

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

РЕВЕНКО Игорь Владимирович

УДК 517.9 : 519.46

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО
ГРУПП ГАЛИЛЕЯ И ПУАНКАРЕ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения
и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор
ФУЩИЧ В.И.

Киев – 1986

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА I. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХ ЧАСТИЦ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУПП, СОДЕРЖАЩИХ В КАЧЕСТВЕ ПОДГРУППЫ ГРУППУ ГАЛИЛЕЯ	19
§ I.1. Симметрия, интегралы движения и некото- рые частные решения пространственной задачи трех частиц	19
§ I.2. Об одном классе уравнений, инвариант- ных относительно группы Галилея	39
§ I.3. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы и их интегрирование	61
ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ПУАНКАРЕ	73
§ 2.1. Уравнения движения частицы в электро- магнитном поле	74
§ 2.2. Уравнения релятивистской механики, инвариантные относительно группы Пуанкаре	94
§ 2.3. Классификация и интегрирование уравне- ний второго порядка, инвариантных относительно некоторых групп преобразо- ваний	102
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	109
ЛИТЕРАТУРА	III

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), инвариантных относительно групп Галилея и Пуанкаре, и связанных с задачами релятивистской и нерелятивистской механики, с задачей трех тел.

Исследование симметрии и построение первых интегралов систем ОДУ оказывается весьма полезным при анализе многочисленных задач классической и релятивистской механики, теоретической физики. Таковыми являются уравнения небесной механики, описывающие движение трех попарно взаимодействующих тел, уравнения Лоренца-Дирака, описывающие движение частицы в электромагнитном поле и многие другие. Наличие симметрии ОДУ позволяет строить интегралы движения рассматриваемых систем. Интегралы движения дают важную информацию о движении системы даже в тех случаях, когда получение точных решений ОДУ не представляется возможным.

Остановимся на некоторых аспектах проблемы трех тел. Уже Л.Эйлер (1744, 1765, 1772) знал все десять первых интегралов, допускаемых задачей трех тел, взаимодействующих по закону Ньютона. В 1842 – 1843 гг. Якоби показал, что в случае, если силы взаимодействия обратно пропорциональны третьей степени взаимных расстояний между точками системы, то дифференциальные уравнения движения допускают новый, независимый от 10 известных классических, 11-й первый интеграл (так называемый обобщенный интеграл Якоби)

Новые результаты в этой области связаны с именем Пуанкаре. А.Брунс, П.Пэнлеве (1898), А.Пуанкаре (1890, 1898) и др. доказали ряд теорем, касающихся интегрируемости классической задачи трех тел. Основным результатом теорем состоит в том, что всякий интеграл классической задачи трех тел, являющийся произвольной функцией от координат и алгебраической функцией от скоростей этих тел, есть алгебраическая комбинация классических интегралов.

Ю.Д.Соколов [33] в 1941 г. впервые после Якоби нашел новый интеграл движения одномерной задачи трех тел равной массы в том случае, когда силы взаимодействия прямо пропорциональны кубу взаимных расстояний между телами. Новый интеграл движения Соколова был обобщен на случай плоского и пространственного движения трех тел в работах [6], [15].

За последние десятилетия в работах В.Г.Голубева [8], [9] развито новое плодотворное направление в области качественного исследования движения задачи трех тел. К ним тесно примыкают результаты Е.А.Гребенникова [10], [11], разработавшего вариант асимптотической теории регулярных возмущений для задач небесной механики, в частности, для планетного варианта задачи трех тел.

Дальнейший прогресс в области интегрирования ОДУ движения трех и более тел равной массы (частиц) связан с использованием нового метода-метода изоспектральной деформации. Применение этой техники к многочастичным задачам позволило установить полную интегрируемость ряда одномерных моделей N взаимодействующих частиц с парными потенциалами взаимодействия [29], [45],

В настоящей диссертации задача трех тел исследуется с теоретико-групповой точки зрения. Некоторые теоретико-групповые аспекты пространственной задачи трех тел рассматривались еще в монографии Э.Картана [21], в которой показано, как известные первые интегралы связаны с симметрией уравнений движения трех тел. В диссертационной работе установлено, что все известные до настоящего времени первые интегралы пространственной задачи трех тел связаны с операторами инвариантности соответствующих уравнений движения, а именно с классом операторов, определяющим локальную симметрию задачи, а также исследован вопрос о нахождении всех операторов симметрии, принадлежащих указанному классу.

Задача интегрирования уравнений движения трех и более тел тесно связана с другой более общей задачей – построения вполне

интегрируемых систем. В связи с развитием за последнее время дифференциально-геометрических и алгебраических методов в теории динамических систем достигнуты большие успехи в интегрировании широких классов систем, связанных с полупростыми алгебрами Ли [22], [37], [59], интегрировании некоторых систем ОДУ на римановых поверхностях [14], [16], [20]. Конструктивные методы построения вполне интегрируемых систем с помощью канонических преобразований предложены в работах [54], [55], с использованием симметрии и теоремы Нетер – в работах [62], [63]. В диссертационной работе развивается один из возможных путей решения этой задачи, а именно, построение вполне интегрируемых систем, обладающих заданными симметричными свойствами.

Основная задача второй части диссертации состоит в описании ОДУ второго и третьего порядков с заданной группой симметрии и построении интегралов движения некоторых таких уравнений. В качестве такой группы выбирается группа инвариантности основных уравнений механики. Интерес к такого рода уравнениям объясняется необходимостью построения моделей, описывающих релятивистское движение частицы как в электромагнитном поле, так и в поле другого типа. Такие модели уже предлагались в литературе [44], [46], однако вопрос описания релятивистских моделей движения частицы с теоретико-групповой точки зрения до конца не исследован.

Метод исследования групповых свойств системы уравнений, в которую входят ОДУ и дифференциальные уравнения в частных производных, был предложен в работе [40]. В диссертационной работе использование данного метода позволило изучить симметрию системы уравнений Максвелла и Лоренца и построить интегралы движения уравнения Лоренца в том случае, когда компоненты вектора электромагнитного поля отличны от постоянных. До сих пор в литературе вопрос построения первых интегралов таких уравнений не обсуждался. Некоторые приближенные решения уравнения Лоренца приводятся

в монографии [32].

В последнее время вышло немало работ, посвященных теоретико-групповому исследованию систем ОДУ, обладающих векторным первым интегралом. Примером задачи, обладающей векторным интегралом движения является известная проблема Кеплера. В ряде работ [57], [61] было установлено, что данная задача имеет так называемую скрытую симметрию $O(4, 2)$. Источником этой симметрии являются векторные интегралы движения задачи Кеплера: интеграл количества движения и интеграл Рунге-Ленца. Впоследствии появились ряд работ, посвященных системам, имеющим векторные первые интегралы. Описанию гамильтоновых систем, имеющим интеграл типа Рунге-Ленца, посвящена работа [56]. Более общая задача была решена в работе [60], в которой описаны системы, определяемые сферически симметричным гамильтонианом и имеющие два различных векторных интеграла движения. Вопрос существования векторных констант движения для вполне интегрируемых гамильтоновых систем рассматривался в [58]. В настоящей диссертации исследован вопрос о существовании векторных интегралов движения для систем негамильтонова типа. Используя симметричные идеи, в явном виде построены векторные первые интегралы для ряда релятивистски-инвариантных уравнений.

Более подробно результаты диссертации изложены в заключении. Прежде чем перейти к более подробному изложению полученных результатов, дадим основные определения и сформулируем алгоритм нахождения симметрии ОДУ.

Рассмотрим систему K обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка

$$\begin{aligned} x_1^{(n)} &= F^1(t, x_1, \dots, x_k^{(n-1)}) \\ &\vdots \\ x_k^{(n)} &= F^k(t, x_1, \dots, x_k^{(n-1)}), \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $\dot{x}_s = \frac{dx_s}{dt}$, $x_s^{(\rho)} = \frac{dx_s^{(\rho-1)}}{dt}$, F^i - произвольные

достаточно гладкие функции своих аргументов.

Для нахождения симметрии данной системы уравнений поступим следующим образом:

перепишем систему уравнений (0.1) в симметричной форме

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\dot{x}_1} = \dots = \frac{dx_\kappa}{\dot{x}_\kappa} = \dots = \frac{dx_1^{(n-1)}}{F^1} = \dots = \frac{dx_\kappa^{(n-1)}}{F^\kappa} \quad (0.2)$$

и затем воспользуемся известным фактом, что система уравнений (0.2) эквивалентна одному линейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка:

$$L\psi = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \dot{x}_\kappa \frac{\partial}{\partial x_\kappa} + \dots + F^1 \frac{\partial}{\partial x_1^{(n-1)}} + \dots + F^\kappa \frac{\partial}{\partial x_\kappa^{(n-1)}} \right] \psi = 0 \quad (0.3)$$

Заметим, что уравнение (0.3) является уравнением для интегралов движения уравнения (0.1).

Определение I. Уравнение (0.3) инвариантно относительно некоторого множества операторов

$$Q = \{Q_A\} = \{Q_1, \dots, Q_N\}, \quad (0.4)$$

если выполняются условия

$$LQ_A \psi = 0 \quad A = \overline{1, N} \quad (0.5)$$

Операторы $Q_1, \dots, Q_N$ назовем операторами симметрии / или инвариантности / уравнения (0.3). В данном случае предполагается, что область значений операторов Q_A , заданных на множестве всех решений Ω уравнения (0.3), принадлежит области определения оператора L . Условие (0.5), которое в дальнейшем будем называть условием инвариантности уравнения (0.3), означает, что операторы Q_A отображают одно решение в другое, т.е. множество Ω инвариантно относительно операторов Q_A .

Условие инвариантности (0.5) можно записать через коммута-

$$[L, Q_A] \psi = (L Q_A - Q_A L) \psi = 0 \quad (0.6)$$

где ψ - произвольное решение уравнения (0.3).

В операторной форме условие (0.6) запишется в виде:

$$[L, Q_A] = B_A L, \quad (0.7)$$

где B_A - некоторый оператор.

Определение 2. Если совокупность операторов $\{Q_A\}$ такая, что

$$\begin{aligned} \text{а. } \alpha_1 Q_i + \alpha_2 Q_j &\in \{Q_A\}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}, i, j = 1, N \\ \text{б. } [Q_i, Q_j] &\in \{Q_A\}, \end{aligned} \quad (0.8)$$

то будем говорить, что уравнение (0.3) инвариантно относительно алгебры Ли. Если операторы $\{Q_A\}$ являются базисными элементами алгебры инвариантности, то это означает, что выполняются следующие отношения:

$$[Q_A, Q_B] = f_{ABC} Q_C, \quad (0.9)$$

где f_{ABC} - структурные константы алгебры. Здесь и далее по повторяющимся индексам предполагается суммирование, если это особо не оговорено.

В дальнейшем при определении симметрий уравнений вида (0.3) мы будем использовать инфинитезимальный классический подход С.Ли. В этом случае задача отыскания алгебры инвариантности уравнений типа (0.3) сводится к описанию операторов первого порядка вида

$$\begin{aligned} Q_A = & \xi_A^0(t, x_i, \dots, x_i^{(n-1)}) \frac{\partial}{\partial t} + \xi_A^S(t, x_i, \dots, x_i^{(n-1)}) \frac{\partial}{\partial x_S^{(\rho)}} + \\ & + \zeta(t, x_i, \dots, x_i^{(n-1)}) \frac{\partial}{\partial \psi}, \text{ где } S = \overline{1, k} \quad \rho = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \quad (0.10)$$

удовлетворяющих условию инвариантности (0.7).

Зная алгебру инвариантности уравнения (0.3), можно говорить о группе инвариантности данного уравнения.

Определение 3. Под однопараметрической группой инвариантности данного уравнения будем понимать группу преобразований вида

$$\vec{y}' = \vec{f}'(\vec{y}, \psi, \alpha) \quad \vec{f}'|_{\alpha=0} = \vec{y} \quad (0.II)$$

$$\psi' = f^2(\vec{y}, \psi, \alpha) \quad f^2|_{\alpha=0} = \psi,$$

где $\vec{y} = (t, x_1, \dots, \dot{x}_1, \dots, x_k^{(n-1)}) \quad \alpha \in J \subset R, 0 \in J,$

если уравнение (0.3) является инвариантным относительно действия этой группы.

Определение 4. Уравнение (0.3) назовем инвариантным относительно группы (0.II), если верно следующее условие: функция

$\psi' = g(\vec{y}')$ задает решение уравнения (0.3), если $\psi = g(\vec{y})$ решение данного уравнения. $\psi', \vec{y}'$ задаются формулами (0.II). Другими словами, однопараметрическая группа (0.II) переводит решение уравнения (0.3) в решение этого же уравнения.

Из определения 4 следует, что уравнение (0.3) инвариантно относительно группы преобразований (0.II) тогда и только тогда, когда форма уравнения (0.3) инвариантна относительно замены переменных (0.II), т.е. если выполняется уравнение (0.3), то верно, что

$$L'\psi' = \left[\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} + \dots + F^\ell(t, \vec{x}', \dots, \vec{x}'^{(\kappa)}) \frac{\partial}{\partial x_\ell^{(n-1)}} \right] \psi' = 0 \quad (0.I2)$$

где $\psi', \vec{y}'$ задаются формулами (0.II).

В том случае, когда

$$f^2 = \psi, \quad \vec{f}' = \vec{f}'(\vec{y}, \alpha) \quad (0.I3)$$

в формулах (0.II), можно говорить об инвариантности уравнений

(0.I) относительно группы преобразований (0.II), (0.I3).

Определение 5. Уравнения (0.I) инвариантны относительно преобразований (0.II), (0.I3) тогда и только тогда, когда выполняются уравнения

$$x_i'^{(n)} = F^i(\vec{y}') \quad (0.I4)$$

при условии выполнения уравнения (0.I). Вектор $\vec{y}'$ задается формулами (0.II), (0.I3).

Соответствие между операторами (0.I0) и соответствующими им группам преобразований устанавливается с помощью уравнений Ли.

Пусть $J \subset R$ — открытый интервал, содержащий точку 0 и G_1 — однопараметрическая группа преобразований (0.II). Орбита точки $(\psi, \vec{y}) \in R^m$ ($m = n \times k + 2$) представляет собой кривую $a \rightarrow (\vec{f}', f^2)$ в R^m , проходящую через $(\psi, \vec{y})$. Касательный вектор к этой кривой в точке $(\psi, \vec{y})$ имеет вид

$$\vec{\xi}(\psi, y) = \frac{\partial \vec{f}'(\psi, \vec{y}, a)}{\partial a} \Big|_{a=0} \quad (0.I5)$$

$$\eta(\psi, y) = \frac{\partial f^2(\psi, \vec{y}, a)}{\partial a} \Big|_{a=0}$$

Формула (0.I5) определяет касательное векторное поле $(\vec{\xi}, \eta) : R^m \rightarrow R^m$ группы G_1 . Векторное поле (0.I5) записывается также в виде линейного дифференциального оператора первого порядка

$$X = \xi^i(\psi, \vec{y}) \frac{\partial}{\partial y^i} + \eta(\psi, \vec{y}) \frac{\partial}{\partial \psi} \quad (0.I6)$$

и называется оператором однопараметрической группы G_1 .

Теорема Ли устанавливает соответствие между группой G_1 и ее инфинитезимальным оператором (0.I6). А именно, орбита

$G, (\psi, \vec{y})$ точки $(\psi, \vec{y})$ является интегральной кривой уравнений Ли.

$$\frac{d\vec{f}'}{da} = \vec{\xi}(f^2, \vec{f}_1) \quad \vec{f}'|_{a=0} = \vec{y} \quad (0.17)$$

$$\frac{df^2}{da} = \eta(f^2, \vec{f}_1) \quad f^2|_{a=0} = \psi$$

Обратно, для любого гладкого векторного поля $(\vec{\xi}, \eta)$: $R^m \rightarrow R^m$ и любой точки $(\psi, \vec{y})$: $R^m \rightarrow R^m$ существует единственное решение уравнений Ли. Это решение определяет однопараметрическую группу преобразований (0.11), касательное векторное поле которой совпадает с заданным полем $(\vec{\xi}, \eta)$.

В случае, когда уравнение (0.3) инвариантно относительно алгебры Ли $\{Q_A\}$ имеющей $\mathcal{U}$ базисных элементов, можно говорить об инвариантности уравнения относительно $\mathcal{U}$ - параметрической группы преобразований.

Определение 6. Инвариантом оператора симметрии (0.10) называется функция $\psi = \psi(\vec{y}, \psi)$, являющаяся решением уравнения

$$Q_A \psi = 0$$

В данной диссертационной работе изучается в основном симметрия систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго или третьего порядка. Сформулируем алгоритм нахождения операторов симметрии таких уравнений.

Используя формулы (0.1), (0.3), сопоставим системе ОДУ второго порядка

$$\frac{d^2 x_\kappa}{dt^2} = F^\kappa(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}), \quad \kappa = \overline{1, N},$$

эквивалентное ей уравнение в частных производных первого порядка

$$L_2 \psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_\kappa \frac{\partial}{\partial x_\kappa} + F^\kappa \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\kappa} \right) \psi = 0 \quad (0.18)$$

Тогда, согласно формуле (0.10), оператор симметрии ищем в виде

$$Q_2 = \xi^0(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \psi) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^K(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \psi) \frac{\partial}{\partial x_K} + \\ + \overset{1}{\xi}^K(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \psi) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_K} + \eta(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \psi) \frac{\partial}{\partial \psi} . \quad (0.19)$$

Подставив выражения для операторов L_2 и Q_2 (0.17), (0.18) в условие инвариантности (0.7), находим, что

$$L_2 \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + L_2 \xi^K \frac{\partial}{\partial x_K} + L_2 \overset{1}{\xi}^K \frac{\partial}{\partial \dot{x}_K} + L_2 \eta \frac{\partial}{\partial \psi} - \xi^K \frac{\partial}{\partial x_K} - \\ - \left(\xi^0 \frac{\partial F^K}{\partial t} + \xi^S \frac{\partial F^K}{\partial x_S} + \overset{1}{\xi}^S \frac{\partial F^K}{\partial \dot{x}_S} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_K} = B \left(\frac{\partial}{\partial t} + x_K \frac{\partial}{\partial \dot{x}_K} + F^K \frac{\partial}{\partial \dot{x}_K} \right) . \quad (0.20)$$

Так как в левой части операторного уравнения (0.20) стоит дифференциальный оператор первого порядка, то B может зависеть только от переменных $t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \psi$. Поэтому, данное операторное уравнение справедливо тогда и только тогда, когда коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_K}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}_K}, \frac{\partial}{\partial \psi}$ в обеих частях одинаковы

$$L_2 \xi^0 = B \quad L_2 \xi^K - \overset{1}{\xi}^K = B \dot{x}_K \\ L_2 \overset{1}{\xi}^K - \left(\xi^0 \frac{\partial F^K}{\partial t} + \xi^S \frac{\partial F^K}{\partial x_S} + \overset{1}{\xi}^S \frac{\partial F^K}{\partial \dot{x}_S} \right) = B F^K \quad (0.21) \\ L_2 \eta = 0$$

Наличие оператора симметрии $\eta \frac{\partial}{\partial \psi}$, где $\eta(t, x, \dot{x})$ - решение уравнения (0.18), является следствием того, что уравнение (0.18) линейно и однородно по ψ . В дальнейшем мы не будем рассматривать такие операторы.

Исключая из уравнений (0.21) функции B , $\overset{1}{\xi}^K$, получим уравнения для ξ^0 , ξ^K , которые назовем определяющими для уравнения (0.16):

$$L_2(L_2 \xi^K - \dot{x}_K L_2 \xi^0) - F^K L_2 \xi^0 = \xi^0 \frac{\partial F^K}{\partial t} + \xi^S \frac{\partial F^K}{\partial x_S} + (L_2 \xi^S - \dot{x}_S L_2 \xi^0) \frac{\partial F^K}{\partial \dot{x}_S} \quad (0.22)$$

Из формул (0.21) следует, что функции ξ^K полностью определяются функциями ξ^0 , ξ^K по формуле

$$\xi^K = L_2 \xi^K - \dot{x}_K L_2 \xi^0 \quad (0.23)$$

Поэтому в дальнейшем для краткости оператор инвариантности Q_2 (0.18) будем писать в следующей форме

$$Q_2 = \xi^0(t, \vec{x}, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^K(t, \vec{x}, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^K} \quad (0.24)$$

Оператор симметрии системы уравнений третьего порядка

$$\frac{d^3 x_K}{dt^3} = F^K(t, \vec{x}, \vec{x}, \vec{x}), \quad (0.25)$$

которое согласно формуле (0.3) эквивалентно следующему уравнению в частных производных первого порядка:

$$L_3 \psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_K \frac{\partial}{\partial x_K} + \ddot{x}_K \frac{\partial}{\partial \dot{x}_K} + F^K \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_K} \right) \psi = 0 \quad (0.26)$$

ищем в виде

$$Q_3 = \xi^0(t, \vec{x}, \vec{x}, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^K(t, \vec{x}, \vec{x}, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_K} + \xi^K(t, \vec{x}, \vec{x}, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_K} + \xi^K(t, \vec{x}, \vec{x}, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_K} \quad (0.27)$$

Не приводя подробных выкладок, выпишем определяющие уравнения для уравнения (0.26)

$$L_3 [L_3 (L_3 \xi^K - \dot{x}_K L_3 \xi^0) - \ddot{x}_K L_3 \xi^0] - F^K L_3 \xi^0 =$$

$$\begin{aligned}
&= \xi^0 \frac{\partial F^K}{\partial t} + \xi^s \frac{\partial F^K}{\partial x_s} + (L_3 \xi^s - \dot{x}_s L_3 \xi^0) \frac{\partial F^K}{\partial \dot{x}_s} + \\
&+ (L_3 (L_3 \xi^s - \dot{x}_s L_3 \xi^0) - \ddot{x}_s L_3 \xi^0) \frac{\partial F^K}{\partial \ddot{x}_s}
\end{aligned} \quad (0.28)$$

Во второй главе диссертации изучаются системы ОДУ, описывающие движение частицы во внешнем поле, вида

$$\frac{d^2 x_K}{dt^2} = F^K(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \vec{\Phi}) \quad (0.29)$$

или

$$\frac{d^3 x_K}{dt^3} = F^K(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \vec{\ddot{x}}, \vec{\Phi}), \quad (0.30)$$

где $\vec{\Phi} = (\Phi^1, \dots, \Phi^p)$.

В этом случае оператор симметрии ищем в виде

$$\hat{Q}_2 = Q_2 + \mathcal{E}^z \frac{\partial}{\partial \Phi^z}, \quad (0.31)$$

$$\hat{Q}_3 = Q_3 + \mathcal{E}^z \frac{\partial}{\partial \Phi^z}, \quad (0.32)$$

где $\mathcal{E}^z$ - функции от $t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \vec{\ddot{x}}, \Phi$.

Определяющие уравнения для уравнений с полем отличаются от уравнений (0.22), (0.28) только правой частью и имеют вид:

а. для уравнения (0.29)

$$\begin{aligned}
&L_2(L_2 \xi^K - \dot{x}_K L_2 \xi^0) - F^K L_2 \xi^0 = \xi^0 \frac{\partial F^K}{\partial t} + \\
&+ \xi^s \frac{\partial F^K}{\partial x_s} + (L_2 \xi^s - \dot{x}_s L_2 \xi^0) \frac{\partial F^K}{\partial \dot{x}_s} + \mathcal{E}^z \frac{\partial F^K}{\partial \Phi^z}
\end{aligned} \quad (0.33)$$

б. для уравнения (0.30)

$$L_3[L_3(L_3 \xi^K - \dot{x}_K L_3 \xi^0) - \ddot{x}_K L_3 \xi^0] - F^K L_3 \xi^0 =$$

$$\begin{aligned}
&= \xi^0 \frac{\partial F^K}{\partial t} + \xi^s \frac{\partial F^K}{\partial x_s} + (L_3 \xi^s - \dot{x}_s L_3 \xi^0) \frac{\partial F^K}{\partial \dot{x}_s} + \\
&+ (L_3 (L_3 \xi^s - \dot{x}_s L_3 \xi^0) - \ddot{x}_s L_3 \xi^0) \frac{\partial F^K}{\partial \ddot{x}_s} + \varphi^z \frac{\partial F^K}{\partial \varphi^z}
\end{aligned} \tag{0.34}$$

Обратимся теперь еще к одному важному вопросу: что дает знание групп и алгебр инвариантности уравнений (0.3) для построения точных решений таких уравнений.

А. В работе [25] предложен новый метод построения точных решений уравнений, обладающих нетривиальной симметрией. Основан метод на том, что на множестве решений реализуется, как правило, линейное представление алгебры Ли. Именно это обстоятельство дает возможность искать решения уравнений (0.3) в виде

$$\psi(\vec{y}) = \rho(\omega) \tag{0.35}$$

где ρ — некоторая неизвестная функция от новых переменных $\vec{\omega}(\vec{y}) = \{\omega_1(\vec{y}), \dots, \omega_m(\vec{y})\}$, число которых на единицу меньше, чем переменных в уравнении (0.3). Эти переменные выбираются из инвариантов однопараметрической группы симметрии уравнения (0.3). Новые переменные $\omega(\vec{y})$ определяются из системы уравнений Лагранжа

$$\frac{dt}{\xi^0} = \frac{dx_1}{\xi^1} = \dots = \frac{dx_K^{(n-1)}}{\xi_K^{(n-1)}} \tag{0.36}$$

Б. Описанный выше способ построения решений уравнений (0.3) пригоден для системы ОДУ (0.1) любого порядка. Существует еще один способ, построения первых интегралов ОДУ, который пригоден для ОДУ, полученных из вариационного принципа.

Теорема 0.1. (Нетер). Пусть задан лагранжиан $L^*(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}})$ и инфинитезимальная, однопараметрическая группа преобразований

$$t' = t + \varepsilon \xi^0(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}})$$

$$x_i' = x_i + \varepsilon \xi^i(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}})$$

(0.37)

$$\dot{x}_i' = \dot{x}_i + \varepsilon \dot{\xi}^i(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}),$$

где ε - малый параметр, а $\xi^0, \xi^i, \dot{\xi}^i$ - функции времени, координат и скоростей. Тогда, если функция Лагранжа инвариантна относительно преобразований (0.37), т.е.

$$L^*(t', \vec{x}', \vec{\dot{x}}') = L^*(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}), \quad (0.38)$$

то соответствующие уравнения Лагранжа имеют интеграл движения

$$J(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}) = \xi^0 L + (\xi^i - \dot{x}_i \xi^0) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad (0.39)$$

Условие инвариантности лагранжиана (0.38), согласно [38], можно заменить другим условием, а именно:

$$X L^*(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}) = 0 \quad (0.40)$$

где

$$X = \xi^0(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^i(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}) \frac{\partial}{\partial x_i} + \dot{\xi}^i(t, \vec{x}, \vec{\dot{x}}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}$$

инфинитезимальный оператор, соответствующий преобразованиям (0.37)

В. Из определения I. инвариантности уравнения (0.3) следует способ построения новых решений из уже известных.

Утверждение 0.1. Если $\psi(\vec{y})$ - решение уравнения (0.3), то

$$\psi_1(\vec{y}) = Q\psi(\vec{y}) \quad (0.41)$$

тоже решение данного уравнения, где

Q - оператор симметрии уравнения (0.3).

Дадим еще несколько важных определений.

Определение 7. Операторы $\{J_{ab}\}$ $a, b = \overline{1,3}$ $a \neq b$ задают представление алгебры Ли группы вращений $O(3)$, если выполняются коммутационные соотношения:

$$[J_{ab}, J_{bc}] = J_{ac} \quad (0.42)$$

Определение 8. Операторы $\{P_\mu, J_{ab}, G_a\}$ $a, b = \overline{1,3}$ $\mu = \overline{0,3}$ задают представление алгебры Ли группы Галилея $G(1,3)$, если выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= [P_a, P_0] = [G_a, G_b] = [P_0, J_{ab}] = \\ &= [P_a, G_b] = 0 \quad [P_a, J_{bc}] = \delta_{ab} P_c - \delta_{ac} P_b \end{aligned} \quad (0.43)$$

$$[P_0, G_a] = P_a \quad [G_a, J_{bc}] = \delta_{ab} G_c - \delta_{ac} G_b$$

Определение 9. Операторы $\{J_{\mu\nu}\}$, $\mu, \nu = \overline{0,3}$ $\mu \neq \nu$ удовлетворяющие коммутационным соотношениям (0.42) и

$$[J_{ab}, J_{ac}] = \delta_{ac} J_{ob} - \delta_{bc} J_{oa} \quad [J_{oa}, J_{ob}] = J_{ba} \quad (0.44)$$

образуют алгебру Ли группы Лоренца $(1,3)$.

Определение 10. Алгебра $AO(1,3)$, дополненная операторами сдвигов P_μ , образует алгебру Ли группы Пуанкаре $P(1,3)$, если выполняются соотношения (0.42), (0.44) и

$$\begin{aligned} [P_a, J_{bc}] &= \delta_{ab} P_c - \delta_{ac} P_b & [P_0, J_{ab}] &= P_b \\ [P_a, J_{ob}] &= -\delta_{ab} P_0 & [P_0, J_{ab}] &= 0 \end{aligned} \quad (0.45)$$

Определение 11. Алгебра $AG(1,3)$, дополненная проективным оператором A и оператором дилатации D , образует алгебру Шредингера $ASch(1,3)$. Коммутационные соотношения алгебры $ASch(1,3)$ задаются формулами (0.43) и (0.46):

$$[P_0, \mathcal{D}] = 2P_0 \quad [P_0, A] = \mathcal{D} \quad [P_\alpha, \mathcal{D}] = P_\alpha$$

$$[P_\alpha, A] = 2G_\alpha \quad [J_{\alpha\beta}, \mathcal{D}] = 0 \quad [J_{\alpha\beta}, A] = 0 \quad (0.46)$$

$$[\mathcal{D}, A] = 2A$$

ГЛАВА I. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХ ЧАСТИЦ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ, СОДЕРЖАЩИХ В КАЧЕСТВЕ ПОДГРУППЫ ГРУППУ ГАЛИЛЕЯ

Настоящая глава посвящена исследованию ОДУ, инвариантных относительно группы Галилея и ее расширений. Выведены уравнения движения для трех частиц, обладающие более широкой группой инвариантности, чем группа Галилея. Для инвариантных гамильтоновых систем ОДУ построены интегралы движения. В тех случаях, когда гамильтоновы системы обладают достаточно высокой симметрией, соответствующие уравнения движения проинтегрированы в квадратурах.

§ I.I. Симметрия, интегралы движения и некоторые частные решения пространственной задачи трех частиц

В настоящем параграфе изучается симметрия пространственной задачи трех частиц:

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i} \quad \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}, \quad (\text{I.I.I})$$

где потенциал

$$U = F(r_{xy}^2) + F(r_{yz}^2) + F(r_{zx}^2), \quad (\text{I.I.2})$$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ — координаты первой, второй и третьей частицы, соответственно; $F(r^2)$ — произвольная достаточно гладкая функция.

$$r_{xy}^2 = (\vec{x} - \vec{y})^2 \quad r_{yz}^2 = (\vec{y} - \vec{z})^2 \quad r_{zx}^2 = (\vec{z} - \vec{x})^2$$

Как видно, уравнения (I.I.I) лагранжевы. Они определяются лагранжианом

$$L^* = \frac{1}{2} (\dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{y}}^2 + \dot{\vec{z}}^2) + U \quad (\text{I.I.3})$$

где $\mathcal{U}$ находится из формулы (I.I.2).

Следуя формулам (0.16), (0.17), для нахождения алгебры инвариантности уравнения (I.I.1) перепишем его в виде

$$\hat{L}_2 \Psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \dot{y}_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \dot{z}_i \frac{\partial}{\partial z_i} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \dot{z}_i} \right) \Psi = 0 \quad (\text{I.I.4})$$

В дальнейшем инфинитезимальные операторы группы инвариантности уравнения (I.I.4) будем искать в классе операторов

$$\hat{Q}_2 = \xi^0 \frac{\partial}{\partial t} + \eta^{ii} \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^{2i} \frac{\partial}{\partial y_i} + \eta^{3i} \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad (\text{I.I.5})$$

где ξ^0, η^{ij} — функции от $t, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

Теорема I.I.1. При произвольной функции $F(\tau^2)$ уравнение (I.I.4) инвариантно относительно группы Галилея G (I.3), базисные элементы алгебры Ли которой имеют вид:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial t} \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a} + \frac{\partial}{\partial y_a} + \frac{\partial}{\partial z_a} \\ G_a = t \left(\frac{\partial}{\partial x_a} + \frac{\partial}{\partial y_a} + \frac{\partial}{\partial z_a} \right) \quad (\text{I.I.6})$$

$$J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a} + y_a \frac{\partial}{\partial y_b} - y_b \frac{\partial}{\partial y_a} + z_a \frac{\partial}{\partial z_b} - z_b \frac{\partial}{\partial z_a}$$

Доказательство. Применим алгоритм нахождения операторов симметрии (0.18) — (0.22) к уравнению (I.I.4). Тогда определяющие уравнения (0.22) для уравнения (I.I.1) примут вид:

$$\hat{L}_2(\hat{L}_2 \dot{\gamma}^{2k} - \dot{\gamma}_k \hat{L}_2 \xi^0) - \frac{\partial u}{\partial y_k} \hat{L}_2 \xi^0 = \gamma^{1i} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_i} + \gamma^{2i} \frac{\partial u}{\partial y_k \partial y_i} + \gamma^{3i} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial z_i} \quad (\text{I.I.7})$$

$$\hat{L}_2(\hat{L}_2 \dot{\gamma}^{3k} - \dot{z}_k \hat{L}_2 \xi^0) - \frac{\partial u}{\partial z_k} \hat{L}_2 \xi^0 = \gamma^{1i} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial x_i} + \gamma^{2i} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial y_i} + \gamma^{3i} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial z_i},$$

где $\hat{L}_2$ задается формулой (I.I.4)

Так как функции ξ^0, γ^{ij} не зависят от $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$, то, расщепляя уравнения (I.I.7) по различным степеням производных, получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 \gamma^{ij}}{\partial t^2} + \frac{\partial \gamma^{ij}}{\partial V_{kn}} \frac{\partial u}{\partial V_{kn}} - 2 \frac{\partial u}{\partial V_{ij}} \frac{\partial \xi^0}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial V_{ij} \partial V_{kn}} \gamma^{kn} \quad (\text{I.I.8})$$

$$\frac{\partial^2 \xi^0}{\partial V_{kn} \partial V_{ps}} = 0 \quad \frac{\partial^2 \gamma^{ij}}{\partial V_{ij}^2} = 2 \frac{\partial^2 \xi^0}{\partial t \partial V_{ij}}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma^{ij}}{\partial V_{ij} \partial V_{kn}} = \frac{\partial^2 \xi^0}{\partial t \partial V_{kn}} \quad (i,j) \neq (k,n) \quad \frac{\partial^2 \gamma^{ij}}{\partial V_{kn} \partial V_{ps}} = 0 \quad \begin{matrix} (i,j) \neq (k,n) \\ (i,j) \neq (p,s) \end{matrix} \quad (\text{I.I.9})$$

$$2 \frac{\partial^2 \gamma^{ij}}{\partial t \partial V_{kn}} = - \frac{\partial u}{\partial V_{ij}} \frac{\partial \xi}{\partial V_{kn}} \quad (i,j) \neq (k,n) \quad 2 \frac{\partial^2 \gamma^{ij}}{\partial t \partial V_{ij}} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial V_{kn}} \frac{\partial \xi}{\partial V_{kn}} = 0,$$

где $V_{1k} = x_k, V_{2k} = y_k, V_{3k} = z_k \quad k = \overline{1,3}$

и в третьем, четвертом и шестом уравнениях (I.I.9) нет суммирования по ij .

Из формул (I.I.6) для функций ξ^0, γ^{ij} получаем следующие выражения

$$\xi = d$$

$$\gamma^{ij} = a^{kij} x_k + b^{kij} y_k + c^{kij} z_k + e^{ij} t + d^{ij} \quad (\text{I.I.10})$$

где $a^{kij}, b^{kij}, c^{kij}, e^{ij}, d^{ij}$ — постоянные коэффициенты, удовлетворяющие соотношениям

$$d^{i1} = d^{i2} = d^{i3} \quad e^{i1} = e^{i2} = e^{i3}$$

$$a^{ki1} + a^{ik1} = b^{ki2} + b^{ik2} = c^{ki3} + c^{ik3} = 0 \quad (\text{I.I.II})$$

$$a^{ki1} = b^{ki2} = c^{ki3} \quad k, i = \overline{1, 3}$$

Остальные коэффициенты равны нулю.

Теперь непосредственной проверкой убеждаемся, что подстановка выражений (I.I.I0), (I.I.II) превращает определяющие уравнения (I.I.8), (I.I.9) в тождества, что и требовалось доказать.

Следствие I.I.I. Операторы инвариантности (I.I.6) порождают следующие конечные преобразования:

$$t' = t + a_0 \quad V'_{ij} = V_{ij} + b_{it} + a_i \quad (\text{I.I.I2 а})$$

$$V'_{ki} = V_{ki} \cos C_{ij} + V_{kj} \sin C_{ij}$$

$$V'_{kj} = -V_{ki} \sin C_{ij} + V_{kj} \cos C_{ij} \quad (\text{I.I.I2 б})$$

Доказательство. Решив задачу Коши (0.I7), где функции ξ^0, η^{ij} определяются формулами (I.I.I0), (I.I.II), приходим к формулам (I.I.I2).

Теорема I.I.I определяет минимальную алгебру инвариантности уравнений (I.I.I). В результате проведенной теоретико-групповой классификации уравнений (I.I.I) установлено, что при некоторых специальных видах потенциала U (I.I.2) уравнения (I.I.I) обладают более широкой группой симметрии, чем группа Галилея G (I.3).

Информацию о симметричных свойствах уравнения (I.I.I) дает

Теорема I.I.2. Уравнения (I.I.I) могут иметь дополнительную группу симметрии только в таких случаях:

$$F(\tau^2) = \lambda_1 \tau^4 + \lambda_2 \tau^2 \quad (\text{I.I.I3})$$

$$F(\tau^2) = \lambda_3 \tau^2 \quad (\text{I.I.I4})$$

$$F(\tau^2) = \lambda_4 \tau^{-2} \quad (\text{I.I.I5})$$

$$F(\tau^2) = \lambda_5 (\tau^2)^\beta \quad \beta = \text{const} \quad (\text{I.I.I6})$$

$$F(\tau^2) = \lambda_6 \ln(\tau^2) \quad (\text{I.I.I7})$$

Теорема I.I.3. Уравнения (I.I.I) с потенциалом (I.I.2), где $F(\tau^2)$ задается формулами (I.I.I3) – (I.I.I7), допускают следующие алгебры инвариантности $\mathcal{B}$:

$$\text{а. } F(\tau^2) = \lambda_1 \tau^4 + \lambda_2 \tau^2$$

$$\mathcal{B} = \{G(1,3), S\} \quad (\text{I.I.I8})$$

$$\text{где } S = (y_i - z_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + (z_i - x_i) \frac{\partial}{\partial y_i} + (x_i - y_i) \frac{\partial}{\partial z_i} \quad (\text{I.I.I9})$$

$$\text{б. } F(\tau^2) = \lambda_3 \tau^2$$

$$\mathcal{B} = \{P_\mu, G_\alpha, Y_\kappa^{a\beta}\}, \quad \mu = \overline{0,3} \quad \alpha, \beta = \overline{1,3} \quad \kappa = \overline{1,6} \quad (\text{I.I.20})$$

где

$$Y_1^{a\beta} = V_{a1} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 1}} + V_{a2} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 2}} + V_{a3} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 3}}$$

$$Y_2^{a\beta} = V_{a1} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 1}} + V_{a3} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 2}} + V_{a2} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 3}}$$

$$Y_3^{a\beta} = V_{a2} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 1}} + V_{a3} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 2}} + V_{a1} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 3}} \quad (\text{I.I.21})$$

$$Y_4^{a\beta} = V_{a2} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 1}} + V_{a1} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 2}} + V_{a3} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 3}}$$

$$Y_5^{a\beta} = V_{a3} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 1}} + V_{a1} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 2}} + V_{a2} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 3}}$$

$$Y_6^{a\beta} = V_{a3} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 1}} + V_{a2} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 2}} + V_{a1} \frac{\partial}{\partial V_{\beta 3}}$$

$$в. \quad F(\tau^2) = \lambda_4 \tau^{-2}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ G(1,3), D_1, A \right\}, \quad (I.I.22)$$

где

$$A = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t V_{ij} \frac{\partial}{\partial V_{ij}} \quad (I.I.23)$$

$$D_1 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + V_{ij} \frac{\partial}{\partial V_{ij}} \quad (I.I.24)$$

$$г. \quad F(\tau^2) = \lambda_5 (\tau^2)^\beta \quad \beta \neq 0$$

$$\mathcal{B} = \left\{ G(1,3), D_2 \right\}, \quad (I.I.25)$$

где

$$D_2 = (1-\beta) t \frac{\partial}{\partial t} + V_{ij} \frac{\partial}{\partial V_{ij}} \quad (I.I.26)$$

$$д. \quad F(\tau^2) = \lambda_6 \ln(\tau^2)$$

$$\mathcal{B} = \left\{ G(1,3), D_3 \right\} \quad (I.I.27)$$

где

$$D_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + V_{ij} \frac{\partial}{\partial V_{ij}} \quad (I.I.28)$$

Доказательство теоремы I.I.2. При доказательстве теоремы I.I.1 получены определяющие уравнения для нахождения симметрии

уравнений (I.I.I). Они имеют вид (I.I.8), (I.I.9). Проведем анализ этих уравнений. Из первого и второго уравнения (I.I.9) следует, что ξ^0 линейно, а η^{kn} квадратично по V_{ij} , т.е.

$$\xi^0 = \alpha^{ij}(t)V_{ij} + \alpha^0(t) \quad (I.I.29)$$

$$\eta^{kn} = \beta^{knpsij}(t)V_{ps}V_{ij} + c^{kniij}(t)V_{ij} + d^{kn}(t)$$

Теперь из последних двух уравнений следует, что $\frac{\partial \xi^0}{\partial V_{ij}} = 0$,

а с учетом второго, третьего и четвертого уравнений (I.I.9)

$$\frac{\partial^2 \eta^{ij}}{\partial V_{kn} \partial V_{ps}} = 0 \quad \text{Выражения для функций } \xi^0, \eta^{ij} \text{ теперь имеют вид:}$$

$$\xi^0 = \alpha^0(t) \quad \eta^{kn} = c^{kniij}(t)V_{ij} + d^{kn}(t) \quad (I.I.30)$$

Из пятого уравнения (I.I.9) заключаем, что $\frac{\partial c^{kniij}}{\partial t} = 0$

при $(ij) \neq (kn)$ и $\frac{\partial^2 \alpha^0}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial c^{ijij}}{\partial t}$, откуда следует, что

$$\xi^0 = \alpha^0(t) \quad \eta^{kn} = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha^0(t)}{\partial t} V_{kn} + c^{kniij} V_{ij} + d^{kn}(t) \quad (I.I.31)$$

где $c^{kniij} = \text{const}$ при $(ij) \neq (kn)$

Подставляя выражения (I.I.31) в уравнения (I.I.8), получаем, что

$$\frac{\partial^2 d^{kn}}{\partial t^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 \alpha^0}{\partial t^3} = 0$$

и поэтому $\xi^0 = \beta_1 t^2 + \beta_2 t + \beta_3$

$$\eta^{ij} = \beta_1 t V_{ij} + c^{ijkn} V_{kn} + d_1^{ij} t + d_2^{ij} \quad (I.I.32)$$

Перепишем теперь уравнения (I.I.8) в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta^{1i}}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial \eta^{1i}}{\partial y_k} + \frac{\partial u}{\partial z_k} \frac{\partial \eta^{1i}}{\partial z_k} - 2 \frac{\partial \xi^0}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x_i} = (\eta^{1i} - \eta^{2i}) \dot{F}_{xy} + \\
& + (\eta^{1i} - \eta^{3i}) \dot{F}_{xz} + (x_i - y_i) \ddot{F}_{xy} \hat{Q}(\tau_{xy}^2) + (x_i - z_i) \ddot{F}_{xz} \hat{Q}_2(\tau_{xz}^2) \\
& \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta^{2i}}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial \eta^{2i}}{\partial y_k} + \frac{\partial u}{\partial z_k} \frac{\partial \eta^{2i}}{\partial z_k} - 2 \frac{\partial \xi^0}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y_i} = (\eta^{2i} - \eta^{3i}) \dot{F}_{yz} + \\
& + (\eta^{2i} - \eta^{1i}) \dot{F}_{yx} + (y_i - z_i) \ddot{F}_{yz} \hat{Q}_2(\tau_{yz}^2) + (y_i - x_i) \ddot{F}_{yx} \hat{Q}_2(\tau_{yx}^2)
\end{aligned} \tag{I.I.33}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta^{3i}}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial \eta^{3i}}{\partial y_k} + \frac{\partial u}{\partial z_k} \frac{\partial \eta^{3i}}{\partial z_k} - 2 \frac{\partial \xi^0}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z_i} = (\eta^{3i} - \eta^{1i}) \dot{F}_{zx} + \\
& + (\eta^{3i} - \eta^{2i}) \dot{F}_{zy} + (z_i - x_i) \ddot{F}_{zx} \hat{Q}(\tau_{zx}^2) + (z_i - y_i) \ddot{F}_{zy} \hat{Q}(\tau_{zy}^2)
\end{aligned}$$

где $\dot{F}_{xy} = \frac{dF(\tau_{xy}^2)}{d(\tau_{xy}^2)}$

$$\hat{Q}_2(\tau_{xy}^2) = 2(\eta^{1i} - \eta^{2i})(x_i - y_i) \tag{I.I.34}$$

Итак, для того, чтобы оператор (I.I.5) был оператором инвариантности уравнения (I.I.1) необходимо, чтобы функции ξ^0 , η^{ij} имели вид (I.I.32) и удовлетворяли уравнениям (I.I.33). Как указывалось выше, V_{ij} при этом удовлетворяют следующим тождественным соотношениям

$$\begin{aligned}
(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 &= \tau_{xy}^2 \\
(y_1 - z_1)^2 + (y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2 &= \tau_{yz}^2
\end{aligned} \tag{I.I.35}$$

$$(x_1 - y_1 + y_1 - z_1)^2 + (x_2 - y_2 + y_2 - z_2)^2 + (x_3 - y_3 + y_3 - z_3)^2 = \tau_{zx}^2$$

Разрешая уравнения (I.I.35) относительно $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$, $y_1 - z_1$, получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 y_1 - z_1 &= \pm (\tau_{yz}^2 - (y_2 - z_2)^2 - (y_3 - z_3)^2)^{1/2} \\
 x_2 - y_2 &= \left\{ (y_2 - z_2) (\tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - 2(x_3 - y_3)(y_3 - z_3)) \pm \left[(y_2 - z_2)^2 (\tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - 2(x_3 - y_3)(y_3 - z_3))^2 + 4(\tau_{yz}^2 - (y_3 - z_3)^2) [\tau_{xy}^2 \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2 ((y_2 - z_2)^2 + (y_3 - z_3)^2) - \tau_{yz}^2 (x_3 - y_3)^2 + (x_3 - y_3)^2 (y_2 - z_2)^2 + (x_3 - y_3)(y_3 - z_3)(\tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2) - \left(\frac{\tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2}{2} \right)^2] \right]^{1/2} \right\} \frac{1}{2((y_3 - z_3)^2 - \tau_{yz}^2)} \\
 x_1 - y_1 &= \pm (\tau_{xy}^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2)^{1/2}
 \end{aligned} \tag{I.I.36}$$

Рассматривая теперь $x_1 - y_1$, $x_2 - y_2$, $y_1 - z_1$ как функции от $((x_3 - y_3), (y_2 - z_2), (y_3 - z_3))$ разложим их в ряд Тейлора в точке $(0, 0, 0)$ с точностью до квадратов, т.е.

$$\begin{aligned}
 y_1 - z_1 &= \pm \left\{ \sqrt{\tau_{yz}^2} + O((y_2 - z_2)^2, \dots, (y_3 - z_3)^2) \right\} \\
 x_2 - y_2 &= \pm \left\{ \frac{[\tau_{yz}^2 (4\tau_{xy}^2 \tau_{yz}^2 - (\tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2)^2)]^{1/2}}{-2\tau_{yz}^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2}{2\tau_{yz}^2} (y_2 - z_2) + O((y_2 - z_2)^2, \dots, (y_3 - z_3)^2) \right\} \\
 x_1 - y_1 &= \pm \left\{ \frac{\tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2}{2\sqrt{\tau_{yz}^2}} + \frac{(4\tau_{xy}^2 \tau_{yz}^2 - (\tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2)^2)^{1/2}}{\tau_{yz}^2} (y_2 - z_2) + \right. \\
 &\quad \left. + O((y_2 - z_2)^2, \dots, (y_3 - z_3)^2) \right\}
 \end{aligned} \tag{I.I.37}$$

Данное разложение имеет место, так как функции $(x_1 - y_1, x_2 - y_2, y_1 - z_1)$ непрерывно-дифференцируемы в точке $(0, 0, 0)$ и

$$4\tau_{xy}^2 \tau_{yz}^2 - (\tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2)^2 \geq 0 \quad (\text{I.I.38})$$

Неравенство (I.I.38) следует из неравенства треугольника

$$\sqrt{\tau_{xy}^2} - \sqrt{\tau_{yz}^2} \leq \sqrt{\tau_{zx}^2} \leq \sqrt{\tau_{xy}^2} + \sqrt{\tau_{yz}^2}$$

Теперь, подставим выражения для ξ^0, η^i (I.I.32) в уравнения (I.I.33), заменяя x_1, x_2, z_1 их выражениями через $x_3, y_3, z_3, y_2, \tau_{xy}^2, \tau_{yz}^2, \tau_{zx}^2$ (I.I.36).

Получающиеся уравнения должны выполняться тождественно по степеням $x_3, y_3, z_3, y_2, z_2, y_1$.

Рассмотрим первое из уравнений (I.I.33) при $i = 3$. Приравняем коэффициенты в левой и правой частях уравнения при x_3, y_3, z_3 .

$$\begin{aligned} &[(x_3 - y_3)\dot{F}_{xy} + (x_3 - z_3)\dot{F}_{xz}](b_1 t + c^{1313}) + [(y_3 - z_3)\dot{F}_{yz} + \\ &+ (y_3 - x_3)\dot{F}_{xy}]c^{1323} + [(z_3 - x_3)\dot{F}_{zx} + (z_3 - y_3)\dot{F}_{zy}]c^{1333} \\ &- 2(2b_1 t + b_2)[(x_3 - y_3)\dot{F}_{xy} + (x_3 - z_3)\dot{F}_{xz}] = \\ &= (b_1 t (x_3 - y_3) + (c^{1313} - c^{2313})x_3 + (c^{1323} - c^{2323})y_3 + \\ &+ (c^{1333} - c^{2333})z_3)\dot{F}_{xy} + (b_1 t (x_3 - z_3) + (c^{1313} - c^{3313})x_3 + \\ &+ (c^{1323} - c^{3323})y_3 + (c^{1333} - c^{3333})z_3)\dot{F}_{xz} + (x_3 - y_3)\ddot{F}_{xy}\hat{Q}_2^0(\tau_{xy}^2) + \\ &+ (x_3 - z_3)\ddot{F}_{xz}\hat{Q}_2^0(\tau_{xz}^2), \end{aligned} \quad (\text{I.I.39})$$

где $\hat{Q}_2^0(\tau_{xy}^2), \hat{Q}_2^0(\tau_{xz}^2)$ - первые члены разложения в ряд Тейлора функций $\hat{Q}_2(\tau_{xy}^2), \hat{Q}_2(\tau_{xz}^2)$ и поэтому являющиеся функциями от $\tau_{xy}^2, \tau_{yz}^2, \tau_{zx}^2$.

Так как коэффициенты при ψ_3 в обеих частях уравнения (I.I.39) должны быть равны, то выполняется уравнение:

$$\begin{aligned}
 & -\dot{F}_{xy}(\beta_1 t + c^{1313}) + (\dot{F}_{yz} + \dot{F}_{xy}) c^{1323} - \dot{F}_{zy} c^{1333} + \\
 & + 2(2\beta_1 t + \beta_2) \dot{F}_{xy} = (-\beta_1 t + c^{1323} - c^{2323}) \dot{F}_{xy} + \\
 & + (c^{1323} - c^{3323}) \dot{F}_{zx} + \\
 & + \left\{ \frac{\tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2}{2\sqrt{\tau_{yz}^2}} \left[\frac{\tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zy}^2}{2\sqrt{\tau_{yz}^2}} (\beta_1 t + c^{1111} - c^{2111}) + \right. \right. \\
 & + \frac{(4\tau_{xy}^2 \tau_{yz}^2 - (\tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2)^2)^{1/2}}{2\sqrt{\tau_{yz}^2}} (c^{1112} - c^{2121} + c^{1211} - c^{2211}) + \quad (I.I.40) \\
 & + \sqrt{\tau_{yz}^2} (c^{1131} - c^{2131}) + (d_1'' - d_1^{21})t + (d_2'' - d_2^{21}) + \\
 & + \frac{(4\tau_{xy}^2 \tau_{yz}^2 - (\tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2)^2)^{1/2}}{-2\sqrt{\tau_{yz}^2}} \left[\frac{(4\tau_{xy}^2 \tau_{yz}^2 - (\tau_{zx}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2)^2)^{1/2}}{-2\sqrt{\tau_{yz}^2}} \cdot \right. \\
 & \left. \left. \cdot (\beta_1 t + c^{1212} - c^{2212}) + \sqrt{\tau_{yz}^2} (c^{1231} - c^{2231}) + (d_1^{12} - d_1^{22})t + d_2^{12} - d_2^{22} \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Для того, чтобы уравнение (I.I.40) превращалось в тождество, необходимо, чтобы оно выполнялось отдельно по каждой из переменных τ_{xy}^2 , τ_{yz}^2 , τ_{zx}^2 . Это возможно лишь в двух случаях, когда верны уравнения:

$$-\dot{F}_{xy}(\beta, t + C^{1313}) + 2(2\beta, t + \beta_2)\dot{F}_{xy} = (-\beta, t - C^{2323})\dot{F}_{xy} \quad (I.I.41)$$

$$-\ddot{P}_{xy} \{ \tau_{xy}^2 (C^{1111} - C^{2111} + \beta, t) \}$$

$$\dot{F}_{yz}(C^{1323} - C^{1333}) = -\ddot{F}_{xy}(-\tau_{yz}^2)(C^{1111} - C^{2111}) \quad (I.I.42)$$

Для уравнения (I.I.42) необходимым является также выполнение уравнения

$$\ddot{F}_{xy} = \text{const} = \lambda_1 \quad (I.I.43)$$

Расщепляя уравнение (I.I.41) по t получаем уравнения

$$-2\dot{F}(\tau_{xy}^2) = \ddot{F}(\tau_{xy}^2) \cdot \tau_{xy}^2 \quad (I.I.44)$$

$$\ddot{F}(\tau_{xy}^2) \tau_{xy}^2 (C^{1111} - C^{2111}) = \dot{F}_{xy} (2\beta_2 - C^{1313} + C^{2323}) \quad (I.I.45)$$

Общее решение уравнений (I.I.43) - (I.I.45) определяется формулами (I.I.I3) - (I.I.I7).

Таким образом, для того, чтобы уравнение (I.I.39) имело место, необходимо, чтобы потенциал U задавался формулами (I.I.2), (I.I.I3) - (I.I.I7).

Доказательство теоремы I.I.3. Подставляя последовательно в уравнения (I.I.33) функции (I.I.I3) - (I.I.I7), получаем уравнения с произвольными коэффициентами C^{ijkl} . Полученные уравнения превращаются в тождество тогда и только тогда, когда коэффициенты C^{ijkl} удовлетворяют соотношениям (I.I.II) и:

$$F(\tau^2) = \lambda_1 \tau^4 + \lambda_2 \tau^2$$

$$C^{1121} = C^{2131} = C^{3111} = -C^{1131} = -C^{2111} = -C^{3121} ; \quad (I.I.46)$$

$$F(\tau^2) = \lambda_4 \tau^{-2}$$

$$\theta_1 \neq 0 \quad \frac{1}{2} \theta_2 = c^{ijij} \quad ;$$

$$F(\tau^2) = \lambda_5 (\tau^2)^\beta \quad (I.I.47)$$

$$\frac{1}{1-\beta} \theta_2 = c^{ijij}$$

$$F(\tau^2) = \lambda_6 \ln(\tau^2) \quad (I.I.48)$$

$$\theta_2 = c^{ijij}$$

Если $F(\tau^2) = \lambda_3 \tau^2$, то коэффициенты c^{ijkl} удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} d_1^{i1} &= d_1^{i2} = d_1^{i3} & d_2^{i1} &= d_2^{i2} = d_2^{i3} \\ c^{b1a1} &= c^{b2a2} = c^{b3a3} & c^{b1a1} &= c^{b2a3} = c^{b3a2} \\ c^{b1a2} &= c^{b2a3} = c^{b3a1} & c^{b1a2} &= c^{b2a1} = c^{b3a3} \\ c^{b1a3} &= c^{b2a1} = c^{b3a2} & c^{b1a3} &= c^{b2a2} = c^{b3a1} \end{aligned} \quad (I.I.49)$$

где $i, a, b = 1, 3$

Формулы (I.I.32), (I.I.II), (I.I.46) – (I.I.49) полностью определяют операторы (I.I.18) – (I.I.28), что и доказывает теорему.

Следствие I.I.2. Уравнения (I.I.I) с потенциалом

$$U = \lambda_4 \left(\frac{1}{\tau_{xy}^2} + \frac{1}{\tau_{yz}^2} + \frac{1}{\tau_{zx}^2} \right) \quad (I.I.50)$$

инвариантны относительно алгебры Шредингера Sch (I.3).

Доказательство. Уравнения движения (I.I.I) с потенциалом (I.I.50) инвариантны относительно операторов $P_0, P_a, G_a,$

D_2, A, J_{ab} , заданных формулами (I.I.6), (I.I.23), (I.I.24)

Непосредственной проверкой убеждаемся, что данные операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям (0.43), (0.46), что и тре-

бовалось доказать.

Следствие I.I.3. Оператор (I.I.19) порождает следующие преобразования координат

$$V'_{ij} = \left(V_{ij} - \frac{V_{i1} + V_{i2} + V_{i3}}{3} \right) \cos \sqrt{3} \alpha + \\ + \frac{1}{2\sqrt{3}} \varepsilon_{jkn} (V_{ik} - V_{in}) \sin \sqrt{3} \alpha + \frac{V_{i1} + V_{i2} + V_{i3}}{3} \quad (\text{I.I.51})$$

Доказательство. Согласно формулам Ли (0.17) для построения преобразований координат, соответствующих оператору (I.I.19), необходимо решить задачу Коши:

$$\frac{dV'_{ij}}{d\alpha} = \varepsilon_{jkn} (V'_{ik} - V'_{in}) \\ V'_{ij} \big|_{\alpha=0} = V_{ij} \quad , \quad (\text{I.I.52})$$

решение которой задается формулой (I.I.51), что и требовалось доказать.

И н т е г р а л ы д в и ж е н и я

Известно, что следствием инвариантности лагранжиана (I.I.3) и уравнений движения (I.I.1) при произвольной функции $F(\tau^2)$ в потенциале (I.I.2) относительно преобразований Галилея (I.I.12), является наличие в уравнениях (I.I.1) десяти интегралов движения:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (\vec{\dot{x}}^2 + \vec{\dot{y}}^2 + \vec{\dot{z}}^2) - U \quad \tilde{P}_a = \dot{x}_a + \dot{y}_a + \dot{z}_a$$

$$\tilde{G}_a = x_a + y_a + z_a - t (\dot{x}_a + \dot{y}_a + \dot{z}_a) \quad (\text{I.I.53})$$

$$\tilde{J}_{ab} = \dot{x}_a x_b - \dot{x}_b x_a + \dot{y}_a y_b - \dot{y}_b y_a + \dot{z}_a z_b - \dot{z}_b z_a$$

Дополнительные первые интегралы в силу теоремы Нетер и утверждения 0.I возникают в двух случаях:

$$a. F(\tau^2) = \lambda_1 \tau^4 + \lambda_2 \tau^2$$

В этом случае лагранжиан (I.I.3) имеет вид

$$L_4^* = \frac{1}{2} (\dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{y}}^2 + \dot{\vec{z}}^2) - \lambda_1 ((\tau_{xy}^2)^2 + (\tau_{yz}^2)^2 + (\tau_{zx}^2)^2) - \lambda_2 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (I.I.54)$$

Из теоремы I.I.2 следует, что уравнения (I.I.I) определяемые лагранжианом (I.I.54), имеют дополнительную симметрию, задаваемую инфинитезимальным оператором S (I.I.I9). Нетрудно проверить, что

$$S L_4^* = 0 \quad (I.I.55)$$

т.е. выполняются условия теоремы Нетер и поэтому уравнения (I.I.I) с лагранжианом (I.I.54) имеют одиннадцатый независимый интеграл движения

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= (y_i - z_i) \frac{\partial L_4^*}{\partial \dot{x}_i} + (z_i - x_i) \frac{\partial L_4^*}{\partial \dot{y}_i} + (x_i - y_i) \frac{\partial L_4^*}{\partial \dot{z}_i} = \\ &= (y_i - z_i) \dot{x}_i + (z_i - x_i) \dot{y}_i + (x_i - y_i) \dot{z}_i. \end{aligned} \quad (I.I.56)$$

Интеграл движения (I.I.56) был впервые обнаружен Соколовым для одномерной задачи трех тел методом разделения переменных, а затем обобщен на случай плоскости и пространства в работах [5], [9]. С теоретико-групповых позиций данный интеграл получен в работе [15].

Отметим также, что утверждение 0.I не дает новых интегралов движения, т.е.

$$S \tilde{H}_1 = S \tilde{P}_a = S \tilde{G}_a = S \tilde{J}_{ab} = 0 \quad a, b = \overline{1,3}$$

$$б. F(\tau^2) = \lambda_4 \tau^{-2}$$

В данном случае лагранжиан уравнений (I.I.I) следующий:

$$L_2^* = \frac{1}{2} (\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2) - \lambda_4 \left(\frac{1}{\tau_{xy}^2} + \frac{1}{\tau_{yz}^2} + \frac{1}{\tau_{zx}^2} \right) \quad (I.I.57)$$

В силу теоремы I.I.2 уравнения (I.I.I), определяемые лагранжианом (I.I.57), инвариантны относительно проективных преобразований, инфинитезимальный оператор A которых имеет вид (I.I.23).

Так как

$$AL_2^* \neq 0,$$

то теорема Нетер здесь неприменима. Однако, воспользовавшись утверждением 0.I, можно построить два дополнительных интеграла движения. Действительно,

$$\tilde{A}_1 = A\tilde{H}_2 = (x_i \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + z_i \dot{z}_i) - 2\tilde{H}_2 t \quad (I.I.58)$$

$$\tilde{A}_2 = A\tilde{A}_1 = (\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2) - 2\tilde{H}_2 t^2 - 2\tilde{A}_1 t \quad (I.I.59)$$

Интеграл $\tilde{A}_2$ известен в литературе под названием интеграл Якоби [13]. Новых интегралов движения оператор симметрии A не дает, т.к.

$$A\tilde{P}_\alpha = \tilde{G}_\alpha \quad A\tilde{G}_\alpha = A\tilde{J}_{\alpha\beta} = A\tilde{A}_2 = 0$$

$$\text{в. } F(\tau^2) = \lambda_5 (\tau^2)^\beta, \quad F(\tau^2) = \lambda_6 \ln(\tau^2)$$

Согласно теореме I.I.2 уравнения движения (I.I.I) в этом случае инвариантны относительно оператора дилатации, который имеет вид (I.I.26), (I.I.28), соответственно. Однако данная симметрия не дает нам новых интегралов движения, т.к.

$$D_2 L_\beta^* \neq 0 \quad D_3 L_0^* \neq 0$$

где D_2, D_3 определяются формулами (I.I.26), (I.I.28) и поэтому не работает теорема Нетер. Воспользовавшись теперь утверждением 0.I, заключаем, что

$$D_2 \tilde{P}_\alpha = \beta \tilde{P}_\alpha \quad D_2 \tilde{G}_\alpha = \tilde{G}_\alpha \quad D_2 \tilde{H}_\beta = 2\beta \tilde{H}_\beta$$

$$D_2 \tilde{J}_{\alpha\beta} = (1+\beta) \tilde{J}_{\alpha\beta} \quad D_3 \tilde{P}_\alpha = 0 \quad D_3 \tilde{G}_\alpha = \tilde{G}_\alpha$$

$$D_3 \tilde{J}_{\alpha\beta} = \tilde{J}_{\alpha\beta} \quad D_3 \tilde{H}_0 = 2\lambda_6$$

$$D_2 \tilde{A}_1 = 0 \quad D_2 \tilde{A}_2 = 2\tilde{A}_2 \quad \text{при} \quad \beta = -1$$

где $\tilde{H}_\beta = \frac{1}{2} (\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2) + \lambda_5 [(\tau_{xy}^2)^\beta + (\tau_{yz}^2)^\beta + (\tau_{zx}^2)^\beta]$,

$$\tilde{H}_0 = \frac{1}{2} (\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2) + \lambda_6 [\ln(\tau_{xy}^2) + \ln(\tau_{yz}^2) + \ln(\tau_{zx}^2)]$$

Таким образом, можно сделать вывод, что знание операторов симметрии (I.I.26), (I.I.28) ничего не дает для построения новых интегралов движения.

г. При $F(\tau^2) = \lambda_3 \tau^2$, как следует из теоремы I.I.2, уравнения (I.I.I) инвариантны относительно 6I-мерной алгебры Ли (I.I.2I). Данный случай хорошо изучен / см. например [20] /, и поэтому мы не будем на нем останавливаться.

Ч а с т н ы е р е ш е н и я. До настоящего времени известно лишь три случая взаимодействия трех материальных точек, полностью проинтегрированных в квадратурах методом разделения переменных, это пространственная задача трех тел, взаимодействующих с потенциалом (I.I.I4), и одномерная задача трех тел, взаимодействующих с потенциалами (I.I.I3), (I.I.I5) ([19], [20]). Поэтому многие авторы, начиная еще с Лагранжа, занимались другой, не менее важной задачей – построением частных решений уравнений (I.I.I). Строятся частные решения следующим образом. Уравнения движения (I.I.I) представляют собой ОДУ восемнадцатого порядка, имеющее десять независимых интегралов движения (I.I.53). В частном случае, когда потенциалы задаются формулами (I.I.2), (I.I.I3), (I.I.I5) уравнения движения (I.I.I) имеют дополнительные первые интегралы (I.I.56), (I.I.58), (I.I.59). В общем случае знание

интегралов (I.I.53) позволяет понизить порядок системы (I.I.I) до шести единиц, используя теорию групп функций [7]. Интегралы (I.I.56), (I.I.58), (I.I.59) позволяют в каждом из указанных случаев понизить порядок системы еще на две единицы. Понижение порядка системы (I.I.I) осуществляется с помощью подходящей замены переменных. Частные решения ищутся, как правило, уже после понижения порядка системы, в новых переменных. Рассмотрим более подробно случай взаимодействия трех тел с потенциалом (I.I.2), (I.I.I3), имеющий дополнительный первый интеграл (I.I.56). Используя интеграл (I.I.56), одномерный случай такой задачи был полностью проинтегрирован в квадратурах Ю.Д.Соколовым [19]. Обобщив замену переменных, предложенную Соколовым, Е.Егервари [9] построил частные решения плоской задачи трех тел, взаимодействующих с потенциалом (I.I.2), (I.I.I3). Некоторые частные решения пространственной задачи трех тел найдены в работе [5]

В настоящем разделе, путем обобщения замены переменных, предложенную Е.Егервари, построены частные решения пространственной задачи трех тел, взаимодействующих с потенциалом (I.I.2), (I.I.I3).

Для построения решений уравнений (I.I.I) совместим центр тяжести системы трех тел с полюсом системы координат, т.е. положим

$$x_a + y_a + z_a = 0 \quad a = \overline{1,3}$$

и сделаем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} 3V_{1K} &= S_1 \cos \left(\alpha_1 + \frac{2\pi(K-1)}{3} \right) + S_2 \cos \left(\alpha_2 - \frac{2\pi(K-1)}{3} \right) + \\ &+ S_3 \cos \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \frac{2\pi(K-1)}{3} \right) + S_4 \sin \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \frac{2\pi(K-1)}{3} \right). \\ 3V_{2K} &= S_1 \cos \left(\alpha_1 + \frac{2\pi K}{3} \right) + S_2 \cos \left(\alpha_2 - \frac{2\pi(K+1)}{3} \right) + \end{aligned} \quad (I.I.60)$$

$$\begin{aligned}
& + S_3 \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \frac{2\pi(\kappa-1)}{3}\right) + S_4 \sin\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \frac{2\pi(\kappa-1)}{3}\right) \\
3V_{3\kappa} = & S_1 \cos\left(\alpha_1 + \frac{2\pi(\kappa+1)}{3}\right) + S_2 \cos\left(\alpha_2 - \frac{2\pi\kappa}{3}\right) + \\
& + S_3 \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \frac{2\pi(\kappa-1)}{3}\right) + S_4 \sin\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} + \frac{2\pi(\kappa-1)}{3}\right).
\end{aligned}$$

В новых переменных выражение для кинетической энергии принимает вид:

$$\begin{aligned}
T = \frac{1}{2}(\dot{\vec{x}}^2 + \dot{\vec{y}}^2 + \dot{\vec{z}}^2) = \frac{1}{4} \left\{ \dot{S}_1^2 + \dot{S}_2^2 + \dot{S}_3^2 + \dot{S}_4^2 + (S_1 \dot{\alpha}_1)^2 + \right. \\
\left. + (S_2 \dot{\alpha}_2)^2 + (S_3^2 + S_4^2) \left(\frac{\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)(\dot{S}_3 S_4 - S_3 \dot{S}_4) \right\} \quad (\text{I.I.6I})
\end{aligned}$$

Потенциал взаимодействия (I.I.2), (I.I.I3) зависит только от S_i , $i=1,4$:

$$\begin{aligned}
U = \lambda_1 \left\{ \tau_{xy}^4 + \tau_{yz}^4 + \tau_{zx}^4 \right\} + \lambda_2 \left\{ \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \right\} = \\
= \lambda_1 \left\{ \frac{3}{4}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2)^2 + \frac{3}{8}(S_4^2 - S_3^2 - S_1 S_2)^2 = \right. \quad (\text{I.I.62}) \\
\left. = \frac{3}{2}(S_3 S_4)^2 \right\} + \lambda_2 \frac{3}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2).
\end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа в новых переменных имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \ddot{S}_1 - \frac{1}{2} S_1 \dot{d}_1^2 = - \frac{\partial U}{\partial S_1} \quad \frac{1}{2} \ddot{S}_2 - \frac{1}{2} S_2 \dot{d}_2^2 = - \frac{\partial U}{\partial S_2} \\
\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{S}_3 + \frac{1}{8} S_4 (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) \right] - \frac{1}{2} S_3 \left(\frac{\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} \dot{S}_4 (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) = - \frac{\partial U}{\partial S_3} \\
\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{S}_4 + \frac{1}{8} S_3 (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) \right] - \frac{1}{2} S_4 \left(\frac{\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} \dot{S}_3 (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) = - \frac{\partial U}{\partial S_4} \quad (\text{I.I.63})
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left[S_1^2 \dot{\alpha}_1 + \frac{1}{4} (S_3^2 + S_4^2) (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) + \frac{1}{4} (\dot{S}_3 S_4 - S_3 \dot{S}_4) \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[S_2^2 \dot{\alpha}_2 + \frac{1}{4} (S_3^2 + S_4^2) (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) + \frac{1}{4} (S_3 \dot{S}_4 - \dot{S}_3 S_4) \right] = 0$$

В новых переменных интегралы движения $\tilde{G}_a = \tilde{P}_a = 0$. Однако это не уменьшает общности, т.к. если мы проинтегрируем уравнения (I.I.63), то недостающими интегралами движения являются интегралы движения $\tilde{G}_a, \tilde{P}_a$.

Отметим, что, если положить в уравнения (I.I.63) $S_3 = S_4 = 0$, то приходим к уравнениям, полученным в [9] для плоской задачи трех тел.

Если предположить, что $S_1, S_2, S_3, S_4, \alpha_1, \alpha_2$ — постоянны, то ОДУ (I.I.63) сводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} S_1 \dot{\alpha}_1^2 &= \lambda_1 \left[3(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) S_1 + \frac{3}{4} (S_1 S_2 + S_3^2 - S_4^2) S_2 \right] + 3\lambda_2 S_1 \\ S_2 \dot{\alpha}_2^2 &= \lambda_1 \left[3(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) S_2 + \frac{3}{4} (S_1 S_2 + S_3^2 - S_4^2) S_1 \right] + 3\lambda_2 S_2 \\ S_3 (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)^2 &= 8\lambda_1 \left[3(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) S_3 + \frac{3}{2} (S_1 S_2 + S_3^2 - S_4^2) S_3 + \right. \\ &\quad \left. + 3S_3 S_4^2 \right] + 24\lambda_2 S_3 \\ S_4 (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2)^2 &= 8\lambda_1 \left[3(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2) S_4 + \frac{3}{2} (S_4^2 - S_3^2 - S_1 S_2) S_4 + 3S_3^2 S_4 \right] + 24\lambda_2 S_4 \\ S_1^2 \dot{\alpha}_1 + \frac{1}{4} (S_3^2 + S_4^2) (\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2) &= C_1 \quad S_2^2 \dot{\alpha}_2 + \frac{1}{4} (S_3^2 + S_4^2) (\dot{\alpha}_2 - \dot{\alpha}_1) = C_2 \end{aligned} \quad (\text{I.I.64})$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Покажем, что существуют решения алгебраической системы уравнений (I.I.64). Для этого положим $S_1 = S_2, S_3 = S_4$, откуда следует, что $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2, C_1 = C_2$. Система (I.I.64) переходит в следующую:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1^2 &= \lambda_1 \left[3(2S_1^2 + 2S_3^2) + \frac{3}{4} S_1^2 \right] + 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \left[\frac{5}{2} S_1^2 + 3S_3^2 \right] + \lambda_2 &= 0 \quad S_1^2 \dot{\alpha}_1 = C_1 \end{aligned} \quad (\text{I.I.65})$$

Данная система уравнений имеет решение при $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Выражая S_3^2 и $\dot{\alpha}_1$ из второго и третьего уравнений через S_1^2 получаем кубическое уравнение относительно S_1^2 :

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{C_1}{S_1^2} \quad S_3^2 = \frac{\lambda_2}{3\lambda_1} - \frac{5}{6} S_1^2$$

$$\frac{7}{4} \lambda_1 (S_1^2)^3 + \lambda_2 S_1^2 - C_1^2 = 0 \quad (\text{I.I.66})$$

Исследуем уравнение (I.I.66). Для этого рассмотрим функцию

$$\mathcal{P} = \frac{7}{4} \lambda_1 u^3 + \lambda_2 u - C_1^2$$

Экстремум данной функции будет в точках

$$u_{1,2} = \pm \left(-\frac{4\lambda_2}{21\lambda_1} \right)^{1/2}$$

откуда следует, что при $\lambda_1 > 0$ уравнение (I.I.66) всегда будет иметь один положительный корень, при $\lambda_1 < 0$ необходимым условием существования хотя бы одного положительного корня уравнения (I.I.66) является неравенство

$$\frac{2}{3} \left(-\frac{4\lambda_2}{21\lambda_1} \right)^{1/2} \geq C_1^2$$

Таким образом, разрешая систему уравнений (I.I.66), получаем частные решения уравнения (I.I.64), а значит и пространственной задачи трех тел (I.I.I).

§ I.2. Об одном классе уравнений, инвариантных относительно группы Галилея

В данном параграфе изучаются уравнения движения трех частиц

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i &= \Phi^{1i}(t, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\dot{x}}, \vec{\dot{y}}, \vec{\dot{z}}) \\ \ddot{y}_i &= \Phi^{2i}(t, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\dot{x}}, \vec{\dot{y}}, \vec{\dot{z}}) \\ \ddot{z}_i &= \Phi^{3i}(t, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{\dot{x}}, \vec{\dot{y}}, \vec{\dot{z}}) \end{aligned} \quad (\text{I.2.I})$$

где $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ - координаты первой, второй и третьей частиц, соответственно, Φ_{ij} - достаточно гладкие функции своих аргументов.

Уравнения Лагранжа для трех частиц типа (I.I.I), (I.I.2) являются частным случаем уравнений (I.2.I). Как было показано в параграфе I.I, уравнения (I.I.I) инвариантны относительно группы Галилея, инфинитезимальные операторы алгебры Ли которой имеют вид (I.I.6). При некоторых специальных видах потенциала (I.I.2), (I.I.I3), (I.I.I5) уравнения движения (I.I.I) имеют дополнительную симметрию, определяемую операторами (I.I.I9) (I.I.23). В связи с этим возникают следующие задачи:

- описать уравнения, лагранжиан которых имеет вид

$$L^* = \frac{1}{2} (\vec{x}^2 + \vec{y}^2 + \vec{z}^2) + U(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, t) \quad (I.2.2)$$

где потенциал U - достаточно гладкая функция своих аргументов, а также уравнения более общего типа - уравнения вида (I.2.I), инвариантные относительно группы Галилея. Представление алгебры Ли группы $G(I,3)$ задается операторами (I.I.6);

- найти уравнения движения, инвариантные относительно обобщенной группы Галилея, содержащей в качестве подгруппы группу Шредингера $Sch(I,3)$. Здесь под обобщенной группой Галилея $\tilde{G}(I,3)$ будем понимать группу преобразований (I.I.I2), дополненную проективными преобразованиями:

$$t' = \frac{t}{1 - \alpha t} \quad V'_{ij} = \frac{V_{ij}}{1 - \alpha t} \quad (I.2.3)$$

$$t' = \frac{t}{1 - \alpha \sigma_k} \quad V'_{ij} = \frac{V_{ij}}{1 - \alpha \sigma_k} \quad (I.2.4)$$

где $\sigma_k = x_k + y_k + z_k$ $i, j, k = \overline{1,3}$

- описать галилеевски инвариантные уравнения, имеющие дополнительную симметрию, определяемую оператором (I.I.I9);
- для полученных инвариантных уравнений Лагранжа построить интегралы движения.

Данные задачи решаются в этом параграфе.

Г а л и л е е в с к и и н в а р и а н т н ы е у р а в -
н е н и я д в и ж е н и я

Теорема I.2.I. Уравнения (I.2.I) инвариантны относительно группы $G(I,3)$, элементы алгебры Ли которой задаются формулами (I.I.6), только в следующем случае:

$$\vec{\Phi}^i = (\vec{x} - \vec{y})\varphi^{i1} + (\vec{x} - \vec{z})\varphi^{i2} + [\dot{x} - \dot{y}, \vec{x} - \vec{y}]\varphi^{i3} \quad (I.2.5)$$

где $\vec{\Phi}^i = (\Phi^{i1}, \Phi^{i2}, \Phi^{i3})$, $i = \overline{1,3}$

$$\varphi^{ij} = \varphi^{ij}(W), \quad W = (\omega_1, \dots, \omega_9)$$

$$\omega_1 = (x - y)^2 \quad \omega_2 = (y - z)^2 \quad \omega_3 = (z - x)^2$$

$$\omega_4 = (\dot{x} - \dot{y})^2 \quad \omega_5 = (\dot{y} - \dot{z})^2 \quad \omega_6 = (\dot{z} - \dot{x})^2 \quad (I.2.6)$$

$$\omega_7 = (\dot{x} - \dot{y})(x - y) \quad \omega_8 = (\dot{y} - \dot{z})(y - z) \quad \omega_9 = (\dot{z} - \dot{x})(z - x)$$

(xy) - скалярное произведение векторов;

$[\vec{x}\vec{y}]$ - векторное произведение векторов.

Доказательство. Для доказательства необходимости теоремы перепишем систему уравнений (I.2.I) в следующей форме:

$$L_2 \psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{v}_{ij} \frac{\partial}{\partial v_{ij}} + \Phi^{ij} \frac{\partial}{\partial v_{ij}} \right) \psi = 0 \quad (I.2.8)$$

Применим алгоритм (0.I7) - (0.22) к уравнению (I.2.8).

Условие инвариантности уравнения (I.2.8) относительно операторов (I.I.6) имеет вид:

$$[L_2, X^A] = BL_2 \quad A = \overline{1,10} \quad (I.2.9)$$

где B - произвольная функция, χ^A - операторы (I.1.6).

В этом случае определяющие уравнения (0.22) запишутся следующим образом:

$$\Phi_{V_{j\beta}}^{ia} V_{jc} - \Phi_{V_{jc}}^{ia} V_{j\beta} + \Phi_{\dot{V}_{j\beta}}^{ia} \dot{V}_{jc} - \Phi_{\dot{V}_{jc}}^{ia} \dot{V}_{j\beta} = \delta_{a\beta} \Phi^{ic} - \delta_{ac} \Phi^{i\beta} \quad (I.2.I0)$$

$$\Phi_{x_\beta}^{ia} + \Phi_{y_\beta}^{ia} + \Phi_{z_\beta}^{ia} = 0 \quad \Phi_t^{ia} = 0$$

$$\Phi_{\dot{x}_\beta}^{ia} + \Phi_{\dot{y}_\beta}^{ia} + \Phi_{\dot{z}_\beta}^{ia} = 0 \quad (I.2.II)$$

где $\alpha, \beta, i, j = \overline{1,3}$ $\Phi_{x_\beta}^{ia} = \frac{\partial \Phi^{ia}}{\partial x_\beta}$

Интегрирование уравнений (I.2.II) дает нам такое выражение для функций Φ^{ij} .

$$\Phi^{ij} = \Phi^{ij}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2) \quad (I.2.I2)$$

где $\vec{u}_1 = \vec{x} - \vec{y}$ $\vec{u}_2 = \vec{x} - \vec{z}$.

Подставляя выражение (I.2.I2) в определяющие уравнения (I.2.I0), получаем следующие уравнения для функций (I.2.I2)

$$\Phi_{u_{j\beta}}^{ia} u_{jc} - \Phi_{u_{jc}}^{ia} u_{j\beta} + \Phi_{\dot{u}_{j\beta}}^{ia} \dot{u}_{jc} - \Phi_{\dot{u}_{jc}}^{ia} \dot{u}_{j\beta} = \delta_{a\beta} \Phi^{ic} - \delta_{ac} \Phi^{i\beta} \quad (I.2.I3)$$

Положим $\beta = 2$ $c = 3$. Тогда уравнения (I.2.I3) имеют вид:

$$u_{j2} \cdot \Phi_{u_{j3}}^{ia} - u_{j3} \Phi_{u_{j2}}^{ia} + \dot{u}_{j2} \Phi_{\dot{u}_{j3}}^{ia} - \dot{u}_{j3} \Phi_{\dot{u}_{j2}}^{ia} = \begin{cases} 0 & \alpha = 1 \\ -\Phi^{i3} & \alpha = 2 \\ \Phi^{i2} & \alpha = 3 \end{cases} \quad (I.2.I4)$$

Общим решением уравнения (I.2.I4) являются функции:

$$\Phi^i = \hat{\varphi}^i(u_{11}, \dot{u}_{11}, W) \\ \Phi^{i2} = \frac{\hat{\varphi}^{i2} \dot{u}_{13} - \hat{\varphi}^{i3} u_{13}}{u_{12} \dot{u}_{13} - \dot{u}_{12} u_{13}} \quad \Phi^{i3} = \frac{\hat{\varphi}^{i3} u_{12} - \hat{\varphi}^{i2} \dot{u}_{12}}{u_{12} \dot{u}_{13} - \dot{u}_{12} u_{13}} \quad (I.2.I5)$$

$$\hat{\varphi}^{ij} = \hat{\varphi}^{ij}(u_{11}, \dot{u}_{11}, w)$$

Пусть теперь $B=3$ $C=1$. Тогда уравнения (I.2.I3) выглядят следующим образом:

$$u_{j3} \Phi_{u_{j1}}^{ia} - u_{j1} \Phi_{u_{j3}}^{ia} + \dot{u}_{j3} \Phi_{\dot{u}_{j1}}^{ia} - \dot{u}_{j1} \Phi_{\dot{u}_{j3}}^{ia} = \begin{cases} \Phi^{i3} & a=1 \\ 0 & a=2 \\ -\Phi^{i1} & a=3 \end{cases} \quad (\text{I.2.I6})$$

Подставляя выражения для функций Φ^{ik} (I.2.I5) в уравнения (I.2.I6) получаем систему уравнений относительно функций

$$u_{13} \hat{\varphi}_{u_{11}}^{ik} + \dot{u}_{13} \hat{\varphi}_{\dot{u}_{11}}^{ik} = \begin{cases} \frac{\hat{\varphi}^{i2} \dot{u}_{12} - \hat{\varphi}^{i3} u_{12}}{u_{13} \dot{u}_{12} - u_{12} \dot{u}_{13}} & k=1 \\ \frac{\hat{\varphi}^{i2} \dot{u}_{12} - \hat{\varphi}^{i3} u_{12}}{u_{12} \dot{u}_{13} - u_{12} u_{13}} u_{11} - \hat{\varphi}^{i1} u_{13} & k=2 \\ \frac{\hat{\varphi}^{i2} \dot{u}_{12} - \hat{\varphi}^{i3} u_{12}}{u_{12} \dot{u}_{13} - u_{12} u_{13}} \dot{u}_{11} - \hat{\varphi}^{i1} \dot{u}_{13} & k=3 \end{cases} \quad (\text{I.2.I7})$$

Введем обозначения

$$u_{12} \dot{u}_{12} + u_{13} \dot{u}_{13} = \sigma_3 \quad u_{12}^2 + u_{13}^2 = \sigma_1 \quad \dot{u}_{12}^2 + \dot{u}_{13}^2 = \sigma_2$$

Расщепляя уравнения (I.2.I7) по степеням u_{13} , получаем систему уравнений

$$\sigma_3 \hat{\varphi}_{u_{11}}^{ik} + \sigma_2 \hat{\varphi}_{\dot{u}_{11}}^{ik} = \begin{cases} \hat{\varphi}^{i3} \\ -\hat{\varphi}^{i3} u_{11} - \hat{\varphi}^{i1} \sigma_3 \\ -\hat{\varphi}^{i3} \dot{u}_{11} - \hat{\varphi}^{i1} \sigma_2 \end{cases} \quad (\text{I.2.I8})$$

$$\sigma_1 \hat{\varphi}_{u_{11}}^{ik} + \sigma_3 \varphi_{\dot{u}_{11}}^{ik} = \begin{cases} \hat{\varphi}^{i2} \\ -\hat{\varphi}^{i2} u_{11} - \hat{\varphi}^{i1} \sigma_1 \\ -\hat{\varphi}^{i2} \dot{u}_{11} - \hat{\varphi}^{i1} \sigma_3 \end{cases} \quad (\text{I.2.I9})$$

Общим решением уравнений (I.2.I8) будут функции:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^{i3} + \dot{u}_{11} \hat{\varphi}^{i1} &= \psi^{i3} & \hat{\varphi}^{i2} + u_{11} \hat{\varphi}^{i1} &= \psi^{i2} \\ \hat{\varphi}^{i1} (\omega_2 - \dot{u}_{11}^2)^{-1/2} - \psi^{i3} \dot{u}_{11} \omega_2 (\omega_2 - \dot{u}_{11}^2)^{-1/2} &= \psi^{i1} \\ \psi^{ij} &= \psi^{ij}(J_1, \omega_0, \dots, \omega_9), \end{aligned} \quad (\text{I.2.20})$$

где
$$J_1 = \frac{\omega_2 u_{11} - \omega_3 \dot{u}_{11}}{\omega_2 (\omega_2 - \dot{u}_{11}^2)^{1/2}}$$

Подставляя выражения (I.2.20) в уравнения (I.2.I9), заключаем, что

$$\begin{aligned} \psi^{i3} &= \hat{\psi}^{i3}(w) & \psi^{i2} &= \hat{\psi}^{i2}(w) \\ \psi^{i1} \sqrt{\sigma_2} &= \hat{\psi}^{i1} (\omega_2 (\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3^2))^{1/2} + \frac{(\hat{\psi}^{i2} \omega_2 - \hat{\psi}^{i3} \omega_3) (u_{11} \omega_2 - \dot{u}_{11} \omega_3)}{(\omega_1 \omega_2 - \omega_3^2) \omega_2} \end{aligned}$$

После несложных преобразований получаем выражения для функций $\vec{\Phi}^i$:

$$\vec{\Phi}^i = \vec{u}_1 \varphi^{i1} + \vec{u}_1 \varphi^{i2} + [\vec{u}_1, \dot{u}_1] \varphi^{i3} \quad (\text{I.2.2I})$$

где $\varphi^i = \varphi^i(w)$

Перепишав выражение (I.2.2I) в терминах $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$, получаем выражение

$$\vec{\Phi}^i = (\vec{x} - \vec{y}) \varphi^{i1} + (\vec{x} - \vec{y}) \varphi^{i2} + [\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}] \varphi^{i3}, \quad (\text{I.2.22})$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь произвольный вектор $\vec{u}$ из набора векторов $\{\vec{x} - \vec{z}, [\vec{x} - \vec{z}, \vec{x} - \vec{z}], \dots\}$. Покажем, что его можно выразить через вектора $\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}, [\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}]$ и инвариантные группы $O(3)$.

Действительно,

$$u_1(x_1 - y_1) + u_2(x_2 - y_2) + u_3(x_3 - y_3) = (u(x - y))$$

$$u_1(\dot{x}_1 - \dot{y}_1) + u_2(\dot{x}_2 - \dot{y}_2) + u_3(\dot{x}_3 - \dot{y}_3) = (u(\dot{x} - \dot{y}))$$

$$u_1[x - y, \dot{x} - \dot{y}]_1 + u_2[x - y, \dot{x} - \dot{y}]_2 + u_3[x - y, \dot{x} - \dot{y}]_3 = (u[x - y, \dot{x} - \dot{y}])$$

Откуда находим

$$\begin{aligned} \vec{u} = & \left\{ (u(x - y)) [(\vec{\dot{x} - \dot{y}})((x - y)(\dot{x} - \dot{y})) - (\vec{x - y})(\dot{x} - \dot{y})^2] + \right. \\ & + (u(\dot{x} - \dot{y})) [(\vec{\dot{x} - \dot{y}})(x - y)^2 - (\vec{x - y})((x - y)(\dot{x} - \dot{y}))] + (u[x - y, \dot{x} - \dot{y}]) \cdot \\ & \cdot [x - \vec{y}, \dot{x} - \dot{y}] \left. \right\} \cdot \frac{1}{(x - y)(\dot{x} - \dot{y})^2 - (x - y)^2(\dot{x} - \dot{y})^2} \end{aligned}$$

Достаточность теоремы доказывается с помощью конечных преобразований (I.I.I2), порождаемых операторами (I.I.6). Инвариантность уравнения (I.2.I), (I.2.5) относительно группы галилеевских преобразований и группы сдвигов достаточно очевидна. Для проверки инвариантности уравнений относительно группы вращений, рассмотрим преобразования, порождаемые оператором J_{23} :

$$\begin{aligned} V_{1K}' &= V_{1K} & V_{2K}' &= V_{2K} \cos \alpha + V_{3K} \sin \alpha \\ V_{3K}' &= -V_{2K} \sin \alpha + V_{3K} \cos \alpha \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt'} &= \frac{d}{dt} & V_{2K}^{(e)'} &= V_{2K}^{(e)} \cos \alpha + V_{3K}^{(e)} \sin \alpha, \\ V_{1K}^{(e)'} &= V_{1K}^{(e)} & V_{3K}^{(e)'} &= -V_{2K}^{(e)} \sin \alpha + V_{3K}^{(e)} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что, если

$$\ddot{x}_i = \Phi''(\dot{V}_{ij}, V_{ij})$$

то

$$\ddot{x}_i' = \Phi''(\dot{V}_{ij}', V_{ij}')$$

(I.2.23)

где функция Φ'' задается формулой (I.2.22):

$$\ddot{x}_1 = (x_1 - y_1) \varphi'' + (\dot{x}_1 - \dot{y}_1) \varphi'^2 + ((x_2 - y_2)(\dot{x}_3 - \dot{y}_3) - (\dot{x}_2 - \dot{y}_2)(x_3 - y_3)) \varphi'^3$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_1 = & (x'_1 - y'_1) \varphi'' + (\dot{x}'_1 - \dot{y}'_1) \varphi'^2 + \{ [x'_2 - y'_2] \cos \alpha + (x'_3 - y'_3) \sin \alpha \} \cdot \\ & \cdot [-(\dot{x}'_2 - \dot{y}'_2) \sin \alpha + (\dot{x}'_3 - \dot{y}'_3) \cos \alpha] - [(\dot{x}'_2 - \dot{y}'_2) \cos \alpha + (\dot{x}'_3 - \dot{y}'_3) \sin \alpha] \cdot \\ & \cdot [- (x'_2 - y'_2) \sin \alpha + (x'_3 - y'_3) \cos \alpha] \} \varphi'^3. \end{aligned}$$

Откуда и следует уравнение (I.2.22). Аналогично доказывается теорема для остальных преобразований поворота. Теорема доказана.

Теорема I.2.2. Пусть движение частиц определяется лагранжианом (I.2.2). Тогда уравнения Лагранжа будут инвариантны относительно группы G (I,3) тогда и только тогда, когда

$$U(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = U(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad (\text{I.2.24})$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ определяются формулами (I.2.6).

Доказательство. Уравнения движения с лагранжианом (I.2.2) имеют вид:

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial U}{\partial x_i} \quad \ddot{y}_i = \frac{\partial U}{\partial y_i} \quad \ddot{z}_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (\text{I.2.25})$$

Для того, чтобы уравнения (I.2.1) с правой частью (I.2.5) имели форму (I.2.25) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия совместности:

$$\frac{\partial \Phi^{kn}}{\partial V_{ij}} = \frac{\partial \Phi^{ij}}{\partial V_{kn}} \quad k, n, i, j = \overline{1, 3} \quad (\text{I.2.26})$$

Учитывая, что правая часть уравнений (I.2.25) зависит только от координат частиц, перепишем выражение для функции (I.2.5) следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Phi^{1i} &= (x_i - y_i) \psi^{11} + (x_i - z_i) \psi^{12} + \{ [\vec{x}\vec{y}] + [\vec{y}\vec{z}] + [\vec{z}\vec{x}] \}_i \psi^{13} \\
\Phi^{2i} &= (y_i - z_i) \psi^{21} + (y_i - x_i) \psi^{22} + \{ [\vec{x}\vec{y}] + [\vec{y}\vec{z}] + [\vec{z}\vec{x}] \}_i \psi^{23} \\
\Phi^{3i} &= (z_i - x_i) \psi^{31} + (z_i - y_i) \psi^{32} + \{ [\vec{x}\vec{y}] + [\vec{y}\vec{z}] + [\vec{z}\vec{x}] \}_i \psi^{33}
\end{aligned} \quad (I.2.27)$$

где $\psi^{ij} = \psi^{ij}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

Подставив выражения (I.2.27) в уравнения (I.2.26), получаем условия совместности для функций ψ^{ij} :

$$\begin{aligned}
\psi_{\omega_1}^{11} &= \psi_{\omega_1}^{22} & \psi_{\omega_2}^{11} &= \psi_{\omega_1}^{21} & \psi_{\omega_1}^{12} &= \psi_{\omega_3}^{21} \\
\psi_{\omega_2}^{12} &= \psi_{\omega_3}^{22} & \psi_{\omega_3}^{11} &= \psi_{\omega_1}^{12} & \psi_{\omega_1}^{21} &= \psi_{\omega_2}^{22} \\
\psi_{\omega_2}^{31} &= \psi_{\omega_3}^{32} & \psi_{\omega_2}^{11} &= \psi_{\omega_1}^{32} & \psi_{\omega_2}^{21} &= \psi_{\omega_2}^{32} \\
\psi_{\omega_3}^{21} &= \psi_{\omega_2}^{12} & \psi_{\omega_3}^{31} &= \psi_{\omega_3}^{12} & \psi_{\omega_2}^{31} &= \psi_{\omega_3}^{22}
\end{aligned} \quad (I.2.28)$$

$$\psi^{13} = 0$$

Из соотношений (I.2.28) следует, что существует такая функция $u = u(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$:

$$\begin{aligned}
\psi^{11} &= 2 \frac{\partial u}{\partial \omega_1} & \psi^{12} &= 2 \frac{\partial u}{\partial \omega_3} \\
\psi^{21} &= 2 \frac{\partial u}{\partial \omega_2} & \psi^{22} &= 2 \frac{\partial u}{\partial \omega_1} \\
\psi^{31} &= 2 \frac{\partial u}{\partial \omega_3} & \psi^{32} &= 2 \frac{\partial u}{\partial \omega_2}
\end{aligned} \quad (I.2.29)$$

Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность теоремы вытекает из теоремы I.2.I.

Следствие I.2.I. Интегралы движения для уравнений (I.2.25) с потенциалом (I.2.24) находятся по теореме Нетер, т.к.

$$\chi^A L^* = 0 \quad A = \overline{1,10}$$

где χ^A – операторы инвариантности (I.I.6). Интегралы имеют вид (I.I.53), где потенциал и задается формулой (I.2.24).

У р а в н е н и я д в и ж е н и я , и н в а р и а н т -
н ы е о т н о с и т е л ь н о о б о б щ е н н ы
г р у п п ы Г а л и л е я .

В первом параграфе настоящей главы была доказана теорема, утверждающая, что пространственная задача трех тел инвариантна относительно I2-параметрической группы Шредингера $Sch(I,3)$ только в том случае, когда потенциал U (I.I.2) определяется формулой (I.I.15). В данном разделе показано, что такие уравнения являются частным случаем более широкого класса уравнений вида (I.2.1), инвариантных относительно группы $Sch(I,3)$. Инфинитезимальные операторы группы задаются формулами (I.I.6), (I.I.23), (I.I.24). Группа $Sch(I,3)$, дополненная группой нелинейных преобразований (I.2.4), образует обобщенную группу Галилея $\tilde{G}(I,3)$. В разделе приводится полная классификация уравнений инвариантных относительно группы $\tilde{G}(I,3)$.

Инфинитезимальные операторы нелинейных преобразований (I.2.4) имеют вид

$$A_j = t(V_{1j} + V_{2j} + V_{3j}) \frac{\partial}{\partial t} + V_{ik} (V_{1j} + V_{2j} + V_{3j}) \frac{\partial}{\partial V_{ik}} \quad (I.2.30)$$

Тогда условие инвариантности уравнения (I.2.8) относительно операторов (I.I.23), (I.2.30) запишется следующим образом:

$$[L_2, A_k] = B_k L_2 \quad [L_2, A] = B L_2 \quad k = \overline{1,3}$$

Теперь соответствующие определяющие уравнения (0.22) примут вид

$$t^2 \Phi_t^{aj} + \Phi_{\dot{V}_{ik}}^{aj} V_{ik} + t \left\{ \Phi_{V_{ik}}^{aj} V_{ik} - \Phi_{\dot{V}_{ik}}^{aj} \dot{V}_{ik} \right\} = -3t \Phi^{aj} \quad (I.2.31)$$

$$\begin{aligned} & (\Phi_{V_{ik}}^{aj} V_{ik} + \Phi_t^{aj} \cdot t) (V_{1n} + V_{2n} + V_{3n}) + \Phi_{\dot{V}_{ik}}^{aj} (V_{ik} - t \dot{V}_{ik}) \times \\ & \times (\dot{V}_{1n} + \dot{V}_{2n} + \dot{V}_{3n}) = (\Phi^{1n} + \Phi^{2n} + \Phi^{3n}) (V_{aj} - t \dot{V}_{aj}) + \\ & + \Phi^{aj} (V_{1n} + V_{2n} + V_{3n}) - 2\Phi^{aj} (V_{1n} + V_{2n} + V_{3n} + t(\dot{V}_{1n} + \dot{V}_{2n} + \dot{V}_{3n})). \end{aligned} \quad (I.2.32)$$

Таким образом, галилеевски инвариантные уравнения (I.2.1), правая часть которых удовлетворяет уравнениям (I.2.31) и уравнениям (I.2.31), (I.2.32), будут инвариантны относительно групп $Sch(I,3)$ и $\tilde{G}(I,3)$, соответственно.

Теорема I.2.3. Уравнения (I.2.1) инвариантны относительно группы Шредингера $Sch(I,3)$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{\Phi}^i = \frac{1}{\omega_1^2} (\vec{x} - \vec{y}) \theta^{i1} + \frac{1}{\omega_1} (\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{y}} - \frac{\omega_7}{\omega_1} (\vec{x} - \vec{y})) \theta^{i2} + \omega_1^{-3/2} [\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{y}}, \vec{x} - \vec{y}] \theta^{i3} \quad (I.2.33)$$

где $\theta^{ij} = \theta^{ij}(Q)$, $Q = (q_1, \dots, q_7)$

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad q_2 = \frac{\omega_3}{\omega_1} \quad q_3 = \omega_7^2 - \omega_1 \omega_4 \quad q_4 = \omega_8^2 - \omega_2 \omega_5 \\ q_5 &= \omega_9^2 - \omega_3 \omega_6 \quad q_6 = \omega_8 - \omega_7 \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad q_7 = \omega_9 - \omega_7 \frac{\omega_3}{\omega_1} \end{aligned} \quad (I.2.34)$$

Доказательство. Так как правая часть галилеевски инвариантных уравнений имеет вид (I.2.5) и поэтому не зависит от времени, то после расщепления уравнения (I.2.31) приходим к следующей системе уравнений:

$$\Phi_{V_{ik}}^{aj} V_{ik} = 0 \quad \Phi_{V_{ik}}^{aj} V_{ik} - \Phi_{V_{ik}}^{aj} \dot{V}_{ik} = -3\Phi^{aj} \quad (I.2.35)$$

Подставляя в уравнения (I.2.35) выражения (I.2.5) и расцепив получающуюся систему уравнений по-векторно, получаем систему определяющих уравнений для функции φ^{ij} :

$$\varphi_{\omega_1}^{ij} 2\omega_1 + \varphi_{\omega_2}^{ij} 2\omega_2 + \varphi_{\omega_3}^{ij} 2\omega_3 - \varphi_{\omega_4}^{ij} 2\omega_4 - \varphi_{\omega_5}^{ij} 2\omega_5 - \varphi_{\omega_6}^{ij} 2\omega_6 = \alpha_j \varphi^{ij} \quad (I.2.36)$$

где $\alpha_j = -4$ при $j=1$, $\alpha_j = -2$ при $j=2$, $\alpha_j = -3$ при $j=3$

$$\begin{aligned} & \varphi_{\omega_7}^{ij} \omega_1 + \varphi_{\omega_8}^{ij} \omega_2 + \varphi_{\omega_9}^{ij} \omega_3 + \varphi_{\omega_4}^{ij} 2\omega_7 + \varphi_{\omega_5}^{ij} 2\omega_8 + \varphi_{\omega_6}^{ij} 2\omega_9 = \\ & = \begin{cases} -\varphi^{i(j+3)} & j=1 \\ 0 & j=2,3 \end{cases} \end{aligned} \quad (I.2.37)$$

Общее решение системы уравнений (I.2.36) может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi^{ij} &= \omega_1^{-2} \psi^{ij} \quad j=\overline{1,3} \quad \varphi^{ij} = \omega_1^{-1} \psi^{ij} \quad j=\overline{4,6} \\ \varphi^{i7} &= \omega_1^{-5/2} \psi^{i7} \quad \varphi^{i8} = \omega_1^{-1/2} \psi^{i8} \quad \varphi^{ij} = \omega_1^{-3/2} \psi^{ij} \quad j=\overline{9,12} \end{aligned} \quad (I.2.38)$$

где $\psi^{ij} = \psi^{ij} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \omega_4\omega_1, \omega_5\omega_2, \omega_6\omega_3, \omega_7, \omega_8, \omega_9 \right)$,

ω_k определяется формулами (I.2.6).

Подставив выражения для функций φ^{ij} (I.2.38) в уравнения (I.2.37) и решив получающиеся уравнения, находим, что

$$\varphi^{i1} = \omega_1^{-2} [\theta^{i1} - \frac{\omega_7}{\omega_1} \theta^{i2}]$$

$$\varphi^{i2} = \omega_1^{-1} \theta^{i2} \quad (I.2.39)$$

$$\varphi^{i3} = \omega_1^{-3/2} \theta^{i3}$$

где $\theta^{ij} = \theta^{ij}(Q)$, Q задается формулой (I.2.34).

Необходимость доказана.

Достаточность доказывается, используя конечные преобразования (I.2.3). Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{dt'}{dt} &= \frac{1}{(1-at)^2} & \frac{dV_{ij}'}{dt'} &= \frac{dV_{ij}}{dt} (1-at) + aV_{ij} \\ \frac{d^2 V_{ij}'}{dt'^2} &= \frac{d^2 V_{ij}}{dt^2} (1-at)^3 \end{aligned} \quad (I.2.40)$$

откуда следует, что

$$V_{ij} = V_{ij}' (1+at')^{-1} \quad \frac{dV_{ij}}{dt} = \frac{dV_{ij}'}{dt'} (1+at') - aV_{ij}' \quad (I.2.41)$$

Подставив в формулу (I.2.40) вместо $\frac{d^2 V_{ij}}{dt^2}$ выражение для функций $\Phi^{ij}(V_{ij}, \dot{V}_{ij})$ (I.2.31), где $V_{ij}, \frac{dV_{ij}}{dt}$ заменены их выражениями (I.2.41) через $V_{ij}', \frac{dV_{ij}'}{dt'}$ приходим к соотношению

$$\frac{d^2 V_{ij}'}{dt'^2} = \Phi^{ij} \left(V_{ij}', \frac{dV_{ij}'}{dt'} \right)$$

где Φ^{ij} задается формулой (I.2.33).

Теорема I.2.4. Для того, чтобы уравнение (I.2.1) было инва-

риантно относительно обобщенной группы Галилея $\tilde{G}(I,3)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}^i = & \frac{\omega_4 \omega_1 - \omega_7^2}{\omega_1^2} ((\vec{x} - \vec{y}) v^{i1}) + (\omega_4 \omega_1 - \omega_7^2)^{1/2} \omega_1^{-1} ((\vec{x} - \vec{y}) - \frac{\omega_7}{\omega_1} (\vec{x} - \vec{y})) v^{i2} \\ & + (\omega_1 \omega_4 - \omega_7^2)^{1/2} \omega_1^{-3/2} [\dot{\vec{x}} - \dot{\vec{y}}, \vec{x} - \vec{y}] v^{i3}\end{aligned}$$

где $v^{ij} = v^{ij}(\Lambda)$ $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_6)$

$$\lambda_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \lambda_2 = \frac{\omega_3}{\omega_1} \quad \lambda_3 = \frac{\omega_7^2 - \omega_1 \omega_4}{\omega_8^2 - \omega_2 \omega_5} \quad \lambda_4 = \frac{\omega_7^2 - \omega_1 \omega_4}{\omega_9^2 - \omega_2 \omega_5}$$

$$\lambda_5 = \frac{\omega_7 \omega_2 - \omega_8 \omega_1}{\omega_7 \omega_3 - \omega_9 \omega_1} \quad \lambda_6 = \frac{\omega_7^2 - \omega_1 \omega_4}{(\omega_7 - \omega_8 \frac{\omega_1}{\omega_2})^2} \quad (I.2.43)$$

$$v^{i1} + v^{i2} + v^{i3} = 0 \quad v^{i4} + v^{i5} + v^{i6} = 0$$

$$v^{1j} + v^{2j} + v^{3j} = 0 \quad i = \overline{1,3} \quad j = \overline{1,12}$$

Доказательство. После подстановки выражений для функций Φ^{ij} (I.2.5) в уравнения (I.2.32) и расщепления получившихся уравнений по векторно и по времени, приходим к системе уравнений (I.2.35) и

$$\begin{aligned}& \varphi_{\omega_1}^{ij} 2\omega_1 + \varphi_{\omega_2}^{ij} 2\omega_2 + \varphi_{\omega_3}^{ij} 2\omega_3 + \varphi_{\omega_7}^{ij} \omega_7 + \varphi_{\omega_8}^{ij} \omega_8 + \varphi_{\omega_9}^{ij} \omega_9 = \\ & = \begin{cases} -2\varphi^{ij} & , \quad j = 1, 3 \\ -\varphi^{ij} & , \quad j = 2 \end{cases} \quad (I.2.44)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \varphi_{\omega_4}^{ij} 2\omega_4 + \varphi_{\omega_5}^{ij} 2\omega_5 + \varphi_{\omega_6}^{ij} 2\omega_6 + \varphi_{\omega_7}^{ij} \omega_7 + \varphi_{\omega_8}^{ij} \omega_8 + \varphi_{\omega_9}^{ij} \omega_9 = \\ & = \begin{cases} 2\varphi^{ij}, & j=1 \\ \varphi^{ij}, & j=2,3 \end{cases} \end{aligned} \quad (I.2.45)$$

Построим общее решение данных уравнений. Решением уравнений (I.2.44) являются функции:

$$\begin{aligned} \psi^{ij} &= \omega_1^{-1} \varphi^{ij} & j=1,3 \\ \psi^{ij} &= \omega_1^{-1/2} \varphi^{ij} & j=2 \end{aligned} \quad (I.2.46)$$

где

$$\begin{aligned} \psi^{ij} &= \psi^{ij}(\hat{W}) & \hat{W}_1 &= \frac{\omega_1}{\omega_2} & \hat{W}_2 &= \frac{\omega_1}{\omega_3} & \hat{W}_3 &= \omega_4 & \hat{W}_4 &= \omega_5 \\ \hat{W}_5 &= \omega_6 & \hat{W}_6 &= \omega_1 \omega_7^{-2} & \hat{W}_7 &= \omega_2 \omega_8^{-2} & \hat{W}_8 &= \omega_3 \omega_9^{-2} \end{aligned}$$

Подставив выражения (I.2.46) в определяющие уравнения (I.2.45) приходим у следующей системе уравнений для функций ψ^{ij} :

$$\begin{aligned} & \psi_{\hat{W}_3}^{ij} 2\hat{W}_3 + \psi_{\hat{W}_4}^{ij} 2\hat{W}_4 + \psi_{\hat{W}_5}^{ij} 2\hat{W}_5 - 2\psi_{\hat{W}_6}^{ij} \hat{W}_6 - 2\psi_{\hat{W}_7}^{ij} \hat{W}_7 - 2\psi_{\hat{W}_8}^{ij} \hat{W}_8 = \\ & = \begin{cases} 2\psi^{ij}, & j=1 \\ \psi^{ij}, & j=2,3 \end{cases} \end{aligned} \quad (I.2.47)$$

Общим решением уравнений (I.2.47) будут функции

$$\xi^{ij} = W_6^{-1} \psi^{ij} \quad j=1$$

$$\xi^{ij} = W_6^{-1/2} \psi^{ij} \quad j=2,3. \quad (I.2.48)$$

где $\xi^{ij} = \xi^{ij}(\hat{W}_1, \hat{W}_2, \hat{W}_3 - \hat{W}_6, \hat{W}_4 - \hat{W}_7, \hat{W}_5 - \hat{W}_8, \frac{\hat{W}_3}{\hat{W}_4}, \frac{\hat{W}_3}{\hat{W}_5})$

После подстановки выражений (I.2.47) в уравнения (I.2.37) получаем уравнения, решением которых являются функции (I.2.42), (I.2.43), что и требовалось доказать.

Достаточность доказывается с помощью конечных преобразований.

Рассмотрим движение частиц, определяемое лагранжианом (I.2.2) с потенциалом (I.2.24). Найдем общий вид потенциала U при котором уравнения Лагранжа будут проективно-инвариантны.

Теорема I.2.5. Уравнения движения (I.2.25) с потенциалом (I.2.24) инвариантны относительно проективных преобразований (I.2.3) только при

$$U = \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_3} \right) V \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}; \frac{\omega_1}{\omega_3} \right) \quad (I.2.49)$$

Доказательство. Согласно теореме I.2.2 уравнения Лагранжа (I.2.25) галилеевски инвариантны тогда и только тогда, когда

$U(\vec{x}, \vec{p}, \vec{z})$ имеет вид (I.2.24). Из условия инвариантности уравнений (I.2.24), (I.2.25) получаем, что потенциал $U(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ должен удовлетворять следующей системе уравнений:

$$U_{\omega_1 \omega_1} \omega_1 + U_{\omega_1 \omega_2} \omega_2 + U_{\omega_1 \omega_3} \omega_3 = -2U_{\omega_1}$$

$$U_{\omega_2 \omega_1} \omega_1 + U_{\omega_2 \omega_2} \omega_2 + U_{\omega_2 \omega_3} \omega_3 = -2U_{\omega_2} \quad (I.2.50)$$

$$U_{\omega_3 \omega_1} \omega_1 + U_{\omega_3 \omega_2} \omega_2 + U_{\omega_3 \omega_3} \omega_3 = -2U_{\omega_3}$$

Интегрируя систему уравнений (I.2.50), получаем функцию (I.2.49). Достаточность теоремы следует из теоремы I.2.3.

Теорема I.2.6. Уравнения Лагранжа (I.2.25) инвариантны относительно проективных преобразований (I.2.4) только в случае свободного движения частиц, т.е.

$$U = \text{const}$$

Доказательство. Подставив правую часть уравнений (I.2.25) в определяющие уравнения (I.2.32), получаем, что

$$U_{V_{ij}} = 0 \quad i, j = \overline{1,3}$$

откуда следует необходимость теоремы. Достаточность теоремы вытекает из теоремы I.2.4.

Следствие I.2.2. Уравнения движения (I.2.25) с потенциалом (I.2.49) имеют, кроме первых интегралов (I.I.53), являющихся следствием инвариантности лагранжиана относительно галилеевских преобразований (I.I.I2), дополнительные первые интегралы, определяемые проективной инвариантностью уравнений движения. Построим эти интегралы, используя утверждение 0.I

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= A\tilde{H} = \dot{V}_{ij} V_{ij} - 2\tilde{H}t \\ \tilde{A}_2 &= A\tilde{A}_1 = V_{ij} V_{ij} - 2\tilde{H}t^2 - 2\tilde{A}_1 t \end{aligned} \quad (\text{I.2.5I})$$

где $\tilde{H} = \frac{1}{2}(\vec{\dot{x}}^2 + \vec{\dot{y}}^2 + \vec{\dot{z}}^2) + U$ — интеграл энергии уравнений (I.2.25).

Г а л и л е е в с к и е у р а в н е н и я,
и н в а р и а н т н ы е о т н о с и т е л ь н о е п р е -
о б р а з о в а н и й (I.I.5I), (I.2.3), (I.2.4)

В данном разделе рассматриваются уравнения

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_i &= \Phi^{1i}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \\
\ddot{y}_i &= \Phi^{2i}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \\
\ddot{z}_i &= \Phi^{3i}(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})
\end{aligned}
\tag{I.2.52}$$

Описан класс уравнений вида (I.2.52), которые инвариантны не только относительно группы Галилея (I.I.I2), но и обладают дополнительной локальной симметрией (I.I.5I), (I.2.3), (I.2.4). Для инвариантных уравнений Лагранжа построены интегралы движения.

Теорема I.2.7 Для того, чтобы уравнения (I.2.52) были инвариантны относительно преобразований (I.I.5I) достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}
\Phi^{1i} &= (x_i - y_i) x^1 + (x_i - z_i) x^2 + \{ (x_i - y_i) \omega_1 + \\
&\quad + (x_i - z_i) \omega_3 \} x^3 \\
\Phi^{2i} &= (y_i - z_i) x^1 + (y_i - x_i) x^2 + \{ (y_i - z_i) \omega_2 + \\
&\quad + (y_i - x_i) \omega_1 \} x^3
\end{aligned}
\tag{I.2.53}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{3i} &= (z_i - x_i) x^1 + (z_i - y_i) x^2 + \{ (z_i - x_i) \omega_3 + \\
&\quad + (z_i - y_i) \omega_2 \} x^3
\end{aligned}$$

где

$$x^i = x^i(\beta_1, \beta_2)$$

$$\beta_1 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \quad \beta_2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$$

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ задаются формулами (I.2.6)

Доказательство. Доказательство ведется в соответствии с алгоритмом (0.17) – (0.22). Определяющие уравнения (0.22) имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{x_j}^{ni} (y_j - z_j) + \Phi_{y_j}^{ni} (z_j - x_j) + \Phi_{z_j}^{ni} (x_j - y_j) = \\ = \frac{1}{2} \varepsilon_{пкм} (\Phi^{ki} - \Phi^{mi}) \end{aligned} \quad (I.2.54)$$

Подставив в уравнения (I.2.54) выражения (I.2.27) получим систему уравнений для функций ψ^{ij} $i = \overline{1,3}$:

$$\begin{aligned} S\psi'' &= 2\psi^{12} + \psi'' - \psi^{21} - \psi^{22} - \psi^{32} \\ S\psi^{12} &= \psi^{21} + \psi^{31} + \psi^{32} - 2\psi'' - \psi^{12} \\ S\psi^{21} &= 2\psi^{22} + \psi^{21} - \psi^{31} - \psi^{12} - \psi^{32} \\ S\psi^{22} &= \psi^{31} + \psi^{12} + \psi'' - 2\psi^{21} - \psi^{22} \\ S\psi^{31} &= 2\psi^{32} + \psi^{31} - \psi'' - \psi^{22} - \psi^{12} \\ S\psi^{32} &= \psi'' + \psi^{22} + \psi^{21} - 2\psi^{31} - \psi^{32} \\ S\psi^{i3} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} (\psi^{k3} - \psi^{l3}) \end{aligned} \quad (I.2.55)$$

$$\text{где } S\psi^{ij} = \psi_{\omega_1}^{ij} (\omega_3 - \omega_2) + \psi_{\omega_2}^{ij} (\omega_1 - \omega_3) + \psi_{\omega_3}^{ij} (\omega_2 - \omega_1)$$

Частными решениями уравнений (I.2.55) являются функции

$$\begin{aligned}
 \psi^{11} &= x^1 + \omega_1 x^3 & \psi^{12} &= x^2 + \omega_3 x^3 \\
 \psi^{21} &= x^1 + \omega_2 x^3 & \psi^{22} &= x^2 + \omega_1 x^3 \\
 \psi^{31} &= x^1 + \omega_3 x^3 & \psi^{32} &= x^2 + \omega_2 x^3
 \end{aligned}
 \tag{I.2.56}$$

где $x^i = x^i(\beta_1, \beta_2)$

откуда следуют формулы (I.2.53). Применяя метод [I6] к уравнениям (I.2.52) с правыми частями (I.2.53), доказываем достаточность теоремы.

Теорема I.2.8. Если правые части уравнений (I.2.52) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \phi^{1i} &= \frac{(x_i - y_i)}{\beta_1^2} e^1 + \frac{(x_i - z_i)}{\beta_1^2} e^2 + \left\{ \frac{(x_i - y_i)\omega_1}{\beta_1 \beta_2} + \frac{(x_i - z_i)\omega_3}{\beta_1 \beta_2} \right\} e^3 \\
 \phi^{2i} &= \frac{(y_i - z_i)}{\beta_1^2} e^1 + \frac{(y_i - x_i)}{\beta_1^2} e^2 + \left\{ \frac{(y_i - z_i)\omega_2}{\beta_1 \beta_2} + \frac{(y_i - x_i)\omega_1}{\beta_1 \beta_2} \right\} e^3 \\
 \phi^{3i} &= \frac{(z_i - x_i)}{\beta_1^2} e^1 + \frac{(z_i - y_i)}{\beta_1^2} e^2 + \left\{ \frac{(z_i - x_i)\omega_3}{\beta_1 \beta_2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(z_i - y_i)\omega_2}{\beta_1 \beta_2} \right\} e^3
 \end{aligned}
 \tag{I.2.57}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \beta_1, \beta_2$ определяются формулами (I.2.6), (I.2.53), $e^i = e^i \left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2} \right)$,

то уравнения (I.2.52) инвариантны относительно преобразований (I.1.12), (I.1.51), (I.2.3).

Доказательство. Из теоремы I.2.7 и уравнений (I.2.31) полу-

чаем систему дифференциальных уравнений для функций x^i :

$$M x' = -4x' \quad Mx^2 = -4x^2 \quad Mx^3 = -6x^3, \quad (I.2.58)$$

где $Mx^i = x_{\beta_1}^i 2\beta_1 + x_{\beta_2}^i 4\beta_2$

Решив уравнения (I.2.58), получаем выражения (I.2.57).

Теорема доказывается непосредственной проверкой, используя алгоритм [16].

Теорема I.2.9. Уравнения Лагранжа (I.2.24), (I.2.25) инвариантны относительно преобразований (I.I.5I) тогда и только тогда, когда

$$U = V^2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3; \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \quad (I.2.59)$$

Доказательство. Перепишем потенциал U (I.2.24) в виде

$$U(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = U'(\omega_1, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2)$$

Из условия инвариантности уравнений (I.2.24), (I.2.25) относительно преобразований (I.I.5I) получаем определяющее уравнение для потенциала U' :

$$U'_{\omega_1} = 0$$

откуда и следует необходимость теоремы. Достаточность вытекает из теоремы I.2.7.

Следствие I.2.3. Инвариантность Лагранжиана (I.2.2) с потенциалом (I.2.59) относительно преобразований (I.I.5I) позволяет построить по теореме Нетер дополнительный первый интеграл такой системы:

$$\tilde{S} = \dot{x}_i(y_i - z_i) + \dot{y}_i(z_i - x_i) + \dot{z}_i(x_i - y_i) \quad (I.2.60)$$

Перейдем к описанию галилеевских уравнений Лагранжа (I.2.25), инвариантных относительно преобразований (I.I.5I) и (I.2.3).

Теорема I.2.I0. Для того, чтобы уравнения (I.2.25), (I.2.59) были инвариантны относительно проективных преобразований (I.2.3) необходимо и достаточно, чтобы потенциал имел вид

$$U = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} V^3 \left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2} \right) \quad (I.2.6I)$$

Доказательство. Из теоремы I.2.9 следует, что уравнения (I.2.25) инвариантны относительно группы Галилея и преобразований (I.I.5I) тогда и только тогда, когда потенциал V^2 имеет вид (I.2.59). Перепишем V^2 в следующей форме:

$$V^2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} V^3 \left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2}; \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \right)$$

Используя инвариантность уравнений (I.2.25), (I.2.59) относительно проективных преобразований, получаем определяющее уравнение для потенциала V^3 :

$$\frac{\partial V^3}{\partial (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)} = 0 \quad (I.2.62)$$

Общим решением уравнений (I.2.62) является функция (I.2.6I). Необходимость теоремы доказана. Достаточность следует из теоремы I.2.8.

Дополнительная симметрия уравнений (I.2.25) с потенциалом (I.2.6I) позволяет построить еще три интеграла движения данных уравнений. По теореме Нетер находится интеграл (I.2.60). Исполь-

зовав утверждение 0.1 строим интегралы (I.2.5I), где потенциал имеет вид (I.2.6I).

§ I.3. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы и их интегрирование

Рассмотрим движение частиц, определяемое лагранжианом (I.2.2) с потенциалом (I.2.24). Перейдем к гамильтоновому формализму, положив

$$H = \dot{x}_i \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}_i} + \dot{y}_i \frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}_i} + \dot{z}_i \frac{\partial L^*}{\partial \dot{z}_i} - L^* \quad (I.3.1)$$

$$p_{xi} = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}_i} \quad p_{yi} = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}_i} \quad p_{zi} = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{z}_i}$$

Получаем гамильтонову систему

$$\frac{dV_{ij}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{vij}} \quad \frac{dp_{vij}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial V_{ij}} \quad (I.3.2)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p_{xi}^2 + p_{yi}^2 + p_{zi}^2) - U \quad (I.3.3)$$

В некоторых случаях дополнительная симметрия гамильтоновых уравнений с гамильтонианом (I.3.3) позволяет построить вполне интегрируемые гамильтоновы системы и затем полностью проинтегрировать их в квадратурах.

Теорема I.3.1. Пусть движение трех частиц по прямой определяется гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2) - \frac{1}{(x_1 - y_1)^2} V \left(\frac{x_1 - y_1}{y_1 - z_1} \right) \quad (I.3.4)$$

Тогда гамильтонова система будет вполне интегрируемой.

Доказательство. Согласно следствию I.2.1 и I.2.2 система с гамильтонианом (I.3.4) имеет интегралы движения

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2) - \mathcal{U}$$

$$\tilde{P} = p_{x_1} + p_{y_1} + p_{z_1}$$

$$\tilde{G} = x_1 + y_1 + z_1 - t (p_{x_1} + p_{y_1} + p_{z_1}) \quad (I.3.5)$$

$$\tilde{A}_1 = x_1 p_{x_1} + y_1 p_{y_1} + z_1 p_{z_1} - 2t \tilde{H}$$

$$\tilde{A}_2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2\tilde{H}t^2 - 2\tilde{A}_1 t,$$

которые образуют алгебру Ли относительно скобок Пуассона со следующими коммутационными соотношениями:

$$[\tilde{H}, \tilde{P}] = 0 \quad [\tilde{H}, \tilde{G}] = P \quad [\tilde{H}, \tilde{A}] = 2\tilde{H}$$

$$[\tilde{H}, \tilde{A}_2] = 2\tilde{A}_1, \quad [\tilde{P}, \tilde{G}] = 3 \quad [\tilde{P}, \tilde{A}_1] = \tilde{P} \quad (I.3.6)$$

$$[\tilde{P}, \tilde{A}_2] = 2G \quad [\tilde{G}, \tilde{A}_1] = -G \quad [\tilde{G}, \tilde{A}_2] = 0$$

$$[\tilde{A}_1, \tilde{A}_2] = 2A_1$$

Из функций (I.3.5) можно составить единственную функцию, находящуюся в инволюции со всеми остальными функциями. Она определяется из системы уравнений:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{G}} \cdot \tilde{P} + \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{A}_1} 2\tilde{H} + \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{A}_2} 2\tilde{A}_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{G}} \cdot 3 + \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{A}_1} \tilde{P} + \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{A}_2} 2\tilde{G} = 0$$

$$- \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{H}} \tilde{P} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{P}} \cdot 3 - \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{A}_1} \tilde{G} = 0$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{H}} 2\tilde{H} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{P}} \tilde{P} + \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{G}} \tilde{G} + \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{A}_2} 2\tilde{A}_2 = 0$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{H}} 2\tilde{A}_1 - \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{P}} 2\tilde{G} - \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{A}_1} 2\tilde{A}_2 = 0$$

откуда

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} &= 2\tilde{H}\tilde{G}^2 - 2\tilde{A}_1\tilde{G}\tilde{P} + 3(\tilde{A}_1^2 - 2\tilde{H}\tilde{A}_2) + \tilde{A}_2\tilde{P}^2 = \\ &= -(\rho_{x_1}(y_1 - z_1) + \rho_{y_1}(z_1 - x_1) + \rho_{z_1}(x_1 - y_1))^2 = \\ &+ 6(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\mu - 2(x_1 + y_1 + z_1)^2\mu \end{aligned}$$

Таким образом, система (I.3.4) с тремя степенями свободы имеет три первых интеграла в инволюции: $\tilde{H}, \tilde{P}, \tilde{\Psi}$, что обеспечивает ее полную интегрируемость по теореме Лиувилля [I]

Для построения остальных интегралов движения завершающих полное интегрирование уравнений (I.3.2), (I.3.3) используем замену переменных, предложенную Соколовым в работе [20].

Обозначив $\tau = (y_1 - x_1)$, $\rho = (z_1 - \frac{y_1 + x_1}{2})$, вводим новые канонические переменные:

$$q_1 = \left(\frac{1}{2} \tau^2 + \frac{2}{3} \rho^2 \right)^{1/2} \quad q_2 = \arctg \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\rho}{\tau}$$

$$p_1 = \frac{\frac{1}{2} \dot{\tau} \tau + \frac{2}{3} \dot{\rho} \rho}{\left(\frac{1}{2} \tau^2 + \frac{2}{3} \rho^2 \right)^{1/2}} \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\tau \dot{\rho} - \dot{\tau} \rho)$$

Тогда систему дифференциальных уравнений относительного движения точек ψ_1, z_1 получим в канонической форме:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s} \quad \frac{dp_s}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_s} \quad s=1,2 \quad (I.3.7)$$

где

$$H = \frac{1}{2} (p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}) - U$$

$$U = \frac{2}{q_1^2 \cos^2 q_2} V \left(\frac{2 \cos q_2}{\sin q_2 + \sqrt{3} \cos q_2} \right) \stackrel{df}{=} \frac{1}{q_1^2} F'(q_2)$$

Таким образом, уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= p_1, & \frac{dp_1}{dt} &= - \frac{p_2^2}{q_1^3} - \frac{2}{q_1^3} F'(q_2) \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{p_2}{q_1^2}, & \frac{dp_2}{dt} &= \frac{1}{q_1^2} \frac{\partial F'(q_2)}{\partial q_2} \end{aligned} \quad (I.3.8)$$

Из уравнений (I.3.8) имеем

$$p_2^2 - 2F'(q_2) = C_1$$

Преобразуя интеграл энергии, получаем выражение

$$p_1^2 + \frac{C_1}{q_1^2} = 2C_0$$

Интегрирование уравнений (I.3.8) завершается следующими квадратурами:

$$t = \frac{1}{2C_0} (2C_0 q_1^2 - C_1)^{1/2} + C_2$$

$$\int \frac{dq_2}{(C_1 + 2F'(q_2))^{1/2}} = \int \frac{dq_1}{q_1 (2C_0 q_1^2 - C_1^2)^{1/2}} + C_3$$

где $C_0 - C_3$ — постоянные интегрирования.

Теорема I.3.2. Движение трех частиц на прямой определяется гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2) - V^2 \quad (I.3.9)$$

где V^2 имеет вид (I.2.59). Тогда гамильтонова система будет вполне интегрируемой.

Доказательство. Действительно, согласно следствию I.2.1 и I.2.3 система с гамильтонианом (I.3.9) имеет три первых интеграла, находящиеся в инволюции. Это

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} (p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2) - V^2$$

$$\tilde{P} = p_{x_1} + p_{y_1} + p_{z_1}$$

$$\tilde{S}_1 = p_{x_1}(y_1 - z_1) + p_{y_1}(z_1 - x_1) + p_{z_1}(x_1 - y_1),$$

что и доказывает теорему.

Для построения остальных интегралов движения уравнений (I.3.2), (I.3.9), совместив полюс системы координат с центром тяжести системы трех частиц, используем следующую замену переменных

$$x_1 = S \cos \alpha \quad y_1 = S \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \quad z_1 = S \cos \left(\alpha - \frac{2\pi}{3} \right)$$

В новых переменных выражение для кинетической энергии принимает вид:

$$T = \frac{1}{2} (p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{z_1}^2) = \frac{3}{4} (\dot{S}^2 + S^2 \dot{\alpha}^2)$$

Потенциал взаимодействия зависит только от S .

$$V^2 = V^2 \left(\frac{3}{2} S^2, \frac{9}{8} S^4 \right)$$

Уравнения Лагранжа в новых переменных имеют вид:

$$\ddot{S} - S \dot{\alpha}^2 = \frac{2}{3} \frac{\partial V'}{\partial S}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\dot{\alpha} \frac{3}{2} S^2 \right) = 0$$

откуда имеем

$$\dot{\alpha} S^2 = C_1, \quad \ddot{S} - \frac{C_1^2}{S^3} = \frac{2}{3} \frac{\partial V'}{\partial S}$$

Недостающие интегралы даются квадратурами:

$$\frac{3}{4} \dot{S}^2 + \frac{2C_1^2}{S^2} + V' = C_2$$

$$t = \int \frac{dS}{\left(\frac{4}{3} \left(C_2 - V' - \frac{C_1^2}{S^2} \right) \right)^{1/2}} + C_3$$

$$\alpha = \int \frac{C_1 dS}{S \sqrt{\frac{4}{3} \left(C_2 - V' - \frac{C_1^2}{S^2} \right)}} + C_4$$

где $C_1 - C_4$ - произвольные постоянные.

Теорема I.3.3. Уравнения, описывающие плоское движение трех частиц с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2) - V^3 \quad (I.3.I0)$$

где V^3 имеет вид (I.2.6I) являются вполне интегрируемыми.

Доказательство. Из следствий I.2.I - I.2.3 вытекает, что уравнения Гамильтона (I.3.2), (I.3.I0) имеют следующие интегралы движения:

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{1}{2} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2) - V^3 \\ \tilde{P}_i &= p_{x_i} + p_{y_i} + p_{z_i} \\ \tilde{G}_i &= x_i + y_i + z_i - t (p_{x_i} + p_{y_i} + p_{z_i}) \\ &\quad (I.3.II) \end{aligned}$$

$$\tilde{J}_{12} = x_1 p_{x_2} - x_2 p_{x_1} + y_1 p_{y_2} - y_2 p_{y_1} + z_1 p_{z_2} - z_2 p_{z_1}$$

$$\tilde{S}_2 = p_{x_i} (y_i - z_i) + p_{y_i} (z_i - x_i) + p_{z_i} (x_i - y_i)$$

$$\tilde{A}_1 = (x_i p_{x_i} + y_i p_{y_i} + z_i p_{z_i}) - 2t \tilde{H}$$

$$\tilde{A}_2 = (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 2Ht^2 - 2\tilde{A}_1 t$$

Интегралы (I.3.II) образуют алгебру Ли относительно операции скобок Пуассона со следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
[\tilde{H}, \tilde{P}_1] &= 0 & [\tilde{H}, \tilde{P}_2] &= 0 & [\tilde{H}, \tilde{G}_1] &= \tilde{P}_1 & [\tilde{H}, \tilde{G}_2] &= \tilde{P}_2 \\
[\tilde{H}, \tilde{J}_{12}] &= 0 & [\tilde{H}, \tilde{S}_2] &= 0 & [\tilde{H}, \tilde{A}_1] &= 2\tilde{H} & [\tilde{H}, \tilde{A}_2] &= 2\tilde{A}_1 \\
[\tilde{P}_1, \tilde{P}_2] &= 0 & [\tilde{P}_1, \tilde{G}_1] &= 3 & [\tilde{P}_1, \tilde{G}_2] &= 0 & [\tilde{P}_1, \tilde{J}_{12}] &= \tilde{P}_2 \\
[\tilde{P}_1, \tilde{S}_2] &= 0 & [\tilde{P}_1, \tilde{A}_1] &= \tilde{P}_1 & [\tilde{P}_1, \tilde{A}_2] &= 2\tilde{G}_1 & [\tilde{P}_2, \tilde{G}_1] &= 0 \\
[\tilde{P}_2, \tilde{G}_2] &= 3 & [\tilde{P}_2, \tilde{S}_2] &= 0 & [\tilde{P}_2, \tilde{A}_1] &= \tilde{P}_2 & [\tilde{P}_2, \tilde{A}_2] &= 2\tilde{G}_2 \\
[\tilde{P}_2, \tilde{J}_{12}] &= -\tilde{P}_1 & [\tilde{G}_1, \tilde{G}_2] &= 0 & [\tilde{G}_1, \tilde{J}_{12}] &= \tilde{G}_2 & [\tilde{G}_1, \tilde{S}_2] &= 0 \\
[\tilde{G}_1, \tilde{A}_1] &= -\tilde{G}_1 & [\tilde{G}_1, \tilde{A}_2] &= 0 & [\tilde{G}_2, \tilde{J}_{12}] &= -\tilde{G}_1 \\
[\tilde{G}_2, \tilde{S}_2] &= 0 & [\tilde{G}_2, \tilde{A}_1] &= -\tilde{G}_2 & [\tilde{G}_2, \tilde{A}_2] &= 0 \\
[\tilde{J}_{12}, \tilde{S}_2] &= 0 & [\tilde{J}_{12}, \tilde{A}_1] &= 0 & [\tilde{J}_{12}, \tilde{A}_2] &= 0 \\
[\tilde{S}_2, \tilde{A}_1] &= 0 & [\tilde{S}_2, \tilde{A}_2] &= 0 & [\tilde{A}_1, \tilde{A}_2] &= 2\tilde{A}_2
\end{aligned} \tag{1.3.12}$$

Из соотношений (1.3.12) видно, что интеграл движения $\tilde{S}_2$ находится в инволюции со всеми остальными интегралами уравнений (1.3.2), (1.3.10). Из функций $\tilde{H}, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{J}_{12}, \tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ можно составить две функционально независимые функции, находящиеся в инволюции с интегралами (1.3.11). Следуя [7], для определения этих функций строим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{G}_1} \tilde{P}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{G}_2} \tilde{P}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{A}_1} 2\tilde{H} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{A}_2} 2\tilde{A}_1 = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{G}_1} 3 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{J}_{12}} \tilde{P}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{A}_1} \tilde{P}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{A}_2} 2\tilde{G}_1 = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{G}_2} 3 - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{J}_{12}} \tilde{P}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{A}_1} \tilde{P}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{A}_2} 2\tilde{G}_2 = 0$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{H}} \tilde{P}_1 - 3 \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{P}_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{J}_{12}} \tilde{G}_2 - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{A}_1} \tilde{G}_1 = 0$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{H}} \tilde{P}_2 - 3 \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{P}_2} - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{J}_{12}} \tilde{G}_1 - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{A}_1} \tilde{G}_2 = 0$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{P}_1} \tilde{P}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{P}_2} \tilde{P}_1 - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{G}_1} \tilde{G}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{G}_2} \tilde{G}_1 = 0$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{H}} 2\tilde{H} - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{P}_1} \tilde{P}_1 - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{P}_2} \tilde{P}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{G}_1} \tilde{G}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{G}_2} \tilde{G}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{A}_2} 2\tilde{A}_2 = 0$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial \tilde{H}} 2\tilde{A}_1 - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{P}_1} 2\tilde{G}_1 - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{P}_2} 2\tilde{G}_2 - \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{A}_1} 2\tilde{A}_2 = 0$$

Данные уравнения имеют только два функционально независимых решения:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1 = & 6\tilde{H}(\tilde{G}_1^2 + \tilde{G}_2^2) - 6\tilde{A}_1(\tilde{G}_1\tilde{P}_1 + \tilde{G}_2\tilde{P}_2) - (\tilde{G}_1\tilde{P}_2 - \tilde{G}_2\tilde{P}_1)^2 + \\ & + 9(\tilde{A}_1^2 - 2\tilde{H}\tilde{A}_2) + 3\tilde{A}_2(\tilde{P}_1^2 + \tilde{P}_2^2) = \end{aligned}$$

$$= [(\rho_{x_1} - \rho_{y_1})(x_2 - y_2) - (\rho_{x_2} - \rho_{y_2})(x_1 - y_1)]^2 + [(\rho_{y_1} - \rho_{z_1})(y_2 - z_2) -$$

$$-(\rho_{y_2} - \rho_{z_2})(y_1 - z_1)]^2 + [(\rho_{z_1} - \rho_{x_1})(z_2 - x_2) - (\rho_{z_2} - \rho_{x_2})(z_1 - x_1)]^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + [p_{x_i}(y_i - z_i) + p_{y_i}(z_i - x_i) + p_{z_i}(x_i - y_i)]^2 - \\
& - 2 \left[\sum_{i < j} ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2) \right] U \\
\tilde{\Psi}_2 = & \tilde{G}_1 \tilde{P}_2 - \tilde{G}_2 \tilde{P}_1 - 3 \tilde{J}_{12} = (x_1 + y_1 + z_1)(p_{x_2} + p_{y_2} + p_{z_2}) - \\
& - (x_2 + y_2 + z_2)(p_{x_1} + p_{y_1} + p_{z_1}) - 3(x_1 p_{x_2} - x_2 p_{x_1} + y_1 p_{y_2} - \\
& - y_2 p_{y_1} + z_1 p_{z_2} - z_2 p_{z_1}).
\end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений (I.3.2), (I.3.10) имеет шесть интегралов движения: $\tilde{H}, \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{S}_2, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Psi}_2$, находящихся в инволюции. Отсюда следует по теореме Лиувилля, что система вполне интегрируема. Теорема доказана.

Для полного интегрирования уравнений выполним следующую замену переменных, предложенную в работе [9].

Предполагая, что центр тяжести системы совпадает с полюсом системы координат, конфигурация системы определяется посредством $S_1, S_2, \alpha_1, \alpha_2$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{3} x_1 &= S_1 \cos \left(\alpha_1 + \frac{2\pi}{3} \right) + S_2 \cos \left(\alpha_2 - \frac{2\pi}{3} \right) \\
\sqrt{3} x_2 &= S_1 \sin \left(\alpha_1 + \frac{2\pi}{3} \right) + S_2 \sin \left(\alpha_2 - \frac{2\pi}{3} \right) \\
\sqrt{3} y_1 &= S_1 \cos \left(\alpha_1 + \frac{4\pi}{3} \right) + S_2 \cos \left(\alpha_2 - \frac{4\pi}{3} \right) \\
\sqrt{3} y_2 &= S_1 \sin \left(\alpha_1 + \frac{4\pi}{3} \right) + S_2 \sin \left(\alpha_2 - \frac{4\pi}{3} \right)
\end{aligned}$$

$$\sqrt{3} z_1 = S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2$$

$$\sqrt{3} z_2 = S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2$$

Такой выбор координат дает следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = \frac{1}{2} (\dot{S}_1^2 + \dot{S}_2^2 + S_1^2 \dot{\alpha}_1^2 + S_2^2 \dot{\alpha}_2^2)$$

Выражение для потенциальной энергии зависит только от S_1, S_2 .

$$U = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3} V^3 \left(\frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}{(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)^2} \right) = \frac{1}{3(S_1^2 + S_2^2)} V^3 \left(\frac{(S_1^2 + S_2^2)^2 + 2(S_1 S_2)^2}{(S_1^2 + S_2^2)^2} \right)$$

Перепишем потенциал в виде

$$U = \frac{1}{S_1^2 + S_2^2} W^3 \left(\frac{S_1}{S_2} \right)$$

В новых координатах уравнения Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{S}_1 - S_1 \dot{\alpha}_1^2 &= \frac{\partial U}{\partial S_1} & \ddot{S}_2 - S_2 \dot{\alpha}_2^2 &= \frac{\partial U}{\partial S_2} \\ \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}_1 S_1^2) &= 0 & \frac{d}{dt} (\dot{\alpha}_2 S_2^2) &= 0 \end{aligned} \quad (I.3.I3)$$

откуда имеем два первых интеграла

$$\dot{\alpha}_1 S_1^2 = C_1 \quad \dot{\alpha}_2 S_2^2 = C_2 \quad (I.3.I4)$$

С учетом интегралов (I.3.I4) получается следующее выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{S}_1^2 + \dot{S}_2^2 + \frac{C_1^2}{S_1^2} + \frac{C_2^2}{S_2^2})$$

Сделаем следующую замену переменных:

$$Q_1 = (S_1^2 + S_2^2)^{1/2} \quad Q_2 = \arctg \frac{S_1}{S_2}$$

$$P_1 = \frac{S_1 \dot{S}_1 + S_2 \dot{S}_2}{(S_1^2 + S_2^2)^{1/2}} \quad P_2 = S_2 \dot{S}_1 - S_1 \dot{S}_2$$

Выражение для гамильтониана уравнений (I.3.10) имеет вид:

$$H = \frac{1}{2} \left(P_1^2 + \frac{P_2^2}{Q_1^2} \right) + \frac{C_1^2}{Q_1^2 \sin^2 Q_2} + \frac{C_2^2}{Q_1^2 \cos^2 Q_2} - \\ - \frac{1}{Q_1^2} W^3(\arctg Q_2) \stackrel{df}{=} \frac{1}{2} \left(P_1^2 + \frac{P_2^2}{Q_1^2} \right) - \frac{1}{Q_1^2} W^4(Q_2).$$

Уравнения движения принимают теперь форму:

$$\frac{dQ_1}{dt} = P_1 \quad \frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial Q_1} \\ \frac{dQ_2}{dt} = \frac{P_2}{Q_1^2} \quad \frac{dP_2}{dt} = \frac{1}{Q_1^2} \frac{\partial W^4}{\partial Q_2}$$

Из второго и четвертого уравнений находим

$$\frac{1}{2} P_2^2 - W^3 = C_3$$

Интеграл энергии можно переписать следующим образом:

$$\frac{1}{2} P_1^2 + \frac{C_3}{Q_1^2} = C_4$$

после чего интегрирование уравнений заканчивается квадратурами:

$$t = \frac{1}{2C_4} (2C_4 Q_1^2 - 2C_3)^{1/2} + C_5$$

$$\int \frac{dQ_2}{(W^4 + C_3)^{1/2}} = \int \frac{dQ_1}{Q_1^2 (C_4 - \frac{C_3}{Q_1^2})^{1/2}} + C_6$$

ГЛАВА II УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ, ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

В соответствии с принципом относительности все физические процессы во всех инерциальных системах протекают одинаковым образом, а это требует, чтобы фундаментальные уравнения физики во всех инерциальных системах имели одинаковую форму. Иными словами, фундаментальные уравнения должны быть инвариантными относительно группы Лоренца $\mathcal{O}(1,3)$. Это требование, являющееся выражением принципа относительности, лежит в основе получения релятивистских уравнений движения частицы во внешнем поле вида

$$K\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(x_0, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \vec{E}, \vec{H}), \quad (2.0.1)$$

где $x_0 = t$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — координаты частицы, $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$ — векторы электромагнитного поля, $\vec{F}$ — достаточно гладкая функция своих аргументов. Кроме этой, в настоящей главе решены следующие задачи, а именно: описаны уравнения второго и третьего порядков, инвариантные относительно группы Лоренца и Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$;

найжены лоренцевские уравнения, имеющие дополнительную симметрию;

для уравнений, обладающих высокими симметриейными свойствами, построены интегралы движения;

доказано, что система уравнений Максвелла и Лоренца-Дирака инвариантна относительно группы Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$, построены некоторые точные решения данной системы.

§ 2.1. Уравнения движения частицы в электромагнитном поле

Как известно, релятивистское уравнение Лоренца-Дирака [18]

$$m\ddot{\vec{x}} = e(1-\dot{x}^2)^{1/2} \left\{ \vec{E} + [\dot{\vec{x}} \vec{H}] - \dot{\vec{x}} (\dot{\vec{x}} \vec{E}) \right\} + \\ + \kappa \left\{ \ddot{\vec{x}} + 3\dot{\vec{x}} \frac{(\dot{\vec{x}} \ddot{\vec{x}})}{(1-\dot{x}^2)} \right\} \frac{1}{(1-\dot{x}^2)^{1/2}} \quad (2.1.1)$$

где m — масса, e — заряд частицы, κ — коэффициент радиационного трения;

позволяет описать движение электрона во внешнем поле с учетом силы радиационного трения. Исследуем симметрию уравнений (2.1.1)

Теорема 2.1.1. Группой симметрии уравнения Лоренца-Дирака (2.1.1) является группа Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$, базисные элементы алгебры Ли которой имеют вид

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0} \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a} \quad (2.1.2)$$

$$J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a} + H_a \frac{\partial}{\partial H_b} - H_b \frac{\partial}{\partial H_a} + E_a \frac{\partial}{\partial E_b} - E_b \frac{\partial}{\partial E_a} \quad (2.1.3)$$

$$J_{0a} = x_a \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + \epsilon_{abc} \left(E_b \frac{\partial}{\partial H_c} - H_b \frac{\partial}{\partial E_c} \right) \quad (2.1.4)$$

Доказательство. Для доказательства теоремы перепишем уравнение (2.1.1) в виде уравнения первого порядка в частных производных:

$$L_3 \psi = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_0} + \dot{x}_a \frac{\partial}{\partial x_a} + \ddot{x}_a \frac{\partial}{\partial \dot{x}_a} + \left[-3\ddot{x}_a \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{1-\dot{x}^2} + \frac{m}{\kappa} \ddot{x}_a (1-\dot{x}^2)^{1/2} - \frac{e}{\kappa} (1-\dot{x}^2) \left\{ E_a + [\dot{x}H]_a - \dot{x}_a (\dot{x}E) \right\} \right] \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_a} \right\} \psi = 0 \quad (2.1.5)$$

Алгоритм построения симметрии такого уравнения задается формулами (0.25) – (0.34).

Симметрию уравнения (2.1.5) будем искать в классе операторов (0.32), где $\mathfrak{E}^{Ha}$, $\mathfrak{E}^{Ea}$ являются функциями только от $\vec{E}, \vec{H}$. В этом случае определяющие уравнения (0.34) имеют вид:

$$\begin{aligned} & (\xi_a^s - \dot{x}_s \xi_a^o) \left(-3\kappa \ddot{x}_a \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{1-\dot{x}^2} + m \ddot{x}_a (1-\dot{x}^2)^{1/2} - e (1-\dot{x}^2) \cdot \right. \\ & \cdot \left\{ E_a + \varepsilon_{abc} \dot{x}_c H_b - \dot{x}_a (\dot{x}E) \right\} \left. \right) - 3(\xi_o^o + \xi_a^o \dot{x}_a) \left(-3\kappa \ddot{x}_s \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{1-\dot{x}^2} + \right. \\ & \left. + m \ddot{x}_s (1-\dot{x}^2)^{1/2} - e (1-\dot{x}^2) \left\{ E_s + \varepsilon_{sbc} \dot{x}_b H_c - \dot{x}_s (\dot{x}E) \right\} \right) - 3\kappa \ddot{x}_s \xi_a^o \dot{x}_a = \\ & = -3\kappa \left[(\xi_a^s \ddot{x}_a - \dot{x}_s \xi_a^o \ddot{x}_a) - 2\ddot{x}_s (\xi_o^o + \xi_a^o \dot{x}_a) \right] \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{(1-\dot{x}^2)} - \\ & - 3\kappa \ddot{x}_s \left\{ \ddot{x}_b (\xi_a^b \dot{x}_a + \xi_o^b - \dot{x}_b (\xi_o^o + \xi_a^o \dot{x}_a)) + \dot{x}_b (\xi_a^b \ddot{x}_a - \dot{x}_b \xi_a^o \ddot{x}_a - \right. \\ & \left. - 2\ddot{x}_b (\xi_o^o + \xi_a^o \dot{x}_a)) \right\} \frac{1}{1-\dot{x}^2} - 3\kappa \ddot{x}_s \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{(1-\dot{x}^2)^2} 2\dot{x}_b (\xi_a^b \dot{x}_a + \\ & + \xi_o^b - \dot{x}_b (\xi_o^o + \xi_a^o \dot{x}_a)) + m (\xi_a^s \ddot{x}_a - \dot{x}_s \xi_a^o \ddot{x}_a - 2\ddot{x}_s (\xi_o^o + \\ & + \xi_a^o \dot{x}_a)) (1-\dot{x}^2)^{1/2} - m \ddot{x}_s (1-\dot{x}^2)^{-1/2} \dot{x}_b (\xi_a^b \dot{x}_a + \xi_o^b - \dot{x}_b (\xi_o^o + \xi_a^o \dot{x}_a)) - \\ & - 2e \dot{x}_b (\xi_a^b \dot{x}_a + \xi_o^b - \dot{x}_b (\xi_o^o + \xi_a^o \dot{x}_a)) (E_s + \varepsilon_{sbc} \dot{x}_b H_c - \dot{x}_s (\dot{x}E)) - \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned}
& -e(1-\dot{x}^2) \{ e^{E_s} + \varepsilon_{sbc} (e^{H_c} \dot{x}_b + H_c (\xi_a^b \dot{x}_a + \xi_0^b - \dot{x}_b (\xi_0^0 + \xi_a^0 \dot{x}_a)) - \\
& - (\xi_a^s \dot{x}_a + \xi^s \cdot \dot{x}_s (\xi_0^0 + \xi_a^0 \dot{x}_a)) (\dot{x} E) - \dot{x}_s \dot{x}_b e^{E_b} - \dot{x}_s E_b \cdot \\
& \cdot (\xi_a^b \dot{x}_a + \xi_0^b - \dot{x}_b (\xi_0^0 + \xi_a^0 \dot{x}_a))
\end{aligned}$$

$$\xi_{00}^0 = \xi_{0a}^0 = \xi_{ab}^0 = \xi_{ab}^c = \xi_{a0}^c = \xi_{00}^c = 0 \quad (2.1.7)$$

Функции ξ^0, ξ^c зависят только от $x_0, \vec{x}$, поэтому приравнявая коэффициенты при различных степенях вторых производных от $\vec{x}$ получаем уравнения для функций ξ^0, ξ^a :

$$\xi_0^0 = \xi_a^0 = 0 \quad \xi_b^a + \xi_a^b = 0 \quad a \neq b \quad \xi_a^0 = \xi_0^a \quad (2.1.8)$$

Общим решением уравнений (2.1.7), (2.1.8) являются функции

$$\xi^0 = c^{0k} x_k + d_0 \quad \xi^a = c^{ak} x_k + d_a \quad (2.1.9)$$

где $c^{0k} = c^{k0} \quad c^{00} = c^{kk} = 0 \quad c^{ab} + c^{ba} = 0$

Приравняв коэффициенты при различных степенях первой производной от $\vec{x}$, с учетом выражений (2.1.9), получаем соотношения:

$$e^{E_s} = c^{sa} E_a + \varepsilon_{sbc} H_b c^{k0} \quad (2.1.10)$$

$$e^{H_s} = c^{sa} H_a - \varepsilon_{sbc} E_b c^{k0}$$

Функции $\xi^0, \xi^a, \xi^{Es}, \xi^{Ns}$ (2.1.9), (2.1.10) полностью определяют операторы (2.1.2) – (2.1.4). Непосредственной проверкой убеждаемся, что для операторов (2.1.2) – (2.1.4) выполняются коммутационные соотношения (0.44), (0.45) и поэтому они образуют алгебру Пуанкаре $\mathcal{P}(1,3)$. Теорема доказана.

Следствие 2.1.1. Операторы (2.1.4) порождают следующие конечные преобразования:

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{x} + \vec{v} \left[\frac{(\vec{x} \cdot \vec{v})}{v^2} \left\{ (1-v^2)^{-1/2} - 1 \right\} - x_0 (1-v^2)^{-1/2} \right] \\ x'_0 &= (1-v^2)^{-1/2} \{ x_0 - (\vec{v} \cdot \vec{x}) \}\end{aligned}\quad (2.1.11 \text{ а})$$

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \frac{\vec{E} + \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{E}) \left\{ (1-v^2)^{1/2} - 1 \right\} + [\vec{v} \vec{H}]}{(1-v^2)^{1/2}} \\ \vec{H}' &= \frac{\vec{H} + \frac{\vec{v}}{v^2} (\vec{v} \cdot \vec{H}) \left\{ (1-v^2)^{1/2} - 1 \right\} - [\vec{v} \vec{E}]}{(1-v^2)^{1/2}}\end{aligned}\quad (2.1.11 \text{ б})$$

/Здесь и далее считаем скорость света $c = 1$ /

Формулы (2.1.3), (2.1.4) задают общий вид инфинитезимальных операторов группы Лоренца, при условии, что $\vec{E}$ и $\vec{H}$ преобразуются как вектора. Поэтому в дальнейшем, говоря, что уравнение инвариантно относительно группы $\mathcal{P}(1,3)$, мы будем подразумевать инвариантность уравнения относительно операторов (2.1.2) – (2.1.4).

Настоящий параграф посвящен описанию пуанкаре-инвариантных уравнений вида (2.0.1). Для уравнений второго порядка, инвариантных относительно группы $\mathcal{P}(1,3)$, при постоянном поле, построены векторные интегралы движения. Установлено, что алгеброй инвариантности системы уравнений Лоренца-Дирака и Максвелла является алгебра $\mathcal{P}(1,3)$ с базисными элементами (2.1.2) –

(2.1.4). Используя метод [25], для системы уравнений Максвелла и Лоренца-Дирака без учета сил радиационного трения, построены точные решения.

В результате проведенного теоретико-группового анализа установлены следующие теоремы:

Теорема 2.1.2. Уравнения (2.0.1) инвариантны относительно группы $O(3)$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \vec{F} = & \vec{x}\varphi^1 + \vec{x}\varphi^2 + \vec{x}\varphi^3 + \vec{H}\varphi^4 + \vec{E}\varphi^5 + [\vec{x}\vec{x}]\varphi^6 + [\vec{x}\vec{x}]\varphi^7 + \\ & + [\vec{x}\vec{H}]\varphi^8 + [\vec{x}\vec{E}]\varphi^9 + [\vec{x}\vec{x}]\varphi^{10} + [\vec{x}\vec{H}]\varphi^{11} + [\vec{x}\vec{E}]\varphi^{12} + \\ & + [\vec{x}\vec{H}]\varphi^{13} + [\vec{x}\vec{E}]\varphi^{14} + [\vec{H}\vec{E}]\varphi^{15} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

$$\text{где } \varphi^i = \varphi^i(\hat{\omega}_1, \dots, \hat{\omega}_{15})$$

$$\hat{\omega}_0 = x_0 \quad \hat{\omega}_1 = x^2 \quad \hat{\omega}_2 = \dot{x}^2 \quad \hat{\omega}_3 = x\dot{x} \quad \hat{\omega}_4 = (x\ddot{x})$$

$$\omega_5 = (xH) \quad \omega_6 = (xE) \quad \omega_7 = (\dot{x}\ddot{x}) \quad \omega_8 = (\dot{x}H) \quad (2.1.13)$$

$$\omega_9 = (\dot{x}E) \quad \omega_{10} = (\ddot{x}H) \quad \omega_{11} = (\ddot{x}E) \quad \omega_{12} = \ddot{x}^2$$

$$\omega_{13} = E^2 \quad \omega_{14} = EH \quad \omega_{15} = H^2,$$

где среди инвариантов $\omega_1, \dots, \omega_{15}$ всегда можно выбрать двенадцать независимых.

Доказательство. Для доказательства теоремы перепишем уравнение (2.0.1) в виде уравнения в частных производных первого порядка:

$$L'_3 \psi = \left(\frac{\partial}{\partial x_0} + \dot{x}_a \frac{\partial}{\partial x_a} + \ddot{x}_a \frac{\partial}{\partial \dot{x}_a} + F^a \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_a} \right) \psi = 0 \quad (2.1.14)$$

Условие инвариантности уравнения (2.1.14) относительно операторов (2.1.3) имеет вид (0.7), где операторы L'_3, Q_A определяются формулами (2.1.3), (2.1.14). Тогда согласно алгоритму (0.25)–(0.34) условие инвариантности (0.7) представляет собой систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно функции $\vec{F}$ следующего вида:

$$x_a F_{x_b}^c - x_b F_{x_a}^c + \dot{x}_a F_{\dot{x}_b}^c - \dot{x}_b F_{\dot{x}_a}^c + \ddot{x}_a F_{\ddot{x}_b}^c - \ddot{x}_b F_{\ddot{x}_a}^c + E_a F_{E_b}^c - \\ - E_b F_{E_a}^c + H_a F_{H_b}^c - H_b F_{H_a}^c = \delta_b^c F_a - \delta_a^c F^b \quad a \neq b \quad c \neq a \quad a, b, c = \overline{1,3} \quad (2.1.15)$$

Положим $a=2$ $b=3$. Тогда уравнения (2.1.15) имеют вид:

$$x_2 F_{x_3}^c - x_3 F_{x_2}^c + \dot{x}_2 F_{\dot{x}_3}^c - \dot{x}_3 F_{\dot{x}_2}^c + \ddot{x}_2 F_{\ddot{x}_3}^c - \ddot{x}_3 F_{\ddot{x}_2}^c + E_2 F_{E_3}^c - E_3 F_{E_2}^c + \\ + H_2 F_{H_3}^c - H_3 F_{H_2}^c = \begin{cases} 0 & c=1 \\ -F^3 & c=2 \\ F^2 & c=3 \end{cases} \quad (2.1.16)$$

Общим решением уравнений (2.1.16) являются функции:

$$F' = \hat{\varphi}'(x_1, \dot{x}_1, \omega_0, \dots, \omega_{12}) \\ F^2 = \frac{\hat{\varphi}^2 \dot{x}_3 - \hat{\varphi}^3 x_3}{x_2 \dot{x}_3 - \dot{x}_2 x_3} \quad F^3 = \frac{\hat{\varphi}^3 x_2 - \hat{\varphi}^2 \dot{x}_2}{x_2 \dot{x}_3 - \dot{x}_2 x_3} \quad (2.1.17)$$

$$\hat{\varphi}^i = \hat{\varphi}^i(x_1, \dot{x}_1, \hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{12}) \quad i=2,3$$

Пусть теперь $a=3$ $b=1$. Тогда уравнения (2.1.15) переписутся таким образом:

$$x_3 F_{x_1}^c - x_1 F_{x_3}^c + \dot{x}_3 F_{\dot{x}_1}^c - \dot{x}_1 F_{\dot{x}_3}^c + \ddot{x}_3 F_{\ddot{x}_1}^c - \ddot{x}_1 F_{\ddot{x}_3}^c + E_3 F_{E_1}^c - \\ - E_1 F_{E_3}^c + H_3 F_{H_1}^c - H_1 F_{H_3}^c = \begin{cases} F^3 & c=1 \\ 0 & c=2 \\ -F' & c=3 \end{cases} \quad (2.1.18)$$

Подставляя выражения для функций F^k (2.1.17) в уравнения (2.1.18) получаем систему уравнений относительно функций $\hat{\varphi}^i$:

$$x_3 \hat{\varphi}_{x_1}^k + \dot{x}_3 \hat{\varphi}_{\dot{x}_1}^k = \begin{cases} \frac{\hat{\varphi}^2 \dot{x}_2 - \hat{\varphi}^3 x_2}{x_3 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_3} & k=1 \\ \frac{\hat{\varphi}^2 \dot{x}_2 - \hat{\varphi}^3 x_2}{x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2} x_1 - \hat{\varphi}^1 x_3 & k=2 \\ \frac{\hat{\varphi}^2 \dot{x}_2 - \hat{\varphi}^3 x_2}{x_2 \dot{x}_3 - x_3 \dot{x}_2} \dot{x}_1 - \hat{\varphi}^1 x_1 & k=3 \end{cases} \quad (2.1.19)$$

Введем обозначения

$$x_2^2 + x_3^2 = \sigma_1, \quad \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 = \sigma_2, \quad x_2 \dot{x}_2 + x_3 \dot{x}_3 = \sigma_3$$

Расщепляя уравнения (2.1.19) по степеням x_3 , получаем систему уравнений

$$\sigma_3 \hat{\varphi}_{x_1}^k + \sigma_2 \hat{\varphi}_{\dot{x}_1}^k = \begin{cases} \hat{\varphi}^3 \\ -\hat{\varphi}^3 x_1 - \hat{\varphi}^1 \sigma_3 \\ -\hat{\varphi}^3 \dot{x}_1 - \hat{\varphi}^1 \sigma_2 \end{cases} \quad (2.1.20)$$

$$\sigma_1 \hat{\varphi}_{x_1}^k + \sigma_3 \hat{\varphi}_{\dot{x}_1}^k = \begin{cases} \hat{\varphi}^2 \\ -\hat{\varphi}^2 x_1 - \hat{\varphi}^1 \sigma_1 \\ -\hat{\varphi}^2 \dot{x}_1 - \hat{\varphi}^1 \sigma_3 \end{cases} \quad (2.1.21)$$

Решением уравнений (2.1.20) будут функции:

$$\hat{\varphi}^3 + \dot{x}_1 \hat{\varphi}^1 = \psi^3 \quad \hat{\varphi}^2 + x_1 \hat{\varphi}^1 = \psi^2$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^1 (\omega_2 - \dot{x}_1^2)^{-1/2} - \psi^3 \dot{x}_1 \omega_2 (\omega_2 - \dot{x}_1^2)^{-1/2} &= \psi^1 \\ \psi^1 &= \psi^1(J_1, \hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{12}) \end{aligned} \quad (2.1.22)$$

где

$$J_1 = \frac{\omega_2 x_1 - \omega_3 \dot{x}_1}{\omega_2 (\omega_2 - \dot{x}_1^2)^{1/2}}$$

Подставляя выражения (2.1.22) в уравнения (2.1.21) заключаем, что

$$\psi^2 = \hat{\psi}^2(\hat{w}) \quad \psi^3 = \hat{\psi}^3(\hat{w})$$

$$\psi' \sqrt{\sigma_2} = \hat{\psi}'(\hat{W}) (\omega_2 (\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3^2))^{1/2} + \frac{(\hat{\psi}^2 \omega_2 - \hat{\psi}^3 \omega_3)(x, \omega_2 - \dot{x}, \omega_3)}{(\omega_1 \omega_2 - \omega_3^2) \omega_2},$$

после несложных преобразований получаем выражения для функции $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \vec{x} \varphi^1 + \vec{\dot{x}} \varphi^2 + [x \dot{x}] \varphi^3, \quad (2.1.23)$$

где $\varphi^i = \varphi^i(\hat{W})$

Рассмотрим теперь произвольный вектор $\vec{U}$ из набора векторов $\{\vec{x}, \vec{E}, \vec{H}, [x \vec{H}], \dots\}$. Покажем, что его можно выразить через вектора $\vec{x}, \vec{\dot{x}}, [\vec{x} \vec{\dot{x}}]$ и инварианты группы $O(3)$.

Действительно,

$$U_1 x_1 + U_2 x_2 + U_3 x_3 = (Ux)$$

$$U_1 \dot{x}_1 + U_2 \dot{x}_2 + U_3 \dot{x}_3 = (U\dot{x})$$

$$U_1 (\dot{x}_2 x_3 - \dot{x}_3 x_2) + U_2 (\dot{x}_3 x_1 - \dot{x}_1 x_3) + U_3 (\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) = (U[\dot{x}x])$$

Откуда находим

$$\vec{U} = \frac{1}{(x\dot{x})^2 - x^2 \dot{x}^2} \left\{ (Ux) (\vec{x} (x\dot{x}) - \dot{x} x^2) + (U\dot{x}) (\vec{\dot{x}} x - \dot{x} (x\dot{x})) + (U[\dot{x}x]) [\vec{x} \vec{\dot{x}}] \right\}$$

Таким образом, не уменьшая общности, можно переписать общее решение (2.1.23) уравнений (2.1.15) в виде (2.1.12), что и требовалось доказать.

Достаточность доказывается с помощью конечных преобразований. Действительно, инфинитезимальный оператор J_{23} (1.2.3) порождает следующие конечные преобразования:

$$x'_1 = x \quad x'_2 = x_2 \cos \alpha + x_3 \sin \alpha$$

$$x'_3 = -x_2 \sin \alpha + x_3 \cos \alpha$$

Тогда

$$\dot{x}'_1^{(e)} = \dot{x}_1^{(e)} \quad [x' \dot{x}']_1 = [x \dot{x}]_1$$

$$\dot{x}'_2^{(e)} = \dot{x}_2^{(e)} \cos \alpha + \dot{x}_3^{(e)} \sin \alpha \quad \dot{x}'_3^{(e)} = -\dot{x}_2^{(e)} \sin \alpha + \dot{x}_3^{(e)} \cos \alpha$$

$$[x'\dot{x}']_2 = [x\ddot{x}]_2 \cos \alpha + [x\ddot{x}]_3 \sin \alpha$$

$$[x'\dot{x}']_3 = -[x\ddot{x}]_2 \sin \alpha + [x\ddot{x}]_3 \cos \alpha$$

Откуда следует, что

$$\ddot{x}'_1 = \ddot{x}_1 = x_1 \varphi' + \dot{x}_1 \varphi^2 + [x\dot{x}]_1 \varphi^3 = x'_1 \varphi' + \dot{x}'_1 \varphi^2 + [x'\dot{x}']_1 \varphi^3$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_2 &= \ddot{x}_2 \cos \alpha + \ddot{x}_3 \sin \alpha = [x_2 \varphi' + \dot{x}_2 \varphi^2 + [x\dot{x}]_2 \varphi^3] \cos \alpha + \\ &+ [x_3 \varphi' + \dot{x}_3 \varphi^2 + [x\dot{x}]_3 \varphi^3] = x'_2 \varphi' + \dot{x}'_2 \varphi^2 + [x'\dot{x}']_2 \varphi^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x}'_3 &= -\ddot{x}_2 \sin \alpha + \ddot{x}_3 \cos \alpha = -[x_2 \varphi' + \dot{x}_2 \varphi^2 + [x\dot{x}]_2 \varphi^3] \sin \alpha + \\ &+ [x_3 \varphi' + \dot{x}_3 \varphi^2 + [x\dot{x}]_3 \varphi^3] \cos \alpha = x'_3 \varphi' + \dot{x}'_3 \varphi^2 + [\dot{x}\dot{x}']_3 \varphi^3, \end{aligned}$$

где $\varphi^i = \varphi^i(\hat{W}')$

Аналогично доказывается теорема для операторов J_{31}, J_{12} . Теорема доказана.

Теорема I.2.3. Для того, чтобы уравнения (2.0.1) были лоренц инвариантны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} \vec{F} = & -3\kappa \ddot{x} \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{(1-\dot{x}^2)} + (\vec{x} - x_0 \vec{x})(1-\dot{x}^2)^{3/2} \varphi' + \vec{x} (1-\dot{x}^2)^{1/2} \varphi^2 + \\ & + \{x_0 \vec{E} + [\vec{x}\vec{H}] - \vec{x}(\dot{x}E)\} (1-\dot{x}^2)^{3/2} \varphi^3 + \{-x_0 \vec{H} + [\vec{x}\vec{E}] + \vec{x}(\dot{x}H)\} (1-\dot{x}^2) \varphi^4 + \\ & + \{\vec{E} + [\vec{x}\vec{H}] - \vec{x}(\dot{x}E)\} (1-\dot{x}^2) \varphi^5 + \{-\vec{H} + [\vec{x}\vec{E}] + \vec{x}(\dot{x}H)\} (1-\dot{x}^2) \varphi^6 + \quad (2.1.24) \\ & + \left\{ \{[\vec{x}\vec{H}] - \vec{x}(\dot{x}E)\} (1-\dot{x}^2)^{1/2} + \{\vec{E} + [\vec{x}\vec{H}] - \vec{x}(\dot{x}E)\} \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{(1-\dot{x}^2)^{1/2}} \right\} \varphi^7 + \\ & + \left\{ \{[\vec{x}\vec{E}] + \vec{x}(\dot{x}H)\} (1-\dot{x}^2)^{1/2} + \{-\vec{H} + [\vec{x}\vec{E}] + \vec{x}(\dot{x}H)\} \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{(1-\dot{x}^2)^{1/2}} \right\} \varphi^8, \end{aligned}$$

где $\varphi^i = \varphi^i(W_1, \dots, W_{10})$

$$W_1 = x_v x^v \quad W_2 = \frac{(x_0 - (x\dot{x}))^2}{1 - \dot{x}^2} \quad W_3 = \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{(1 - \dot{x}^2)^3} + \frac{\ddot{x}^2}{(1 - \dot{x}^2)^2} \quad (2.1.25)$$

$$W_4 = \frac{(x\ddot{x})}{1 - \dot{x}^2} - \frac{(\dot{x}\ddot{x})(x_0 - (x\dot{x}))}{1 - \dot{x}^2} \quad W_5 = E^2 - H^2 \quad W_6 = EH$$

$$W_7 = \frac{(xE) + (\dot{x}[Hx] - x_0(\dot{x}E))}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} \quad W_8 = \frac{-(xH) + (x[\dot{x}E]) + x_0(\dot{x}H)}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}}$$

$$W_9 = \frac{(\ddot{x}H) + (\dot{x}[\ddot{x}E])}{(1 - \dot{x}^2)^{3/2}} \quad W_{10} = \frac{(\ddot{x}E) - (\dot{x}[\ddot{x}H])}{(1 - \dot{x}^2)^{3/2}}.$$

Доказательство. Используя алгоритм (0.25) – (0.34), докажем необходимость теоремы. Определяющие уравнения (0.34) для случая инвариантности уравнения (2.1.14) относительно преобразований (2.1.11) имеют вид:

$$\begin{aligned} & x_a F_{x_0}^B + x_0 F_{x_a}^B + F_{\dot{x}_a}^B - \dot{x}_a \dot{x}_c F_{\dot{x}_c}^B - (\ddot{x}_a \dot{x}_c + 2 \dot{x}_a \ddot{x}_c) F_{\ddot{x}_c}^B - \\ & - \varepsilon_{adf} (H_d F_{\dot{x}_f}^B - E_d F_{H_f}^B) = -3 \ddot{x}_a \ddot{x}_b - \dot{x}_b F^a - 3 \dot{x}_a F^b \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

Подставив выражение (2.1.13) для функции F^B в данные уравнения, получаем, что функции φ^i должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{aligned} & x_0 \varphi^1 + \varphi^2 + (xE) \varphi^3 + (\dot{x}E) \varphi'' + (\ddot{x}E) \varphi^{13} - (xH) \varphi^9 - \\ & - (\dot{x}H) \varphi^{12} - (\ddot{x}H) \varphi^{13} - (H^2 + E^2) \varphi^{15} = 0 \quad \varphi^6 = 0 \quad (2.1.27) \\ & x_0 \varphi^7 + \varphi^{10} = 0 \quad \varphi^4 + x_0 \varphi^9 + \varphi^{12} = 0 \quad \varphi^5 - x_0 \varphi^8 - \varphi'' = 0 \end{aligned}$$

Используя соотношения (2.1.27), перепишем выражение для функции $\vec{F}$ таким образом:

$$\begin{aligned} \vec{F} = & (\vec{x} - x_0 \vec{x}) \vec{\varphi}' + \ddot{x} \check{\varphi}^2 + \{x_0 \vec{E} - (xE) \vec{x} + [\vec{x}H]\} \check{\varphi}^3 + \\ & + \{\vec{E} - \ddot{x}(xE) + [\vec{x}H]\} \check{\varphi}^4 + \{[\vec{x}H] - (\ddot{x}E) \vec{x}\} \check{\varphi}^6 + \\ & + \{-x_0 \vec{H} + \vec{x}(xH) + [\vec{x}E]\} \check{\varphi}^6 + \{-H + \vec{x}(\dot{x}H) + [\dot{x}E]\} \check{\varphi}^7 + \\ & + \{[\vec{x}E] + \vec{x}(\ddot{x}H)\} \check{\varphi}^8 + [\vec{x}, x - x_0 \dot{x}] \check{\varphi}^9 + \{[\vec{H}E] + \vec{x}(H^2 + E^2)\} \check{\varphi}^{10} \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

где $\check{\varphi}^i = \varphi^i(\hat{\omega}_0, \dots, \hat{\omega}_{12})$.

После подстановки выражения (2.1.28) в уравнение (2.1.26) и расщепления получившихся уравнений по векторно, заключаем, что

$$\varphi^9 = \varphi^{10} = 0$$

$$L_{\varphi^i} = \begin{cases} 1,5 \quad \ddot{\varphi}^i \quad \dot{x}_a & i = 1, 3, 6 \\ 0,5 \quad \ddot{\varphi}^i \quad \dot{x}_a & i = 2, 5, 8 \\ \ddot{\varphi}^i \dot{x}_a + (1 - \dot{x}^2)^{-1/2} \ddot{x}_a \ddot{\varphi}^{(i+1)} & i = 4, 7 \end{cases} \quad (2.1.29)$$

где

$$L_{\varphi^i} = x_a \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}_a} - \dot{x}_a \dot{x}_c \frac{\partial}{\partial \dot{x}_c} - (\ddot{x}_a \dot{x}_c + 2 \dot{x}_a \ddot{x}_c) \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_c} - \\ - \varepsilon_{adf} \left(H_d \frac{\partial}{\partial E_f} - E_d \frac{\partial}{\partial H_f} \right).$$

Общим решением системы уравнений (2.1.29) являются функции φ^i определяемые формулами (2.1.24). Необходимость доказана.

Достаточность доказывается с использованием конечных преобразований. Действительно, воспользовавшись формулами (1.2.II) при $V_2 = V_3 = 0$ находим, что

$$x'_1 = (x_1 + V_1 x_0) \beta \quad x'_2 = x_2 \quad x'_3 = x_3 \quad x'_0 = (x_0 + V_1 x_1) \beta \\ E'_1 = E_1 \quad E'_2 = (E_2 + V_1 H_3) \beta \quad E'_3 = (E_3 - V_1 H_2) \beta \quad (2.1.30)$$

$$H'_1 = H_1 \quad H'_2 = (H_2 - V_1 E_3) \beta \quad H'_3 = (H_3 + V_1 E_2) \beta, \text{ где } \beta = (1 - V_1^2)^{-1/2}$$

Откуда следует, что

$$\frac{dx'_1}{dx'_0} = \frac{\dot{x}_1 + V_1}{1 + V_1 \dot{x}_1}, \quad \frac{d^2 x'_1}{d{x'_0}^2} = \frac{\ddot{x}_1}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^3 \beta^3}, \quad \frac{dx'_\kappa}{dx'_0} = \frac{\dot{x}_\kappa}{(1 + V_1 \dot{x}_1) \beta} \\ \frac{d^3 x'_1}{d{x'_0}^3} = \frac{\ddot{x}_1 (1 + V_1 \dot{x}_1) - 3 V_1 \ddot{x}_1^2}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^5 \beta^4}, \quad \frac{d^2 x'_\kappa}{d{x'_0}^2} = \frac{\ddot{x}_\kappa (1 + V_1 \dot{x}_1) - \dot{x}_\kappa V_1 \ddot{x}_1}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^3 \beta^2}, \quad (2.1.31) \\ \frac{d^3 x'_\kappa}{d{x'_0}^3} = \frac{(\ddot{x}_\kappa (1 + V_1 \dot{x}_1) - \dot{x}_\kappa V_1 \ddot{x}_1) (1 + V_1 \dot{x}_1) - [\ddot{x}_\kappa (1 + V_1 \dot{x}_1) - \dot{x}_\kappa V_1 \ddot{x}_1] 3 V_1 \ddot{x}_1}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^5 \beta^3}, \quad \kappa = 2, 3$$

Докажем теперь, что вид уравнения (2.0.I) в правой части (2.1.23) совпадает в старых и в штрихованных координатах. Действительно, пусть

$$\frac{d^3 x'_1}{d{x'_0}^3} = F' (x'_0, \vec{x}', \vec{\dot{x}}', \vec{\ddot{x}}', \vec{H}', \vec{E}')$$

где F' задается формулой (2.I.23). Подставляя в это уравнение выражения (2.I.30), (2.I.31), находим

$$\begin{aligned}
 & \frac{\ddot{x}_1(1+V_1\dot{x}_1) - 3V_1\ddot{x}_1^2}{(1+V_1\dot{x}_1)^5\beta^4} = -3 \frac{\ddot{x}_1}{(1+V_1\dot{x}_1)^3\beta^3} \cdot \frac{(\dot{x}\ddot{x})(1+\dot{x}_1V_1) + x_1V_1(1-\dot{x}^2)}{(1-\dot{x}^2)^2(1+V_1\dot{x}_1)^2\beta} + \\
 & + \left\{ (x_1+V_1x_0)\beta - (x_0+V_1x_1)\beta \frac{\dot{x}_1+V_1}{1+V_1\dot{x}_1} \right\} \frac{(1-\dot{x}^2)^{3/2}}{(1+V_1\dot{x}_1)^3\beta^3} \varphi^1 + \frac{\ddot{x}_1}{(1+V_1\dot{x}_1)^3\beta^3} \frac{(1-\dot{x}^2)^{1/2}}{(1+V_1\dot{x}_1)\beta} \varphi^2 + \\
 & + \left\{ (x_0+V_1x_1)\beta E_1 + x_2(H_3+V_1E_2)\beta - x_3(H_2-V_1E_3)\beta - \frac{\dot{x}_1+V_1}{(1+V_1\dot{x}_1)} \left\{ E_1(x_1+V_1x_0)\beta + \right. \right. \\
 & + (E_2+V_1H_3)\beta x_2 + (E_3-V_1H_2)\beta x_3 \left. \right\} \frac{(1-\dot{x}^2)^{3/2}}{(1+V_1\dot{x}_1)^3\beta^3} \varphi^3 + \left\{ -(x_0+V_1x_1)\beta H_1 + \right. \\
 & + x_2\beta(E_3-V_1H_2) - x_3\beta(E_2+V_1H_3) + \frac{\dot{x}_1+V_1}{1+V_1\dot{x}_1} \left[(x_0+V_1x_1)\beta H_1 + x_2(H_2-V_1E_3)\beta + \right. \\
 & + x_3(H_3+V_1E_2)\beta \left. \right\} \frac{(1-\dot{x}^2)^{3/2}}{(1+V_1\dot{x}_1)^3\beta^3} \varphi^4 + \left\{ E_1 + \frac{\dot{x}_2(H_3+V_1E_2)\beta}{(1+V_1\dot{x}_1)\beta} - \frac{\dot{x}_3(H_2-V_1E_3)\beta}{(1+V_1\dot{x}_1)\beta} - \right. \\
 & - \frac{\dot{x}_1+V_1}{1+V_1\dot{x}_1} \left[\frac{\dot{x}_1+V_1}{1+V_1\dot{x}_1} E_1 + \frac{\dot{x}_2}{(1+V_1\dot{x}_1)\beta} (E_2+V_1H_3)\beta + \frac{\dot{x}_3(E_3-V_1H_2)}{(1+V_1\dot{x}_1)} \right] \left. \right\} \frac{(1-\dot{x}^2)}{(1+V_1\dot{x}_1)^2\beta^2} \varphi^5 + \\
 & + \left\{ -H_1 + \frac{\dot{x}_2}{1+V_1\dot{x}_1} (E_3-V_1H_2) - \frac{\dot{x}_3}{(1+V_1\dot{x}_1)} (E_2+V_1H_3) + \frac{\dot{x}_1+V_1}{1+V_1\dot{x}_1} \left[\frac{\dot{x}_1+V_1}{1+V_1\dot{x}_1} H_1 + \frac{\dot{x}_2}{1+V_1\dot{x}_1} (H_2-V_1E_3) + \right. \right. \\
 & + \frac{\dot{x}_3(H_3+V_1E_2)}{1+V_1\dot{x}_1} (H_3+V_1E_2) \left. \right] \left. \right\} \frac{(1-\dot{x}^2)}{(1+V_1\dot{x}_1)\beta} \varphi^6 + \left\{ \left\{ \frac{\ddot{x}_2(1+V_1\dot{x}_1) - \dot{x}_2V_1\ddot{x}_1}{(1+V_1\dot{x}_1)^3\beta^3} \cdot \right. \right. \\
 & \cdot (H_3+V_1E_2)\beta - \frac{\ddot{x}_3(1+V_1\dot{x}_1) - \dot{x}_3V_1\ddot{x}_1}{(1+V_1\dot{x}_1)^3\beta^2} (H_2-V_1E_3)\beta - \frac{\dot{x}_1+V_1}{1+V_1\dot{x}_1} \left[\frac{\ddot{x}_1E_1}{(1+V_1\dot{x}_1)^3\beta^2} + \right. \\
 & + \frac{\ddot{x}_2(1+V_1\dot{x}_1) - \dot{x}_2V_1\ddot{x}_1}{(1+V_1\dot{x}_1)^3\beta^2} (E_2+V_1H_3)\beta + \frac{\ddot{x}_3(1+V_1\dot{x}_1) - \dot{x}_3V_1\ddot{x}_1}{(1+V_1\dot{x}_1)^3\beta^2} (E_3-V_1H_2)\beta \left. \right\} \frac{(1-\dot{x}^2)^{1/2}}{(1+V_1\dot{x}_1)\beta} + \\
 & + \left\{ E_1 + \frac{\dot{x}_2(H_3+V_1E_2)}{(1+V_1\dot{x}_1)} - \frac{\dot{x}_3(H_2-V_1E_3)}{(1+V_1\dot{x}_1)} - \frac{\dot{x}_1+V_1}{1+V_1\dot{x}_1} \left\{ \frac{\dot{x}_1+V_1}{1+V_1\dot{x}_1} E_1 + \frac{\dot{x}_2(E_2+V_1H_3)}{1+V_1\dot{x}_1} + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\dot{x}_3(E_3 - V_1 H_2)}{(1 + V_1 \dot{x}_1)} \left\} \right\} \frac{(\dot{x} \ddot{x})(1 + V_1 \dot{x}_1) + \ddot{x}_1 V_1 (1 - \dot{x}^2)}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^4 \beta^3} \frac{(1 + V_1 \dot{x}_1) \beta}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} \left\} \varphi^7 + \right. \\
& + \left\{ \left[\frac{\ddot{x}_2(1 + V_1 \dot{x}_1) - \dot{x}_2 V_1 \ddot{x}_1}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^3 \beta} (E_3 - V_1 H_2) - \frac{\ddot{x}_3(1 + V_1 \dot{x}_1) - \dot{x}_3 V_1 \ddot{x}_1}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^3 \beta} (E_2 + V_1 H_3) + \right. \right. \\
& + \frac{\dot{x}_1 + V_1}{(1 + V_1 \dot{x}_1)} \left\{ \frac{\ddot{x}_1 H_1}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^3 \beta} + \frac{\ddot{x}_2(1 + V_1 \dot{x}_1) - \dot{x}_2 V_1 \ddot{x}_1}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^3 \beta} (H_2 - V_1 E_3) + \right. \\
& + \left. \frac{\ddot{x}_3(1 + V_1 \dot{x}_1) - \dot{x}_3 V_1 \ddot{x}_1}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^3 \beta} (H_3 + V_1 E_2) \right\} \left. \right\} \frac{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}}{(1 + V_1 \dot{x}_1) \beta} + \left\{ -H_1 + \frac{\dot{x}_2(E_3 - V_1 H_2)}{1 + V_1 \dot{x}_1} - \right. \\
& - \frac{\dot{x}_3(E_2 + V_1 H_3)}{1 + V_1 \dot{x}_1} + \frac{\dot{x}_1 + V_1}{1 + V_1 \dot{x}_1} \left\{ \frac{\dot{x}_1 + V_1}{1 + V_1 \dot{x}_1} H_1 + \frac{\dot{x}_2(H_2 - V_1 E_3)}{1 + V_1 \dot{x}_1} + \right. \\
& + \left. \frac{\dot{x}_3(H_3 + V_1 E_2)}{1 + V_1 \dot{x}_1} \right\} \left. \right\} \frac{(\dot{x} \ddot{x})(1 + V_1 \dot{x}_1) + \ddot{x}_1 V_1 (1 - \dot{x}^2)}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^4 \beta^2} \frac{(1 + V_1 \dot{x}_1)}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} \left\} \varphi^8
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\ddot{x}_i = F^i(x_0, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \vec{\ddot{x}}, \vec{E}, \vec{H}),$$

где F^i определяется формулой (2.1.23). Аналогично доказыва-
ется достаточность теоремы в случае, когда $V_1 = 0$, $V_3 \neq 0$, $V_2 \neq 0$.
Теорема доказана.

Теорема 2.1.4. Уравнения (2.0.1) пуанкаре-инвариантны толь-
ко при

$$\begin{aligned}
\vec{F} = & -3\kappa \vec{\ddot{x}} \frac{(\dot{x} \ddot{x})}{1 - \dot{x}^2} + \vec{\ddot{x}} (1 - \dot{x}^2)^{1/2} \varphi' + \left\{ \vec{E} + [\vec{\dot{x}} \vec{H}] - \dot{x}(\dot{x} E) \right\} \cdot \\
& \cdot (1 - \dot{x}^2) \varphi^2 + \left\{ -\vec{H} + [\vec{\dot{x}} \vec{E}] + \vec{\ddot{x}}(\dot{x} H) \right\} (1 - \dot{x}^2) \varphi^3 + \quad (2.1.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left\{ [\ddot{\vec{x}}\vec{H}] - \ddot{\vec{x}}(\ddot{x}E) \right\} (1 - \dot{x}^2)^{1/2} + \left\{ \vec{E} + [\ddot{\vec{x}}\vec{H}] - \ddot{\vec{x}}(\dot{x}E) \right\} \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} \right\} \varphi^4 + \\
& + \left\{ \left\{ [\ddot{\vec{x}}E] + \ddot{\vec{x}}(\ddot{x}H) \right\} (1 - \dot{x}^2)^{1/2} + \left\{ -\vec{H} + [\ddot{\vec{x}}E] + \ddot{\vec{x}}(\dot{x}H) \right\} \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} \right\} \varphi^5,
\end{aligned}$$

где $\varphi^i = \varphi^i(q_1, \dots, q_6)$

$$q_1 = W_3 \quad q_2 = W_5 \quad q_3 = W_6 \quad q_4 = W_9 \quad q_5 = W_{10}$$

(2.1.33)

$$q_6 = \frac{(H\dot{x})^2 + (E\dot{x})^2 + 2(\dot{x}[EH]) - \dot{x}^2 H^2 - E^2}{1 - \dot{x}^2}$$

Доказательство. В соответствии с алгоритмом (0.25) – (0.34) лоренц-инвариантные уравнения (2.0.1) инвариантны относительно группы сдвигов только в том случае, если правая часть уравнений удовлетворяет условию

$$F_{x_\alpha} = 0 \quad F_{x_0} = 0 \quad \alpha = 1, 3 \quad (2.1.34)$$

Подставив в уравнения (2.1.34) выражение для функции $\vec{F}$ (2.1.24), находим, что общим решением получившихся уравнений является функция $\vec{F}$, заданная формулой (2.1.32).

Чтобы проверить достаточность теоремы заметим, что

$$x'_\alpha = x_\alpha + d_\alpha \quad x'_0 = x_0 + d_0$$

$$\dot{x}'_\alpha = \dot{x}_\alpha^{(e)}$$

и функция $\vec{F}$, заданная формулой (2.1.32) не зависит от времени и координат. Поэтому, если

$$\ddot{x}'_\alpha = F^\alpha(\vec{x}', \vec{\dot{x}}', \vec{E}', \vec{H}')$$

то и $\ddot{x}_\alpha = F^\alpha(\vec{x}, \vec{\dot{x}}, \vec{E}, \vec{H})$

что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Следствие 2.1.2. Система уравнений

$$\vec{\ddot{x}} = \vec{G}(x, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \vec{E}, \vec{H}) \quad (2.1.35)$$

пуанкаре-инвариантна тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \vec{G} = & \left\{ \vec{E} + [\vec{\dot{x}}\vec{H}] - \vec{\dot{x}}(\dot{x}E) \right\} (1 - \dot{x}^2)^{1/2} \vec{q}^1 + \\ & + \left\{ -\vec{H} + [\vec{\dot{x}}\vec{E}] + \vec{\dot{x}}(\dot{x}H) \right\} (1 - \dot{x}^2)^{1/2} \vec{q}^2 \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

где $q^i = q^i(q_2, q_3, q_6)$, q_i задаются формулами (2.1.33)

Доказательство. Положив в формулу (2.1.32) $\kappa = 0, \varphi^4 = \varphi^5 = 0$ и учитывая, что $1 - \dot{x}^2 \neq 0$, получаем выражение (2.1.36).

Следствие 2.1.3. Уравнение движения частицы в отсутствии внешнего поля

$$\vec{\ddot{x}} = \vec{H}(x_0, \vec{x}, \vec{\dot{x}}) \quad (2.1.37)$$

инвариантны относительно группы $O(3)$ только при

$$\vec{H} = \vec{\dot{x}}h' + \vec{\dot{x}}h^2 + [\vec{\dot{x}}\vec{\dot{x}}]h^3 \quad (2.1.38)$$

где $h^i = h^i(\omega_0, \dots, \omega_3)$, задаются формулами (2.1.13)

Следствие 2.1.4. Для того, чтобы уравнения (2.1.37) были лоренц-инвариантны необходимо и достаточно, чтобы

$$\vec{H} = (\vec{\dot{x}} - x_0\vec{\dot{x}})(1 - \dot{x}^2)h(W_1, W_2) \quad (2.1.39)$$

где W_1, W_2 определяются формулами (2.1.25)

Доказательство. Следствия 2.1.3 и 2.1.4 непосредственно следуют из теорем 2.1.2 и 2.1.3, учитывая, что $\vec{E} = \vec{H} = \kappa = 0$

И н т е г р а л ы д в и ж е н и я

Построим первые интегралы для пуанкаре-инвариантных уравнений (2.1.35) при постоянных $\vec{E}$ и $\vec{H}$. Согласно следствию 2.1.2 такие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{x} = & \{ \vec{E} + [\vec{x}\vec{H}] - \vec{x}(\dot{x}E) \} (1 - \dot{x}^2)^{1/2} g' + \\ & + \{ -H + [\dot{x}E] + \vec{x}(\dot{x}H) \} (1 - \dot{x}^2)^{1/2} g^2 \end{aligned} \quad (2.1.40)$$

где $\vec{E}, \vec{H} = \text{const}$ $g^i = g^i(q_2, q_3, q_6)$

Заметим, что инвариант q_6 является интегралом движения уравнений (2.1.40). Другой интеграл движения ищем в виде:

$$\frac{(\dot{x}H)\lambda_1 + (\dot{x}E)\lambda_2}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} + \lambda_3 x_0 = C_2 \quad (2.1.41)$$

Продифференцировав выражение (2.1.41) вдоль решений и приравняв коэффициенты при различных степенях производной получаем условия:

$$\lambda_1 g^2 - \lambda_2 g' = 0 \quad \lambda_2 = (EH)(g^2 \lambda_2 - g' \lambda_1) + H^2 g^2 \lambda_1 - E^2 g' \lambda_2,$$

которые, как нетрудно убедиться, удовлетворяются при $\lambda_1 = g'$, $\lambda_2 = g^2$. Интеграл движения (2.1.41) теперь имеет вид:

$$\frac{(\dot{x}H)g' + (\dot{x}E)g^2}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} + \{ (EH)(g^2 - g'^2) + (H^2 - E^2)(g'g^2) \} x_0 = C_2. \quad (2.1.42)$$

Тогда, согласно утверждению 0.1, выражение

$$\begin{aligned} J_{0a} C_2 = & \frac{\{ H_a - [\dot{x}E]_a \} g' + \{ E_a + [\dot{x}H]_a \} g^2}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} + \\ & + \{ (EH)(g^2 - g'^2) + (H^2 - E^2)g'g^2 \} x_a \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

является первым интегралом уравнений (2.1.40). J_{0a} — первое продолжение оператора (2.1.4)

Таким образом, система уравнений (2.1.40) имеет векторный интеграл движения:

$$\begin{aligned} \vec{B} = & \frac{\{ \vec{H} - [\vec{x}\vec{E}] \} g' + \{ \vec{E} + [\vec{x}\vec{H}] \} g^2}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} + \\ & + \{ (EH)(g^2 - g'^2) + (H^2 - E^2)g'g^2 \} \vec{x}. \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

Групповые свойства системы уравнений Максвелла и Лоренца - Дирака и ее точные решения.

Изучим симметричные свойства системы уравнений (2.1.1) и

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0 \quad (2.1.44)$$

Симметрия системы уравнений типа (2.1.44), (2.1.45) не исследовалась ранее. Действительно, обычно изучаются групповые свойства либо дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), либо обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Для изучения групповых свойств системы уравнений, в которую входят ДУЧП и ОДУ, в [25] предложен следующий метод.

Перепишем уравнение (2.1.1) в виде уравнения в частных производных первого порядка, эквивалентного уравнению (2.1.1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \dot{x}_a \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_a} \ddot{x}_a + \frac{\partial \Phi}{\partial \ddot{x}_a} \left[-3\dot{x}_a \frac{(\dot{x}\ddot{x})}{1-\dot{x}^2} + \frac{m}{\kappa} \ddot{x}_a (1-\dot{x}^2)^{1/2} - \right.$$

$$\left. - \frac{e}{\kappa} (1-\dot{x}^2) \{ E_a + [\dot{x}H]_a - \dot{x}_a (\dot{x}E) \} \right] = 0. \quad (2.1.45)$$

Докажем теорему.

Теорема 2.1.5. Алгеброй инвариантности системы уравнений (2.1.44), (2.1.45) в классе дифференциальных операторов первого порядка

$$X = \xi^0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \xi^a \frac{\partial}{\partial x_a} + \xi^{1a} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_a} + \xi^{2a} \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_a} + \eta^{Ea} \frac{\partial}{\partial E_a} + \eta^{Ha} \frac{\partial}{\partial H_a} \quad (2.1.46)$$

где ξ^0, ξ^a - функции от $t, \vec{x}$, η^{Ea}, η^{Ha} - функции от $\vec{E}, \vec{H}$, $\vec{x}$ является алгебра $\mathcal{Q}(1,3)$ с базисными элементами (2.1.2) - (2.1.4)

Доказательство теоремы проводится методом [16]. Подействовав продолженным оператором (2.1.46) на уравнения (2.1.44) и переходя на многообразия данных уравнений, получаем определяющие уравнения, из которых заключаем, что алгеброй инвариантности уравнения (2.1.36) является алгебра $\mathcal{C}(1,3)$, состоящая из операторов (2.1.2) - (2.1.4), а также операторов

$$\begin{aligned} D &= x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_a \frac{\partial}{\partial x_a} + 2 \left(E_a \frac{\partial}{\partial E_a} + H_a \frac{\partial}{\partial H_a} \right) \\ K_0 &= 2x_0 D - x_\nu x^\nu \frac{\partial}{\partial x_0} + 2x_a \varepsilon_{a\beta\gamma} \left(E_\beta \frac{\partial}{\partial H_\gamma} - H_\beta \frac{\partial}{\partial E_\gamma} \right) \end{aligned} \quad (2.1.47)$$

$$\begin{aligned} K_a &= 2x_a D + x_\nu x^\nu \frac{\partial}{\partial x_a} + 2x_0 \varepsilon_{a\beta\gamma} \left(H_\beta \frac{\partial}{\partial E_\gamma} - E_\beta \frac{\partial}{\partial H_\gamma} \right) + \\ &+ 2H_a \left(x_\beta \frac{\partial}{\partial H_\beta} \right) + 2E_a \left(x_\beta \frac{\partial}{\partial E_\beta} \right) - 2(xH) \frac{\partial}{\partial H_a} - 2(xE) \frac{\partial}{\partial E_a} \end{aligned}$$

Причем на функции ξ^1_a, ξ^2_a накладываются условия:

$$\frac{\partial \xi^1_a}{\partial x_0} = \frac{\partial \xi^2_a}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \xi^2_a}{\partial x_0} = \frac{\partial \xi^2_a}{\partial x_\beta} = 0 \quad a, \beta = \overline{1,3} \quad (2.1.48)$$

Из второй части определяющих уравнений, полученных в результате действия оператора (2.1.46) на уравнение (2.1.45), следует, что

$$\xi^1_a = \xi^a_{x_0} + \xi^a_{x_\beta} \dot{x}_\beta - \dot{x}_a (\xi^0_{x_0} + \xi^0_{x_\beta} \dot{x}_\beta) \quad (2.1.49)$$

$$\xi^2_a = \xi^1_a_{x_0} + \xi^1_a_{x_\beta} \dot{x}_\beta + \xi^1_a_{\dot{x}_\beta} \ddot{x}_\beta - \ddot{x}_a (\xi^0_{x_0} + \xi^0_{x_\beta} \dot{x}_\beta)$$

Для того, чтобы выполнялись соотношения (2.1.48) и (2.1.49) необходимо, чтобы функции ξ^0 и ξ^a были линейны по x_0, x_β . Нетрудно также проверить, что уравнение (2.1.45) инвариантно относительно алгебры $\mathcal{P}(1,3)$ с базисными элементами (2.1.2) - (2.1.4). Таким образом, доказано, что алгеброй инвариантности системы уравнений (2.1.44), (2.1.45) является алгебра $\mathcal{P}(1,3)$.

определяемая операторами (2.1.2) - (2.1.4).

Рассмотрим теперь уравнение

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{e}{m} \left\{ \vec{E} + [\dot{\vec{x}} \vec{H}] - \dot{\vec{x}} (\dot{\vec{x}} \vec{E}) \right\} (1 - \dot{\vec{x}}^2)^{1/2} \quad (2.1.50)$$

описывающее движение частицы в электромагнитном поле без учета сил радиационного трения. Из теоремы 2.1.5 и следствия 2.1.1 следует утверждение: система уравнений (2.1.44) и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \dot{x}_a + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_a} \left\{ \frac{e}{m} (\vec{E}_a + [\dot{\vec{x}} \vec{H}]_a - \dot{x}_a (\dot{\vec{x}} \vec{E})) (1 - \dot{\vec{x}}^2)^{1/2} \right\} = 0 \quad (2.1.51)$$

пуанкаре-инвариантна.

Построим теперь некоторые точные решения системы уравнений (2.1.44) и (2.1.51).

Решение уравнения Максвелла ищем в виде

$$\vec{H} = \vec{x} f'(x^2) \quad \vec{E} = \vec{x} f^2(x^2) \quad (2.1.52)$$

Подставив выражения (2.1.52) в уравнения (2.1.44) получаем определяющие уравнения для f' и f^2 :

$$f' = f^2 = f \quad 3f + 2(x^2) \frac{df}{d(x^2)} = 0 \quad (2.1.53)$$

откуда следует, что

$$f = c_1 (x^2)^{-3/2}, \quad \text{где } c_1 = \text{const} \quad (2.1.54)$$

Подставив выражения (2.1.52), (2.1.54) для функций $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в уравнение (2.1.50), получаем уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_a} \dot{x}_a + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_a} \left\{ \frac{e}{m} \left\{ x_a + [\dot{\vec{x}} \vec{x}]_a - \dot{x}_a (\dot{\vec{x}} \vec{x}) \right\} \frac{c_1 (1 - \dot{\vec{x}}^2)^{1/2}}{(x^2)^{3/2}} \right\} = 0 \quad (2.1.55)$$

Уравнение (2.1.55) инвариантно относительно группы $O(3)$, инфинитезимальные операторы которой имеют вид

$$J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a} + \dot{x}_a \frac{\partial}{\partial \dot{x}_b} - \dot{x}_b \frac{\partial}{\partial \dot{x}_a} \quad (2.1.56)$$

Инвариантами преобразований, порождаемых операторами (2.I.56) являются:

$$\omega_1 = x^2 \quad \omega_2 = (\dot{x}x) \quad \omega_3 = (1 - \dot{x}^2) \quad \omega_0 = x_0 \quad (2.I.57)$$

Поэтому, согласно [25], частное решение уравнения (2.I.55) будем искать в виде

$$\Phi = \Phi(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (2.I.58)$$

Подставив выражение (2.I.58) в уравнение (2.I.55) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1} 2\omega_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_2} \left(1 - \omega_3 + \frac{e}{m}(\omega_1 - \omega_2^2) \frac{c_1 \omega_3^{1/2}}{\omega_1^{3/2}}\right) + \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_3} \frac{e}{m} \frac{c_1 \omega_3^{3/2} \omega_2}{\omega_1^{3/2}} = 0 \end{aligned} \quad (2.I.59)$$

Если положить, что функция Φ зависит только от ω_1 и ω_3 , то уравнение (2.I.59) принимает вид:

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_1} + \frac{e}{m} \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_3} \frac{c_1 \omega_3^{3/2}}{\omega_1^{3/2}} = 0 \quad (2.I.60)$$

Решая уравнение (2.I.60), получаем частное решение уравнения (2.I.55):

$$\Phi = 2\omega_3^{-1/2} - \frac{e}{m} c_1 \omega_1^{-1/2} + c_2 \quad (2.I.61)$$

Воспользовавшись теперь тем, что система уравнений (2.I.44) (2.I.50) лоренц-инвариантна, размножим решение (2.I.52), (2.I.54) (2.I.61) данных уравнений. Получаем целый класс новых решений следующим образом.

Преобразования, обратные преобразованиям (2.I.II б), можно записать в векторной форме:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}' + \frac{\vec{v}}{v^2} (v E') \{ (1 - v^2)^{1/2} - 1 \} - [\vec{v} \vec{H}]}{(1 - v^2)^{1/2}}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{H}' + \frac{\vec{v}}{v} (v \cdot H') \{ (1-v^2)^{1/2} - 1 \} + [\vec{v} E']}{(1-v^2)^{1/2}} \quad (2.1.62)$$

Из преобразований (2.1.II а) находим, как меняется скорость $\vec{\dot{x}}$ при лоренцевых преобразованиях:

$$\vec{\dot{x}}' = \frac{(1-v^2)^{1/2} \vec{\dot{x}} + \vec{v} \frac{\dot{x} v}{v^2} \{ 1 - (1-v^2)^{1/2} \}}{1 - (\dot{x} v)} \quad (2.1.63)$$

Тогда новые решения уравнений (2.1.44), (2.1.50) запишутся таким образом:

$$\vec{E} = \{ \vec{\dot{x}} - \vec{v} x_0 - [\vec{v} \vec{\dot{x}}] \} \times \frac{c_1}{(1-v^2)^{1/2}} \{ (1-v^2)^{-1} (x_0 - (v x))^2 - x_v x^v \}^{-3/2}$$

$$\vec{H} = \{ \vec{\dot{x}} - \vec{v} x_0 + [\vec{v} \vec{\dot{x}}] \} \times \frac{c_1}{(1-v^2)^{1/2}} \{ (1-v^2)^{-1} (x_0 - (v x))^2 - x_v x^v \}^{-3/2} \quad (2.1.64)$$

$$\Phi = 2 \left\{ 1 - \frac{(1-v^2) \dot{x}^2 + 2 \frac{(\dot{x} v)}{v^2} ((1-v^2)^{1/2} - 1 + v^2) + (\dot{x} v) (1 - (1-v^2)^{1/2})}{(1 - \dot{x} v)^2} \right\}^{-1/2}$$

$$- \frac{e}{m} c_1 \{ (1-v^2)^{-1} ((x_0 - (v x))^2 - x_v x^v) \}^{-1/2} + c_2$$

где v — произвольный параметр меньше единицы.

§ 2.2. Уравнения релятивистской механики, инвариантные относительно группы Лоренца

Классическое уравнение ньютоновой механики

$$m \vec{\ddot{x}} = \vec{F} \quad (2.2.1)$$

где $\vec{F}$ — внешняя сила, под действием которой движется частица, инвариантно относительно группы Галилея и, поэтому с его помощью возможно описание ограниченного круга физических явлений. Более общим является уравнение

$$m\ddot{\vec{x}} = (1 - \dot{x}^2)^{1/2} (\vec{F} - \ddot{\vec{x}} (F\dot{x})), \quad (2.2.2)$$

позволяющее описать движение частицы, когда ее скорость сравнима со скоростью света. Вывод и обсуждение данного уравнения приводится в монографии [14]. Как будет показано ниже, уравнение (2.2.2) инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{\mathcal{P}}(1,3)$, причем базисные элементы алгебры Ли группы имеют вид

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = \frac{\partial}{\partial x_a} \quad (2.2.3)$$

$$J_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a} + \dot{x}_a \frac{\partial}{\partial \dot{x}_b} - \dot{x}_b \frac{\partial}{\partial \dot{x}_a} + F_a \frac{\partial}{\partial F_b} - F_b \frac{\partial}{\partial F_a} \quad (2.2.4)$$

$$J_{0a} = x_a \frac{\partial}{\partial x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x_a} + (\delta_{ab} - \dot{x}_a \dot{x}_b) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_b} + (\delta_{ab} (F\dot{x}) - F^b \dot{x}_a) \frac{\partial}{\partial F^b} \quad (2.2.5)$$

$$D = x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_b \frac{\partial}{\partial x_b} - F^b \frac{\partial}{\partial F^b} \quad (2.2.6)$$

Оказывается, среди уравнений вида

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{\Phi}(x_0, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \vec{F}) \quad (2.2.7)$$

существует достаточно широкий класс уравнений, обладающих симметрией (2.2.3) – (2.2.5). Однако, уравнение (2.2.2) единственное в своем роде. Только оно инвариантно относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{\mathcal{P}}(1,3)$. Под расширенной группой Пуанкаре будем понимать группу, алгебра Ли которой задается операторами (2.2.3) – (2.2.6). Описанию уравнений, инвариантных относительно группы $\tilde{\mathcal{P}}(1,3)$ и ее подгрупп, посвящен данный параграф. Пуанкаре-инвариантное уравнение вида (2.2.7) при постоянной силе $\vec{F}$ проинтегрировано в квадратурах.

Информацию о симметричных свойствах уравнения (2.2.2) дает

Теорема 2.2.1. Группа $\tilde{\mathcal{P}}(1,3)$ является группой симметрии уравнения (2.2.2). Базисные элементы алгебры Ли этой группы за-

даются формулами (2.2.3) - (2.2.6)

Доказательство. Следуя алгоритму (0.25) - (0.34), определяющие уравнения (0.34) для уравнения (2.2.2) запишем в виде:

$$\xi_{x_0 x_0}^a + 2 \xi_{x_0 x_B}^a \dot{x}_B + \xi_{x_B x_c}^a \dot{x}_B \dot{x}_c - \dot{x}_a (\xi_{x_0 x_0}^0 + 2 \xi_{x_0 x_B}^0 \dot{x}_B + \xi_{x_B x_c}^0 \dot{x}_B \dot{x}_c) + (1 - \dot{x}^2)^{1/2} (F^B - \dot{x}_B (\dot{x} F)) (\xi_{x_B}^a - \dot{x}_a \xi_{x_B}^0) - 2(1 - \dot{x}^2)^{1/2} \cdot (2.2.8)$$

$$\cdot (F^a - \dot{x}_a (\dot{x} F)) (\xi_{x_0}^0 + \xi_{x_B}^c \dot{x}_B) = (1 - \dot{x}^2)^{1/2} (\eta_a - \dot{x}_a (\eta \dot{x}) - \xi^a (F \dot{x}) - \dot{x}_a (F^B \xi^B)) - \frac{\dot{x}_B \xi^B}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} (F^a - \dot{x}_a (F \dot{x}))$$

Положим

$$\xi^i = c^{ij} x_j + d^i \quad i, j = 0, 3 \quad (2.2.9)$$

где $c^{ii} = c^{jj}$ $c^{i0} = c^{0i}$ $c^{aB} + c^{Ba} = 0$ $a \neq B$

Тогда

$$(1 - \dot{x}^2)^{1/2} (F^B - \dot{x}_B (\dot{x} F)) (c^{aB} - \dot{x}_a c^{0B}) - 2(1 - \dot{x}^2)^{1/2} \cdot (F^a - \dot{x}_a (\dot{x} F)) (c^{00} + c^{0B} \dot{x}_B) = (1 - \dot{x}^2)^{1/2} \{ \eta^a - \dot{x}_a (\eta \dot{x}) - (c^{a0} + c^{aB} \dot{x}_B - \dot{x}_a (c^{00} + c^{0B} \dot{x}_B)) (F \dot{x}) - \dot{x}_a (c^{\kappa 0} + c^{\kappa B} \dot{x}_B - \dot{x}_\kappa (c^{00} + c^{0B} \dot{x}_B)) F^\kappa \} - c^{\kappa B} \dot{x}_B (1 - \dot{x}^2)^{1/2} \cdot (F^a - \dot{x}_a (F \dot{x})). \quad (2.2.10)$$

Из уравнения (2.2.10) находим, что

$$\eta^a = c^{aB} F^B - c^{a0} F^0 + c^{0B} (\delta_{aB} (F \dot{x}) - \dot{x}_a F^B) \quad (2.2.11)$$

Формулы (2.2.9), (2.2.11) полностью определяют операторы (2.2.3) - (2.2.6), что и требовалось доказать.

Теорема 2.2.2. Уравнения (2.2.7) инвариантны относительно операторов (2.2.4) тогда и только тогда, когда

$$\vec{\Phi} = \vec{x} f' + \vec{x} f^2 + [\vec{x} \vec{x}] f^3 + \vec{F} f^4 + [\vec{x} \vec{F}] f^5 + [\vec{x} \vec{F}] f^6 \quad (2.2.12)$$

где $f^i = f^i(\omega)$

$$\omega_0 = x_0 \quad \omega_1 = x^2 \quad \omega_2 = \dot{x}^2 \quad \omega_3 = x \dot{x} \quad (2.2.13)$$

$$\omega_4 = (x F) \quad \omega_5 = (\dot{x} F) \quad \omega_6 = F^2$$

Доказательство. Необходимым и достаточным условием инвариантности уравнений (2.2.7) относительно оператора (2.2.4) является выполнение следующих уравнений:

$$\Phi_{x_a}^c x_b - \Phi_{x_b}^c x_a + \Phi_{\dot{x}_a}^c \dot{x}_b - \Phi_{\dot{x}_b}^c \dot{x}_a + \Phi_{F^a}^c F^b - F^a \Phi_{F^b}^c = \delta_c^a F^b - \delta_c^b F^a \quad (2.2.14)$$

Согласно теореме 2.1.2 общее решение уравнений (2.2.14) задается формулами (2.2.12), (2.2.13).

Теорема 2.2.3. Для того, чтобы уравнения (2.2.7) были инвариантны относительно группы $O(1,3)$, инфинитезимальные операторы которой задаются формулами (2.2.4), (2.2.5), необходимо и достаточно, чтобы

$$\vec{\Phi} = (\vec{x} - x_0 \vec{x})(1 - \dot{x}^2) \varphi^1 + (\vec{F} - \vec{x}(\dot{x} F))(1 - \dot{x}^2)^{1/2} \varphi^2 \quad (2.2.15)$$

где $\varphi^i = \varphi^i(W)$

$$W_1 = x_\nu x^\nu \quad W_2 = \frac{x_\nu \dot{x}^\nu}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} \quad W_3 = \frac{x_0(F \dot{x}) - (F x)}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} \quad (2.2.16)$$

$$W_4 = \frac{F^2 - (F \dot{x})^2}{1 - \dot{x}^2}$$

Доказательство. Согласно алгоритму (0.25) - (0.34), уравне-

ния (2.2.7) будут лоренц-инвариантны тогда и только тогда, когда правая часть уравнений (2.2.7) удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} & \Phi_{x_0}^b x_a + \Phi_{x_a}^b x_0 + \Phi_{\dot{x}_a}^b - \dot{x}_a \dot{x}_c \Phi_{\dot{x}_c}^b + \Phi_{F^a}^b (F \dot{x}) - \\ & - \Phi_{F^c}^b \dot{x}_a F^c = -\dot{x}_b \Phi^a - 2 \dot{x}_a \Phi^b \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Подставляя в уравнения (2.2.17) выражение (2.2.12) заключаем, что

$$\dot{x}_0 \varphi^1 + \varphi^2 + (F \dot{x}) \varphi^3 = 0 \quad \varphi^4 = \varphi^5 = \varphi^6 = 0$$

Поэтому, не уменьшая общности, общее решение уравнений (2.2.14), (2.2.17) ищем в виде

$$\vec{\Phi} = (\vec{x} - x_0 \vec{\dot{x}})(1 - \dot{x}^2)^{\alpha_1} \psi^1 + (\vec{F} - \vec{\dot{x}}(\dot{x} F))(1 - \dot{x}^2)^{\alpha_2} \psi^2 \quad (2.2.18)$$

Уравнение (2.2.17) выполняется для функции (2.2.18) только в том случае, когда $\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 1/2$ и функции ψ^i удовлетворяют уравнениям:

$$\psi_{\omega_0}^i + 2x_0 \psi_{\omega_1}^i + \psi_{\omega_3}^i + \psi_{\omega_4}^i \omega_5 = 0 \quad (2.2.19)$$

$$(\omega_0 - \omega_3) \psi_3^i + 2(1 - \omega_2) \psi_{\omega_2}^i - \omega_4 \psi_{\omega_4}^i - \omega_5 \psi_{\omega_5}^i - 2\omega_6 \psi_{\omega_6}^i = 0$$

$$\omega_0 \psi_{\omega_4}^i + \psi_{\omega_5}^i + 2\omega_5 \psi_{\omega_6}^i = 0$$

Общее решение уравнений (2.2.19) задается формулой (2.2.15).

Необходимость доказана.

Достаточность доказывается с помощью конечных преобразований. Из уравнений Ли (0.14) находим, что оператор (2.25) порождает конечные преобразования (2.1.11 а), (2.1.30) для $x_0, \vec{x}, \vec{\dot{x}}$

$$\vec{F}' = \frac{(1 - v^2)^{1/2} \vec{F} + \vec{v}[(v F)\{1 - (1 - v^2)^{1/2}\} + (F \dot{x}) v^2] \frac{1}{v^2}}{1 + (v \dot{x})} \quad (2.2.20)$$

для силы $\vec{F}$.

Положим в формулы (2.1.30), (2.1.II а), (2.2.19) $V_2 = V_3 = 0$ и докажем, что, если

$$\ddot{x}_1' = (1 - \dot{x}'^2) (\dot{x}_1' - \dot{x}_0' \dot{x}_1') \varphi' + (1 - \dot{x}'^2)^{1/2} (F_1' - \dot{x}_1' (\dot{x}' F')) \varphi^2$$

то и

$$\ddot{x}_1 = (1 - \dot{x}^2) (\dot{x}_1 - \dot{x}_0 \dot{x}_1) \varphi' + (1 - \dot{x}^2)^{1/2} (F_1 - \dot{x}_1 (\dot{x} F)) \varphi^2 \quad (2.2.21)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{x}_1}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^3 \beta^3} = & \left[(\dot{x}_1 - V_1 \dot{x}_0) \beta - (\dot{x}_0 + V_1 \dot{x}_1) \beta \frac{\dot{x}_1 + V_1}{1 + V_1 \dot{x}_1} \right] \frac{1 - \dot{x}^2}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^2 \beta^2} \varphi' + \\ & + \frac{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}}{(1 + V_1 \dot{x}_1) \beta} \left\{ \frac{F_1 + V_1 (F \dot{x})}{1 + V_1 \dot{x}_1} - \frac{\dot{x}_1 + V_1}{1 + V_1 \dot{x}_1} \left(\frac{F_1 + V_1 (F \dot{x})}{1 + V_1 \dot{x}_1} \frac{\dot{x}_1 + V_1}{1 + V_1 \dot{x}_1} + \frac{F^2 \dot{x}_2 + F^3 \dot{x}_3}{(1 + V_1 \dot{x}_1)^2 \beta^2} \right) \right\} \varphi^2 \end{aligned}$$

откуда после сокращений следует уравнение (2.2.21). Аналогично доказывается случай $V_2 \neq 0$ или $V_3 \neq 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.2.4. Группа $\mathcal{P}(1,3)$ является группой симметрии уравнения (2.2.7) тогда и только тогда, когда

$$\Phi = (1 - \dot{x}^2)^{1/2} (\vec{F} - \vec{x} (\dot{x} F)) \varphi^2, \quad (2.2.22)$$

где $\varphi^2 = \varphi^2(\omega_4)$.

Доказательство. Из условия инвариантности уравнений относительно операторов сдвига (2.2.3) следует, что правая часть уравнений (2.2.7) должна удовлетворять уравнениям:

$$\vec{\Phi}_{x_0} = 0 \quad \vec{\Phi}_{x_\alpha} = 0 \quad \alpha = \overline{1,3} \quad (2.2.23)$$

Из уравнений (2.2.3) следует, что правая часть пуанкаре-инвариантных уравнений (2.2.7), (2.2.16), (2.2.17) не должна зависеть от $x_0, \vec{x}$. Очевидно, это возможно лишь в том случае, когда функция $\vec{\Phi}$ задается формулой (2.2.22). Достаточность теоремы очевидна, т.к.

$$x'_j = x_j + a_j \quad \frac{dx'_a}{dx'_0} = \dot{x}_a \quad \frac{d^2 x'_a}{d{x'_0}^2} = \ddot{x}_a$$

и правая часть (2.2.22) уравнений (2.2.7) не зависит от $x_0, \vec{x}$

Теорема 2.2.5. Уравнения (2.2.7) инвариантны относительно расширенной группы Пуанкаре $\widetilde{\mathcal{P}}(1,3)$, инфинитезимальные операторы которой задаются формулами (2.2.3) - (2.2.6), лишь тогда, когда уравнение (2.2.7) имеет вид (2.2.2) с точностью до константы.

Доказательство. Воспользовавшись алгоритмом (0.25) - (0.34) для уравнений (2.2.7), инвариантных относительно оператора (2.2.6), получаем следующие определяющие уравнения:

$$\Phi_{x_0}^b x_0 + \Phi_{x_a}^b x_a - \Phi_{F^a}^b F^a = -\Phi^b \quad (2.2.24)$$

Подставив выражение (2.2.22) в уравнение (2.2.24), заключаем, что

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial W_4} = 0$$

откуда следует необходимость теоремы.

С помощью конечных преобразований докажем достаточность теоремы. Действительно, оператор (2.2.6) порождает следующие преобразования для $\vec{x}_0, \vec{x}, \vec{\dot{x}}, \vec{\ddot{x}}, \vec{F}$.

$$x'_0 = e^a x_0 \quad \vec{x}' = e^a \vec{x} \quad \vec{\dot{x}}' = \vec{\dot{x}}$$

$$\vec{\ddot{x}}' = e^{-a} \vec{\ddot{x}} \quad \vec{F}' = e^{-a} \vec{F}$$

поэтому, если

$$\vec{\ddot{x}}' = (1 - \dot{x}'^2)^{1/2} (\vec{F}' - \vec{\dot{x}}' (F' \dot{x}')),$$

то, очевидно, и

$$\vec{\ddot{x}} = (1 - \dot{x}^2)^{1/2} (\vec{F} - \vec{\dot{x}} (F \dot{x}))$$

Теорема доказана.

Оказывается, при постоянной силе $\vec{F}$ уравнения (2.2.2) интегрируются в квадратурах. Действительно, единственным пуанкаре-инвариантом группы $O(1,3)$, определяемой операторами (2.2.3)–(2.2.5) является инвариант W_4 (2.2.16). Следовательно, он будет одновременно первым интегралом уравнений (2.2.2). Так как уравнения (2.2.2) инвариантны относительно группы $O(3)$ и группы сдвигов по пространственным переменным, то можно ввести новые переменные

$$(1-\dot{x}^2)=\rho_1, \quad (F\dot{x})=\rho_2, \quad x_0.$$

Тогда система уравнений (2.2.2) перейдет в следующую систему уравнений:

$$\frac{d\rho_1}{dx_0} = -2\rho_1^{3/2}\rho_2$$

$$\frac{d\rho_2}{dx_0} = (F^2 - \rho_2^2)\rho_1^{1/2}$$

откуда находим интеграл движения

$$\frac{F\dot{x}}{F^2(1-\dot{x}^2)^{1/2}} - x_0 = C_0 \quad (2.2.25)$$

Уравнения (2.2.2) инвариантны относительно оператора (2.2.5)

Поэтому, согласно утверждению 0.1, выражение

$$J_{0a} C = \frac{(F\dot{x})^2 F_a - F^2 (F\dot{x}) \dot{x}_a - F_a F^2}{(1-\dot{x}^2)^{1/2} F^4} - x_a \quad (2.2.26)$$

является интегралом движения. Недостающие интегралы движения находятся из уравнения

$$\frac{d\dot{x}_a}{d(1-\dot{x}^2)} = \frac{\dot{x}_a}{2(1-\dot{x}^2)} - \frac{F_a}{2(1-\dot{x}^2)(F\dot{x})}$$

откуда следует, что выражения

$$\frac{F^2 \dot{x}_a - F_a (F \dot{x})}{(1 - \dot{x}^2)^{1/2}} = K_a \quad (2.2.27)$$

будут интегралами движения.

Таким образом, система уравнений (2.2.2) имеет два типа векторных интегралов (2.2.26) и (2.2.27).

§ 2.3. Классификация и интегрирование уравнений второго порядка, инвариантных относительно некоторых групп преобразований

В данном параграфе описаны уравнения вида

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(x_0, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) \quad (2.3.1)$$

инвариантные относительно группы Лоренца и группы Галилея. Найдены уравнения, инвариантные относительно следующих преобразований:

$$x'_\mu = \frac{x_\mu}{1 + \epsilon_\nu x_\nu} \quad \mu, \nu = 0, 3 \quad (2.3.2)$$

$$x'_\mu = \frac{x_\mu - c_\mu x_\nu x^\nu}{1 - 2C_\nu x^\nu + C_\nu C^\nu x_\nu x^\nu} \quad (2.3.3)$$

$$x'_a = \frac{x_a - C_a x^2}{1 - 2(Cx) + C^2 x^2} \quad (2.3.4)$$

образующих, соответственно, группу проективных преобразований — $C(4)$ и группы конформных преобразований — $C(1,3)$, $C(3)$

На примере некоторых уравнений показано, как для ОДУ, обладающего симметрией, можно построить интегралы движения. Уравнения движения, обладающие достаточно широкой группой симметрии, проинтегрированы в квадратурах.

У р а в н е н и я д в и ж е н и я с с и м м е т р и е й

Из следствия 2.1.4 вытекает, что необходимым и достаточным

условием инвариантности уравнения (2.2.I) относительно группы $O(I,3)$ является равенство:

$$\vec{F} = (\vec{x} - x_0 \vec{x}) (1 - \dot{x}^2) h(W', W^2) \quad (2.3.5)$$

где W_1, W_2 определяются формулами (2.I.85).

Теорема 2.3.I. Уравнения (2.3.I) инвариантны относительно группы $\{O(I,3), C(I,3)\}$ только в том случае, когда

$$\vec{F} = -(\vec{x} - x_0 \vec{x}) \frac{2\dot{x}_v \dot{x}^v}{x_v x^v} \quad (2.3.6)$$

Доказательство теоремы проводится методом [I6], согласно которому условие инвариантности уравнения (2.3.I) относительно группы $C(I,3)$ распадается на следующие определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} & F_{x_0}^a 2x_0 \dot{x}_d + F_{x_n}^a 2x_n \dot{x}_d + F_{x_d}^a (x_v x^v) + 2F_{\dot{x}_d}^a (x_v \dot{x}^v) + \\ & + F_{\dot{x}_n}^a 2x_d (x_n - x_0 \dot{x}_n) = \delta_d^a (2\dot{x}_v \dot{x}^v - 2(F_x)) - \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

$$-2F^a x_d + 2x_a F^d - 2x_0 \dot{x}_a F^d - 4F^a x_0 \dot{x}_d$$

$$F_{x_0}^a (x_v x^v - 2x_0) - 2x_0 F_{x_n}^a x_n - 2F_{\dot{x}_n}^a (x_n - \dot{x}_n (x \dot{x})) =$$

$$= -2\dot{x}_a \dot{x}_v \dot{x}^v + 2\dot{x}_a (F_x) + 2x_0 F^a + 4F^a (x \dot{x})$$

Решая систему уравнений (2.3.7), при условии, что функция $\vec{F}$ удовлетворяет (2.I.38), получаем формулу (2.3.6).

Теорема 2.3.2. Для того, чтобы уравнения (2.3.I) были инвариантны относительно группы $C(3)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\vec{F} = \frac{2(2\vec{x}(x \dot{x}) - \vec{x}(\dot{x}^2))}{x^2} + \vec{\varphi} x^2 - 2\vec{x}(x \varphi) \quad (2.3.8)$$

где $\vec{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)$ $\varphi^i = \varphi^i(x_0, J_1, J_2, J_3)$

$$J_a = \frac{\dot{x}_a x^2 - 2x_a(x\dot{x})}{(x^2)^2} \quad (2.3.9)$$

Доказательство. В соответствии с методом [16] уравнения (2.3.1) инвариантны относительно группы $C(3)$ тогда и только тогда, когда функция $\vec{F}$ удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} F_{x_d}^a (-2x_d x_c) + F_{x_c}^a x^2 + F_{x_c}^a 2(x\dot{x}) - 2F_{x_d}^a \dot{x}_d x_c = \\ = \delta_c^a (2\dot{x}^2 + 2(xF)) - 4\dot{x}_a \dot{x}_c - 2x_c F^a - 2x_a F^c \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Общим решением уравнений (2.3.10) является функция (2.3.8)

Теорема 2.3.3. Уравнения (2.3.1) инвариантны относительно группы $\{O(3), C(3)\}$ тогда и только тогда, когда

$$\vec{F} = \frac{2(2\vec{x}(x\dot{x}) - \vec{x}\dot{x}^2)}{x^2} + \vec{x} \Phi\left(\frac{\dot{x}^2}{(x^2)^2}, x_0\right) \quad (2.3.11)$$

Доказательство. Из следствия 2.1.3 вытекает, что общий вид правой части уравнения (2.3.1), инвариантного относительно группы $O(3)$, задается формулой (2.1.38). Подставив выражение (2.1.38) в определяющие уравнения (2.3.10) и расцепив получившуюся систему уравнений по векторно, приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} h' = -\frac{2\dot{x}^2}{x^2} \quad h'_{\omega_3} = 0 \quad h^3 = 0 \\ h'_{\omega_1} \omega_1 + h'_{\omega_3} 2\omega_3 + h'_{\omega_2} \omega_2 - h' = 0 \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

$$h_{\omega_1}^2 \omega_1 + h_{\omega_3}^2 2\omega_3 + h_{\omega_2}^2 \omega_2 = 0 \quad h_{\omega_2}^2 \omega_1 = 4$$

Решив уравнения (2.3.12) и используя формулу (2.1.38), получаем выражение (2.3.11).

Теорема 2.3.4. Для того, чтобы уравнения (2.3.1) были инвариантны относительно группы $\{O(3), C(4)\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\vec{F} = (\vec{x} - x_0 \vec{x}) \frac{(x_0(x\dot{x} - x^2))}{x_0^5} \Phi(Q) \quad (2.3.13)$$

$$\text{где } Q = (q_1, q_2) \quad q_1 = \frac{x^2}{x_0^2} \quad q_2 = \frac{x_0^2(\dot{x}^2 x_0^2 - 2x_0(x\dot{x}) + x^2)}{(x_0(x\dot{x}) - x^2)^2}$$

Доказательство. Из инвариантности уравнений (2.3.1) относительно группы $C(4)$ следует, что функция $\vec{F}$ должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} F_{x_0}^6 x_0^2 + F_{x_c}^6 x_c x_0 + F_{\dot{x}_c}^6 (x_c - x_0 \dot{x}_c) &= -3F^6 x_0 \\ F_{x_0}^6 x_0 x_a + F_{x_c}^6 x_c x_a + F_{\dot{x}_c}^6 (x_c - x_0 \dot{x}_c) &= F^a (x_8 - x_0 \dot{x}_8) - \\ - F^6 x_a - 2F^6 x_0 \dot{x}_a. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Используя выражение (2.1.33), получаем уравнения для функций h^i :

$$\begin{aligned} x_0 h'_{x_0} + 2\omega_1 h'_{\omega_1} + \omega_3 h'_{\omega_3} + h^1 &= 0 \quad h^3 = 0 \\ x_0 h^2_{x_0} + 2\omega_1 h^2_{\omega_1} + \omega_3 h^2_{\omega_3} + h^2 + x_0 h^1 &= 0 \\ 2(\omega_3 - x_0 \omega_2) h'_{\omega_2} + (\omega_1 - x_0 \omega_3) h'_{\omega_3} + 2x_0 h^1 &= 0 \\ 2(\omega_3 - x_0 \omega_2) h^2_{\omega_2} + (\omega_1 - x_0 \omega_2) h^2_{\omega_3} + 2x_0 h^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

Решая уравнения (2.3.15), получаем формулу (2.3.13).

Достаточность вышеприведенных теорем доказывается непосредственной проверкой.

И н т е г р а л ы д в и ж е н и я .

Общий рецепт, как строить интегралы движения для негамильтоновых систем, обладающих симметрией, неизвестен. Однако в некоторых случаях можно построить интегралы движения, используя метод, изложенный в книге Э.Картана [13]

а. Уравнения инвариантные относительно группы $O(3)$ имеют вид:

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{x} h^1 + \vec{x} \cdot h^2 + [\vec{x} \dot{\vec{x}}] h^3 \quad (2.3.16)$$

где $h^i = h^i(x_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, ω_i определяются формулой (2.1.6)
Используя метод [13], получаем первые интегралы при $h^3 = 0$

$$M_{ab} = \frac{\dot{x}_a x_b - x_a \dot{x}_b}{(\omega_1 \omega_3 - \omega_2^2)^{1/2}} \quad a, b = 1, 3 \quad (2.3.17)$$

из которых функционально независимыми являются только два интеграла, так как

$$M_{12}^2 + M_{23}^2 + M_{31}^2 = 1$$

б. Для релятивистски-инвариантных уравнений (2.3.1) с правой частью (2.3.5) интегралы движения задаются формулами:

$$M_{0a} = \frac{x_a - x_0 \dot{x}_a}{(W_1 W_3 - W_2^2)^{1/2}} \quad M_{ab} = \frac{\dot{x}_a x_b - \dot{x}_b x_a}{(W_1 W_3 - W_2^2)^{1/2}} \quad (2.3.18)$$

где

$$W_1 = x_\nu x^\nu \quad W_2 = x_\nu \dot{x}^\nu \quad W_3 = \dot{x}_\nu \dot{x}^\nu \quad (2.3.19)$$

Здесь

$$\sum M_{0a}^2 - \sum M_{ab}^2 = 1$$

$$\sum M_{0a} M_{bc} = 0$$

$$a \neq b \neq c$$

Таким образом, лоренц-инвариантная система уравнений всегда обладает четырьмя независимыми первыми интегралами. Причем инфинитезимальные операторы J_{0a} , J_{ab} , $a, b = \overline{1, 3}$ переводят интегралы движения M_{0a} и M_{ab} друг в друга следующим образом:

$$J_{0a} M_{0b} = M_{ab} \quad J_{ab} M_{0c} = \delta_b^c M_{0a} - \delta_a^c M_{0b}$$

$$J_{0a} M_{bc} = \delta_b^a J_{0c} - \delta_c^a J_{0b} \quad (2.3.20)$$

$$J_{0b} M_{cd} = \delta_a^c M_{db} + \delta_b^c M_{ad} + \delta_d^a M_{bc} + \delta_b^d M_{ca}$$

в. Как было показано в теореме 2.3.1, в классе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида (2.3.1) существует единственное уравнение, инвариантное относительно группы $\{O(1,3), C(1,3)\}$. Оказывается, что, чтобы полностью проинтегрировать данное уравнение достаточно знать один из интегралов (2.3.18). Остальные пять первых интегралов можно построить, используя симметричные свойства уравнения (2.3.1) с правой частью (2.3.6).

Действительно, из формул (2.3.18), (2.3.20) следует, что любые два первых интеграла (2.3.18) можно получить друг из друга последовательным действием на них операторами J_{0a} и J_{ab} . Нетрудно также заметить, что из интегралов движения (2.3.18) можно составить единственный первый интеграл, являющийся функцией от инвариантов группы $O(3)$. Таким интегралом будет

$$P_1 = -(M_{01}^2 + M_{02}^2 + M_{03}^2) = \frac{W_1 + x_0 W_3 - 2x_0 W_2}{W_1 W_3 - W_2^2} \quad (2.3.21)$$

Откуда следует, что, если мы построим еще два независимых первых интеграла, являющихся функциями от инвариантов $O(3)$, тем самым мы закончим интегрирование. Для этого рассмотрим следующие первые интегралы:

$$K_3 \left(\frac{M_{03}}{M_{02}} \right) \cdot M_{02} = \frac{W_1 - 2x_0 W_2}{\sqrt{W_1 W_3 - W_2^2}} = P_2 \quad (2.3.22)$$

$$K_a \left(\frac{M_{ab}}{M_{bc}} \right) M_{cb} = \frac{2x_b W_2 + \dot{x}_b W_1}{(W_1 W_3 - W_2^2)^{1/2}} = Z_b \quad (2.2.23)$$

где K_a — инфинитезимальный оператор, соответствующий конформным преобразованиям (2.3.3). Нетрудно проверить, что интегралы

P_1, P_2 и $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ являются независимыми, что и требовалось доказать.

г. Из теоремы 2.3.3 следует, что уравнение, инвариантное относительно группы $\{O(3), C(3)\}$ имеет вид:

$$\vec{x} = \frac{2(2\vec{x}(x\dot{x}) - \vec{x}x^2)}{x^2} + \vec{x}\Phi\left(\frac{\dot{x}^2}{(x^2)^2}, x_0\right) \quad (2.3.24)$$

Как было показано выше, такая система уравнений всегда имеет интегралы движения, задаваемые формулой (2.3.17). Новые интегралы движения можно получить, воспользовавшись теоремой I.I.2 Действительно.

$$K'_c \left(\frac{M_{c\beta}}{M_{\alpha\beta}} \right) \cdot M_{\alpha\beta} = \frac{2x_\beta \omega_2 - \dot{x}_\beta \omega_1}{(\omega_1 \omega_3 - \omega_2)^{1/2}} = S_\beta \quad (2.3.25)$$

где K'_c — инфинитезимальный оператор, соответствующий преобразованиям (2.3.4).

Таким образом, получаем еще один векторный интеграл $\vec{S}$. Интегралы $M_{\alpha\beta}$ и S_c связаны одним соотношением

$$\sum_{\alpha \neq \beta \neq c} M_{\alpha\beta} S_c = 0$$

откуда следует, что уравнения (2.3.24) имеют четыре независимых первых интеграла.

д. Дополнительные интегралы уравнения, инвариантного относительно группы $\{O(3), C(4)\}$ строятся также с помощью утверждения O.I. Они имеют вид (2.3.13).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сформулируем результаты, полученные в диссертации.

В первой главе рассматриваются уравнения движения трех частиц. Приведено доказательство теоремы инвариантности пространственной задачи трех частиц с парным потенциалом взаимодействия относительно группы Галилея $G(I,3)$. Выяснено, что при некоторых специальных видах потенциала, уравнения движения трех частиц имеют более широкую группу симметрии, чем группа $G(I,3)$ и описаны все такие потенциалы. Показана взаимосвязь между симметрией и интегралами движения данных уравнений. Построены частные решения трехчастичных уравнений с потенциалом взаимодействия пропорциональным четвертой степени расстояния. Описан широкий класс систем уравнений, инвариантных относительно групп $G(I,3)$, $Sch(I,3)$, $\tilde{G}(I,3)$, частным случаем которых являются лагранжевы уравнения движения трех частиц с парным потенциалом взаимодействия. Найденные уравнения, принадлежащие классу гамильтоновых вполне интегрируемых систем, проинтегрированы в квадратурах.

Вторая глава диссертации посвящена теоретико-групповому анализу уравнений релятивистской механики. Подробно рассмотрен случай движения частицы в электромагнитном поле, описываемый уравнениями Лоренца-Дирака. Приведено доказательство, что данное уравнение пуанкаре-инвариантно. Проклассифицированы ОДУ второго и третьего порядков, на решениях которых реализуется такое представление группы Пуанкаре, как и на множестве решений уравнения Лоренца-Дирака. Установлено, что система уравнений Максвелла и Лоренца-Дирака пуанкаре-инвариантна. Для уравнения Лоренца-Дирака без учета силы радиационного трения построены интегралы движения, причем векторы электромагнитного поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Во втором параграфе главы рассматривается одно уравнение релятивистской механики и изучается его симметрия. Приведено доказательство инвариантности такого уравнения относительно расширенной группы Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$ и найдено в явном виде соответствующее представление этой группы. Приведена теоретико-групповая классификация уравнений, на множестве решений которых реализуется такое же представление. Проинтегрировано в квадратурах пуанкаре-инвариантное уравнение движения частицы в поле постоянной силы.

Третий параграф посвящен групповой классификации и интегрированию ОДУ второго порядка, инвариантных относительно некоторых групп преобразований.

Основные результаты диссертации являются новыми. Полученные инвариантные системы уравнений можно использовать для описания физических явлений, как в рамках теории, инвариантной относительно группы Галилея, так и группы Пуанкаре.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физ.-мат.наук, профессору В.И.Фушичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

- I. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. - М.: Наука, 1979 - 432 с.
2. Арнольд В.И. - Успехи мат. наук, 1969, 24, № 3, с. 225-226
3. Биркгоф Г. Гидродинамика. - М.: ИЛ, 1963
4. Вейль. Классические группы, их инварианты и представления. - М.: ИЛ, 1947. - 408 с.
5. Воронец П. Университетские известия, т. XXVIII, № 2, Киев, 1907.
6. Газархи Л.А. О новом относительно скоростей интеграле обобщенной задачи трех тел. - Укр. мат. журн., 1956, т.8, № I, с. 5-II.
7. Гельфонд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. - Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. - М.: Физматгиз, 1958. - 368 с.
8. Голубев В.Г. Некоторые следствия из классических интегралов в задаче трех тел. - Труды Моск. орд. Ленина энерг. ин-та, 1971, вып. 89, с.87.
9. Голубев В.Г., Гребенников Е.А. Проблема трех тел в небесной механике. - Изд-во Моск. ун-та, 1985 - 240 с.
10. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Новые качественные методы в небесной механике. - М.: Наука, 1971, 444 с.
11. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. - М. Наука, 1979, 432 с.
12. Гурса Е. Интегрирование уравнений с частными производными первого порядка. - К.: Радянська школа, 1941. - 415 с.
13. Гюнтер Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных. - Гостехиздат, 1934. - 360 с.
14. Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П. Нелинейные уравнения типа Кортега-де Фриза, конечно-зонные линейные операторы

ры и абелевы многообразия. - Успехи мат. наук, 1976, 31, № 1, с.55-136.

15. Егервари Е. Об одном обобщении решения Лагранжа задачи трех тел. - ДАН СССР, 1947, 55, № 9, с.805-807.

16. Зверович Э.И. Краевые задачи теории аналитических функций в гильбертовских классах на римановых поверхностях. - Успехи мат. наук, 1971, 26, № 1, с.113 - 179.

17. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли-Беклунда и законы сохранения. - ДАН СССР, 1976, 240, № 1.

18. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. - М.: Наука, 1983. - 280 с.

19. Имшенецкий В.Г. Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков. - М.: Изд. Моск. мат. общ-ва, 1916.

20. Итс А.Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений. - Вестн. Ленинградского ун-та, 1976, № 7, с.39-46.

21. Картан Э. Интегральные инварианты. - Гостехиздат, 1940. - 216 с.

22. Манахов С.В. - Функц. анализ и его прилож. 1976, 10, №4, с.93-95.

23. Меллер К. Теория относительности. - М.: Атомиздат, 1975. - 400 с.

24. Митропольский Ю.А., Лопатин А.К. Векторные поля, Алгебры и группы, порождаемые системой объективных задач. - Киев, 1985, - (Препринт) Ин-т математики АН УССР, 85.73)

25. Митропольский Ю.А., Лопатин А.К. Декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений. - Киев, 1985, - (Препринт/ Ин-т математики АН УССР; 85.74)

26. Митропольский Ю.А. Лопатин А.К. Асимптотическая декомпозиция систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым

параметром - Киев, 1985, - (Препринт / Ин-т математики АН УССР, 85.75)

27. Митропольский Ю.А., Ревенко И.В., Фушич В.И. О симметрии, интеграле движения и некоторых частных решениях пространственной задачи трех тел. - ДАН СССР, 1985, 280, № 4, с.799-804.

28. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978 - 400 с.

29. Переломов А.М. Точные результаты для одномерных многочастичных систем. - ЭАЯ, 1976, № 10, вып.4, с.850 - 883.

30. Ревенко И.В. Групповая классификация и интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений вида инвариантных относительно некоторых групп преобразований. - В кн.: Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983, с.78-83.

31. Ревенко И.В. Уравнения релятивистской механики, инвариантные относительно группы Пуанкаре. - В кн.: Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985, с.80-89

32. Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. - М.: Наука, 1983. - 304 с.

33. Соколов Ю.Д. О новом случае интегрируемости в прямолинейной задаче трех тел. - ДАН СССР, 1945, 46, № 3, с.99-102.

34. Соколов Ю.Д. Про випадки Інтегровальності в плоскій та прямолінійній задачі трьох тіл. - ДАН УРСР, 1947, № 4, с.3-7.

35. Соколов Ю.Д. Про випадки Інтегровальності в загальній просторовій задачі трьох тіл. - ДАН УРСР, 1947, № 4, с.9-13.

36. Соколов Ю.Д. Про Інтегрування в еліптичних функціях рівнянь прямолінійного руху трьох рівних мас, що взаємодіють з силами, прямопропорціональними кубам віддалень. - ДАН УРСР, 1950, № 6, с.423-432.

37. Трофимов В.В., Фоменко А.Г. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли. – Успехи мат.наук, 1984, 39, №2, с.3–56

38. Фушич В.И. О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных. – В кн.: Теоретико- групповые методы в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978, с.5–44.

39. Фушич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики. – ДАН СССР, 1979, 246, №4, с.846–850.

40. Фушич В.И. Симметрия в задачах математической физики. – В кн.: Теоретико- алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с.6–28,

41. Фушич В.И. Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. – Киев. Наук. думка. 1983. – 200 с.

42. Фушич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики. – В кн.: Теоретико- алгебраические методы в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983, с.4–23.

43. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. – М.: Гостехиздат, 1949. 396с.

44. Brachet M.E., Tirapegni E. On the interaction of classical field and particles. – Nuovo Cim. A., 1978, vol. 47, No.2, p. 210–230.

45. Calogero F. Exactly solvable one-dimensional many body problem. – Lett. al. Nuovo Cimento, 1975, 13:11, p. 411–416.

46. Corn J.F. Relativistic covariant and rotational electrodynamics. – J. Math. Phys., 1980, vol. 21, No.9, p.2360–2367.

47. Euler L. Novi Comment. Ac. Sc. Imp. Petropol., XI, 1765.

48. Hill E.L. The definition of moving coordinate systems in relativistic theories. – Phys. Rev., 1951, vol. 84, No.6, p. 1165–1168.

49. Hill E.L. On accelerated coordinate systems in classical and relativistic mechanics.- Phys. Rev., 1945, vol.67, No.II/12, p.358-363.

50. Hill E.L. On the kinematics of uniformly accelerated motions and classical electromagnetic theory.- Phys. Rev., 1947, vol.72, No.2, p.143-149.

51. Jacobe C., Gesam. Werke, Bd.IV.

52. Katrin G.H., Levine J.- Journ. Math. Phys., 1983, vol.24, No.7, p.1761-1771.

53. Lagrange J. Essai sur le probleme des trois corps.- Oeuvres, VI, 1772.

54. P.G.L. Leach.- Phys. Lett., 1981, A84, p.161.

55. P.G.L. Leach. First integral via polinomial canonical transformations.- Journ. Math. Phys., 1984, vol.25, No.II, p.3221.

56. Maharanta A., Duff R., Chattarji D.- Journ. Math. Phys., vol.2 , p.2221.

57. Mariwalla K.H. Lett. Nuovo Cim., 1975, vol.12, p.253.

58. Mitchell T.P. Journ. Math. Phys., 1978, vol.19, No.10, p.2082-

59. Moser J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformation.- Adv. Math., 1975, 16, p.197-220.

60. Mukunda N.- Phys. Rev., 1967, 155, p.1383-1386.

61. Mukunda N.- Journ. Math. Phys., 1967, 8, p.1069-1072.

62. Sarlet W.- Journ. Phys. A : Math. Gen., 11, 843.

63. Vujanovic B.A group-variational procedure for building first integrals of dynamics systems.- Int. J. Non-Linear Mechanics, vol.5, p.269-278.