha_\nu x_1^2,\quad c_1,\; c_2 - \mathrm{const};$$

$$\frac{1}{4}(\alpha_\nu x^\nu)^2,\quad \alpha_\nu\alpha^\nu = 0,\quad \alpha_\nu\beta^\nu = 1.$$

теперь несколько результатов, полученных н

.2).

2.6.2. Уравнение (2.6.2) инвариантно относит

$_1 = x_0\partial_0 + u\partial_u$ при условиях

$S_2 \quad -(2 + u_a u_a)\,u_{00} + (1 - u_0^2)\,\Delta u + 2u_0 u_a u_{0a} = 0,$

$S_3 = u_{00} = 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично, как и в теореме 2.6.1, несложно

ться выполнении равенств

$3S_1 - 2S_2,\qquad \tilde{Q}_1 S_2 = S_2 + 4S_3,\qquad \tilde{Q}_1 S_3 = -S_3,$

ая часть уравнения (2.6.2). Теорема доказана.

же показать, что уравнение (2.6.2) условно инвари

операторов

$P_1 = \partial_0 + u\partial_u\;,\quad P_2 = \sin 2x_0\;\partial_0 + 2u\partial_u.$

оответствующий оператору Q_1, имеет вид

$$u = x_0\;\varphi(\vec{x}) \qquad (2.6.9)$$

ляя 2.6.9) в (2.6.2), получаем

$$-x_0[(1 - \varphi^2)\,\Delta\varphi + 2\varphi\varphi_a\varphi_a] + x_0^3\,[-\varphi_a\varphi_a\Delta\varphi + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab}] = 0,$$

ние (2.6.2) при помощи анзаца (2.6.9) редуцируется к

нений

$$- \varphi^2)\;\Delta\varphi + 2\varphi\varphi_a\varphi_a = 0 \qquad (2.6.10$$

$$\varphi_a\varphi_a\Delta\varphi + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab} = 0$$

Система (2.6.10) заменой $\varphi = \operatorname{th} z$ упрощается и [illegible]

$$\left|\begin{array}{l} \Delta z = 0 \\ -z_a z_a \Delta z + z_a z_b z_{ab} = 0 \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left|\begin{array}{l} \Delta z [illegible] \\ z [illegible] \end{array}\right.$$

Частными решениями системы уравнений (2.6.11) являются

$$Z = F(\vec{\alpha}\vec{x}), \qquad Z = \vec{\beta}\vec{x},$$

где F – произвольая дифференцируемая функция, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ – произвольные постоянные, $\vec{\alpha}^2 = 0$. Тогда

$$u = x_0 \operatorname{th} F(\vec{\alpha}\vec{x}), \quad \vec{\alpha}^2 = 0; \quad u = x_0 \operatorname{th} \vec{\beta}\vec{x}$$

решения уравнения (2.6.2).

Анзац, соответствующий оператору P_1, имеет вид

$$u = e^{x_0} \varphi(\vec{x}).$$

Подставляя (2.6.1) в (2.6.2), имеем

$$[illegible](\varphi - \Delta\varphi) + e^{[illegible]x_0}(\varphi^2\Delta\varphi - \varphi_a\varphi_a\Delta\varphi - \varphi\varphi_a\varphi_a + \varphi_a\varphi_b\varphi [illegible]$$

т.е.

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\varphi = \varphi \\ \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab} - 2\varphi\varphi_a\varphi_a + \varphi^3 = 0. \end{array}\right.$$

Например, $\varphi = \exp \vec{\beta}\vec{x}$, $\vec{\beta}$ – const, $\vec{\beta}^2 = 1$ – решение (2.6.14). Тогда

$$u = \exp(x_0 + \vec{\beta}\vec{x}), \quad \vec{\beta}^2 = 1$$

решение уравнения (2.6.2).

Оператору P_2 соответствует анзац

$$u = \operatorname{tg} x_0 \, \varphi(\vec{x})$$

Подставляя (2.6.16) в (2.6.2), получаем

$$- [(1 - \varphi_a\varphi_a)\Delta\varphi + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab}] + \cos^{-2}x_0[(1 - \varphi [illegible]$$

$$+ \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab} - \Delta\varphi] + \cos^{-4}x_0 \, \varphi^2\Delta\varphi - [illegible]$$

$$\left|\begin{array}{l} (1 - \varphi_a\varphi_a)\Delta\varphi + \varphi_a\varphi_b\varphi_{ab} = 0 \\ 2\varphi(1 - \varphi_a\varphi_a) - \Delta\varphi = 0 \\ \varphi^2\Delta\varphi = 0 \end{array}\right.$$

Система (2.6.17) эквивалентна системе уравнений

$$\left|\begin{array}{l}\varphi_a\varphi_a = 1 \\ \Delta\varphi = 0 \quad ,\end{array}\right. \qquad (2.6.18)$$

ние которой имеет вид $\varphi = \overrightarrow{\beta}\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{\beta}^2 = 1$. Тогда

$$u = \overrightarrow{\beta}\overrightarrow{x}\,\mathrm{tg}\,x_0 \quad , \quad \overrightarrow{\beta} = 1 \qquad (2.$$

знения (2.6.2).

МА 2.6.3. При дополнительном условии $1 - u_\mu u$

ии БИ (2.6.2) инвариантно относительно конформной ал

n+1) с операторами (1.1.34)-(1.1.36).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства

$$(1 \quad u_\mu u^\mu)\,\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = (\Box u - \frac{1}{2}\,u^\nu\partial_\nu)\,(1 - u_\mu u^\mu)$$

т. то уравнение БИ (2.6.2) является дифференциальным следст

авнения эйконала (1.1.9). Поэтому уравнение (2.6.2) при

ьном условии (1.1.9) эквивалентно уравнению (1.1.9).

ие (1.1.9) инвариантно относительно алгебры AC(1

доказана.

ключении этого параграфа приведем некоторые резу

ия условной инвариантности, полученные нами для мно

ра ения Монжа-Ампера (МА)

$$\det \| u_{\mu\nu} \| = 0 \qquad (2.6.20)$$

ТЕОРЕМА 2.6.4. Уравнение МА (2.6.20) инвариантно относительно конформной алгебры $\widetilde{AC}(1,n+1)$ при дополнительном условии (1.1.9). гебры Галилея $AG(2,n)$ при условии (1.3.13).

оказательство данной теоремы аналогично доказательству теоре- 3 и следует из того, что, как показано в работе [25], урав- .6.20) является дифференциальным следствием и уравн 1.9) и уравнения Гамильтона-Якоби (1.3.13).

УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ НЕЛИНЕЙНОГО ПОЛИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНФОРМНОЙ АЛГЕБРЫ

В §1.2 установлено, что нелинейное поливолн

$$\square^m u = F(u),$$

$u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+n}$, конформно инв

ом случае, когда функция $F(u)$ имеет вид (1.2.1)

Исследуем теперь условную инвариантность уравнения (2.7.1) отно

ьно конформной алгебры. Рассмотрим сначала случай $m = 1$

ТЕОРЕМА 2.7.1. Уравнение

$$\square u + \lambda_1 u^k = 0$$

нвариантно относительно конформной алгебры

$$= g^{\mu\nu}\partial_\nu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \quad D = x_\mu \partial_\mu + x_{n+1}\partial_{n+1},$$

$$K_\mu = 2x_\mu D - \left(x_\nu x^\nu - x^2_{n+1}\right)P_\mu$$

условии

$$u_\mu u^\mu = \lambda_3^2 u^{k+1} \quad ,$$

$$\lambda_3^2 = 2\lambda_1\left[n(k-1) - k - 1\right]^{-1}, \quad x_{n+1} = \frac{2}{\lambda_3(1-k)} u^{\frac{1-k}{2}}, k \neq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определения условной инвариан

им необходимо доказать, что

$$X\left(\square u + \lambda_1 u^k\right) = \tau_1\left(\square u + \lambda_1 u^k\right) + \tau_2\left(u_\mu u^\mu - \lambda_3^2 u^{k+1}\right) \quad ,$$

$$\left(u_\mu u^\mu - \lambda_3^2 u^{k+1}\right) = \tau_3\left(u_\mu u^\mu - \lambda_3^2 u^{k+1}\right) \quad , \qquad ($$

де τ_1, τ_2, τ_3 – некоторые функции, X – инфинитезимальный

гебры (2.7.3), $\tilde{X}$ – продолжение оператора X

$$\xi^\mu \partial_\mu + \eta\partial_u + \zeta^\nu \frac{\partial}{\partial u_\nu} + \sigma^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial u_{\mu\nu}} \quad .$$

структуры операторов алгебры (2.7.3 следует, что

$$= 2x_\mu b_\nu x^\nu - b_\mu\left[x_\nu x^\nu - x^2_{n+1}\right] + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu \quad ,$$

$$= \frac{2}{1-k}\left(2b_\nu x^\nu + c_{00}\right)u \quad ,$$

$$\frac{u}{\lambda_3 (k-1)}\left[b_\nu u_\nu u_\mu - \lambda_3^2 b^\mu u^{k+1}\right] + 2\frac{k+1}{k-1}\left[2b_\nu x^\nu\right.$$

$$u_\mu\left[2b^\mu x_\nu - 2b^\nu x_\mu + c_{\mu\nu}\right]u_\nu ,$$

$$+\frac{2}{k}\left(b_\mu u_\nu + b_\nu u_\mu\right) + \frac{2k}{1-k}\left[2b_\alpha x^\alpha + c_{oo}\right]u_{\mu\nu} + \frac{4u^{-k}b}{\lambda_3^2 (k-1)}\left[u_\mu u_\nu\right.$$

$$\left. u_\nu u_{\mu\alpha}\right] + \frac{2u^{-k-1}}{\lambda_3^2 (k-1)} b_\alpha u_\alpha\left[2uu_{\mu\nu} - 2ku_\mu u_\nu + \lambda_3^2 (k-1) u^{k+1} g^{\mu\nu}\right] - \left[2b_\alpha x^\nu -\right.$$

$$\left. - 2b^\nu x_\alpha + c_{\alpha\nu}\right]u_{\mu\alpha} - \left[2b_\alpha x^\mu - 2b^\mu x_\alpha + c_{\alpha\mu}\right]u_{\nu\alpha} .$$

ьзуя формулы (2.7.6) – (2.7.7) , убеждаемся в выполнении усло

7). Теорема доказана.

МА 2.7.2. Уравнение Лиувилля

$$\Box u + \lambda_2 \exp u = 0 \qquad (2.7.8)$$

относительно конформной алгебры (2.7.3) при усло

$$u_\mu u^\mu = \frac{2\lambda_2}{n-1}\exp u , \quad (n \neq 1) \qquad (2.7.9)$$

рмулах (2.7.3)

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{\lambda_2 \exp u}} .$$

Данная теорема доказывается аналогично предыдущей.

ТЕОРЕМА 2.7.3. Уравнение

$$\Box u = F(u) \qquad (2.7.10)$$

риантно относительно конформной алгебры (2.7.3) при условии

$$u_\mu u^\mu = G(u) , \qquad (2.7.11)$$

$$u) = \frac{n}{\Phi\Phi} - \frac{\Phi}{\dot{\Phi}^3} , \quad G(u) = \frac{1}{\dot{\Phi}^2} , \qquad (2.7.12)$$

рмулах (2.7.3)

$$x_{n+1} = \Phi ,$$

– произвольная гладкая функция.

АТЕЛЬСТВО. Система уравнений

$$\Box u \quad \frac{n}{\dot{\Phi}} - \frac{\Phi}{\dot{\Phi}^3} , \quad u_\mu u^\mu = \frac{1}{\dot{\Phi}^2} , \qquad (2.7.13)$$

заменой $= \Phi(u)$ приводится к виду

$$\Box w = \frac{n}{w}, \; w_\mu w^\mu = 1.$$

нформная инвариантность системы (2.7.14) установлен

эма доказана.

Рассмотрим теперь поливолновое уравнение (2.7.1) при произв ьном m. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.7.4. Уравнение (2.7.1) инвариантно относительно к ормной алгебры (2.7.3) при условии

$(u) = \lambda u^{1-2m}, \; \lambda = 1\cdot 3 \ldots (2m - 3)\; n\; (2 - n) \ldots (2m - 2 - n)$;

$$x_{n+1} = u \; ; \qquad (2$$

$$\begin{cases} \Box u = \dfrac{n}{u} \\ u_\mu u^\mu = 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как уравнение (2.7.1) с 2.7.15) является дифференциальным следствием уравн о система уравнений (2.7.1, (2.7.15), (2.7.16) эквивалентна сис ме (2.7.16). Этот факт и доказывает утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7.1. Если $n = 2m - 3$, то уравнение

$$\Box^m u = \lambda u^{1-2m}, \qquad (2.7.17)$$

де $\lambda = (-1)^m \left[1\cdot 3 \ldots (2m - 3)\right]^2$, $u = u(x)$, $x \in R_{2m-2}$, допу онформные алгебры. Оно инвариантно по Ли относит .1.3), (1.1.5) , (1.1.7) и условно инвариантно гебры (2.7.3).

Q-УСЛОВНАЯ СИММЕТРИЯ, РЕДУКЦИЯ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим нелинейное волновое уравнение

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0 , \qquad (2.8.1)$$

где $u = u(x) \in R_1$, $x = (x_0, x_1) \in R_2$, $F(u)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Групповые свойства уравнения (2.8.1) методом С.Ли детально едованы в [134].

Ниже исследуется условная инвариантность уравнения (2.8.1). условной симметрии использованы для нахождения анзацев, их уравнение (2.8.1) к обыкновенным дифференциа ния . Это позволило найти некоторые семейства точных решен ения (2.8.1).

ТЕОРЕМА 2.8.1. Уравнение (2.8.1) Q-условно инвариантно о тельно оператора

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B(x,u)\partial_1 + C(x,u)\partial_u , \qquad (2.8.2)$$

если функции $A(x,u)$, $B(x,u)$, $C(x,u)$ и $F(u)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

СЛУЧАЙ 1. $A \neq 0$, $D \equiv F - B^2$. Не умаляя общности можно ть $A = 1$.

) ,

$$(C_0 D^{-1})_0 - C^2 (C_u D^{-1})_u = C(C_0 D^{-1})_u - C(C_u D^{-1})_0 +$$

$$+ D \{2F(B_0 C_1 - B_1 C_0 + C[B_u C_1 - B_1 C_u]) - BCC_1 F\} = 0 .$$

$$d(CF)_u + 2B(B_u C_u - B_{uu} C) - 2FB_{1u} - 2BB_{0u}\} - CD_u^2 +$$

$$_0 D_u \quad 2BB_1 (BF - 2B_u F) = 0 , \qquad (2.8.3)$$

$$B_{00} + 2(B_0 C)_u + 2(BC_{0u} - B_u C_0) + 2(c_1 F)_u - B_{11} F + B_{uu} C^2 +$$

$$+ 2BCC_{uu}\} - D_u \{B_0 C + B_u C^2 + 2BCC_u\} + B\{B_1 CF + 2B_0^2 + 2B_0 B_u C +$$

$$+ 4BB_0 C_u + 4B_1 C_u F - 2B_1^2 F\} = 0 .$$

СЛУЧАЙ 2. $A = 1,\ B = F^{\bar{2}}$

а) $BC + 2BC_u = 0,\ C_0 + CC_u - BC_1 = 0$;

б) $BC + 2BC_u \neq 0,\ C_0 + CC_u - BC_1 = 0$,

$$[BC^2 + 2B(BC_1 + CC_u) + 2B(C_{0u} + CC_{uu} + BC_{1u})]\ (C_0 + CC_u$$

$$= [C_{00} + C^2C_{uu} - B^2C_{11} + 2CC_{0u} - 2BCC_1]\ (BC + 2BC_u)\ .$$

СЛУЧАЙ 3. $A = 0,\ B = 1$

$$C_{uu} = 0,\quad C_{0u} = 0\ , \tag{2.8.6}$$

$$C_{00} - C^3\ddot{F} - (3CC_1 + 2C^2C_u)\dot{F} - (C_{11} + 2CC_{1u})F = 0\ .$$

Доказательство теоремы основано на использовании опред
Q-условной инвариантности.

Общее решение систем (2.8.3) –(2.8.6), за исключени
(2.8.4), нам найти не удалось. При конкретных знач
$F(u)$ построены частные решения этих систем, которы
операторы Q. В таблице 2.8.1 приведены явные виды о
анзацы, редуцированные уравнения.

ТАБЛИЦА 2.8.1.

F(u)	Оператор	Анзац	Редуцированны уравнения
$F(u)\in C^1(R)$	$\partial_0 + F(u)^{1/2}\partial_1$	$F(u)^{1/2}x_0 - x_1 + \varphi(u) = 0$	$0 = 0$
	$\partial_0 + \beta(u)\partial_1$	$\beta(u)x_0 - x_1 + \varphi(u) = 0$	$\varphi = a_1(F - \beta^2)$
	$\partial_0 + F(u)^{1/2}\partial_1 + \lambda_1[F(u)^{1/2} + \lambda_2]^{-1}\partial_u$	$\lambda_1 x_0 - \int(F(u)^{1/2} + \lambda_2)du - \varphi\left(\lambda_1 x_1 - \int\left[F(u) + \lambda_2 F(u)^{1/2}\right]\times du\right) = 0$	$\varphi = \lambda_2^{-1}$

$x_1\partial_1 + \partial_u$	$u = \ln x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} = 0$
$\partial_0 + 2\mathrm{tg}x_0\partial_u$	$e^u = \varphi(x_1)\cos^{-2}x_0$	$\ddot{\varphi} = 2$
$\partial_0 - 2\mathrm{ctg}x_0\partial_u$	$e^u = \varphi(x_1)\mathrm{sh}^{-2}x_0$	$\ddot{\varphi} = 2$
$P_2(x_1)\partial_1 +$ $+ P_2'(x_1)\partial_u$	$e^u = e^{\varphi}(x_0)P_2(x_1)$	$\ddot{\varphi} = P_2''e^{\varphi}$
$\partial_0 + e^{\frac{u}{2}}\partial_1 + \mathrm{tg}\frac{x_0}{4}\partial_u$	$\sin\frac{x_0}{2}e^{\frac{u}{2}} - \frac{x_1}{2} =$ $=\varphi\left(\cos^2\frac{x_0}{4}e^{\frac{u}{2}}\right)$	$\dot{\varphi} = 0$
$\partial_0 + e^{\frac{u}{2}}\partial_1 - \mathrm{cth}\frac{x_0}{4}\partial_u$	$\mathrm{sh}\frac{x_0}{2}e^{\frac{u}{2}} + \frac{x_1}{2} =$ $=\varphi\left(\mathrm{sh}^2\frac{x_0}{4}e^{\frac{u}{2}}\right)$	$\dot{\varphi} = 0$
$\partial_0 + e^{\frac{u}{2}}\partial_1 - 4x_0^{-1}\partial_u$	$x_0e^{\frac{u}{2}} + x_1 + \varphi\left(x_0^2e^{\frac{u}{2}}\right) = 0$	$\varphi = 0$
$(k+1)x_1\partial_1 + u\partial_u$	$u^{k+1} = x_1\varphi^{k+1}(x_0)$	$\varphi = 0$
$h(x_0)\partial_0 +$ $+ h'(x_0)u\partial_u$	$u^{k+1} = h^{k+1}(x_0)\varphi(x_1)$	$\ddot{\varphi} = \lambda_1\varphi^{\frac{1}{k+1}}$
$\partial_0 + u^{\frac{k}{2}}\partial_1 -$ $- 4u(kx_0)^{-1}\partial_u$	$x_1 + u^{\frac{k}{2}}x_0 + \varphi\left(x_0^4u^k\right) = 0$	$\varphi = 0$
$\partial_1 + x_0\partial_u$	$u = x_0x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} = x_0^2$
$\partial_1 + [2W(x_0)x_1 +$ $+\Lambda(x_0)]\partial_u$	$u = x_1^2W(x_0) + \Lambda(x_0)x_1 +$ $+ \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - 2W\varphi - \Lambda^2 = 0$
$2x_1\partial_1 + [u +$ $+3W(x_0)x_1^2]\partial_u$	$u = x_1^2W(x_0) + x_1^{\frac{1}{2}}\varphi(x_0)$	$4\ddot{\varphi} - 15W\varphi = 0$

	$x_0^2\partial_1+\left[2x_1+\right.$ $\left.+a_1x_0^5\right]\partial_u$	$u=x_0^{-2}x_1^2+a_1x_0^3x_1+$ $+\varphi(x_0)$	$x_0^2\varphi-2\varphi=$
	$W(x_0)\partial_0+$ $+W'(x_0)u\partial_u$	$u=W(x_0)\varphi^{\frac{1}{2}}(x_1)$	φ
	$2x_0^2x_1\partial_1+[ux_0^2+$ $+3x_1^2]\partial_u$	$u=x_0^{-2}x_1^2+x_1^{\frac{1}{2}}\varphi(x_0)$	$4x^2$
$u^{-\frac{1}{2}}$	$\partial_0+x_1u^{\frac{1}{2}}\partial_u$	$2u^{\frac{1}{2}}=x_0x_1+\varphi(x_1)$	$2\ddot{\varphi}=x_1^2$
	$W(x_1)\partial_1+$ $+2W'(x_1)u\partial_u$	$u^{\frac{1}{2}}=W(x_1)\varphi^{\frac{1}{2}}(x_0)$	$\ddot{\varphi}=12\varphi^{\frac{1}{2}}$
	$\partial_0+4W(x_1)x_0u^{\frac{1}{2}}\partial_u$	$u^{\frac{1}{2}}=x_0^2W(x_1)+\varphi(x_1)$	$\ddot{\varphi}-2W\varphi$
	$x_1^2\partial_0+[4x_0+$ $+a_1x_1^5]u^{\frac{1}{2}}\partial_u$	$u^{\frac{1}{2}}=x_0^2x_1^{-2}+\frac{a_1}{2}x_0x_1^3+$ $+\varphi(x_1)$	$4x_1^2\varphi-$
$u^{-\frac{2}{3}}$	$x_0x_1^2\partial_0+[u^{\frac{1}{2}}x_1^2+$ $+3x_0^2]u^{\frac{1}{2}}\partial_u$	$u^{\frac{1}{2}}x_1^2=x_0^{\frac{1}{2}}(x_0^{\frac{3}{2}}+\varphi(x_1))$	$4x^2$
	$x_1\partial_0+3u^{\frac{2}{3}}\partial_u$	$u^{\frac{1}{3}}=x_0x_1^{-1}+\varphi(x_1)$	$x_1^2\ddot{\varphi}-2\varphi=0$
	$\partial_0+\gamma(x_1)u^{\frac{2}{3}}\partial_u$	$u^{\frac{1}{3}}=x_0\gamma(x_1)+\varphi(x_1)$	$\ddot{\varphi}-2\gamma^2\varphi=0$
	$\gamma(x_1)\partial_1-$ $-3\gamma'(x_1)u\partial_u$	$u^{\frac{1}{3}}=\gamma^{-1}(x_1)\varphi^{\frac{1}{3}}(x_0)$	$\ddot{\varphi}=a_1\varphi^{\frac{1}{3}}$
u^{-1}	$\partial_1+u\ \mathrm{tg}\frac{x_1}{2}\ \partial_u$	$u=\varphi(x_0)\cos^{-2}\frac{x_1}{2}$	$\ddot{\varphi}=-1$
	$\partial_1-u\ \mathrm{ctg}\frac{x_1}{2}\ \partial_u$	$u=\varphi(x_0)\ \mathrm{sh}^{-2}\frac{x_1}{2}$	$\varphi=$

	$P_2(x_0)\partial_0 + P_2'(x_0)u\partial_u$	$u=P_2(x_0)e^{\varphi(x_1)}$	$\ddot\varphi = 2a_1 e^{\varphi}$
	$x_0\partial_1+\partial_u$	$u=x_0^{-1}x_1+\varphi(x_0)$	$x_0^2\ddot\varphi - 2\varphi = 0$
	$\partial_1+\gamma(x_0)\partial_u$	$u=\gamma(x_0)x_1+\varphi(x_0)$	$\ddot\varphi-2\gamma^2\varphi = 0$
	$\partial_0+u\partial_1+x_0\partial_u$	$ux_0- x_1- \frac{x_0^3}{3} = \varphi(2u - x_0^2)$	$\ddot\varphi = 0$
$e^u+\lambda^2$	$(x_1\pm\lambda x_0)\partial_1+\partial_u$	$e^u=(x_1\pm\lambda x_0)e^{\varphi(x_0)}$	$\ddot\varphi = 0$
	$(x_1\pm\lambda x_0)\partial_1+2\partial_u$	$e^u=(x_1\pm\lambda x_0)^2e^{\varphi(x_0)}$	$\ddot\varphi = 2e^{\varphi}$
$u^{-\frac{4}{5}}$	$2W(x_1)\partial_1 - 5W'(x_1)u\partial_u$	$u^{\frac{1}{5}}=\varphi^{\frac{1}{5}}(x_0)W^{-\frac{1}{2}}(x_1)$	$\ddot\varphi = a_1\varphi^{\frac{1}{5}}$
u^4	$-2W(x_0)\partial_0 + W'(x_0)u\partial_u$	$u^5=W^{-\frac{5}{2}}(x_0)\varphi(x_1)$	$\ddot\varphi = a_1\varphi^{\frac{1}{5}}$
	$\partial_0 + u^{-\frac{2}{3}}\partial_1 - 3x_1^{-1}u^{\frac{1}{3}}\partial_u$	$x_0+x_1u^{\frac{2}{3}}+\varphi(x_1u^{\frac{1}{3}})=0$	$0 = 0$
u^{-4}	$\partial_0+u^{-2}\partial_1+x_0^{-1}u\partial_u$	$x_0+x_1u^2+\varphi(ux_0^{-1})u^2=0$	$0 = 0$
$H^4(\;)$	$(a_0x_0+a_1x_1) \times \left[H(u)\partial_0 + H^3(u)\partial_1\right]+ \partial_u$	$x_0-\omega_1\int H(u)\ \exp \times \left\{\int H(u)\left[a_0+a_1 \times H^2(u)\right]du\right\}du=\varphi(\omega_1)$	$0 = 0$

блице 2.8.1 и ниже введены следующие обозначения: + a_2z + a_3 – произвольный многочлен второй степени; ение уравнения $h''= \lambda_1 h^{k+1}$; $W(z)$ – функция Вейершт решением уравнения $W''= 6W^2$; $\Lambda(z)$ – функция Ламе, у

летворяющая уравнению $\Lambda'' = W\Lambda$; $\gamma(z)$ – эллиптическая функция, удо

летворяющая уравнению $\gamma'' = 2\gamma^3$; $\beta(u)$ – решение уравнения Рикатт

$\beta' + \lambda_3\beta^2 = \lambda_3 F$; $H(u)$ – функция, которая определяется из условия

а) $H^{-1} + \sqrt{\lambda}\ \operatorname{arcth}\sqrt{\lambda}\,H = a_0 u + a_2$, $\lambda = \dfrac{a_1}{a_0} > 0$;

б) $H^{-1} + \sqrt{-\lambda}\ \operatorname{arcth}\sqrt{-\lambda}\,H = a_0 u + a_2$, $\lambda < 0$;

$\omega_1 = \left[a_0 x_0 + a_1 x_1\right] \exp\left\{- \int H(u)\left[a_0 + a_1 H^2(u)\right] du\right\}$; φ – н

ная функция; λ_i, a_i, k – произвольные постоянные, λ_3

$i = \overline{0, 3}$.

Интегрируя редуцированные уравнения и подставляя найде

функцию φ в соответствующий анзац, получим решения уравнен

(2.8.1), которые приведены в таблице 2.8.2.

ТАБЛИЦА 2.8.2.

$F(u)$	Решение уравнения
$F(u) \in C^1(R)$	$\int F(u)du - \lambda_2^2 u + \lambda_1(\lambda_2 x_0 - x_1) = 0$
	$\beta(u) = x_0^{-1} x_1$, $F(u)^{\frac{1}{2}} x_0 - x_1 + \varphi(u) = 0$
e^u	$e^u = e^{x_0} x_1$, $e^u = (x_1^2 + a_1)\cos^{-2} x_0$, $e^u = (x_1^2 + a_1)$
u^k	$u^{k+1} = x_0^{k+1} x_1$
u	$u = x_0 x_1 + \dfrac{x_0^4}{12} + a_1$, $u = W(x_0)x_1^2$,
	$u = x_0^{-2} x_1^2 + x_1^{\frac{1}{2}}\left[a_1 x_0^{\frac{5}{2}} + a_2 x_0^{-\frac{3}{2}}\right]$,
	$u = x_0^{-2} x_1^2 + 3a_1 x_1 x_0^3 + \dfrac{a_1^2}{6} x_0^8 + a_2 x_0^{-1} + a_3 x_0^2$,
	$u = W(x_0)x_1^2 + \psi(x_0)$
$u^{-\frac{1}{2}}$	$u^{\frac{1}{2}} = W(x_1)x_0^2$, $2u^{\frac{1}{2}} = x_0 x_1 + \dfrac{x_1^4}{24} + a_1$.

	$u^{\frac{1}{2}} = W(x_1)x_0^2 + \psi(x_1)$,
	$u^{\frac{1}{2}} = x_0^{\frac{1}{2}}x_1^{-2}\left[x_0^{\frac{3}{2}} + a_1x_1^{\frac{5}{2}} + a_2x_1^{-\frac{3}{2}}\right]$,
	$u^{\frac{1}{2}} = x_0^{\frac{1}{2}}x_1^{-2} + 3a_1x_0x_1^3 + \frac{a_1^2}{6}x_1^8 + a_2x_1^{-1} + a_3x_1^2$
	$u^{\frac{1}{3}} = x_0x_1^{-1} + x_1^2$, $u^{\frac{1}{3}} = x_0\gamma(x_1)$
[illegible]	$u = (x_0^2 + a_1)\cos^{-2}x_1$, $u = e^{x_1}x_0$,
	$u = (-x_0^2 + a_1)\mathrm{sh}^{-2}x_1$
[illegible]	$u = x_0^{-1}x_1 + x_0^2$, $u = \gamma(x_0)x_1$, $u = x_1^{\frac{1}{3}}$
$e^u + \lambda^2$	$e^u = e^{x_0}(x_1 \pm \lambda x_0)$, $2e^u = (x_1 \pm \lambda x_0)^2\cos^{-2}x_0$,
	$2e^u = (x_1 \pm \lambda x_0)^2\ \mathrm{sh}^{-2}x_0$
$u^{-\frac{4}{5}}$	$u = [W(x_1)]^{-\frac{5}{2}}\ x_0$
[illegible]	$u = [W(x_0)]^{-\frac{5}{2}}\ x_1$
	$x_0 + x_1u^{\frac{2}{3}} + \varphi(x_1u^{\frac{1}{3}}) = 0$
[illegible]	$x_0 + x_1u^2 + \varphi(x_0^{-1}u)u^2 = 0$
[illegible]	$x_0 - \omega_1\int H(u)\ \exp\left\{\int H(u)\left[a_0 + a_1H^2(u)\right]du\right\}du = \varphi(\omega_1)$

Здесь $\psi(z) = \dfrac{\sigma(z \pm \alpha)}{\sigma(z)}\exp\{\mp z\zeta(\alpha)\}$, где α определяется из условия $W(\alpha) = 0$; σ, ζ – функции Вейерштрасса.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8.1. Найденные решения можно размножить, используя операторы лиевской инвариантности уравнения (2.8.1). Формулы размножения решений в зависимости от вида функции $F(u)$ будут следующие:

произвольная гладкая функция

$$u = f(\theta_1x_0 + a_0,\ \theta_1x_1 + a_1)\ ;$$

$F(u) = e^u$

$$u = f(\theta_1 x_0 + a_0,\ \theta_2(\theta_1 x_1 + a_1)) - 2\ln \theta_2;$$

$F(u) = u^k$

$$u = \theta_2^{-k} f(\theta_1 x_0 + a_0,\ \theta_2^{k}(\theta_1 x_1 + a_1));$$

$F(u) = u^{-\frac{4}{3}}$

$$u = (1 - ax_1)^{-9}\theta_2^{-2} f\left[\theta_1 x_0 + a_0, \frac{\theta_1 x_1 + a_1}{\theta_2^{\frac{4}{3}} - a(\theta_1 x_1 + a_1)}\right],$$

$F(u) = u^{-4}$

$$u = (1 - ax_0)^{-1}\theta_2^{-2} f\left[\frac{\theta_1 x_0 + a_0}{\theta_2^{4} - a(\theta_1 x_0 + a_0)},\ \theta_1 x_1 + a_1\right],$$

де a, a_0, a_1, θ_1, θ_2 – произвольные групповые парам $_2 \neq 0$, $f(x_0, x_1)$ – известное решение уравнения (2.

Результаты, приведенные выше, обобщены на случай оличества независимых переменных $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+}$ 2.8.1), т.е. для уравнения

$$u_{\infty} - \nabla\left[F(u)\ \nabla u\right] = 0\ . \qquad (2.8.8)$$

)ператоры вида

$$Q = \partial_1 + C(x_0, x_1, u)\partial_u, \quad Q = \partial_0 + F(u)^{\frac{1}{2}}\partial_1 + C(x_0, x_1, u)\partial_u, \qquad (2.8.9)$$

приведенные в таблице 2.8.1, обобщаются следующим образом:

$$Q_c = \partial_a + \alpha_a C(x_0, \vec{\alpha}\vec{x}, u)\partial_u, \quad Q_a = \alpha_a\left[\partial_0 + C(x_0, \vec{\alpha}\vec{x}, u)\partial_u\right] + F(u)^{\frac{1}{2}}\partial_a,$$

де $\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ – произвольный постоянный еди ор; $a = \overline{1, n}$. В анзацах, соответствующих операторам (аменить x_1 на $\vec{\alpha}\vec{x}$. Редуцированные уравнения п яются.

Анзацы, полученные при помощи операторов $Q = \partial_0$ для многомерного уравнения (2.8.8) имеют вид

$$\int F(u)du = f(x_0)\ \varphi(\vec{x}) + g(x_0, \vec{x}), \qquad (2.8.10)$$

где $f(x_0)$ и $g(x_0, \vec{x})$ – заданные функции, $\varphi(x)$ – новая неизве ная функция. Подставляя (2.8.10) в (2.8.8), имеем

$$- \Delta g + F^{-1}\left[f\varphi + g_{oo}\right] - FF^{-3}\left[f\varphi + g_{o}\right]^{2}\Bigg]. \qquad (2.8.11)$$

пра я часть уравнения (2.8.11) является функцией только

x ' то уравнение принимает вид

$$\Delta\varphi = G(\overrightarrow{x}, \varphi) (2.8.12)$$

и станови ся редуцированным для уравнения (2.8.8). В частности, при

а) $F\ u) = u^{k}$, $k \neq -1$, $f(x_o) = h^{k+1}(x_o)$, $g(x_o,\overrightarrow{x}) = 0$, редуцированное уравнение будет нелинейным уравнением Лапласа

$$\Delta\varphi = \lambda\varphi^{\frac{1}{k+1}}; \qquad (2.8.13)$$

б) $F\ u) = u^{-1}$, $f(x_o) = 1$, $g(x_o,\overrightarrow{x}) = \ln v(x_o)$, $v(x_o)$ – решение

$v = \lambda$, $\lambda = \mathrm{const}$. В этом случае (2.8.12) – уравнение

$$\Delta\varphi = \lambda \exp\varphi; \qquad (2.8.1$$

) $F\ u) = \exp u$, $f(x_o) = \exp \omega(x_o)$, $g(x_o,\overrightarrow{x}) = 0$, $\omega(x_o)$ –

ур нения $\omega = \lambda \exp\omega$, редуцированное уравнение – лине

ни Лапласа

$$\Delta\varphi = \lambda. \qquad (2.8.15)$$

нтересно отметить, что анзац

$$u^{\frac{1}{3}} = u^{1}(\overrightarrow{x}) + u^{2}(\overrightarrow{x})x_o, \qquad (2.8.16)$$

где $u^{1}(\overrightarrow{x})$ и $u^{2}(\overrightarrow{x})$ – новые неизвестные функции, редуцирует уравнение

$$u_{oo} = \nabla\left[u^{-\frac{2}{3}} \nabla u\right] \qquad (2.8.17)$$

еме двух уравнений

$$\begin{cases} \Delta u^{1} = 2u^{1}(u^{2})^{2}, \\ \Delta u^{2} = 2(u^{2})^{3}, \end{cases} \qquad (2.8.18)$$

$$= u^{1}(\overrightarrow{x}) + u^{2}(\overrightarrow{x})x_o + u^{3}(\overrightarrow{x}) \frac{x_o^{2}}{2!}, \qquad (2.8.19)$$

x), $(\overrightarrow{x})$, $u^{3}(\overrightarrow{x})$ – новые неизвестные функции, редуцирует уравнение

$$u_{oo} = \nabla\left[u^{-\frac{1}{2}} \nabla u\right] \qquad (2.8.20)$$

системе трех уравнений

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u^1 &= u^1 u^3 + (u^2)^2, \\ \Delta u^2 &= 3u^2 u^3, \\ \Delta u^3 &= 3(u^3)^2. \end{aligned}\right.$$

нзацы (2.8.16) и (2.8.19) осуществляют редукцию (умень
ений (2.8.17) и (2.8.20) по независимым переменным и антиредукц
увеличение числа функций) по зависимым функциям. Очевидно, чт
акие анзацы не могут быть получены при помощи операторов лиевской
имметрии.

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА.

м уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_0 + uu_1 + u_{111} = 0$$

бразом

$$u_0 + f(u)\, u_1^k + u_{111} = 0 \qquad (2.9.1)$$

$u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $u_\mu = \dfrac{\partial u}{\partial x_\mu} = \partial_\mu u$, $\mu = 0, 1$, $u_{111} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_1^3}$ $k = \text{const}$.

Групповые свойства уравнения (2.9.1) при $k = 1$ хорошо известны (см. например, [188]). В настоящем параграфе исследована лиевская симметрия уравнения (2.9.1) при $k \neq 1$, а также условная симметрия уравнения (2.9.1) при произвольном k. Полученные операторы ной инвариантности используются для нахождения анзацев, реду- уравнение (2.9.1) к обыкновенным дифференциальным ура же для построения точных решений.

евская симметрия уравнения (2.9.1).

ЕМА 2.9.1. Базисные элементы максимальной алгебры инв (МАИ) уравнения (2.9.1) при $k \neq 1$ состоят из сле т в

$k \neq 1$, $\forall f(u)$: $\langle P_0 = \partial_0,\ P_1 = \partial_1 \rangle$

$k = 3$, $f(u)$: $\langle P_0, P_1, D_1 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 \rangle$

$\forall k \neq 1$, $f(u) = u^{-2}$: $\langle P_0, P_1 = D_2 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial_u \rangle$

$\forall k \neq 1$, $f(u) = e^u$: $\langle p_0, P_1, D = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + (k - 3)\partial_u \rangle$

$k \neq 1$ $f(u) = \lambda = \text{const}$: $\langle P_0, P_1, \partial_u, D = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + \dfrac{k-3}{k-1} u\partial_u \rangle$

$u) = u^{-2}$: $\langle P_0, P_1, D_1 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1, D_2 = 3x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + u\partial \rangle$

ьство этой теоремы проводится методом Ли.

словная инвариантность.

ЕМА 2.9.2. Уравнение (2.9.1) при $k = 1$, Q-условно тносительно оператора Галилея

$$Q = x_0\partial_1 + \Phi(x_1, u)\partial_u \qquad (2.9.$$

ли

$$u) = \lambda_1 \sqrt{u} + \lambda_2 , \quad \Phi(u) = \frac{2}{\lambda_1} \sqrt{u}$$

$$u) = \lambda_1 \ln u, \quad \Phi(u) = \frac{u}{\lambda_1}$$

$$u) = \lambda_1 \arcsin u + \lambda_2, \quad \Phi(u) = \frac{\sqrt{1 - u^2}}{\lambda_1}$$

$$u) = \lambda_1 \operatorname{Arsh} u + \lambda_2, \quad \Phi(u) = \frac{\sqrt{1 + u^2}}{\lambda_1}$$

$$f(u) = \lambda_1 u, \quad \Phi(u) = \frac{1}{\lambda_1}$$

де λ_1, λ_2 – произвольные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (2.9.1) при $k = 1$ Q–условн иантно относительно оператора (2.9.2), если

$$\left[u_0 + f(u)u_1 + u_{111}\right] \Bigg|_{\substack{u_0+f(u)u_1+u_{111}=0 \\ Qu=0}} = 0$$

е $\overset{3}{\tilde{Q}}$ – третье продолжение оператора Q, $Qu = x_u u_1$ .9.3) по различным степеням x_0 , получим следующую

эляющих уравнений

$$\begin{cases} f\Phi_1 + \Phi_{111} = 0 \\ -\Phi + 3\Phi\Phi_{u_{111}} + 3\Phi_1\Phi_{u_1} + f'\Phi^2 = 0 \\ 3\Phi^2\Phi_{uu_1} + 3\Phi\Phi_u\Phi_{u_1} + 3\Phi\Phi_1\Phi_{uu} = 0 \\ \Phi^3\Phi_{uuu} + 3\Phi^2\Phi_u\Phi_{uu} = 0 \end{cases} \qquad (2.9.4)$$

следование системы (2.9.4) показало, что $\Phi = \Phi(u)$. Тог .9.4) принимает вид

$$\begin{cases} f'\Phi = 1 \\ (\Phi^3\Phi'')' = 0 \end{cases}$$

шение системы (2.9.5) задается формулами

$$f(u) = \lambda_1 \sqrt{u} + \lambda_2 , \quad \Phi(u) = \frac{2}{\lambda_1} \sqrt{u}$$

$$) = \left[{}_1u^2 + c_2\right]^{1/2}, \quad f(u) = \int\left[c_1u^2 + c_2\right]^{-1/2} du + c_3 \qquad (2.9.6)$$

, c_i, $i = \overline{1,\ 3}$ – произвольные постоянные.

теграл в формулах (2.9.6) в зависимости от пост

чим утверждение теоремы.

ли ассматривать оператор галилеевского типа

$$= x' \partial_1 + \Phi(x_1,\ u)\, \partial_u, \quad m = \mathrm{const} \qquad (2.9.7)$$

справедлива более общая теорема.

ТЕОРЕМА 2.9.3. Уравнение (2.9.1) Q–условно инвариантно относительно оператора (2.9.7), если

1) $f(u) = \lambda_1 u^{\frac{2-k}{2}} + \lambda_2 u^{\frac{1-k}{2}}$, $\Phi(u) = \left(\frac{k\lambda_1}{2}\right)^{-\frac{1}{k}} \sqrt{u}$

$) = \left[\lambda_1 \ln u\right] u^{1-k}$, $\Phi(u) = \left[k\lambda_1\right]^{-\frac{1}{k}} u$

$\lambda_1 \arcsin u + \lambda_2\right]\left[1 - u^2\right]^{\frac{1-k}{2}}$, $\Phi(u) = \left[k\lambda_1\right]^{-\frac{1}{k}} \sqrt{1 - u^2}$

$) = \lambda_1 \mathrm{Arsh} u + \lambda_2\right]\left[1 + u^2\right]^{\frac{1-k}{2}}$, $\Phi(u) = \left[k\lambda_1\right]^{-\frac{1}{k}} \sqrt{1 + u^2}$

$) \; \lambda_1 u$, $\Phi(u) = \left[k\lambda_1\right]^{-\frac{1}{k}}$

$m = \frac{1}{k}$, $k \neq 0$, λ_1, λ_2 – произвольные постоянные.

6) При $k = 3$, уравнение (2.9.1) Q–условно инвариантно относительно оператора

$$Q = \left[3\lambda x_0\right]^{\frac{1}{3}} \partial_1 + \Phi(u)\partial_u, \quad \lambda = \mathrm{const}$$

если $f(u) = F(u)\Phi^{-2}(u)$, где $F(u)$ определяется следующим выраже-

$$F' = \frac{\lambda}{\Phi} - (\Phi\Phi')'',$$

– произвольная функция.

ате ьство теоремы 2.9.3 аналогично доказательству

Опе аторы условной инвариантности из теоремы 2.9.3 исполь для нахождения анзацев, редуцирующих уравнение (2.9.1) к ОДУ. Эти результаты сведены в таблицу 2.9.1.

ТАБЛИЦА 2.9.1.

№ п/п	f(u)	Анзацы	Редуцированные уравнения
1.	$\lambda_1 u^{\frac{2-k}{2}} + \lambda_2 u^{\frac{1-k}{2}}$	$u=\left[\frac{x_1}{2}\left(\frac{k\lambda_1 x_0}{2}\right)^{-\frac{1}{k}} + \varphi(x_0)\right]^2$	$\dot\varphi + \frac{\varphi}{kx_0} + \frac{\lambda_2}{k\lambda}$
2.	$\left(\lambda_1 \ \mathrm{Ln}u\right)u^{1-k}$	$u=e^{\varphi(x_0)+(k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}}x_1}$	$\dot\varphi + \frac{\varphi}{kx_0} + \frac{}{(k\lambda_1 x_0}$
3.	$\left(\lambda_1 \arcsin u+\lambda_2\right)\times$ $\times\left(1-u^2\right)^{\frac{1-k}{2}}$	$u = \sin\left(\varphi(x_0) +\right.$ $\left.+ \left(k\lambda x_0\right)^{-\frac{1}{k}} x_1\right)$	$\dot\varphi + \frac{\varphi}{kx_0} + \frac{\lambda_2}{k\lambda_1 x_0}$ $- \frac{\lambda_2}{\left(k\lambda_1 x_0\right)}$
4.	$\left(\lambda_1 \ \mathrm{Arsh}u +\lambda_2\right)\times$ $\times\left(1+u^2\right)^{\frac{1-k}{2}}$	$u = \ \mathrm{sh}\left(\varphi(x_0) +\right.$ $\left.+ \left(k\lambda x_0\right)^{-\frac{1}{k}} x_1\right)$	$\dot\varphi + \frac{\varphi}{kx_0} + \frac{\lambda}{k\lambda_1}$ $+ \frac{\lambda}{(k\lambda}$
5.	$\lambda_1 u$	$u= \varphi(x_0)+(k\lambda_1 x_0)^{-\frac{1}{k}}x_1$	$\dot\varphi + \frac{\varphi}{kx_0}$
6.	$F(u)\Phi^{-2}(u)$, где $F' = \frac{\lambda}{\Phi} - (\Phi\Phi')''$	$\psi(u) - \frac{x_1+\varphi(x_0)}{\left(3\lambda x_0\right)^{\frac{1}{3}}}$, где $\psi'(u) = \frac{1}{\Phi(u)}$	$\varphi = c_1\left(3\lambda x_0\right)$ $c_1 = \mathrm{const}$

Проинтегрировав редуцированные уравнения и подставив найде

цию φ в соответствующий анзац, мы получим точное р ния (2.9.[illegible]) с соответствующей нелинейностью f:

$$u = \left[\frac{x_1}{\;} \left(\frac{k\lambda_1 x_0}{2} \right)^{-\frac{1}{k}} + \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right]^2 ;$$

$$\frac{k(k\lambda_1)^{-\frac{3}{k}}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} + \left(k\lambda_1 x_0\right)^{-\frac{1}{k}} x_1 ,\ k \neq 2 ;$$

$$^{-\frac{3}{2}} x_0^{-\frac{1}{2}} \ln x_0 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{2}} + \left(2\lambda_1 x_0\right)^{-\frac{1}{2}} x_1 ,\ k = 2 ;$$

$$\mathrm{si} \left[\frac{k(k\lambda_1)^{-\frac{3}{k}}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} + \left(k\lambda_1 x_0\right)^{-\frac{1}{k}} x_1 \right| ,\ k \neq$$

$$u - \sin \left| -(2\lambda_1)^{-\frac{3}{2}} x_0^{-\frac{1}{2}} \ln x_0 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{2}} + \left(2\lambda_1 x_0\right)^{-\frac{1}{2}} x_1 \right| ,\ k = 2 ;$$

$$u = \mathrm{sh} \left[- \frac{k(k\lambda_1)^{-\frac{3}{k}}}{k-2} x_0^{-\frac{3}{k}+1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{k}} + \left(k\lambda_1 x_0\right)^{-\frac{1}{k}} x_1 \right| ,\ k \neq 2 ;$$

$$\mathrm{h} \left| - 2\lambda_1)^{-\frac{3}{2}} x_0^{-\frac{1}{2}} \ln x_0 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \lambda x_0^{-\frac{1}{2}} + \left(2\lambda_1 x_0\right)^{-\frac{1}{2}} x_1 \right| ,\ k = 2 ;$$

$$^{\frac{1}{k}} + x_1 \left(k\lambda_1 x_0\right)^{-\frac{1}{k}} ;$$

$$x_1 \left(3\lambda x_0\right)^{-\frac{1}{3}} + c ,$$

λ, c — произвольные постоянные.

§2.10. УСЛОВНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ТОЧНЫЕ Р
УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Известно, что максимальной алгеброй инвариантности уравнения Буссинеска

$$u_{00} + \frac{1}{2}\Delta u^2 + \Delta^2 u = 0 , \qquad (2.10.1)$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+n}$, является расширенная алгебра
эклида $\tilde{E}(1, n)$ с операторами

$$= \frac{\partial}{\partial x_0}, \ \partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \ J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \ D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - 2u\partial_u .$$

Все неэквивалентные анзацы, редуцирующие двумер
равнение (2.10.1) к обыкновенному дифференциальному
которые можно построить по алгебре инвариантности (2.
ид

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1; \quad \alpha_0, \alpha_1 - \text{const}; \qquad (2.10.3)$$

$$u = x_0^{-1} \varphi(\omega) , \quad \omega = x_1 x_0^{-\frac{1}{2}} .$$

В работе [189] показано, что двумерное уравнение (2.10.1) с помощью анзаца

$$u = \varphi(\omega) - 4\mu^2 x_0^2 , \ \omega = x_1 + \mu x_0^2 , \quad \mu - \text{const} \qquad (2.10.)$$

едуцируется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$''' + \varphi\varphi' + 2\mu\varphi = 8\mu^2\omega + c_1 , \quad c_1 - \text{const} \qquad (2.10$$

Оператор, соответствующий этому анзацу,

$$= \partial_0 - 2\lambda x_0\partial_1 - 8\lambda^2 x_0 \partial_u , \quad \lambda = -2\mu \qquad (2$$

не пренадлежит алгебре (2.10.2).

В настоящем параграфе с использованием понятия ус
риантности, описаны анзацы вида

$$u(x) = f(x)\,\varphi(\omega) + g(x), \quad \omega = \omega(x), \qquad (2.10.7)$$

которые редуцируют уравнение (2.10.1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

В работе[149] без использования понятия условной инвариантн
ти, описаны анзацы вида (2.10.7), редуцирующие двумерное ур

синеска (2.10.1) к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Существенное отличие нашего подхода от метода[149] состоит в том, что понятие условной инвариантности вскрывает причину возникновения неожиданных анзацев и дает регулярную процедуру для отыскания не-
ских анзацев для произвольных уравнений. Кроме того, условная
антность дает возможность построить такие анзацы, которые не
получены способом, предложенным в[149].

трим сначала двумерное уравнение (2.10.1)

$$u_{00} + uu_{11} + u_1^2 + u_{1111} = 0. \qquad (2.10$$

ЕОРЕМА 2.10.1. Уравнение (2.10.8) Q-условно инвариантно о
ператора

$$Q = A(x)\partial_0 + B(x)\partial_1 + [\alpha(x)u + \beta(x)]\partial_u , \qquad (2.10.9)$$

ли функции $A(x)$, $B(x)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

Случай 1. $A \neq 0$. Не умаляя общности можно положить $A = 1$.

$$\alpha = -2B_1, \ \alpha = B_{11} = 0, \ \beta = -2B(B_0 + 2BB_1),$$

$$\frac{1}{\;} B_{00} + (\alpha B)_0 = B_1(B_0 - 2BB_1 + 4\alpha B) , \qquad (2.10.10)$$

$$_0 + 4B_1)(\alpha_0 + \alpha^2),$$

$$_1 + 4B_1(\beta_0 - B\beta_1 + \alpha\beta) + 2\alpha_0\beta = 0.$$

й 2. $A = 0$, $B = 1$.

$$_{11} + 5\alpha\alpha_1 + 2\alpha^3 = 0, \qquad (2.10.11)$$

$$+ 4\alpha^2\beta + 5\alpha_1\beta + 5\alpha_{11}(\alpha^2 - \alpha_1) + 5\alpha\alpha_1(\alpha_1 + 2\alpha^2) = 0,$$

$$+ 4\alpha_{111}\beta + 6\alpha_{11}(\beta_1 + \alpha\beta) + 4\alpha_1[(\alpha^2 + \alpha_1)\beta + (\beta_1 + \alpha\beta)_1] +$$

$$+ \beta_{00} + \beta\beta_1 + 2\alpha\beta^2 = 0.$$

Доказательство проводиться аналогично теореме 2.2.1.

В случае 1 существует общее решение уравнения (2.10.10), кото-
е дает следующий оператор:

$$\partial_0 + [a(x_0)x_1 + b(x_0)]\partial_1 - 2[a(x_0)u + a(a' + 2a^2)x_1^2 +$$
$$'b + ab' + 4a^2b)x_1 + b(b' + 2ab)]\partial_u , \qquad (2.10.12)$$

е функции $a = a(x_0)$, $b = b(x_0)$ являются решениями дифференциа-ных уравнений

$$' + 2aa' - 4a^3 = 0, \quad b'' + 2ab' - 4a^2b = 0. \qquad (2.10.13)$$

В зависимости от значений функций $a(x_0)$, $b(x_0)$ имеем неско неэквивалентных операторов

$$+ x_0\partial_1 - 2x_0\partial_u, \ (a = 0, \ b = x_0);$$

$$_1 + 6x_0^5)\partial_1 + 2\left[u + 3\left(\frac{x_1^2}{x_0^2} + 2x_1x_0^3 - 24x_0^8\right)\right]\partial_u, \ (a = -x_0^{-1}, \ b = 6x_0^5);$$

$$(x_1 - 3x_0^2)\partial_1 - 2(u - 3x_1 + 9x_0^2)\partial_u, \qquad (2.10.1$$

$$\frac{1}{x_0}, \ b = -\frac{3x_0}{2}\Bigg];$$

$$2W\partial_0 + W'x_1\partial_1 - W'(2u + Wx_1^2)\partial_u, \ \left(a = \frac{W'}{2W}, \ b = 0\right);$$

$$= 2W\partial_0 + W'(x_1 + \Omega)\partial_1 - \left[2W'u + WW'(x_1 + \Omega)^2 + x_1 + \Omega\right]\partial_u,$$

$$a = \frac{1}{2}\frac{W'}{W}, \ b = a\Omega, \ \Omega = \Omega(x_0) = \int W\dot{W}^{-2}dx_0, \ W = W(x_0) -$$

ция Вейерштрасса, являющаяся решением уравнения $W'' = W^2$ или

$$W^3 + \lambda\big), \ \lambda = \mathrm{const}.$$

зе 2 мы нашли только несколько частных решений уравн т.е. получили следующие операторы:

$$\left(x_0^5 - 2x_1\right)\partial_u, \ (\alpha = 0, \ \beta = x_0^3 - 2x_1x_0^{-2});$$

$$+ \left(-\frac{1}{3}Wx_1 + \Lambda\right)\partial_u, \quad \left(\alpha = 0, \ \beta = \frac{1}{3}Wx_1 + \Lambda\right);$$

$$= x_1\partial_1 + 2u\partial_u, \ \left(\alpha = \frac{2}{x_1}, \ \beta = 0\right); \qquad (2.10.15)$$

$$= x_1^3\partial_1 + 2(x_1^2u + 24)\partial_u, \ (\alpha = 2x_1^{-1}, \ \beta = 48x_1^{-3}),$$

$\Lambda = \Lambda(x_0)$ – функция Ламе, удовлетворяющая уравнению $\Lambda'' = W\Lambda$.

Используя операторы (2.10.14) – (2.10.15), находим анзацы:

$$\varphi(\omega) - 4x_0^2, \quad \omega = x_1 + x_0^2;$$

2) $u = x_0^2\varphi(\omega) - \left[\frac{x_1}{x_0} + 6x_0^4\right]^2, \ \omega = x_0(x_1 + x_0^5);$

3) $u = x_0^{-1}\varphi(\omega) + 2(x_1 - x_0^2), \ \omega = x_0^{-\frac{1}{2}}(x_1 + x_0^2);$ (2.10.

4) $u = W^{-1}\varphi(\omega) - \frac{1}{6} Wx_1^2, \ \omega = W^{-\frac{1}{2}}x_1:$

5) $u = W^{-1}\varphi(\omega) - \frac{1}{4}W^{-2}W^{-2}(x_1 + \Omega)^2, \ \omega = W^{-\frac{1}{2}}x_1 - \frac{1}{} \int W$

6) $u = \varphi(\omega) - x_0^{-2}x_1^2 + x_0^3x_1, \ \omega = x_0;$

7) $u = \varphi(\omega) - \frac{1}{6} x_1^2W(x_0) + \Lambda(x_0)x_1, \quad \omega = x_0;$

8) $u = x_1^2\varphi(\omega), \quad \omega = x_0;$

9) $u = x_1^2\varphi(\omega) - 12x_1^{-2}, \ \omega = x_0.$

Подставляя анзацы (2.10.16) в уравнение (2.10.8), пол

следующие редуцированные уравнения:

1) $\varphi''' + \varphi\varphi' + 2\varphi = 8\omega + c_1,$

2) $\varphi''' + \varphi\varphi' + 30\varphi = 1800\omega + c_2,$

3) $\varphi^{(4)} + \left[\varphi + \frac{\omega}{2}\right]\varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{7}{4}\omega\varphi' + 2\varphi = 0,$

4) $\varphi^{(4)} + \varphi\varphi'' + (\varphi')^2 + \frac{\lambda}{6}(\omega^2\varphi'' + 7\omega\varphi' + 8\varphi) = 0,$

5) $\varphi^{(4)} + \varphi\varphi'' + (f')^2 + \frac{\lambda}{2}(\omega\varphi' + 2\varphi - \lambda\omega) = 0,$

6) $f'' - 2\omega^{-2}\varphi + \omega^6 = 0,$

7) $\varphi'' - \frac{1}{3}W\varphi + \Lambda^2 = 0,$

8) $\varphi'' + 6\varphi^2 = 0,$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования.

Решая уравнения (2.10.17), по формулам (2.10.16) получае

шения уравнения (2.10.8). Приведем некоторые из них:

$u = -\frac{1}{6} x_1^2W(x_0), \ u = -12x_1^{-2}, \ u = -\frac{1}{6}x_1^2W(x_0) - 12x_1^{-2},$ (2.

$u = 2(x_1 - x_0^2), \ u = 2(x_1 - x_0^2) - 12(x_1 + x_0^2)^{-2},$ (2.1

$u = -x_0^{-2}x_1^2 - 6c_9^2x_0^8 + 18c_3x_0^3x_1 + c_4x_0^{-1} + c_5x_0^2, \ c_3, \ c_4, \ c_5$ – со

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10.1. Поскольку уравнение (2.10. ин относительно преобразований сдвигов и растяжений, то справедл следующая формула размножения его решений:

$$u = \kappa^2 f(\kappa^2 x_0 + \theta_0,\ \kappa x_1 + \theta_1), \qquad (2.10.20)$$

где $f(x_0,\ x_1)$ – решение уравнения (2.10.8), κ, θ_0, θ_1 – пос групповые параметры.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10.2. Решения (2.10.18) обладают той ос что третье из них равно сумме двух первых. В ощем слу $v + w$ двух решений v и w уравнений Буссинеска также его решением, если их произведение vw явл уравнения Лапласа $\Delta(vw) = 0$. Это следует из соотнош

$$L(v + w) = Lv + Lw + \Delta(vw),$$

где Lu – левая часть уравнения (2.10.1).

Приведем теперь некоторые результаты исследований усло ной инвариантности уравнения Буссинеска.

ТЕОРЕМА 2.10.2. Уравнение (2.10.8) инвариантно отн оператора

$$Q = W(x_1)\partial_1 + W'(x_1)u\partial_u \qquad (2$$

при условии

$$u - 2W(x_1) = 0.$$

Анзац, полученный при помощи оператора (2.10.

$$u = W(x_1)\ \varphi(\omega), \quad \omega = x_0.$$

Подставляя (2.10.23) в (2.10.8), имеем

$$W(x_1)\varphi'' + \left[W^3(x_1) + (W')^2\right]\varphi(\varphi + 2) = 0.$$

Из (2.10.24) следует, что для выполнения редукции необх требовать

$$\varphi'' = 0, \qquad (2.10.25)$$
$$\varphi(\varphi + 2) = 0,$$

т.е. анзац (2.10.23) редуцирует уравнение (2.10.8) к сист уравнений (2.10.25).

ТЕОРЕМА 2.10.3. Уравнение (2.10.1) при $n = 6$ инвари
осительно конформной алгебры $C(6)$ с операторами

$$\partial_a,\ J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a,\ d = x_a\partial_a - 4u\partial_u, \qquad (2.10.26)$$

$$K_a = 2x_a D - \vec{x}^{\,2}\partial_a, \quad a = \overline{1,6},$$

при условии

$$\Delta u + \frac{1}{2}u^2 = 0. \qquad (2.10.27)$$

Один из анзацев, полученных при помощи операторов K_a, имеет

$$\varphi(\omega_1, \omega_2),\ \omega_1 = x_0,\ \omega_2 = \frac{\vec{Б}\,\vec{x} - \vec{Б}^{\,2}\vec{x}^{\,2}}{\vec{x}^{\,4}}, \qquad (2.10.28)$$

постоянные параметры.

Подставляя (2.10.28) в (2.10.1), имеем

$$\varphi_{11} - \Delta\left[2\vec{Б}^{\,2}\left(\vec{x}^{\,2}\right)^{-4}\left[-2\omega_2\varphi_{22} - 5\varphi_2 + \frac{1}{4\vec{Б}^{\,2}}\varphi^2\right]\right] = 0, \qquad (2.10.29)$$

, как и в предыдущем случае, анзац (2.10.28) редуцирует ур
нение (2.10.1) к системе двух уравнений

$$\varphi_{11} = 0, \qquad (2.10.30)$$

$$2\omega_2\varphi_{22} + 5\varphi_2 = \frac{1}{4\vec{Б}^{\,2}}\varphi^2.$$

Частным решением уравнений (2.10.30) является функция $\varphi =$
$\vec{Б}^{\,2}\omega_2^{-1}$. Тогда

$$u = \frac{4}{\vec{x}^{\,2} - (\vec{\alpha}\,\vec{x})^2} \quad (\vec{\alpha} - \mathrm{const},\ \vec{\alpha}^{\,2} = 1)$$

уравнения (2.10.1) при $n = 6$.

УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики

$$\begin{cases} \vec{u}_0 + (\vec{u}\ \vec{\nabla})\vec{u} = -\dfrac{1}{\rho}\vec{\nabla}p , \\ \rho_0 + \mathrm{div}(\rho\vec{u}) = 0 , \\ p = F(\rho) , \end{cases} \qquad (2.11.1)$$

где $\vec{u} = \vec{u}(x) = \{u^1(x), u^2(x), \ldots, u^n(x)\}$ – скорость распространения газа, $\rho = \rho(x)$ – плотность, p – давление газа, $x = (x_0, x$ $\in R_{1+n}$, $F(\rho)$ – произвольная гладкая функция.

Лиевская симметрия уравнений (2.11.1) изучена в [49

В данном параграфе исследуется условная инвариантн ний (2.11.1), которая используется для нахождения то данных уравнений.

При $n = 1$ систему (2.11.1) можно переписать в в

$$\begin{cases} S_1 \equiv u_0 + uu_1 + f(\rho)\rho_1 = 0 , \\ S_2 \equiv \rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1 = 0 , \end{cases} \qquad (2.11.2)$$

где $f(\rho) = \dfrac{1}{\rho} F(\rho)$.

ТЕОРЕМА 2.11.1. Система уравнений (2.11.2) при соответствующи значениях функции $f(\rho)$ Q–условно инвариантна относительно оп торов Q_i, $i = \overline{1, 8}$, приведенных в таблице 2.11.1.

Доказательство данной теоремы проведем на пример . Для остальных операторов доказательство аналогично.

Согласно определению система (2.11.2) Q–условн тносительно оператора

$$= \partial_0 + u\partial_1 + \lambda_1\partial_u + \lambda_2\rho^2\partial_\rho , \ (\lambda_1, \lambda_2 - \mathrm{const}), \qquad (2$$

если

$$\tilde{Q}_4 S_1 = \tau_1 S_1 + \tau_2 S_2 + \tau_3(Q_4 u) + \tau_4(Q_4\rho), \qquad (2.11.4)$$

$$\tilde{Q}_4 S_2 = \tau_5 S_1 + \tau_6 S_2 + \tau_7(Q_4 u) + \tau_8(Q_4\rho).$$

Покажем, что система (2.11.2) Q–условно инвариантна относительно Q_4

$\lambda\rho^{-3}$, $\lambda = \text{const}$. В этом случае

$u_1 + \lambda\rho^{-3}\rho_1$, $\qquad S_2 = \rho_0 + u\rho_1 + \rho u_1$,

$_0 + uu_1 - \lambda_1$. $\qquad Q_4 u = \rho_0 + u\rho_1 - \lambda_2\rho^2$.

да

$$_4 S_1 = -\lambda\rho^{-4}\rho_1 S_2 + \lambda\rho^{-4}\rho_1(Q_4\rho) - u_1(Q_4 u),$$

$$_4 S_2 = (2\lambda_2\rho - u_1)S_2 - \rho_1(Q_4 u) + u_1(Q_4\rho),$$

о и требовалось доказать.

Найденные операторы Q_i, $i = \overline{1, 8}$ используем для нахождения дуцирующих уравнение (2.11.2) к ОДУ. Окончательные резудем в виде таблицы.

ИЦА 2.11.1.

	перaтор Q	Анзац	Редуцированн уравнения
$^3+$ $\lambda_2\rho^1$	$Q_1=\partial_0+u\partial_1+ +\lambda_3\left[\left[\left(\lambda_1\rho^{-2}+ +\lambda_2\right]\partial_u + +\sqrt{\lambda_1}\,\partial_\rho\right]$	$\begin{cases} \rho = e^{\kappa} \\ u=\varphi^1(\omega)-\sqrt{\lambda_1}e^{-\kappa}+\lambda_2\lambda_3 x_0 \\ \kappa=\varphi^2(\omega)+\lambda_3 x_0\varphi^1(\omega)-\lambda_3 x_1+ \\ \quad +\dfrac{\lambda_2\lambda_3^2}{2}x_0^2 \\ \omega = \rho-\sqrt{\lambda_1}\lambda_3 x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi^1(\omega)=0 \\ \varphi^2(\omega)=0 \end{cases}$
$)$	$Q_2=\partial_0+u\partial_1+ +\lambda_3\partial_u - \dfrac{\lambda_1\rho+\lambda_2\rho^2}{\lambda_1 x_0}\partial_\rho$	$\begin{cases} \rho=-\lambda_1\left[\lambda_2+\varphi^1(\omega)x_0\right]^{-1} \\ u=\dfrac{\varphi^2(\omega)}{x_0}+\dfrac{1}{2}\lambda_3 x_0+x_1 x_0^{-1} \\ \omega = u - \lambda_3 x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi^1(\omega)=-\lambda_3\lambda^2 \\ \varphi^1(\omega)\varphi^2(\omega)= \\ \quad = -\lambda_2 \end{cases}$

$Q =\partial_0+u\partial_1+$ $-\sqrt{\lambda}\ \times$ $\times\left(\sqrt{\lambda}\ \rho^{-2}\partial_u+\right.$ $\left.+\ \partial_\rho\right)$	$\begin{cases} \rho = e^{\varkappa} \\ u=\varphi^1(\omega)-\sqrt{\lambda_1}e^{-\varkappa} \\ \varkappa=\varphi^2(\omega)-\lambda_1 x_1+\lambda_1 x_0\varphi^1(\omega) \\ \omega = \rho-\sqrt{\lambda}\ \lambda_1 x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi^1(\omega)=0 \\ \varphi^2(\omega)=0 \end{cases}$
$Q_{.}=\partial_0+u\partial_1+$ $+\lambda_1\partial_u+\lambda_2\rho^2\times$ ∂_ρ	$\begin{cases} \rho=\left[\varphi^1(\omega)-\lambda_2 x_0\right]^{-1} \\ u=x_0^{-1}\varphi^2(\omega)+\frac{1}{2}\lambda_1 x_0+x_1 x_0^{1} \\ \omega = u - \lambda_1 x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} \lambda\lambda_2\varphi^1(\omega)+\lambda_1=0 \\ \lambda_2\varphi^2(\omega) - \\ \quad -\varphi^1(\omega)=0 \end{cases}$
$=\rho\partial_0$ - $\left[\rho^2 u^2-\lambda\right]\partial_u$	$\begin{cases} \rho = \varphi^1(x_1) \\ u=\frac{\sqrt{-\lambda}}{\varphi^1(x_1)}tg\left[\varphi^2(x_1)-\right. \\ \quad \left.-\sqrt{-\lambda}\ x_0\right],\ \lambda < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = \varphi^1(x_1) \\ u=\frac{\sqrt{-\lambda}}{\varphi^1(x_1)}tg\left[\varphi^2(x_1)-\right. \\ \quad \left.-\sqrt{-\lambda}\ x_0\right],\ \lambda < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi^1(x_1)=-\lambda_1 \\ \quad \times\left[\varphi^1(x_1)\right] \\ \varphi^2(x_1)=0 \end{cases}$
$Q_6=f\partial_1+\lambda\partial_\rho$	$\begin{cases} \int f d\rho - \lambda x_1= \varphi^2(x_0) \\ u = \varphi^1(x_0) \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi^1(x_0)=-\lambda \\ \varphi^2(x_0) + \\ \quad +\lambda\varphi^1(x_0)= \end{cases}$
$Q_7=-\partial_0+$ $+\lambda u\rho\partial_u$ + $+\ \lambda\rho^2\partial_\rho$	$\begin{cases} \rho=\left[\varphi^1(x_1)+\lambda x_0\right]^{-1} \\ u=\varphi^2(x_1)\left[\varphi^1(x_1)+\lambda x_0\right]^{-1} \end{cases}$	$\begin{cases} \varphi^1(x_1)=0 \\ \varphi^2(x_1)=0 \end{cases}$

$\forall f(\rho)$	$Q_8=\partial_0+\lambda\partial_u+$ $+\lambda u f^{-1}\partial_\rho$	$\begin{cases} \frac{1}{2}u^2-\int f d\rho = \varphi^1(x_1) \\ u=\varphi^2(x_1)+\lambda x_0 \end{cases}$	φ^1 φ^2

Проинтегрировав редуцированные уравнения и подставив найденные φ^1, φ^2 в соответствующий анзац, получим следующие решения для си темы (2.11.2) с соответствующей функцией $f(\rho)$:

$$\left[\begin{aligned} &\rho = \exp\left\{\lambda_5+\lambda_3\lambda_4x_0-\lambda_3x_1+\frac{\lambda_2\lambda_3^2}{2}x_0^2\right\};\\ &u=-\sqrt{\lambda_1}\exp\left\{\lambda_5+\lambda_3\lambda_4x_0-\lambda_3x_1+\frac{\lambda_2\lambda_3^2}{2}x_0^2\right\}+\lambda_2\lambda_3x_0+\lambda_4;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\rho = -\lambda_1\left[\lambda_2-\lambda_3\lambda_1^2(\omega+\lambda_4)x_0\right]^{-1};\\ &u=x_0^{-1}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda_3\lambda_1^2}\left[\ln(\omega+\lambda_4)+\lambda_5\right]\right]^2+\frac{1}{2}\lambda_3x_0+x_1x_0^{-1};\\ &\omega = u-\lambda_3x_0;\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} &\rho = \exp\left\{\lambda_3-\lambda_1x_1+\lambda_1\lambda_2x_0\right\};\\ &u=\lambda_2-\sqrt{\lambda}\exp\left\{-\lambda_3+\lambda_1x_1-\lambda_1\lambda_2x_0\right\};\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\rho = \left[-\lambda_1\lambda^{-1}\lambda_2^{-1}\omega+\lambda_3-\lambda_2x_0\right]^{-1};\\ &u=x_0^{-1}\left\{-\frac{\lambda_1}{2\lambda\lambda_2^2}\omega^2+\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\omega+\lambda_4\right\}+\frac{1}{2}\lambda_1x_0+\frac{x_1}{x_0};\\ &\omega = u-\lambda_1x_0;\end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{aligned} &\rho = \frac{1}{\lambda_1x_1};\\ &u=\left[\begin{aligned} &-\lambda_1\sqrt{-\lambda}\,x_1\operatorname{tg}\lambda_1\sqrt{-\lambda}\,x_0, \quad \lambda<0;\\ &\lambda_1\sqrt{\lambda}\,x_1\operatorname{th}\lambda_1\sqrt{\lambda}\,x_0, \quad \lambda>0;\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} \int f\,d\varrho = \frac{1}{2}\lambda_1^2 x_0^2 - \lambda_1 x_1 \ ; \\ u = \lambda_1 x_0 \ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varrho = \left[\lambda x_0 + \lambda_1\right]^{-1} \ ; \\ u = \left[\lambda x_1 + \lambda_2\right]\left[\lambda_1 + \lambda x_0\right]^{-1} \ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u^2 + \int f\,d\varrho = \lambda x_1 + \lambda_2 \ ; \\ u = \lambda_1 + \lambda x_0 \ , \end{cases}$$

где λ_i – произвольные постоянные, $i = \overline{1,\ 5}$.

Все результаты теоремы 2.11.1 обобщаются на случай п

о n. При этом операторам Q_i будут соответствовать оп

$$= \partial_0 + \overrightarrow{u\nabla} + \left[\lambda_1\varrho^{-1} + \lambda_2\right]\vec{\alpha}\partial_{\vec u} + \sqrt{\lambda_1}\ \partial_\rho \ ;$$

$$= \partial_0 + \overrightarrow{u\nabla} + \vec{\alpha}\partial_{\vec u} - \frac{\lambda_1\varrho + \lambda_2\varrho^2}{\lambda_1 x_0}\partial_\rho \ ;$$

$$Q_3 = \partial_0 + \overrightarrow{u\nabla} + \lambda\varrho^{-1}\vec{\alpha}\partial_{\vec u} + \sqrt{\lambda}\ \partial_\rho \ ;$$

$$\hat{Q}_4 = \partial_0 + \overrightarrow{u\nabla} + \vec{\alpha}\partial_{\vec u} + \lambda_2\varrho^2\partial_\rho \ ;$$

$$\hat{Q}_5 = \varrho\partial_0 - \left[\varrho^2\vec{u}^2 - \lambda\right]\vec{\alpha}\partial_{\vec u} \ ;$$

$$\hat{Q}_6 = f(\varrho)\ \vec{\nabla} + \vec{\alpha}\partial_\rho \ ;$$

$$= -\partial_0 + \lambda\varrho\vec{u}\partial_{\vec u} + \lambda\varrho^2\partial_\rho \ ;$$

$$= \partial_0 + \vec{\alpha}\partial_{\vec u} + \vec{\alpha}\vec{u}f^{-1}(\varrho)\partial_\rho \ ;$$

е $\vec{\alpha}$ – произвольный постоянный единичный вектор. Ан

в одномерном случае, при помощи операторов $\hat{Q}_i$, i

строить анзацы, редуцирующие систему (2.11.1) к сис

числом переменных. Приведем несколько примеров. Анзацы, построен в но по операторам $\hat{Q}_7$, $\hat{Q}_8$, $\hat{Q}_5$, имеют вид

$$\varrho = \left[\varphi^0(\vec{x}) - \lambda x_0\right]^{-1};$$

$$u^a = \varphi^a(\vec{x}) \left[\varphi^0(\vec{x}) - \lambda x_0\right]^{-1}, \quad a = \overline{1, n};$$

$$\int f\, d\varrho = \varphi^0(\vec{x}) + \alpha_a \varphi^a(\vec{x}) x_0 + \frac{1}{2} \vec{\alpha}^2 x_0^2;$$

$$u^a = \varphi^a(\vec{x}) + \alpha_a x_0; \quad a = \overline{1, n};$$

$$\sqrt{\lambda}\ \varphi^0(\omega);$$

$$\left|\begin{array}{l} \vec{a}\varphi^1 + \vec{Б}\varphi^2 + \dfrac{\vec{c}}{\sqrt{\lambda}\left[x_0\varphi^0 + \varphi^3\right]}, \quad \delta = 0; \\ \vec{a}\varphi^1 + \vec{Б}\varphi^2 + \vec{c}\ \operatorname{th}\sqrt{\lambda}\left[x_0\varphi^0 + \varphi^3\right], \quad \delta = +1; \\ \vec{a}\varphi^1 + \vec{Б}\varphi^2 + \vec{c}\ \operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\left[-x_0\varphi^0 + \varphi^3\right], \quad \delta = -1; \end{array}\right.$$

$$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = \{\overline{\vec{a}\vec{x}}, \overline{\vec{b}\vec{x}}, \overline{\vec{c}\vec{x}}\},$$

$\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$; $\delta \equiv (\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 - (\varphi^0)^{-2}$;

$\vec{Б}$, $\vec{c}$ – произвольные единичные взаимноперпендикулярные

зацы редуцируют (2.11.1) к следующим системам уравн

const ;

$$+ \lambda] \vec{\varphi} = 0;$$

$$\operatorname{div} \vec{\varphi} + \lambda = 0;$$

b) $$\left|\begin{array}{l} \vec{\alpha} + \vec{\nabla}\varphi^0 + \left[\overline{\vec{\varphi}\vec{\nabla}}\right]\vec{\varphi} = 0; \\ \operatorname{div}\vec{\varphi} = 0; \\ \varphi_b^a \cdot \varphi_a^b = 0; \quad a, b = \overline{1, n}, \ a \neq b; \end{array}\right.$$

) Для $\delta = 0; +1, -1$ соответственно:

$$\begin{cases} \varphi^0_s = \varphi^s_3 = \varphi^3_3 = 0, \; s = 1,2 \; ; \\ \varphi^s \varphi^3_s = -\varphi^0 \; ; \\ \varphi^s \varphi^\sigma \varphi^\sigma_s = 0 \; , \; s, \sigma = 1,2 \; ; \\ \varphi^2_1 - \varphi^1_2 = 0; \quad \varphi^1_1 + \varphi^2_2 = 0. \end{cases}$$

Вводя потенциал $v = v(\omega_1, \omega_2)$

$$\varphi^s = \frac{\partial v}{\partial \omega_s} \; , \quad s = 1, 2,$$

последнюю из указанных выше систем можно записать в виде

$$\begin{cases} \varphi^0_s = \varphi^s_3 = \varphi^3_3 = 0, \; s = 1,2 \; ; \\ v_s \varphi^3_s = -\varphi^0 \; ; \\ -(\varphi^0)^{-2} + v_s v_s = \left[\begin{matrix} 0 \\ +1 \\ -1 \end{matrix}\right. \; ; \\ \Delta v = 0 \; ; \\ v_s v_\sigma v_{s\sigma} = 0 \; . \end{cases}$$

Имея какое-либо решение системы

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \; ; \\ v_s v_\sigma v_{s\sigma} = 0 \quad s, \sigma = 1, 2 \; ; \end{cases}$$

можно указать решение системы (2.11.5) и, воспользовавшись соотв ствующим анзацем, построить решение системы (2.11.1). Наприме рассмотрим частное решение системы (2.11.6) вида

$$v = \omega_1 .$$

Оно порождает решение системы (2.11.5)

$v = \omega_1, \; \varphi^3 = \omega_1 + \Phi(\omega_2), \; \varphi^0 = 1, \; \varphi^1 = 1, \; \varphi^2 = 0.$

Воспользовавшись соответствующим анзацем, получим

(2.11.1), зависящее от произвольной функции Φ:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{\lambda} \; ; \\ \vec{u} = \vec{a} + \dfrac{\vec{c}}{\sqrt{\lambda}} \left[x_0 + \omega_1 + \Phi(\omega_2)\right] \; ; \end{cases}$$

$\omega_1 = \vec{a}\vec{x}$, $\omega_2 = \vec{б}\vec{x}$; $\vec{a}$, $\vec{б}$, $\vec{c}$ – произвольные единичные, взаимно пендикулярные векторы.

ГЛАВА 3

НЕЛОКАЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

стоящая глава посвящена исследованию нелокальной и рупповой симметрии некоторых нелинейных ДУ. В ней показано, что анзацы, полученные в предыдущих двух главах при помощи лиевской и условной симметрии, далеко не исчерпывают все возможные анзацы, едуцирующие заданное ДУ. Так для нелинейного уравнения теплопровод- и, уравнений газовой динамики и несжимаемой жидкости в §§3.1, 3.4 построены анзацы, которые имеют нелокальную структуру и указанные уравнения к ОДУ. При помощи нелокальной си- троены нелокальные формулы размножения и суперпо инейного уравнения теплопроводности и уравнения $\Box u$ $u = 0$. Эти формулы действуют значительно эффективнее, множения решений, полученные при помощи лиевской сим данных уравнений.

В последнем параграфе этой главы исследована негрупповая симметрия ДУ, которая также применяется для нахождения и размножения шений рассматриваемых уравнений.

§3.1. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В работе [48] проведена групповая классификация не
номерного уравнения теплопроводности

$$u_0 = \partial_1 \left[F(u)\ u_1 \right] ,$$

ie $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1)$, $F(u)$ – произвольная глад
зультаты этой работы сформулируем в виде следующего

ТЕОРЕМА 3.1.1. Максимальная алгебра инвариантнос
(3.1.1) при $F(u) \neq \mathrm{const}$ в классе операторов С.Ли задается следу-ющими базисными элементами

а) ∂_0, ∂_1, $D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1$, (3.1.2)

если $F(u)$ – произвольная гладкая функция;

б) ∂_0, ∂_1, D_1, $D_2 = x_1\partial_1 + \frac{2}{k}\, u\partial_u$, (3.1.3)

ли $F(u) = \lambda u^k$, λ, k – произвольные ненулевые постоянны

∂_0, ∂_1, D_1, $D_3 = x_1\partial_1 + 2\partial_u$, (

ли $F(u) = \lambda\ \mathrm{exp}u$;

) ∂_0, ∂_1, D_1, $D_2 = x_1\partial_1 - \frac{3}{2}u\partial_u$, $\Pi = x_1^2\partial_1 - 3x_1u\partial_u$, (3.

если $F(u) = \lambda u^{-\frac{4}{3}}$.

Известно (см., например, [177] и цитируемую там литературу
что цепочка замен

$$x_0 = x_0,\ x_1 = x_1,\ u(x_0, x_1) = \frac{\partial v(x_0, x_1)}{\partial x_1} ; \qquad (3.1.6)$$

$$x_0 = t,\ x_1 = w(t, x),\ v(x_0, x_1) = x ; \qquad (3.1.7)$$

$$t = t,\ x = x,\ \frac{\partial w(t,x)}{\partial x} = z(t, x) \qquad (3.1.$$

выводит из класса уравнений (3.1.1). Т.е., если посл
оизвести замены (3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), то (3
равнение

$$z_t = \partial_x \left[F^*(z)\ z_x \right] ,$$

це

$$F^{*}(z) = z^{-2}F(z^{-1}). \qquad (3.1.10)$$

В настоящем параграфе используем преобразования (3.1.6)–
") для нахождения нелокальных анзацев, редуцирующих (3.1.1) к
ем нелокальные формулы размножения и суперпозиции реш
го уравнения при соответственных нелинейностях $F(u)$.

УРАВНЕНИЕ $u_0 = \partial_1(u^{-2}u_1)$.

$(u) = u^{-2}$ уравнение (3.1.1) имеет вид

$$u_0 = \partial_1(u^{-2}u_1) \qquad (3.1.11)$$

Из формулы (3.1.10) следует, что уравнение (3.1.11) при помощи
амен (3.1.6) – (3.1.8) сводится к линейному уравнению теплопровод-
юсти

$$z_t = z_{xx}.$$

Если сравнить лиевскую симметрию уравнений (3.1.11) и
2), то мы видим, что замены (3.1.6)–(3.1.8) привели к расши-
бры инвариантности уравнения (3.1.11), состоящей из четы-
ров (3.1.3) ($k = -2$), до шестимерной алгебры (2.2.1
ение говорит о том, что нелинейное уравнение
локальной симметрией, которая не может быть найдена
С. и. Используя этот факт, построим нелокальные анзацы
ния (3.1.12) и формулам (3.1.6)–(3.1.8) найдем анзацы
авнения (3.1.11). В конечном итоге приведем только те анзацы,
которые не могут быть получены из лиевской симметрии уравнения
.1.11):

$$u = \frac{1}{x_0x_1 + x_1\psi(\omega)}, \qquad \omega = \tau + x_0^2,$$

$$\psi(\omega)\exp\left[x_0\tau + \frac{2}{3}x_0^3\right] = x_1; \qquad (3.1.13)$$

$$\frac{2\left[x_0^2 + 1\right]}{\left(x_0^2 + 1\right)^{1/2}\psi(\omega) - x_0\tau]}, \quad \omega = \tau\left[x_0^2 + 1\right]^{-\frac{1}{2}}, \qquad (3.1$$

$$\varphi(\omega)\ \exp\left[\lambda\ \mathrm{arctg}\ x_0 - \frac{x_0\tau^2}{4\left(x_0^2+1\right)}\right] = x_1\left(x_0^2+1\right)^{1/4},\ \lambda =$$

В формулах (3.1.13), (3.1.14) $\tau = \tau(x_0, x_1)$ – фу метр, а функции $\varphi(\omega)$ и $\psi(\omega)$ связаны соотношени Анзацы (3.1.13) и (3.1.14) редуцируют уравнение (3. функции $\psi(\omega)$ – это уравнение Риккати:

$$\dot\psi + \psi^2 = \omega\ , \qquad \dot\psi + \psi^2 = \lambda - \frac{\omega^2}{4}\ ,$$

а для функции $\varphi(\omega)$ – линейные ОДУ 2-го порядка

$$\ddot\varphi - \omega\varphi = 0\ , \qquad \ddot\varphi + \left(\frac{\omega^2}{4} - \lambda\right)\varphi = 0\ ,$$

решения которых выражаются через специальные функции.

Из формул (3.1.6) – (3.1.8) находим связь между прои решениями уравнений (3.1.11) и (3.1.12):

$$u(x_0, x_1) = \left[\frac{\partial z(x_0,\tau)}{\partial\tau}\right]^{-1},$$

где $\tau = \tau(x_0, x_1)$ – параметр, определяемый из соо

$$z(x_0, \tau) = x_1\ .$$

Если взять, например, следующее решение уравнения (3

$$z(t, x) = t + \frac{x^2}{2}\ ,$$

то из (3.1.16) находим $\tau = \sqrt{2(x_1 - x_0)}$. Подставляя на значение параметра τ в (3.1.15), получаем решение уравнен (3.1.11):

$$u(x_0, x_1) = \left[2(x_1 - x_0)\right]^{-\frac{1}{2}}\ .$$

Линейное уравнение (3.1.12) обладает замечатель зом: оператор алгебры инвариантности данного уравн го решение в новое решение этого же уравнения. оператора **Q** из алгебры (2.2.12) имеет место след размножения решений

$$\overset{2}{z}(t,\ x) = Q\ \overset{1}{z}(t,\ x)\ , \qquad (3.1.17)$$

$\overset{2}{z}$ – решения уравнения (3.1.12).

ользуемся формулой (3.1.17) и связью, между решениями 3.1.11) и (3.1.12) для построения формул размнож знения (3.1.11). Если в (3.1.17) в качестве Q . то в результате будем иметь:

$$x_1) = -\left[\overset{1}{u}(x_0,\ \tau)\right]^3 \left[\frac{\partial \overset{1}{u}(x_0, \tau)}{\partial \tau}\right]^{-1}, \qquad (3.1.$$

$\overset{1}{u}(x_0,\ x_1)$ и $\overset{2}{u}(x_0,\ x_1)$ – решения уравнения (3.1.11), а фун- ция $\tau = \tau(x_0,\ x_1)$ определяется из уравнения

$$\overset{1}{u}(x_0,\ \tau) = x_1^{-1}. \qquad (3.1.19)$$

решение уравнения (3.1.11) вида

$$\overset{1}{u}(x_0,\ x_1) = x_0^{\frac{1}{2}}\ x_1^{-1}\ \left[-\ln\ x_0^{\frac{1}{2}}\ x_1\right]^{-\frac{1}{2}}$$

формул (3.1.18) – (3.1.19) размножается в решение, за- метрически:

$$\begin{cases} \overset{2}{u}(x_0,\ x_1) = x_0^{\frac{3}{2}}\ \tau\ \left[\ln\ \tau - \dfrac{1}{2}\ \right]^{-1}, \\ \ln\ \tau = (x_0 x_1 \tau)^2. \end{cases}$$

ри $Q = \partial_t$ из формул (3.1.15) – (3.1.17) имеем еще одну у размножения решений уравнения (3.1.11)

$$\overset{2}{u}(x_0,\ x_1) = \frac{\left[\overset{1}{u}(x_0, \tau)\right]^5}{2\left[\overset{1}{u}_\tau(x_0, \tau)\right]^2 - \left[\overset{1}{u}(x_0, \tau)\right]^2\ \overset{1}{u}_0(x_0, \tau)}\ , \qquad (3.1.20)$$

$\tau = \tau(x_0,\ x_1)$ определяется из условия

$$\overset{1}{u}_\tau(x_0,\ \tau) + x_1\ \left[\overset{1}{u}(x_0, \tau)\right]^3 = 0\ . \qquad (3.1.21)$$

АНИЕ 3.1.1. Аналогично строятся формулы размножени нения (3.1.11), если вместо (3.1.17) использова

$$\overset{2}{z}(t,\ x) = Q^m\ \overset{1}{z}(t,\ x)\ ,$$

где m – степень оператора Q.

Синтез локальных преобразований Галилея

$$t' = t, \quad x' = x + 2\alpha t, \quad z' = z\exp(-\alpha x - \alpha^2 t) ,$$

относительно которых инвариантно уравнение (3.1.12), и нел связи (3.1.15) – (3.1.16) также позволяет построить формулу ния решений уравнения (3.1.11).

ТЕОРЕМА 3.1.2. Если $\overset{1}{u}(x_0, x_1)$ – решение ура α – произвольный числовой параметр, а $\tau = \tau(x_0, x_1)$ – ий параметр, являющийся решением уравнений

$$\tau_1 = \frac{1}{\alpha x_1 \overset{1}{u}(x_0, \tau) + x_1 \tau^{-1}} ,$$

$$\tau_0 = \left[\overset{1}{u}(x_0, \tau)\right]^{-2} \tau_1^{-2} \tau_{11} + 2\alpha , \qquad (3.1.23)$$

то функция

$$\overset{2}{u}(x_0, x_1) = \frac{\overset{1}{u}(x_0, \tau)}{\alpha x_1 \overset{1}{u}(x_0, \tau) + x_1 \tau^{-1}} \qquad (3.1.24)$$

кже решение уравнения (3.1.11).

Данная теорема доказывается непосредственной под лы (3.1.24) в уравнение (3.1.11).

Отметим, что в уравнение (3.1.22) x_0 входит оэтому данное уравнение можно рассматривать как ОДУ 1 азделяющимися переменными. В следствии этого уравн является лишь условием уточнения найденного τ по переменной x_0.

Об эффективности формул (3.1.22) – (3.1.24) говорит следую пример. Постоянное решение $\overset{1}{u}(x_0, x_1) = 1$ уравнения (3.1.11) размножается этими формулами в неявно заданное решение вида

$$\ln \frac{x_1 u}{1 - \alpha x_1 u} + \frac{\alpha x_1 u}{1 - \alpha x_1 u} = \alpha^2 x_0 + \ln x_1 .$$

Уравнение (3.1.12) обладает линейным принципом шений

$$\overset{3}{z}(t, x) = \overset{1}{z}(t, x) + \overset{2}{z}(t, x)$$

ользуя (3.1.25) и формулы (3.1.15) – (3.1.16), находим нелиней-й принцип суперпозиции решений для уравнения (3.1.11). Сформули-м его в виде следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3.1.3. Пусть $\overset{1}{u}(x_0,x_1)$ и $\overset{2}{u}(x_0,x_1)$ – два решения ия (3.1.11), а $\overset{1}{\tau}(x_0, x_1)$ и $\overset{2}{\tau}(x_0, x_1)$ – функциональные , определяемые из условий

$$\overset{1}{u}(x_0, \overset{1}{\tau})\, d\overset{1}{\tau} = \overset{2}{u}(x_0, \overset{2}{\tau})\, d\overset{2}{\tau} \,,$$

$$\overset{1}{\tau} + \overset{2}{\tau} = 1 \,, \qquad (3.1.$$

$$\overset{1}{\tau}_0 = \overset{1}{\tau}_{11}\left[\overset{1}{\tau}_1\, \overset{1}{u}(x_0, \overset{1}{\tau})\right]^{-2} ,$$

$$\overset{2}{\tau}_0 = \overset{2}{\tau}_{11}\left[\overset{2}{\tau}_1\, \overset{2}{u}(x_0, \overset{2}{\tau})\right]^{-2}$$

да третье решение уравнения (3.1.11) находится из формулы

$$\frac{1}{\overset{3}{u}(x_0, x_1)} = \frac{1}{\overset{1}{u}(x_0, \overset{1}{\tau})} + \frac{1}{\overset{2}{u}(x_0, \overset{2}{\tau})} \qquad (3.1.27)$$

Если сделать замену $u(x_0,x_1) = 1/u(x_0,x_1)$, то уравнение 11) и формулы (3.1.26) – (3.1.27) преобразуются к виду

$$U_0 = U^2 U_{11}, \qquad (3.1.28)$$

$$_1) = \overset{1}{U}(x_0, \overset{1}{\tau}) + \overset{2}{U}(x_0, \overset{2}{\tau}) \,, \qquad (3.1.29)$$

$$d \frac{}{\overset{1}{}\tau)} = \frac{d\overset{2}{\tau}}{\overset{2}{U}(x_0, \overset{2}{\tau})} \,,$$

$$= x_1 \,, \qquad (3.1.30)$$

$$\overset{1}{\tau}_0 = \frac{\overset{1}{\tau}_{11}}{\overset{1}{\tau}{}_1^2}\, \overset{1}{U}{}^2(x_0, \overset{1}{\tau}) \,,$$

$$\overset{2}{\tau}_0 = \frac{\overset{2}{\tau}_{11}}{\overset{2}{\tau}{}_1^2}\, \overset{2}{U}{}^2(x_0, \overset{2}{\tau}) \,,$$

мер из двух стационарных решений

$$\overset{1}{U}(x_0, x_1) = x_1 \,, \quad \overset{2}{U}(x_0, x_1) = 2x_1$$

уравнения (3.1.28) по формулам (3.1.29) – (3.1.30) на ционарное решение этого уравнения

$$\overset{1}{U}(x_0, x_1) = \pm e^{-2x_0}\left[1 - 2x_1 e^{2x_0} \pm \sqrt{1 - 2x_1 e^{2x_0}}\right].$$

п.2 НЕЛОКАЛЬНЫЕ АНЗАЦЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $u_0 = \partial_1\left(u^{-\frac{2}{3}}u_1\right)$.

Из формулы (3.1.10) следует, что после преобразований (3.1. (3.1.8) уравнение

$$u_0 = \partial_1\left(u^{-\frac{2}{3}}u_1\right) \qquad (3.1$$

реходит в уравнение

$$z_t = \partial_x\left(z^{-\frac{4}{3}}z_x\right).$$

В классе лиевских преобразований симметрия уравнения (3 чем симметрия уравнения (3.1.31) (см. теорему 3.1.1) как и в п.1, используем данное расширение симметрии для пос нелокальных анзацев, редуцирующих уравнение (3.1.31) к ОДУ. В сжатой форме приведем основные результаты нашего анализа.

Лиевские анзацы для функции z:

1) $z = x^{-3}\varphi(\omega), \quad \omega = t$;

2) $z = x^{-3}\varphi(\omega), \quad \omega = \lambda t + \dfrac{1}{x}$;

$z = t^{\frac{3}{4}}\, x^{-3}\varphi(\omega), \quad \omega = \lambda\, \ln t + \dfrac{1}{x}$;

$z = \left(x^2 + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi(\omega), \ \omega = t + \lambda\, \mathrm{arctg}\, x$;

5) $z = \left(x^2 - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi(\omega), \ \omega = t + \lambda\, \mathrm{arcth}\, x$;

6) $z = t^{\frac{3}{4}} \left(x^2 + 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi(\omega), \ \omega = \ln t + \lambda\, \mathrm{arctg}\, x$;

7) $z = t^{\frac{3}{4}} \left(x^2 - 1\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi(\omega), \ \omega = \ln t + \lambda\, \mathrm{arcth}\, x$,

где λ – произвольная постоянная.

Анзацы для функции u:

$$x_1\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0)\Big]^{-\frac{3}{2}} \; ;$$

$$\left[x_1 + \varphi^1(x_0)\right] \left[\dot\varphi^2(x_0)\right]^{\frac{3}{4}} = -\tau\,\dot\varphi^3(\omega) + \varphi^3(\omega) \; ,$$

$$\omega = \varphi^2(x_0) + \tau \; , \quad -\frac{\tau_1}{\tau} = u \; ; \qquad (3.1.33)$$

3°).
$$\left[x_1 + \varphi^1(x_0)\right] \left[\dot\varphi^2(x_0)\right]^{\frac{3}{4}} = \int \left[\dot\varphi^3(\tau)\right]^{\frac{3}{2}} \varphi^4(\omega)\, \partial\tau \; ,$$

$$\omega = \varphi^2(x_0) + \varphi^3(\tau) \; , \; \tau_1 = u.$$

Редуцированные уравнения, полученные после подстановки анзацев 33) в уравнение (3.1.31):

$$4(\varphi^1)^2 = 0 \; ,$$
$$2\varphi^1\varphi^2 = 0 \; ; \qquad (3.1.34)$$

$$\lambda_1(\dot\varphi^2)^{\frac{1}{4}} \; ,$$
$$\ddot\varphi^2 = \lambda_2(\dot\varphi^2)^2 \qquad (3.1.35)$$

$$3(\ddot\varphi^3)^{\frac{1}{3}} + \lambda_3\dot\varphi^3 + \frac{3}{4}\lambda_2\varphi^3 - \lambda_1 = 0 \; ;$$

$$\begin{cases} \dot\varphi^1 = 0 \; , \\ \ddot\varphi^2 = \lambda_2(\dot\varphi^2)^2 \qquad (3.1.36) \\ 2\dddot\varphi^3\dot\varphi^3 - 3(\ddot\varphi^3)^2 = 2\lambda_1(\dot\varphi^3)^4 \; , \\ (\varphi^4)^{\frac{4}{3}}\ddot\varphi^4 - \frac{4}{3}(\varphi^4)^{-\frac{7}{3}}(\dot\varphi^4)^2 + 3\lambda_1(\varphi^4)^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}\lambda_2\varphi^4 - \dot\varphi^4 = 0, \end{cases}$$

λ_3 – произвольные постоянные.

НИЕ 3.1.2. Судя по результатам проведенной реду

.1.33) можно рассматривать как формулы разделения пер

уравнении (3.1.31).

проинтегрировать, например, систему уравнений (3.

$= 0$, то в итоге получим решение уравнения (3.1.31) в пар

трической форме

$$u^{\frac{1}{3}} = \frac{-c_1\left[\frac{5}{4}\, c_1^3 x_1 + c_2 x_0\right]}{\tau(\tau - 4c_3 x_0)} ,$$

$$(\tau + c_3 x_0)(\tau - 4c_3 x_0)^4 = \left[\frac{5}{4}\, c_1^3 x_1 + c_2 x_0\right]^4 ,$$

где c_1, c_2, c_3 – постоянные интегрирования.

ИНВАРИАНТНОСТЬ УРАВНЕНИЯ (3.1.1) ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАМЕН (3.1.6) – (3.1.8)

Для того, чтобы уравнение (3.1.1) было инвариант елокальных преобразований (3.1.6) – (3.1.8) необ ыполнялось условие

$$z^{-2} F(z^{-1}) = F(z) . \qquad ($$

Решением функционального уравнения (3.1.37) является фун

$$F(z) = z^{-1} f(\ln z) , \qquad (3.1$$

где f – произвольная гладкая четная функция.

Таким образом, (3.1.6) – (3.1.8) являются нелокальными преобра ниями инвариантности уравнения

$$u_0 = \partial_1 \left[\frac{u_1}{u} f(\ln u) \right] , \quad \left[f(-\alpha) = f(\alpha) \right] . \qquad (3.1$$

пользуем этот факт для построения формулы размнож авнения (3.1.39).

ТЕОРЕМА 3.1.4. Если $\overset{1}{u}(x_0, x_1)$ – решение уравнен ункциональный параметр $\tau = \tau(x_0, x_1)$ является реше системы уравнений

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{1}{\overset{1}{u}(x_0, \tau)} , \\[2ex] \tau_0 = \dfrac{\tau_{11}}{\tau_1} f(\ln \tau_1) , \end{cases} \qquad (3.1.40$$

то функция

$$\overset{2}{u}(x_0, x_1) = \frac{1}{\overset{1}{u}(x_0, \tau)} \qquad (3.1.4$$

кже является решением уравнения (3.1.39).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим (3.1.41) в (3.1.39). Тогда

$$\overset{2}{u}_0 - \partial_1\left[\frac{\overset{2}{u}_1}{\overset{2}{u}} f(\ln \overset{2}{u})\right] = - \overset{1}{u}^{-2} \left\{\overset{1}{u}_0 - \left(\overset{1}{u}\tau_1\right)^2 \partial_\tau\left[\frac{\overset{1}{u}_\tau}{\overset{1}{u}} f(- \ln \overset{1}{u})\right]\right\} -$$

$$- \overset{1}{u}^{-2} \overset{1}{u}_\tau \left\{\tau_0 - \left(\overset{1}{u}\tau_1\right) \frac{\tau_{11}}{\tau_1} f\left[\ln \frac{\tau_1}{\left(\overset{1}{u}\tau_1\right)}\right]\right\} .$$

С учетом (3.1.40) и четности функции f, последнее выражен

[illegible]

$$\partial_1\left[\frac{\overset{2}{u}_1}{\overset{2}{u}} f(\ln \overset{2}{u})\right] = - \overset{1}{u}^{-2} \left\{\overset{1}{u}_0 - \partial_\tau\left[\frac{\overset{1}{u}_\tau}{\overset{1}{u}} f(\ln \overset{1}{u})\right]\right\} .$$

Что и требовалось доказать.

Проследим на конкретном примере действие форму (3.1.41). Пусть в (3.1.39) $f \equiv 1$. Тогда будем иметь уравн

$$u_0 = \partial_1\left(\frac{u_1}{u} \right) . \qquad (3.1.42)$$

Легко убедиться в том, что функция

$$\overset{1}{u}(x_0, x_1) = \frac{x_0}{1 + \cos x_1} \qquad (3.1.43)$$

яется одним из решений уравнения (3.1.42). Подставляя 3.1.40) – (3.1.41), после несложных вычислений находим

$$\overset{2}{u}(x_0, x_1) = \frac{2 x_0}{x_0^2 + x_1^2} .$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.3. Следует отметить, что решен (3.1.44) существенно отличаются между собой по сво (непрерывностью, ограниченностью, периодичностью, поведени и на бесконечности и т.д.), в то время, как при размножении лиевскими преобразованиями, большинство из указанных свойств няются.

УРАВНЕНИЕ $\square u + \sin u = 0$.

ое волновое уравнение

$$\square u + \sin u = 0 \qquad (3.2.1)$$

), $x = (x_0, x_1) \in R_2$, $\square u = u_{00} - u_{11}$, известно в л

под названием синус Гордона, синус Даламбера. Это уравне

вые появилось в физике в теории дислокаций [69]. Оно описывает

ространение вращений в различных физических системах [138], на-

ер, распространение флюксонов в джозефсоновских контактах и

странение резонансных ультракоротких оптических импульсов

часто используют при дифференциально-геометрических иссле-

ной литературе по данному уравнению приведен ряд

ий. Это плосковолновое или односолитонное реше

$$u = 4 \operatorname{arctg} \exp \alpha x, \quad \alpha^2 = -1 \ ;$$

ое решение

$$u = 4 \operatorname{arctg} \frac{\sin \beta x}{k \operatorname{ch} \beta x} \ ;$$

е, описывающее так называемые "дышащие" солитоны – бризеры

$$u = 4 \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha x}{k \operatorname{ch} \beta x} \ ;$$

ние вида

$$u = 4 \operatorname{arctg} \frac{\alpha x}{\operatorname{ch} \beta x} \ ;$$

ное в [29]; а также некоторые плосковолновые решения, выра

рез эллиптические функции Якоби [124].

известные автопреобразования Беклунда

$$\left.\frac{\overset{1}{u}}{\quad}\right]_y = \sin \frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{2} \ ,$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad (3.2.2)$$

$$\left.\frac{u - \overset{1}{u}}{\quad}\right]_z = \sin \frac{\overset{2}{u} + \overset{1}{u}}{2} \ ,$$

ия (3.2.1)

$$u_{yz} = \sin u \ , \qquad (3.2.3)$$

исанного в конусных переменных

$$y = \frac{x_1 + x_0}{2}, \quad z = \frac{x_1 - x_0}{2},$$

.е. связь между двумя решениями $\overset{1}{u}$ и $\overset{2}{u}$ уравнени преобразования были получены еще Беклундом до 1883 г.

в форме (3.2.2) они неудобны для практического применения, так определяют $\overset{2}{u}$ через $\overset{1}{u}$ неявно.

Перейдем от неявной связи решений (3.2.2) к параметрическ введя функциональный параметр $\tau = \tau(x_0, x_1)$ следующим образом

$$\tau = \mathrm{tg}\,\frac{\overset{2}{u} - \overset{1}{u}}{4}. \qquad (3.2.$$

гда формулы (3.2.5) и (3.2.2) примут вид формул нелок ожения решений уравнения (3.2.3), т.е. справедливо рждение.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть $\overset{1}{u}(y, z)$ – решение уравнен раметр $\tau(y, z)$ – решение системы уравнений

$$\begin{cases} \tau_y = -\dfrac{1}{2}\left(\tau^2 + 1\right)\overset{1}{u}_y + \tau, \\ \tau_z = -\dfrac{1}{2}\left(\tau^2 - 1\right)\sin\overset{1}{u} + \tau\cos\overset{1}{u}, \end{cases} \qquad (3.2.6)$$

тогда функция

$$\overset{2}{u} = \overset{1}{u} + 4\,\mathrm{arctg}\,\tau \qquad (3.2.$$

также является решением уравнения (3.2.3).

Доказательство данной теоремы проводится при помо венной подстановки формулы (3.2.7) в уравнение (3.2

Если формулы (3.2.6) – (3.2.7) применять повтор решению $\overset{1}{u}$ можно построить целую последователь ешений уравнения (3.2.3) или (3.2.1). При этом

$$\overset{n+1}{u} = \overset{n}{u} + 4\,\mathrm{arctg}\,\overset{n+1}{\tau}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \qquad (3.2.$$

где

$$\left|\begin{array}{l} \overset{n+1}{\tau}_y = -\dfrac{1}{2}\left[\overset{n+1}{\tau}{}^2 + 1\right]\overset{n}{u}_y + \overset{n+1}{\tau}, \\ \overset{n+1}{\tau}_z = -\dfrac{1}{2}\left[\overset{n+1}{\tau}{}^2 - 1\right]\sin\overset{n}{u} + \overset{n+1}{\tau}\cos\overset{n}{u}. \end{array}\right.$$

Проиллюстрируем действие формул (3.2.8) – (3.2.9) на приме Выберем в качестве первоначального решения $\overset{1}{u} = 0$. Вообще говор трудность применения этих формул заключается в том, что при нахождении параметра τ необходимо решать уравнения Риккати (3 решение которых не всегда выражается в квадратурах. Однако,

= 0 , то указанную трудность удается преодолеть, так к

тном случае (3.2.8) – (3.2.9) обладают замечательны

$$_{ч}(y, z) = \overset{n}{\tau}_{об}(-y, -z), \quad n = 2,3, \ldots,$$

е $\overset{n}{\tau}_{ч}(y, z)$ – частное, а $\overset{n}{\tau}_{об}(y, z)$ – общее реш (3.2.9).

Зная частное решение уравнения Риккати, мы можем, как известно общее решение выразить в квадратурах.

Проделаем несколько шагов размножения решений уравнения (3.2.3) по формулам (3.2.8) – (3.2.9).

1-й шаг. Подставляя $\overset{1}{u} = 0$ в (3.2.9) $(n = 1)$, находим

$$\left|\begin{array}{l} \overset{2}{\tau}_y = \overset{2}{\tau}, \\ \overset{2}{\tau}_z = \overset{2}{\tau}. \end{array}\right.$$

мы видим, на 1-м шаге уравнения Риккати (3.

авнения с разделяющимися переменными и их интегриров

ет осложнений:

$$\overset{2}{\tau}_{об}(y, z) = \exp\,(\,y + z + c\,),$$

где c – постоянная интегрирования. Поскольку уравнения (3. (3.2.8), (3.2.9) инвариантны относительно сдвигов ∂_y, ∂_z, то, умаляя общности, можно положить $c = 0$. При этом

$$p(y + z)\ ,\overset{2}{u}(y,z)=4\mathrm{arctg}\, \exp(y + z) \qquad (3.2.11)$$

иальное решение при помощи формул (3.2.8) – (3.2.9)

плосковолновое:

$$0 \xrightarrow{\qquad} 4\mathrm{arctg}\, \exp(y + z)$$

-й шаг. С учетом (3.2.11) уравнения (3.2.8) – (3.2.9) при

принимают вид

$$= 4\ \mathrm{arctg}\ \overset{2}{\tau} + 4\ \mathrm{arctg}\ \overset{3}{\tau}\ ,$$

$$= -2\,\frac{\overset{3}{\tau}{}^2 + 1}{\overset{2}{\tau}{}^2 + 1}\,\overset{2}{\tau} + \overset{3}{\tau}\ , \qquad (3.2.12)$$

$$\frac{\left(\overset{3}{\tau}{}^2 - 1\right)\left(\overset{2}{\tau}{}^2 - 1\right)}{\left(\overset{2}{\tau}{}^2 + 1\right)^2}\,\tau^2 + \overset{3}{\tau}\left[1 - \frac{8\overset{2}{\tau}{}^2}{\left(\overset{2}{\tau}{}^2 + 1\right)^2}\right] .$$

.2.10) одним из частных решений уравнений (3.2.

ция

$$\overset{3}{\tau}_ч(y,\ z) = \overset{2}{\tau}_{об}(-y,\ -z) = \left[\overset{2}{\tau}_{об}(y,\ z)\right]^{-1} .$$

ны

$$\overset{3}{\tau} = \overset{3}{w} + \frac{1}{\overset{2}{\tau}}\ , \qquad (3.2.13)$$

де $\overset{3}{w} = \overset{3}{w}(y,\ z)$ – новая неизвестная функция, уравнения (3.2.12)

водятся к уравнениям Бернулли

$$= \left(1 - \frac{4}{\overset{2}{\tau}{}^2 + 1}\right)\overset{3}{w} - \frac{2\overset{2}{\tau}}{\overset{2}{\tau}{}^2 + 1}\,\overset{3}{w}{}^2\ , \qquad (3.2.14)$$

$$\left(1 - \frac{4}{\overset{2}{\tau}{}^2 + 1}\right)\overset{3}{w} - \frac{2\overset{2}{\tau}\left(\overset{2}{\tau}{}^2 - 1\right)}{\overset{2}{\tau}{}^2 + 1}\,\overset{3}{w}{}^2\ ,$$

овав уравнения (3.2.14) и использовав формулу (

$$z) = \overset{2}{\tau}\,\frac{2(y - z) + \overset{2}{\tau}{}^2 + 1}{2(y - z)\overset{2}{\tau}{}^2 - \left(\overset{2}{\tau}{}^2 + 1\right)}\ , \qquad (3.2.15)$$

$$z) = 4\ \mathrm{arctg}\ \frac{y - z}{\mathrm{ch}\ (y + z)}\ . \qquad (3.2.16)$$

метим, что, как и на 1-м шаге, при получении формул .2.16) мы воспользовались инвариантностью относи специального выбора постоянной интегрирования. -м шаге размножения решений плосковолновое решение (3. в решение (3.2.16), полученное в [29]:

$$4 \operatorname{arctg} \exp(y + z) \longrightarrow 4 \operatorname{arctg} \frac{y - z}{\operatorname{ch}(y + z)} .$$

3-й шаг. Подставим (3.2.15), (3.2.16) в (3.2.8) –

n = 3.Тогда будем иметь

$$\overset{4}{u} = 4 \operatorname{arctg} \overset{2}{\tau} + 4 \operatorname{arctg} \overset{3}{\tau} + 4 \operatorname{arctg} \overset{4}{\tau} , \qquad (3.2.1$$

$$\overset{4}{\tau}_y - \left[\frac{2\overset{2}{\tau}^2}{\overset{2}{\tau}^2 + 1} - \frac{2\overset{3}{\tau}}{\overset{3}{\tau}^2 + 1} \right] \left(\overset{4}{\tau}^2 + 1 \right) + \overset{4}{\tau} ,$$

$$\left[\frac{2\overset{2}{\tau}\left(\overset{2}{\tau}^2 - 1\right)}{\left(\overset{2}{\tau}^2 + 1\right)^2} \left[1 - \frac{8\overset{3}{\tau}^2}{\left(\overset{3}{\tau}^2 + 1\right)^2} \right] + \frac{2\overset{3}{\tau}\left(\overset{3}{\tau}^2 - 1\right)}{\left(\overset{3}{\tau}^2 + 1\right)^2} \left[1 - \frac{8\overset{2}{\tau}^2}{\left(\overset{2}{\tau}^2 + 1\right)} \right] \right]$$

$$\overset{4}{\tau} \left\{ \left[1 - \frac{8\overset{2}{\tau}^2}{\left(\overset{2}{\tau}^2 + 1\right)^2} \right] \left[1 - \frac{8\overset{3}{\tau}^2}{\left(\overset{3}{\tau}^2 + 1\right)^2} \right] - \frac{16\overset{2}{\tau}\overset{3}{\tau}\left(\overset{2}{\tau}^2 - 1\right)\left(\overset{3}{\tau}^2 - \right.}{\left(\overset{2}{\tau}^2 + 1\right)^2 \left(\overset{3}{\tau}^2 + 1\right)^2} \right.$$

По формуле (3.2.10) строим частное решение ур

(3.2.17)

$$\overset{4}{\tau}_y(y, z) = \overset{3}{\tau}_{06}(-y,-z) = \overset{2}{\tau}(-y, -z) \frac{2(y - z) + \overset{2}{\tau}^2(-y_1 - z) + 1}{2(y-z)\overset{2}{\tau}^2(-y_1 - z) - \overset{2}{\tau}^2(-y_1 - z) - 1}$$

$$\frac{1}{\overset{2}{\tau}(y,z)} \frac{2(y-z) + \dfrac{1}{\overset{2}{\tau}^2(y,z)} + 1}{2(y-z)\dfrac{1}{\overset{2}{\tau}^2(y,z)} - \dfrac{1}{\overset{2}{\tau}^2(y,z)} - 1} = \frac{1}{\overset{2}{\tau}} \frac{2(y-z)\overset{2}{\tau}^2 +}{2(y-z}$$

ена

$$\overset{4}{\tau} = \overset{4}{w} + \frac{1}{\overset{2}{\tau}} \frac{2(y-z)\overset{2}{\tau}^2 + \overset{2}{\tau}^2 + 1}{2(y-z) - \left(\overset{2}{\tau}^2 + 1\right)}$$

преобразует уравнение (3.2.17) к уравнениям Бернулли

находим

$$\frac{\overset{2}{\tau}}{-z-\overset{2}{\tau}\operatorname{ch}(y+z)}\left\{y-z+\overset{2}{\tau}{}^{-1}\operatorname{ch}(y+z)-\right.$$

(3.2.1

$$\left.\frac{2}{\dfrac{y-z-\overset{2}{\tau}\operatorname{ch}(y+z)}{c+y+z+\operatorname{ch}(y+z)\ \operatorname{sh}(y+z)}+\dfrac{y-z+\overset{2}{\tau}{}^{-1}\operatorname{ch}(y+z)}{(y-z)^2+\operatorname{ch}^2(y+z)}}\right\}$$

$$g\left[\exp(y+z)\frac{c+y+z+\operatorname{ch}(y+z)\operatorname{sh}(y+z)+\operatorname{ch}^2(y+z)+(y-z)^2}{c+y+z+\operatorname{ch}(y+z)\operatorname{sh}(y+z)-\operatorname{ch}^2(y+z)-(y-z)^2}\right] \quad (3.2$$

ченное нами решение (3.2.20) уравнения (3.2.3) новое и в литетуре ранее не встречалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2.1. С каждым шагом размножения решений по форму-(3.2.8) – (3.2.9) резко возрастает объем вычислений, все форму-вятся очень громоздкими, в то время, как в идейном плане удностей не возникает. Если промежуточные вычисления по-то можно, кроме (3.2.20), получить и другие новые ия (3.2.3).

ем всю цепочку решений уравнения (3.2.3), полученую ге размножения по формулам (3.2.8) – (3.2.9):

$$4\operatorname{arctg}\exp(y+z)\longrightarrow 4\operatorname{arctg}\frac{y-z}{\operatorname{ch}(y+z)}\longrightarrow \quad (3.2$$

$$\rightarrow 4\operatorname{arctg}\left[\exp(y+z)\frac{c+y+z+\operatorname{ch}(y+z)\operatorname{sh}(y+z)+\operatorname{ch}^2(y+z)+(y-z)^2}{c+y+z+\operatorname{ch}(y+z)\operatorname{sh}(y+z)-\operatorname{ch}^2(y+z)-(y-z)^2}\right]$$

Для уравнения (3.2.1) эта цепочка имеет вид

$$4\operatorname{arctg}\exp x_1\longrightarrow 4\operatorname{arctg}\frac{x_0}{\operatorname{ch}x_1}\longrightarrow \quad (3.2.22)$$

$$\operatorname{ctg}\left[\exp(-x_1)\frac{c+x_1+\operatorname{ch}x_1\operatorname{sh}x_1+\operatorname{ch}^2x_1+x_0^2}{c+x_1+\operatorname{ch}x_1\operatorname{sh}x_1-\operatorname{ch}^2x_1-x_0^2}\right]$$

к уравнение (3.2.1) инвариантно относительно п ща, то кроме решений (3.2.22) уравнению (3.2 ить также и следующие функции

$$\overset{1}{u}(x_0, x_1) = 0 ,$$

$$\overset{2}{u}(x_0, x_1) = 4\ \mathrm{arctg}\ \exp bx , \qquad (3.2.23)$$

$$\overset{3}{u}(x_0, x_1) = 4\ \mathrm{arctg}\ \frac{ax}{\mathrm{ch}\ bx} ,$$

$$x_0, x_1)=4\mathrm{arctg}\left[\exp(-bx)\frac{c+bx+\mathrm{ch}(bx)\mathrm{sh}(bx)+\mathrm{ch}^2(bx)+(ax)^2}{c+bx+\mathrm{ch}(bx)\mathrm{sh}(bx)-\mathrm{ch}^2(bx)-(ax)^2}\right]$$

$$ax = a_\mu x^\mu = a_0x_0 - a_1x_1, \quad bx = b_\mu x^\mu = b_0x_0 - b_1x_1$$

оизвольные постоянные, удовлетворяющие условиям $a^2 =$ $- a_1^2 = 1$, $b^2 = b_\mu b^\mu = b_0^2 - b_1^2 = 1$, $ab = a_\mu b^\mu = a_0 b_0 -$

Из результатов §1.6 следует, что только решения u (3.2.23) можно получить при помощи лиевской симметрии уравнени (3.2.1). Решение $\overset{3}{u}$ (3.2.23) можно получить из условной инвариантности этого уравнения. Это следует из утверждения:

ТЕОРЕМА 3.2.2. Многомерное уравнение (3.2.1) инвариант осительно оператора

$$Q = a_\mu\ \partial_\mu + 2\sin\frac{u}{2}\ \partial_u$$

и условиях

$$u_\mu u^\mu + 4\sin^2\frac{u}{2} - \frac{16}{(ax)^2}\sin^2\frac{u}{4} = 0 ,$$

$$Qu = axa_\mu u_\mu - 2\sin\frac{u}{2} = 0 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$S_1 \equiv \Box u + \sin u ,$$

$$S_2 \equiv u_\mu u^\mu + 4\sin^2\frac{u}{2} - \frac{16}{(ax)^2}\sin^2\frac{u}{4} .$$

Для доказательства теоремы воспользуемся определением ус инвариантности (см. §2.1), согласно которому необходимо доказат что

$$\tilde{Q}S_1 = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 Qu ,$$

$$\tilde{Q}S_2 = \lambda_4 S_1 + \lambda_5 S_2 + \lambda_6 Qu ,$$

λ_k, $k = \overline{1, 6}$ – некоторые функции.

Если стандартным образом по Ли найти продол подействовать им на S_1 и S_2, то соответственно будем иметь

$$\cos\frac{u}{2}S_1 - \frac{1}{2}\sin\frac{u}{2}S_2 + \left[4\frac{\sin^2\frac{u}{4}}{(ax)^2} - 2\,\frac{a\partial}{ax}\right]Qu\,,$$

$$\cos\frac{u}{2}S_2 - \frac{2}{(ax)^2}\left\{Qu + 4\sin\frac{u}{2}\right\}Qu\,.$$

но (3.2.28). Теорема доказана.

ерном случае оператор (3.2.24) порождает анзац

$$4\,\mathrm{arctg}\,\frac{ax}{\mathrm{ch}\,\varphi(\omega)}\,, \quad \omega = bx\,, \qquad (3.2.28)$$

уцирует уравнение (3.2.1) к системе двух ОДУ:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = 0\,, \\ \dot{\varphi}^2 = 1\,. \end{cases} \qquad (3.2.29)$$

дставив общее решение системы (3.2.29) в анзац (3.2.28), получаем шение $\overset{3}{u}$ из формул (3.2.23).

Аналогично с помощью условной инвариантности можно построить

$$\left[\exp(-bx)\frac{c+y+z+\mathrm{ch}bx\ \mathrm{sh}bx + \mathrm{ch}^2bx + \varphi^2(\omega)}{c+y+z+\mathrm{ch}bx\ \mathrm{sh}bx - \mathrm{ch}^2bx - \varphi^2(\omega)}\right], \qquad (3.2.30)$$

й уравнение (3.2.1) к системе (3.2.29), и получ (3.2.23).

м теперь полученные выше результаты на случай уравнения (3.2.1), когда $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x}$

ть

$= (a_0, \vec{a}\}$, $b = \{b_0, \vec{b}\}$, $c = \{c_0, \vec{c}\}$, $d = \{d_0, \vec{d}\}$

роизвольные постоянные векторы, образующие базис метрического странства R_{1+3} с метрикой (+, −, −, −), т.е.

$$b^2 = -c^2 = -d^2 = 1,\ ab = ac = ad = bc = bd = cd = 0. \qquad (3.2.31)$$

зацы

$$\mathrm{arctg}\,\exp\{\omega_3 + \varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)\};$$

$$\mathrm{arctg}\,\frac{\omega_3}{\mathrm{sh}\,\varphi(\omega_0, \omega_1, \omega_2)}\,;$$

$$3^\circ).\ u = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega_0}{\mathrm{ch}\,\varphi(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3)}\ ;$$

$$4^\circ).\ u = 4\,\mathrm{arctg}\left[\exp(-\omega_3)\,\frac{c+\omega_3+\mathrm{ch}\omega_3\,\mathrm{sh}\omega_3+\mathrm{ch}^2\omega_3+\varphi^2(\omega_0,\omega_1,\omega_2)}{c+\omega_3+\mathrm{ch}\omega_3\,\mathrm{sh}\omega_3-\mathrm{ch}^2\omega_3-\varphi^2(\omega_0,\omega_1,\omega_2)}\right]$$

где

$$\omega_0 = ax,\ \omega_1 = bx,\ \omega_2 = cx,\ \omega_3 = dx, \qquad (3.2.3$$

тученные с помощью операторов условной инвариантности

внения (3.2.1), редуцируют данное уравнение к сле

$^\circ).\ \Box\varphi = 0,\ \varphi_\mu\varphi^\mu = 0\ ;$

$^\circ).\ \Box\varphi = 0,\ \varphi_\mu\varphi^\mu = -1\ ;$

$3^\circ).\ \Delta\varphi = 0,\ (\vec{\nabla}\varphi)^2 = 1\ ;$

$4^\circ).\ \Box\varphi = 0,\ \varphi_\mu\varphi^\mu = 1\ .$

В формулах (3.2.34) введены обозначения:

$$\Box\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_0^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2}\ ,\ \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_3^2}\ ,$$

$$\varphi_\mu\varphi^\mu = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}\right)^2;\ (\vec{\nabla}\varphi)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega_2}\right)^2 + \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$$

Решению систем (3.2.34) посвящена работа [89]. В

ние решения данных систем, используя которые по

жно получить целые семейства точных решений

уравнения (3.2.1).

лагранжевых переменных одномерное адиабатическое дви описывается системой уравнений (см., например, [3] и цитиро- анную там литературу)

$$\begin{cases} u^1_0 - u^2_1 = 0 \,, \\ u^2_0 - u^3_1 = 0 \,, \\ u^3_0 - F(u^1, u^3)\, u^2_1 = 0 \,. \end{cases} \qquad (3.3.1)$$

$$\frac{\partial u^a}{\partial x_\mu} \,,\; a = \overline{1,\,3} \,;\; \mu = 0,\, 1;\; F(u^1,\, u^3) = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial u^1}}{\dfrac{\partial S}{\partial u^3}} \,.$$

$(u^1)^{-1} = \rho$ – плотность, u^2 – скорость распространен вление газа.

кая и квазилокальная симметрия уравнений (3.3.1) и . В настоящем параграфе предложен метод исследования нелокаль- й симметрии и построения нелокальных анзацев, редуцирующих урав- ия (3.3.1) к ОДУ.

Для исследования нелокальной симметрии системы (3.3.1) посту- ледующим образом. Во-первых, с помощью нелокальной подстановки

$$u^1 = w_{11},\; u^2 = w_{01},\; u^3 = w_{00} \,, \qquad (3.3.2)$$

$(x_0,\, x_1)$ – новая неизвестная скалярная функция, прив одному уравнению третьего порядка относительно

$$w_{000} - F(w_{11},\, w_{00})\, w_{110} = 0. \qquad (3.3.3)$$

ировав уравнение (3.3.3), находим

$$w_{00} = R(x_1,\, w_{11}) \,, \qquad (3.3.4)$$

$R(x_1,\; w_{11})$ – произвольная гладкая функция, выражающа деленным образом через функцию F. Во-вторых, продифферецируем равнение (3.3.4) дважды по x_1

$$w_{1100} = \partial_{11}\Big[R(x_1,\, w_{11})\Big] \qquad (3.3.5)$$

одной нелокальной подстановкой

$$W_{11} = v$$

сведем его к нелинейному волновому уравнению относи

$v = v(x_0, x_1)$

$$v_{00} = \partial_{11}\left[R(x_1, v)\right]. \qquad (3.3.7)$$

В–третьих, используя лиевскую или условную симметрию уравнения (3.3.7), строим локальные анзацы этого уравнения. В–четвертых, возвращаясь по формулам (3.3.6), (3.3.2) к функциям $(u^1, u^2, u^3$ ходим нелокальные анзацы для уравнений (3.3.1).

Итак, если уравнение (3.3.7) обладает локальной сим

а симметрия будет, вообще говоря, нелокальной для их

(3.3.1).

В случае, когда $R = R(v)$, лиевская симмет

(3.3.7) изучена в[134], а условная – в §2.8. Исполь

таты и указанный выше алгоритм, для некоторых видов фун

$u^3)$ получили следующие нелокальные анзацы:

I. $F(u^1, u^3) = u^1$.

1.
$$\left|\begin{array}{l} u^1 = \varphi^1(\omega)\ , \\ u^2 = a\varphi^1(\omega) + \varphi^2(x_0)\ , \\ u^3 = a^2\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)\ , \\ \omega = x_1 + ax_0\ , \quad a = \mathrm{const}\ ; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} u^1 = \varphi^1(\omega)\ , \\ u^2 = \varphi^1(\omega) - \omega\varphi^1(\omega) + \varphi^2(x_0)\ , \\ u^3 = 2\varphi^1(\omega) - 2\omega\varphi^1(\omega) + \omega^2\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi \\ \omega = x_1x_0^{-1}\ ; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} u^1 = x_1^2\varphi^1(x_0)\ , \\ u^2 = \dfrac{1}{3}x_1^3\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0)\ , \\ u^3 = \dfrac{1}{12}\ x_1^4\varphi^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)\ ; \end{array}\right.$$

$$u^1 = x_1^{\frac{1}{2}}\varphi^1(x_0) ,$$

$$u^2 = \frac{2}{3}x_1^{\frac{3}{2}}\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0) ,$$

$$u^3 = \frac{4}{15} x_1^{\frac{5}{2}}\ddot{\varphi}^1(x_0) + x_1\dot{\varphi}^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ;$$

$$u^1 = x_0x_1 + \varphi^1(x_0) ,$$

$$u^2 = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1\dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0) ,$$

$$u^3 = \frac{1}{2}x_1^2\ddot{\varphi}^1(x_0) + x_1\dot{\varphi}^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ;$$

$$= x_1^2x_0^{-2} + x_1^{\frac{1}{2}}\varphi^1(x_0) ,$$

$$= -\frac{2}{3}x_1^3x_0^{-3} + \frac{2}{3}x_1^{\frac{3}{2}}\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0) ,$$

$$u = \frac{1}{2}x_1^4x_0^{-4} + \frac{4}{15}x_1^{\frac{5}{2}}\ddot{\varphi}^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ;$$

$$u^1 = \varphi^1(\omega) + 4x_0^2 ,$$

$$u^2 = 2x_0\varphi^1(\omega) + \varphi^2(x_0) + 8x_0x_1 ,$$

$$u^3 = 4x_0^2\varphi^1(\omega) + 2\varphi^1(\omega) + 4x_1^2 + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$\omega = x_1 + x_0^2 ;$$

$$u^1 = x_0\varphi^1(\omega) + 9x_0^4 ,$$

$$u^2 = \varphi^1(\omega) + 3x_0^3\varphi^1(\omega) + 36x_0^3x_1 + \varphi^2(x_0) ,$$

$$= 9x_0^5\varphi^1(\omega) + 12x_0^2\varphi^1(\omega) + 54x_0^2x_1^2 + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$$

$$x_1 + x_0^3 ;$$

$$= x_0^2\varphi^1(\omega) + (x_1x_0^{-1} + 6x_0^4)^2 ,$$

$$=\varphi^1(\omega)+(x_0x_1+6x_0^6)\varphi^1(\omega)- \frac{2}{3}x_1^3x_0^{-3}+288x_1x_0^7+18x_1^2x_0^2+\varphi^2(x_0),$$

$$u = (x_1 + 6x_0^5)^2\varphi^1(\omega) + 30x_0^4\varphi^1(\omega) + \frac{1}{2}x_1^4x_0^{-4}+ 1008x_0^6x_1^2+$$

$$+ 12\ x_1^3x_0 + x_1\dot{\varphi}^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$\omega = x_0x_1 + x_0^6 ;$$

11. $F(u^1, u^3) = (u^1)^k$, k – произвольная постоянная.

$$\begin{cases} u^1 = x_1^m \varphi^1(x_0), \quad m = \text{const}, \\ u^2 = \dfrac{x_1^{m+1}}{m+1} \dot\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = \dfrac{x_1^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \ddot\varphi^1(x_0) + x_1 \dot\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0); \end{cases}$$

III. $F(u^1, u^2) = (u^1)^{-2}$.

11. $$\begin{cases} u^1 = x_1^{-2} \varphi^1(x_0), \\ u^2 = -x_1^{-1} \dot\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = -\ln x_1 \ddot\varphi^1(x_0) + x_1 \dot\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0); \end{cases}$$

1У. $F(u^1, u^2) = (u^1)^{-\frac{3}{2}}$.

$$\begin{cases} u^1 = x_1^{-2} \varphi^1(x_0), \\ u^2 = -x_1^{-1} \dot\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = -\ln x_1 \ddot\varphi^1(x_0) + x_1 \dot\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0); \end{cases}$$

V. $F(u^1, u^3) = (u^1)^{-1}$.

13. $$\begin{cases} u^1 = x_1^{-1} \varphi^1(x_0), \\ u^2 = \ln x_1 \dot\varphi^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = x_1(\ln x_1 - 1) \ddot\varphi^1(x_0) + x_1 \dot\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) \end{cases}$$

Проанализировав структуру анзацев 1.– 13., мы приходим к вы ду, что все они являются частными случаями более общего анза

$$U = A(x)\ddot\Phi(\omega) + B(x)\Phi(\omega) + C(x)\Phi(\omega) + D(x), \qquad (3.3$$

$$U = \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \dot\varphi^1 \\ \dot\varphi^2 \\ \dot\varphi^3 \end{bmatrix}, \quad \ddot\Phi = \begin{bmatrix} \ddot\varphi^1 \\ \ddot\varphi^2 \\ \ddot\varphi^3 \end{bmatrix}$$

$= \varphi^a(\omega)$ – новые неизвестные функции переменной ω.

$C(x)$, $D(x)$ – заданные переменные матрицы, соответ

ностей, $\omega = \omega(x)$ – известная функция.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3.1. Анзац (3.3.8) является нелокальным обоб нием локальных анзацев (1.6.2), (1.7.2), (1.8.3), полученны й симметрии соответствующих ДУ. Его можно п

не только уравнений (3.3.1), а и других ДУ и по

ые результаты.

вляя анзацы 1. – 13. в уравнение (3.3.1), получим

нные уравнения для определения функции Ф:

$$\left|\begin{array}{l} a\dot{\varphi}^{1} - a\varphi^{1}\dot{\varphi}^{1} + \lambda_1\omega + \lambda_2 = 0\ , \\ \varphi^{2} = \lambda_1\ , \\ \varphi^{3} = a\lambda_1 x_0 + \lambda_2\ ; \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} (\varphi^{1} + \omega^{2})\ \ddot{\varphi}^{1} + \lambda_1 + \lambda_2\omega^{-1} = 0\ , \\ \varphi^{2} - \lambda_1 x_0^{-2}\ , \\ = \lambda_2 x_0^{-1}\ ; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 24\ (\varphi^{1})^{2} + \lambda_1\ , \\ 0\ , \\ = 0\ ; \end{array} \qquad 4. \quad \left\{\begin{array}{l} \varphi^{1} = 0\ , \\ \ddot{\varphi}^{2} = \varphi^{1}\ddot{\varphi}^{1}\ , \\ \varphi^{3} = 0\ ; \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l} \varphi^{1} = 2x_0\ , \\ \varphi^{2} = x_0\varphi^{1} + \varphi^{1}\ , \\ \varphi^{3} = \varphi^{1}\varphi^{1}\ ; \end{array} \qquad 6. \quad \left\{\begin{array}{l} 4x_0^{3}\dddot{\varphi}^{1} - 15x_0\dot{\varphi}^{1} + 30\varphi^{1} = 0\ , \\ \ddot{\varphi}^{2} = \varphi^{1}\dot{\varphi}^{1}\ , \\ \dot{\varphi}^{3} = 0\ ; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \varphi^{1}(\varphi^{1} - 2) + 16\omega + \lambda_1 = 0\ , \\ \ddot{\varphi}^{2} + 32x_0^{3} = 0\ , \\ \varphi^{3} + 2\lambda_1 x_0 = 0\ ; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} (\varphi^{1})^{2} - 72\varphi^{1} - 32\omega^{2} = 0\ , \\ \varphi^{2} = 540x_0^{4}\ , \\ = 756\ x_0^{7}\ ; \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l})^{2} = 60\varphi^{1} + 1800\omega^{2} + \lambda_1\ , \\ = 24552\ x_0^{10}\ , \\ = 24768\ x_0^{15} + 2\lambda_1 x_0^{3}\ ; \end{array}$$

$$\frac{1}{k+1},\ k \neq -1. \qquad 10б. \quad m = \frac{2}{k}\ ,\ k \neq -1;\ -2.$$

$$\left[\begin{array}{l} \varphi^{1} = 0\ , \\ \varphi^{2} = (\varphi^{1})^{k}\dot{\varphi}^{1}\ , \\ \varphi^{3} = 0\ ; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} k^{2}\dddot{\varphi}^{1} = 2(k + 1)(k + 2)(\varphi^{1})^{k}\varphi^{1}, \\ \ddot{\varphi}^{2} = 0\ , \\ \dot{\varphi}^{3} = 0\ ; \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0 , \\ \ddot{\varphi}^2 = 0 , \\ \varphi^3 = (\varphi^1)^{-1}\dot{\varphi}^1 ; \end{cases} \qquad 12. \begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0 , \\ \ddot{\varphi}^2 = (\varphi^1)^{-3/2}\varphi^1 \\ \dot{\varphi}^3 = 0 ; \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} \dddot{\varphi}^1 = 0 , \\ \ddot{\varphi}^2 = (\varphi^1)^{-2}\varphi^1 , \\ \varphi^3 = 0 . \end{cases}$$

Здесь λ_1 и λ_2 – произвольные постоянные.

Большинство из приведенных редуцированны уравнений можно проинтегрировать. Тогда, подставляя найденные функции $\varphi^A(\omega)$ в соответствующие анзацы, найдем решения исходной системы ура (3.3.1). Например, при $F(u^1, u^3) = u^1$ имеем

$$\begin{cases} u^1 = x_1^2 x_0^{-2} , \\ u^2 = -\frac{2}{3} x_1^3 x_0^{-3} + \lambda_1 x_0 + \lambda_2 , \\ u^3 = \frac{1}{2} x_1^4 x_0^{-4} + \lambda_1 x_1 = \lambda_3 , \end{cases}$$

при $F(u^1, u^3) = (u^1)^2$ одно из решений системы (

следующим образом

$$\begin{cases} u^1 = x_1 x_0^{-1} + \lambda_1 x_0^2 + \lambda_2 x_0^2 \ln x_0 , \\ u^2 = -\frac{1}{2} x_1^2 x_0^{-2} - x_1 \left[2\lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_0 \left(2\ln x_0 + 1\right)\right] + \lambda_3 x_0 + \\ \quad + \lambda_4 + \frac{1}{4} x_0^4 \left\{\left[\lambda_1 + \lambda_2 \left(\ln x_0 - \frac{1}{4}\right)\right]^2 + \frac{\lambda_2^2}{16}\right\} , \\ u^3 = \frac{1}{3} x_1^3 x_0^{-3} + \frac{1}{2} x_1^2 \left[2\lambda_1 + \lambda_2 \left(2\ln x_0 + 3\right)\right] + x_0^0 \left(\lambda_1 + \right. \\ \quad \left. + \lambda_2 \ln x_0\right)^3 + x_1 \left[x_0^3 \left(\lambda_1 + \lambda_2 \ln x_0\right)^2 + \lambda_5\right] . \end{cases}$$

истему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} u_0 = f(v)\, u_{11} , \\ v_0 = u_{11} , \end{cases} \qquad (3.4$$

$v = v(x)$, $x = (x_0, x_1) \in R^2$, $v_0 = \dfrac{\partial v}{\partial x_0}$, $u_0 = $

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, которая часто встречается в теории тепломассопере

при описании процессов несжимаемой жидкости. Нелокальная замена

$$\begin{cases} u = w_0 , \\ v = w_{11} \end{cases} \qquad (3.4.2)$$

истему (3.4.1) к одному уравнению

$$w_{00} = f(w_{11})\, w_{110} . \qquad (3.4.3)$$

вав (3.4.3) по x_0, имеем

$$w_0 = F(w_{11}) , \qquad (3.4.4)$$

вообразная функции f.

ифференцировав (3.4.4) по x_1, получим

$$w_{011} = \partial_1 \left[f(w_{11})\, w_{111} \right] . \qquad (3.4.5)$$

мены

$$w_{11} = z \qquad (3.4.6)$$

ходим к уравнению

$$z_0 = \partial_1 \left[f(z)\, z_1 \right] . \qquad (3.4.7)$$

образом, система уравнений (3.4.1) свелась к нелинейному нию диффузии (3.4.7)

кая симметрия уравнения (3.4.7) исчерпывающе изучена ковым [48], а условная симметрия (3.4.7) исследован оящем параграфе приведены лиевские анзацы, редуци .4.7) к обыкновенным дифференциальным уравне лиевские и некоторые нелиевские анзацы, пос .2) и (3.4.6), описаны нелокальные анзацы, реду у (3.4.1) к системе ОДУ. Построены семейства точных р системы (3.4.1).

Используя лиевскую симметрию, получены следующие неэквив ные анзацы для уравнения (3.4.7):

A. $f(z)$ – произвольная гладкая функция:

$$z = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_1 x_0^{-\frac{1}{2}}$$

$$z = \varphi(\omega), \qquad \omega = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 .$$

$f(z) = e^z$:

$$z = \varphi(\omega) + \left[2 + \frac{1}{\lambda}\right] \ln x_1 , \quad \omega = x_1 x_0^{\lambda} ;$$

$$z = \varphi(\omega) + \lambda^{-1} x_1 . \qquad \omega = x_1 + \lambda \ln x_0 ;$$

$$z = \varphi(\omega) - \ln x_0 , \qquad \omega = x_1 ;$$

$$z = \varphi(\omega) + 2 \ln x_1 , \qquad \omega = x_1 e^{o} ;$$

$$z = \varphi(\omega) \cdot \ln x_1 , \qquad \omega = x_0 .$$

C. $f(z) = z^k$, k – произвольная постоянная, отличная от нуля:

$$z = \varphi(\omega) x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)} , \qquad \omega = x_1 x_0^{\lambda} ; \qquad (3.4$$

$$z = \varphi(\omega) x_0^{-\frac{1}{k}} , \qquad \omega = x_1 + \lambda_1 \ln x_0 ;$$

$$z = \varphi(\omega) e^{\frac{2\lambda}{k} x_0} , \qquad \omega = x_1 e^{\lambda x_0} ;$$

$$z = \varphi(\omega) x_1^{\frac{2}{k}} , \qquad \omega = x_0 .$$

D. $f(z) = z^{-\frac{4}{3}}$.

$$z = \varphi(\omega) \left[x_1^2 + \lambda_1\right]^{-\frac{3}{2}} , \qquad \omega = x_0 ; \qquad (3.4.$$

$$z = \varphi(\omega) x_1^{-\frac{3}{2}} . \qquad \omega = x_0 ;$$

$$z = \varphi(\omega) \left[x_1^2 + \alpha^2\right]^{-\frac{3}{2}} , \qquad \omega = x_0 + \lambda \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\alpha} ;$$

$$z = \varphi(\omega) \left[x_1^2 - \alpha^2\right]^{-\frac{3}{2}} , \qquad \omega = x_0 + \lambda \operatorname{Arth} \frac{x_1}{\alpha} ;$$

$$z = \varphi(\omega) x_1^{-3} , \qquad \omega = \lambda x_0 + x_1^{-1} ;$$

$$z = \varphi(\omega) e^{\frac{3}{2}\lambda x_0} , \qquad \omega = x_1 e^{\lambda x_0} ;$$

$$= \varphi(\omega) x_0^{\frac{3}{4}} \left[x_1^2 + \alpha^2\right]^{-\frac{3}{2}}, \qquad \omega = x_0 e^{\lambda \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\alpha}};$$

$$z = \varphi(\omega) x_0^{\frac{3}{4}} \left[x_1^2 - \alpha^2\right]^{-\frac{3}{2}}, \qquad \omega = x_0 e^{\lambda \operatorname{arctg} \frac{x_1}{\alpha}};$$

$$\varphi(\omega) x_0^{\frac{3}{4}} x_1^{-3}, \qquad \omega = \lambda \ln x_0 + x_1^{-1};$$

$$^{\frac{3}{2}(\lambda + \frac{1}{2})}, \qquad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$$

λ_1 – произвольные постоянные, $\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

анзацев (3.4.8) – (3.4.11) посредством преобр

.4.2) преобразуются в нелокальные анзацы для си

– произвольная гладкая функция:

$$= \varphi^1(\omega) - \frac{\omega}{2} \dot{\varphi}^1(\omega) + x_1 \varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$$

$$v = \varphi^1(\omega), \qquad \omega = x_1 x_0^{-\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \varphi^1(\omega) + x_1 \varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$$

$$\varphi^1(\omega), \qquad \omega = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1;$$

$$\varphi^1(\omega) x_1^2 + x_1 \varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$$

$$x_0^{-2\lambda-1} \varphi^1(\omega) + \lambda x_1 x_0^{-\lambda-1} \dot{\varphi}^1(\omega) + \varphi^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0),$$

$$\left[2 + \lambda^{-1}\right] \ln x_1 + \dot{\varphi}^1(\omega), \qquad \omega = x_1 x_0^{\lambda};$$

$$u = \lambda \varphi^1(\omega) x_0^{-1} + \varphi^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0),$$

$$v = \frac{x_1}{\lambda} + \dot{\varphi}^1(\omega), \qquad \omega = x_1 + \lambda \ln x_0;$$

$$- \frac{1}{2x_0} x_1^2 + \varphi^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0),$$

$$\ln x_0 + \varphi^1(x_1);$$

7) $u = -2\lambda e^{-2\lambda x_0}\varphi^1(\omega) + \lambda x_1 e^{-\lambda x_0}\dot{\varphi}^1(\omega) + \varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0)$,

$v = 2\ln x_1 + \dot{\varphi}^1(\omega)$, $\omega = x_1 e^{\lambda x_0}$;

8) $u = \frac{x_1^2}{2}\dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0)$,

$v = \ln x_1 + \varphi^1(x_0)$.

$f = v^k$, k – произвольная постоянная ($k \neq 0$):

$u = \left[-\frac{1}{k}\left[2\lambda + 1\right] - 2\lambda\right] x_0^{-(2\lambda+1)(\frac{1}{k}+1)}\varphi^1(\omega$ +

$+ x_1\lambda x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)-\lambda-1}\dot{\varphi}^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)$

$v = x_0^{-\frac{1}{k}(2\lambda+1)}\ddot{\varphi}^1(\omega)$, $\omega = x_1 x_0^{\lambda}$;

10) $u = x_0^{-\frac{1}{k}-1}\left[-\frac{1}{k}\varphi^1(\omega) + \lambda\dot{\varphi}^1(\omega)\right] + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)$,

$v = x_0^{-\frac{1}{k}}\ddot{\varphi}^1(\omega)$, $\omega = x_1 + \lambda\ln x_0$;

11) $u = -\frac{1}{k}x_0^{-\frac{1}{k}-1}\varphi^1(x_1) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)$,

$v = x_0^{-\frac{1}{k}}\ddot{\varphi}^1(x_1)$;

12) $u = -2\lambda\left[\frac{1}{k} - 1\right]e^{2\lambda(\frac{1}{k}+1)x_0}\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda x_1 e^{-\lambda(\frac{2}{k}+1)x_0}\varphi^1(\omega$

$v = e^{-\frac{2\lambda}{k}x_0}\ddot{\varphi}^1(\omega)$, $\omega = x_1 e^{\lambda x_0}$;

13) $u = -\varphi^1(x_0)\ln x_1 + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)$,

$v = \varphi^1(x_0)\, x_1^{-2}$, $k = -1$;

14) $u = \varphi^1(x_0)\left[x_1\ln x_1 - x_1\right] + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)$,

$v = \varphi^1(x_0)\, x_1^{-1}$, $k = -2$;

15) $u = \varphi^1(x_0)\frac{k^2}{(2+k)(2+2k)}x_1^{\frac{2+2k}{k}} + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)$,

$v = \varphi^1(x\ )\, x^{\frac{2}{k}}$, $k \neq 0; -1; -2$.

$$= v^{\frac{\cdot}{3}} :$$

$$u = \frac{1}{\lambda^2} \left(x_1^2 + \lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} \varphi^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$= \left(x_1^2 + \lambda^2\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(x_0) ;$$

$$- \frac{1}{\ } \left(x_1^2 - \lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} \varphi^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$\lambda^2\right)^{-\frac{3}{2}} \varphi^1(x_0) ;$$

$$- \varphi^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$x_0) ;$$

$$-4x_1^2 \varphi^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$v = x_1^{\frac{3}{2}} \varphi^1(x_0) ;$$

$$u = \frac{x_1}{\ } \varphi^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$= \varphi^1(x_0) ;$$

$$\varphi^1(x_0) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$(\omega) ; \qquad \omega = \lambda x_0 + \frac{1}{x_1} ;$$

$$\frac{\lambda}{\ } e^{\frac{\lambda}{2}x_0} \varphi^1(\omega) + \lambda x_1 e^{\frac{\lambda}{2}x_0} \varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$x_0 \varphi^1(\omega) , \qquad \omega = x_1 e^{\lambda x_0} ;$$

$$= x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$v = \varphi^1(x_1) ;$$

$$u = x_1 x_0^{-\frac{1}{4}} \left[\frac{3}{4} \varphi^1(\omega) + \lambda\varphi^1(\omega) \right] + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0) ,$$

$$= x^{\frac{3}{4}} x_1^{-3} \varphi^1(\omega), \qquad \omega = \lambda \ln x_0 + \frac{1}{x_1} ;$$

25) $u = \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{3}{4}\right)x_0^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega) + \lambda x_1 x_0^{\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}}\dot{\varphi}^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0$

$v = x_0^{\frac{3}{2}(\lambda+\frac{1}{2})}\ddot{\varphi}^1(\omega), \qquad \omega = x_1 x_0^{\lambda}$;

26) $u = x_0^{-\frac{1}{4}}\left[\frac{3}{4}\varphi^1(\omega) + \lambda\dot{\varphi}^1(\omega)\right] + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)$,

$v = x_0^{\frac{3}{4}}\ddot{\varphi}^1(\omega), \qquad \omega = \lambda \ln x_0 + x_1$;

27) $u = \frac{3}{4}x_0^{-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega) + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0)$,

$v = x_0^{\frac{3}{4}}\ddot{\varphi}^1(x_1)$,

$\lambda_0 = \mathrm{const},\ \lambda_1 = \mathrm{const},\ \lambda = \mathrm{const} \neq 0;\ \varphi^1,\ \varphi^2,\ \varphi^3$ гладкие функции; $\dot{\varphi}^1(\omega) = \frac{d\varphi^1}{d\omega}$, $\ddot{\varphi}^1(\omega) = \frac{d^2\varphi^1}{d\omega^2}$.

Следует отметить, что как и в предыдущем парагра

– 27) имеют структуру (3.3.8). Эти анзацы редуцируют (3.4.1)

дующим системам ОДУ:

1) $\frac{1}{4}\omega^2\dddot{\varphi}^1(\omega) - \frac{1}{4}\omega\dot{\varphi}^1(\omega) + \frac{1}{2}f\left[\ddot{\varphi}^1(\omega)\right]\omega\dddot{\varphi}^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,$

$\varphi^2(x_0) = c_1 x_0^{-\frac{3}{2}}$,

$\varphi^3(x_0) = c_2 x_0^{-1}$;

$\frac{\lambda_0^2}{\lambda_1^2}\varphi^1(\omega) - f\left[\dot{\varphi}(\omega)\right]\lambda_0\ddot{\varphi}^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,$

$\varphi^2(x_0) = \lambda_1 c_1,$

$\varphi^3(x_0) = \lambda_0 c_1 x_0 + c_2$;

3) $\varphi^1(x_0) = 0$,

$\varphi^2(x_0) = 0,$

$\varphi^3(x_0) = f\left[\varphi^1(x_0)\right]\dot{\varphi}^1(x_0)$;

4) $2\lambda(2\lambda + 1)\varphi^1(\omega) - (3\lambda^2 + \lambda)\omega\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda^2\omega^2\ddot{\varphi}^1(\omega) -$

$- \lambda\omega^{3+\frac{1}{\lambda}}e^{\ddot{\varphi}^1(\omega)}\dddot{\varphi}^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0$,

$= c_1 x_o^{-\lambda-2}$,

$= c_2 x_o^{-2\lambda-2}$;

$\varphi^1(\omega) - \lambda\varphi^1(\omega) - \lambda e^{\dot\varphi^1(\omega)+\frac{\omega}{\lambda}} \ddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,$

$\varphi(x_o) = c_1 x_o^{-2}$,

$\varphi^3(x_o) = c_2 x_o^{-2} + \lambda \ln x_o \, \dot\varphi^2(x_o)$;

$- + e^{\varphi^1(x_1)} + c_1 x_1 + c_2 = 0,$

$c_1 x_o^{2}$,

$c_2 x_o^{-2}$;

$3\lambda^2\omega\varphi^1(\omega) + \lambda^2\varphi^1(\omega) - \lambda e^{\ddot\varphi^1(\omega)}\dddot\varphi^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0$

$c_1 e^{\lambda x_o}$,

$c_2 e^{-2\lambda x_o}$;

$) = 0$,

$\varphi(x_o) = e^{\varphi^1(x_o)}\dot\varphi^1(x_o)$,

$x_o) = 0$;

$\frac{1}{k}(2\lambda+1)-2\lambda\Bigr]\Bigl[-\frac{1}{k}(2\lambda+1)-2\lambda-1\Bigr]\varphi^1(\omega) - \Bigl[\frac{2}{k}(2\lambda+1)+3\lambda+1\Bigr]\omega\dot\varphi^1(\omega) +$

$) - [\dot\varphi^1(\omega)]^{k}\Bigl[-\frac{1}{k}(2\lambda+1)\ddot\varphi^1(\omega) + \lambda\omega\dddot\varphi^1(\omega)\Bigr] + c_1\omega + c_2 = 0,$

$x_o^{\frac{1}{k}(2\lambda+1)-\lambda-2}$,

$x_o^{\frac{1}{k}(2\lambda+1)-2\lambda-2}$;

$+ 1\Bigr]\varphi^1(\omega) - \lambda\Bigl(\frac{2}{k} + 1\Bigr]\dot\varphi^1(\omega) + \lambda^2\ddot\varphi^1(\omega) - [\dot\varphi^1(\omega)]^{k} \times$

$\Bigl(-\frac{}{k}\ddot\varphi^1(\omega) + \lambda\dddot\varphi^1(\omega)\Bigr] + c_1\omega + c_2 = 0$,

$\ln x_o \; \varphi^2(x_o) = -c_1$,

$\varphi^1(x_o) = c_2$;

$\Bigl(\frac{1}{k} + 1\Bigr]\varphi^1(\omega) + [\ddot\varphi^1(x_1)]^{k+1} + c_1\omega + c_2 = 0$,

$$x_0^{\frac{1}{k}+2}\varphi^{2}(x_0) = c_1 ,$$

$$x_0^{\frac{1}{k}+2}\varphi^{3}(x_0) = c_2 ;$$

12) $$4\lambda^{2}\left[\frac{1}{k} + 1\right]^{2}\varphi^{1}(\omega) - \left[\frac{4}{k} + 3\right]\lambda^{2}\omega\varphi^{1}(\omega) + \lambda^{2}\dot{\varphi}^{1}(\omega) -$$

$$- \left[\ddot{\varphi}^{1}(\omega)\right]^{k}\left[- \frac{2\lambda}{k}\ddot{\varphi}^{1}(\omega) + \lambda\dddot{\varphi}^{1}(\omega)\right] + c_1\omega + c_2 = 0 ,$$

$$\varphi^{2}(x_0) = c_1 e^{-\lambda(\frac{2}{k}+1)x_0} ,$$

$$\varphi^{3}(x_0) = c_2 e^{-2\lambda(\frac{1}{k}+1)x_0} ;$$

$$\varphi^{1}(x_0) = 0 ,$$

$$\varphi^{2}(x_0) = 0,$$

$$\varphi^{3}(x_0) = \left(\varphi^{1}(x_0)\right)^{-2}\dot{\varphi}^{1}(x_0) ;$$

14) $$\varphi^{1}(x_0) = 0 ,$$

$$\varphi^{2}(x_0) = \left(\varphi^{1}(x_0)\right)^{-2}\dot{\varphi}^{1}(x_0) ,$$

$$\varphi^{3}(x_0) = 0 ;$$

15) $$\ddot{\varphi}^{1}(x_0)\frac{k^{2}}{(2+k)(2+2k)} = \left(\varphi^{1}(x_0)\right)^{k}\dot{\varphi}^{1}(x_0) ,$$

$$\varphi^{2}(x_0) = 0 ,$$

$$\varphi^{3}(x_0) = 0 ;$$

16) $$\frac{1}{\lambda^{2}}\varphi^{1}(x_0) = \left(\varphi^{1}(x_0)\right)^{-\frac{4}{3}}\dot{\varphi}^{1}(x_0) ,$$

$$\varphi^{2}(x_0) = 0 ,$$

$$\varphi^{3}(x_0) = 0 ;$$

17) $$- \frac{1}{\lambda^{2}}\overline{\varphi}^{1}(x_0) = \left(\varphi^{1}(x_0)\right)^{-\frac{4}{3}}\dot{\varphi}^{1}(x_0) ,$$

$$\varphi^{2}(x_0) = 0 ,$$

$$\varphi^{3}(x_0) = 0 ;$$

18) $$\varphi^{1}(x\ ) = 0 ,$$

$$\varphi^{2}(x_0) = \left(\varphi^{1}(x_0)\right)^{-\frac{4}{3}}\dot{\varphi}^{1}(x_0) ,$$

;

$$= \left(\varphi^1(x_o)\right)^{-\frac{4}{3}} \varphi^1(x_o) ,$$

$$= 0 ,$$

$$x_o = 0 ;$$

$$\varphi^1(x_o) = 2\left(\varphi^1(x_o)\right)^{-\frac{4}{3}} \dot{\varphi}^1(x_o) .$$

$$\varphi^2(x_o) = 0 ,$$

$$(x_o) = 0 ;$$

$$-\lambda\left(\varphi^1(x_o)\right)^{-\frac{4}{3}} \ddot{\varphi}^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0 ,$$

$$-\lambda\dot{\varphi}^3(x_o)x_o + c_2 ,$$

;

$$\left(\varphi^1(x_o)\right)^{-\frac{4}{3}} - \frac{3}{2}\lambda\left(\ddot{\varphi}^1(x_o)\right)^{-\frac{1}{3}} - \lambda^2\omega^2\ddot{\varphi}^1(\omega) - \varphi^1(\omega) - c_1\omega - c_2 = 0 .$$

$$c_1 e^{\frac{\lambda}{2}x_o} ,$$

$$= c_1 e^{-\frac{\lambda}{2}x_o} ;$$

$$\varphi(x_o) = 0 ,$$

$$\varphi^1(x_o) = 0 ;$$

$$\frac{3}{16}\varphi^1(\omega) + \frac{\lambda}{2}\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda\ddot{\varphi}^1(\omega) - \left[\ddot{\varphi}^1(\omega)\right]^{-\frac{4}{3}}\left[\frac{3}{4}\ddot{\varphi}^1(\omega) + \lambda\dddot{\varphi}^1(\omega)\right] + c_1\omega + c_2 = 0$$

$$= c_1 ,$$

$$-\lambda \ln x_o \, \dot{\varphi}^3(x_o)\Big] = c_2 ;$$

$$\frac{3}{4}\Big)\Big(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4}\Big)\varphi^1(\omega) + \frac{\lambda}{2}\omega\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda^2\omega^2\ddot{\varphi}^1(\omega) +$$

$$\frac{3}{4}\Big)\left(\ddot{\varphi}^1(\omega)\right)^{-\frac{1}{3}} - \lambda\omega\left(\ddot{\varphi}^1(\omega)\right)^{-\frac{4}{3}}\dddot{\varphi}^1(\omega) + c_1\omega + c_2 = 0,$$

$$= c_1 x_o^{\frac{\lambda}{2}-\frac{5}{4}} ,$$

$$\varphi(x_o) = c_2 x_o^{-\frac{\lambda}{2}-\frac{5}{4}} ;$$

$$-\frac{3}{16}\varphi^1(\omega) + \frac{\lambda}{2}\dot{\varphi}^1(\omega) + \lambda^2\ddot{\varphi}^1(\omega) - \left[\ddot{\varphi}^1(\omega)\right]^{-\frac{4}{3}}\left[\frac{3}{4}\ddot{\varphi}^1(\omega\right.$$

$$\left. + \lambda\dddot{\varphi}^1(\omega)\right] + c_1\omega + c_2 = 0 \,,$$

$$\dot{\varphi}^2(x_0) = c_1 x_0^{-\frac{5}{4}} \,,$$

$$\dot{\varphi}^3(x_0) = c_2 x_0^{-\frac{5}{4}} + \lambda \ln x_0 \, \dot{\varphi}^2(x_0) \;;$$

27) $$\left[\ddot{\varphi}^1(x_1)\right]^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}\varphi^1(x_1) + c_1 x_1 + c_2 = 0,$$

$$x_0^{\frac{5}{4}}\dot{\varphi}^2(x_0) = \frac{3}{4}c_1 \,,$$

$$x_0^{\frac{5}{4}}\,\dot{\varphi}^3(x_0) = \frac{3}{4}c_2 \;;$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Если проинтегрировать приведенные выше уравнения решения в соответствующие анзацы, то получим ре 4.1). Приведем некоторые из них:

A. $$u = \frac{c_1}{2}x_1^2 + c_3 x_1 + \int f(c_1 x_0 + c_2)\,dx_0 + c_4 \,,$$

$$v = c_1 x_0 + c_2 \;;$$

B. $$u = -\frac{1}{2x_0}x_1^2 + x_1\left(-\frac{c_1}{x_0} + c_3\right) - c_2 x_0^{1} + c_4 \,,$$

$$v = -\ln x_0 + \ln\left(-\frac{x_1^2}{2} - c_1 x_1 - c_2\right) \;;$$

$$u = \frac{x_1^2}{2}(c_1 x_0 + c_2) + x_1\left(e^{c_1 x_0 + c_2} + c_3\right) + c_4 \,,$$

$$v = \ln x_1 + c_1 x_0 + c_2 \;;$$

C. $$u = -c_1 \ln x_1 + c_3 x_1 - (c_1 x_0 + c_2)^{-1} + c_4,$$

$$v = (c_1 x_0 + c_2)x_1^{-2} \,, \quad (k = -1) \;;$$

$$u = c_1\left[x_1 \ln x_1 - x_1\right] + x_1\left[-(c_1 x_0 + c_2)^{-1} + c_3\right]$$

$$v = (c_1 x_0 + c_2)x_1^{-1}, \quad (k = -2);$$

$$u = \frac{1}{k+1}\left(-x_0\frac{(2+k)(2+2k)}{k(k+1)} + c_1\right)^{-\frac{1}{k}-1} x_1^{\frac{2+2k}{k}} + x_1 c_2$$

$$\Gamma \;{}_{0}\frac{(2+k)(2+2k)}{k(k+1)} + c_1\Big]^{-\frac{1}{k}} x_1^{\frac{2}{k}}, \quad (k \neq 0; -1; -2);$$

$$+ \lambda^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big[-\lambda^2 4x_0 + c_1\Big]^{-\frac{1}{4}} + x_1c_2 + c_3,$$

$$+ \lambda^2\Big)^{-\frac{3}{2}}\Big[-\lambda^2 4x_0 + c_1\Big]^{\frac{3}{4}};$$

$$3\Big(x_1^2 - \lambda^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(-\lambda^2 4x_0 + c_1\Big]^{-\frac{1}{4}} + x_1c_2 + c_3,$$

$$v = \Big(x_1^2 - \lambda^2\Big)^{-\frac{3}{2}}\Big(\lambda^2 4x_0 + c_1\Big]^{\frac{3}{4}};$$

$$u = \frac{c_1}{2x_1} + x_1\Big[-3(c_1x_0 + c_2)^{-\frac{1}{3}} + c_3\Big] + c_4,$$

$$= x_1^{-3}(c_1x_0 + c_2);$$

$$-3\, x_1^{\frac{1}{2}}(16x_0 + c_1)^{-\frac{1}{4}} + x_1c_2 + c_3,$$

$$(16x_0 + c_1)^{\frac{3}{4}};$$

$$x_1(-8x_0 + c_1)^{-\frac{1}{4}} + x_1c_2 + c_3,$$

$$(-8x_0 + c_1)^{\frac{3}{4}};$$

$$c_1x_1 + c_2,$$

$= \varphi^1(x_1)$, φ^1 – произвольная гладкая функция ;

$$u = 3x_0^{\frac{1}{4}}\Big[x_1^{\frac{1}{2}} - {}_{1}x_1 - c_2\Big] + x_1\Big[-3c_1x_0^{-\frac{1}{4}} + c_4\Big] + \Big[-3c_2x_0^{-\frac{1}{4}} + c_5\Big],$$

$$v = x_0^{\frac{3}{4}}(-x_1^{-\frac{3}{2}}),$$

$c = \text{const}$, $i = \overline{1, 5}$.

§2.2 для уравнения (3.4.7) приведены условно инвариантные пользуя которые, можно построить нелокальные анзацы 4.1). Приведем два таких анзаца для случая, когда

для уравнения (3.4.7)

$$\ln(\varphi(x_0) - x_1) + \ln(\varphi(x_0) + x_1) - \ln 2\lambda x_0, \qquad (3.4.12)$$

$$- 2\ln(\varphi(x_0) + x_1) - \ln(-2\lambda x_0)$$

находим анзацы для системы (3.4.1)

a) $$u = \varphi^1\left[(\varphi^1 - x_1)\mathrm{Ln}(\varphi^1 - x_1) + (\varphi^1 + x_1)\mathrm{Ln}(\varphi^1 + x_1) + \varphi^1\right] - \frac{x_1^2}{2x_0} + x_1\varphi^2(x_0) + \varphi^3(x_0),$$

$$v = \mathrm{Ln}(\varphi^1 - x_1) + \mathrm{Ln}(\varphi^1 + x_1) - \mathrm{Ln}\ 2\lambda x_0,$$

где $\varphi^1 = \varphi^1(x_0)$;

b) $$u = 2\varphi^1(\varphi^1 + x_1)\left[\mathrm{Ln}(\varphi^1 + x_1) - 1\right] - \frac{x_1^2}{2x_0} + x_1\varphi^2 + \varphi^3$$

$$v = 2\mathrm{Ln}(\varphi^1 + x_1) - \mathrm{Ln}\ (-2\lambda x_0)\ ,$$

которые редуцируют систему (3.4.1) к следующим системам ОДУ:

a) $$\dot\varphi^1 = 0,\quad \dot\varphi^2 = -\varphi^1 x_0^{-2},\quad \dot\varphi^3 = -\frac{(\varphi^1)^2}{2x_0^2}\ ;$$

b) $$\varphi^1 = 0,\quad \varphi^2 = \varphi^1 x_0^{-2},\quad \dot\varphi^3 = \frac{(\varphi^1)^2}{2x_0^2}\ .$$

Решим редуцированные системы, по формулам (3.4.13) нахо решения системы (3.4.1):

$$u = -\frac{c_1^2 + x_1^2}{2x_0} + x_1c_2 + c_3 + \frac{c_1}{x_0}x_1\ ,$$

$$v = \mathrm{Ln}\ \frac{c_1^2 - x_1^2}{2\lambda x_0}\ ;$$

b) $$u = -\frac{x_1^2}{2x_0} + \left(c_2 - \frac{c_1'}{x_0}\right)x_1 - \frac{c_1^2}{2x_0} + c_3\ .$$

$$v = 2\ \mathrm{Ln}(x_1 + c_1) - \mathrm{Ln}(-2\lambda x_0).$$

Итак, приведенные нами результаты говорят о том, что нел ные уравнения обладают скрытыми нелокальными симметриями, кот к настоящему времени совершенно не изучены и не использован интегрирования.

НЕГРУППОВАЯ СИММЕТРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

К настоящему времени детально исследована симметрия линейных и йных волновых уравнений относительно непрерывных групповых их) преобразований (см.[124] и цитированную там литературу).

казанные выше преобразования далеко не исчерпывают всевоз- разования инвариантности дифференциальных уравнений. преобразования С–, Р–, Т– инвариантности линей ний квантовой механики, найденные в [92], ными. В [80] отмечено, что волновое уравнение

$$\Box u + \lambda\left(x_\mu x^\nu\right)^{-1} u = 0 \qquad (3.5.1)$$

относительно преобразования инверсии

$$x_\mu = x_\mu\left(x_\mu x^\nu\right)^{-1},\ u \longrightarrow u' = u x_\mu x^\nu;\ \mu,\ \nu = \overline{0,\ 3}\ , \qquad (3.5.2)$$

азующих группу. Преобразования (3.5.2), как и лиевские, дают ность размножать решения уравнения (3.5.1). Это свойство важно для нелинейных уравнений, для которых не имеет места линейной суперпозиции. Следует отметить, что негрупповая и симметрия нелинейных дифференциальных уравнений мало

щем параграфе исследованы негрупповые и дис нений Монжа–Ампера, эйконала, Борна–Инфельда, Лиу на–Якоби, нелинейных уравнений теплопроводности, бера и Шредингера. Найденные преобразования исполь размножения решений данных уравнений.

Рассмотрим сначала одномерное уравнение Монжа–Ампера

$$u_{00}u_{11} - u_{01}^2 = 0\ , \qquad (3.5.3)$$

$= u(x),\ x = (x_0,\ x_1),\ u_{\mu\nu} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\ ;\ \mu,\ \nu = 0,\ 1.$

3.5.1. Уравнение (3.5.3) инвариантно относительно йных преобразований вида

$$x_0 \longrightarrow x_0' = \frac{\beta_0 x_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 u + \beta_3}{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u + \alpha_3},$$

$$x_1 \longrightarrow x_1' = \frac{\gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 u + \gamma_3}{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u + \alpha_3}, \qquad (3.5.4)$$

$$u \longrightarrow u' = \frac{\delta_0 x_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 u + \delta_3}{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 u + \alpha_3},$$

где $\alpha = (\alpha_0, \alpha)$, $\beta = (\beta_0, \beta)$, $\gamma = (\gamma_0, \gamma)$, $\delta = (\delta_0,$

ьные постоянные линейнонезависимые векторы.

Доказательство теоремы сводится к проверке

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial x_1}\right)^2 = \lambda\left[\frac{\partial^2 u'}{(\partial x_0')^2}\,\frac{\partial^2 u'}{(\partial x_1')^2} - \left(\right.\right.$$

где $\lambda = \lambda(x_0', x_1', u', \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ – некоторая функция.

Очевидно, что преобразования (3.5.4) содержат в
подмножества лиевские преобразования (см. [99]). Кроме того,
содержат преобразования $R(x_0, x_1, u)$:

R_0: $x_0 \longrightarrow x_0' = x_0$, $x_1 \longrightarrow x_1' = x_1$, $u \longrightarrow u' = u$;

R_1: $x_0 \longrightarrow x_0' = -x_0$, $x_1 \longrightarrow x_1' = x_1$, $u \longrightarrow u' = u$;

R_2: $x_0 \longrightarrow x_0' = x_0$, $x_1 \longrightarrow x_1' = -x_1$, $u \longrightarrow u' = u$

R_3: $x_0 \longrightarrow x_0' = x_0$, $x_1 \longrightarrow x_1' = x_1$, $u \longrightarrow u' -$

R_4: $x_0 \longrightarrow x_0' = -x_0$, $x_1 \longrightarrow x_1' = -x_1$, $u \longrightarrow u' -$

R_5: $x_0 \longrightarrow x_0' = -x_0$, $x_1 \longrightarrow x_1' = x_1$, $u \longrightarrow u' = -$

R_6: $x_0 \longrightarrow x_0' = x_0$, $x_1 \longrightarrow x_1' = -x_1$, $u \longrightarrow u' = -u$

R_7: $x_0 \longrightarrow x_0' = -x_0$, $x_1 \longrightarrow x_1' = -x_1$, $u \longrightarrow u' = -u$;

преобразования годографа $H(x_0, x_1, u)$:

H_0: $x_0 \longrightarrow x_0' = x_0$, $x_1 \longrightarrow x_1' = x_1$, $u \longrightarrow u' = u$;

H_1: $x_0 \longrightarrow x_0' = x_1$, $x_1 \longrightarrow x_1' = x_0$, $u \longrightarrow u' = u$;

$$x_0' = u\ ,\ x_1 \longrightarrow x_1' = x_1,\ u \longrightarrow u' = x_0;$$

$$\longrightarrow x_0' = x_0,\ x_1 \longrightarrow x_1' = u\ ,\ u \longrightarrow u' = x_1;$$

$$x_0 \longrightarrow x_0' = u\ ,\ x_1 \longrightarrow x_1' = x_0,\ u \longrightarrow u' = x_1;$$

$$\longrightarrow x_0' = x_1,\ x_1 \longrightarrow x_1' = u\ ,\ u \longrightarrow u' = x_0;$$

зования инверсии:

$$' = \frac{1}{x_0},\ x_1 \longrightarrow x_1' = \frac{x_1}{x_0},\ u \longrightarrow u' = \frac{u}{x_0}; \quad (3$$

$$= \frac{x_0}{x_1}\ ,\ x_1 \longrightarrow x_1' = \frac{1}{x_1}\ ,\ u \longrightarrow u' = \frac{u}{x_1}$$

$$' = \frac{x_0}{u}\ ,\ x_1 \longrightarrow x_1' = \frac{x_1}{u}\ ,\ u \longrightarrow u' = \frac{1}{u}$$

едиться в том, что преобразования (3.5.5) и (3.5.6 дискретные группы, а преобразования (3.5.7) группу не

Все результаты, полученные выше, обобщаются на случай много-го уравнения Монжа-Ампера

$$\det \left\| u_{\mu\nu} \right\| = 0\ , \tag{3.5.8}$$

), $x = (x_0,\ x) \in R_{1+n}$, $u_{\mu\nu} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$; $\mu,\ \nu = \overline{0,\ n}$.

3.5.2. Уравнение (3.5.8) инвариантно относительн

ида

$$x_A \longrightarrow x_A' = \frac{\beta_{AB} x_B}{\alpha_c x_c}\ , \quad (3.5.9)$$

$\overline{n+1}$; $B,\ C = \overline{0,\ n+2}$; $x_{n+1} = n,\ x_{n+2} = 1$,

$\{\beta_{A0},\ \beta_{A1},\ \ldots,\ \beta_{An+2}\}$, $\alpha = \{\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n+2}\}$ – произволь-остоянные векторы, образующие базис в пространстве R_{n+3}.

Ради краткости, результаты, относящиеся к другим уравнениям, дены в виде таблицы 3.5.1, где λ, m – произвольные постоян-HR – группа, состоящая из преобразований R, H и их суперпо-, u) – произвольные гладкие функции, $i = \overline{1,\ 7}$.

ТАБЛИЦА 3.5.1.

№ п/п	Уравнение	Преобразование инвариантности
1.	$1 - u_\nu u^\nu = 0$	$x'_A = x_A (x_B x^B)^{-1}$
2.	$u_0 + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla} u)^2 = 0$	$x_0' = \frac{\sqrt{2}\, x_0}{\frac{x_0 u}{m} - \vec{x}^2}$, $\vec{x}' = \frac{\vec{x}}{\frac{x_0 u}{m}}$ $u' = \frac{\sqrt{2}\, \frac{u}{m}}{\frac{x_0 u}{m} - \vec{x}^2}$
3.	$\Box u = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}$, $n \neq 1$	$x'_\mu = x_\mu (x_\nu x^\nu)^{-1}$
4.	$u_{00} - u_{11} = \lambda \exp u$	$x'_\mu = x_\mu (x_\nu x^\nu)^{-1}$, $u' = u$ $\mu, \nu = 0, 1$
5.	$u_{00} = x_0^{-2} \Delta u + \lambda u^{-3}$	$x_0' = x_0^{-1}$, $\vec{x}' = \vec{x}$, $u' = u x_0$
6.	$u^4 u_{00} = \Delta u + \lambda u$	$x_0' = x_0^{-1}$, $\vec{x}' = \vec{x}$, $u' = u x_0^{-1}$
7.	$u_{00} = \vec{\nabla}(u^{-4} \vec{\nabla} u) + \lambda u^{-3}$	$x_0' = x_0^{-1}$, $\vec{x}' = \vec{x}$, $u' = u x_0^{-1}$
8.	$u_{00} = u^{\frac{4}{2-n}} \Delta u$, $n \neq 2$	$x_0' = x_0$, $\vec{x}' = \vec{x}(\vec{x}^2)^{-1}$, $u' = u(\vec{x}^2)^{\frac{n-2}{2}}$
9.	$i u_0 + \frac{\Delta u}{2M(u)} = 0, M = m \vert u \vert^{\frac{4}{n-2}}$	$x_0' = x_0$, $\vec{x}' = \vec{x}(\vec{x}^2)^{-1}$, $u' = u(\vec{x}^2)^{\frac{n-}{2}}$
10.	$u_0 = \vec{\nabla}\left[u^{-\frac{4}{n+2}} \vec{\nabla} u\right]$	$x_0' = x_0$, $\vec{x}' = \vec{x}(\vec{x}^2)^{-1}$, $u' = u$
11.	$1 + u_\nu u^\nu = 0$	$R(x_0, \vec{x}, u)$, $H(x_0$
12.	$u_0 + \frac{1}{2m}(\vec{\nabla} u)^2 = 0$	$R(x_0, \vec{x}, u)$, $H(x_0, u)$,
13.	$1 - u_\nu u^\nu = 0$	$R(x_0, \vec{x}, u)$, $H(\vec{x}, u)$,
14.	$(1 - u_\nu u^\nu)\Box u + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0$	$R(x_0, \vec{x}, u)$, $H(\vec{x}, u)$,
15.	$u_\nu u^\nu = F_1(x_0, u)$	$R(\vec{x})$, $H(\vec{x})$, $HR(\vec{x})$
16.	$u_0 + F_2(x_0, u)\Delta u = F_3(x_0, u)$	$R(\vec{x})$, $H(\vec{x})$, $HR(\vec{x})$
17.	$i u_0 + F_4(x_0, u)\Delta u = F_5(x_0, u)$	$R(\vec{x})$, $H(\vec{x})$, $HR(\vec{x})$
18.	$u_{00} + F_6(x_0, u)\Delta u = F_7(x_0, u)$	$R(\vec{x})$, $H(\vec{x})$, $HR(\vec{x})$

аведливости результатов, приведенных в таблице 3

едиться непосредственной проверкой. Например, при

$$x_A \longrightarrow x_A' = x_A (x_B x^B)^{-1},$$

$$1 - \frac{\partial u}{\partial x_\nu} \frac{\partial u}{\partial x^\nu} = \sigma^{-1}\left[1 - \frac{\partial u'}{\partial x_\nu'} \frac{\partial u'}{\partial (x^\nu)'}\right],$$

$$\sigma = x_A'(x^A)' - 2u'\left(x_\nu' \frac{\partial u'}{\partial x_\nu'} - u'\right).$$

образования инвариантности, полученные выше, мы применили

ния решений соответствующих уравнений. Все эти рез

в таблицу 3.5.2, где $f(x)$ – известное, а $u =$

указанных уравнений.

3.5.2.

Уравнение	Формула размножения решений
$\det\lVert u_{\mu\nu}\rVert = 0$	$\frac{\beta_{n+1B}x_B}{\alpha_C x_C} = f\left(\frac{\beta_{\mu B} x_B}{\alpha_C x_C}\right)$
$1 - u_\nu u^\nu = 0$	$\frac{u}{x_\nu x^\nu - u^2} = f\left(\frac{x}{x_\nu x^\nu - u^2}\right)$
$u_0 + \frac{1}{2m}(\vec\nabla u)^2 = 0$	$\frac{\sqrt{2}\,\frac{u}{m}}{\frac{x_0 u}{m} - \vec x^2} = f\left(\frac{\sqrt{2}\, x_0}{\frac{x_0 u}{m} - \vec x^2}, \frac{\vec x}{\frac{x_0 u}{m} - \vec x^2}\right)$
$\lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}, \; n \neq 1$	$u = (x_\nu x^\nu)^{\frac{1-n}{2}} f\left(\frac{x}{x_\mu x^\mu}\right)$
$- u_{11} = \lambda \exp u$	$u = f\left(\frac{x}{x_\mu x^\mu}\right) - 2 \ln x_\nu x^\nu$
$u^4 u_{00} = \Delta u + \lambda u$	$u = x_0 f(x_0^{-1}, \vec x)$
$u_{00} = \vec\nabla(u^{-4}\vec\nabla u) + \lambda u^{-3}$	$u = x_0 f(x_0^{-1}, \vec x)$
$u_{00} = u^{\frac{4}{2-n}} \Delta u, \; n \neq 2$	$u = (\vec x^2)^{\frac{2-n}{2}} f\left(x_0, \frac{\vec x}{\vec x^2}\right)$

9.	$iu_0 - \frac{\Delta u}{2M(u)} = 0, M = m\lvert u\rvert^{\frac{4}{n-2}}$	$u = (\vec{x}^2)^{\frac{2-n}{2}} f\left(x_0, \right.$
10.	$u_0 = \vec{\nabla}\left(u^{-\frac{4}{n+2}} \vec{\nabla} u\right)$	$u = (\vec{x}^2)^{\frac{-2-n}{2}} f\left(x_0, \frac{x}{\vec{x}^2}\right)$
11.	$u_{00} = x_0^{-2} \Delta u + \lambda u^{-3}$	$u = x_0 f(x_0^{-1}, \vec{x})$

Кроме формул, приведенных в таблице 3.5.2, справедливы формулы размножения решений при помощи преобразований из групп HR. Например,

$$u(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0, -x_1, x_2, x_3) ,$$

$$u(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0, x_2, x_1, x_3) ,$$

$$u(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(x_0, x_2, -x_1, x_3) .$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

ме результаты диссертации, которые выдвига

ссификация нелинейных волновых уравнений, инвари
ительно групп Пуанкаре;
2. симметрийный анализ нелинейного поливолнового уравнения
ительно конформной группы;
ассификация ДУ 1-го и 2-го порядка, инвариантных относи-
п Галилея;
укция и построение точных решений нелинейных ДУЧП
ев;
дование условной симметрии основных нелиней
ческой физики;
именение условной симметрии для редукции и нах
ений нелинейных ДУ;
7. построение нелокальных анзацев для уравнения теплопровод-
, уравнений газовой динамики и несжимаемой жидкости к ОДУ;
8. построение формул нелокального размножения и суперпозиции
ий линейного уравнения теплопроводности и уравнения синус

ледование симметрии некоторых нелинейных волновых у
ельно негрупповых преобразований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и методы обратной задачи
1987.— 480 с.

Амеров Т.К. Об условной инвариантности нели
плопроводности // Теоретико-алгебраический анализ у
гической физики.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1

Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Основн
антных уравнений одномерной газовой динамики.— М.—1988.—
(Препринт/ АН СССР. ИПМ им. М.В.Келдыша, 49).

4. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Редукция и точные
ния уравнения эйконала // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, №4.
— С.461— 474.

Баранник Л.Ф., Лагно В.И., Фущич В.И. Подалгебры алгебры
АР(2,3) и симметрийная редукция нелинейного уль
ого уравнения Даламбера // Укр. мат. журн.—
79—584.

Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Инварианты подгрупп о
анкаре P(1, n).— Киев, 1986.— 4с. (Препринт/Ин-т
УССР: 86.86)

7. Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Инварианты подгрупп обобщенной гр
Пуанкаре P(1,n). — Киев.— 1986.— 40 с.— (Препринт/ АН УССР. И
математики; №86.86)

8. Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Подалгебры алгебры Ли расш
уппы Пуанкаре $\tilde{P}(1,n)$.— Киев.— 1985.— 50 с.—(Препринт/
т математики; №85.90)

Барбашов Б.М., Черников Н.А. Решение и кванте
мерной модели типа Борна—Инфельда //Журн. эк
зики.— 1966.— 60, №5.— С. 1296—1308.

рут А., Рончка Р. Теория представления групп и ее приложения:
.: Мир, 1980.– Т.1.– 455 с., т.2.– 386 с.

Г. Гидродинамика.– М.: Изд-во иностр. лит-ры. 1963.–

.В. Некоторые классы уравнений в частных прои
1981.– 448 с.

ов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические ме
нелинейных колебаний.– М.: Наука, 1974.– 503 с.

оголюбов Н.Н., Широков Д.В. Квантовые поля.– М.: Наука, 1980.
) с.

Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений
М.: Наука, 1965.– 588 с.

иров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука,
с.

рг В. Введение в единую полевую теорию элем
.:Мир, 1968.–239 с.

Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в
х.– М.: Гостехиздат, 1934.– 360 с.

жадзе Г.П., Погребков А.К., Поливанов М.К. Синг
ия уравнения $\Box u + m^2/2 \exp(u) = 0$ и динамика особенностей
рет. и мат. физика.– 1979. –40, №3. –С. 221–234.

Дирак П. Принципы квантовой механики.– М.: Наука, 1979.–480 с.

Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свой-
нения теплопроводности с источником в двухмерном и трех-
чаях // Диф.уравнения.– 1983.– 19, №7.– С. 1215–1224.

н Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современна
и приложения.– М.: Наука, 1986.– 759 с.

нко И.А. Пуанкаре-инвариантные квазилинейные в

авнения для комплекснозначных функций.– К
репринт/ АН УССР. Ин–т математики; №87.3)

. Егорченко И.А., Воробьева А.И. Точные решен
ия с дополнительными условиями//Симметрия и реш
тематической физики.–Киев: Ин–т математики АН УССР

25. Жданов Р.Э. Об общем решении многомерного уравнения
Ампера// Симметрийный анализ и решения уравнений матема
физики.– Киев: Ин–т математики АН УССР, 1987.– С.13–16.

26. Жданов Р.Э. Симметрия, редукция и точные реше н
спинорных уравнений: Автореферат дис. на соискание у
доктора физ.–мат. наук.– Киев: Ин–т математики АН Ук
с.

Жданов Р.Э., Лагно В.И. О точных решениях
ламбера, содержащих произвольные фун
лгебраический анализ уравнений математической фи
математики АН УССР, 1990.– С.34–39.

28. Жук Н.П. Курс коррозии и защиты металлов.–М.:Мета
1968.– 477 с.

29 Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевск Л.П.
солитонов. Метод обратной задачи.– М.: Наука,1980.

30.Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах
изики.– Новосибирск: Изд–во Новосиб. ун–та, 1972.

Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в мат
: Наука, 1983. –280 с.

Кадышевский В.Г. Новый подход к теории элект
ействий // Физика элементарных частиц и атомного
1. –С. 5–36.

33. Камке Э. Справочник по обыкновенным диф

: Наука, 1976. -576 с.
итегральные инварианты. -М.: Гостехиздат, 194

В.Г. Інтегрування деяких нелінійних диференц
частинних похідних груповим методом. -Львів:
у, 1959. -22 с.
ина П.Я. Гидродинамика и теория фильтрации. Избр. труды. -
ука, 1991.- 209 с.
рант Р. Уравнения с частными производными.-М.: Мир, 1964.-

., Фридрихс К. Сверхзвуковые течения и звуковые волн
426 с.
І., Лифшиц Е.М. Гидродинамика.- М.: Наука, 1986.

І.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости.- М.: Наука,

зно А.М., Савельев М.В. Групповые методы интегрирован
ных динамических систем.- М.: Наука, 1985.- 280 с.
Лопатин А.К. Некоторые аспекты теоретико-группового подхода в
х нелинейной механики// Укр. мат. журн., 1992.-44, №1.

У. мл. Симметрия и разделение переменных.- М.:

ьский Ю.А., Боголюбов Н.Н.мл., Прикарпатск
.Г. Интегрируемые динамические системы: спе
льно-геометрические аспекты.- Киев: Наук. думк

тропольский Ю.А., Лопатин А.К. Теоретико-групповой

асимптотических методах нелинейной механики.- Киев:
988.- 272 с.
. Митропольский Ю.А., Ревенко И.В. Фущич В.И. О симм
е движения и некоторых частных решениях простр
тел // Докл. Ан СССР.-1985.- 280, №4. -С. 7
Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференци
: Наука, 1978.-400 с.
. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений н
проводности // ДАН СССР, 1959.- 125, №3.-С.492-295.
49. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики.- М.:
1981.- 368 с.
50. Полищук Е.М. Софус Ли.- Л.: Наука, 1983.- 213 с.
. Понтрягин Л.С. Непрерывные группы.- М.: Наука, 1973.
Репета В.К. О некоторых условно-инвариантных решени
волнового уравнения // Теоретико-алгебраическ
математической физики.- Киев: Ин-т математи
64.
Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы ква
и их приложения к газовой динамике.- М.: Наука.
. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механик
техиздат, 1957.
55. Серов Н.И. О симметрии одной нелинейной системы волновых
нений // Теоретико-групповые исследования уравнений матем
физики.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985.- С. 128
Серов Н.И. Конформная инвариантность нелинейных вол
й // Теоретико-алгебраические исследования
е.- Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981.- С.
еров Н.И. Условная инвариантность нелинейно

относительно конформной алгебры // Теорети
кий анализ уравнений матемаческой физики.– Киев: И
Н УССР, 1990.– С. 65–67.

Нелинейные волновые уравнения Ламе и Вейля /
еские исследования в математической физи
ки АН УССР, 1981.– С. 49–53.

И. Об условной инвариантности уравнения $\Box u + \lambda uu$
решения нелинейных уравнений математической
математики АН УССР, 1987.– С. 103–104.

ров Н.И. О конформной инвариантности некоторых дифференциаль-
авнений в частных производных // Нелинейные краевые задачи.–
Ин т математики АН УССР, 1980.– С. 161– 165.

Н.И. О некоторых условно инвариантных решениях урав
ьда // Симметрия и решения уравнений математической
Ин–т математики АН УССР, 1989.– С. 74–76.

Н.И. О решении уравнения Рикатти //
ие исследования в математической физике.– Ки
Н УССР, 1983.– С. 59–62.

.И. Редукция и точные решения одномерного ур
льда // Докл. АН УССР.– 1991.– №10.– С. 26–29.

еров Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного
нения теплопроводности // Укр. мат. журн.–– 1990.– 42, №10.–
370–1376.

ров Н.И., Серова М.М. Конформная иннвариантность нелинейного
ого уравнения // Специальные граничные задачи теории т
Киев: Ин–т математики АН УССР, 1990.– С. 89–91.

Н.И., Серова М.М. Нелинейное уравнение Шредин
еременной массой, инвариантное относительно груп

лея // Деп. в ВИНИТИ.– № 7517– В86.– 1986.– 7 с.

67. Серова М.М. О нелинейных уравнениях теплопроводности, инва
антных относительно группы Галилея // Теоретико-групповые иссл
вания уравнений математической физики.– Киев: Ин-т мат
85.– С.119– 123.

Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод диф
ей и его приложения в газовой динамике. – Нов
4.–270 с.

. Солитоны. Под редакцией С.П.Новикова.– М.: Мир

. Толмачев В.Д. Теория коррозии и защита метал
1960.–386 с.

71. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. –М.: Мир, 1977.–622с.

72. Федоров Ф.И. Группа Лоренца.– М.: Наука, 1979.– 384 с.

73. Федорчук В.М. Непрерывные подгруппы неоднородной групп де
тера P(1,4).–Киев.–1978.–36 с.–(Препринт/ АН УССР. Ин-т
и; №78.18).

Федорчук В.М. О редукции и некоторых точных решен
волнового уравнения // Симметрия и решения нел
тематической физики. Киев: Ин-т математики, 1

5. Френкель Я., Конторова Т. О теории пластичес
двойникования // Физ.журн. –1939. –1. –С. 137–145.

76. Фущич В.И. Групповые свойства дифференциальных у
товой механики // Проблемы асимптотической теории нелинейных к
баний. –Киев: Наук.думка, 1977. –С. 75–87.

77. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств
нений математической физики // Доклады АН СССР. –1979. –24
С. 846– 850.

78. Фущич В.И. Об одном методе исследования груп

гро-дифференциальных уравнений // Укр.мат.журн. -1981. -33, №6.
834- 838.

щич В.И. О пуанкаре-, галилеево-инвариантных нелинейных урав-
етодах их решений // Теоретико-групповые исследования
тематической физики. -Киев: Ин-т математики, 1985.

.И. О симметрии и точных решениях многомерных нели
равнений // Укр. мат. журн. -1987. -$\underline{39}$, №1. -С. 11

ч В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многом
ний математической физики // Теоретико-алгебраические методы
дачах математической физики. -Киев: Ин-т математики, 1983.-
[illegible].

ущич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоре-
лгебраические исследования в мат.физике. -Киев, Ин-т матема-
- С.6.

И., Баранник А.Ф. О точных решениях нелинейного ура
ра в пространстве Минковского $R_{1,n}$// Докл.
90. -№6. -С. 31-34.

В.И., Баранник А.Ф.,Москаленко Ю.Д.. О точных р
уравнения д'Аламбера и Лиувилля в псевдоэвк
ранстве $R_{2,2}$.I // Укр. мат. журн., 1990 - $\underline{42}$, №8.- С. 11

Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ
Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений.-Киев:
думка, 1991.- 300 с.

В.И., Егорченко Е.А. Дифференциальные инварианты алгебр
Докл. АН УССР.- 1989.-Сер.А, №4.- С.19-34.

.И., Егорченко Е.А. Дифференциальные инварианты

Пуанкаре // Докл. АН УССР.– 1989.–Сер.А, №5.– С.46–53.

88. Фущич В.И., Егорченко И.А. Нелиевские анзацы и условная
рия нелинейного уравнения Шредингера // Укр.мат.журн.–1991.
№12.–С.162– 1628.

89. Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Общее решени
олнового уравнения и эйконала// Докл. АН УССР.– Сер
9–31.

Фущич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Совм
ейных уравнений Даламбера и Гамильтона.–
епринт/АН УССР. Ин-т математики; 90.39).

Фущич В.И., Миронюк П.И. Условная симметрия
авнений нелинейной акустики//Докл. АН УССР, 1991.-

92. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений кванто
ки.– М.: Наука, 1990.– 400 с.

93. Фущич В.И., Ревенко И.В., Жданов Р.З. Несимметрийный п
построению точных решений одного нелинейного волнов
Докл.АН УССР.– Сер.А.– 1991. – №7.– С. 15–19.

Фущич В.И., Серов Н.И. Негрупповая симметрия нек
волновых уравнений // Докл. АН УССР.– 1991.–

Фущич В.И., Серов Н.И. Об условной инва
нений Даламбера, Лиувилля, Борна–Инфельда, М
ьно конформной алгебры // Симметрийный анализ
и математической физики.– Киев: Ин–т математ
С. 98– 102.

96. Фущич В.И., Серов Н.И. О некоторых точных решениях много
нелинейного уравнения Эйлера–Лагранжа // ДАН СССР.– 1984.
4.– С.847 – 852.

7. Фущич В.И., Серов Н.И. О симметрии и точных решен

гомерных волновых уравнений // Комплексные ме
ой физике.– Донецк: Ин-т ПММ АН УССР, 1984.–
щич В.И., Серов Н.И. О точных решениях уравнения Борн
да. ДАН СССР, 1982.– 263, №3.– С. 582— 586.
щич В.И., Серов Н.И. Симметрия и некоторые точные решени
ного уравнения Монжа–Ампера // ДАН СССР.– 1983.– 273, №3.

.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция
внения теплопроводности //Докл. АН УССР.–

И., Серов Н.И. Условная инвариантность и точн
го уравнения акустики // Докл. АН УССР.– 1988

ущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и точные ре
авнения Буссинеска //Симметрия и решения уравнений математи
физики.– Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.– С. 95–102.
щи В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность нелинейно
равнения // Укр. мат. журн.– 1991.– 43, №3.– С. 394–399.
.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Нелокальные анзацы и ре
ой системы уравнений теплопроводности // Ук

.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Об условной
уравнения Кортевега– де Фриза // Докл. АН УССР

ущи В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. О нелокальных анзацах
нелинейного одномерного уравнения теплопроводности // Докл.
СР.– 1992.– №1.– С. 26–30.
Фущ В.И., Серов Н.И., Амеров Т.К. Условная инвариантность

инейного уравнения теплопроводности // Докл.
№ 1.– С. 15–18.

108. Фущич В.И., Серов Н.И., Москалюк С.С. О точных решениях
нейных многомерных волновых уравнений// 1Х Международная кон
ция по нелинейным колебаниям (Киев, 30 августа – 6 сентябр
г.): Тез. докл.– Киев: Ин–т математики АН УССР, 1981.– С.

. Фущич В.И., Серов Н.И., Москалюк С.С. О точ
елинейных многомерных волновых уравнений// 1Х
ренция по нелинейным колебаниям (Киев, 30 авг
г.): Тез. докл.– Киев: Ин–т математики АН УС

. Фущич В.И., Серов Н.И., Репета В.К. Нелие
чные решения одномерных уравнений газовой динамик
УССР.– 1991.– №11.– С. 27–33.

111. Фущич В.И., Серов Н.И., Репета В.К. Условная симметрия,
ция и точные решения нелинейного волнового уравнения // До
УССР.– 1991.– №5.– С. 29–36.

. Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И. Условная инв
инейные уравнения теплопроводности // Докл. АН
А, №9.– С.17–20.

Фущич В.И., Серов Н.И., Штелень В.М. О нек
х многомерных нелинейных уравнений Даламбера,
Дирака //Теоретико–групповые методы в физике. Т
дного семинара (Звенигород 1982). М.: Наука, 1983.

114. Фущич В.И., Серова М.М. О максимальной группе инвариантн
общем решении одномерных уравнений газовой динамики //
СССР. –1983. –268, №5.– С. 1102–1104.

15. Фущич В.И., Славуцкий С.Л. О нелинейном галилей

внений Ламе // Докл.АН СССР. –1986. –287, №2.

ущи В.И., Тычинин В.А. О линеаризации некоторых нелин
ний с помощью нелокальных преобразований. –Киев. –1982.
. –(Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; №82.33).

ущич В.И., Тычинин В.А. Точные решения и принцип суперпоз
ного волнового уравнения//Докл. АН УССР. Сер.А – 1
4.

И., Тычинин В.А., Серов Н.И. Формула размноже
Кортевега- де Фриза // Укр. мат. журн.–
9.

В.И., Чернига Р.М. О точных решениях двух
шредингеровского типа.– Киев. –1986. –44
Р. Ин-т математики; №86.85).

Фущич В.И., Чопик В.И. Условная иинвариантность нелинейног
ения Шредингера // Докл. АН УССР. – Сер.А. – 1990. – №4. –
3.

В.И., Чопик В.И., Миронюк П.И. Условная инвариантн
ния трехмерных нелинейных уравнений акустики// Докл.
– 1990. – №9. – С. 24-27.

.И., Штелень В.М. О приближенной симметрии
волнового уравнения с малым параметром//Докл
.–№8.–С.18-21.

В.И., Штелень В.М., Попович Р.Е. О редукции
стокса к линейным уравнениям теплопроводности //Док
1992.– №2.–С.23-30.

Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анали и
е решения нелинейных уравнений математической физики.– Киев:

. думка, 1989.- 336 с.

5. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли.- М.:Гостехи

5. Чопик В.И. Условная инвариантность уравне
действительной нелинейностью//Симметрия и решения ура
тической физики.–Киев: Ин–т математики АН УССР.–1989.–С.108–

127. Чопик В.И.,Миронюк П.И. Условная инвариантност
двумерного уравнения Хохлова–Заболоцкой//Теоретико– алгебра
нализ уравнений математической физики.– Киев: Ин–т ма
ССР, 1990.– С.107–109.

7 Шульга М.В. Симметрия и некоторые частные
бера с нелинейным условием // Теоретико–груп
нений математической физики.– Киев: Ин–т ма
6– 38.

9. Эйзенхарт Л.П. Непрерывные группы преобразова
ностр. лит–ры, 1947.– 358 с.

130. Яцун В.А. Квазиавтодуальные поля в конформно–инвари
риях Янга–Миллса со скалярным полем: Дис. на соискание учено
пени доктора физ.–мат. наук.– Киев: Ин–т теоретической физ
Украины, 1988.– 280 с.

1. Яцун В.А. O(4)–инвариантные решения в теории Я
лярным полем.– ТМФ, 1986, т.68, №3, с.392–400.

Яцун В.А. Точные локализованные решения в
лях бозон–фермионных взаимодействий // Укр.
, №11.– С.1487–1494.

3. Ames W.F. Nonlinear partial differential
ngineering.– N.Y.:Academic Press, vol. 1 – 1965.–
1972. – 301 p.

134. Ames W.F., Lohner R.J., Adams E. Group properties of

// Nonlinear phenomena in mathematical sciences
than, N.Y.:Academic Press. – 1982. – P. 1–6.
n R.L., Ibragimov N.H. Lie–Backlund transformat
s.– Philadelphia: SIAM, 1979.– 150 p.
und A.V. Om Ytor med konstant negativ Krokning
sitets Arsskrift.–1883, N 19.
Barannik L.F., Fushchich W.I. On subalgebras of the Lie
bra of the extended Poincare group $\tilde{P}(1,n)$ // J. Math. Phys.–
28, N 7.– P. 1445–1458.
rone A., Eposito F., Magee C.J., Scott A.C., Theory and
s of the sine–Gordone equations//Riv.Nuo.
.–P.227–267.
–Horwath P., Fushchich W., Serov M. A simple
utions of the non–linear d'Alembert equation
Phys.– 1992.
an H. The transformations of electrodynamical eq
oc. London Math. Soc.– 1909.– 8.– P. 223–264.
Birkhoff G. Analitical groups // Trans. Amer. Math.
–1938.–43, N 1.–P.61–101.
Bluman G.W. and Cole I.D. Similarity methods for differential
ons.– Berlin: Springer, 1974.– 332 p.
n G.W., Cole I.D. The general similarity solution of
ion//J.Math.Mech.–1969.– 18, N 11.– P.1035–1042.
G., Kumei S. On invariance properties of
J. Math. Phys.– 1987.– 28, N 2.– P. 307–318.
r V.A., Lagno V.I., Serov N.I. Invariant solu
equation simulating process of corrosion //
mii Nauk Ukrainy.– 1992.– N 5.– P.24–27.

16. Boyer C.P., Penafiel M.N. Conformal symmetry
ilton-Jacobi equation and quantization // Nuovo c
N 2.- P. 195- 210.
. Bracken A.J. A comment on the conformal
ro-mass Klein-Gordon equation // Lett. nuovo c
1.-P.574-576.
148. Bullongh R.K. Solitons. // Interaction of ra
condensed matter, vol. 1, IAEA-SMR-20/51 (International A
Energy Agecy, Vienna. 1977) P.381-469.
149. Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity solutions o
Boussinesq equation.-Preprint, 1988.
50. Clarkson P, Winternitz P. Nonclassical symmetry re
Kadomtsev-Petviashvili equation.-Physica D.
-P.257-272.
. Collins C.B. Complex potencial equations. 1.
olution // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.- 1976.
. 165- 187.
152. Egorchenko I.A., Vorobieva A.I., Conditional
Exact Solutions of the Klein-Godon-Fock Equation//Dopovidi Ak
Nauk Ukrainy.-1992.-N 1.-P.19-22.
153. Forsyth A.R. Theory of differential equations.-N.Y.:
Publication, 1959.- Vol.5,6 - 478 p., 596 p.
54. Fushchich W.I., Cherniga R.M. The Galilean
inciple and nonlinear partial differential equation
85. -18. -P. 3491-3503.
5. Fushchich W.I., Serov N.I. On some exact
three-dimensional non-linear Scchrodinger equatio
ath. Gen., 1987.- 20, N 16.- P. L929-L933.

Fushchich W.I., Serov N.I. Symmetry and some exact solutio
multidimensional Monge–Ampere equation // Amer
Society.– 1984.– 28.– P.679–682.
ich W.I., Serov N.I. The symmetry and s
f the nonlinear many–dimensional Liouville,
equations // J. Phys. A.– 1983.– 16.– P. 3645–
hich W.I., Serov N.I., Amerov T.K. Conditional
solutions of gas dynamics equations // Dopovidi Ak
Ukrainy.– 1992.– N5.– P.35–40.
Fushchich W.I., Serov N.I., Shtelen W.M. Some exact solutions
many–dimensional nonlinear d'Alembert, Liouville, eikonal and
equations // Group–theoretical methods in physics.– London
demic Publ., 1984.– P.489 – 496.
hish W.I., Serov N.I., Shtelen W.M., Popovich
symmetry of the linear heat equation //
k Ukrainy.– 1992.– N 12.
chich W.I., Serov N.I., Tulupova L.A. C
and exact solutions of the nonlinear diffusion
vidi Akademii Nauk Ukrainy.– 1993.– N 1.
Fushchich W.I., Serov N.I., Tychinin W.A., Amerov T.K. On
local symmetries of the nonlinear heat equation // Dopovidi
emii Nauk Ukrainy.– 1992.– N 11– P.27–33.
Fushchich W.I., Serov N.I., Vorob'eva A.I. Conditio
and exact solutions of equations of nonstation
// Dopovidi Akademii Nauk Ukrainy.– 1992.– N

ich W.I., Shtelen W.M. On approximate sy
solutions of nonlinear wave equation with

parameter//J.Phys.A.:Math.Gen.-1989.-22, N 16.- P.L887-
5. Fushchich W.I., Shtelen W.M. On some exact soluti
inear Dirac equation // J.Phys.A. -1983.
277.
Fushchich W.I., Shtelen W.M. The symmetr
lutions of the relativistic eikonal equation /
982. -34, N 16. -P. 498.
167. Fushchich W.I., Shtelen W.M., Serov N.I. Symmetr
and exact solutions of nonlinear equations of mathematical ph
Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1992.-450p.
168. Fushchich W.I., Shtelen W.M. and Slavutsky S.L. Reduct
exact solutions of the Navier-Stokes equations // J. Ph
th. Gen. - 1991. -24, N 4.-P.971-986.
Fushchich W.I., Shtelen W.M., Zhdanov R.Z. On
riant equations for spinor fields and their
s. Lett. B.- 159, N 2-3. - P. 189-191.
. Fushchich W.I., Tsifra I.M. On reduction
nlinear wave equations with broken symmetry // J.
-20, N 2. -P. L45-47.
171. Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. Conditional symmet
reduction of partial differential equations // Укр. мат
1992.- 44, №7.- C.970-982.
172. Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. On some new exact
onlinear d'Alembert and Hamilton equations
3.-5p.-(Preprint/Institute for Mathematics and Ap
8).
Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. On some new
e nonlinear d'Alembert-Hamilton system /

-141, N 3, 4.- P.113-115.

ushchich W.I., Zhdanov R.Z., Yegorchenko I.A. On
of the nonlinear multi-dimensional wave equations
of the d'Alembert- Hamilton system // J. Mat
1, N 2.-P.352-360.

d A.M., Harnad J., Winternitz P. Symmetry
r relativistically invariant equations // J. Mat
N 4.-P. 791-804.

djadze G.P., Pogrebkov A.K., Polivanov M.C. Liouville fi
: IST and Poisson bracket structure // J. Phys. A. -1986.
N 1. -P. 121-139.

King J.R. Some non-local transformations between nonline
n equation//J.Phys.A:Math.Gen.,1990.-23.-P.5441-5464.

.R. Ehact results for the nonlinear diffusion equatio
$\cdot\,{}^{3}\frac{\partial u}{\partial x}\Big)$ and $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{u^{-2/3}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$ // J. Ph
91.-24.-.-P.5721-5745.

D., Winternitz P. Non-classical
amrle of the Boussinesq equation//J.Phys.A:Mat
915-2925.

e S. Vorlesungen uber continuerliche gruppen.- Leipz
er, 1893.- P. 805.

Lie S. Uber Differentialinvarianten.- Math. Ann.- 1884.- 24,
52-89.

S., Engel F. Teorie der Transformationsgruppen.- Leip
. 1,2, 3.- 1888, 1890, 1893.

J. J.Math. Pures. Appl., 1858.- 18.- P.71-72.

.A. Electromagnetic phenomena in a system mov
smaller then the it of light//Proc. Acad

Amesterdam, 1904.– 6.– P. 809–830.

185. Morgan A.J.A. The reduction by one of the numb independent variables in some systems of partial ations//Quart. J. Math. Oxford., 1952.– 3, N 12.– P.

Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevski L.P y of solitons.– The inverse method.– New Yor

Ouroushev D., Martinov N., Grigorov A. An ap two–dimencional sine–Gordon equation // J. F 27–528.

188. Olver P. Applications of Lie groups to equations.–New York: Springer, 1986. –497 p.

189. Olver P., Rosenau Ph. The construction of special soluti partial differential equations // Phys. Lett. A. –1986. 144 P. 107–112.

Patera J., Sharp R.T., Winternitz P. and Zassenaus he Poincare group and their invariats//J.Mat.Phys P.977–984.

Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Co he fundamental groups of physics. 1. Genera ncare group // J. Math. Phys. –1975. –16, N

192. Poincare H. Sur la dynamique de l'electron C Acad.Sei., 195.–140.P.1504–1506.

193. Rubin J., Winternitz P. Point symmetries of conditi integrable nonlinear evolution equations//J.Math.Phys., 1990 N 9.– P.2085–2090.

Webb G.M. Lie symmetries of a coupled nonlinear tion system//J.Phys.A.,1990.– 23, N 17.– P.3885–