

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Т. Г. ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

РЕПЕТА Виктор Кузьмич

УДК 517.42:519.46

УСЛОВНАЯ СИММЕТРИЯ И РЕДУКЦИЯ НЕКОТОРЫХ
НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
член-корреспондент АН Украины,
доктор физико-математических
наук, профессор
ФУЩИЧ В. И.

КИЕВ - 1991

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА I. ЛИНЕЙНАЯ И УСЛОВНАЯ СИММЕТРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ	II
§1. Групповая классификация многомерного нелинейного волнового уравнения	II
§2. Условная симметрия двумерного волнового уравнения	15
§3. Редукция и точные решения многомерного ДУЧП второго порядка	36
3.1. Многомерное нелинейное волновое уравнение	36
3.2. Исследование редуцированных систем . . .	41
3.3. О симметрии нелинейных волновых уравнений при дополнительном условии	49
3.4. Редукция волновых уравнений к двумерным ДУ	51
§4. Симметрия и точные решения одного микроволнового уравнения	57
§5. О точных решениях одной системы ДУ	64

ГЛАВА II. УСЛОВНАЯ И НЕЛОКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗО-	
ВОЙ ДИНАМИКИ	69
§1. Нелокальная симметрия и точные решения одномер-	
ных уравнений газовой динамики	69
§2. Точные решения уравнения околосвукового течения	
газа	86
§3. Точные решения уравнения коротких волн	96
§4. Симметрия и точные решения уравнения ударных	
волн в вязком теплопроводном газе	103
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	107
ЛИТЕРАТУРА	109

ВВЕДЕНИЕ

В большинстве случаев современные модели математической физики являются нелинейными дифференциальными уравнениями (ДУ). Сложность изучения нелинейных ДУ связана с тем, что до настоящего времени не существует общих методов их решения. В этих случаях эффективно применяются теоретико-алгебраические методы, основанные на использовании симметрии ДУ.

Групповой анализ ДУ возник как научное направление в работах выдающегося норвежского математика Софуса Ли [70]. Им же было положено начало использованию симметричных свойств дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) для построения точных решений.

При решении линейного волнового уравнения теорию С. Ли использовали А. Бэклунд, Э. Уиттекер, Г. Бейтмен. А. Пуанкаре впервые применил методы С. Ли к анализу систем уравнений Максвелла. Г. Биркгоф применил теорию Ли к ДУ механики жидкости [5].

Современное изложение теории Ли и ее приложения дано в монографиях [14, 20, 43, 44, 56, 62, 73].

Однако, классический подход С. Ли позволяет выявить далеко не все симметрии исследуемых уравнений. В последнее время разрабатываются новые методы симметричного анализа, позволяющие обнаружить дополнительную симметрию ДУЧП:

- симметрия Ли-Бэклунда [14],
- негеометрическая симметрия [32, 43],
- условная симметрия [56],
- дискретная симметрия [44, 49],
- приближенная симметрия [2, 3, 66].

В работах [32, 43] с помощью нелиевского метода установлена инвариантность уравнений Максвелла, Дирака и многих других уравнений квантовой механики относительно нелокальных операторов. Существенным отличием этого метода от подхода С. Ли является то обстоятельство, что базисные элементы алгебр инвариантности ДУ являются интегро-дифференциальными операторами.

Понятие и концепция условной инвариантности ДУ инвариантность ДУ на подмножестве решений введены в [31, 35, 56]. Это понятие позволило существенно расширить инвариантность многих основных уравнений математической физики. В [54] показано, что нелинейное уравнение теплопроводности условно инвариантно относительно операторов Галилея.

Сформулируем основные определения и понятия, используемые в диссертационной работе.

Пусть

$$L(x, u, u_1, \dots, u_k) = 0 \quad (0.1)$$

- некоторая система ДУЧП k -го порядка, где $u = u(x)$;
 $x \in R_{n+1}$; $u \in R_m$; u_k - совокупность всевозможных производных k -го порядка функции u .

Определение 0.1. Группа Ли преобразований

$$\begin{aligned} x'_\mu &= f_\mu(x, u, a), \\ u'_\nu &= g_\nu(x, u, a), \quad \mu = \overline{0, n}, \quad \nu = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (0.2)$$

где

$$a = \{ a_\alpha, \alpha = \overline{1, l} \}$$

называется группой инвариантности ДУ (0.1), если множество решений

системы (0.1) инвариантно по отношению к действию этой группы.

Определение 0.2. Алгеброй Ли группы (0.2) называется векторное пространство, базис которого составляют дифференциальные операторы

$$X_{\alpha} = \xi_{\alpha}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + \eta_{\alpha}^{\nu} \frac{\partial}{\partial u_{\nu}}, \quad \alpha = \overline{1, l}$$

где

$$\xi_{\alpha}^{\mu} = \frac{\partial f_{\mu}}{\partial a_{\alpha}} \Big|_{a=0}, \quad \eta_{\alpha}^{\nu} = \frac{\partial g_{\nu}}{\partial a_{\alpha}} \Big|_{a=0}, \quad \mu = \overline{1, n}, \quad \nu = \overline{1, m},$$

снабженное операцией коммутирования

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = X_{\alpha} X_{\beta} - X_{\beta} X_{\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, l}, \quad \beta = \overline{1, l}.$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Первая теорема Ли [70] устанавливает однозначное соответствие между группой Ли преобразований и ее алгеброй Ли. Для восстановления группы Ли по ее алгебре Ли необходимо решить следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial f_{\mu}}{\partial a_{\alpha}} = \xi_{\alpha}^{\mu}(f, g), \quad \frac{\partial g_{\nu}}{\partial a_{\alpha}} = \eta_{\alpha}^{\nu}(f, g) \quad (0.3)$$

$$f_{\mu} \Big|_{a=0} = x_{\mu}, \quad g_{\nu} \Big|_{a=0} = u_{\nu}, \quad \mu = \overline{0, n}, \quad \nu = \overline{1, m}, \quad \alpha = \overline{1, l}.$$

Рассмотрим алгоритм Ли нахождения алгебры инвариантности системы ДУ [14, 20, 56].

Дифференциальный оператор, относительно которого инвариантна система (0.1), ищем в виде

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \eta^{\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha}}, \quad i = \overline{0, n}, \quad \alpha = \overline{1, m} \quad (0.4)$$

Все такие операторы определяются из условия инвариантности

$$X_k L(x, u, u_1, \dots, u_k) \big|_{L=0} = 0 \quad (0.5)$$

где X_k - k -е продолжение оператора X , которое вычисляется по формулам Ли [20]:

$$X_k = X + \tau_{i_1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha} + \dots + \tau_{i_1 i_2 \dots i_k}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\alpha},$$

$$\tau_{i_1}^\alpha = D_{i_1}(\eta^\alpha) - u_j^\alpha D_{i_1}(\xi^j),$$

$$\tau_{i_1 i_2}^\alpha = D_{i_2}(\tau_{i_1}^\alpha) - u_{i_1 j}^\alpha D_{i_2}(\xi^j), \quad (0.6)$$

.....

$$\tau_{i_1 i_2 \dots i_k}^\alpha = D_{i_k}(\tau_{i_1 \dots i_{k-1}}^\alpha) - u_{i_1 \dots i_{k-1} j}^\alpha D_{i_k}(\xi^j),$$

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{i i_1}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1}^\alpha} + \\ + \dots + u_{i i_1 \dots i_{k-1}}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 \dots i_{k-1}}^\alpha},$$

$$i_1, i_2, \dots, i_k, j = \overline{0, n}.$$

Из условия инвариантности (0.5) получаем систему линейных ДУ относительно координат ξ и η оператора X , общее решение которой задает максимальную в смысле Ли алгебру инвариантности МАИ системы ДУ (0.1). По формулам (0.3) определяются соответствующие этой алгебре локальные группы Ли.

Знание группы, допускаемой уравнением или системой, позволяет генерировать новые решения, находить законы сохранения, приво-

дить их к более удобному виду.

Перейдем к понятию условной инвариантности ДУ [31, 51, 56].

Пусть Q - некоторый дифференциальный оператор, не принадлежащий АИ системы уравнений (0.1).

Определение 0.3. Систему ДУШ (0.1) назовем условно инвариантной относительно оператора Q , не принадлежащего АИ, если она инвариантна относительно этого оператора вместе с некоторым дополнительным условием

$$L_1(x, u, u_1, \dots, u_s) = 0 \quad (0.7)$$

Другими словами, если выполняется условие

$$QL = \lambda_0 L + \lambda_1 L_1, \quad \lambda_1 \neq 0,$$

$$QL_1 = \lambda_2 L + \lambda_3 L_1,$$

где $\lambda_i = \lambda_i(x, u, \partial)$ - некоторые дифференциальные операторы, то система (0.1) условно инвариантна относительно оператора Q .

Дополнительное условие (0.7) выделяет из всего множества решений (0.1) некоторое подмножество. Решения из этого подмножества будем называть условно инвариантными. Для нахождения таких решений необходимо решать систему уравнений (0.1), (0.7) и

$$Qu = 0 \quad (0.8)$$

и указать алгоритм определения оператора Q .

В случае, когда дополнительное условие (0.7) совпадает с (0.8), предложен конструктивный алгоритм нахождения оператора Q , который дается следующим определением.

Определение 0.4. Система уравнений (0.1) Q - условно инвари-

антна относительно оператора Q , если

$$Q L = \lambda_0 L + \lambda_1 (Q u),$$

или

$$Q L \left| \begin{array}{l} L=0 \\ Q u=0 \\ \vdots \\ Q u=0 \end{array} \right. = 0 \quad (0.9)$$

Эффективность этого алгоритма особенно наглядно продемонстрирована в работах [50-52].

Настоящая диссертация посвящена исследованию симметричных свойств и построению точных решений нелинейных уравнений акустики, газовой динамики и некоторых уравнений, описывающих процессы в биологии.

Диссертационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка основной использованной литературы. Изложим вкратце содержание диссертации.

В первой главе исследована лиевская и условная инвариантность некоторых нелинейных волновых уравнений, проведена редукция и построены семейства их точных решений. В § I проведена групповая классификация многомерного волнового уравнения. Во втором параграфе изучена Q -условная симметрия двумерного волнового уравнения. Исследованию условной инвариантности многомерных ДУ посвящен § 3. В четвертом параграфе изучена симметрия и построены точные решения одного микроволнового уравнения. В § 5 рассмотрена система ДУ, возникающая в биологии.

Вторая глава посвящена изучению нелинейных уравнений газовой динамики. В § I рассмотрена система ДУ одномерной газовой динамики, для которой построены нелиевские анзацы и найдены точные

решения. Во втором параграфе получены классы частных решений уравнения околосвукового течения газа. §3 посвящен построению точных решений уравнения коротких волн. В четвертом параграфе изучены симметричные свойства и построены частные решения уравнения ударных волн умеренной интенсивности в вязком теплопроводном газе.

Некоторые результаты по исследованию диевской и Q -условно инвариантности ДУЧП получены с помощью компьютерных программ, которые разработаны в процессе работы над диссертацией. Часть из этих программ описана в [21].

Основные результаты диссертации докладывались на семинарах отдела прикладных исследований Института математики АН Украины и на семинарах кафедры математической физики Киевского государственного университета им.Т.Г.Шевченко.

По теме диссертации опубликовано пять печатных работ [21, 22, 46-48].

Выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю члену-корреспонденту АН Украины, профессору В.И. Тушичу за постоянное внимание к работе и постановку задач, а также кандидату физико-математических наук Н.И. Серову за многочисленные обсуждения результатов и научное сотрудничество.

ГЛАВА I

ЛИЕВСКАЯ И УСЛОВНАЯ СИММЕТРИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

В первой главе исследована лиевская и условная инвариантность двумерных и многомерных нелинейных волновых уравнений, построены широкие классы их точных решений.

§ I. Групповая классификация многомерного нелинейного волнового уравнения

В настоящем параграфе изучим методом С. Ли [14, 20, 56] групповые свойства нелинейного ДУ

$$u_{00} - [(F(u)\delta_{kl} + F_1(u)u_k u_l)u_l]_k = F_2(u) \quad (I.I.1)$$

Здесь $u = u(x)$; $x \in R_{n+1}$; $u \in R_1$, $u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$,

$$u_{kl} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}, \quad u_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}, \quad \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k=l \\ 0, & k \neq l \end{cases}, \quad k, l = \overline{1, n},$$

$F(u)$, $F_1(u)$, $F_2(u)$ — произвольные гладкие функции.

Уравнения вида (I.I.1) широко используются в математической физике. Так уравнение

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0, \quad (I.I.2)$$

являющееся частным случаем (I.I.1) ($F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $n=1$), применяется в нелинейной акустике, теории нелинейных волн, при изучении цепочек Тода, процессов одномерной газовой динамики [7, 19, 61].

К уравнению вида (I.I.2) сводится уравнение

$$v_{00} - F_3(v_1)v_{11} = 0, \quad (I.I.3)$$

встречающееся в теории нелинейных колебаний. Для этого необходимо (I.I.3) продифференцировать по переменной x_1 и положить

$$v_1 = f(u),$$

где $f(u)$ - некоторая заданная функция.

К примеру, уравнение [19]

$$v_{00} - c_0^2 v_{11} = -2\gamma_0 c_0^2 v_1 v_{11},$$

заменой

$$v_1 = \frac{1-u}{2\gamma_0}$$

сводится к уравнению

$$u_{00} - c_0^2 (u u_1)_1 = 0.$$

Перейдем к изучению групповых свойств уравнения (I.I.I).

Отметим, что в случае $F_1(u)=0$ групповая классификация уравнения (I.I.I) проведена в работах [2, 18, 61]. Поэтому полагаем $F_1(u) \neq 0$.

Ищем оператор, допускаемый уравнением (I.I.I) в виде

$$X = \xi^i(x, u) \partial_{x^i} + \eta(x, u) \partial_u \quad (I.I.4)$$

Оператор X по формулам (0.6) продолжаем на производные u_{00} , u_{α} , $u_{\alpha\beta}$, входящие в (I.I.I). После действия продолженным оператором на многообразие, задаваемое (I.I.I) и исключения u_{00} получим систему определяющих уравнений, которая в результате анализа упрощается до следующей

$$\eta_{\alpha u} = 0, \quad \eta_{00} = 0, \quad \eta_{\alpha} = 0, \quad (I.I.5)$$

$$2\eta_{0\alpha} - \xi_{00}^{\alpha} = 0, \quad (I.I.6)$$

$$\xi_{\alpha}^0 = \xi_0^{\alpha} = \xi_{\alpha}^{\mu} = 0, \quad \xi_{\beta}^{\alpha} + \xi_{\alpha}^{\beta} = 0, \quad \xi_{\alpha}^{\alpha} = \xi_{\beta}^{\beta} \quad (I.I.7)$$

$$\begin{aligned}\eta \dot{F} &= 2F(\xi_a^a - \xi^o), \\ \eta \dot{F}_1 &= 2F_1(2\xi_a^a - \xi^o - \eta_u) \\ \eta \dot{F}_2 &= F_2(\eta_u - 2\xi^o)\end{aligned}\quad (I.I.8)$$

Из уравнений (I.I.5) следует, что

$$\eta = (\alpha^1 x_o + \alpha^2)u + \alpha^3 x_o + \alpha^4, \quad \alpha^i = const \quad (I.I.9)$$

Подставив (I.I.9) в (I.I.6), получим

$$\xi^o = \alpha^1 x_o^2 + \beta^1 x_o + \beta^2, \quad \beta^1, \beta^2 = const \quad (I.I.10)$$

Дифференцируя одно из уравнений (I.I.8) по переменной x_b , получим с учетом $\eta_b = 0$

$$\xi_{ab}^a = 0, \quad a, b = \overline{1, n} \quad (I.I.11)$$

Учитывая условие (I.I.11), из (I.I.7) находим

$$\xi^a = c^{ab} x_b + d^b, \quad c^{ab} = -c^{ba}, \quad a \neq b,$$

где $c^{ab}, d^b = const$

Подставив значения ξ^o, ξ^a, η в оставшиеся уравнения (I.I.8), после несложных вычислений получим результаты симметричной классификации уравнения (I.I.1), которые приведем в виде таблицы I.

Таблица I.

$F(u)$	$F_1(u)$	$F_2(u)$	Алгебра Ли
$\in C^2(R)$	$\in C^2(R)$	$\in C^1(R)$	$L = \langle P_0 = \partial_o, P_a = \partial_a, Y_{ab} = x_b \partial_a - x_a \partial_b \rangle$
0	$\in C^2(R)$	0	$L_1 = \langle L, D_1 = 2x_o \partial_o + x_a \partial_a \rangle$
	e^u		$L_1, D_2 = x_a \partial_a + 4\partial_u$
	u^κ		$L_1, D_3 = (\kappa+2)x_o \partial_o - 2u \partial_u$

	u^{-6}		$L_1, D_3, \mathcal{K} = x_0^2 \partial_0 + x_0 u \partial_u$
	1		$L_4, D_3, \partial_u, x_0 \partial_u$
		e^u	$L, D_4 = x_0 \partial_0 - 2 \partial_u$
		u^m	$L, D_5 = 2(1-m)x_0 \partial_0 +$ $+ (3-\kappa)x_a \partial_a + 2u \partial_u$
$e^{\kappa u}$	e^{mu}	$\lambda e^{(2\kappa-m)u}$	$L, D_6 = (m-2\kappa)x_0 \partial_0 +$ $+ (m-\kappa)x_a \partial_a + 2 \partial_u$
u^κ	u^m	$\lambda u^{2\kappa-m-1}$	$L, D_7 = (m-2\kappa+2)x_0 \partial_0 +$ $+ (m-\kappa+2)x_a \partial_a + 2u \partial_u$
u^{-4}	u^{-6}	λu^{-3}	$L, D_7, \mathcal{K}$

§ 2. Условная симметрия двумерного волнового уравнения

В настоящем параграфе изучим Q -условную симметрию уравнения

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 = F_1(u) \quad (I.2.1)$$

Условная инвариантность уравнения (I.2.1) с дополнительным условием исследована в [53].

Пусть

$$Q = A(x, u)\partial_0 + B(x, u)\partial_1 + C(x, u)\partial_u \quad (I.2.2)$$

где A, B, C - гладкие функции, дифференциальный оператор первого порядка, действующий на многообразии $(x, u) \in R_3$.

Теорема I.2.1. Уравнение (I.2.1) Q -условно инвариантно относительно операторов (I.2.2), если функции A, B, C удовлетворяют системе ДУ в одном из следующих случаев

1. $A \neq 0$ (не ограничивая общности положим $A = I$),

$$D \equiv F - B^2,$$

$$(B_u D^{-1})_u = 0,$$

$$\begin{aligned} & F(C_1 D^{-1})_1 - (C_0 D^{-1})_0 - C^2(C_u D^{-1})_u - \\ & - C(C_0 D^{-1})_u - C(C_u D^{-1})_0 + D^{-2}\{2F(B_0 C_1 - \\ & - B_1 C_0 + C[B_u C_1 - C_u B_1]) - B C C_1 \dot{F} + \\ & + D^{-1}(C \dot{F}_1 - C_u F_1) + F_1 D^{-2}(2F B_1 + 2B_0 B - \\ & - C D_u) = 0, \end{aligned} \quad (I.2.3)$$

$$\mathcal{D}^2 C_{uu} + \mathcal{D} \{ (C\dot{F})_u + 2B(B_u C_u - C B_{uu}) - 2F B_{1u} - 2B B_{0u} \} - C \mathcal{D}_u^2 + 2B B_0 \mathcal{D}_u + 2B B_1 (B\dot{F} - 2B_u F) = 0,$$

$$\mathcal{D} \{ B_{00} + 2(B_0 C)_u + 2(B C_{0u} - B_u C_0) + 2(C_1 F)_u - B_{11} F + B_{uu} C^2 + 2B C C_{uu} \} - \mathcal{D}_u \{ B_0 C + B_u C^2 + 2B C C_u \} + B \{ B_1 C \dot{F} + 2B_0^2 + 2B_0 B_u C + 4B B_0 C_u + 4B_1 C_u F - 2B_1^2 F \} + 2B_u \mathcal{D} F_1 = 0;$$

$$2. A = 1, B = F^{-\frac{1}{2}} :$$

$$a) \dot{B}C + 2BC_u = 0,$$

(I.2.4)

$$C_0 + C_u C - B C_1 - F_1 = 0;$$

$$b) \dot{B}C + 2BC_u \neq 0,$$

$$C_0 + C C_u - B C_1 - F_1 \neq 0,$$

(I.2.5)

$$\begin{aligned} & [\ddot{B}C^2 + \dot{B}(2BC_1 + 2CC_u) + 2B(C_{0u} + C C_{uu} + B C_{1u})] (C_0 + C C_u - B C_1 - F_1) = \\ & = [C_{00} + C^2 C_{uu} - B^2 C_{11} + 2C C_{0u} - 2\dot{B}C C_1 + F_1 C_u - \dot{F}_1 C] (\dot{B}C + 2BC_u); \end{aligned}$$

$$3. A = 0, B = 1:$$

$$C_{uu} = 0,$$

(I.2.6)

$$C_{0u} = 0,$$

$$C_{00} - C^3 \ddot{F} - (3CC_1 + 2C^2 C_4) \dot{F} - (C_{11} + 2CC_{14}) F - \\ - CF_1 + C_4 F_1 = 0$$

Доказательство. Запишем условие Q - условной инвариантности

$$Q_2 S = \lambda_1 S + \lambda_2 (Qu)$$

или

$$Q_2 S|_{M=0} = 0,$$

(I.2.7)

где $S \equiv U_{00} - (FU_1)_1 - F_1$, $Qu = Au_0 + Bu_1 - c$, λ_1 , λ_2 - некоторые дифференциальные операторы, Q_2 - второе продолжение оператора Q ,

$$Q_2 u = \ddot{c}^{00} - F\ddot{c}^{11} - 2u_1 \dot{F} \dot{c}^1 - C(\ddot{F}u_1^2 + \ddot{F}u_{11} + \ddot{F}_1),$$

(I.2.8)

$$\dot{c}^1 = C_1 + u_1(C_4 - B_1) - u_1^2 B_4,$$

$$\ddot{c}^{\mu\mu} = C_{\mu\mu} + 2C_{\mu 1} u_{\mu} + C_{11} u_{\mu\mu} + C_{14} u_{\mu}^2 - \\ - u_1(B_{\mu} + B_4 u_1 u_{\mu}) - u_1(B_{\mu\mu} + 2B_{\mu 1} u_{\mu} + \\ + B_{11} u_{\mu}^2 + B_{14} u_{\mu\mu}), \quad \mu = \overline{0, 1}$$

(I.2.9)

Многообразие M определяется системой уравнений

$$Qu = 0,$$

$$S = 0,$$

(I.2.10)

$$\partial_1(Qu) \equiv Au_{01} + (B_1 - C_4)u_1 + B_4 u_1^2 + Bu_{11} - C_1 = 0,$$

$$\partial_0(Qu) \equiv Au_{00} + B_0 u_1 + Bu_{01} - C_0 + u_0(B_4 u_1 - C_4) = 0$$

Рассмотрим систему (I.2.I0) в предположении $A = I$. Выразив из первого уравнения производную u_0 , второго - u_{00} , третьего - u_{01} , и подставив их значения в последнее уравнение (I.2.I0), получим уравнение

$$u_{11} (F - B^2) + u_1^2 (F - B^2)_u + u_1 (B_0 + B_u C + (I.2.II) \\ + 2BC_u - BB_1) = C_0 + CC_u - BC_1 - F_1$$

Анализируя (I.2.II) находим следующие решения системы (I.2.I0)

$$1. F - B^2 \neq 0$$

$$u_0 = C - Bu_1,$$

$$u_{11} = A^1 + A^2 u_1 + A^3 u_1^2, \quad (I.2.I2)$$

$$u_{01} = (C_1 - BA^1) - u_1 (B_1 - C_u + BA^2) - u_1^2 (B_u + BA^3),$$

$$u_{00} = C_0 + CC_u - BA^1 - u_1 (CB_u + B(C_u + A^2)) + \\ + u_1^2 B(B_u - A^3),$$

где

$$A^1 = (C_0 + C_u C - BC_1 - F_1)(F - B^2)^{-1},$$

$$A^2 = -(B_0 + B_u C + 2BC_u - BB_1)(F - B^2)^{-1},$$

$$A^3 = -(F - B^2)_u (F - B^2)^{-1}.$$

Таким образом, все производные выражены через u_1 .

$$2. F - B^2 = 0$$

$$a) \quad \dot{B}C + 2BC_u = 0, \quad (I.2.I3)$$

$$C_0 + CC_u - BC_1 = 0.$$

В этом случае производные неопределены;

$$б) \quad u_1 = (C_0 + C C_u - B C_1 - F_1)(B_u C + 2 B C_u)^{-1},$$

$$u_0 = C - B u_1,$$

$$u_{00} = (u_0)_0, \quad (I.2.14)$$

$$u_{11} = (u_1)_1, \quad (u_{01} = u_{01})$$

В этом случае все производные определены через функции B , C и F_1 .

3. В случае $A = 0$, $B = I$ система (I.2.10) имеет решение

$$u_1 = C,$$

$$u_{00} = \dot{F} C^2 + F(C + C_1 C) + F_1, \quad (I.2.15)$$

$$u_{01} = C_0 + C_u u_0,$$

$$u_{11} = C_1 + C_u C$$

Подставив (I.2.8), (I.2.9) в (I.2.7), с учетом при переходе на многообразие условий (I.2.12) - (I.2.15), после несложных, но довольно громоздких вычислений, получим утверждение теоремы I.2.1.

Перейдем к исследованию систем ДУ (I.2.3) - (I.2.6). Общее решение этих систем, за исключением (I.2.4), найти не удалось. При конкретных значениях функций $F(u)$ и $F_1(u)$ построены их частные решения.

Рассмотрим несколько случаев.

Случай I. Система (I.2.3) в предположении $B = B(u)$, $C = 0$, $F_1 = 0$ переходит в уравнение

$$\left(\frac{B_u}{F - B^2} \right)_u = 0,$$

которое равносильно уравнению Риккати $B_u + \lambda B^2 = \lambda F$ ($\lambda = \text{const}$)

При $F = u$, $F_1 = 0$ (I.2.3) имеет следующие частные решения

$$B = -2x_0, \quad C = 8x_0;$$

$$B = -3x_0^2, \quad C = 4x_0^{-2} + 27x_0^3;$$

$$B = -(6x_0^4 + x_1 x_0^{-1}),$$

$$C = \frac{2}{x_0} [u - 3(x_1^2 x_0^{-2} + 2x_1 x_0^3 - 24x_0^8)]; \quad (\text{I.2.I6})$$

$$B = \frac{1}{2x_0} (x_1 - 3x_0^2),$$

$$C = -\frac{1}{x_0} (u + 3x_1 - 9x_0^2).$$

Случай 2. Общее решение первого уравнения системы (I.2.4) имеет вид

$$C = g(x_0, x_1) B^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{I.2.I7})$$

Подставив (I.2.I7) во второе уравнение (I.2.4) придем к соотношению

$$g_0 - g_1 B - \frac{g^2}{2} B^{-\frac{3}{2}} \dot{B} - F_1 B^{\frac{1}{2}} = 0 \quad (\text{I.2.I8})$$

Разделяя переменные в уравнении (I.2.I8), находим его точные решения, определенные с точностью до постоянных коэффициентов

$$g=0, B - \text{произвольная}, F_1=0;$$

$$g=\lambda = \text{const}, B - \text{произвольная}, F_1 = -\frac{\lambda^2}{2} B^{-2} \dot{B};$$

$$g=x_0^{-1}, B=u^{-2}, F_1=0;$$

$$g=\text{cth } x_0, B=u^{-2}, F_1=u;$$

$$g=-\text{tg } x_0, B=u^{-2}, F_1=-u; \quad (\text{I.2.I9})$$

$$g=-3x_1^{-1}, B=u^{-\frac{2}{3}}, F_1=0;$$

$$g=-\text{cth } \frac{x_1}{3}, B=u^{-\frac{2}{3}}, F_1=\frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}};$$

$$g = \operatorname{tg} \frac{x_1}{3}, \quad B = u^{-\frac{2}{3}}, \quad F_1 = \frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}};$$

$$g = -(a_0 x_0 + a_1 x_1)^{-1}, \quad F_1 = 0,$$

$B(u)$ удовлетворяет одному из уравнений

$$B^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{a_1}{a_0}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a_1}{a_0}} B^{\frac{1}{2}} = a_0 u + a_2, \quad a_0 a_1 > 0, \quad (I.2.20)$$

$$B^{-\frac{1}{2}} + \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{a_1}{a_0}} B^{\frac{1}{2}} = a_0 u + a_2, \quad a_0 a_1 < 0.$$

Случай 3. Подставив общее решение первых двух уравнений системы (I.2.6)

$$C = \alpha(x_1)u + \beta(x_0, x_1) \quad (I.2.21)$$

в третье уравнение (I.2.6) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \beta_{00} - (\alpha u + \beta)^3 \ddot{F} - [(3\alpha\alpha_1 + 2\alpha^3)u^2 + 3\beta\beta_1 + \\ + 2\alpha\beta^2 + (3\alpha\beta_1 + 3\alpha_1\beta + 4\alpha^2\beta)u] \dot{F} - [\alpha_{11} + \\ + 2\alpha_1\alpha)u + \beta_{11} + 2\alpha_1\beta] F - \alpha(u\dot{F}_1 - F_1) - \\ - \beta\dot{F}_1 = 0 \end{aligned} \quad (I.2.22)$$

Рассмотрим (I.2.22) при некоторых конкретных значениях функций F и F_1 .

Пусть $F = u^k$, $F_1 = \lambda u^m$, $\lambda \in R$. Тогда (I.2.22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} u^{k+1} [\alpha_{11} + (2+3k)\alpha\alpha_1 + k(k+1)\alpha^3] + \\ + u^k [\beta_{11} + (2+3k)\alpha_1\beta + 3k\alpha\beta_1 + \beta\alpha^2 k(3k+1)] + \\ + u^{k-1} [3k\beta\beta_1 + \alpha\beta^2(3k^2 - 3k + 2)] + \\ + u^{k-2} \beta^3 k(k-1) + \\ + u^m \lambda \alpha(m-1) + \end{aligned} \quad (I.2.23)$$

$$+ u^{m-1} \lambda \beta m -$$

$$-\beta_{00} = 0$$

Так как функции α и β не зависят от u , то выражения в (I.2.23) при одинаковых степенях u должны быть равными нулю. Рассмотрим несколько случаев расщепления (I.2.23):

а) k - произвольное, $m=1$

$$\alpha_{11} + (2+3k)\alpha\alpha_1 + k(k+1)\alpha^3 = 0, \quad \beta = 0 \quad (\text{I.2.24})$$

б) k - произвольное, $m=k+1$, ...

$$\alpha_{11} + (3k+2)\alpha\alpha_1 + k(k+1)\alpha^3 + \lambda k\alpha = 0, \quad \beta = 0 \quad (\text{I.2.25})$$

в) $k=1$, $m=0$.

$$\alpha_{11} + 5\alpha\alpha_1 + 2\alpha^3 = 0,$$

$$\begin{aligned} \beta_{11} + 5\alpha_1\beta + 3\alpha\beta_1 + 4\beta\alpha^2 &= 0, \\ -\beta_{00} + 3\beta\beta_1 + 2\alpha\beta^2 - \lambda\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.2.26})$$

г) $k=1$, $m=1$

$$\alpha_{11} + 5\alpha\alpha_1 + 2\alpha^3 = 0,$$

$$\beta_{11} + 5\alpha_1\beta + 3\alpha\beta_1 + 4\beta\alpha^2 = 0,$$

$$-\beta_{00} + 3\beta\beta_1 + 2\alpha\beta^2 + \lambda\beta = 0$$

(I.2.27)

д) $k=1$, $m=2$

$$\alpha_{11} + 5\alpha\alpha_1 + 2\alpha^3 + \lambda\alpha = 0,$$

$$\beta_{11} + 5\alpha_1\beta + 3\alpha\beta_1 + 4\alpha^2\beta + 2\lambda\beta = 0,$$

$$-\beta_{00} + 3\beta\beta_1 + 2\alpha\beta^2 = 0$$

(I.2.28)

Система уравнений (I.2.26) при $\alpha = 0$ упрощается до следующей

$$\begin{aligned}\beta_{11} &= 0, \\ \beta_{00} - 3\beta\beta_1 &= 0,\end{aligned}$$

общее решение которой имеет вид

$$\beta = 2\beta^1(x_0)x_1 + \beta^2(x_0),$$

где

$$\begin{aligned}\beta_{00}^1 &= 6(\beta^1)^2, \\ \beta_{00}^2 &= 6\beta^1\beta^2\end{aligned}\tag{I.2.29}$$

Решая (I.2.29) находим значение β :

$$\begin{aligned}\beta &= x_0, \\ \beta &= 2x_1x_0^{-2} + \lambda_1x_0^3 + \lambda_2x_0^{-2}, \\ \beta &= 2x_1W(x_0) + \Lambda(x_0)\end{aligned}$$

Здесь и далее $W(x_0)$ - функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению $\ddot{W} = 6W^2$; $\Lambda(x_0)$ - функция Ламе, т. е., решение уравнения $\ddot{\Lambda} = 6W\Lambda$.

В случае $\alpha = \frac{1}{2x_1}$ система (I.2.26) принимает вид

$$\begin{aligned}2x_1^2\beta_{11} + 3x_1\beta_1 - 3\beta &= 0, \\ \beta_{00} - \frac{\beta^2}{x_1} - 3\beta\beta_1 &= 0\end{aligned}\tag{I.2.30}$$

Общее решение (I.2.30) задается в виде

$$\beta = \frac{3}{2}x_1\beta^1(x_0),$$

где

$$\beta_{00}^1 = 6(\beta^1)^2$$

Система ДУ (I.2.27) имеет следующие частные решения:

$$а) \alpha = \frac{1}{2x_1}, \quad \beta = \frac{3}{2} x_1 d(x_0),$$

где $d(x_0)$ - решение уравнения

$$d_{00} - 6d^2 - \lambda d = 0 \quad (I.2.3I)$$

Из (I.2.3I) имеем

$$d = -\frac{\lambda}{6},$$

$$d = \frac{\lambda}{4} \operatorname{sh}^{-2} \frac{\sqrt{\lambda}}{2} x_0, \quad \lambda > 0,$$

$$d = -\frac{\lambda}{4} \operatorname{sin}^{-2} \frac{\sqrt{-\lambda}}{2} x_0, \quad \lambda < 0;$$

$$б) \alpha = 0:$$

$$\beta = \begin{cases} \lambda_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x_0 + \lambda_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x_0, & \lambda > 0, \\ \lambda_1 \operatorname{sin} \sqrt{-\lambda} x_0 + \lambda_2 \operatorname{cos} \sqrt{-\lambda} x_0, & \lambda < 0; \end{cases}$$

$$в) \alpha = -\frac{\lambda}{3}, \quad \beta = x_0.$$

Частные решения системы (I.2.28) следующие

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\lambda}{2}}, \quad \beta = 3\sqrt{-\frac{2}{\lambda}} x_0^{-2}, \quad \lambda < 0,$$

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\lambda}{2}}, \quad \beta = 3\sqrt{-\frac{2}{\lambda}} W(x_0), \quad \lambda < 0.$$

Явный вид операторов Q , полученных с помощью решений систем (I.2.3) и (I.2.6) приведем в виде таблицы 2.

Таблица 2.

N	$F(u)$	$F_1(u)$	Оператор
1	$\in C^2(R)$	0	$\partial_0 + \beta(u)\partial_1$
2			$\partial_0 + F^{\frac{1}{2}}\partial_1 + \lambda_1[F^{\frac{1}{2}} + \lambda_2]^{-1}\partial_u$

3	$\in C^2(R)$	F_1'	$\partial_1 + u \partial_u$
4	u^k	λu	$\partial_1 + [\ln \alpha^1(x_1)]_1 u \partial_u$
5	u^k	λu^{k+1}	$\partial_1 + [\ln \alpha^2(x_1)]_1 u \partial_u$
6	u	λ	$\partial_1 + x_0 \partial_u$
7			$\partial_1 + [2W(x_0)x_1 + \Lambda(x_0)] \partial_u$
8			$x_0^2 \partial_1 + [2x_0 + \lambda_1 x_0^5] \partial_u$
9	u	0	$2x_1 \partial_1 + [u + 3W(x_0)x_1^2] \partial_u$
10			$2x_0^2 x_1 \partial_1 + [u x_0^2 + 3x_1^2] \partial_u$
11	u	λ	$\partial_0 - 2x_0 \partial_1 + 8x_0 \partial_u$
12			$x_0 \partial_0 - (6x_0^5 + x_1) \partial_1 + 2[u -$ $- 3(x_1^2 x_0^{-2} + 2x_1 x_0^3 - 24x_0^8)] \partial_u$
13			$2W(x_0) \partial_0 + \dot{W}(x_0) x_1 \partial_1 -$ $- \dot{W}(x_0) [2u - W(x_0) x_1^2] \partial_u$
14			$2x_0 \partial_0 + (x_1 - 3x_0^2) \partial_1 -$ $- 2(u + 3x_1 - 9x_0^2) \partial_u$
15			$x_0 \partial_0 - 3x_0^3 \partial_1 + [u + 27x_0^4] \partial_u$
16	u	λu	$\partial_1 + [-\frac{\lambda}{3} x_1 + \lambda_1 x_0] \partial_u$
17			$2x_1 \partial_1 + [u + 3x_1^2 d(x_0)] \partial_u$
18			$\partial_1 + 2d(x_0) x_1 \partial_u$

19			$\partial_1 + [\lambda_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x_0 + \lambda_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x_0] \partial_u, \lambda > 0$
20			$\partial_1 + [\lambda_1 \sin \sqrt{-\lambda} x_0 + \lambda_2 \cos \sqrt{-\lambda} x_0] \partial_u, \lambda < 0$
21	u	λu^2	$W(x_0) \partial_0 + \dot{W}(x_0) u \partial_u$
22			$\partial_1 + \sqrt{-\frac{\lambda}{2}} (u - \frac{6}{\lambda} x_0^{-2}) \partial_u$
23	u^2	λ	$\partial_1 + \gamma(x_0) \partial_u$
24	u^2	λu	$\partial_1 + \gamma^1(x_0) \partial_u$
25	u^4	λu^5	$2W(x_0) \partial_0 - \dot{W}(x_0) u \partial_u$
26		$\lambda_1 e^{\lambda u}$	$\partial_0 + \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} x_0 \partial_u$
27			$\partial_0 - \operatorname{cth} \frac{\lambda}{2} x_0 \partial_u$
28	e^u	λ_1	$\partial_0 + \lambda_1 x_0 \partial_u$
29			$P_2(x_1) \partial_1 + \dot{P}_2(x_1) \partial_u$
30	e^u	$\lambda_1 e^u + \lambda$	$\gamma^2(x_1) \partial_1 + \dot{\gamma}^2(x_1) \partial_u$
31	$e^u + \lambda^2$	λ	$\partial_u + (x_1 \pm \lambda x_0) \partial_1$
32			$2 \partial_u + (x_1 \pm \lambda x_0) \partial_1$

В таблице 2. и ниже введены следующие обозначения:

$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$ - произвольный многочлен n -ой степени;

$\beta(u)$ - решение уравнения Риккати

$$\dot{\beta} + \lambda \beta^2 = \lambda F, \quad \lambda = \text{const};$$

$\alpha^1(x_1)$ - решение уравнения

$$[(\alpha^1)^{\kappa+1}]_{,1} = \lambda_1 \alpha^1 ;$$

$\alpha^2(x_1)$ - решение уравнения

$$[(\alpha^2)^{\kappa+1}]_{,1} = (\kappa+1) \lambda_1 (\alpha^2)^{\kappa+1} ;$$

$\alpha(x_0)$ - решение уравнения

$$\ddot{\alpha} - 6\alpha^2 - \lambda\alpha = 0 ;$$

$$\alpha(x_0) = \begin{cases} -\frac{\lambda}{6} , \\ \frac{\lambda}{4} \operatorname{sh}^{-2} \frac{\sqrt{\lambda}}{2} x_0 , & \lambda > 0 , \\ -\frac{\lambda}{4} \operatorname{sin}^{-2} \frac{\sqrt{-\lambda}}{2} x_0 , & \lambda < 0 ; \end{cases}$$

$\gamma(x_0)$ - эллиптическая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\ddot{\gamma} - 2\gamma^3 = 0 ;$$

$\gamma^1(x_0)$ - эллиптическая функция, являющаяся решением уравнения

$$\ddot{\gamma}^1 - 2(\gamma^1)^3 - \lambda\gamma^1 = 0 ;$$

$\gamma^2(x_1)$ - решение уравнения

$$\ddot{\gamma}^2 + \lambda_1 \gamma^2 = \lambda_2 ;$$

$$F_1' = -u^2 F_u - u F_u + \lambda u ;$$

φ - новая неизвестная функция;

$\kappa, \lambda, \lambda_1, \lambda_2$ - произвольные постоянные.

Подставив анзацы, построенные с помощью операторов $\mathcal{Q}$ (таблица 2) в уравнение (1.2.1), приходим к редуцированным ОДУ, которые приведем в таблице 3. Между таблицами 2 и 3 установлена связь: строке под номером N из таблицы 2 соответствует строка под тем же номером в таблице 3.

Таблица 3.

N	Анзац	Редуцированное ОДУ
1	$\beta x_0 - x_1 + \varphi(u) = 0$	$\dot{\varphi} = \lambda (F - \beta^2)$

2	$\lambda_1 x_0 - \int [F^{\frac{1}{2}} + \lambda_2] du -$ $- \varphi(\lambda_1 x_1 - \int [F + \lambda_2 F^{\frac{1}{2}}] du) = 0$	$\dot{\varphi} = \lambda_2^{-1}$
3	$u = e^{x_1} \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - \lambda \varphi = 0$
4	$u = \alpha^1(x_1) \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - \lambda_1 \varphi^{k+1} - \lambda \varphi = 0$
5	$u = \alpha^2(x_1) \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - (\lambda_1 + \lambda) \varphi^{k+1} = 0$
6	$u = x_0 x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} = x_0^2 + \lambda$
7	$u = x_1^2 W(x_0) + \Lambda(x_0) x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - 2 W \varphi = \Lambda^2 + \lambda$
8	$u = x_0^{-2} x_1^2 + \lambda_1 x_1 x_0^3 +$ $+ \varphi(x_0)$	$x_0^k \ddot{\varphi} - 2 \varphi = \lambda_1^2 x_0^8 + \lambda x_0^2$
9	$u = x_1^2 W(x_0) + x_1^{\frac{1}{2}} \varphi(x_0)$	$4 \ddot{\varphi} - 15 W \varphi = 0$
10	$u = x_0^{-2} x_1^2 + x_1^{\frac{1}{2}} \varphi(x_0)$	$4 x_0^2 \ddot{\varphi} - 15 \varphi = 0$
11	$u = 4 x_0^2 + \varphi(\omega),$ $\omega = x_1 + x_0^2$	$\ddot{\varphi} \varphi + \dot{\varphi}^2 - 2 \dot{\varphi} = \lambda + 8$
12	$u = 30 x_0^2 \varphi(\omega) +$ $+ (x_1 x_0^{-1} + 6 x_0^4)^2$ $\omega = x_0 (x_1 + x_0^5)$	$\dot{\varphi} \varphi - \varphi - 2 \omega = \lambda$
13	$u = W^{-1}(x_0) \varphi(\omega) + \frac{1}{6} W(x_0) x_1^2$ $\omega = W(x_0)^{-\frac{1}{2}} x_1$	$\ddot{\varphi} \varphi + \dot{\varphi}^2 - \frac{\lambda}{2} [\ddot{\varphi} \omega^2 +$ $+ 7 \omega \dot{\varphi} + 8 \varphi] = 0$
14	$u = 2(x_0^2 - x_1) + x_0^{-1} \varphi(\omega),$ $\omega = x_0^{-\frac{1}{2}} (x_1 + x_0^2)$	$\ddot{\varphi} (\varphi - \frac{\omega^2}{4}) + \dot{\varphi}^2 - \frac{7}{4} \omega \dot{\varphi} -$ $- 2 \varphi = 0$

15	$u = 9x_0^4 + x_0 \varphi(\omega)$ $\omega = x_1 + x_0^3$	$\varphi \ddot{\varphi} - 12\varphi - 108\omega = \lambda$
16	$u = -\frac{\lambda}{6} x_1^2 + \lambda_1 x_0 x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - \frac{2}{3} \lambda \varphi = 0$
17	$u = d(x_0) x_1^2 + \varphi(x_0) x_1^{\frac{1}{2}}$	$\ddot{\varphi} - \varphi \left[\frac{15}{4} d + \lambda \right] = 0$
18	$u = d(x_0) x_1^2 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - \varphi [2d + \lambda] = 0$
19	$u = x_1 [\lambda_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x_0 + \lambda_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x_0] + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - \lambda \varphi = [\lambda_1 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} x_0 + \lambda_2 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} x_0]^2$
20	$u = x_1 [\lambda_1 \sin \sqrt{-\lambda} x_0 + \lambda_2 \cos \sqrt{-\lambda} x_0] + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - \lambda \varphi = [\lambda_1 \sin \sqrt{-\lambda} x_0 + \lambda_2 \cos \sqrt{-\lambda} x_0]^2$
21	$u = W(x_0) \varphi^{\frac{1}{2}}(x_1)$	$\ddot{\varphi} = 12 \varphi^{\frac{1}{2}} + \lambda \varphi$
22	$u = \varphi(x_0) \exp \left\{ \sqrt{\frac{-\lambda}{2}} x_1 \right\} + \frac{6}{\lambda} x_0^{-2}$	$x_0^2 \ddot{\varphi} - 9\varphi = 0$
23	$u = \gamma(x_0) x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - 2\gamma^2 \varphi = \lambda$
24	$u = \gamma'(x_0) x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - 2(\gamma')^2 \varphi - \lambda \varphi = 0$
25	$u = W^{-\frac{1}{2}}(x_0) \varphi^{\frac{1}{2}}(x_1)$	$\ddot{\varphi} = \lambda, \varphi^{\frac{1}{2}} - 5\lambda \varphi$
26	$u = -\frac{2}{\lambda} \ln \cos \frac{\lambda}{2} x_0 + \ln \varphi(x_1)$	$\ddot{\varphi} \varphi + \dot{\varphi}^2 (\lambda - 1) + \lambda_1 \varphi^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi^{2-\lambda} = 0$
27	$u = -\frac{2}{\lambda} \ln \operatorname{sh} \frac{\lambda}{2} x_0 + \ln \varphi(x_1)$	$\ddot{\varphi} \varphi + \dot{\varphi}^2 (\lambda - 1) + \lambda_1 \varphi^2 - \frac{\lambda}{2} \varphi^{2-\lambda} = 0$
28	$u = \frac{\lambda_1}{2} x_0^2 + \varphi(x_1)$	$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 = 0$
29	$u = \ln P_2(x_1) + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - e^{\varphi} \ddot{P}_2(x_1) = 0$

30	$e^u = \gamma^2(x_1) \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} \varphi - \dot{\varphi}^2 - \lambda_2 \varphi^3 - \lambda \varphi = 0$
31	$u = \ln(x_1 \pm \lambda x_0) + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} = \lambda_1$
32	$u = 2 \ln(x_1 \pm \lambda x_0) + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - e e^{\varphi} = \lambda_1$

Операторы Q - условной инвариантности уравнения (1.2.I), соответствующие решениям (1.2.IB) приведем в виде таблицы 4.

Таблица 4.

N n/n	$F(u)$	$F_1(u)$	Оператор Q
1	$\in C^2(R)$	0	$\partial_0 + F^{\frac{1}{2}} \partial_1$
2	$\in C^2(R)$	$-\lambda^2 F^{-\frac{3}{2}} \dot{F}$	$\partial_0 + F^{\frac{1}{2}} \partial_1 + 2\lambda F^{-\frac{1}{4}} \partial_u$
3	u^{-4}	0	$\partial_0 + u^{-2} \partial_1 + u x_0^{-1} \partial_u$
4	u^{-4}	u	$\partial_0 + u^{-2} \partial_1 + u \operatorname{cth} x_0 \partial_u$
5	u^{-4}	$-u$	$\partial_0 + u^{-2} \partial_1 - u \operatorname{tg} x_0 \partial_u$
6	$u^{-\frac{4}{3}}$	0	$\partial_0 + u^{-\frac{2}{3}} \partial_1 - 3 x_1^{-1} u^{\frac{1}{3}} \partial_u$
7	$u^{-\frac{4}{3}}$	$\frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}}$	$\partial_0 + u^{-\frac{2}{3}} \partial_1 - u^{\frac{1}{3}} \operatorname{cth} \frac{x_1}{3} \partial_u$
8	$u^{-\frac{4}{3}}$	$-\frac{1}{3} u^{-\frac{1}{3}}$	$\partial_0 + u^{-\frac{2}{3}} \partial_1 + u^{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} \frac{x_1}{3} \partial_u$
9	F_2	0	$(a_0 x_0 + a_1 x_1) [F_2^{\frac{1}{4}} \partial_0 + F_2^{\frac{3}{4}} \partial_1] + \partial_u$

Здесь F_2 определяется формулой (I.2.20), в которой необходимо B заменить на $F_2^{1/2}$.

Особо подчеркнем, что анзацы (таблица 5), построенные с помощью Q -условных операторов, помещенных в таблице 4 (n -я строка таблицы 4 соответствует n -й строке таблицы 5), являются решениями уравнения (I.2.1). Таким образом, эти решения зависят от произвольной функции. Это связано с тем, что уравнение (I.2.1) представимо в виде дифференциального следствия от ДУ первого порядка. Так, уравнение

$$u_{00} - (F(u)u_1)_1 = 0$$

представляется в следующем операторном виде

$$(\partial_0 - F^{\frac{1}{2}} \partial_1 - (F^{\frac{1}{2}})_1)[u_0 + F^{\frac{1}{2}} u_1] = 0,$$

а уравнение

$$u_{00} - (u^{-\frac{4}{3}} u_1)_1 = 0$$

в виде

$$(\partial_0 - u^{-\frac{2}{3}} \partial_1 - (u^{-\frac{2}{3}})_1 - x_1^{-1} u^{-\frac{2}{3}})[u_0 + u^{-\frac{2}{3}} u_1 + 3x_1^{-1} u^{\frac{1}{3}}] = 0$$

Аналогичным образом можно представить уравнение (I.2.1) при других значениях нелинейностей F и F_1 (таблица 4).

Таблица 5.

N	Решение
1	$F^{\frac{1}{2}} x_0 - x_1 + \varphi(u) = 0$
2	$F^{\frac{1}{2}} x_0 - x_1 + \varphi(\int F^{\frac{1}{2}} du - 2\lambda x_0) = 0$
3	$u^2 x_1 + x_0 + \varphi(u x_0^{-1}) u^2 = 0$

4	$u^2 \operatorname{sh}^{-2} x_0 x_1 + \operatorname{cth} x_0 + \varphi(u \operatorname{sh}^{-1} x_0) = 0$
5	$-u^2 x_1 \cos^{-2} x_0 + \operatorname{tg} x_0 + \varphi(u \cos^{-1} x_0) = 0$
6	$x_0 + u^{\frac{2}{3}} x_1 + \varphi(u^{\frac{1}{3}} x_1) = 0$
7	$x_0 + \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} \operatorname{sh} \frac{2}{3} x_1 + \varphi(u^{\frac{1}{3}} \operatorname{sh} \frac{x_1}{3}) = 0$
8	$x_0 - \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2}{3} x_1 + \varphi(u^{\frac{1}{3}} \cos \frac{x_1}{3}) = 0$
9	$x_0 - \omega_1 \int F_2^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ \int F^{\frac{1}{4}} (a_0 + a_1 F_2^{\frac{1}{2}}) du \right\} du =$ $= \varphi(\omega_1),$ $\omega_1 = (a_0 x_0 + a_1 x_1) \exp \left\{ - \int F_2^{\frac{1}{4}} (a_0 + a_1 F_2^{\frac{1}{2}}) du \right\}$

Важно подчеркнуть, что в подходе С. Ли такого типа решения получить невозможно.

Отметим, что решение уравнения (1.2.1), представленное в таблице 5 под первым номером, найдено также в [7].

Некоторые точные решения уравнения (1.2.1), полученные в результате интегрирования редуцированных ОДУ и подстановки их значений в соответствующие анзацы, приведем в таблице 6.

Таблица 6.

N	$F(u)$	$F_1(u)$	Решение
1	$\in C^2(R)$	0	$\int F(u) du - \lambda_2^2 u + \lambda_1 (\lambda_2 x_0 - x_1) = 0$

			$\beta(u) = x_0^{-1} x_1$
2	e^u	0	$e^u = e^{x_0} x_1, e^u = (x_1^2 + \lambda_1) \cos^{-2} x_0,$ $e^u = (x_1^2 + \lambda_1) \operatorname{sh}^{-2} x_0$
3	e^u	λ_1	$u = \frac{\lambda_1}{2} x_0^2 + \lambda_2 x_0 + \ln x_1$
4	$e^u + \lambda^2$	λ_1	$u = \ln(x_1 \pm \lambda x_0) + \frac{\lambda_1}{2} x_0^2 + \lambda_2 x_0 + \lambda_3$
5	u	0	$u = x_0 x_1 + \frac{x_0^2}{72} + \lambda_1,$ $u = x_0^{-2} x_1^2 + 3\lambda_1 x_1 x_0^3 + \frac{\lambda_1^2}{6} x_0^8 +$ $+ \lambda_2 x_0^{-1} + \lambda_3 x_0^2,$ $u = x_0^{-2} x_1^2 + x_1^{\frac{1}{2}} (\lambda_1 x_0^{\frac{5}{2}} + \lambda_2 x_0^{-\frac{3}{2}}),$ $u = W(x_0) x_1^2 + \Lambda(x_0),$ $(u - 4x_1 - 8x_0^2)^2 (u + 2x_1 - 2x_0^2) = \lambda$ $(u - 18x_1 x_0 - 27x_0^4)^3 (u - 3x_0^4 + 6x_0 x_1) = \lambda$ $(u - x_1^2 x_0^{-2} - 72x_1 x_0^3 - 96x_0^8 - 30\lambda x_0^2)^2 (u -$ $- x_1^2 x_0^{-2} + 18x_1 x_0^3 - 6x_0^8 + 15\lambda x_0^2) = \lambda x_0^4$
6	u	λu^2	$u = \exp \left\{ \sqrt{\frac{-\lambda}{2}} x_1 \right\} (\lambda_1 x_0^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{37})} +$ $+ \lambda_2 x_0^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{37})}) + \frac{6}{\lambda} x_0^{-2}$
7	u	λu	$u = -\frac{\lambda}{6} x_1^2 + \lambda_1 x_0 x_1 + \lambda_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{2\lambda}{3}} x_0 +$ $+ \lambda_3 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{2\lambda}{3}} x_0, \lambda > 0$ $u = -\frac{\lambda}{6} x_1^2 + \lambda_1 x_0 x_1 + \lambda_2 \operatorname{sh} \sqrt{-\frac{2\lambda}{3}} x_0 +$ $+ \lambda_3 \cos \sqrt{-\frac{2\lambda}{3}} x_0, \lambda < 0$
8	u^2	λ	$u = x_1 x_0^{-1} + x_0^2 (\lambda_1 + \frac{1}{3} \ln x_0)$

Замечание 1.2.1. Уравнение (1.2.1) с помощью замены

$$V = \lambda \int F(u) du, \quad x'_0 = x_1, \quad x'_1 = x_0 \quad (1.2.32)$$

переходит в уравнение

$$V_{00} - (\Phi'(V) V_1)_1 = F_1(\Phi^{-1}(V)), \quad (1.2.33)$$

где $\Phi(V)$ - функция, обратная к $\int F(u) du$; λ - некоторая постоянная.

Например, уравнение

$$U_{00} - (U^K U_1)_1 = 0 \quad (1.2.34)$$

при $K \neq -1$ посредством замены

$$V = U^{K+1}, \quad x'_0 = x_1, \quad x'_1 = x_0$$

преобразуется в уравнение

$$V_{00} - (V^m V_1)_1 = 0,$$

где $m = -\frac{K}{K+1}$, а при $K = -1$ с помощью замены

$$V = \ln U, \quad x'_0 = x_1, \quad x'_1 = x_0$$

уравнение (1.2.34) переходит в уравнение

$$V_{00} - (e^V V_1)_1 = 0$$

Таким образом, уравнения (1.2.1) и (1.2.33) локально эквивалентны, причем замена (1.2.32) не выводит уравнение (1.2.1) из рассматриваемого класса. Это свойство значительно облегчает исследование Q -условной инвариантности уравнения (1.2.1). Вместо исследования двух уравнений (1.2.1) и (1.2.33), связанных преобразованием (1.2.32), достаточно исследовать одно из них, а для другого получить результаты с помощью (1.2.32).

Интересно отметить, что уравнение

$$U_{00} - (U^{-2} U_1)_1 = 0 \quad (1.2.35)$$

инвариантно относительно преобразования

$$u' = u^{-1}, \quad x_0' = x_1, \quad x_1' = x_0$$

Следовательно, если

$$u = \varphi(x_0, x_1)$$

- решение уравнения (1.2.35), то и функция

$$u = \varphi^{-1}(x_1, x_0)$$

также решение (1.2.35).

§ 3. Редукция и точные решения многомерного ДУЧП второго порядка

В настоящем параграфе рассмотрим уравнение

$$g_{\mu\nu} u_{\mu\nu} - (F(u)u)_a = F_1(u), \quad (I.3.1)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0 \\ -1, & \mu = \nu > 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}, \quad \mu, \nu = 0, \bar{l}, \quad a = \bar{l}+1, n,$$

исследуем его симметричные свойства и построим точные решения.

3.1. Многомерное нелинейное волновое уравнение

Полученные в предыдущем параграфе результаты для двумерного уравнения (I.2.1) обобщим для многомерного уравнения (I.3.1).

В случае $\bar{l} = 0$, т.е. для уравнения

$$u_{00} - \vec{\nabla} [F(u) \vec{\nabla} u] = F_1(u) \quad (I.3.2)$$

обобщение проводим следующим образом. Операторам вида

$$\begin{aligned} Q &= \partial_1 + C(x_0, x_1, u) \partial_u, \\ Q &= \partial_0 + F^{\frac{1}{2}}(u) \partial_1 + C(x_0, x_1, u) \partial_u \end{aligned} \quad (I.3.3)$$

ставим в соответствие операторы

$$\begin{aligned} Q_a &= \partial_a + \alpha_a C(x_0, \vec{x}, u) \partial_u, \\ Q_a &= \alpha_a [\partial_0 + C(x_0, \vec{x}, u) \partial_u] + F^{\frac{1}{2}}(u) \partial_a, \end{aligned}$$

где $\vec{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ - произвольный постоянный единичный вектор; $a = \overline{1, n}$. В анзацах, соответствующих операторам (I.3.3), нужно заменить x_i на $\vec{a} \vec{x}$. Редуцированные уравнения при этом не изменяются.

Анзацы, полученные при помощи операторов

$$Q = \partial_0 + C(x_0, x_i, u) \partial_u \quad (I.3.4)$$

для многомерного уравнения (I.3.2) имеют вид

$$\int F(u) du = f(x_0) \varphi(\vec{x}) + g(x_0, \vec{x}), \quad (I.3.5)$$

где $f(x_0)$ и $g(x_0, \vec{x})$ - заданные функции, $\varphi(\vec{x})$ - новая неизвестная функция. Подставляя (I.3.5) в (I.3.2), имеем

$$\Delta \varphi = f^{-1} [-\Delta g + F^{-1} (\ddot{f} \varphi + g_{00}) - \\ - (\dot{f} \varphi + g_{00})^2 \dot{F} F^{-3} + F_2] \quad (I.3.6)$$

Если правая часть уравнения (I.3.6) является функцией только от φ и $\vec{x}$, то уравнение (I.3.6) принимает вид

$$\Delta \varphi = G(\vec{x}, \varphi) \quad (I.3.7)$$

и становится редуцированным для уравнения (I.3.2). В частности, при

$$a) F = u^k, F_2 = \lambda_1 u^{k+1}, k \neq -1, f(x_0) = h^{k+1}(x_0),$$

$g(x_0, \vec{x}) = 0$, редуцированное уравнение будет нелинейным уравнением Лапласа

$$\Delta \varphi = \lambda \varphi^{\frac{1}{k+1}} - \lambda_1 (k+1) \varphi; \quad (I.3.8)$$

$$b) F = u^{-1}, F_2 = \lambda_1, f(x_0) = 1, g(x_0, \vec{x}) = \ln v(x_0)$$

$v(x_0)$ - решение уравнения $\ddot{v} = \lambda$, $\lambda = const$. В этом случае (I.3.7) -

уравнение Лиувилля

$$\Delta \varphi = \lambda e^{\varphi} - \lambda_1; \quad (I.3.9)$$

в) $F = \exp u$, $F_1 = \lambda_1 \exp u$, $f(x_0) = \exp w(x_0)$,
 $g(x_0, \vec{x}) = 0$, $w(x_0)$ - решение уравнения $\ddot{w} = \lambda \exp w$, редуциро-
 ванное уравнение - уравнение Гельмгольца

$$\Delta \varphi + \lambda_1 \varphi = \lambda. \quad (I.3.10)$$

Интересно отметить, что анзац

$$u^{\frac{1}{2}} = u^1(\vec{x}) + u^2(\vec{x})x_0, \quad (I.3.11)$$

где $u^1(\vec{x})$, $u^2(\vec{x})$ - новые неизвестные функции, редуцирует урав-
 нение

$$u_{00} = \vec{\nabla} (u^{-\frac{2}{3}} \vec{\nabla} u) \quad (I.3.12)$$

к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \Delta u^1 = 2u^1(u^2)^2, \\ \Delta u^2 = 2(u^2)^3; \end{cases} \quad (I.3.13)$$

анзац

$$u^{\frac{1}{2}} = u^1(\vec{x})x_0^{\frac{1}{2}} + \frac{u^2(\vec{x})}{6}x_0^2, \quad (I.3.14)$$

$u^1(\vec{x})$, $u^2(\vec{x})$ - новые неизвестные функции, редуцирует уравнение

$$u_{00} = \vec{\nabla} (u^{-\frac{1}{2}} \vec{\nabla} u) \quad (I.3.15)$$

к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \Delta u^1 = \frac{5}{8} u^1 u^2, \\ \Delta u^2 = (u^2)^2; \end{cases} \quad (I.3.I6)$$

анзац

$$u^{\frac{1}{2}} = \exp\left\{\pm \frac{\sqrt{\lambda}}{2} x_0\right\} u^1(\vec{x}) - \frac{2}{\lambda} u^2(\vec{x}), \quad (I.3.I7)$$

$u^1(\vec{x}), u^2(\vec{x})$ - неизвестные функции, редуцирует уравнение

$$u_{00} - \vec{\nabla} [u^{-\frac{1}{2}} \vec{\nabla} u] = \lambda u, \quad \lambda \neq 0 \quad (I.3.I8)$$

к системе

$$\begin{cases} \Delta u^1 = \frac{3}{2} u^1 u^2, \\ \Delta u^2 = (u^2)^2, \end{cases} \quad (I.3.I9)$$

а анзац

$$u^{\frac{1}{2}} = u^1(\vec{x}) + u^2(\vec{x}) x_0 + u^3(\vec{x}) \frac{x_0^2}{2}, \quad (I.3.20)$$

$u^1(\vec{x}), u^2(\vec{x}), u^3(\vec{x})$ - неизвестные функции, редуцирует (I.3.I5)

к системе трех уравнений

$$\begin{cases} \Delta u^1 = u^1 u^3 + (u^2)^2, \\ \Delta u^2 = 3 u^2 u^3, \\ \Delta u^3 = 3 (u^3)^2. \end{cases} \quad (I.3.2I)$$

Анзацы (I.3.II), (I.3.I4), (I.3.I7), (I.3.20) осуществляют редукцию (уменьшение) уравнений (I.3.I2), (I.3.I5), (I.3.I8) по независимым переменным и антиредукцию (увеличение числа функций) по зависимым функциям. Очевидно, что такие анзацы не могут быть получе-

ны при помощи операторов лиевской симметрии.

Приведем некоторые анзацы и редуцированные уравнения, полученные для многомерного уравнения

$$g_{\mu\nu} u_{\mu\nu} - (F(u)u_n)_n = 0, \quad (I.3.22)$$

где $\mu, \nu = 0, \overline{n-1}$, $n > 1$.

Анзац

$$u = x_n^2 \frac{u^1}{6} + x_n u^2 + u^3, \quad (I.3.23)$$

(здесь и ниже u^1, u^2, u^3 - произвольные гладкие функции переменных $x_0, x_1, \dots, x_n$) редуцирует уравнение

$$g_{\mu\nu} u_{\mu\nu} - (u u_n)_n = 0 \quad (I.3.24)$$

к системе трех уравнений

$$\begin{cases} \square u^1 = (u^1)^2, \\ \square u^2 = u^1 u^2, \\ \square u^3 = (u^2)^2 + \frac{1}{3} u^1 u^3; \end{cases} \quad (I.3.25)$$

анзац

$$u = \frac{x_n^2}{6} u^1 + u^2 x_n^{\frac{1}{2}} \quad (I.3.26)$$

редуцирует (I.3.24) к системе двух уравнений

$$\begin{cases} \square u^1 = (u^1)^2, \\ \square u^2 = \frac{5}{8} u^1 u^2, \end{cases} \quad (I.3.27)$$

а анзац

$$u = x_n u^1 + u^2 \quad (I.3.28)$$

редуцирует уравнение

$$g_{\mu\nu} u_{\mu\nu} - (u^2 u_n)_n = 0 \quad (I.3.29)$$

к системе

$$\begin{cases} \square u^1 = 2(u^1)^3, \\ \square u^2 = 2u^2(u^1)^2 \end{cases} \quad (I.3.30)$$

Замечание I.3.I. Уравнение (I.3.I) с помощью анзаца

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2),$$

где $\omega_1 = \alpha_\mu x_\mu$, $\omega_2 = \beta_a x_a$, $\mu = \overline{0, l}$, $a = \overline{l+1, n}$, $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 1$, сводится к уравнению (I.2.I). Следовательно, для получения частных решений уравнения (I.3.I) необходимо в решениях уравнения (I.2.I) сделать замену $x_0 \rightarrow \lambda_\mu x_\mu$, $x_1 \rightarrow \beta_a x_a$.

3.2. Исследование редуцированных систем

Изучим симметрию и построим частные решения систем уравнений (I.3.I3), (I.3.I6), (I.3.I9), (I.3.2I).

Теорема I.3.I. Максимальной в смысле Ли алгеброй инвариантности (МАИ) системы ДУ (I.3.I3) является $\frac{n^2+n+6}{2}$ -мерная алгебра Ли, базисные операторы которой имеют вид:

$$P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b = \overline{1, n},$$

$$D_1 = x_a \partial_a - u^c \partial_{u^c}, \quad c = \overline{1, 2},$$

$$D_2 = u^2 \partial_{u^2}, \quad S = u^1 \partial_{u^1}.$$

Теорема 1.3.2. МАИ систем уравнений (1.3.16) и (1.3.19) является $\frac{n^2+n+4}{2}$ -мерная алгебра Ли, базисные элементы которой задаются операторами

$$P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a, \quad a, b = \overline{1, n},$$

$$D_1 = x_a \partial_a - 2u^c \partial_{u^c}, \quad D_2 = u^2 \partial_{u^2}, \quad c = \overline{1, 2}.$$

Теорема 1.3.3. МАИ системы уравнений (1.3.21) является $\frac{n^2+n+6}{2}$ -мерная алгебра Ли с базисными операторами

$$P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a,$$

$$D_1 = x_a \partial_a - 2u^c \partial_{u^c}, \quad D_2 = 2u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2},$$

$$S = u^2 \partial_{u^1} + u^3 \partial_{u^2}, \quad a, b = \overline{1, n}, \quad c = \overline{1, 3}.$$

Доказательство теорем (1.3.1)-(1.3.3) проводилось по методу Ли [20] с помощью компьютерной программы [21].

Перейдем к построению точных решений исследуемых систем. Рассмотрим систему ДУ (1.3.13). Поскольку система (1.3.13) инвариантна относительно операторов J_{ab} , то частное решение ищем в виде:

$$u^1 = u^1(z), \quad u^2 = u^2(z), \quad (1.3.31)$$

где $z = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$

Система (1.3.13) для сферически-симметричных решений (1.3.31) принимает вид:

$$u_{zz}^2 + \frac{n-1}{2} u_z^2 = 2(u^2)^3, \quad (1.3.32)$$

$$u_{zz}^1 + \frac{n-1}{z} u_z^1 = 2 u^1 (u^2)^2 \quad (I.3.33)$$

Уравнение (I.3.32) - уравнение Эдмена-Фаулера. Его частное решение задается формулой

$$u^2 = \sqrt{\frac{3-n}{2}} z^{-1} \quad (I.3.34)$$

Подставив (I.3.34) в (I.3.33) получим уравнение Эйлера

$$z^2 u_{zz}^1 + (n-1) z u_z^1 + (n-3) u^1 = 0,$$

общее решение которого представим в виде

$$u^1 = C_1 z^{-1} + C_2 z^{3-n}, \quad (I.3.35)$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Другие решения системы (I.3.I3) будем искать следующим образом.

Подставив частное решение нелинейного уравнения Лапласа системы (I.3.I3)

$$u^2 = x_n^{-1} \quad (I.3.36)$$

в первое уравнение системы (I.3.I3), получим для определения функции u^1 эллиптическое уравнение Дарбу

$$\Delta u^1 = \lambda u^1 x_n^{-2} \quad (I.3.37)$$

В данном случае $\lambda = 2$. Групповые свойства уравнения Дарбу методом Ли изучены в работе [57]. В работах [28, 57] построены некоторые семейства инвариантных решений уравнения (I.3.37).

Решения уравнения Дарбу (I.3.37), отличные от приведенных в [28, 57], ищем в виде:

$$I) \quad u^1 = \varphi^1(x_1, \dots, x_n) \varphi^2(x_n), \quad (I.3.38)$$

$$2) \quad u^1 = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{i+1}(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^{p+2i}, \quad (I.3.39)$$

$$3) \quad u^1 = \varphi(\omega), \quad \omega = x_n^{-1} \alpha_a x_a, \quad (I.3.40)$$

где $a = \overline{1, n-1}, |\alpha| = 1$.

В первом случае, подставив анзац (I.3.38) в уравнение (I.3.37), получим систему незацепленных уравнений

$$\Delta \varphi^1 = \lambda_1 \varphi^1, \quad (I.3.41)$$

$$x_n^2 \ddot{\varphi}^2 - \varphi^2(2 - \lambda_1 x_n^2) = 0, \quad (I.3.42)$$

где λ_1 - произвольная постоянная; точкой обозначено дифференцирование по переменной x_n .

Уравнение (I.3.41) - уравнение Гельмгольца, а (I.3.42) - уравнение типа Бесселя.

Частные решения уравнения Гельмгольца хорошо известны [6]. Решение уравнения (I.3.42) следующее

$$\lambda_1 = 0: \quad \varphi^2 = c_1 x_n^{-1} + c_2 x_n^2;$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 > 0: \quad \varphi^2 = & (c_2 x_n^{-1} - \sqrt{\lambda_1} c_1) \sin x_n - \\ & - (c_1 x_n^{-1} + \sqrt{\lambda_1} c_2) \cos x_n; \end{aligned} \quad (I.3.43)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 < 0: \quad \varphi^2 = & c_1 (\sqrt{-\lambda_1} - x_n^{-1}) \exp\{x_n \sqrt{-\lambda_1}\} + \\ & + c_2 (\sqrt{-\lambda_1} + x_n^{-1}) \exp\{-x_n \sqrt{-\lambda_1}\}. \end{aligned}$$

Здесь c_1, c_2 - произвольные постоянные.

Во втором случае после подстановки анзаца (I.3.39) в уравнение (I.3.37) получим уравнения

$$\varphi = C_1 (1 + w \operatorname{arctg} w) + C_2 w \quad (I.3.50)$$

Подставив (I.3.50) в (I.3.40) получим решение уравнения Дарбу (I.3.37):

$$u^1 = x_n^{-1} [C_1 (x_n + d_a x_a \operatorname{arctg} \frac{d_a x_a}{x_n}) + C_2 d_a x_a], \quad (I.3.51)$$

$$a = 1, n-1, \quad |d| = 1.$$

Таким образом, нами построены семейства частных решений системы ДУ (I.3.13), которые даются формулами (I.3.34), (I.3.36), (I.3.38) - (I.3.40).

Рассмотрим систему ДУ

$$\begin{cases} \Delta u^1 = \lambda_2 u^1 u^2, \\ \Delta u^2 = (u^2)^2. \end{cases} \quad (I.3.52)$$

При $\lambda_2 = \frac{5}{8}$ (I.3.52) совпадает с (I.3.16), а при $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ - с системой (I.3.19).

Проделав аналогичные выкладки, что и для системы (I.3.13), получим следующие точные решения системы ДУ (I.3.52)

$$a) \quad u^2 = (8 - 2n) z^{-2},$$

$$u^1 = C_1 z^{2-n+\sqrt{D}} + C_2 z^{2-n-\sqrt{D}},$$

где

$$D = n^2 - 4n(1 + 2\lambda_2) + 4(1 + 8\lambda_2);$$

$$б) \quad u^2 = 6 x_n^{-2},$$

$$u^1 = g(x_1, \dots, x_{n-1}) [C_1 \sqrt{x_n} Z_\nu(i\sqrt{-\lambda_1} x_n) + C_2 \sqrt{x_n} Z_\nu(i\sqrt{-\lambda_1} x_n)],$$

где $\nu = \frac{\sqrt{1+24\lambda_2}}{2}$; g - решение уравнения

$$\Delta g = \lambda_1 g;$$

Z_ν - цилиндрическая функция Бесселя;

$$в) u^2 = 6x_n^{-2},$$

$$u^1 = g \left[C_1 x_n^{\frac{1+\sqrt{1+24\lambda_2}}{2}} + C_2 x_n^{\frac{1-\sqrt{1+24\lambda_2}}{2}} \right],$$

где g - решение уравнения Лапласа

$$\Delta g = 0;$$

$$г) u^2 = 6x_n^{-2},$$

$$u^1 = C_1 y_{\nu_1}(\omega) + C_2 y_{\nu_2}(\omega),$$

где $\omega = i \frac{\alpha_0 x_0}{x_n}$, ν_1, ν_2 - решения уравнения

$$\nu^2 + \nu - 6\lambda_2 = 0,$$

y_ν - решение уравнения Лежандра

$$(\omega^2 - 1)y'' + 2\omega y' - \nu(\nu+1)y = 0;$$

$$д) u^2 = 6x_n^{-2},$$

$$u^1 = \sum_{i=0}^{\kappa} \varphi^{i+1} \left[C_1 x_n^{\frac{1+\sqrt{1+24\lambda_2}}{2}+2i} + C_2 x_n^{\frac{1-\sqrt{1+24\lambda_2}}{2}+2i} \right],$$

где φ^j , $j = \overline{1, \kappa+1}$ определяются формулами (I.3.47), (I.3.48), причем $\lambda = 6\lambda_2$.

И, наконец, для системы (I.3.2I) находим следующие точные решения

$$u^3 = \frac{2}{3} (4-n) z^{-2},$$

$$u^2 = C_1 z^{-2} + C_2 z^{4-n},$$

$$u^1 = C_3 z^{\frac{2-n+\sqrt{n}}{2}} + C_4 z^{\frac{2-n-\sqrt{n}}{2}} + \frac{3}{4(4-n)} C_1^2 z^{-2} + \\ + \frac{3C_1 C_2}{2(4-n)} z^{4-n} + \frac{3C_2^2}{6n^2 - 76n + 232} z^{10-2n}, \quad n \neq 4.$$

В случае $u^2=0$ система (I.3.2I) принимает вид

$$\begin{cases} \Delta u^3 = 3(u^3)^2, \\ \Delta u^1 = u^1 u^3. \end{cases} \quad (\text{I.3.53})$$

Подставив частное решение первого уравнения (I.3.53)

$$u^3 = 2x_n^{-2},$$

во второе уравнение системы (I.3.53), приходим к уравнению Дарбу (I.3.37) ($\lambda=2$):

Таким образом, решение системы (I.3.2I) в данном случае имеет вид

$$u^3 = 2x_n^{-2},$$

$$u^2 = 0,$$

$$u^1 = \alpha(x_1, \dots, x_n),$$

где α - решение уравнения Дарбу (I.3.37).

Если положить $u^3=0$, то (I.3.2I) значительно упрощается и имеет вид

$$\begin{cases} \Delta u^2 = 0, \\ \Delta u^1 = (u^2)^2. \end{cases} \quad (\text{I.3.54})$$

Приведем некоторые решения (I.3.54)

$$\text{а) } u^2 = C_1 + C_2 z^{2-n},$$

$$\begin{aligned} u^1 = & C_3 + C_4 z^{2-n} + \frac{C_1 C_2}{4-n} z^{4-n} + \frac{C_1^2}{2n} z^2 + \\ & + \frac{C_2^2}{(6-2n)(4-n)} z^{6-2n}, \quad n \neq 3, 4; \end{aligned}$$

при $n=3$

$$u^1 = C_3 + C_4 z^{-1} + \frac{C_1^2 z^2}{6} + C_2^2 \ln z + C_1 C_2 z,$$

а при $n=4$

$$u^1 = C_3 + C_4 z^{-2} + \frac{C_1^2 z^2}{8} + C_1 C_2 \ln z - \frac{C_2^2}{2} z^{-2} \ln z;$$

$$б) \quad u^2 = x_1 + \dots + x_n,$$

$$u^1 = \frac{1}{12} (x_1^4 + \dots + x_n^4) + \varphi(\vec{x}),$$

где $\varphi(\vec{x})$ - решение уравнения Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

Подставив решения систем (I.3.I3), (I.3.I6), (I.3.I9), (I.3.2I) в соответствующие анзацы (I.3.II), (I.3.I4), (I.3.I7), (I.3.20), получим семейства точных решений уравнений (I.3.I2), (I.3.I5), (I.3.I8).

3.3. О симметрии нелинейных волновых уравнений при дополнительном условии

В [11] указан нелиевский анзац, редуцирующий уравнение

$$u_{00} - (u u_1)_1 = u^2$$

к системе двух ОДУ.

Приведем несколько примеров редукции нелинейного волнового уравнения (I.3.I) к системе уравнений, которую нельзя осуществить с помощью лиевской или Q - условной инвариантности этого уравнения.

I. Анзац

$$u = u'(w), \quad w = x_n + u^2(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$$

редуцирует уравнение (I.3.1) при $\ell = n-1$ к системе трех уравнений

$$u'_{\omega\omega} \lambda_1 + u'_{\omega} \lambda_2 - (F(u') u'_{\omega})_{\omega} = F_1(u'), \quad (I.3.55)$$

$$g_{\mu\nu} u^{\mu\nu} = \lambda_2,$$

$$(u^2)_{\nu} (u^2)^{\nu} = \lambda_1, \quad (I.3.56)$$

где λ_1, λ_2 - постоянные.

Отметим, что система (I.3.56), состоящая из уравнений Даламбера и эйконала, изучена в работах [40, 41, 59].

2. Рассмотрим уравнение

$$u_{00} - \vec{\nabla} (u^{-\frac{1}{2}} \vec{\nabla} u) = \lambda u, \quad \lambda \neq 0 \quad (I.3.57)$$

При $\lambda > 0$ решение (I.3.57) будем искать, используя дополнительное условие

$$[(u^{\frac{1}{2}})_0 \mathcal{H}^{-1} \frac{\sqrt{\lambda}}{2} x_0]_0 = 0 \quad (I.3.58)$$

Общее решение (I.3.58) имеет вид

$$u^{\frac{1}{2}} = u^1(x) \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\lambda}}{2} x_0 + u^2(x), \quad (I.3.59)$$

где $u^1(x), u^2(x)$ - произвольные дифференцируемые функции.

Подставив анзац (I.3.59) в уравнение (I.3.57), получим систему ДУ

$$\begin{cases} \Delta u^1 = -\frac{3}{4} \lambda u^1 u^2, \\ \Delta u^2 = -\frac{\lambda}{4} ((u^1)^2 + 2(u^2)^2) \end{cases} \quad (I.3.60)$$

Пусть $\lambda < 0$. В этом случае на функцию u налагаем дополнительное условие

$$\left[(u^{\frac{1}{2}})_0 \sin^{-1} \frac{\sqrt{\lambda}}{2} x_0 \right]_0 = 0 \quad (I.3.61)$$

Подставив общее решение (I.3.61)

$$u^{\frac{1}{2}} = u'(x) \cos \frac{\sqrt{-\lambda}}{2} x_0 + u^2(x)$$

в уравнение (I.3.57), получим систему ДУ

$$\begin{cases} \Delta u' = \frac{3}{4} \lambda u' u^2, \\ \Delta u^2 = \frac{\lambda}{4} ((u')^2 + 2(u^2)^2) \end{cases} \quad (I.3.62)$$

Системы уравнений (I.3.60), (I.3.62) существенно отличаются от систем, приведенных в первом пункте этого параграфа тем, что правые части систем (I.3.60) и (I.3.62) зависят одновременно от функций u' и u^2 .

Отметим, что системы (I.3.60) и (I.3.62) сводятся к скалярному ДУ четвертого порядка

$$\Delta \left(\frac{\Delta u'}{u'} \right) = \frac{3\lambda^2}{16} (u')^2 + \frac{2}{3} \frac{\Delta u'}{u'}$$

Для этого необходимо выразить из первого уравнения систем (I.3.60), (I.3.62) значение u^2 и подставить его значение во второе уравнение соответствующих систем.

3.4. Редукция многомерных уравнений к двумерным ДУ

Исследование симметричных свойств и отыскание точных решений многомерных нелинейных ДУ сопряжено с большими трудностями, особенно это чувствительно при изучении условной инвариантности. Поэтому целесообразно, если это возможно, свести многомерное уравнение к двумерному, которое исследовать, как правило, значительно легче.

Проведем редукцию уравнения (I.3.1) к двумерным ДУ, используя анзац

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_i = \omega_i(x_0, \vec{x}), \quad i = 1, 2 \quad (1.3.63)$$

для некоторых конкретных значений ω_1 и ω_2 :

Получены следующие результаты:

$$1) \omega_1 = x_\nu \beta_\nu, \omega_2 = \alpha_6 x_6, \quad \beta_\nu \beta^\nu = 1, \quad \nu = \overline{0, l}, \quad \alpha_6^2 = 1, \\ \nu = \overline{l+1, n}; \text{ редуцированное уравнение имеет вид}$$

$$\varphi_{\omega_1 \omega_1} - (F(\varphi) \varphi_{\omega_2})_{\omega_2} = F_1(\varphi) \quad (1.3.64)$$

$$2) \omega_1 = x_\nu \beta_\nu + \gamma_6 x_6, \omega_2 = \alpha_6 x_6, \quad \beta_\nu \beta^\nu = 1, \quad \nu = \overline{0, l}, \quad \gamma_6^2 = \alpha_6^2 = 1, \\ \nu = \overline{l+1, n}, \gamma_6 \alpha_6 = 0; \text{ редуцированное уравнение представляется в виде}$$

$$(F \varphi_{\omega_2})_{\omega_2} + (\varphi_{\omega_1} (F-1))_{\omega_1} = F_1 \quad (1.3.65)$$

Положим

$$v = \int F(\varphi) d\varphi$$

приводим (1.3.65) к уравнению

$$v_{\omega_1 \omega_1} - [(\Phi'(v) - 1) v_{\omega_2}]_{\omega_2} = F_1$$

где $\Phi(v)$ - функция, обратная к $\int F(\varphi) d\varphi$.

3) $\omega_1 = \sqrt{x_\nu x^\nu}, \omega_2 = \sqrt{x_6^2}, \nu = \overline{0, l}, \nu = \overline{l+1, n}$. В этом случае (1.3.1) сводится к уравнению

$$\varphi_{\omega_1 \omega_1} + l \frac{\varphi_{\omega_1}}{\omega_1} - \frac{p}{\omega_2} F(\varphi) \varphi_{\omega_2} - \\ - (F(\varphi) \varphi_{\omega_2})_{\omega_2} = F_1(\varphi) \quad (1.3.66)$$

где $p = n - l - 1$.

4) $\omega_1 = \sqrt{x_\nu x^\nu}, \omega_2 = \alpha_6 x_6, \nu = \overline{0, l}, \nu = \overline{l+1, n}, |\alpha_6| = 1$; редуцированное уравнение имеет вид

$$\varphi_{\omega_1 \omega_1} + l \frac{\varphi_{\omega_1}}{\omega_1} - (F(\varphi) \varphi_{\omega_2})_{\omega_2} = F_1(\varphi) \quad (1.3.67)$$

5) $\omega_1 = \beta_\nu x_\nu, \omega_2 = \sqrt{x_6^2}, \nu = \overline{0, l}, \nu = \overline{l+1, n}, |\beta_\nu| = 1$; уравнение (1.3.1) редуцируется к уравнению

$$\varphi_{\omega_1 \omega_1} - \frac{p}{\omega_2} F(\varphi) \varphi_{\omega_2} - (F(\varphi) \varphi_{\omega_2})_{\omega_2} = F_1(\varphi) \quad (1.3.68)$$

Исследуем групповые свойства уравнения (I.3.66). Для удобства перепишем (I.3.66) в новых переменных $x_0 = \omega_1$, $x_1 = \omega_2$, $u = \varphi$:

$$u_{00} + \ell \frac{u_0}{x_0} - \rho F(u) \frac{u_1}{x_1} - (F(u)u_1)_1 = F_1(u) \quad (\text{I.3.67})$$

Групповую классификацию уравнения (I.3.67) осуществляем стандартным методом [20]. Полученные результаты представим в виде таблиц.

1. $\ell = 0$, $\rho > 0$, $F_1(u) = 0$.

Таблица 7.

$F(u)$	Алгебра Ли
$\in C^2(R)$	$\rho_0 = \partial_0$, $\mathcal{D}_1 = x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1$
e^u	$\rho_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 = x_1 \partial_1 + 2u \partial_u$
u^k	$L_1 = \langle \rho_0, \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_3 = k x_1 \partial_1 + 2u \partial_u \rangle$
u^{-4}	$L_1, \mathcal{K}_1 = x_0^2 \partial_0 + x_0 u \partial_u$
$u^{\frac{2(n-3)}{4-n}}$	$L_1, \mathcal{K}_2 = x_1^{3-n} \partial_1 + (n-4)x_1^{2-n} u \partial_u$

2. $\ell = 0$, $\rho > 0$, $F_1(u) \neq 0$.

Таблица 8.

$F(u)$	$F_1(u)$	Алгебра Ли
$\in C^2(R)$	$\in C^1(R)$	$\rho_0 = \partial_0$
e^u	e^{ku}	$\rho_0, \mathcal{D}_4 = k x_0 \partial_0 + (k-1)x_1 \partial_1 - 2u \partial_u$
u^k	u^m	$L_2 = \langle \rho_0, \mathcal{D}_5 = (1-m)x_0 \partial_0 + (k-m+1)x_1 \partial_1 + 2u \partial_u \rangle$

u^{-4}	λu^{-3}	$L_2, \mathcal{H}_1$
u^{-4}	$\alpha u + \lambda u^{-3}$	$P_0, e^{\pm 2\sqrt{\alpha} x_0} (\partial_0 \pm \sqrt{\alpha} u \partial_u)$
$u^{\frac{2(n-3)}{4-n}}$	λu	$L_2, \mathcal{H}_2$

3. $\ell > 0, p = 0$.

Таблица 9.

$F(u)$	$F_1(u)$	Алгебра Ли
$\in C^2(R)$	$\in C^1(R)$	$P_1 = \partial_1$
$\in C^2(R)$	0	P_1, D_1
e^u	0	P_1, D_1, D_2
e^u	$e^{\kappa u}$	P_1, D_4
u^κ	0	P_1, D_1, D_3
u^κ	u^m	P_1, D_5
$u^{-\frac{4}{3}}$	λu	$P_1, D_1, D_3, x_1^2 \partial_1 - 3x_1 u \partial_u$
$u^{\frac{2(\ell-2)}{1-\ell}}$	$\lambda u^{\frac{3-\ell}{\ell-1}}$	$P_1, D_1, D_3, x_0^{2-\ell} \partial_0 + (1-\ell)x_0^{1-\ell} u \partial_u$

4. $\ell > 0, p > 0$.

Таблица 10.

$F(u)$	$F_1(u)$	Алгебра Ли
$\in C^2(R)$	0	D_1

e^u	0	D_1, D_2
e^u	e^{ku}	D_4
u^k	0	D_1, D_5
u^k	u^m	D_5
$u^{\frac{2(p-2)}{3-p}}$	λu	$D_5, K_2 = x_1^{2-p} \partial_1 + (p-3)x_1^{1-p} u \partial_u$
$u^{\frac{2(p-2)}{3-p}}$	0	D_1, D_3, K_2

Замечание. В случае $\ell=0, p=0$ (I.3.66) совпадает с уравнением (I.2.I), групповые свойства которого изучены в [3, 18, 61].

Приведем некоторые Q -условные операторы, анзацы и редуцированные уравнения, полученные для уравнения (I.3.66).

1. $\ell=0, F = u^k, F_1 = u$:

$$Q = x_1(1+k)\partial_1 + (1-p)u\partial_u,$$

$$u = x_1^{\frac{1-p}{1+k}} \varphi(x_0),$$

$$\ddot{\varphi} = 0$$

2. $\ell=0, F = u, F_1 = 0$:

$$Q = (n+2)x_0^2\partial_1 + 6x_1\partial_u,$$

$$u = \frac{3}{n+2} x_1^2 x_0^{-2} + \varphi(x_0),$$

$$x_0^2 \ddot{\varphi} = \frac{6n}{n+2} \varphi.$$

$$Q = \partial_1 + \frac{6}{n+2} x_1 W(x_0) \partial_u,$$

$$u = \frac{3}{n+2} x_1^2 W(x_0) + \varphi(x_0),$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{6}{n+2} W \varphi.$$

3. $F = e^u, \ell=0, F_1=0$:

$$Q = x_1 \partial_1 + (1-\rho) \partial_u,$$

$$u = (1-\rho) \ln x_1 + \ln \varphi(x_0),$$

$$\ddot{\varphi} \varphi - \dot{\varphi}^2 = 0.$$

4. $F = u^{-\frac{1}{2}}, l=0, F_1=0:$

$$Q = \partial_0 + u^{\frac{1}{2}} x_1^{1-\rho} \partial_u,$$

$$u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x_0 x_1^{1-\rho} + \varphi(x_1),$$

$$4 x_1^2 \ddot{\varphi} + 4 \rho x_1 \dot{\varphi} = x_1^{4-2\rho}$$

$$Q = \partial_0 + \left[\frac{2}{3} (4-n) x_0 x_1^{-2} + x_1^{4-n} \right] u^{\frac{1}{2}} \partial_u,$$

$$u^{\frac{1}{2}} = \frac{4-n}{3} x_0^2 x_1^{-2} + x_0 x_1^{4-n} + \varphi(x_0),$$

$$x_1^2 \ddot{\varphi} + (n-1) x_1 \dot{\varphi} - \frac{2}{3} (4-n) \varphi = x_1^{10-2n}$$

5. $l \geq 0, \rho = 0, F = u, F_1 = \lambda :$

$$Q = \partial_0 - 2 x_0 \partial_1 + 8 x_0 \partial_u,$$

$$u = 4 x_0^2 + \varphi(\omega), \quad \omega = x_1 + x_0^2,$$

$$\ddot{\varphi} \varphi + \dot{\varphi}^2 - 2 \dot{\varphi} (1+l) - 8 + \lambda = 0.$$

6. $l \geq 0, \rho = 0, F = u, F_1 = 0:$

$$Q = 2 x_1 \partial_1 + [u + (3-l) x_1^2 x_0^{-2}] \partial_u,$$

$$u = \frac{3-l}{3} x_1^2 x_0^{-2} + x_1^{\frac{1}{2}} \varphi(x_0),$$

$$x_0^2 \ddot{\varphi} + l x_0 \dot{\varphi} - \frac{5}{4} (3-l) \varphi = 0.$$

§ 4. Симметрия и точные решения одного микроволнового уравнения

В настоящем параграфе исследована лиевская и Q -условная симметрия уравнения [72]

$$u_{00} - u_{11} - u_{0011} + (u_1^2)_1 = 0, \quad (I.4.1)$$

встречающегося при описании микроволновых процессов в биологии. Полученные операторы симметрии использованы для построения его точных решений.

Теорема I.4.1. Уравнение (I.4.1) инвариантно относительно пятимерной алгебры Ли с базисными элементами

$$P_0 = \partial_0, \quad P_1 = \partial_1, \quad P_2 = \partial_u, \quad (I.4.2)$$

$$D = x_0 \partial_0 - [2u - x_1] \partial_u, \quad S = x_0 \partial_u.$$

Доказательство теоремы проводится по методу Ли [20].

Решения уравнения (I.4.1), следуя [37], будем искать с помощью анзаца

$$u = f(x_0, x_1) \varphi(\omega) + g(x_0, x_1),$$

где φ - новая неизвестная функция от инвариантной переменной $\omega \equiv \omega(x_0, x_1)$, f и g - некоторые известные функции.

Определяя с помощью операторов (I.4.2) явный вид функций f , g и ω , получаем следующие анзацы:

$$u = x_0 x_1 + \varphi(\omega), \quad \omega = x_0,$$

$$u = \frac{x_0^2}{2} + \varphi(\omega), \quad \omega = x_1,$$

$$u = \frac{x_1}{2} + x_0^{-2} \varphi(\omega), \quad \omega = x_1, \quad (I.4.3)$$

$$u = \lambda \frac{x_0^2}{2} + \varphi(\omega), \quad \omega = a_0 x_0 + a_1 x_1,$$

$$u = \frac{x_1}{2} + x_0^{-2} \varphi(\omega), \quad \omega = x_1 - \ln x_0,$$

которые редуцируют уравнение (I.4.1) к ОДУ:

$$\ddot{\varphi} = 0,$$

$$\dot{\varphi}(2\dot{\varphi} - 1) + 1 = 0,$$

$$\ddot{\varphi}(\dot{\varphi} - 3) + 3\varphi = 0, \quad (I.4.4)$$

$$\lambda + \ddot{\varphi}(a_0^2 - a_1^2) - (a_0 a_1)^2 \varphi^{(4)} + 2a_1^3 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} = 0,$$

$$6(\varphi - \ddot{\varphi}) + 5(\dot{\varphi} - \ddot{\varphi}) - \varphi^{(4)} + 2\dot{\varphi} \ddot{\varphi} = 0$$

Здесь λ , a_0 , a_1 - произвольные постоянные; точкой обозначено дифференцирование по ω .

Общее решение первых двух уравнений (I.4.4) соответственно имеет вид

$$\varphi = \lambda_1 x_0 + \lambda_2,$$

$$\varphi = \frac{x_1}{2} \pm \frac{1}{3} (\lambda_1 - x_1)^{\frac{3}{2}}.$$

Решение третьего уравнения (I.4.4) представляется в параметрической форме

$$\varphi = \sqrt{t^2 - \frac{4}{9}t^3 + \lambda_1},$$

$$x_1 = \int \frac{1 - \frac{2}{9}t}{t^2 - \frac{4}{9}t^3 + \lambda_1} dt$$

Четвертое уравнение (I.4.4) после двукратного интегрирования принимает вид

$$\lambda(\dot{\varphi}\omega - \varphi) + (a_0^2 - a_1^2)\dot{\varphi}^2 - (a_0 a_1)^2 \ddot{\varphi}^2 +$$

$$+ \frac{2}{3} a_1^3 \dot{\varphi}^3 + \lambda_1 \dot{\varphi} + \lambda_2 = 0,$$

частное решение которого при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$ следующие

$$\varphi = -\frac{b}{x_1 \pm x_0}, \quad \text{если } a_0^2 = a_1^2 = 1,$$

$$\varphi = -\frac{3a_0}{a_1^2} \sqrt{a_0^2 - a_1^2} \operatorname{th} \frac{\sqrt{a_0^2 - a_1^2}}{2a_0a_1} \omega, \quad a_0^2 - a_1^2 > 0,$$

$$\varphi = -\frac{3a_0}{a_1^2} \sqrt{a_1^2 - a_0^2} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}{2a_0a_1} \omega, \quad a_1^2 - a_0^2 > 0.$$

Подставляя найденную функцию φ в соответствующий анзац (I.4.3), находим точные решения уравнения (I.4.1), явный вид которых приведен в таблице 11. под номерами I-4.

Перейдем к построению условно-инвариантных решений уравнения (I.4.1). Для этого поступим следующим образом. Дифференцируя уравнение (I.4.1) по переменной x_1 и полагая

$$u_1 = \frac{1 - \mathcal{V}}{2} \quad (\text{I.4.5})$$

придем к уравнению

$$\mathcal{V}_{00} - (\mathcal{V} \mathcal{V}_1)_1 - \mathcal{V}_{0011} = 0 \quad (\text{I.4.6})$$

Далее исследуем Q -условную инвариантность уравнения (I.4.6) относительно операторов

$$Q = \partial_1 + [\alpha(x_1)u + \beta(x_0, x_1)] \partial_u \quad (\text{I.4.7})$$

Полученные с помощью (I.4.7) анзацы для функции $\mathcal{V}$ посредством замены

$$u = \frac{1}{2} \int (1 - v) dx_1 \quad (I.4.8)$$

преобразуем в анзацы для определения функции u .

Теорема I.4.2. Уравнение (I.4.6) Q -условно инвариантно относительно операторов (I.4.7), если функции α и β удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} d_1 (\alpha_{11} + 5\alpha\alpha_1 + 2\alpha^3) + d_2 (\alpha_1 + 2\alpha^2) &= 0, \\ d_1 (\beta_{11} + 4\alpha^2\beta + 5\beta\alpha_1 + 3\alpha\beta_1) + d_2 (\beta_1 + 3\alpha\beta) &= 0, \quad (I.4.9) \\ d_1 (\beta_{00} - 3\beta\beta_1 - 2\alpha\beta^2 - 2\alpha_1\beta_{00} - \beta_{0011}) - \\ - d_2 (\beta_{001} + \beta^2 + \alpha\beta_{00}) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$d_1 \equiv 1 - \alpha^2 - \alpha_1 \neq 0,$$

$$d_2 \equiv \alpha_{11} + 2\alpha\alpha_1.$$

Система уравнений (I.4.9) имеет частные решения

$$a) \alpha = \frac{1}{2x_1}, \quad \beta = 0;$$

$$b) \alpha = 0, \quad \beta = 2a(x_0)x_1 + b(x_0), \quad \text{где функции } a \text{ и } b \text{ опре-}$$

деляются из системы уравнений

$$\begin{cases} \ddot{a} - 6a^2 = 0, \\ \ddot{b} - 6ab = 0. \end{cases}$$

Таким образом, имеем условные операторы

$$Q_1 = 2x_1 \partial_1 + \nu \partial_\nu,$$

$$Q_2 = \partial_1 + [2x_1 x_0^{-2} + \lambda_1 x_0^{-2} + \lambda_2 x_0^3] \partial_\nu,$$

$$Q_3 = \partial_1 + [W(x_0)x_1 + \Lambda(x_0)] \partial_\nu,$$

которые не входят в алгебру инвариантности уравнения (I.4.6).

С помощью операторов $Q_1 - Q_3$ и формулы (I.4.8) строим для функции u анзацы:

$$u = x_1^{\frac{3}{2}} \varphi'(x_0) + \frac{x_1}{2} + \varphi^2(x_0), \quad (I.4.10)$$

$$u = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3} \frac{x_1^3}{x_0^2} - \frac{1}{2} x_1^2 (\lambda_1 x_0^{-2} + \lambda_2 x_0^3) + \right. \\ \left. + \varphi'(x_0)x_1 + \varphi^2(x_0) \right], \quad (I.4.11)$$

$$u = -\frac{1}{2} \left[W(x_0) \frac{x_1^3}{3} + \Lambda(x_0) \frac{x_1^2}{2} + \varphi'(x_0)x_1 + \right. \\ \left. + \varphi^2(x_0) \right], \quad (I.4.12)$$

редуцирующее уравнение (I.4.1) к системам ОДУ:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}' = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 + \frac{g}{4} (\varphi')^2 = 0; \end{cases} \quad (I.4.13)$$

$$\begin{cases} x_0^2 \ddot{\varphi}' - 2\varphi' + x_0^2 (\lambda_1 x_0^{-2} + \lambda_2 x_0^3)^2 + 12x_0^{-2} + 2 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - \varphi' [\lambda_1 x_0^{-2} + \lambda_2 x_0^3] + \lambda_1 x_0^{-2} + \lambda_2 x_0^3 + \\ + 6x_0 (\lambda_2 + \lambda_1 x_0^{-5}) = 0; \end{cases} \quad (I.4.14)$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}' - 2W\varphi' - \Lambda^2 - 2W - 12W^2 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - \Lambda(1 + 6W + \varphi') = 0. \end{cases} \quad (I.4.15)$$

Решая системы (I.4.13) - (I.4.15) и подставляя найденные функции φ' и φ^2 в (I.4.10) - (I.4.12), получим точные решения уравнения (I.4.1), которые приведены в таблице II под номерами 5 - 7.

$\frac{W}{n/n}$	Решение
1	$u = x_0 x_1$
2	$u = \frac{1}{2} (x_0^2 + x_1) \pm \frac{1}{3} (\lambda - x_1)^{\frac{3}{2}}$
3	$u = \frac{x_1}{2} + x_0^{-2} \sqrt{t^2 - \frac{2}{9}t + \lambda}$ $x_1 = \int \frac{1 - \frac{1}{3}t}{\sqrt{t^2 - \frac{2}{9}t + \lambda}} dt, \quad t^2 - \frac{2}{9}t + \lambda > 0$
4	$u = -\frac{6}{x_1 \pm x_0},$ $u = -\frac{3a_0}{a_1} \sqrt{a_0^2 - a_1^2} \operatorname{th} \frac{\sqrt{a_0^2 - a_1^2}}{2a_0 a_1} (a_0 x_0 + a_1 x_1),$ $a_0^2 - a_1^2 > 0,$ $u = -\frac{3a_0}{a_1} \sqrt{a_1^2 - a_0^2} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a_1^2 - a_0^2}}{2a_0 a_1} (a_0 x_0 + a_1 x_1),$ $a_1^2 - a_0^2 > 0,$
5	$u = x_0 x_1^{\frac{3}{2}} + \frac{x_1}{2} - \frac{3}{16} x_0^4$
6	$u = -\frac{x_0}{4} (x_1^2 + x_1 \frac{x_0^3}{6} + \frac{x_0^6}{252} + \frac{x_0^3}{3})$
7	$2u = -\frac{1}{3} x_1^3 x_0^{-2} + (\lambda_1 x_0^3 + \lambda_2 x_0^{-2}) x_1^2 +$ $+ x_1 (\lambda_4 x_0^{-1} + 1 - \frac{1}{4} (12 + \lambda_1^2) x_0^{-2} + \lambda_3 x_0^2 - \frac{\lambda_2^2}{54} x_0^8 -$ $- \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2} x_0^3) + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{42} x_0^7 + \frac{\lambda_1 \lambda_4}{12} x_0^4 -$ $- \frac{12 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2^2}{8} x_0^3 - \frac{\lambda_1^3}{8124} x_0^{13} - \frac{\lambda_1^2 \lambda_2}{108} x_0^8 +$ $+ \frac{\lambda_2 \lambda_4}{2} x_0^{-1} - \frac{36 \lambda_2 + \lambda_2^3}{24} x_0^{-2}$

Построенные решения уравнения (I.4.1) размножим с помощью операторов симметрии (I.4.2). Пусть

$$u = f(x_0, x_1)$$

известное решение уравнения (I.4.1), тогда новые семейства решений строятся по формуле

$$u' = [f(x_0 e^{\theta_2} + a_0, x_1 + a_1) + \theta_0 x_0 e^{\theta_2} + \theta_1] e^{-2\theta_2} + \\ + \frac{1}{2} x_1 (e^{-2\theta_2} - 1),$$

где $a_0, a_1, \theta_0, \theta_1, \theta_2$ - групповые параметры.

§ 5. О точных решениях одной системы ДУ

Рассмотрим следующую нелинейную систему ДУ:

$$\begin{cases} V_0'' - (V^0 V^1)' = 0, \\ V_1'' - V_0' = 0, \end{cases} \quad (I.5.1)$$

где $V_\mu^{\nu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1$. Система (I.5.1) встречается при описании популяционных процессов в биологии [75].

В настоящем параграфе построим классы точных решений системы (I.5.1). Для этого поступим следующим образом. С помощью замены

$$V^\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}; \quad \mu = 0, 1 \quad (I.5.2)$$

сведем систему (I.5.1) к одному нелинейному ДУ второго порядка

$$u_{00} - u_1 u_{01} - u_0 u_{11} = 0 \quad (I.5.3)$$

Далее исследуем лиевскую и Q -условную симметрию уравнения (I.5.3) и построим его точные решения. Для получения решений системы ДУ (I.5.1) необходимо воспользоваться формулой (I.5.2).

Теорема I.5.1. МАИ уравнения (I.5.3) является пятимерная алгебра Ли, базисные операторы которой имеют вид

$$P_0 = \partial_0, \quad P_1 = \partial_1, \quad P_2 = \partial_u, \quad (I.5.4)$$

$$Q_1 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1, \quad Q_2 = x_0 \partial_0 - u \partial_u.$$

Теорема I.5.2. Уравнение (I.5.3) Q -условно инвариантно относительно оператора

$$Q = \partial_1 + [\alpha(x_0, x_1)u + \beta(x_0, x_1)] \partial_u, \quad (I.5.4)$$

если функции α и β удовлетворяют системе ДУ

$$\alpha \alpha_{01} - \alpha_0 (2\alpha_1 + 3\alpha^2) = 0,$$

$$\alpha_{11} + 5\alpha \alpha_1 + 2\alpha^3 = 0, \quad (I.5.5)$$

$$\beta_{00} - \beta \beta_{01} - 2\beta_0 \beta_1 - (\alpha \beta^2)_0 = 0,$$

$$2\alpha_0 - \beta_{11} - 2\alpha \beta_1 - \beta (3\alpha_1 + 2\alpha^2) = 0,$$

$$\alpha_{00} - \alpha \beta_{01} - \beta \alpha_{01} - 2\alpha_0 (\beta_1 + 2\alpha \beta) - 2\beta_0 (\alpha_1 + \alpha^2) = 0$$

Теорема I.5.3. Уравнение (I.5.3) Q -условно инвариантно относительно оператора

$$Q = \partial_0 + C(x_0, x_1, u) \partial_u, \quad (I.5.7)$$

если функция $C(x_0, x_1, u)$ удовлетворяет уравнениям

$$C(C_{0u} + 2C^2 C_{uu}) = C_0 C_u,$$

$$C(C_{01} + 3C C_{1u} + C_1 C_u) = C_0 C_1,$$

(I.5.8)

$$C_{00} - 3C^2 C_{uu} - (C C_1)_1 - C_0^2 C^{-1} - C C_u^2 = 0$$

Используя частные решения систем (I.5.6), (I.5.8), находим следующие операторы:

$$Q_1 = \partial_1 + x_0 \partial_u,$$

$$Q_2 = x_1^2 \partial_1 + [2u x_1 + \lambda] \partial_u,$$

$$Q_3 = \partial_1 + [x_1 + \lambda e^{ex_0}] \partial_u,$$

$$Q_4 = \partial_1 + \lambda \operatorname{tg} \frac{3}{2} \lambda x_0 x_1 \partial_u,$$

$$Q_5 = \partial_1 - \lambda x_1 \operatorname{ctg} \frac{3}{2} \lambda x_0 \partial_u,$$

$$Q_6 = \partial_1 + [-\frac{2}{3} x_1 x_0^{-1} + \lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_0^{-\frac{2}{3}}] \partial_u,$$

$$Q_7 = 2x_1 x_0 \partial_1 + [u x_0 - x_1^2] \partial_u,$$

(I.5.9)

$$Q_8 = 2x_1 \partial_1 + [u + 2\lambda x_1^2 \operatorname{tg} 2\lambda x_0] \partial_u,$$

$$Q_9 = 2x_1 \partial_1 + [u - 2\lambda x_1^2 \operatorname{ctg} 2\lambda x_0] \partial_u,$$

$$Q_{10} = \partial_0 + e^{x_0} x_1^{\frac{1}{2}} \partial_u,$$

$$Q_{11} = 3 x_0^2 \partial_0 + x_1^2 \partial_u,$$

$$Q_{12} = 2 x_1 \partial_0 + [u + 2 x_1^2] \partial_u,$$

$$Q_{13} = \partial_0 + \dot{b}(x_0) a^{\frac{1}{2}}(x_1) \partial_u,$$

где $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - произвольные постоянные; функция $a(x_1)$ удовлетворяет уравнению $\ddot{a} = 2\lambda_1 a^{\frac{1}{2}}$; функция $b(x_0)$ - решение уравнения $\dot{b} = b^2 \frac{\lambda_1}{2} + b\lambda_2 + \lambda_3$.

Анзацы, построенные с помощью операторов $Q_1 - Q_{13}$, и редуцированные уравнения, которые получены после подстановки этих анзацев в уравнение (1.5.1), приведены в таблице 12.

Таблица 12.

	Анзац	Редуцированное уравнение
1	$u = x_0 x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} = x_0$
2	$u = -\frac{\lambda}{3x_1} + \varphi(x_0) x_1^2$	$\ddot{\varphi} - 6\varphi\dot{\varphi} = 0$
3	$u = \frac{1}{2} x_1^2 + \lambda e^{2x_0} x_1 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - \dot{\varphi} = 2\lambda^2 e^{4x_0}$
4	$u = \frac{\lambda}{2} x_1^2 \operatorname{tg} \frac{3}{2} \lambda x_0 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} - \dot{\varphi} \lambda \operatorname{tg} \frac{3}{2} \lambda x_0 = 0$
5	$u = -\frac{\lambda}{2} x_1^2 \operatorname{cth} \frac{3}{2} \lambda x_0 + \varphi(x_0)$	$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \lambda \operatorname{cth} \frac{3}{2} \lambda x_0 = 0$
6	$u = -\frac{1}{3} x_1^2 x_0^{-1} + \varphi(x_0) +$ $+ x_1 (\lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_0^{-\frac{2}{3}})$	$3x_0^2 \ddot{\varphi} + 2x_0 \dot{\varphi} = 3(\lambda_1 x_0 +$ $+ \lambda_2 x_0^{-\frac{2}{3}})(\lambda_1 x_0^2 - \frac{2}{3} \lambda_2 x_0^{\frac{1}{3}})$
7	$u = -\frac{1}{3} x_1^2 x_0^{-1} + \varphi(x_0) x_1^{\frac{1}{2}}$	$x_0^2 \ddot{\varphi} + x_0 \dot{\varphi} - \frac{1}{4} \varphi = 0$
8	$u = \frac{1}{3} \lambda x_1^2 \operatorname{tg} \lambda x_0 +$ $+ \varphi(x_0) x_1^{\frac{1}{2}}$	$\ddot{\varphi} - \lambda \dot{\varphi} \operatorname{tg} \lambda x_0 -$ $- \lambda^2 (4 \cos^2 \lambda x_0)^{-1} \varphi = 0$

9	$u = -\frac{1}{3} x_1^2 \operatorname{ctgh} \lambda x_0 + \varphi(x_0) x_1^{1/2}$	$\ddot{\varphi} + 2\lambda \dot{\varphi} \operatorname{ctgh} \lambda x_0 - \lambda^2 (2 \operatorname{sh} \lambda x_0)^{-2} \varphi = 0$
10	$u = e^{x_0} x_1^{1/2} + \varphi(x_1)$	$x_1^2 \ddot{\varphi} + \frac{x_1}{2} \dot{\varphi} = x_1^2$
11	$u = -\frac{1}{3} x_1^2 x_0^{-1} + \varphi(x_1)$	$x_1^2 \ddot{\varphi} - 2x_1 \dot{\varphi} = 0$
12	$u = \frac{2}{3} x_1^2 + \varphi(x_0) x_1^{1/2}$	$\ddot{\varphi} - \frac{8}{3} \dot{\varphi} = 0$
13	$u = b(x_0) a(x_1) + \varphi(x_1)$	$(\varphi' a^{1/2})' = \lambda a^{1/2}$

Проинтегрировав редуцированные уравнения и подставив найденную функцию φ в соответствующий анзац, получим следующие решения уравнения (1.5.I):

$$\begin{aligned}
 u &= x_0 x_1 + \frac{x_0^3}{6}, \quad u = -\frac{\lambda}{3x_1} - \frac{1}{3} x_1^2 x_0^{-1}, \\
 u &= \frac{1}{2} x_1^2 + \lambda e^{2x_0} x_1 + \frac{\lambda^2}{6} e^{4x_0} + \lambda_1 e^{x_0} + \lambda_2, \\
 u &= \frac{\lambda}{x_1} + x_1^2 \lambda_1 \operatorname{tg} 3\lambda_1 x_0, \quad u = \frac{\lambda}{x_1} + x_1^2 \lambda_1 \operatorname{ctgh} 3\lambda_1 x_0, \\
 u &= -\frac{1}{3} x_1^2 x_0^{-1} + x_1 (\lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_0^{-2/3}) + \lambda_3 x_0^{1/3} + \\
 &\quad + \frac{\lambda_1^2}{8} x_0^3 + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{4} x_0^{5/3} - 3\lambda_2^2 x_0^{-1/3}, \\
 u &= \frac{\lambda}{3} x_1^2 \operatorname{tg} \lambda x_0 + \lambda_1 \int (\cos \lambda x_0)^{-2/3} dx_0, \\
 u &= \frac{\lambda}{3} x_1^2 \operatorname{ctgh} \lambda x_0 + \lambda_1 \int (\operatorname{sh} \lambda x_0)^{-2/3} dx_0, \\
 u &= -\frac{1}{3} x_1^2 x_0^{-1} + x_1^{1/2} (\lambda_1 x_0^{-1/2} + \lambda_2 x_0^{1/2}), \\
 u &= \frac{\lambda}{3} x_1^2 \operatorname{tg} \lambda x_0 + x_1^{1/2} (\cos \lambda x_0)^{-1/2} (\lambda_1 \sin \frac{\lambda x_0}{2} + \lambda_2 \cos \frac{\lambda x_0}{2}), \\
 u &= -\frac{\lambda}{3} x_1^2 \operatorname{ctgh} \lambda x_0 + x_1^{1/2} (\operatorname{sh} \lambda x_0)^{-1/2} (\lambda_1 \operatorname{sh} \frac{\lambda x_0}{2} + \lambda_2 \operatorname{ch} \frac{\lambda x_0}{2}),
 \end{aligned}$$

$$u = (e^{x_0} + \lambda_1) x_1^{\frac{1}{2}} + \frac{x_1^2}{3} + \lambda_2, \quad u = -\frac{1}{3} x_1^2 x_0^{-1} + \lambda_1 x_1^3 + \lambda_2,$$

$$u = \frac{2}{3} x_1^2 + x_1^{\frac{1}{2}} (\lambda_1 e^{\frac{2}{3} x_0} + \lambda_2),$$

$$u = b(x_0) a^{\frac{1}{2}}(x_1) + \lambda_2 \int a^{-\frac{1}{2}}(x_1) \left(\int a^{\frac{1}{2}}(x_1) dx_1 \right) dx_1.$$

Здесь λ , λ_1 , λ_2 - произвольные постоянные.

Решения уравнения (I.5.3) размножим с помощью операторов (I.5.4). Новое решение u' находится по формуле

$$u' = e^{\theta_2} u (e^{2\theta_1 + \theta_2} x_0 + a_0, e^{\theta_1} x_1 + a_1) + \theta_3,$$

где $u \equiv u(x_0, x_1)$ - известное решение; a_0 , a_1 , θ_1 , θ_2 , θ_3 - групповые параметры.

Г Л А В А II

УСЛОВНАЯ И НЕЛОКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Глава посвящена исследованию симметрии уравнений газовой динамики. В частности, предложен способ исследования нелокальной симметрии и построения анзацев для уравнений одномерной газовой динамики. Построены классы точных решений нестационарного уравнения околосвукового течения газа и уравнения коротких волн. Изучена лиевская и условная симметрия уравнения ударных волн в вязком теплопроводном газе.

§ I. Нелокальная симметрия и точные решения одномерных уравнений газовой динамики

Нелиевская нелокальная симметрия линейных уравнений математической физики изучена довольно подробно [33, 43, 44]. Термин "нелиевская симметрия", введенный в [34], означает симметрию уравнения, которая не может быть вычислена по классическому алгоритму С. Ли. Нелокальная симметрия нелинейных уравнений математической физики мало изучена.

В настоящем параграфе предложен способ исследования нелиевской симметрии и построения нелиевских анзацев для системы уравнений газовой динамики.

В лагранжевых переменных одномерное адиабатическое движение газа описывается системой уравнений (см., например [1])

$$u_0^1 - u_1^2 = 0$$

$$u_0^2 - u_1^3 = 0$$

$$u_0^3 - F(u^1, u^3)u_1^2 = 0$$

(2.1.1)

Здесь $u_j^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^j}$, $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{0, 1}$, $F(u^1, u^3) = \frac{\partial S / \partial u^1}{\partial S / \partial u^3}$,

S - энтропия, $(u^1)^{-1} \equiv \rho$ - плотность, $u^2 = V$ - скорость, $-u^3 \equiv p$ - давление.

Локальная и квазилокальная симметрия уравнений (2.1.1) изучены в [1].

Для исследования системы (2.1.1) поступим следующим образом. Во-первых, с помощью нелокальной замены

$$u^1 = W_{11}, \quad u^2 = W_{01}, \quad u^3 = W_{00}, \quad (2.1.2)$$

где W - произвольная гладкая функция переменных x_0 и x_1 , приведем систему ДУ (2.1.1) к одному скалярному уравнению третьего порядка

$$W_{000} - F(W_{11}, W_{00})W_{011} = 0 \quad (2.1.3)$$

Во-вторых, полученное уравнение (2.1.3) преобразуем при некоторых выборах функции F к нелинейному волновому уравнению второго порядка. В-третьих, используя лиевскую и Q -условную симметрию волнового уравнения, построим нелиевские анзацы для исходной системы (2.1.1). В дальнейшем будем следовать этому алгоритму.

Для конкретной реализации предложенного алгоритма рассмотрим несколько случаев.

Случай I. Пусть в (2.1.3) $F = \dot{F}_1(W_{11})$ является производной от произвольной гладкой функции F_1 относительно переменной W_{11} .

Интегрируя уравнение (2.1.3) по переменной x_0 , а затем дифференцируя дважды по переменной x_1 , получаем уравнение

$$W_{0011} - [F_1(W_{11})]_{11} = 0 \quad (2.1.4)$$

Полагая в (2.1.4) $V = W_{11}$, приходим к нелинейному волновому уравнению

$$V_{00} - (\dot{F}_1(V) V_1)_1 = 0 \quad (2.1.5)$$

Случай II. Пусть в (2.1.3) $F = F_2(W_{00})$ - произвольная гладкая функция переменной W_{00} . Дифференцируя уравнение (2.1.3) по переменной x_0 и положив $V = W_{00}$, приходим к уравнению

$$V_{11} - (F_2^{-1}(V) V_0)_0 = 0 \quad (2.1.6)$$

Случай III. Пусть $F = z \frac{W_{00}}{W_{11}}$, z - произвольное действительное число. Интегрируя (2.1.3) по переменной x_0 , а затем дифференцируя дважды по x_1 получаем уравнение четвертого порядка

$$W_{0011} - [F_3^z(x_1) W_{11}^z]_{11} = 0, \quad (2.1.7)$$

где $F_3(x_1)$ - произвольная гладкая функция.

Замена

$$W_{11} = F_3^{-1} \cdot V$$

приводит (2.1.7) к уравнению второго порядка

$$V_{00} - F_3(x_1) [V^2]_{11} = 0 \quad (2.1.8)$$

Итак, если уравнения (2.1.5), (2.1.6), (2.1.8) обладают нетривиальной локальной симметрией, то эта симметрия будет, вообще говоря, нелокальной для исходной системы ДУ (2.1.1). Используя локальную симметрию уравнений (2.1.5), (2.1.6), (2.1.8), построим

нелиевские анзацы для уравнений (2.1.1), которые редуцируют двумерную систему ДУЧП к системе ОДУ. Условная симметрия уравнений (2.1.5), (2.1.6) изучена во втором параграфе первой главы.

Нелиевские анзацы для системы ДУ (2.1.1), полученные по указанной схеме, имеют следующий вид.

Случай I.

I) $F = u^1$:

$$\begin{cases} u^1 = x_1^2 \varphi^1(x_0), \\ u^2 = \frac{1}{3} x_1^3 \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = \frac{1}{12} x_1^4 \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.1.9)$$

$$\begin{cases} u^1 = x_1^{\frac{1}{2}} \varphi^1(x_0), \\ u^2 = \frac{2}{3} x_1^{\frac{3}{2}} \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = \frac{4}{15} x_1^{\frac{5}{2}} \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.1.10)$$

$$\begin{cases} u^1 = x_0 x_1 + \varphi^1(x_0), \\ u^2 = \frac{1}{2} x_1^2 + \dot{\varphi}^1(x_0) x_1 + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = \frac{1}{2} x_1^2 \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.1.11)$$

$$\begin{cases} u^1 = x_1^2 x_0^{-2} + x_1^{\frac{1}{2}} \varphi^1(x_0), \\ u^2 = -\frac{2}{3} x_1^3 x_0^{-3} + \frac{2}{3} x_1^{\frac{3}{2}} \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = \frac{1}{2} x_1^4 x_0^{-4} + \frac{4}{15} \ddot{\varphi}^1(x_0) x_1^{\frac{5}{2}} + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.1.12)$$

$$\begin{cases} u^1 = \dot{\varphi}^1(\omega) + 4x_0^2, \quad \omega = x_1 + x_0^2, \\ u^2 = 2x_0 \dot{\varphi}^1(\omega) + \varphi^2(x_0) + 8x_0 x_1, \\ u^3 = 4x_0^2 \dot{\varphi}^1(\omega) + 2\varphi^1(\omega) + 4x_1^2 + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.1.13)$$

$$\begin{cases} u^1 = 9(x_0 \dot{\varphi}^1(\omega) + x_0^4), \quad \omega = x_1 + x_0^3, \\ u^2 = 9(\varphi^1(\omega) + 3x_0^3 \dot{\varphi}^1(\omega) + 4x_0^3 x_1 + \varphi^2(x_0)), \\ u^3 = 9(9x_0^5 \dot{\varphi}^1(\omega) + 12x_0^2 \varphi^1(\omega) + 6x_0^2 x_1^2 + \\ + x_1 \dot{\varphi}^2(x_0) + \varphi^3(x_0)); \end{cases} \quad (2.1.14)$$

$$\begin{cases} u^1 = x_0^2 \dot{\varphi}^1(\omega) + (x_1 x_0^{-1} + 6x_0^4)^2, \quad \omega = x_0 x_1 + x_0^6, \\ u^2 = \varphi^1(\omega) + \dot{\varphi}^1(\omega)(x_0 x_1 + 6x_0^6) - \frac{2}{3} x_1^3 x_0^{-3} + \\ + 288x_1 x_0^7 + 18x_1^2 x_0^2 + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = \dot{\varphi}^1(\omega)(x_1 + 6x_0^5)^2 + 30x_0^4 \varphi^1(\omega) + \frac{1}{2} x_1^4 x_0^{-4} + \\ + 12x_1^3 x_0 + 672x_0^6 x_1^2 + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.1.15)$$

$$u^1 = \ddot{\varphi}^1(\omega), \quad \omega = x_1 x_0^{-1},$$

$$u^2 = \dot{\varphi}^1(\omega) - \omega \ddot{\varphi}^1(\omega) + \varphi^2(x_0), \quad (2.1.16)$$

$$u^3 = 2\varphi^1(\omega) - 2\omega \dot{\varphi}^1(\omega) + \ddot{\varphi}^1(\omega)\omega^2 + x_1 \dot{\varphi}^2(x_0) + \varphi^3(x_0).$$

Анзацы (2.1.9) - (2.1.16) редуцируют систему (2.1.1) к следующим системам ОДУ:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}^1 = 24(\varphi^1)^2 + 1, \\ \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ \ddot{\varphi}^3 = 0; \end{cases} \quad (2.1.17)$$

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - \varphi^1 \dot{\varphi}^1 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0; \end{cases} \quad (2.1.18)$$

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} = 2x_0, \\ \ddot{\varphi}^2 = x_0 \dot{\varphi}^1, \\ \dot{\varphi}^3 = \varphi^1 \dot{\varphi}^1; \end{cases} \quad (2.1.19)$$

$$\begin{cases} 4x_0^3 \varphi^{1(3)} - 15x_0 \dot{\varphi}^1 + 30\varphi^1 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 = \varphi^1 \dot{\varphi}^1, \\ \dot{\varphi}^3 = 0; \end{cases} \quad (2.1.20)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^1 (\ddot{\varphi}^1 - 2) + 16\omega + \lambda = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 + 32x_0^3 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 + 2\lambda x_0 = 0; \end{cases} \quad (2.I.21)$$

$$\begin{cases} 3(\dot{\varphi}^1)^2 - 8\varphi^1 - 4\omega^2 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 = 60x_0^4, \\ \dot{\varphi}^3 = 84x_0^7; \end{cases} \quad (2.I.22)$$

$$\begin{cases} (\dot{\varphi}^1)^2 - 60\varphi^1 - 1800\omega^2 - 2\lambda = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 = 24552x_0^{10}, \\ \dot{\varphi}^3 = 24768x_0^{15} + 4\lambda x_0^3; \end{cases} \quad (2.I.23)$$

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} (\ddot{\varphi}^1 + \omega^2) + \lambda_2 \omega^{-1} + \lambda_1 = 0, \\ \ddot{\varphi} = \lambda_1 x_0^{-2}, \\ \dot{\varphi}^3 = \lambda_2 x_0^{-1}; \end{cases} \quad (2.I.24)$$

2) $F = (\alpha^1)^{\kappa}$:

$$\begin{cases} \alpha^1 = x_1^m \varphi^1(x_0), \\ \alpha^2 = \frac{1}{m+1} x_1^{m+1} \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ \alpha^3 = \frac{1}{(m+1)(m+2)} x_1^{m+2} \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.I.25)$$

Подставляя анзац (2.I.25) в (2.I.I), получаем системы ОДУ:

$$m = \frac{1}{\kappa + 1}, \quad \kappa \neq -1:$$

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (\varphi^1)^\kappa \dot{\varphi}^1 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0; \end{cases} \quad (2.I.26)$$

$$m = \frac{2}{\kappa}, \quad \kappa \neq -1; -2:$$

$$\begin{cases} \kappa^2 \varphi^{1(3)} - 2(\kappa + 1)(\kappa + 2)(\dot{\varphi}^1)^\kappa \dot{\varphi}^1 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0. \end{cases} \quad (2.I.27)$$

Для конкретных значений степени κ укажем еще некоторые анза-
цы и соответствующие им редуцированные системы.

$$3) \quad F = (\varphi^1)^{-2}:$$

$$\begin{cases} \varphi^1 = x_1^{-2} \varphi^1(x_0), \\ \varphi^2 = -x_1^{-1} \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ \varphi^3 = -\ln x_1 \dot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.I.28)$$

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 - (\varphi^1)^{-1} \dot{\varphi}^1 = 0; \end{cases} \quad (2.I.29)$$

$$4) F = (u^1)^{-\frac{3}{2}};$$

$$\begin{cases} u^1 = x_1^{-2} \varphi^1(x_0), \\ u^2 = -x_1^{-1} \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = -\ln x_1 \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.I.30)$$

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (\varphi^1)^{-\frac{3}{2}} \dot{\varphi}^1 = 0; \end{cases} \quad (2.I.31)$$

$$5) F = (u^1)^{-1};$$

$$\begin{cases} u^1 = x_1^{-1} \varphi^1(x_0), \\ u^2 = \ln x_1 \dot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = x_1(\ln x_1 - 1) \ddot{\varphi}^1(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.I.32)$$

$$\begin{cases} u^1 = \varphi^1(x_0) \cos^{-2} x_1, \\ u^2 = \dot{\varphi}^1(x_0) \operatorname{tg} x_1 + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = -\ddot{\varphi}^1 \ln \cos x_1 + \dot{\varphi}^2(x_0)x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.I.33)$$

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 - (\varphi^1)^{-2} \dot{\varphi}^1 = 0; \end{cases} \quad (2.I.34)$$

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} = 0, \\ \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = (\varphi^1)^{-1} \dot{\varphi}^1; \end{cases} \quad (2.1.35)$$

$$6) F = (u^1)^{-\frac{1}{2}} :$$

$$\begin{cases} u^1 = (2x_0 x_1 + \varphi^1(x_1) x_1^{-1})^2, \\ u^2 = \frac{8}{3} x_0 x_1^3 + 4\varphi^1(x_1) + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = \frac{2}{3} x_1^4 + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.1.36)$$

$$\begin{cases} u^1 = [x_0^2 x_1^{-2} + \frac{a_1}{2} x_0 x_1^3 + \ddot{\varphi}^1(x_1) x_1^2]^2, \\ u^2 = -\frac{4}{3} x_0^3 x_1^{-3} + \frac{a_1^2}{14} x_0 x_1^7 + \frac{3}{2} a_1 x_0^2 x_1^2 + \\ + 4x_0 \dot{\varphi}^1(x_1) + a_1 \int x_1^5 \ddot{\varphi}^1 dx_1 + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = 2x_0^2 x_1^{-2} + \frac{a_1^2 x_1^8}{112} + a_1 x_0 x_1^3 + 4\varphi^1(x_1) + \\ + \varphi^3(x_0) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1; \end{cases} \quad (2.1.37)$$

$$\begin{cases} u^1 = (x_0^2 x_1^{-2} + x_0^{\frac{1}{2}} \dot{\varphi}^1(x_1))^2, \\ u^2 = -\frac{4}{3} x_0^3 x_1^{-3} + \int [\ddot{\varphi}^1 x_1^2]^2 dx_1 + \\ + 5x_0^{\frac{3}{2}} \dot{\varphi}^1 + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = 2x_0^2 x_1^{-2} + \frac{15}{2} x_0^{\frac{1}{2}} \varphi^1(x_1) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.1.38)$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}^2 = 4, \\ \dot{\varphi}^3 = 0; \end{cases} \quad (2.1.39)$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0; \end{cases} \quad (2.I.40)$$

$$\begin{cases} \frac{15}{4} \varphi^1 - \ddot{\varphi}^1 = \lambda_1 + \lambda_2 x_1, \\ x_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_2 + \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ x_0^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 + \dot{\varphi}^3 = 0; \end{cases} \quad (2.I.41)$$

7) $F = (u^1)^{-\frac{2}{3}}$:

$$\begin{cases} u^1 = [x_0 x_1^{-1} + \ddot{\varphi}^1(x_1) x_1^2]^3, \\ u^2 = -\frac{3}{2} x_0^2 x_1^{-2} + 6 x_0 \dot{\varphi}^1(x_1) + 3 \int x_1^3 (\ddot{\varphi}^1)^2 dx_1 + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = 3 x_0 x_1^{-1} + 6 \varphi^1(x_1) + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.I.42)$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 = 0; \end{cases} \quad (2.I.43)$$

8) $F = (u^1)^2$:

$$\begin{cases} u^1 = x_0^{-1} x_1 + \varphi^1(x_0), \\ u^2 = -\frac{x_1^2}{2} x_0^{-2} + \dot{\varphi}^1(x_0) x_1 + \varphi^2(x_0), \\ u^3 = \frac{1}{3} x_1^3 x_0^{-3} + \frac{1}{2} \ddot{\varphi}^1(x_0) x_1^2 + \dot{\varphi}^2(x_0) x_1 + \varphi^3(x_0); \end{cases} \quad (2.I.44)$$

$$\begin{cases} x_0^3 \varphi^{1(3)} - 2 x_0 \dot{\varphi}^1 + 2 \varphi^1 = 0, \\ x_0^2 \ddot{\varphi}^2 - 2 x_0 \varphi^1 \dot{\varphi}^1 + (\varphi^1)^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^3 - (\varphi^1)^2 \dot{\varphi}^1 = 0. \end{cases} \quad (2.I.45)$$

Случай II.

9) $F = (U^3)^{-1}$. Анзацы получаем из (2.I.9) - (2.I.16) заменой $x_0 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_0, u^1 \rightarrow u^3, u^3 \rightarrow u^1$. Соответствующие системы редуцированных уравнений имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}^1 - 6(\varphi^1)^2 = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = 0; \end{cases} \quad (2.I.46)$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}^1 = 0, \\ 2\dot{\varphi}^2 = (\varphi^1)^2; \end{cases} \quad (2.I.47)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^2 = x_1 \varphi^1, \\ \dot{\varphi}^1 = x_1^2; \end{cases} \quad (2.I.48)$$

$$\begin{cases} 4x_1^2 \ddot{\varphi}^1 - 15\varphi^1 = 0, \\ 2\dot{\varphi}^2 = (\varphi^1)^2; \end{cases} \quad (2.I.49)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^1 (\ddot{\varphi}^1 - 2) - 8\omega + \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = 8x_1^2; \end{cases} \quad (2.I.50)$$

$$\begin{cases} 3\dot{\varphi}^1 \ddot{\varphi}^1 - 4\varphi^1 - 4\omega + \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = 12x_1^5 - 3\lambda x_1^2; \end{cases} \quad (2.I.51)$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^1 (\ddot{\varphi}^1 - 30) - 1800\omega + \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = -1368x_1^{11} - \lambda x_1^5; \end{cases} \quad (2.I.52)$$

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} (\ddot{\varphi}^1 - \omega^2) - \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 x_1 = \lambda. \end{cases} \quad (2.I.53)$$

10) $F = (u^3)^{\frac{1}{2}}$. Анзацы получаем из (2.1.36) - (2.1.38) тем же способом, что и для $F(u^3)^{-1}$. В этом случае системы редуцированных ОДУ следующие:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^2 = 4x_1 + \lambda, \\ (\varphi^1 x_0^{-1})_0 = \frac{8}{3} x_0^3 + \lambda; \end{cases} \quad (2.1.54)$$

$$\begin{cases} 2\varphi^{1(3)} - \frac{15}{2}\dot{\varphi}^1 - \lambda = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = \lambda x_1^{\frac{1}{2}}; \end{cases} \quad (2.1.55)$$

$$\begin{cases} x_0^2 \ddot{\varphi}^1 = \lambda x_0 + \lambda_1 + \frac{a_1^2}{112} x_0^8, \\ \dot{\varphi}^2 = \lambda. \end{cases} \quad (2.1.56)$$

Аналогичным образом строятся анзацы и редуцированные системы при других значениях нелинейности $F(u^3)$.

Большинство из редуцированных систем ОДУ можно проинтегрировать в явном виде. Решение систем (2.1.18) - (2.1.23) имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi^1 = C_1 x_0^2 + C_2 x_0 + C_3, \\ \varphi^2 = x_0 (C_1 x_0^2 + C_2 x_0 + C_3)^2 - \frac{4}{3} x_0^3 - C_2 x_0^2 + \rho_1(x_0), \\ \varphi^3 = C_4; \end{cases} \quad (2.1.57)$$

$$\begin{cases} \varphi^1 = \frac{1}{72} x_0^4 + C_1 x_0^2 + C_2 x_0 + C_3, \\ \varphi^2 = \frac{1}{72} x_0^6 + \frac{1}{4} C_1 x_0^4 + \frac{1}{3} C_2 x_0^3 + \rho_1(x_0), \\ \varphi^3 = [\frac{1}{72} x_0^4 + C_1 x_0^2 + C_2 x_0 + C_3]^2 + C_4; \end{cases} \quad (2.1.58)$$

$$\begin{cases} \varphi^1 = C_1 x_0^2 + C_2 x_0^{-\frac{3}{2}} + C_3 x_0^{\frac{5}{2}}, \\ \varphi^2 = \frac{1}{5} C_1^2 x_0^5 - \frac{1}{2} C_2^2 x_0^{-2} + \frac{1}{6} C_3^2 x_0^6 + \frac{4}{3} C_1 C_2 x_0^{\frac{3}{2}} + \\ \quad + \frac{4}{11} C_1 C_3 x_0^{\frac{11}{2}} + C_2 C_3 x_0^2 + P_1(x_0), \\ \varphi^3 = C_4; \end{cases} \quad (2.1.59)$$

$$\begin{cases} \ln[\varphi' - \omega' \sqrt{\varphi' - 4\omega'^2}] + \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{15}} \left(\frac{\sqrt{\varphi' - 4\omega'^2}}{\omega'} - \frac{1}{2} \right) = C, \\ \varphi^2 = \frac{16}{3} x_0^3 + \lambda_4 x_0 + \lambda_5, \\ \varphi^3 = -\lambda x_0^2 + \lambda_3, \\ \varphi' = \varphi^1 - \frac{\lambda_2}{4}, \quad \omega' = \omega + \frac{\lambda}{16}; \end{cases} \quad (2.1.60)$$

$$\begin{cases} (\sqrt{2\varphi^1 + \omega^2} - \sqrt{3}\omega)^3 (\sqrt{2\varphi^1 + \omega^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega) = C, \\ \varphi^2 = 2x_0^6 + P_1(x_0), \\ \varphi^3 = \frac{21}{2} x_0^8 + C_1, \quad \omega = x_1 + x_0^2; \end{cases} \quad (2.1.61)$$

$$\begin{cases} (\sqrt{\frac{\varphi^1 + \lambda}{30} + \omega^2} - \sqrt{2}\omega)^2 (\sqrt{\frac{\varphi^1 + \lambda}{30} + \omega^2} + \frac{\omega}{\sqrt{2}}) = C, \\ \varphi^2 = 186 x_0^{12} + P_1(x_0), \\ \varphi^3 = 1548 x_0^{16} + \lambda x_0^4 + \lambda_2; \end{cases} \quad (2.1.62)$$

Решение системы (2.1.4I) следующее

$$\begin{cases} \varphi^1 = c_1 \operatorname{sh} \frac{\sqrt{15}}{2} x_1 + c_2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{15}}{2} x_1 + \frac{4}{15} \lambda_2 x_1 + \frac{4}{15} \lambda_1, \\ \varphi^2 = \frac{4}{3} \lambda_2 x_0^{\frac{3}{2}} + \lambda_4 x_0 + \lambda_5, \\ \varphi^3 = \lambda_1 x_0^{\frac{1}{2}} + \lambda_3. \end{cases} \quad (2.1.63)$$

Подставляя решения редуцированных систем в соответствующие анзацы, получим точные решения системы ДУ (2.1.1).

Подчеркнем, что некоторые решения системы (2.1.1) при $F = (u^1)^{-\frac{1}{2}}; (u^1)^{-\frac{2}{3}}$ содержат произвольные функции. В случае II все решения характерны тем, что компонента u^1 содержит произвольную функцию $\varphi^3(x_1)$.

Большинство из вышеприведенных анзацев можно представить в таком общем виде:

$$u = A \varphi + B \dot{\varphi} + C \ddot{\varphi} + D, \quad (2.1.64)$$

где

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{pmatrix},$$

$\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ - соответственно первая и вторая производная от φ по своему аргументу; A, B, C, D - некоторые переменные матрицы размерности 3×3 .

Приведем некоторые анзацы вида (2.1.64) для случая $F = u^1$:

$$\begin{cases} u^1 = \lambda x_1^2 + \varphi^1(x_0), \\ u^2 = \dot{\varphi}^1(x_0) x_1, \\ u^3 = \ddot{\varphi}^1(x_0) \frac{x_1^2}{2} + \varphi^2(x_0); \end{cases} \quad (2.1.65)$$

$$\begin{cases} u^1 = -\lambda x_1^{-2} + 3 x_1^2 \varphi^1(x_0), \\ u^2 = x_1^3 \dot{\varphi}^1(x_0), \\ u^3 = \frac{1}{4} x_1^4 \ddot{\varphi}^1(x_0) + \varphi^2(x_0). \end{cases} \quad (2.1.66)$$

которые редуцируют систему (2.1.1) к следующим системам ОДУ:

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} + 2\lambda \dot{\varphi}^1 = 0, \\ \dot{\varphi}^2 = \varphi^1 \dot{\varphi}^1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi^{1(3)} = 36 \varphi^1 \dot{\varphi}^1, \\ \dot{\varphi}^2 = 3\lambda \dot{\varphi}^1. \end{cases}$$

Отметим, что анзацы (2.1.65), (2.1.66) не следуют из $\mathcal{Q}$ -условной или лиевской симметрии уравнения (2.1.5).

В заключении параграфа приведем результаты групповой классификации по симметриям С. Ли уравнения

$$u_{00} - F_3(x_1)(F(u)u_1)_1 = 0,$$

которое можно рассматривать как обобщение уравнения (2.1.8). Результаты представим в виде таблицы I3.

Таблица I3.

$F(u)$	$F_3(x_1)$	Алгебра Ли
$\in C^2(R)$	$\in C^1(R)$	$P_0 = \partial_0$
	x_1^n	$P_0, D_1 = (2-n)x_0\partial_0 + 2x_1\partial_1$
	e^{nx_1}	$P_0, D_2 = nx_0\partial_0 - 2\partial_1$
$e^{\lambda u}$	$\in C^1(R)$	$P_0, D_3 = \lambda x_0\partial_0 - 2\partial_u$
	e^{nx_1}	P_0, D_2, D_3
	x_1^n	P_0, D_1, D_3
	x_1^3	$P_0, D_1, D_3, K_1 = \lambda x_1^2\partial_1 + x_1\partial_u$

u^k	$\in C^1(R)$	$P_0, D_4 = \lambda x_0 \partial_0 - 2u \partial_u$
	$e^{\lambda x_1}$	P_0, D_2, D_4
	x_1^λ	P_0, D_1, D_4
	$x_1^{\frac{3\lambda+4}{\lambda+1}}$	$P_0, D_1, D_4, K_2 = (\lambda+1)x_1^2 \partial_1 + x_1 u \partial_u$
u^{-4}	$\in C^1(R)$	$P_0, D_4, K_3 = x_0^2 \partial_0 + x_0 u \partial_u$
	$e^{\lambda x_1}$	P_0, D_2, D_4, K_3
	x_1^λ	P_0, D_1, D_4, K_3
	$x_1^{\frac{8}{3}}$	P_0, D_1, D_4, K_2, K_3
u^{-1}	$e^{\lambda x_1}$	$P_0, D_2, D_5 = x_0 \partial_0 + 2u \partial_u,$
		$D_6 = x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + \lambda x_1 u \partial_u$

Здесь λ, k, n - произвольные постоянные; $k \neq -1$.

§ 2. Точные решения уравнения околосвукового течения газа

При изучении нестационарных потенциальных течений газа с околосвуковыми скоростями широко используется уравнение Линя-Рейснера-Циня [71] :

$$2u_{01} + u_1 u_{11} - u_{22} = 0 \quad (2.2.1)$$

Локальная группа симметрии уравнения (2.2.1) бесконечномерна и порождается операторами [30] :

$$\begin{aligned} X_1 &= 2x_0 \partial_0 + x_2 \partial_2 - 2u \partial_u, \\ X_2 &= \alpha_1 \partial_u, \quad X_3 = \alpha_2 x_2 \partial_u, \\ X_4 &= \alpha_3 \partial_1 + [2\dot{\alpha}_3 x_1 + 2\ddot{\alpha}_3 x_2^2] \partial_u, \\ X_5 &= \dot{\alpha}_4 x_2 \partial_1 + \alpha_4 \partial_2 + [2\ddot{\alpha}_4 x_1 x_2 + \frac{2}{3}\alpha_4^{(3)} x_2^3] \partial_u, \\ X_6 &= 3\alpha_5 x_0 \partial_0 + [\dot{\alpha}_5 x_1 + \ddot{\alpha}_5 x_2^2] \partial_1 + 2\dot{\alpha}_5 x_2 \partial_2 + \\ &\quad + [-\alpha_5 u + \ddot{\alpha}_5 x_1^2 + 2\alpha_5^{(3)} x_2^2 + \frac{1}{3}\alpha_5^{(4)} x_2^4] \partial_u, \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

где $\alpha_i = \alpha_i(x_0)$ произвольные функции от x_0 , $i = \overline{1, 5}$.

Для отыскания точных решений уравнения (2.2.1) применим следующие подходы.

I. Используя операторы симметрии (2.2.2) сведем уравнение (2.2.1) к двумерным уравнениям, а затем исследуем редуцированные уравнения. Подставляя решения редуцированных уравнений в соответствующие анзацы, получим точные решения уравнения (2.2.1). Рассмотрим некоторые из возможных случаев:

а) Анзац

$$u = x_0^{-1} \varphi(\omega, x_1), \quad \omega = x_2^2 x_0^{-1}$$

редуцирует (2.2.1) к уравнению

$$4\omega\varphi_{\omega\omega} - \varphi_1\varphi_{11} + 2\varphi_1 + 2\omega\varphi_{1\omega} + 2\varphi_\omega = 0; \quad (2.2.3)$$

б) Анзац

$$u = \alpha^1(x_0)x_2 + 2\varphi(x_0, \omega), \quad \omega = x_1 \quad (2.2.4)$$

сводит (2.2.1) к уравнению

$$\varphi_{01} + \varphi_\omega\varphi_{\omega\omega} = 0,$$

которое является дифференциальным следствием от уравнения Гамильтона-Якоби

$$\varphi_0 + \frac{1}{2}\varphi_\omega^2 = C(x_0). \quad (2.2.5)$$

Не ограничивая общности можно положить $C(x_0)=0$.

в) К уравнению (2.2.5) приходим также с помощью анзаца

$$u = 2\varphi(x_0, \omega) + \frac{1}{2}\omega, \quad \omega = x_1 + x_2; \quad (2.2.6)$$

г) Анзац

$$u = 2\varphi(\omega, x_1), \quad \omega = x_0 + \sqrt{2}x_2$$

редуцирует (2.2.1) к уравнению

$$\varphi_{\omega 1} + \varphi_1\varphi_{11} - \varphi_{\omega\omega} = 0; \quad (2.2.7)$$

д) Анзацы

$$u = \alpha^1(x_0)x_2 + \alpha^2(x_0) + \varphi(\omega, x_2), \quad \omega = x_1 \quad (2.2.8)$$

$$u = \varphi(\omega, x_2) - 2x_1, \quad \omega = x_0 + x_1 \quad (2.2.9)$$

сводит уравнение (2.2.1) к уравнению

$$\varphi_{22} - \varphi_\omega\varphi_{\omega\omega} = 0. \quad (2.2.10)$$

Класс полученных решений уравнения (2.2.1) можно расширить если более детально исследовать редуцированные уравнения (2.2.3), (2.2.5), (2.2.7), (2.2.10).

Рассмотрим уравнение Гамильтона-Якоби

$$\varphi_0 + \frac{1}{2} \varphi_\omega^2 = 0 \quad (2.2.II)$$

Инвариантные решения уравнения (2.2.II) приведены в работах [4,58].

Подставляя эти решения в формулы (2.2.4), (2.2.3), получим частные решения уравнения (2.2.I). Приведем некоторые из них

$$u = \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{x_0} (2\sqrt{1-x_0}e^{-\omega} + \ln \frac{\sqrt{1-x_0}e^{-\omega}-1}{\sqrt{1-x_0}e^{-\omega}+1} + \lambda)^2,$$

$$u = \frac{1}{2} \omega + \frac{\omega^2}{2x_0} - (\sqrt{2} \pm \sqrt{2}') \ln x_0 \pm 2[\sqrt{2}' \ln \omega_1 - \omega + \frac{(\omega_1 - \omega)^4 - 32x_0^2}{16x_0(\omega_1 - \omega)^2}] ,$$

$$\omega = x_1 + x_2, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega^2 + 4\sqrt{2}'x_0}$$

Построим еще несколько решений уравнения (2.2.I), используя Q - условную инвариантность уравнения (2.2.II) относительно оператора

$$Q = \partial_\omega + C(x_0, x_1, \varphi) \partial_\varphi \quad (2.2.I2)$$

Теорема 2.2.I. Уравнение (2.2.II) Q - условно инвариантно относительно оператора (2.2.I2), если функция $C(x_0, x_1, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$C_0 + C C_\omega + \frac{1}{2} C^2 C_\varphi = 0 \quad (2.2.I3)$$

Общее решение (2.2.I3) представляется в виде

$$C = \Phi(Cx_0 - \omega, C^2x_0 - 2\varphi) \quad (2.2.I4)$$

где Φ - произвольная гладкая функция своих аргументов.

Рассмотрим несколько случаев.

а) Пусть (2.2.I4) задается соотношением

$$2C = (Cx_0 - \omega)^2 \quad (2.2.I5)$$

Определяя из (2.2.15) значение функции C , получим оператор

$$Q = x_0^2 \partial_\omega + (1 + x_0 \omega \pm \sqrt{1 + 2x_0 \omega}) \partial_\varphi. \quad (2.2.16)$$

Анзац

$$\varphi = \frac{1}{6x_0^3} [6\omega x_0 + 3\omega^2 x_0^2 \pm (1 + 2x_0 \omega)^{\frac{3}{2}}] + \varphi^1(x_0), \quad (2.2.17)$$

соответствующий оператору (2.2.16), редуцирует (2.2.11) к уравнению

$$\dot{\varphi}^1 = -\frac{1}{2} x_0^{-4} \quad (2.2.18)$$

б) Найдём функцию C из соотношения

$$2C = C^2 x_0 - 2\varphi.$$

В этом случае оператор (2.2.12) имеет вид

$$Q = x_0 \partial_\omega + [1 + \sqrt{1 + 2x_0 \varphi}] \partial_\varphi \quad (2.2.19)$$

Анзац

$$\omega + \ln(1 + \sqrt{1 + 2\varphi x_0}) - \sqrt{1 + 2x_0 \varphi} + \varphi^1(x_0) = 0, \quad (2.2.20)$$

построенный по оператору (2.2.19), сводит (2.2.11) к уравнению

$$\dot{\varphi}^1 = -x_0^{-1} \quad (2.2.21)$$

Подставляя решения уравнений (2.2.18), (2.2.21) в анзацы (2.2.17), (2.2.20), а затем подставляя (2.2.17), (2.2.20) в формулы (2.2.4), (2.2.6), получим следующие решения уравнения (2.2.1):

$$u = \frac{1}{2} \omega + \frac{2}{3} [6\omega x_0 + 3x_0^2 \omega^2 \pm (1 + 2x_0 \omega)^{\frac{3}{2}} - 1],$$

$$\omega - \ln x_0 - \sqrt{1 + x_0(u - \frac{1}{2} \omega)} + \ln(1 + \sqrt{1 + x_0(u - \frac{\omega}{2})}) = 0,$$

$$\omega = x_1 + x_2$$

Рассмотрим уравнение (2.2.10). С помощью дифференциальной замены

$$v = \varphi \omega$$

сведем (2.2.10) к нелинейному волновому уравнению

$$v_{\xi\xi} - (v v_{\omega}) \omega = 0, \quad (2.2.22)$$

которое исследовано во втором параграфе первой главы. Это обстоятельство позволяет искать решения уравнения (2.2.10) с помощью анзаца

$$\varphi = \int v d\omega + \varphi^1(x_2), \quad (2.2.23)$$

где v - Q - условно инвариантный анзац уравнения (2.2.22), взятый из таблицы 2. Приведем некоторые точные решения уравнения (2.2.10), полученные вышеуказанным способом

$$\varphi = \frac{1}{2} x_2 \omega^2 + \frac{1}{12} x_2^4 + \frac{1}{504} x_2^7 + \lambda_3 + \\ + \omega \left(\frac{x_2^4}{12} + \lambda_2 x_2 \right) + \lambda_1 x_2,$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \omega^3 x_2^{-2} + \frac{a_1}{2} (\omega^2 x_2^3 + \omega (\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 x_2^{-1} + \\ + \frac{a_1^2}{54} x_2^8)) + a_1 (\lambda_1 \frac{x_2^7}{42} + \lambda_2 \frac{x_2^4}{12} + \frac{a_1^2}{8424} x_2^{13}) + \\ + \lambda_3 x_2, \quad (2.2.24)$$

$$\varphi = \frac{1}{3} \omega^3 x_2^{-2} + \frac{2}{3} \omega^{\frac{3}{2}} (\lambda_1 x_2^{-\frac{3}{2}} + \lambda_2 x_2^{\frac{5}{2}}) + \\ + \frac{1}{4} \lambda_1^2 x_2^{-1} - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{6} x_2^3 + \frac{\lambda_2^2}{84} x_2^7 + \lambda_3 x_2,$$

$$\begin{cases} \varphi = W(x_2) \frac{\sqrt{t^3 + \lambda}}{9} + \lambda_2 x_2 + \lambda_3, \\ \omega = \frac{1}{2} \int \frac{t dt}{\sqrt{t^3 + \lambda}} \end{cases},$$

$$\varphi = \frac{2}{3} x_2 \omega^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{24} x_2^4 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3,$$

$$\begin{cases} \varphi = 4\omega x_2^2 + \frac{2}{5}x_2^5 - \frac{1}{2}\lambda x_2^2 + \frac{t^2}{4} - 2(\omega_1 - \frac{\lambda}{8}) + \frac{\lambda^2}{32}, \\ (\omega_1 - \frac{\lambda}{8} + \frac{t}{2})(4\omega_1 - \frac{\lambda}{2} - t)^2 = C, \quad \omega_1 = \omega + x_2^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = 9[\omega x_2^4 + \frac{2}{7}x_2^7 - \frac{\lambda}{4}x_2^4 + x_2(\frac{3}{8}t^2 - \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\lambda}{4}\omega_1)], \\ (4\omega_1 - \lambda - 2t)^3(4\omega_1 - \lambda + 6t) = C, \quad \omega_1 = \omega + x_2^3. \end{cases}$$

Здесь t - параметр, $C, a_1, \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - произвольные постоянные.

Подставляя (2.2.24) в (2.2.8), (2.2.9), приходим к решениям уравнения (2.2.1).

Замечание 2.2.1. Поскольку уравнение (2.2.10) с помощью замены

$$u = -\varphi \quad (2.2.25)$$

переходит в стационарное уравнение околосвукового течения газа

$$u_{22} + u\omega u_{\omega\omega} = 0,$$

то его решения получаем из (2.2.24) заменой (2.2.25).

2. Решение уравнения (2.2.1) будем искать с помощью анзаца

$$u = f(x)\varphi(\omega) + g(x) \quad (2.2.26)$$

Подставив анзац (2.2.26) в уравнение (2.2.1), после несложных преобразований приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \ddot{\varphi} [2\omega_0\omega_1 - \omega_1^2 + g_1\omega_1^2] f + \\ & + \varphi \ddot{\varphi} f f_1 \omega_1^2 + \varphi^2 f_1 f_{11} + \varphi [2f_{10} - f_{22} + \\ & + (f_1 g_1)_1] + \ddot{\varphi} \ddot{\varphi} f^2 \omega_1^3 + \varphi \ddot{\varphi} [f f_1 \omega_{11} + \\ & + \omega_1 (2f_1^2 + f f_{11})] + \ddot{\varphi}^2 [2f f_1 \omega_1^2 + \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

$$+ f^2 \omega_1 \omega_{11}] + \psi [2 \varphi_1 \omega_0 + (2 f_0 + 2 f_1 g_1 + f g_{11}) \omega_1 + \\ + f (2 \omega_{01} + g_1 \omega_{11} - \omega_{22}) - 2 f_2 \omega_2] + 2 g_{10} - g_{22} + g_1 g_{11} = 0$$

При некоторых условиях на функции f , g и ω (2.2.26) сводится к ОДУ для $\varphi(\omega)$. Рассмотрим несколько случаев.

а) Пусть $f = 1$, $g = \frac{\lambda_1}{2} x_2^2$, $\omega = x_1 + x_0 \frac{\lambda + (\lambda_2)^2}{2} + \lambda_2 x_2$.
В этом случае (2.2.27) принимает вид

$$\lambda \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} \ddot{\varphi} - \lambda_1 = 0 \quad (2.2.28)$$

Проинтегрировав (2.2.28) находим следующее точное решение уравнения (2.2.1)

$$u = \frac{\lambda_1}{2} x_2^2 \pm \frac{1}{3 \lambda_1} \left(\lambda_2 + 2 \lambda_1 \left(x_1 + x_0 \frac{\lambda + \lambda_2^2}{2} + \lambda_2 x_2 \right) \right)^{\frac{3}{2}} - \\ - \lambda \left(x_1 + x_0 \frac{\lambda + \lambda_2^2}{2} + \lambda_2 x_2 \right)$$

б) Положим в (2.2.27) $\varphi = \omega^{\frac{3}{2}}$. Тогда функции f , g и ω удовлетворяют система уравнений

$$f_{22} = 0, \quad g_{22} = \frac{g}{f} f^2, \\ 2 b_0 - b_2^2 = 0, \quad 2 f_0 - 2 f_2 b_2 - f b_{22} = 0 \\ \omega = x_1 + b(x_0, x_2) \quad (2.2.29)$$

Решая систему уравнений (2.2.29), по формуле (2.2.26) получим следующие решения уравнения (2.2.1)

$$u = \frac{3}{32 \lambda_1^2} x_0^{-5} (\lambda_1 x_0^{\frac{1}{2}} x_2 + \lambda_2)^4 + \\ + (\lambda_1 x_0^{-\frac{3}{2}} x_2 + \lambda_2 x_0^{-2}) \left(x_1 - \frac{x_2^2}{2 x_0} \right)^{\frac{3}{2}},$$

$$u = \frac{3}{32} (x_2 - x_0)^4 + (x_2 - x_0) \left(\frac{1}{2} x_0 + x_1 - x_2 \right)$$

3. Наложим на решение уравнения (2.2.1) дополнительное усло-

вие

$$[u_{111} x_1^{\frac{5}{2}}]_1 = 0 \quad (2.2.30)$$

Подставив общее решение уравнения (2.2.30)

$$u = x_1^{\frac{3}{2}} \varphi^1 + x_1^3 \varphi^2 + x_1^2 \varphi^3 + x_1 \varphi^4 + \varphi^5, \quad (2.2.31)$$

где $\varphi^i = \varphi^i(x_0, x_2)$ - произвольные гладкие функции, $i = \overline{1, 5}$, в уравнение (2.2.1) получим после расщепления систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi^1 \varphi^4 &= 0, \quad \varphi_{22}^2 = 18 (\varphi^2)^2, \\ 4 \varphi_{22}^1 &= 45 \varphi_1^1 \varphi^2, \quad 2 \varphi_0^1 + 3 \varphi^1 \varphi^3 = 0, \\ \varphi_{22}^3 &= 18 \varphi^2 \varphi^3 + 6 \varphi_0^4, \\ \varphi_{22}^4 &= 6 \varphi^2 \varphi^4 + 4 (\varphi_0^3 + (\varphi^3)^2), \\ \varphi_{22}^5 &= 2 \varphi_0^4 + \frac{9}{8} (\varphi^1)^2 + 2 \varphi^3 \varphi^4 \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

Решая систему (2.2.32), по формуле (2.2.31) получаем частные решения уравнения (2.2.1). Приведем некоторые из них:

$$\begin{aligned} u &= \lambda x_0^{-\frac{3}{2}} x_2 x_1^{\frac{3}{2}} + x_0^1 x_1^2 + \frac{3}{32} \lambda^2 x_0^{-3} x_2^4, \\ u &= \lambda \omega^{-\frac{3}{2}} x_1^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \omega^{-2} x_1^3 + \lambda_1 \omega^{-1} x_1^2 + \frac{9}{16} \lambda^2 \omega^{-1}, \\ \omega &= \lambda_1 x_0 + x_2 \end{aligned}$$

Полученные решения уравнения (2.2.1) размножим с помощью операторов (2.2.2). Новое решение u' уравнения (2.2.1), построенное по операторам $X_1 - X_5$, выражается через уже известное решение

$$u = f(x_0, x_1, x_2)$$

по формуле

$$\begin{aligned} u' &= \theta_1^2 f(\theta_1^4 x_0, \alpha_3 \theta_3 + x_2 \theta_4 + x_1, \theta_1(x_2 + \alpha_4 \theta_4)) - \\ &- \theta_2 \alpha_2 (x_2 + \alpha_4 \theta_4) - \alpha_1 \theta_5 - \theta_3 [2 \ddot{\alpha}_3 (x_2 \theta_4 + x_1) + \\ &+ 2 \ddot{\alpha}_3 (x_2 + \alpha_4 \theta_4)^2] - 2 \ddot{\alpha}_4 x_1 x_2 \theta_4 - \frac{2}{3} \alpha_4^{(3)} x_2^2 \theta_4, \end{aligned}$$

где θ_i - групповые параметры, $i = \overline{1, 5}$.

Укажем формулы разложения решений для некоторых конкретных значений функции $\alpha_6(x_0)$:

$$\alpha = \text{const} :$$

$$u' = f(x_0 + \theta, x_1, x_2)$$

$$\alpha = x_0 :$$

$$u' = \theta^2 f(\theta^3 x_0, \theta x_1, \theta^2 x_2)$$

$$\alpha = x_0^n, n \neq 1, 0 :$$

$$\begin{aligned} u' = & \left[f((qa+p)^{\frac{1}{1-n}}, (qa+p)^{\frac{n}{q}} (x_1 p^{-\frac{n}{q}} - \right. \\ & - \frac{b_1}{q} F(-1)), x_2 (\frac{q}{p} a + 1)^{\frac{2n}{q}}) (qa+p)^{\frac{n}{q}} + \\ & + \frac{1}{q} (n(n-1) b_2 F(-1) - b_1 b_2 n F(-2) + \\ & \left. + b_1^2 F(-3) (\frac{n}{3} + \frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)}) \right] p^{-\frac{n}{q}} \end{aligned}$$

$$\text{где } q = 3(1-n), \quad p = x_0^{1-n}, \quad F(k) = (qa+p)^k - p^k,$$

$$b_2 = x_1 x_0^{-\frac{n}{q}} + \frac{b_1}{qr}, \quad b_1 = n(n-1) p x_2^2;$$

θ, a - групповые параметры.

В заключении приведем результаты групповой классификации уравнения

$$u_{01} + F(u_1)u_{11} + u_{22} = 0,$$

представляющего собой обобщение уравнения (2.2.I). Результаты представим в виде таблицы I4.

Таблица I4.

N	$F(u_1)$	Алгебра Ли
1	$\in C^1(R)$	$L = \langle \partial_0, \partial_1, \partial_2, \mathcal{D} = x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + u \partial_u,$ $\mathcal{S}_1 = x_2 \partial_1 - 2x_0 \partial_2, \mathcal{S}_2 = \alpha^1(x_0) x_2 \partial_u,$ $\mathcal{S}_3 = \alpha^2(x_0) \partial_u \rangle,$
2	e^{u_1}	$L_1, \mathcal{D}_1 = 2x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + 2(u + x_1) \partial_u,$
3	u_1^κ	$L_1 = \langle L, \mathcal{D}_2 = 2\kappa x_1 \partial_1 + \kappa x_2 \partial_2 +$ $+ 2(\kappa + 1) u \partial_u \rangle$
4	u_1^4	$L_1, \mathcal{S}_4 = x_0^2 \partial_0 - \frac{x_2^2}{4} \partial_1 + x_0 x_2 \partial_2 - \frac{x_0 u}{2} \partial_u,$
5	$\ln u_1$	$L, \mathcal{S}_5 = x_0 \partial_1 + u \partial_u,$
6	u_1	см. (2.2.2)

§ 3. Точные решения уравнения коротких волн

В теории коротких волн в газовой динамике используется уравнение [14]

$$2 u_{01} - 2 (x_1 + u_1) u_{11} + u_{22} + 2 k u_1 = 0 \quad (2.3.1)$$

По физическому содержанию параметр k может принимать значения 0 либо 1. При $k = 0$ уравнение (2.3.1) описывает плоскопараллельные волны, а при $k = 1$ - осесимметричные волны.

Уравнение (2.3.1) допускает бесконечномерную группу точечных преобразований [17]:

Для отыскания точных решений уравнения (2.3.1) будем использовать ту же схему, что и для уравнения (2.2.1).

1. Построим решение уравнения (2.3.1), удовлетворяющее дополнительному условию

$$[u_{111} x_1^{\frac{3}{2}}]_1 = 0 \quad (2.3.2)$$

Общее решение (2.3.2) имеет вид

$$u = x_1^{\frac{3}{2}} \varphi^1 + x_1^2 \varphi^2 + x_1 \varphi^3 + \varphi_4, \quad (2.3.3)$$

где $\varphi^i = \varphi^i(x_0, x_2)$ - произвольные дифференцируемые функции; $i = \overline{1, 4}$.

Подставив анзац (2.3.3) в уравнение (2.3.1) и осуществив расщепление по степеням переменной x_1 , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \varphi^3 &= 0, \quad \varphi_{22}^1 = 0, \quad \varphi_{22}^2 = 0, \\ \varphi_{22}^4 &= \frac{9}{4} (\varphi^1)^2, \\ \varphi_0^1 &= \varphi^1 (3 \varphi^2 + \frac{1}{2} - k), \\ \varphi_0^2 &= 2 (\varphi^2)^2 + \varphi^2 (1 - k). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Проинтегрировав систему ДУ (2.3.4) и подставив полученные значения функций φ^i , $i = \overline{1,4}$ в (2.3.3), получим точные решения уравнения (2.3.1). Приведем некоторые решения, соответствующие случаю $\varphi^1 \neq 0$:

$k = 0$:

$$\begin{aligned} u &= x_1^{\frac{3}{2}} e^{-x_0} C x_2 - \frac{x_1^2}{2} + e^{-2x_0} H, \\ u &= x_1^{\frac{3}{2}} e^{\frac{x_0}{2}} C x_2 - e^{-x_0} H, \\ u &= x_1^{\frac{3}{2}} e^{\frac{x_0}{2}} (1 - 2C_1 e^{x_0})^{-\frac{3}{2}} C x_2 + \\ &+ x_1^2 e^{x_0} C_1 (1 - 2C_1 e^{x_0})^{-1} + e^{x_0} (1 - 2C_1 e^{x_0})^{-3} H; \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$k = 1$:

$$\begin{aligned} u &= x_1^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x_0}{2}} C x_2 + e^{-x_0} H, \\ u &= x_1^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{x_0}{2}} (2x_0)^{-\frac{3}{2}} C x_2 - \frac{x_1^2}{2x_0} + e^{-x_0} H. \end{aligned}$$

Здесь C , C_1 - произвольные постоянные;

$H = \frac{C^2}{12} x_2^4 + h^1(x_0)x_2 + h^2(x_0)$; $h^1(x_0)$, $h^2(x_0)$ - произвольные функции от x_0 .

2. Решение уравнения (2.3.1) будем искать с помощью анзаца [8]

$$u = v^1 + v^2 \varphi(u), \quad \omega = v^3 x_1 + v^4, \quad (2.3.6)$$

где φ , $v^i = v^i(x_0, x_2)$ - неизвестные функции; $i = \overline{1,4}$. Отметим, что (2.3.6) является частным случаем более общего анзаца (2.2.26).

Анзац (2.3.6) при $v^2 = \text{const}$, $v^3 = \text{const}$ (не ограничивая общности можно положить $v^2 = v^3 = 1$) приводит уравнение (2.3.1) к виду

$$\begin{aligned} 2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + [2x_1 - v_0^4 - \frac{1}{2} (v_2^4)^2] \ddot{\varphi} - \\ - \dot{\varphi} [2k + v_{22}^4] - v_{22}^1 = 0 \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Требую, чтобы (2.3.7) сводилось к ОДУ для $\varphi(\omega)$, получаем для определения функций v^1 и v^2 систему уравнений

$$\begin{aligned} v_{22}^1 &= \lambda_1, \quad v_{22}^2 = -2k + \lambda_2, \\ v_0^2 + \frac{1}{2} (v_2^2)^2 + v^2 &= \lambda, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

где λ , λ_1 , λ_2 - произвольные постоянные.

При условии (2.3.8) уравнение (2.3.7) принимает вид

$$2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 2\ddot{\varphi}(\omega - \lambda) - \dot{\varphi}\lambda_2 - \lambda_1 = 0 \quad (2.3.9)$$

Система ДУ (2.3.8) имеет следующие решения

$\lambda_2 = 2k$:

$$\begin{aligned} v^1 &= \frac{1}{2} \lambda_1 x_2^2 + h^1(x_0)x_2 + h^2(x_0), \\ v^2 &= \lambda_3 e^{-x_0} x_2 + \frac{1}{2} \lambda_3^2 e^{-2x_0} + \lambda; \end{aligned}$$

$\lambda_2 = 2k - I$:

$$\begin{aligned} v^1 &= \frac{1}{2} \lambda_1 x_2^2 + h^1(x_0)x_2 + h^2(x_0), \\ v^2 &= -\frac{1}{2} x_2^2 + \lambda_3 e^{-x_0} + \lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\lambda = 2k$

$$\omega = x_1 + e^{-x_0} \lambda_3 x_2 + \frac{1}{2} \lambda_3^2 e^{-2x_0} + \lambda, \quad (2.3.10)$$

а при $\lambda_2 = 2k - I$

$$\omega = x_1 - \frac{x_2^2}{2} + \lambda_3 e^{-x_0} + \lambda. \quad (2.3.11)$$

Решения уравнения (2.3.9) представляются в следующем параметрическом виде

$$\lambda_2 = 0:$$

$$\varphi = \lambda_4 \exp\left\{\frac{2}{\lambda_1} t\right\} (2\lambda_1^{-1} t - 1) - \frac{1}{2}(t + \lambda_5 + \frac{\lambda_1^2}{2} - \lambda\lambda_1), \quad (2.3.12)$$

$$\omega = 2\lambda_4 \lambda_1^{-1} \exp t - t + \lambda - \lambda_1;$$

$$\lambda_2 = -1:$$

$$\varphi = (-t + \lambda_1)^{-2} \left[\lambda_4 (2t - \lambda_1) - \frac{t^4}{3} + \frac{2}{3} \lambda_1 t^3 - t^2 (\lambda_2 + \lambda \lambda_1) \right], \quad (2.3.13)$$

$$\omega = (-t + \lambda_1)^{-2} \left[\lambda_4 - \frac{2}{3} t^3 + t^2 (\lambda + \lambda_1) - 2\lambda \lambda_1 t - \lambda_1 \lambda_5 \right];$$

$$\lambda_2 = 2:$$

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{1}{4} [t^2 (16\lambda_4 - 1) + \lambda_1 t - 4\lambda_1 \lambda_4 - \lambda_1 \lambda - \lambda_5] + \\ & + \frac{1}{2} (4t^2 - \lambda_1^2) \ln(2t + \lambda_1), \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

$$\omega = t(8\lambda_4 - 1) + \frac{1}{2} (2t + \lambda_1) \ln(2t + \lambda_1) + \lambda + 4\lambda_1 \lambda_4;$$

$$\lambda_2 = 1:$$

$$\varphi = \lambda_4 (t + \lambda_1)^2 (2t - \lambda_1) - t^2 + \frac{1}{3} (\lambda_1^2 - \lambda \lambda_1 - \lambda_5), \quad (2.3.15)$$

$$\omega = 3\lambda_4 (t + \lambda_1)^2 - 2t + \lambda - \lambda_1.$$

Подставив (2.3.10) - (2.3.15) в (2.3.6), получим точные решения уравнения (2.3.1).

3. Положим $\hat{K} = 0$. Решение уравнения (2.3.1) ищем с помощью анзаца

$$u = -\frac{x_1^2}{2} - 2\varphi(x_0, \omega), \quad \omega = x_1 + \sqrt{2}x_2 \quad (2.3.16)$$

Анзац (2.3.16) редуцирует (2.3.1) к уравнению

$$\varphi_{0\omega} + 2\varphi_{\omega} \varphi_{\omega\omega} + \varphi_{\omega\omega} + \varphi_{\omega} = 0 \quad (2.3.17)$$

Интегрируя (2.3.17) по переменной ω , получим уравнение типа

Гамильтона-Якоби

$$\varphi_0 + \varphi_\omega^2 + \varphi_\omega + \varphi = 0 \quad (2.3.18)$$

изучим лиевскую и Q -условную симметрию уравнения (2.3.18).

Теорема 2.3.1. МАИ уравнения (2.3.18) является 10-мерная алгебра Ли с базисными элементами

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \partial_0, \quad \chi_2 = \partial_\omega, \quad \chi_3 = e^{-x_0} \partial_\varphi, \\ \chi_4 &= (\omega - x_0) \partial_\omega + 2\varphi \partial_\varphi, \quad \chi_5 = e^{-x_0} [2\partial_\omega - (\omega - x_0) \partial_\varphi], \\ \chi_6 &= e^{x_0} [\partial_0 + \partial_\omega - \varphi \partial_\varphi], \\ \chi_7 &= (\omega - x_0) \partial_0 + [2\varphi - \frac{1}{2}(\omega - x_0)^2] \partial_\omega - \\ &\quad - 2\varphi(\omega - x_0 + 1) \partial_\varphi, \\ \chi_8 &= e^{-x_0} [-\partial_0 + (\omega - x_0) \partial_\omega + (\varphi - \frac{1}{2}(\omega - x_0) - \\ &\quad - \frac{1}{4}(\omega - x_0)^2) \partial_\varphi], \\ \chi_9 &= e^{x_0} [(\omega - x_0) \partial_0 + (\omega - x_0 + 2\varphi) \partial_\omega - (\omega - x_0) \varphi \partial_\varphi], \\ \chi_{10} &= e^{x_0} [\frac{1}{2}(\omega - x_0)^2 \partial_0 + (\frac{1}{2}(\omega - x_0)^2 + 2\varphi(\omega - x_0)) \partial_\omega + \\ &\quad + [2\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi(\omega - x_0)^2] \partial_\varphi. \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

Поскольку МАИ уравнения

$$u_\tau + \frac{1}{2} u_x^2 = 0 \quad (2.3.20)$$

также десятимерна, то возникает вопрос: не связаны ли уравнения (2.3.18) и (2.3.20) локальными преобразованиями. Положительный ответ на этот вопрос дает теорема.

Теорема 2.3.2. Уравнение (2.3.18) при помощи замены

$$x = \omega - x_0, \quad \tau = -e^{-x_0}, \quad \varphi = e^{-x_0} u$$

сводится к уравнению (2.3.20).

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

Теорема 2.3.3. Уравнение (2.3.18) Q - условно инвариантно относительно операторов

$$Q = \partial_\omega + c(x_0, \omega, \varphi) \partial_\varphi, \quad (2.3.21)$$

если функция C удовлетворяет следующему уравнению

$$\Phi(x_0 + \ln c, \omega + 2c + \ln c, \frac{\varphi}{c} + c) = 0 \quad (2.3.22)$$

Построим несколько решений уравнения (2.3.1), используя оператор (2.3.21):

а) Пусть (2.3.22) задается соотношением

$$e^{2x_0} c^2 = 2c + \omega - x_0.$$

Тогда оператор (2.3.21) имеет вид

$$Q = e^{2x_0} \partial_\omega + [1 + \sqrt{1 + e^{2x_0}} (\omega - x_0)] \partial_\varphi. \quad (2.3.23)$$

Используя (2.3.23), строим анзац

$$\varphi = \omega e^{-2x_0} + \frac{2}{3} (1 + e^{2x_0} (\omega - x_0))^{\frac{3}{2}} + \varphi^1(x_0), \quad (2.3.24)$$

который редуцирует (2.3.18) к уравнению

$$\dot{\varphi} + \varphi^1 = e^{-2x_0} (x_0 - 1) - e^{-4x_0}; \quad (2.3.25)$$

б) Пусть (2.3.22) имеет вид

$$2e^{\frac{x_0}{2}} \sqrt{c} = c + \frac{1}{2} (\omega - x_0).$$

В этом случае

$$Q = \partial_\omega + [2e^{x_0} + \frac{x_0 - \omega}{2} + 2e^{\frac{x_0}{2}} (e^{x_0} + \frac{x_0 - \omega}{2})^{\frac{1}{2}}] \partial_\varphi, \quad (2.3.26)$$

которому соответствует анзац

$$\varphi = (2e^{x_0} + \frac{x_0}{2})\omega - \frac{\omega^2}{4} - \frac{8}{3}e^{\frac{x_0}{2}}(e^{x_0} + \frac{x_0 - \omega}{2})^{\frac{3}{2}} + \varphi'(x_0) \quad (2.3.27)$$

редуцирующий уравнение (2.3.18) к уравнению

$$\dot{\varphi} + \varphi' + 2e^{x_0}(1 + 2x_0) + 8e^{2x_0} + \frac{x_0^2}{4} + \frac{x_0}{2} = 0 \quad (2.3.28)$$

Решая (2.3.25), (2.3.28), по формулам (2.3.24), (2.3.27), (2.3.16) получаем точные решения уравнения (2.3.1) при $\kappa = 0$:

$$u = -\frac{x_1^2}{2} - 2[(x_1 + \sqrt{2}x_2)e^{-2x_0} + \frac{2}{3}(1 + e^{2x_0}(x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_0))^{\frac{3}{2}}e^{-4x_0} + \lambda e^{-x_0} + \frac{1}{3}e^{-4x_0} - x_0 e^{-2x_0}],$$

$$u = -\frac{x_1^2}{2} - 2[(2e^{x_0} + \frac{x_0}{2})(x_1 + \sqrt{2}x_2) - \frac{(x_1 + \sqrt{2}x_2)^2}{4} - \frac{8}{3}e^{\frac{x_0}{2}}(e^{x_0} + \frac{1}{2}(x_0 - x_1 - \sqrt{2}x_2))^{\frac{3}{2}} + \lambda e^{-x_0} - 2x_0 e^{x_0} - \frac{8}{3}e^{2x_0} - \frac{x_0^2}{4}].$$

§ 4. Симметрия и точные решения уравнения ударных волн в вязком теплопроводном газе

Рассмотрим уравнение [16]

$$u_0 + \frac{n}{2} \frac{u}{x_0} + \lambda_1 u u_1 - \lambda_2 u_{11} - \lambda_3 u_1^2 = 0, \quad (2.4.1)$$

описывающее нестационарные ударные волны умеренной интенсивности в вязком теплопроводном газе. Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - произвольные постоянные. Параметр n может принимать значения 0, 1, 2. При $n=0$ уравнение (2.4.1) описывает плоские волны, при $n=1$ - цилиндрические волны, а при $n=2$ - сферические волны.

С помощью замены

$$u \rightarrow u \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \quad x_0 \rightarrow x_0 \frac{1}{\lambda_2}, \quad x_1 \rightarrow x_1 \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2}$$

(2.4.1) преобразуется в уравнение

$$u_0 + \frac{n}{2} \frac{u}{x_0} + u u_1 + u_{11} - u_1^2 = 0. \quad (2.4.2)$$

В этом параграфе изучим лиевскую и Q -условную симметрию уравнения (2.4.2), построим его точные решения.

Теорема 2.4.1. МАИ уравнения (2.4.2) является алгебра Ли, базисные элементы которой имеют вид:

$$\begin{aligned} n=0: \quad P_0 &= \partial_0, \quad P_1 = \partial_1, \quad X_1 = x_0 \partial_1 + \partial_u; \\ n=1: \quad P_1, \quad X_2 &= 2x_0^{\frac{1}{2}} \partial_1 + x_0^{-\frac{1}{2}} \partial_u; \\ n=2: \quad P_1, \quad X_3 &= \ln x_0 \partial_1 + x_0^{-1} \partial_u. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Доказательство теоремы 2.4.1 проводится методом Ли [20].

Теорема 2.4.2. Уравнение (2.4.2) Q -условно инвариантно относительно операторов

$$Q = \partial_1 + C(x_0, x_1, u) \partial_u, \quad (2.4.4)$$

если функция $C(x_0, x_1, u)$ удовлетворяет уравнению

$$C_0 + \frac{n}{2x_0} (C - u C_u) + C^2 (1 - C_{uu} - C_u) + \\ + u C_1 - C_{11} - 2 C_1 u C - 2 C C_1 = 0 \quad (2.4.5)$$

Общее решение (2.4.5), видимо, трудно найти. Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть $C_1 = C_0 = 0, n = 0$. Тогда (2.4.5) имеет вид:

$$C_{uu} + C_u = 1 \quad (2.4.6)$$

Решая уравнение (2.4.6), получаем оператор

$$Q = \partial_1 + (e^{-u} + u) \partial_u \quad (2.4.7)$$

2. Пусть $C = \alpha(x_1)u + \beta(x_0)$. В этом случае (2.4.5) распадается на систему уравнений

$$\alpha_1 + \alpha^2 = \alpha(2\alpha_1 + \alpha^2), \\ 2\beta(1 - \alpha - \alpha_1) = \alpha_{11} + 2\alpha\alpha_1, \quad (2.4.8)$$

$$\beta_0 + \frac{n\beta}{x_0} + \beta^2(1 - \alpha) = 0$$

Частное решение (2.4.8)

$$\alpha = 1, \quad \beta = x_0^{-\frac{n}{2}}$$

дает оператор

$$Q = \partial_1 + [u + x_0^{-\frac{n}{2}}] \partial_u \quad (2.4.9)$$

Если в (2.4.8) положить $\alpha = 0$, то получим уже известные операторы $X_1 - X_3$.

С помощью операторов (2.4.3), (2.4.7), (2.4.9) строим анзацы:

$n=0$:

$$u = \frac{x_1}{x_0} + \varphi(x_0),$$

$$u = x_0 + \varphi(x_1 - \frac{x_0^2}{2}),$$

$$\int \frac{du}{e^{-u} + u} - x_1 + \varphi(x_0) = 0, \quad (2.4.10)$$

$n=1$:

$$u = \frac{x_1}{2x_0} + \varphi(x_0),$$

$n=2$:

$$u = \frac{x_1}{x_0 \ln x_0} + \varphi(x_0),$$

$$n=0, 1, 2: u = e^{x_1} \varphi(x_0) + x_0^{-\frac{n}{2}},$$

которые редуцируют уравнение (2.4.2) к ОДУ

$$n=0: x_0 \dot{\varphi} + \varphi = x_0^{-1},$$

$$\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 - \varphi \dot{\varphi} = 1,$$

$$\dot{\varphi} = 0,$$

$$n=1: \dot{\varphi} x_0 + \varphi = \frac{1}{4} x_0^{-1} \quad (2.4.11)$$

$$n=2: \dot{\varphi} + \varphi \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} = (x_0 \ln x_0)^{-2},$$

$$n=0, 1, 2: \dot{\varphi} + \varphi \left[\frac{n}{2x_0} + x_0^{-\frac{n}{2}} - 1 \right] = 0.$$

Решая (2.4.11), по формулам (2.4.10) получаем точные решения уравнения (2.4.2):

$n=0$:

$$u = \frac{x_1}{x_0} + \frac{\ln x_0}{x_0},$$

$$\int \frac{du}{e^{-u} + u} = x_1 + x_0,$$

$$n=1: \quad u = \frac{x_1}{2x_0} + \frac{\ln x_0}{4x_0},$$

$$n=0, 1: \quad u = x_0^{-\frac{n}{2}} \left[1 + C_1 \exp \left\{ x_1 + x_0 - \frac{2}{2-n} x_0^{\frac{2-n}{2}} \right\} \right],$$

$$n=2: \quad u = x_0^{-1} + C_1 x_0^{-2} \exp \{ x_1 + x_0 \}.$$

Здесь C_1 - произвольная постоянная.

Выпишем конечные преобразования, порождаемые операторами (2.4.3). Имеем

$$P_0: \quad x'_0 = x_0 + \theta_0, \quad x'_1 = x_1, \quad u' = u;$$

$$P_1: \quad x'_0 = x_0, \quad x'_1 = x_1 + \theta_1, \quad u' = u;$$

$$X_1: \quad x'_0 = x_0, \quad x'_1 = x_1 + x_0 a, \quad u' = u + a;$$

$$X_2: \quad x'_0 = x_0, \quad x'_1 = x_1 + 2x_0^{\frac{1}{2}} a, \quad u' = u + x_0^{-\frac{1}{2}} a;$$

$$X_3: \quad x'_0 = x_0, \quad x'_1 = x_1 + \ln x_0 a, \quad u' = u + x_0^{-1} a.$$

где θ_0, θ_1, a - групповые параметры.

Используя эти преобразования, нетрудно построить соответствующие формулы размножения решений уравнения (2.4.2). Они имеют вид

$$n=0: \quad u = f(x_0 + \theta_0, x_1 + \theta_1 + a(x_0 + \theta_0)),$$

$$n=1: \quad u = f(x_0, x_1 + \theta_1 + 2x_0^{\frac{1}{2}} a) - a x_0^{-\frac{1}{2}},$$

$$n=2: \quad u = f(x_0, x_1 + \ln x_0 a + \theta_1) - x_0^{-1} a,$$

где $f(x_0, x_1)$ - известное решение (2.4.2), u - новое решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении сформулируем основные результаты диссертационной работы.

Проведена групповая классификация по симметриям С. Ли многомерного нелинейного волнового уравнения второго порядка.

Изучена Q -условная симметрия двумерного нелинейного волнового уравнения. Операторы условной симметрии использованы для построения их точных решений. При некоторых нелинейностях получены решения, зависящие от произвольной функции. Это связано с тем, что в этих случаях рассматриваемое уравнение является дифференциальным следствием от некоторого ДУ первого порядка.

Результаты, полученные для двумерного нелинейного волнового уравнения обобщены на многомерный случай. Приведены примеры редукции многомерного нелинейного волнового уравнения к системам, состоящих из двух и трех ДУЧП. Исследована симметрия и построены классы точных решений редуцированных систем. В ряде случаев системы сведены к линейному уравнению Дарбу, которое, в результате разделения переменных, редуцировано к системе, состоящей из уравнения Гельмгольца и уравнения типа Бесселя.

Проведена редукция многомерного нелинейного волнового уравнения к двумерным уравнениям. Изучены симметричные свойства редуцированных уравнений.

Исследована симметрия, проведена редукция и построены точные решения одного нелинейного волнового уравнения четвертого порядка.

Рассмотрена система уравнений, описывающая популяционные процессы в биологии. Система сведена к одному нелинейному уравне-

нию второго порядка. Исследована его Q -условная симметрия и построены некоторые точные решения.

Изучена система уравнений одномерной газовой динамики. С помощью введения потенциала, система, состоящая из трех уравнений, сведена к одному нелинейному волновому уравнению. Условно инвариантные анзацы, полученные для волнового уравнения, использованы для построения нелиевских анзацев, редуцирующих систему уравнений газовой динамики к системам ОДУ. Получены семейства точных решений. Отметим, что некоторые решения содержат произвольные функции.

Построены классы точных решений уравнения околосвукового течения газа. Для этого использованы симметричные и условно инвариантные анзацы. Исследована условная симметрия редуцированного уравнения Гамильтона-Якоби.

Построены семейства точных решений уравнения коротких волн в газовой динамике.

Изучена симметрия и найдены некоторые частные решения уравнения ударных волн в вязком теплопроводном газе.

Важно подчеркнуть, что большинство из полученных условно инвариантных решений исследованных ДУЧП принципиально не могут быть построены в рамках классической теории С.Ли.

Основные результаты диссертации являются новыми и могут быть использованы при решении задач нелинейной акустики, теории колебаний, газовой динамики, биологии и других областей естествознания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Основные типы инвариантных уравнений одномерной газовой динамики.- Москва.- 1988.- 26 с.- Препринт/ АН СССР. ИПМ им. М.В.Келдыша, 49 .
2. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Классификация по точным и приближенным симметриям многомерных волновых уравнений.- Москва.- 1990.- 28 с.- Препринт/ АН СССР. ИПМ им. М.В.Келдыша, 61 .
3. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Приближенный групповой анализ уравнения $u_{tt} - (f(u)u_x)_x + \varepsilon \varphi(u)u_t = 0$.- Москва.- 1988.- 27 с.- Препринт/ АН СССР. ИПМ им. М.В.Келдыша, 68 .
4. Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фушич В.И. Редукция и точные решения уравнения Гамильтона-Якоби.- Киев.- 1990.- 40 с.- Препринт/ АН УССР. Ин-т математики, 90.41 .
5. Биркгоф Г. Гидродинамика.- М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.- 400 с.
6. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных.- М.: Наука, 1981.- 448 с.
7. Богоявленский О.И. Некоторые конструкции интегрируемых динамических систем // Изв. АН СССР, Сер. математ., 1987.- 51.- № 4.- С.737-767.
8. Бурдэ Г.И. Об одном классе решений уравнения пограничного слоя // Изв. АН СССР, Сер. мех. жидк. и газа, 1990.- № 2.- С.45-51.
9. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений.- М.: Наука;

1986.- 336 с.

10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1988.- 512 с.
11. Галактионов В.А., Посашков С.А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // ЖВММФ, 1989.- № 4.- С.497-506.
12. Гудерлей К.Г. Теория околзвуковых течений.- М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.- 421 с.
13. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики.- Новосибирск; Изд-во Новосиб. ун-та, 1972.- 200 с.
14. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике.- М.: Наука, 1983.- 280 с.
15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1976.- 576 с.
16. Макаров С.Н., Смирнов В.Е. Эволюционное уравнение для нестационарных ударных волн умеренной интенсивности в вязком теплопроводном газе // Изв. АН СССР; Сер. мех. жидк. и газа, 1989.- № 5.- С.187-190.
17. Мамонтов Е.В. Некоторые вопросы теории нестационарных околзвуковых течений // Динамика сплошной среды.- 1969.- № 1.- С.61-75.
18. Миронюк П.И. Групповые свойства нелинейного волнового уравнения // Симметрия и решения уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики, 1989.- С.37-39.
19. Назаров В.Е. Удвоение частоты акустической волны на нелинейном слое // Акуст. журн.- 1990.- № 4.- С.708-711.
20. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.- М.: Наука, 1978.- 400 с.

21. Репета В.К. Исследование локальных симметрий дифференциальных уравнений математической физики с помощью ЭВМ // Симметрия и решения уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики, 1989.- С.64-66.
22. Репета В.К. О некоторых условно инвариантных решениях нелинейного волнового уравнения // Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики, 1990.- С.61-64.
23. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике.- М.: Наука, 1978.- 687 с.
24. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики.- М.: Наука, 1975.- 320 с.
25. Рыжов О.С., Христианович С.А. О нелинейном отражении слабых ударных волн // ПММ.- 1958.- 22.- № 5.
26. Серов Н.И. О некоторых условно инвариантных решениях уравнения Борна-Инфельда // Симметрия и решения уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики, 1989.- С.74-76.
27. Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности // Укр. мат. журн.- 1990.- 42.- № 10.- С.1370-1376.
28. Серова М.М. О точных решениях уравнения Дарбу // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике.- Киев: Ин-т математики, 1981.- С.42-44.
29. Сидоров А.Ф., Шалеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложение в газовой динамике.- Новосибирск: Наука, 1984.- 272 с.
30. Сухинин С.В. Групповые свойства и законы сохранения уравне-

ния околзвукowego движения газа // Динамика сплошной среды.
- 1978.- № 37.- С.130-137.

31. Фушич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики, 1987.- С.4-16.
32. Фушич В.И. О дополнительной инвариантности релятивистского уравнения движения // Теорет. и мат. физика.- 1971.- 7.- № 1.
- С.3-12.
33. Фушич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Докл. АН СССР.- 1979.- 246, № 4.- С.846-850.
34. Фушич В.И. О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных // Теоретико-групповые методы в математической физике.- Киев: Ин-т математики, 1978.- С.5-44.
35. Фушич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн.- 1987.- 39, № 1.- С.116-123.
36. Фушич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики.- Киев: Ин-т математики, 1983.- С.4-23.
37. Фушич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике.- Киев: Ин-т математики, 1981.- С.6-28.
38. Фушич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики // Укр. мат. журн.- 1991.- 43.- № 11.- С.1456-1470.

39. Фушич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений.- Киев: Наук. думка, 1991.- 304 с.
40. Фушич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Совместность и решения нелинейных уравнений д Аламбера и Гамильтона.- Киев, 1990.- 65 с.- Препринт/ АН УССР. Ин-т математики; 90.39 .
41. Фушич В.И., Жданов Р.З., Ревенко И.В. Общие решения нелинейного волнового уравнения и уравнения эйконала // Укр. мат. журн.- 1991.- 43.- № 11.- С.1471-1486.
42. Фушич В.И., МIRONЮК П.И. Условная симметрия и точные решения уравнения нелинейной акустики // Докл. АН УССР.- 1991.- № 6.- С.23-29.
43. Фушич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла.- Киев: Наук. думка, 1983.- 199 с.
44. Фушич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики.- М.: Наука, 1990.- 400 с.
45. Фушич В.И., Ревенко И.В., Жданов Р.З. Несимметричный подход к построению точных решений одного нелинейного волнового уравнения // Докл. АН УССР.- 1991.- № 7.- С.15-19.
46. Фушич В.И., Репета В.К. Точные решения некоторых уравнений газовой динамики и нелинейной акустики // Докл. АН УССР.- 1991.- № 8.- С.35-42.
47. Фушич В.И., Репета В.К., Серов Н.И. Условная симметрия, редукция и точные решения нелинейного волнового уравнения // Докл. АН УССР.- 1991.- № 5.- С.29-36.
48. Фушич В.И., Репета В.К., Серов Н.И. Нелиевская симметрия и точные решения одномерных уравнений газовой динамики // Докл. АН Украины.- 1991.- № 11.- С.27-33.

49. Фушич В.И., Серов Н.И. Негрупповая симметрия некоторых нелинейных волновых уравнений // Докл. АН УССР.- 1991.- № 9.- С.45-49.
50. Фушич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР.- 1990.- № 7.- С.24-27.
51. Фушич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения акустики // Докл. АН УССР.- 1988.- № 10.- С.28-33.
52. Фушич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения уравнения Буссинеска // Симметрия и решения уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики, 1989.- С.95-102.
53. Фушич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность нелинейного волнового уравнения // Укр. мат. журн.- 1991.- 43, № 3.- С.394-399.
54. Фушич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР.- 1988.- Сер.А, № 9.- С.17-20.
55. Фушич В.И., Серова М.М. О максимальной группе инвариантности и общем решении одномерных уравнений газовой динамики // Докл. АН СССР.- 1983.- 263, № 5.- С.1102-1104.
56. Фушич В.И., Штеленъ В.М., Серов Н.И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.- Киев: Наук. думка, 1989.- 335 с.
57. Чиркунов Ю.А. О групповых свойствах уравнения Дарбу // Динамика сплошной среды.- 1976.- № 27.- С.101-115.
58. Штеленъ В.М. Некоторые точные решения одной системы дифференциальных уравнений нелинейной волновой механики // Мат. вопросы механики сплошных сред и теплофизики.- Киев: Ин-т

математики, 1982. - С. 100-107.

59. Шульга М.В. Симметрия и некоторые частные решения уравнения Даламбера с нелинейным условием // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики, 1985. - С.36-38.
60. Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering. - N.Y.: Academic Press, vol.1. - 1965. - 511 p., vol.2 - 1972. - 301 p.
61. Ames W.F., Lohner R.J., Adams E. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Nonlinear phenomena in mathematical sciences / Ed. V.Lakshmikanthan, N.Y.: Academic Press. - 1982. - P.1-6.
62. Bluman G.W. and Cole J.D. Similarity methods for differential equations. - Berlin: Springer, 1974. - 332p.
63. Bluman G., Kumei J. On invariance properties of the wave equations//J.Math.Phys. - 1987. - 28, N2. - P.307-318.
64. Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation//J.Math.Phys. - 1989. - 30, N10. - P.2201-2213.
65. Forsyth A.R. Theory of differential equations, - N.Y.: Dover Publication, 1959. - Vol. 5,6. - 478p., 596p.
66. Fushchich W.I. and Shtelen W.M. On approximate symmetry and approximate solutions of nonlinear wave equations with a small parameter//J.Phys.A.:Math.Gen. - 1989. - 22, N16. - L887-890.
67. Fushchich W.I., Tsifra I.M. On reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry//J.Phys.A. - 1987. - 20, N2. - P.45-47.

68. Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. On some exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations. - Minneapolis, 1988. - 5p. - Prepr./Inst. for Mathematics and Applications, University of Minnesota .
69. Levi D., Winternitz P. Nonclassical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation//J.Phys.A. - 1989. - 22. - P.2915-2924.
70. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen: Bd.1-3. Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893.
71. Lin C.C., Reisner E., Tsien H.E. Non-steady motion of a slender body in a compressible fluid//J. of Math. and Phys. - 1948. - 27, N3.
72. Muto V., Holding J., Christiansen P.L., Scott A.C. A soliton model for microwave absorption in DNK//12th IMACS World Congr. Sci.Comput., Paris, July 12-22, 1988, vol.4. - Villeneuve d'Asq, 1988. - P.173-175.
73. Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. N.Y.: Springer, 1986. - 497p.
74. Olver P., Rosenau Ph. The construction of special solutions to partial differential equations//Phys.Lett.A. - 1986. - 114, N3. - P.107-112.
75. Rasclé Michel. The Riemann problem for a nonlinear nonstrictly hyperbolic system arising in biology//Comput. and Math. - 1985. - 11. N 1-3. - P. 223 - 238.