

Полтавський національний технічний університет
імені Юрія Кондратюка

На правах рукопису



ОМЕЛЯН Олександр Миколайович

УДК 517.9

СИМЕТРИЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Дисертація
на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник
доктор фіз.-мат. наук, професор
СЄРОВ Микола Іванович

Полтава – 2010

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	4
ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1	
Огляд літератури за темою дисертації та вибір напрямку досліджень	22
РОЗДІЛ 2	
Ліівська та нелокальна симетрія системи нелінійних рівнянь дифузії	33
2.1. Інваріантність системи нелінійних рівнянь дифузії відносно алгебр Галілея	34
2.2. Нелокальні перетворення системи нелінійних рівнянь дифузії	52
2.3. Нелокальні формули розмноження розв'язків системи нелінійних рівнянь дифузії	59
2.4. Нелокальна редукція системи нелінійних рівнянь дифузії	65

РОЗДІЛ 3

Симетрійна класифікація системи нелінійних рівнянь хемотаксису	77
3.1. Основна алгебра інваріантності та необхідні умови її розширення	78
3.2. Симетрійні властивості у випадку довільної функції $f = \varphi(u^1)$	83
3.3. Симетрійні властивості при $f = \lambda$	86
3.4. Симетрійні властивості при $f = \frac{\lambda}{u^1}$ у випадку довільної λ	100
3.5. Симетрійні властивості при $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$	104
3.6. Інваріантність відносно алгебри Галілея	110
ВИСНОВКИ	115
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	116
ДОДАТКИ	139
А. Доведення теореми 3.7	139
В. Доведення теореми 3.9	153
С. Доведення теореми 3.11	205

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

У формулах індекси, позначені латинськими літерами, змінюються від 1 до n , грецькими — від 0 до n . За індексами, що повторюються, йде сумування. Нижні індекси функцій позначають диференціювання за відповідними змінними.

$\mathbb{R}^n$ — арифметичний дійсний n -вимірний простір.

MAI — максимальна алгебра інваріантності.

$\mathbb{N}, \mathbb{R}$ — множини натуральних та дійсних чисел відповідно.

$\tilde{X}$ — продовження інфінітезимального оператора X .

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \partial_u = \frac{\partial}{\partial u}$ — оператори диференціювання по x_μ та u .

δ_{ab} — символ Кронекера.

$u_{(n)}$ — сукупність всіх похідних функції u по змінній x_1 до порядку n .

ВСТУП

Актуальність теми.

У сучасних наукових дослідженнях вивчення багатьох фізичних, біохімічних, екологічних процесів проводиться на основі аналізу відповідних математичних моделей. Це пов'язано із надзвичайною складністю або взагалі неможливістю відтворення певних процесів у лабораторних умовах. Значну кількість фундаментальних законів природи можна описати диференціальними рівняннями. Тому природно, що в якості математичних моделей як у фізико-хімічних дослідженнях так і при вивченні біологічних процесів та суспільних явищ часто використовуються диференціальні рівняння або їх системи.

Яскраве підтвердження цієї думки можна знайти в роботах І.О. Луковського ([39], [41], [45], [46], [47], [48], [55]), О.Я. Савченка ([15], [21], [79], [80]), М.І. Портенка [74]. Зокрема, І.О. Луковський створив нелінійні математичні моделі динаміки твердих і деформованих тіл із порожнинами, частково заповненими рідиною, що дало змогу для вивчення проблем динаміки ракет побудувати ефективні скінченновимірні математичні моделі у вигляді систем диференціальних рівнянь. О.Я. Савченко працює над математичним моделюванням реальних механічних процесів з використанням моделі систем зв'язаних твердих тіл з рухливими наповнювачами. Розробкою методів побудови і дослідження математичних моделей дифузії в середовищах із напівпрозорими мембранами займається М.І. Портенко.

Зрозуміло, що явища, яким притаманна інваріантність відносно певних перетворень простору, або які задовольняють певним законам збереження чи принципам відносності, повинні описуватися математичними моделями із аналогічними характеристиками. Ці особливості математичних моделей часто означають володіння відповідних диференціальних рівнянь широким класом лівських симетрій. Так, класичні рівняння математичної фізики, наприклад, рівняння Ньютона, Лапласа, Д'Аламбера, Шредінгера, Ліу-

вілля, Дірака, Максвелла і т.д., інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень.

В процесі створення теорії диференціальних рівнянь було розроблено цілу низку методів розв'язування диференціальних рівнянь, серед яких: метод відокремлення змінних, метод спеціальних підстановок, метод варіації, метод Ейлера, метод Даламбера, метод характеристик (Монжа), метод каскадів (Лапласа), метод Пуасона, метод розвинення в ряди Фур'є, метод спуску Адамара, метод оберненої задачі теорії розсіяння, над сучасним розвитком якого плідно працюють Ю.М. Березанський ([7], [8], [9], [10]), Л.П. Нижник ([56], [57], [58], [59]), та в розвитку якого важливу роль відіграли роботи Є.Д. Білоколоса [6], В.А. Марченка [51]. Серед нещодавно створених методів слід відзначити числово-аналітичний метод послідовних наближень А.М. Самойленка ([50], [53], [54], [77], [78], [81], [82]); варіаційні методи розв'язування лінійних та нелінійних крайових задач гідродинаміки, розроблені І.О. Луковським ([40], [42], [43], [44]); алгоритми наближеного розв'язку широкого класу диференціальних рівнянь з імпульсною дією, розроблені М.О. Перестюком ([17], [70], [71]); асимптотичні методи аналізу стохастичних диференціальних рівнянь, розвинуті М.І. Портенком ([2], [75], [76]); чисельно-аналітичний метод для знаходження розв'язку задачі Коші для абстрактних диференціальних рівнянь першого та другого порядків з необмеженими операторними коефіцієнтами, розроблений В.Л. Макаровим ([38], [49]).

Особливе місце серед методів розв'язування диференціальних рівнянь належить методу Лі, оскільки значна кількість названих методів явно чи неявно спирається на симетрійні властивості відповідних диференціальних рівнянь. Застосувавши теорію неперервних груп до диференціальних рівнянь, С. Лі встановив, що існуючі на той час спеціальні методи інтегрування диференціальних рівнянь є проявами загальної процедури інтегрування, яка базується на інваріантності диференціальних рівнянь відносно деякої неперервної групи симетрій. У своїх роботах ([155], [156], [157], [158], [159], [160]), опублікованих в 1881 - 1895 р., С. Лі сформулював основні принципи та заклав основи нової галузі математики, яка в сучасній науці має назву

груповий аналіз диференціальних рівнянь.

Починаючи із середини ХХ століття, коли епіцентр наукових відкриттів змістився із площини експериментальної в площину теоретичних досліджень, груповий аналіз все глибше проникає в різні галузі науки і охоплює все більше напрямків передових наукових досліджень. Зараз загальнови-знаним є факт, що групи, алгебри Лі та їх зображення відіграють важливу роль у математиці, фізиці, механіці. Сфера можливих застосувань групового аналізу надзвичайно різноманітна і включає в себе механіку рідини та газів, нелінійну теорію пружності та пластичності твердих тіл, нелінійну акустику, теорію фазових переходів, магнітну гідродинаміку, теорію гравітації, та інші нелінійні польові теорії (калібровочні та кіральні поля, струнні теорії і т.ін.), хімію (хроматографію і електрофорез), біологію та деякі інші галузі науки.

До цього часу наріжним каменем групового аналізу залишається метод Лі. Серед численних переваг методу Лі слід виділити кілька найсуттєвіших. Зокрема, це можливість побудови класів точних розв'язків диференціальних рівнянь, що відіграють роль математичних моделей, в аналітичній формі. Крім того, поняття симетрії застосовується як основний принцип побудови математичних моделей у сучасних фізико-хімічних дослідженнях. Адже, з одного боку, груповий аналіз вже відомих моделей дозволяє відбирати серед них такі, що, задовольнивши певні принципи відносності чи закони збереження, краще підходять для опису конкретного явища. З іншого боку, методи групового аналізу дозволяють будувати математичні моделі з наперед заданими властивостями.

В основу свого методу С. Лі заклав кілька фундаментальних принципів та ідей. Зокрема, фундаментальним є відкриття, що складні нелінійні умови інваріантності диференціальних рівнянь відносно перетворень із групи, можна у випадку неперервних груп замінити еквівалентними, але більш простими лінійними умовами, котрі відображують "інфінітезимальну інваріантність" диференціальних рівнянь відносно складових цієї групи. Майже для кожної, важливої з точки зору фізики, системи диференціальних рівнянь ці умови інфінітезимальної симетрії — так звані визначальні рівняння

повної групи симетрії системи — можна розв'язати в замкненому вигляді, і, таким чином, найбільш загальна група неперервних точкових симетрій системи може бути визначена явно. При знаходженні точних розв'язків одним з ефективних інструментів методу С. Лі є редукція багатовимірного диференціального рівняння з частинними похідними до диференціальних рівнянь із меншою кількістю незалежних змінних за допомогою спеціальних підстановок — анзаців. Іншим засобом знаходження розв'язків є побудова формул розмноження розв'язків на основі знайдених перетворень інваріантності. Якщо відомі деякі розв'язки диференціального рівняння, то за допомогою формул розмноження можна отримувати багатопараметричні сім'ї розв'язків цього рівняння, які залежать від параметрів перетворень інваріантності.

Сучасне викладення теорії Лі та її застосувань для дослідження диференціальних рівнянь подано в монографіях ([20], [27], [28], [30], [61], [62], [63], [98], [117], [137]). Ідеї Лі знайшли багатьох послідовників. Так, в 1905 р. Пункаре застосував теоретико-груповий підхід для дослідження системи рівнянь Максвелла. Для одержання точних розв'язків (функціонально-інваріантних) лінійного хвильового рівняння ефективно використав його симетрію Г. Бейтман [115]. Над побудовою та застосуваннями таких розв'язків лінійного хвильового рівняння працювали В.І. Смірнов та С.Л. Соболев (1932 р.). В Києві над застосуваннями груп Лі до диференціальних рівнянь розпочинали працювати В.П. Єрмаков (1890-1900 рр.), Г.В. Пфейфер (1920-1935 рр.), М.К. Куренський (1930 р.). Після тривалого періоду забуття, коли більше приділялось уваги геометричним застосуванням груп Лі, увагу до застосувань груп Лі до диференціальних рівнянь механіки рідини, привернув Г. Біркгоф [11].

У подальшому над розвитком ідей С. Лі працював Л.В. Овсянніков, під керівництвом якого створено теорію інваріантних і частково-інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь та одержані ефектні застосування групового аналізу до газової динаміки та теорії рідини.

В Україні перші роботи з групового аналізу диференціальних рівнянь опубліковано львівським математиком В.Г. Костенком [33]. Вагомий внесок

в сучасний розвиток теорії С. Лі зроблений українською школою теоретико-алгебраїчного аналізу на чолі з її засновником В.І. Фущичем ([72], [83], [93], [94], [96], [98], [105], [107], [134], [139], [163], [166], [204]). Особливих успіхів В.І. Фущич та його учні досягли в напрямку застосування алгебр та груп інваріантності нелінійних диференціальних рівнянь до знаходження їх розв'язків.

Перші застосування теорії Лі – Овсяннікова до квантової теорії поля належать Н.Н. Боголюбову та Д.В. Ширкову (ренормалізаційна група) [12], [13]. Необхідно відзначити важливість результатів, одержаних та відображених в їх працях такими всесвітньо відомими науковцями, як Дж. Блумен та І.Д. Коул ([117], [119]), У. Міллер [52], П. Олвер ([63], [170], [171], [173]), Н.Х. Ібрагімов ([28], [30]), П. Вінтерніц ([142], [176], [178], [184], [201]).

У 80 - х роках ХХ століття, загально-очевидною стала обмеженість класичного підходу Лі, оскільки існували приклади редукцій диференціальних рівнянь, які не можна було одержати в рамках цього підходу. Крім того, при всіх безперечних перевагах класичного підходу Лі знаходження розв'язків диференціальних рівнянь та їх систем, клас розв'язків рівнянь, які можливо побудувати в рамках цього методу, обмежується кількістю операторів симетрії, якими володіє конкретне рівняння або система. Якщо ж рівняння має бідну ліївську симетрію, або не має її взагалі, то застосування цього методу до побудови розв'язків не дає бажаного результату.

Ці та ряд інших проблем стимулювали пошук додаткових підходів до побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Основою ряду з числа таких підходів постає ідея пошуку додаткових (неліївських) операторів симетрії. В рамках цієї ідеї В.І. Фущичем та А.Г. Нікітіним розроблено новий метод дослідження алгебр інваріантності диференціальних рівнянь ([93], [94], [95], [98]). Цей метод суттєво відрізняється від класичного методу С. Лі. Основна відмінність полягає в тому, що базисні елементи алгебри інваріантності відповідних диференціальних рівнянь є, як правило, інтегродиференціальними (псевдодиференціальними) операторами. За допомогою даного методу виявлені нові, раніше невідомі, симетрії багатьох диференціальних рівнянь з частинними похідними: Ді-

рака, Максвела [98], Ламе та інші. Цей метод згодом одержав назву нелінійського методу дослідження симетрійних властивостей диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Інший напрям реалізації ідеї пошуку додаткових (нелінійських) операторів симетрії започаткували у 1969 р. Дж. Блумен та І.Д. Коул, які в роботі [116] ввели поняття неklasичної симетрії. Це дозволило знаходити оператори інваріантності диференціальних рівнянь, відмінні від операторів С. Лі. Цей напрям розвивали в своїх роботах П. Олвер та П. Розено [173], [175]. В 80 - х роках ХХ століття Н.Х. Ібрагімов та Р.Л. Андерсон відкрили узагальнені симетрії диференціальних рівнянь, які отримали назву груп Лі – Беклунда [111]. На відміну від теорії Лі простір "нелінійних представлень" групи стає нескінченновимірним і містить в якості локальних координат похідні від незалежних змінних будь-якого порядку. Завдяки такому узагальненню простору зображень стає можливим алгоритмічно встановлювати "приховані" симетрії у квантовій механіці. Як приклад можна навести $O(4)$ -симетрію атому водню, раніше відкриту В.А. Фоком лише випадково.

В Україні над дослідженням неklasичних симетрій працювали В.І. Фушчич, А.Г. Нікітін, І.М. Цифра ([94], [95], [98], [139]). Дослідження в цьому напрямку плідно проводили Р.З. Жданов, Р.О. Попович, В.І. Чопик, М.І. Серов, Р.М. Черніга. Їх результатом став метод умовної симетрії, за допомогою якого вдалося одержати додаткові оператори симетрії, що значно розширило можливості пошуку класів розв'язків диференціальних рівнянь. Ці дослідження знайшли відображення в роботах ([96], [98], [99], [101], [102], [106]).

Інший напрям розв'язання проблеми пошуку додаткових симетрій і розв'язків рівнянь, які не одержуються класичним лінійським методом, запропонований в роботах В.І. Фушчича та В.А. Тичиніна ([103], [104], [136], [140], [199]), присвячених використанню скінченних нелокальних перетворень змінних. В 1990 р. J. King в своїй роботі [150] показав, що перетворення годографа разом з деякими нелокальними замінами перетворює нелінійне рівняння теплопровідності до рівняння того ж самого типу. Цей факт у роботі [136] використаний для встановлення: 1) вигляду нелінійності, при

якому рівняння лінеаризується; 2) для побудови нелокальних анзаців; 3) для одержання нелінійного принципу суперпозиції розв'язків; 4) для знаходження нелокальних формул розмноження розв'язків даного рівняння.

З наведеного вище стає очевидно, що однією з центральних проблем сучасного теоретико-групового аналізу диференціальних рівнянь є розробка ефективних алгоритмів побудови широких класів точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь.

Дослідженню симетрійних властивостей систем нелінійних рівнянь параболічного типу та пошуку додаткових можливостей для побудови їх розв'язків і присвячена дана робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана згідно з загальним планом досліджень кафедри вищої математики Полтавського національного технічного університету ім. Юрія Кондратюка.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є застосування лівського методу до групової класифікації системи нелінійних рівнянь реакції дифузії та системи нелінійних рівнянь хемотаксису, а також застосування нелокальних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь дифузії для лінеаризації, побудови нелокальних анзаців та нелокальних формул розмноження розв'язків даної системи.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є системи нелінійних рівнянь дифузії та реакції дифузії, зокрема, система нелінійних рівнянь хемотаксису.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є класифікація лівських симетрій систем нелінійних рівнянь реакції дифузії, знаходження їх точних розв'язків а також знаходження нелокальних анзаців та нелокальних формул розмноження розв'язків на основі нелокальних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь дифузії.

Методи дослідження. Коротко сформулюємо основні поняття та визначення, що використовуються в дисертаційній роботі.

Розглядаємо клас систем диференціальних рівнянь з частинними похідними m – го порядку

$$S(x, u_{(m)}, F_{(s)}) = 0, \quad (0.1)$$

де $S \in R^k$, $x = (x_0, \vec{x}) \in R^{1+n}$, $u = u(x) \in R^k$, $F = F(x, u_{(r)}) \in R^l$ – довільні гладкі функції, $u_{(r)} = (u, u_1, \dots, u_r)$, u_r – сукупність всеможливих похідних r – го порядку функцій u за змінними x , $F_{(s)} = (F, F_1, \dots, F_s)$, F_s – сукупність всеможливих похідних s – го порядку функцій F за змінними $y = (x, u_{(r)})$.

Наведемо основні поняття методу С. Лі згідно [61], [63].

Означення 0.1. Група Лі локальних перетворень вигляду

$$\tilde{x} = f(x, u, \theta), \quad \tilde{u} = g(x, u, \theta), \quad (0.2)$$

де θ – довільні параметри, $\theta \in R^l$, називається l -параметричною групою точкових симетрій рівняння (0.1), якщо множина розв'язків (0.1) інваріантна відносно перетворень (0.2).

Означення 0.2. Алгеброю Лі групи (0.2) називається лінійний векторний простір, базисом якого є диференціальні оператори першого порядку $X_b = \xi^b(x, u)\partial_x + \eta^b(x, u)\partial_u$, де $\xi^b = \left. \frac{\partial f^b}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}$, $\eta^b = \left. \frac{\partial g^b}{\partial \theta} \right|_{\theta=0}$ зі стандартною операцією комутування.

Між групами Лі перетворень (0.2) і алгебрами Лі існує взаємнооднозначна відповідність (перша теорема Лі). Щоб відновити групу Лі по її алгебрі Лі, необхідно розв'язати наступну задачу Коші (систему рівнянь Лі):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \xi(f, g), \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \eta(f, g), \\ f \Big|_{\theta=0} &= x, \quad g \Big|_{\theta=0} = u. \end{aligned} \quad (0.3)$$

Сформулюємо алгоритм Лі знаходження алгебри інваріантності системи рівнянь (0.1).

Теорема 0.1. *Диференціальний оператор*

$$X = \xi(x, u)\partial_x + \eta(x, u)\partial_u \quad (0.4)$$

є оператором інваріантності системи (0.1) тоді і тільки тоді, коли

$$\tilde{X}S(x, u_{(m)}) \Big|_{S=0} \equiv 0, \quad (0.5)$$

де

$$\tilde{X} = X + \eta_1 \partial_{u_1} + \eta_2 \partial_{u_2} + \dots + \eta_k \partial_{u_k} + \dots, \quad (0.6)$$

причому

$$\eta_k = D \eta_{k-1} - u_k D \xi,$$

$$D = \partial_x + u_1 \partial_u + u_2 \partial_{u_1} + \dots + u_k \partial_{u_{k-1}} + \dots$$

Записавши (0.5) в розгорнутому вигляді, після розщеплення по похідних, отримуємо систему лінійних рівнянь з частинними похідними відносно координат ξ, η оператора X (систему визначальних рівнянь), загальний розв'язок якої визначає максимальну в розумінні Лі алгебру інваріантності рівняння (0.1). Використовуючи формули (0.3), можна визначити локальні групи Лі, що відповідають даній алгебрі.

Використовуючи поняття інваріантності, можна побудувати широкі класи інваріантних розв'язків (алгоритм редукції та знаходження розв'язків див. детальніше [61], [63], [137]).

Розглядаємо клас систем диференціальних рівнянь вигляду (0.1).

Означення 0.3. [163]. *Перетворення вигляду*

$$\tilde{x} = f(x, u, \theta), \quad \tilde{u} = g(x, u, \theta), \quad \tilde{F} = \Phi(x, u, F, \theta), \quad (0.7)$$

де θ — довільні параметри, $\theta \in R^l$, називаються перетвореннями еквівалентності системи (0.1), якщо дія перетворень (0.7) перетворює систему (0.1) в іншу систему S' , яка належить до того ж класу систем, що й система (0.1).

Нехай, функції F задовольняють деякі додаткові умови

$$Q(x, u_{(m)}, F_{(q)}(x, u_{(m)})) = 0, \quad Q \in R^r. \quad (0.8)$$

Ці умови складаються з r диференціальних рівнянь для функцій F , де $F_{(q)}(x, u_{(m)})$ — множина всіх частинних похідних функцій F порядку не вище q .

Позначимо кожний клас систем рівнянь вигляду (0.1), в якому функції F задовольняють умові (0.8), як $S|_Q$.

Кожній однопараметричній групі локальних точкових перетворень, що залишає систему $S|_Q$ інваріантною, відповідає інфінітезимальний оператор (0.6). Повний набір таких груп генерує **основну групу** $G^{max} = G^{max}(S|_Q)$ з відповідною алгеброю Лі $A^{max} = A^{max}(S|_Q)$ інфінітезимальних операторів системи $S|_Q$.

Ядром основних груп назовемо групу:

$$G^{ker} = G^{ker}(S|_Q) = \bigcap_{Q=0} G^{max}(S|_Q)$$

з відповідною алгеброю Лі

$$A^{ker} = A^{ker}(S|_Q) = \bigcap_{Q=0} A^{max}(S|_Q).$$

Групу перетворень вигляду (0.7) системи (0.1) позначимо $G^{equiv} = G^{equiv}(S|_Q)$.

Тоді задача групової класифікації системи (0.1) полягає у знаходженні всіх нееквівалентних випадків розширення A^{ker} , тобто у знаходженні всіх G^{equiv} - нееквівалентних виглядів функцій F , які задовольняють рівняння (0.8) і умову $A^{max}(S|_Q) \neq A^{ker}$.

Повна група еквівалентності G^{equiv} класу систем $S|_Q$ складається з групи неперервних перетворень еквівалентності G_{cont}^{equiv} та з групи точкових перетворень еквівалентності G_{point}^{equiv} .

Детальніше зупинимось на відшуванні групи неперервних перетворень еквівалентності G_{cont}^{equiv} .

Для відшукування G_{cont}^{equiv} можна застосувати інфінітезимальний підхід, згідно якого G_{cont}^{equiv} породжується інфінітезимальним оператором еквівалентності, який шукатимемо у вигляді

$$E = \xi(x, u)\partial_x + \eta(x, u)\partial_u + \zeta(x, u_{(m)}, F)\partial_F. \quad (0.9)$$

Умову еквівалентності системи $S|_Q$ відносно перетворень, породжених оператором еквівалентності E , можна записати у вигляді

$$\tilde{E}S \Big|_{\substack{S=0, \\ Q=0}} = 0, \quad \tilde{E}Q \Big|_{\substack{S=0, \\ Q=0}} = 0, \quad (0.10)$$

де $\tilde{E}$ — продовження оператора E , яке визначається за правилом:

$$\tilde{E} = E + \eta_1 \partial_{u_1} + \zeta_1 \partial_{F_1} + \eta_2 \partial_{u_2} + \zeta_2 \partial_{F_2} + \dots + \eta_k \partial_{u_k} + \zeta_k \partial_{F_k} + \dots, \quad (0.11)$$

$$\zeta_k = \mathcal{D} \zeta_{k-1} - F_k \mathcal{D} \chi,$$

$$\mathcal{D} = \partial_y + F_1 \partial_{F_1} + F_2 \partial_{F_2} + \dots + F_k \partial_{F_{k-1}} + \dots,$$

$$y = (x, u_{(m)}), \quad \chi = (\xi, \eta_{(m)}), \quad \eta_{(m)} = (\eta, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m).$$

Розщепивши по похідних функцій u умови еквівалентності (0.10), одержуємо систему визначальних рівнянь, загальний розв'язок якої визначає координати оператора еквівалентності E .

Коли координати оператора E встановлені, перетворення еквівалентності можна визначити, розв'язавши наступну задачу Коші (систему рівнянь типу Лі):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \xi(f, g), \quad \frac{\partial g}{\partial \theta} = \eta(f, g), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \zeta(f, g, \Phi), \\ f \Big|_{\theta=0} &= x, \quad g \Big|_{\theta=0} = u, \quad \Phi \Big|_{\theta=0} = F. \end{aligned} \quad (0.12)$$

На алгоритм Лі та алгоритм знаходження перетворень еквівалентності, описані вище, спирається доведення ряду основних результатів даної дисертаційної роботи.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

1. Досліджено Галілеївську інваріантність системи нелінійних рівнянь дифузії та системи нелінійних рівнянь реакції дифузії.
2. Знайдено нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь дифузії.
3. Встановлено вигляд системи нелінійних рівнянь дифузії, яка лінеаризується дією нелокальних перетворень еквівалентності.
4. За допомогою нелокальних перетворень еквівалентності знайдено нелокальні формули розмноження розв'язків для системи нелінійних рівнянь дифузії.
5. Проведено симетрійну редукцію та знайдено точні розв'язки Галілеївськи-інваріантної системи нелінійних рівнянь дифузії.
6. Знайдено нелокальні анзаци, які редукують систему нелінійних рівнянь дифузії до системи звичайних диференціальних рівнянь.
7. Досліджено повну групу неперервних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь хемотаксису.
8. Проведено повну групову класифікацію системи нелінійних рівнянь хемотаксису.

Практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота носить теоретичний характер. Отримані результати є новими і можуть бути використані при розв'язуванні ряду конкретних задач теорії диференціальних рівнянь, теорії теплопровідності, дифузії, хемотаксису та деяких інших.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану діяльності та постановка задач належать науковому керівнику — М.І. Серову. Доведення всіх результатів дисертації проведено особисто автором.

В роботах, які опубліковано разом з іншими авторами і включено до автореферату, особистий внесок дисертанта такий. У роботі [84] М.І. Серову належить загальна постановка задачі і аналіз отриманих результатів, Р.М. Чернізі належить проведений в роботі аналіз зв'язку з іншими дослідженнями, дисертанту — доведення теорем про лінеаризацію дослідженої системи; в праці [65] проведено симетрійну редукцію та знайдено точні розв'язки системи нелінійних рівнянь дифузії особисто дисертантом; в роботах [67], [85] М.І. Серову належить загальна постановка задачі й уточнення деяких формулювань теорем і тверджень, дисертанту — доведення всіх теорем та розв'язання поставлених задач.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися і обговорювалися на семінарах кафедри вищої математики ПНТУ імені Юрія Кондратюка, на семінарах відділу прикладних досліджень і відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, на IX та X Міжнародній конференції ім. М. Кравчука, (м. Київ, 2002 та 2004), на Всеукраїнському науковому семінарі пам'яті В.І. Фущича, на II Міжнародній конференції молодих вчених з диференціальних рівнянь та їх застосувань імені Я.Б. Лопатинського (м. Донецьк, 11-14 листопада 2008), на Українському математичному конгресі (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова) 27–29 серпня 2009 р., м. Київ, Інститут математики НАН України.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано у десяти роботах [64], [65], [66], [67], [68], [69], [84], [85], [87], [187], з них: 6 робіт [64], [65], [66], [67], [68], [69] написано без співавторів; 6 статей [65], [67], [69], [84], [85], [187] в провідних наукових фахових виданнях, що затверджені ВАК України; 4 роботи — тези доповідей [64], [66], [68], [87] на Міжнародних конференціях.

Структура дисертації. Дисертація складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку літератури. Коротко опишемо структуру та зміст даної дисертації.

У вступі обгрунтовано актуальність теми, проведено короткий огляд

робіт по темі дисертації, сформульовані основні поняття та визначення, що використовуються в роботі, зроблено короткий опис змісту та результатів дисертації.

У першому розділі обґрунтовано вибір напрямку досліджень і здійснено постановку задач, які розв'язано в дисертації. Також описано основні етапи розвитку наукової думки щодо групового аналізу диференціальних рівнянь та подано огляд праць, які стосуються цієї проблеми.

У другому розділі поставлена та розв'язана задача узагальнення результатів роботи [136] на випадок системи нелінійних рівнянь дифузії:

$$U_t = \partial_x [F(U)U_x], \quad (0.13)$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(t, x)$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$ — довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1, 2}$.

У першому підрозділі цього розділу також досліджено Галілеївську інваріантність системи (0.13) та системи реакції дифузії:

$$U_t = \partial_x [F(U)U_x] + G(U), \quad (0.14)$$

де $G = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $g^a = g^a(U)$ — довільні гладкі функції, $a = \overline{1, 2}$, яка є узагальненням системи (0.13).

Серед одержаних результатів варто наголосити на наступних. Встановлено, що нелінійна система (0.13) інваріантна відносно алгебри Галілея

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, G = t\partial_x + xQ_1, Q_1 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a} \quad (0.15)$$

тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна системі:

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix} U_x \right], \quad (0.16)$$

де $g(u^2)$ — довільна гладка функція, λ_1 — довільна стала. Крім того, для системи (0.16) встановлено, при якому вигляді функції $g(u^2)$ вона інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $AG_1(1, 1)$ та відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, 1)$.

Для системи (0.14) показано, що вона інваріантна відносно алгебри Галілея (0.15) лише тоді, коли матриця дифузії F з точністю до перетворень еквівалентності має вигляд:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (0.17)$$

де λ_1, λ_2 — деякі дійсні сталі, причому $\lambda_2 \neq -\lambda_1$;

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ m\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad (0.18)$$

де m — деяка дійсна стала, причому $m, \lambda_1 \neq 0$;

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix}, \quad (0.19)$$

де $g(u^2)$ — деяка гладка функція.

Також у першому підрозділі було встановлено, при яких нелінійностях F та G система (0.14) допускає розширення алгебри (0.15) операторами масштабних D та проєктивних Π перетворень.

У другому підрозділі цього розділу показано, що перетворення вигляду

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v_x^a, \quad (0.20)$$

де $v^a = v^a(t, x)$ — нові невідомі функції;

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \quad (0.21)$$

де x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні;

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^1 = z^1, \quad w_1^2 = z^2, \quad (0.22)$$

де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні, є перетвореннями еквівалентності системи (0.13). У другому підрозділі також встановлено, що система вигляду (0.13) лінеаризується тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна системі

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1 \left[\frac{\lambda_{11} + \lambda_{12} z^2}{(z^1)^2} z_1^1 - \frac{\lambda_{12}}{z^1} z_1^2 \right], \\ z_0^2 &= \partial_1 \left[\frac{z^2(\lambda_{11} + \lambda_{12} z^2) - (\lambda_{21} + \lambda_{22} z^2)}{(z^1)^3} z_1^1 + \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12} z^2}{(z^1)^2} z_1^2 \right], \end{aligned} \quad (0.23)$$

де λ_{ab} — довільні сталі.

У третьому підрозділі побудовані нелокальні формули розмноження розв'язків системи вигляду (0.23), які дали можливість, використавши тривіальні розв'язки системи, побудувати широкі класи нових розв'язків системи (0.23).

У четвертому підрозділі побудовані Ліївські анзаци, проведено редукцію системи (0.16), побудовані її точні розв'язки та нелокальні анзаци для системи - образу, що одержується із (0.16) дією перетворень (0.20), (0.21), (0.22).

В третьому розділі проведено повну групову класифікацію системи рівнянь хемотаксису

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \quad (0.24)$$

де $g^1(u^1, u^2), g^2(u^1, u^2), f(u^1)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, $u^a = u^a(x_0, x_1)$, $a = \overline{1, 2}$, x_0 — часова, x_1 — просторова змінні.

Задача групової класифікації системи (0.24) розв'язувалася за наступною схемою (міркування наводимо в позначеннях для системи загального вигляду (0.1)).

1. На основі алгоритму Лі [61], [63] з умови інваріантності (0.6) одержали систему визначальних рівнянь на координати оператора (0.4). Оскільки деякі з рівнянь визначальної системи не містили довільних функцій F та їх похідних, то ці рівняння були розв'язані безпосередньо, чим уточнили вигляд координат оператора (0.4).

2. Рівняння, що містять довільні функції F або їх похідні, назвемо **класифікаційними**. Вважаючи в класифікаційних рівняннях функції F довільними, після розщеплення цих рівнянь за всіма незв'язаними похідними довільних функцій F , отримали систему диференціальних рівнянь з частинними похідними на координати інфінітезимального оператора (0.4). В результаті розв'язання останньої системи одержали алгебру A^{ker} .

3. Розв'язання класифікаційних рівнянь проводили в 2 етапи: 1) спочатку розв'язали "структурні рівняння", які складали з врахуванням співвідно-

шення функцій F з їх похідними. На одержані в результаті нееквівалентні вигляди функцій F накладали вимогу розширення алгебри A^{ker} , тобто щоб $A^{max}(S|_Q) \neq A^{ker}$; 2) Розв'язавши класифікаційні рівняння відносно координат оператора (0.4), для кожного з нееквівалентних виглядів функцій F , що допускають розширення A^{ker} , побудовано максимальну алгебру інваріантності $A^{max}(S|_Q)$.

Зауваження. При розв'язанні класифікаційних рівнянь були використані перетворення еквівалентності системи (0.1), знайдені попередньо. Крім того основну групу перетворень еквівалентності системи та деякі додаткові перетворення еквівалентності використали для зображення нелінійностей F та відповідних максимальних алгебр інваріантності системи (0.1) в найбільш спрощеному вигляді.

Подяки. Автор висловлює щиро вдячність своєму науковому керівнику доктору фізико-математичних наук **Сєрову Миколі Івановичу** за постановку задач, постійну увагу та допомогу в роботі.

Також щиро вдячний доктору фізико-математичних наук Чернізі Роману Михайловичу за постановку задачі про систему рівнянь хемотаксису та обговорення результатів досліджень.

Щиро вдячний завідувачому відділом прикладних досліджень інституту математики НАН України доктору фізико-математичних наук, член-кореспондентові НАН України Нікітіну Анатолію Глібовичу за плідне обговорення результатів дисертації, а також усім учасникам наукового семінару відділу за цінні зауваження під час обговорення результатів досліджень.

РОЗДІЛ 1

Огляд літератури за темою дисертації та вибір напрямку досліджень

У даному розділі проведено огляд та аналіз літератури, в якій досліджуються симетрійні властивості нелінійних диференціальних рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними параболічного типу, а також здійснено постановку задач, що розглядаються в наступних розділах.

В сфері досліджень різноманітних явищ природи на основі математичних моделей досить актуальною є задача встановлення властивостей моделі, зокрема принципів відносності, яким ці моделі задовольняють, та законів збереження, які виконуються для математичних моделей. Іншою, не менш важливою задачею є відшукування розв'язків математичних моделей, оскільки саме розв'язки найбільш загально визначають характерні властивості математичних моделей та відповідно процесів, які вони описують. Саме груповий аналіз диференціальних рівнянь є досить ефективним інструментом для кожної з цих задач. Ефективність групового аналізу в цьому сенсі переконливо довів сам його засновник С. Лі, дослідивши симетрійні властивості лінійного рівняння теплопровідності $u_t = u_{xx}$ та встановивши його розв'язки в роботі [156]. Ефективність групового аналізу привела до появи численних послідовників С. Лі. В II половині XX століття вона привернула увагу до групового аналізу великої кількості науковців, які активно розвивали груповий аналіз та застосовували його до аналізу диференціальних рівнянь. Останнє десятиліття XX та на початку XXI ст. в напрямку групової класифікації диференціальних рівнянь досягнуті вагомі результати (див., наприклад, роботи П. Олвера [170], [171], [172], [173], [174]

та Р. Хередеро [145], В.І. Фущича [93], [94], [95], [96], А.М. Самойленка [36], А.Г. Нікітіна [163], [164], [165], [166], Р. Вілтшира [164], [167], П. Вінтерніца [201] та Дж. Патери [176], [177], [178], М.І. Серова та Р.М. Черніги [86], [125], В.А. Тичиніна [90] [91], [92], Р.З. Жданова та В.І. Лагна [25], [203], Р.О. Поповича [72], [73], [204], І.М. Цифри [196], [204], С.В. Спічака та В.І. Стогнія [37], [189], [192] та багато інших).

Зважаючи на її актуальність, однією з задач, що визначили напрямок проведених у дисертації досліджень, стала задача *групової класифікації систем нелінійних рівнянь параболічного типу*. Зокрема, в другому розділі дисертації серед математичних моделей, що описують процеси дифузії з реакцією, встановлені ті, що задовольняють принципу відносності Галілея, та проведено класифікацію їх симетрійних властивостей. В третьому розділі дисертації розв'язана задача групової класифікації системи рівнянь хемотаксису, що належить до класу систем реакції дифузії. Поряд з цим в дисертації ставилася задача пошуку додаткових (що виходять за рамки алгоритму Лі) можливостей побудови розв'язків систем нелінійних рівнянь дифузії, для розв'язання якої в другому розділі дисертації були використані нелокальні перетворення.

Далі опишемо детальніше реалізацію поставлених задач.

Другий розділ дисертації присвячений дослідженню симетрійних властивостей та знаходженню розв'язків систем нелінійних рівнянь дифузії, які належать до класу систем нелінійних диференціальних рівнянь параболічного типу. Диференціальні рівняння параболічного типу та їх системи є цікавим об'єктом для дослідження, оскільки вони описують реальні фізичні процеси, зокрема такі, що не стаціонарні у часі. Найбільш відомими рівняннями даного класу є нелінійні рівняння теплопровідності (дифузії)

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x). \quad (1.1)$$

Ще С. Лі здійснив групову класифікацію лінійних $(1+1)$ -вимірних рівнянь другого порядку параболічного типу, результати якої відображено в роботі [156]. Сучасний погляд на розв'язання цієї задачі представлено в роботі [61]. У 1959 р. Л.В. Овсянніков вперше провів повну групову класифікацію нелі-

нійного $(1+1)$ – вимірного рівняння теплопровідності (1.1). Цей результат опубліковано в статті [60]. В наступних дослідженнях симетрійних властивостей об'єктом розгляду стали узагальнення рівняння (1.1). Так, зокрема класифікацію рівняння:

$$u_t + u_{xx} = \partial_x(k(u)u_x) \quad (1.2)$$

проводив у своїх дослідженнях В.Л.Катков. Результати цих досліджень відображені у роботі [32].

Повну групову класифікацію рівняння теплопровідності з джерелом (стоком)

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + g(u) \quad (1.3)$$

та його узагальнень на дво- та тривимірний випадок провів В.А. Дородніцин у роботах (1982,[22]), (1983,[23]).

А. Орон, П. Розено (1986, [175]), С.М. Юнг, К. Вербург, П. Бавее (1994, [202]), та М.П. Едвардс (1994,[131]) працювали над дослідженням симетрійних властивостей рівнянь дифузії–конвекції

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x. \quad (1.4)$$

Класифікації симетрійних властивостей рівнянь

$$u_t = G(u_x)u_{xx} \quad (1.5)$$

присвячено роботу І. Ахатова, Р. Газізова і Н. Ібрагімова [4], опубліковану в 1987 році.

У роботах М. Сєрова, Р. Черніги, І.Рассохи [86], [125], [126] з точністю до перетворень еквівалентності проведений вичерпний аналіз симетрій Лі нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним та реактивним членами

$$u_t = \partial_x(D(u)u_x) + f(u)u_x + g(u). \quad (1.6)$$

Р.З. Жданов та В.І. Лагно в роботах [25], [203] здійснили повну групову класифікацію рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом вигляду:

$$u_t = u_{xx} + F(t, x, u, u_x). \quad (1.7)$$

Р.О. Попович, та Н.М. Іванова в роботі [181] провели повну групову класифікацію та дослідили перетворення еквівалентності рівнянь вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)a(u)u_x)_x + b(u)u_x. \quad (1.8)$$

В роботах [1], [36] А.М. Самойленко та В.І. Лагно; у роботі [37] В.І. Лагно, С.В. Спічак та В.І. Стогній; а також Р.З. Жданов [113], [203] та П. Бесараб-Горват [113] провели повну групову класифікацію найбільш загальних квазілінійних рівнянь еволюційного типу

$$u_t = F(t, x, u, u_x)u_{xx} + G(t, x, u, u_x). \quad (1.9)$$

У роботах С.В. Спічака, В.І. Стогнія [192], [193] для одновимірного рівняння Фокера-Планка (ФП) з довільними $A(t, x)$, $B(t, x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(t, x)u] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t, x)u],$$

де $A(t, x)$, $B(t, x)$ - достатньо гладкі функції, знайдені максимальні групи перетворень та побудовані деякі класи точних розв'язків. У роботах [190], [191] С.В. Спічак, В.І. Стогній провели симетрійну класифікацію та побудували точні розв'язки рівняння Крамерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(yu) + \frac{\partial}{\partial y}(V'(x)u) + \gamma \frac{\partial}{\partial y}(yu + \frac{\partial}{\partial y}).$$

І. Ахатов, Р. Газізов і Н. Ібрагімов у роботі [4], з точністю до перетворень еквівалентності провели групову класифікацію рівнянь

$$u_t = F(u_{xx}) \quad (1.10)$$

Симетрійні властивості рівнянь вигляду (1.10) у роботі [183] досліджував В. Пухначов.

Узагальненням рівняння теплопровідності (1.1) є система нелінійних рівнянь дифузії (0.13). В класі систем (0.13) містяться такі, які широко застосовуються в теорії процесів тепломасопереносу, дифузії, описують еволюцію температури u^1 та густини u^2 у термоядерній плазмі [16], [200]. Повну групову класифікацію нелінійних систем класу (0.13) досі не проведено.

В роботах [86], [105], [137] побудовані класи нелінійних систем двох рівнянь параболічного типу, інваріантних відносно алгебри Галілея та її розширень. При конкретних виглядах функцій $F(U)$ симетрійні властивості системи рівнянь (0.13) досліджені в роботах [3], [108], [124] і методами лівської та умовної симетрії знайдено деякі точні розв'язки цих систем.

У роботі [109] досліджено конформну інваріантність системи (0.13), при наступному вигляді матриці F :

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 u^{\alpha_1} & \lambda_2 \frac{u^{\alpha_1+1}}{v} \\ \lambda_3 u^{\alpha_2-1} v & \lambda_4 u^{\alpha_2} \end{pmatrix}, \text{ де } u = u^1, v = u^2.$$

Система (0.13) досліджувалась також і в роботі Гладкова, Байкова [112], де виявлені два зображення алгебри конформного типу.

У роботі [3] розв'язана задача дослідження конформної інваріантності системи (0.13) відносно алгебри

$$AC_1(1) = \langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_1 \partial_1 + Q, K = x_1^2 \partial_1 + x_1 Q \rangle, \quad (1.11)$$

де $Q = (m_{ab} u^b + n_a) \partial_{u^a}$, m_{ab} , n_a — довільні сталі, $a, b = 1, 2$.

Система вигляду (0.13) має численні застосування для опису різноманітних фізичних та біохімічних процесів, в той же час її симетрійні властивості залишаються недослідженими в повній мірі. В зв'язку з цим дослідженню системи (0.13) приділено увагу у другому розділі дисертації. У цьому розділі дисертації поставлена і розв'язана задача *серед систем, що узагальнюють рівняння (1.1) (і багато інших відомих рівнянь) на випадок системи двох рівнянь відносно двох невідомих функцій за допомогою симетрійних методів виділити ті системи, які є інваріантними відносно узагальненої алгебри Галілея*. Тобто розглянута задача встановлення вигляду нелінійностей $F(U)$, при яких система (0.13) інваріантна відносно алгебри Галілея $AG(1)$ та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень. Після цього досліджено симетрійні властивості одержаного класу систем. Запропоновані галілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь дифузії в силу своїх широких симетрійних властивостей претендують на описання фізичних процесів, що задовольняють принципу відносності Галілея. Так, наприклад, одна з них при специфічних виглядах

функції F зустрічається в роботах [110], [149] і широко застосовується для опису процесів хемотаксису живих організмів.

Зокрема, у параграфі 2.1 розділу 2 дисертації нами було встановлено, що нелінійна система (0.13) інваріантна відносно лінійного зображення алгебри Галілея з базисними генераторами вигляду:

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, G = t\partial_x + xQ_1, Q_1 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}$$

та її розширень операторами масштабних $D = 2t\partial_t + x\partial_x + Q_2$ та проєктивних $\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + tQ_2 + \frac{x^2}{2}Q_1$ перетворень лише у випадку, коли матриця F має вигляд:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

де $g(u^2)$ — довільна гладка функція, λ_1 — довільна стала.

Одним із дуже цікавих з практичної точки зору узагальнень системи (0.13) є система реакції дифузії (0.14), Галілеївську інваріантність якої досліджено у першому підрозділі цього розділу.

В четвертому підрозділі другого розділу дисертації встановлені нееквівалентні анзаци, проведено редукцію системи (0.13), (1.12) та побудовані точні розв'язки цієї системи.

Система (0.14) є дуже актуальною в плані дослідження симетрійних властивостей, оскільки в класі систем вигляду (0.14) містяться системи, які описують процеси дифузії з реакцією, а також різноманітні біохімічні процеси. Так, зокрема при $F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ u^2 f(u^1) & \lambda_2 \end{pmatrix}$, де $f(u^1)$ — довільна гладка функція, λ_1, λ_2 — сталі, система (0.14) описує процеси хемотаксису бактерій та інших мікроорганізмів.

Так, розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль описується математичними моделями, основаними на рівняннях Келлера-Сегеля [149]

$$\begin{aligned} S_t &= D_S S_{xx} + k_1 g(S)b, \\ b_t &= -\nu \partial_x [b\chi(S)S_x] + D_b b_{xx} + k_2 g(S)b, \end{aligned} \quad (1.13)$$

де $S_t = \frac{\partial S}{\partial t}$, $S_x = \frac{\partial S}{\partial x}$, $b_t = \frac{\partial b}{\partial t}$, $S_{xx} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$, $b_{xx} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, причому $S(t, x)$ — концентрація субстрату-аттрактанту, який споживається бакте-

ріями, $b(t, x)$ — щільність бактерій, $g(S)$ — питома швидкість росту бактерій, $\chi(S)$ — функція хемотаксисної відповіді, D_S та D_b — коефіцієнти дифузії субстрату та бактерій відповідно; ν , k_1 , k_2 — сталі; t, x — часова та просторова змінні відповідно. Моделлю Келлера – Сегеля та її деякими модифікаціями описується також формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера [110] та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії [31].

Кооперативна поведінка найпростіших мікроорганізмів також описується системою вигляду (0.14). Наприклад, математична модель [162], що описує процес агрегації міксоміцетів має вигляд, подібний до моделі Келлера – Сегеля:

$$\begin{aligned}\rho_t &= \nabla(D_\rho \nabla \rho) + f(\rho, a) - k(\rho, a), \\ a_t &= \nabla(D_a \nabla a - D_c \nabla \rho),\end{aligned}\tag{1.14}$$

де $a(r, t)$ та $\rho(r, t)$ — концентрація амеб і молекул аттрактанта цАМФ (циклічна аденозинмонофосфорна кислота) відповідно, D_a та D_ρ — коефіцієнти дифузії, а D_c характеризує силу хемотаксисної відповіді окремих клітин; f — швидкість синтезу цАМФ, k — швидкість розпаду цАМФ.

Формування безперетинних структур при сповільненому поширенні популяційних хвиль бактерій описується модифікованою системою Лапідуса – Шиллера:

$$\begin{aligned}S_t &= D_S S_{xx} - \lambda(S)b, \\ b_t &= -V \partial_x [b f_x(S)] + D_b b_{xx} + R(S)b,\end{aligned}\tag{1.15}$$

де $S(t, x)$ — густина субстрату-аттрактанту, $b(t, x)$ — концентрація бактерій, $\lambda(S) = \alpha R(S)$, $\alpha - const (\alpha \leq 1)$, $R(S)$ — швидкість розмноження бактерій, $f(S)$ — функція чуттєвості бактерій до субстрату-аттрактанту, причому R, f задаються рівностями $R(S) = R_0 S(S + S_k)^{-1}$, $f(s) = S(S + S_k)^{-1}$, R_0, S_k, D_S, D_b, V — сталі.

Дослідженню симетрійних властивостей системи рівнянь хемотаксису

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ u^2 f(u^1) & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x \right] + G(U),\tag{1.16}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$ $u^a = u^a(t, x)$, $f = f(u^1)$, $g^a = g^a(U)$ — довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1, 2}$, присвячено 3 розділ дисертації.

В третьому розділі проведено повну групову класифікацію систем рівнянь хемотаксису (1.16). Результати дослідження симетрійних властивостей системи (1.16) опубліковано в роботах [67], [85].

В другому розділі дисертації досліджувалась система нелінійних рівнянь реакції дифузії вигляду (0.14) при довільних матрицях дифузії F та реакції G . Система рівнянь вигляду (0.14) крім процесів хемотаксису мікроорганізмів широко застосовується для опису багатьох інших фізичних, хімічних процесів та явищ живої природи, пов'язаних з реакцією речовин під час їх взаємної дифузії. Зокрема, для опису процесу горіння плазми, а в живій природі - для описання конкуренції тварин на певній території. Для систем рівнянь реакції дифузії характерно, що матриця функцій f задовольняє властивість $\langle 1 \rangle \cdot \langle 2 \rangle \neq 0$, де $\langle 1 \rangle = f^{11} + f^{22}$, $\langle 2 \rangle = f^{11} \cdot f^{22} - f^{12} \cdot f^{21}$.

Дослідженню симетрійних властивостей такого класу систем приділяло увагу багато відомих науковців. При різних виглядах сталої матриці дифузії $F = \Lambda$ одержали вагомі результати А.Г. Нікітін та Р. Вилтшир (див. наприклад [164], [165], [166], [167]), [168]), [169]). Р.М. Черніга та Дж. Кінг [127], [128], [129].

В роботі [152] І.В. Князева та М.Д. Попов виконали групову класифікацію системи нелінійних рівнянь дифузії вигляду

$$u_t - (f(u, v)u_x)_x = 0, \quad v_t - (g(u, v)v_x)_x = 0.$$

У другому розділі дисертації досліджено галілеївську інваріантність системи (0.14). В цьому розділі була розв'язана задача, при якому вигляді матриць дифузії F та реакції G система вигляду (0.14) буде інваріантною відносно алгебри Галілея. Для одержаних в результаті систем (0.14) досліджено максимальні алгебри інваріантності.

У другому розділі дисертації крім дослідження ліївської симетрії системи (0.13) приділено також увагу пошуку додаткових, неліївських способів

побудови розв'язків системи (0.13).

Той факт, що фізичні процеси володіють деякими властивостями та задовольняють певним законам відносності часто вдається пояснити лише завдяки виявленню прихованих симетрій даних процесів, які неможливо отримати в рамках класичного ліївського підходу. Зокрема, для побудови теорії квантової електродинаміки в термінах напруженості електромагнітного поля застосовуються нелокальні симетрії (див. наприклад [153]). Нелокальний підхід широко застосовується для моделювання та дослідження процесів у фізиці високих енергій та у фізиці елементарних частинок. Цей підхід застосовується, наприклад, для дослідження процесу поширення нерівноважної фононної температури при лазерному збудженні електрон-діркової плазми (див. [24]). Отже, нелокальний підхід для вивчення багатьох фізичних процесів має практичне підґрунтя і може бути використаний при дослідженні рівнянь та систем, які ці процеси описують.

В 1979 році G.Rosen в роботі [185] показав, що дією нелокальних перетворень вигляду

$$t = t, \quad x = x, \quad u = v_x, \quad (1.17)$$

де $v = v(t, x)$ — нові невідомі функції;

$$t = x_0, \quad x = w, \quad v = x_1, \quad (1.18)$$

де x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $w = w(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні;

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1 = z^1, \quad (1.19)$$

де $z = z(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні,

нелінійне рівняння теплопровідності (дифузії) вигляду

$$u_t = \partial_x(u^{-2}u_x) \quad (1.20)$$

перетворюється в лінійне рівняння

$$z_0 = z_{11}. \quad (1.21)$$

В роботах [118], [194] показано, що перетворення (1.17), (1.18), (1.19) зводять рівняння Фуджити-Сторма

$$u_t = a\partial_x((u+b)^{-2}u_x) \quad (1.22)$$

до лінійного рівняння (1.21).

Якщо $v(t, x)$ — розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $v_t = v_{xx}$, то функція $u(t, x) = v^{-1}v_x$ є розв'язком відомого рівняння Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x,$$

запропонованого Дж.М. Бюргерсом [123] у якості моделі турбулентності. Перетворення $v \rightarrow u$, яке називається перетворенням Коула-Хопфа (1950, [146]), (1951, [130]), узагальнює перетворення, використане у розділі 32 роботи А.Р. Форсайта 1906 року [133] для лінеаризації рівняння Рікаті.

В. Штрамп [195] і Дж. Бурган та ін. [122] дослідили нелокальні перетворення еквівалентності у класі рівнянь $u_t = \partial_x(f(u)u_x)$ та довели еквівалентність рівнянь $u_t = \partial_x(k(u)u_x)$ і $u_t = \partial_x(u^{-2}k(u^{-1})u_x)$. В. Штрамп [195] знайшов також перетворення еквівалентності між рівняннями вигляду $u_t = \partial_x(k(u, u_x))$ і $u_t = \partial_x(uk(u^{-1}, -u^{-3}u_x))$. Ці результати незалежно перевіджено та узагальнено В.В. Пухначовим [183]. Використовуючи перетворення між наведеними рівняннями, А.С. Фокаш та Я.С. Йортсос [132] звели рівняння $u_t = \partial_x(u^{-2}u_x) + u^{-2}u_x$ до рівняння вигляду (1.22).

У 1987 І.Ш. Ахатов, Р.К. Газізов та Н.Х.Ібрагімов [4] показали, що всі вище згадані нелокальні перетворення є локальними перетвореннями еквівалентності для відповідних рівнянь для потенціалів. В 1989 році для подібних перетворень вони ввели термін "квазілокальні перетворення еквівалентності" [5].

В 1988 році Дж. Блуман, Г. Рід та С.Кумей [120] вперше розглянули нелокальні перетворення еквівалентності у класі рівнянь (1.1). В роботі [150] ці перетворення узагальнені і показано, що за допомогою даних перетворень нелінійне рівняння дифузії вигляду (1.1), зводиться до рівняння того ж класу.

Я.Г. Лиль [161] отримав деякі результати щодо потенціальних перетворень еквівалентності для рівнянь вигляду $u_t = \partial_x(G(u)u_x) + f(u)u_x$. Зокрема, в роботі [161] вперше встановлено групу нелокальних перетворень еквівалентності для цього класу рівнянь та побудовано схему зв'язків між лінійним рівнянням, рівнянням Фуджити-Сторма, рівнянням Фокаша-

Йортсосу та рівнянням Бюргерса.

Помітний внесок в дослідження нелокальних симетрій ДРЧП математичної фізики за допомогою нелокальних перетворень змінних (НПЗ) належить Тичиніну В.А. В його дослідженнях використовуються класичний метод теоретико-групового аналізу ДР та метод нелокальних перетворень [103]. В роботі [104] ці ідеї було застосовано для побудови формули розмноження розв'язків нелінійного хвильового рівняння. В них одержує подальшого розвитку базова ідея [95] – розширення симетрії ДР: вихідне рівняння відповідним НПЗ зводиться до себе ж, або до рівняння, яке допускає більш широку групу симетрії. Одержані нелокальні симетрії вихідного рівняння використовуються для побудови формул розмноження його розв'язків ([90], [91], [92], [140], [198]).

В роботі [100] нелокальні перетворення еквівалентності вигляду (1.17), (1.18), (1.19) були застосовані для побудови додаткових (нелокальних) анзаців для нелінійного рівняння теплопровідності (1.1), які неможливо отримати в рамках класичного алгоритму Лі. В [136] дані перетворення використані для лінеаризації рівняння (1.1), побудови нелокальних формул розмноження його розв'язків.

В другому розділі дисертації поставлена та розв'язана задача узагальнення результатів робіт [100], [118], [136], [150], [185] на випадок системи нелінійних рівнянь дифузії (0.13). Серед одержаних у другому розділі результатів важливо підкреслити наступні. Встановлено вигляд матриці дифузії F , при якому система (0.13) лінеаризується. Побудовано нелокальні анзаци системи вигляду (0.13) та одержано деякі розв'язки для такого класу систем. Побудовано нелокальні формули розмноження розв'язків системи вигляду (0.13), що лінеаризується, та наведені приклади побудови розв'язків цієї системи на основі її тривіальних розв'язків.

РОЗДІЛ 2

ЛІЇВСЬКА ТА НЕЛОКАЛЬНА СИМЕТРІЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ

Диференціальні рівняння з частинними похідними, які володіють класичною ліївською симетрією, можна редукувати до звичайних диференціальних рівнянь за допомогою спеціальних підстановок (анзаців) [60], [61]. Розв'язавши редуковані рівняння, можна побудувати точні розв'язки вихідного диференціального рівняння з частинними похідними (див. [61], [97], [107]). Тому кількість розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними, які вдається побудувати за допомогою класичного алгоритму Лі, обмежена числом операторів ліївської симетрії.

В роботах [118], [185] наведені нелокальні перетворення, які нелінійне рівняння дифузії $u_t = \partial(u^{-2}u_x)$ зводять до лінійного $u_t = u_{xx}$. В роботі [150] ці перетворення узагальнені і показано, що за допомогою даних перетворень нелінійне рівняння дифузії

$$u_t = \partial_x[f(u)u_x], \quad (2.1)$$

де $u = u(t, x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $f(u)$ — довільна гладка функція, зводиться до рівняння того ж класу. В роботі [100] вказано спосіб побудови додаткових анзаців (нелокальних анзаців) для нелінійного рівняння теплопровідності, які неможливо отримати в рамках класичного алгоритму Лі. Також в [136] дані перетворення використані для лінеаризації рівняння (2.1), побудови нелокальних формул розмноження його розв'язків.

В даному розділі досліджено Галілеєвську інваріантність системи нелінійних рівнянь дифузії (0.13) та системи нелінійних рівнянь реакції дифузії

(0.14), яка є узагальненням системи (0.13). Для системи (0.13) встановлені нелокальні перетворення еквівалентності, які використані для лінеаризації, побудови нелокальних анзаців та нелокальних формул розмноження розв'язків системи (0.13).

2.1. Інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції дифузії відносно алгебр Галілея

Система рівнянь вигляду (0.14) широко застосовується для описання багатьох фізичних, хімічних процесів та явищ живої природи, пов'язаних з реакцією речовин під час їх взаємної дифузії.

Ще С. Лі дослідив симетрійні властивості лінійного рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{xx} \quad (2.2)$$

і встановив, що воно задовольняє принципу відносності Галілея. Дане рівняння інваріантне відносно узагальненої алгебри Галілея, тобто алгебри Галілея:

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad G = t\partial_x + xQ_1, \quad Q_1 = -\frac{1}{2}u\partial_u, \quad (2.3)$$

доповненої операторами масштабних

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x + Q_2 \quad (2.4)$$

та проєктивних

$$\Pi = t(t\partial_t + x\partial_x) + \frac{x^2}{2}Q_1 + tQ_2 \quad (2.5)$$

перетворень. Тут $Q_2 = -\frac{1}{2}u\partial_u$. Неважко переконатися, що оператори алгебри Галілея (2.3) задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= 0, & [X_1, X_3] &= X_2, & [X_1, X_4] &= 0, \\ [X_2, X_3] &= X_4, & [X_3, X_4] &= 0, & [X_2, X_4] &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де:

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = G, \quad X_4 = Q_1. \quad (2.7)$$

4-х вимірну алгебру лінійних диференціальних операторів

$$AG = \langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle, \quad (2.8)$$

яка задовольняє комутаційним співвідношенням (2.6), назовемо **алгеброю Галілея**. Зауважимо, що алгебра (2.3) є однією з реалізацій алгебри (2.8), (2.6).

Задача класифікації симетрійних властивостей рівняння (2.1) повністю розв'язана в роботі [61]. З результатів роботи [61] зокрема випливає, що при $f(u) \neq \text{const}$ рівняння (2.1) неінваріантне відносно алгебри Галілея. В даному підрозділі ми задамося питанням: чи може система нелінійних рівнянь реакції дифузії (0.14) бути інваріантна відносно лінійного зображення алгебри Галілея (2.8), (2.6) та її розширень операторами масштабних (2.4) та проєктивних (2.5) перетворень.

Дану задачу ми будемо досліджувати в два етапи. Спочатку розв'яжемо її для системи рівнянь дифузії (0.13), а потім для системи рівнянь реакції дифузії (0.14).

2.1.1. Галілеївська інваріантність системи рівнянь дифузії

Для систем рівнянь реакції дифузії характерно, що матриця функцій F задовольняє властивість

$$\langle 1 \rangle \cdot \langle 2 \rangle \neq 0, \quad (2.9)$$

де

$$\langle 1 \rangle = f^{11} + f^{22}, \quad \langle 2 \rangle = f^{11} \cdot f^{22} - f^{12} \cdot f^{21}. \quad (2.10)$$

Мають місце наступні твердження.

Теорема 2.1. *Нелінійна система (0.13) при умові (2.9), (2.10) інваріантна відносно алгебри Галілея (2.8), (2.6) тоді і тільки тоді, коли вона локально еквівалентна системі:*

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix} U_x \right], \quad (2.11)$$

де $g(u^2)$ — довільна гладка функція,

а алгебра Галілея має наступну реалізацію:

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad G = t\partial_x + xQ_1, \quad Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}. \quad (2.12)$$

Доведення. Спочатку покажемо, що лінійні перетворення

$$U = AW + B, \quad (2.13)$$

де $W = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$ — нові невідомі функції, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ — довільні сталі матриці (матриця A не вироджена), є перетвореннями локальної еквівалентності системи (0.13). Якщо подіяти перетвореннями (2.13) на систему (0.13), то вона зведеться до вигляду:

$$W_t = \partial_x[\Phi(W)W_x], \quad (2.14)$$

де

$$\Phi(W) = A^{-1}F(AW + B)A. \quad (2.15)$$

Так як з вигляду системи (2.14) видно, що вона належить до того ж класу, що і система (0.13), то це і означає, що (2.13) є перетвореннями еквівалентності системи (0.13).

Доведення теореми проводимо на основі алгоритму Лі [26], [27], [28], [61], [62], [63].

Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (0.14) має вигляд

$$X = \xi^\mu(t, x, u^1, u^2)\partial_\mu + \eta^a(t, x, u^1, u^2)\partial_{u^a}. \quad (2.16)$$

З умови інваріантності системи (0.14) відносно оператора (2.16) в припущенні (2.9), (2.10) одержуємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат інфінітезимального оператора (2.16) та функцій f^{ab} :

$$\eta_{u^b u^c}^a = \xi_{u^a}^\mu = \xi_x^0 = 0, \quad (2.17)$$

$$\eta_{u^c}^a f_{u^b}^{ab} + (\xi_t^0 - 2\xi_x^1)f^{ab} + \eta_{u^b}^c f^{ac} - \eta_{u^c}^a f^{cb} = 0, \quad (2.18)$$

$$\eta_x^c (f_{u^b}^{ac} + f_{u^c}^{ab}) + 2\eta_{xu^b}^c f^{ac} - \xi_{xx}^1 f^{ab} + \delta_{ab}\xi_t^1 = 0,$$

$$\eta_{xx}^b f^{ab} - \eta_t^a = 0, \quad (2.19)$$

де $a, b, c, d = 1, 2$, δ_{ab} - символ Кронекера.

З рівнянь (2.17) випливає, що

$$\xi^0 = \xi^0(t), \quad \xi^1 = \xi^1(t, x), \quad \eta^a = \alpha^{ab} u^b + \beta^a, \quad (2.20)$$

де $\alpha^{ab} = \alpha^{ab}(t, x)$, $\beta^a = \beta^a(t, x)$ - гладкі функції. Якщо врахувати (2.20), то рівняння (2.18), (2.19) перепишуться наступним чином

$$\begin{aligned} (\alpha^{ac} u^b + \beta^c) f_{u^c}^{ab} + (\xi_t^0 - 2\xi_x^1) f^{ab} + \alpha^{cb} f^{ac} - \alpha^{ac} f^{cb} &= 0, \\ (\alpha_x^{ac} u^b + \beta_x^c) (f_{u^b}^{ac} + f_{u^c}^{ab}) + 2\alpha_x^{cb} f^{ac} - \xi_{xx}^1 f^{ab} + \delta_{ab} \xi_t^1 &= 0, \\ (\alpha_{xx}^{bc} u^c + \beta_{xx}^b) f^{ab} - (\alpha_t^{ac} u^c + \beta_t^a) &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Для подальшого розв'язання одержаної системи визначальних рівнянь попередньо уточнимо координати інфінітезимального оператора X , використавши комутаційні властивості алгебри Галілея (2.8).

З вигляду системи (0.13) очевидно, що вона інваріантна відносно перетворень зсуву по незалежних змінних t, x . Цим перетворенням, як відомо, відповідають оператори: $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$. З цих міркувань та з формул (2.20), (2.6) випливає наступний найбільш загальний вигляд операторів X_i ($i = \overline{1, 4}$):

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \\ X_3 &= A(t) \partial_t + B(t, x) \partial_x + [m^{ab}(t, x) u^b + n^a(t, x)] \partial_{u^a}, \\ X_4 &= a(t) \partial_t + b(t, x) \partial_x + [\alpha^{ab}(t, x) u^b + \beta^a(t, x)] \partial_{u^a}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

де $A(t), B(t, x), a(t), b(t, x), m^{ab}(t, x), n^a(t, x), \alpha^{ab}(t, x), \beta^a(t, x)$ - довільні гладкі функції своїх аргументів.

Для того, щоб оператори (2.22) утворювали алгебру Галілея, необхідно, щоб вони задовольняли комутаційним співвідношенням (2.6), з яких отримуємо:

$$\begin{aligned} [X_1, X_3] &= \dot{A} \partial_t + B_t \partial_x + (m_t^{ab} u^b + n_t^a) \partial_{u^a} = 0, \\ [X_1, X_4] &= \dot{a} \partial_t + b_t \partial_x + (\alpha_t^{ab} u^b + \beta_t^a) \partial_{u^a} = 0, \\ [X_2, X_4] &= b_x \partial_x + (\alpha_x^{ab} u^b + \beta_x^a) \partial_{u^a} = 0, \\ [X_2, X_3] &= B_x \partial_x + (m_x^{ab} u^b + n_x^a) \partial_{u^a} = X_4, \\ [X_1, X_2] &= [X_3, X_4] = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

З перших трьох співвідношень (2.23) випливають наступні умови на функції $A, B, a, b, m^{ab}, n^a, \alpha^{ab}, \beta^a$:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= m_t^{ab} = n_t^a = 0, \quad B_t = 1, \\ \dot{a} &= b_t = b_x = 0, \\ \alpha_t^{ab} &= \alpha_x^{ab} = \beta_t^a = \beta_x^a = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Розв'язавши (2.24), знаходимо

$$\begin{aligned} a &= c_1, \quad b = c_2, \quad A = c_3, \quad \alpha^{ab} = \alpha_{ab}, \quad \beta^a = \beta_a, \\ m^{ab} &= m^{ab}(x), \quad n^a = n^a(x), \quad B = t + B^1(x), \end{aligned} \quad (2.25)$$

де $c_1, c_2, c_3, \alpha_{ab}, \beta_a$ — довільні сталі. З формул (2.25) очевидно, що оператор X_4 набуває вигляду

$$X_4 = c_1 \partial_t + c_2 \partial_x + (\alpha_{ab} u^b + \beta_a) \partial_{u^a}, \quad (2.26)$$

який, враховуючи вигляд алгебри (2.22), за теоремою Лі еквівалентний до наступного

$$X_4 = (\alpha_{ab} u^b + \beta_a) \partial_{u^a}. \quad (2.27)$$

Враховуючи вигляд (2.27) оператора X_4 , із четвертого співвідношення (2.23) отримуємо

$$B_x^1 = 0, \quad m_x^{ab} = \alpha_{ab}, \quad n_x^a = \beta_a. \quad (2.28)$$

Розв'язавши (2.28) з врахуванням (2.25), знаходимо

$$B = t + c_4, \quad m^{ab} = \alpha_{ab} x + m_{ab}, \quad n^a = \beta_a x + n_a, \quad (2.29)$$

де c_4, m_{ab}, n_a — довільні сталі. З формул (2.27), (2.29) отримуємо уточнений вигляд алгебри Галілея

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \\ X_3 &= c_3 \partial_t + (t + c_4) \partial_x + x(\alpha_{ab} u^b + \beta_a) \partial_{u^a} + (m_{ab} u^b + n_a) \partial_{u^a}, \\ X_4 &= (\alpha_{ab} u^b + \beta_a) \partial_{u^a}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Очевидно, що алгебра (2.30) еквівалентна наступній алгебрі

$$AG(1, 1) = \langle \partial_t, \quad \partial_x, \quad G = t \partial_x + x Q_1 + Q, \quad Q_1 \rangle, \quad (2.31)$$

де $Q_1 = (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)\partial_{u^a}$, $Q = (m_{ab}u^b + n_a)\partial_{u^a}$, причому, як впливає з останнього комутаційного співвідношення (2.23), $[Q_1, Q] = 0$.

Інфінітезимальним оператором алгебри (2.31) є оператор

$$X = a_0\partial_t + a_1\partial_x + gG + kQ_1, \quad (2.32)$$

координати ξ^μ , η^a якого (2.30) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = gt + d_1, \\ \eta^a &= (gx + k)(\alpha_{ab}u^b + \beta_a) + g(m_{ab}u^b + n_a), \end{aligned} \quad (2.33)$$

де d_0, d_1, g, k — довільні сталі.

В такому випадку рівняння (2.21) перепишуться у вигляді

$$\begin{aligned} &[(gx + k)(\alpha_{cb}u^b + \beta_c) + g(m_{cb}u^b + n_c)]f_{u^c}^{ab} + \\ &+ (gx + k)(\alpha_{cb} + gm_{cb})f^{ac} - \\ &- (gx + k)(\alpha_{ac} + gm_{ac})f^{cb} = 0, \\ &g(\alpha_{ab}u^b + \beta_a)(f_{u^b}^{ac} + f_{u^c}^{ab}) + 2g\alpha_{cb}f^{ac} + g\delta_{ab} = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Розщепивши рівняння (2.34) по змінній x , отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha_{cb}u^b f_{u^c}^{ab} + \alpha_{cb}f^{ac} - \alpha_{ac}f^{cb} &= 0, \\ (\alpha_{ab}u^b + \beta_a)(f_{u^b}^{ac} + f_{u^c}^{ab}) + 2\alpha_{cb}f^{ac} + g\delta_{ab} &= 0, \\ (m_{cb}u^b + n_c)f_{u^c}^{ab} + m_{cb}f^{ac} - m_{ac}f^{cb} &= 0. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Останнє з рівнянь (2.35), очевидно, є умовою інваріантності системи (0.13) відносно оператора

$$Q = (m_{ab}u^b + n_a)\partial_{u^a}. \quad (2.36)$$

Тому, не втрачаючи загальності, для системи (0.13) можна вважати, що $Q = 0$. В такому випадку координати (2.33) оператора (2.32) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = gt + d_1, \\ \eta^a &= (gx + k)(\alpha_{ab}u^b + \beta_a), \end{aligned} \quad (2.37)$$

З рівнянь (2.17), (2.18), (2.19), та формул (2.37) впливає, що для того, щоб система (0.13) була інваріантна відносно алгебри Галілея (2.31), функції f^{ab} повинні задовольняти наступній системі диференціальних рівнянь:

$$M^c f_{u^c}^{ab} + \alpha_{cb}f^{ac} - \alpha_{ac}f^{cb} = 0, \quad (2.38)$$

$$M^c f_{u^b}^{ac} + \alpha_{cb} f^{ac} + \alpha_{ac} f^{cb} + \delta_{ab} = 0, \quad (2.39)$$

де $M^c = \alpha_{cd} u^d + \beta_c$.

В роботі [19] показано, що з точністю до перетворень (2.13) існує 6 нееквівалентних зображень оператора Q_1 . Ці зображення задаються наступними матрицями:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \alpha = 0, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ 2) \quad & \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \neq 0; \\ 3) \quad & \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k \neq 0; \\ 4) \quad & \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \beta = 0, k \neq 0; \\ 5) \quad & \alpha = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}, \beta = 0; \\ 6) \quad & \alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \beta = 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

де k — довільна стала. Вказані вище набори матриць α, β назвемо "канонічними". Зауважимо, що довільний інший набір матриць α, β з точністю до перетворень (2.13) локально еквівалентний одному з канонічних. Розв'яжемо системи (2.38), (2.39) для кожного з випадків 1) - 6).

1) Системи (2.38), (2.39) мають вигляд

$$\partial_{u^1} f^{ab} = 0, \quad (2.41)$$

$$\partial_{u^b} f^{a1} = -\delta_{ab}. \quad (2.42)$$

Очевидно, що система (2.41) – (2.42) несумісна. Аналогічно можна показати, що система (2.38), (2.39) несумісна у випадках 2), 3), 5). Розв'язком системи (2.38), (2.39) у випадку 4) є матриця

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

що приводить до лінійної системи (0.13).

6) Розв'язком системи (2.38) є функції

$$\begin{aligned} f^{11} &= \varphi^{11}(\omega), f^{12} = (u^1)^{k+1} \varphi^{12}(\omega), \\ f^{21} &= (u^1)^{-(k+1)} \varphi^{21}(\omega), f^{22} = \varphi^{22}(\omega), \omega = (u^1)^{-k} u^2. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Підставивши (2.44) в систему (2.38), (2.39) одержимо:

$$\begin{cases} k\omega[\dot{\varphi}^{11} + k\omega\dot{\varphi}^{12} + (k+1)\varphi^{11}] = -2\varphi^{11} - 1, \\ \dot{\varphi}^{11} + k\omega\dot{\varphi}^{12} + (k-1)\varphi^{12} = 0, \\ k(k\omega^2\dot{\varphi}^{22} - \omega\dot{\varphi}^{21} + 2\varphi^{21}) = 0, \\ k\omega\dot{\varphi}^{22} - \dot{\varphi}^{21} = -2k\varphi^{22} - 1. \end{cases} \quad (2.45)$$

Якщо $k \neq 0$, то, розв'язавши систему (2.45), одержуємо:

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2k} \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

У випадку матриць F вигляду (2.43), (2.46) система (0.13) стає лінійною, оскільки симетрійні властивостей лінійних систем такого типу досить добре досліджені, то для системи (0.13) з цими виглядами матриць F розширень алгебри Галілея ми не розглядатимемо.

Якщо $k = 0$, то з (2.45) знаходимо:

$$\varphi^{11} = -\frac{1}{2}, \varphi^{12} = 0, \varphi^{21} = -\omega, \varphi^{22} = g(\omega), \omega = u^2, \quad (2.47)$$

де $g = g(u^2)$ – довільна гладка функція. З формул (2.44), (2.47) отримуємо наступний вигляд матриці F :

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

при якому система (0.13) локально еквівалентна системі (2.11) з нелінійністю F вигляду

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

де $\lambda_1 \neq 0$ - довільна стала. Якщо врахувати вигляд матриці F (2.49), то з рівнянь (2.38), (2.39), знаходимо, що

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}. \quad (2.50)$$

Теорему (2.1) доведено.

Поставимо задачу встановити, при якому вигляді матриці F система (2.11) допускає розширення алгебри (2.12) операторами вигляду (2.4), (2.5).

Теорема 2.2. Система нелінійних рівнянь вигляду (2.11) інваріантна:

1) при $g(u^2) \neq \text{const}$ відносно розширеної алгебри Галілея

$$\begin{aligned} AG_1(1,1) &= \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + xQ_1, \\ Q_1 &= -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}, D = 2t\partial_t + x\partial_x \rangle; \end{aligned} \quad (2.51)$$

2) при $g(u^2) = \lambda = \text{const}$ ($\lambda \neq 0; -\lambda_1$) відносно узагальненої алгебри Галілея

$$\begin{aligned} AG_2(1,1) &= \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + xQ_1, Q_1, \\ D &= 2t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{2}u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}, \\ \Pi &= t^2\partial_t + tx\partial_x - (\frac{x^2}{4\lambda_1} + \frac{1}{2}t)u^1\partial_{u^1} - tu^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Доведення. Якщо доповнити алгебру (2.12) оператором (2.4), то одержиться алгебра $AG_1(1,1)$, яка згідно [107] називається розширеною алгеброю Галілея. З комутаційних співвідношень між її операторами випливає, що $[D, G] = G$. Обчисливши дужку Лі $[D, G]$, отримуємо $[D, G] = G + x(Q_2Q_1 - Q_1Q_2)$. Тоді, врахувавши наведене вище комутаційне співвідношення, очевидно, що оператори Q_1 та Q_2 повинні задовольняти умові $[Q_1, Q_2] = 0$. Звідси випливає уточнений вигляд оператора Q_2 :

$$Q_2 = \gamma_{11}u^1\partial_{u^1} + (\gamma_{22}u^2 + \delta_2)\partial_{u^2}. \quad (2.53)$$

Запишемо координати оператора X , який породжує алгебру (2.12), (2.4), враховуючи, що Q_2 має вигляд (2.53):

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2\alpha t + d_0, & \xi^1 &= gt + \alpha x + d_1, \\ \eta^1 &= \left(-\frac{1}{2\lambda_1}gx + \alpha\gamma_{11}\right)u^1, & \eta^2 &= \alpha\gamma_{22}u^2 + \alpha\delta_2.\end{aligned}\quad (2.54)$$

Підставивши координати оператора X (2.54) в рівняння (2.18), (2.19), отримуємо наступні умови на параметри γ, δ :

$$\delta_2 = 0, \quad \gamma_{22}\dot{\varphi} = 0. \quad (2.55)$$

З останньої умови випливають два розгалуження:

- 1) при $\dot{\varphi} \neq 0$ $\gamma_{22} = 0$ і оператор X з координатами (2.54) породжує алгебру (2.51);
- 2) при $\dot{\varphi} = 0$ γ_{22} — довільна стала і оператор X з координатами (2.54) породжує алгебру

$$\begin{aligned}AG_1(1, 1) &= \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + xQ_1, Q_1, \\ D &= 2t\partial_t + x\partial_x + \gamma_{11}u^1\partial_{u^1} + \gamma_{22}u^2\partial_{u^2} \rangle.\end{aligned}\quad (2.56)$$

Далі встановимо, чи можливе розширення алгебр (2.51), (2.56) проективним оператором вигляду (2.5).

Спочатку спробуємо розширити алгебру (2.51) оператором (2.5). В цьому випадку $\dot{\varphi} \neq 0$, $\gamma_{22} = 0$ і оператор Π має вигляд

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + t\gamma_{11}u^1\partial_{u^1} - \frac{x^2}{4\lambda_1}u^1\partial_{u^1}. \quad (2.57)$$

Підстановка координат оператора (2.57) в систему (2.18), (2.19) приводить до протиріччя. Отже, у випадку $\dot{\varphi} \neq 0$ система (0.14) неінваріантна відносно оператора (2.5).

Тепер спробуємо розширити алгебру (2.56) оператором (2.5). В цьому випадку $\dot{\varphi} = 0$, γ_{22} — довільна стала і оператор Π має вигляд

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + t(\gamma_{11}u^1\partial_{u^1} + \gamma_{22}u^2\partial_{u^2}) - \frac{x^2}{4\lambda_1}u^1\partial_{u^1}. \quad (2.58)$$

Запишемо координати оператора (2.58)

$$\begin{aligned}\xi^0 &= t^2, & \xi^1 &= tx, \\ \eta^1 &= \left(-\frac{1}{4\lambda_1}x^2 + \gamma_{11}t\right)u^1, & \eta^2 &= \gamma_{22}tu^2.\end{aligned}\quad (2.59)$$

Підстановка координат (2.59) в систему (2.18), (2.19) приводить до уточнення сталих γ_{11}, γ_{22} . Отримуємо, що

$$\gamma_{11} = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_{22} = -1. \quad (2.60)$$

Отже, у випадку $\dot{\varphi} = 0$, розширивши алгебру інваріантності (2.51) системи (0.14), оператором (2.58) при умові (2.60), отримуємо алгебру (2.52).

Теорему 2.2 доведено.

2.1.2. Галілеївська інваріантність системи рівнянь реакції дифузії

Далі дослідимо систему нелінійних рівнянь реакції дифузії (0.14). Тобто поставимо задачу: дослідити, при яких нелінійностях f^{ab} та g^a система (0.14) інваріантна відносно лінійного зображення алгебри Галілея з базисними генераторами вигляду (2.12) та її розширень операторами масштабних: (2.4) та проєктивних (2.5) перетворень.

Мають місце наступні твердження.

Теорема 2.3. Система (0.14) при умові $\langle 1 \rangle \cdot \langle 2 \rangle \neq 0$ інваріантна відносно алгебри Галілея (2.8), (2.6) тоді і тільки тоді, коли дана алгебра має реалізацію (2.12) а система (0.14) локально еквівалентна одній з наступних систем:

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} u^1 \varphi^1(\omega) \\ u^2 \varphi^2(\omega) \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

де $\omega = \frac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $\varphi^1(\omega)$, $\varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції, причому оператор Q_1 має вигляд:

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2} u^2 \partial_{u^2}; \quad (2.62)$$

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ m\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} u^1 \varphi^1(\omega) \\ u^2 \varphi^1(\omega) + u^1 \varphi^2(\omega) \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + m \ln u^1$, $\varphi^1(u^2)$, $\varphi^2(u^2)$ — довільні гладкі функції, причому оператор Q_1 має вигляд:

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1} (u^a \partial_{u^a} - m u^1 \partial_{u^2}); \quad (2.64)$$

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & g(u^2) \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} u^1 \varphi^1(u^2) \\ \varphi^2(u^2) \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

де $g(u^2)$, $\varphi^1(u^2)$, $\varphi^2(u^2)$ — довільні гладкі функції, причому оператор Q_1 має вигляд:

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}. \quad (2.66)$$

Доведення. Покажемо, що лінійні перетворення (2.13) є перетвореннями локальної еквівалентності системи (0.14). Якщо подіяти перетвореннями (2.13) на систему (0.14), то вона зведеться до вигляду:

$$W_t = \partial_x [\Phi(W) W_x] + \zeta(W), \quad (2.67)$$

де $\Phi(W) = A^{-1} F(AW + B) A$, $\zeta(W) = G(AW + B)$. Так як з вигляду системи (2.67) видно, що вона належить тому ж класу, що і система (0.14), то це і означає, що (2.13) є перетвореннями еквівалентності системи (0.14).

Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (0.14) має вигляд (2.16)

З умови інваріантності системи (0.14) відносно оператора (2.16) для знаходження координат інфінітезимального оператора (2.16) та функцій f^{ab} одержуємо систему визначальних рівнянь, яка складається з рівнянь (2.17), (2.18) та наступних рівнянь:

$$\eta^d g_{u^d}^a = (\eta_{u^b}^a - \delta_{ab} \xi_t^0) g^b + \eta_t^a - \eta_{xx}^b f^{ab}. \quad (2.68)$$

З рівнянь (2.17) випливає, що

$$\xi^0 = \xi^0(t), \quad \xi^1 = \xi^1(t, x), \quad \eta^a = \alpha^{ab} u^b + \beta^a, \quad (2.69)$$

де $\alpha^{ab} = \alpha^{ab}(t, x)$, $\beta^a = \beta^a(t, x)$ — гладкі функції. Якщо врахувати (2.69), то рівняння (2.18), (2.68) перепишуться наступним чином

$$\begin{aligned} (\alpha^{ac} u^b + \beta^c) f_{u^c}^{ab} + (\xi_t^0 - 2\xi_x^1) f^{ab} + \alpha^{cb} f^{ac} - \alpha^{ac} f^{cb} &= 0, \\ (\alpha_x^{ac} u^b + \beta_x^c) (f_{u^b}^{ac} + f_{u^c}^{ab}) + 2\alpha_x^{cb} f^{ac} - \xi_{xx}^1 f^{ab} + \delta_{ab} \xi_t^1 &= 0, \\ (\alpha^{dc} u^c + \beta^d) g_{u^d}^a &= (\alpha^{ab} - \delta_{ab} \xi_t^0) g^b + \\ &+ (\alpha_t^{ac} u^c + \beta_t^a) - (\alpha_{xx}^{bc} u^c + \beta_{xx}^b) f^{ab}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Для подальшого розв'язання одержаної системи визначальних рівнянь попередньо уточнимо координати інфінітезимального оператора X , використавши комутаційні властивості алгебри Галілея (2.8).

З вигляду системи (0.14) очевидно, що вона інваріантна відносно перетворень зсуву по незалежних змінних t, x . Цим перетворенням, як відомо, відповідають оператори: $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$. З цих міркувань та з формул (2.69), (2.6) випливає, що найбільш загальний вигляд 4-х парметричної алгебри Галілея (2.8), (2.6), яку допускає система (0.14) задається формулами (2.22).

В доведенні теореми 2.1 показано, що розв'язання першого та другого рівнянь (2.70) дозволяють уточнити алгебру (2.22) формулами (2.31), де $Q_2 = 0$. Ця алгебра породжується інфінітезимальним оператором (2.32), координати ξ^μ, η^a якого мають вигляд (2.37).

З рівнянь (2.17), (2.18), (2.68) випливає, що для того, щоб система (0.14) була інваріантна відносно алгебри Галілея (2.3), функції f^{ab} та g^a повинні задовольняти систему диференціальних рівнянь: (2.38), (2.39) та

$$M^c g_{uc}^a = \alpha_{ab} g^b, \quad (2.71)$$

де $M^c = \alpha_{cd} U^d + \beta_c$, δ_{ab} — символ Кронекера, $a, b, c, d = 1, 2$.

Далі будемо розв'язувати визначальну систему рівнянь (2.38), (2.39), (2.71) для кожного з 6 нееквівалентних зображень алгебри Галілея, що задаються формулами (2.40). Як уже було показано в доведенні теореми 2.1, для 1), 2), 3), 5) випадків зображень алгебри Галілея формулами (2.40) система рівнянь (2.38), (2.39) несумісна. Тому можливими є лише 4), 6) випадки зображень алгебри Галілея, заданих формулами (2.40).

Якщо розв'язувати систему рівнянь (2.38), (2.39) для 4) випадку зображення алгебри Галілея, що задається формулами (2.40), то одержуємо, наступну матрицю F системи (0.14)

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{k}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

Можна показати, що система (0.14) з матрицею F вигляду (2.72) з точністю

до перетворень $t \rightarrow -2\lambda_1 t$ локально еквівалентна системі (0.14) з матрицею F вигляду

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ m\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

де $m = -k$. При цьому оператор Галілея алгебри (2.3) матиме вигляд

$$G = t\partial_x + xQ_1, \quad (2.74)$$

де $Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} - u^1\partial_{u^2})$. Тобто, матриці параметрів α_{ab}, β_a алгебри (2.3) мають вигляд

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda_1} & 0 \\ \frac{m}{2\lambda_1} & -\frac{1}{2\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Розв'язавши рівняння (2.71) при умовах (2.75), отримуємо наступний вигляд функцій g^a

$$g^1 = u^1\varphi^1(\omega), \quad g^2 = u^2\varphi^1(\omega) + u^1\varphi^2(\omega), \quad (2.76)$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + m \ln u^1$, $\varphi^1(\omega)$, $\varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції, при якому система (0.14) має вигляд (2.63).

Розв'язавши систему рівнянь (2.38), (2.39) для випадку 6) при $k \neq 0$ зображення алгебри Галілея, що задається формулами (2.40), одержуємо наступну матрицю F системи (0.14)

$$F = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2k} \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

Можна показати, що до системи (0.14) з матрицею F вигляду (2.72) з точністю до перетворень $t \rightarrow -2\lambda_1 t$ локально еквівалентною є система (0.14) з матрицею F вигляду

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

де $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{k}$. При цьому вигляд оператора Q_1 алгебри Галілея (2.3) буде наступним

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2}, \quad (2.79)$$

а матриці α, β матимуть вигляд

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\lambda_2} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Розв'язавши рівняння (2.71) при умовах (2.80), отримуємо функції g^a у вигляді

$$g^1 = u^1 \varphi^1(\omega), \quad g^2 = u^2 \varphi^2(\omega), \quad (2.81)$$

де $\omega = \frac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $\varphi^1(\omega)$, $\varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції, при якому система (0.14) має вигляд (2.63).

Система рівнянь (2.38), (2.39) при $k = 0$ для випадку 6) зображення алгебри Галілея, що задається формулами (2.40), (2.12) вже розв'язана в доведенні теореми 2.1. В результаті одержана матриця F системи (0.14), задана формулами (2.49) та зображення оператора Галілея алгебри (2.12), задане формулами (2.50). Очевидно що, матриці α, β в цьому випадку задаватимуться наступними формулами

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\lambda_2} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Розв'язавши рівняння (2.71) при умовах (2.82), отримуємо наступний вигляд функцій g^a

$$g^1 = u^1 \varphi^1(\omega), \quad g^2 = \varphi^2(\omega), \quad (2.83)$$

де $\omega = u^2$, $\varphi^1(\omega)$, $\varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції, при якому система (0.14) має вигляд (2.65).

Теорему 2.3 доведено.

Зауваження 2.1. Симетрійні властивості систем (2.61), (2.63) досліджені в роботах [127], [128], [129], [164], [165], [166], [167]. Там зокрема показано, що система

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 \omega^{\frac{4}{\lambda_2 - \lambda_1}}, \\ \lambda_4 u^2 \omega^{\frac{4}{\lambda_2 - \lambda_1}}, \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

де $\omega = \frac{(u^2)^{\lambda_2}}{(u^1)^{\lambda_1}}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — довільні сталі, інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея

$$\begin{aligned} AG_2(1, 1) &= \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + xQ_1, \\ Q_1 &= -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2}, D = 2t\partial_t + x\partial_x + Q_2, \\ \Pi &= t^2\partial_t + tx\partial_x + \frac{x^2}{2}Q_1 + tQ_2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.85)$$

де $Q_2 = -\frac{1}{2}u^a\partial_{u^a}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — довільні сталі;
а система

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 4\lambda_1 & \lambda_1 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3(u^1)^5 e^{\frac{u^2}{u^1}} \\ (\lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^1)(u^1)^4 e^{\frac{u^2}{u^1}} \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

де $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$ — довільні сталі, інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея

$$\begin{aligned} AG_2(1, 1) &= \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + xQ_1, \\ Q_1 &= -\frac{1}{2\lambda_1}(u^a\partial_{u^a} - 4u^1\partial_{u^2}), D = 2t\partial_t + x\partial_x + Q_2, \\ \Pi &= t^2\partial_t + tx\partial_x + \frac{x^2}{2}Q_1 + tQ_2 \rangle, \end{aligned} \quad (2.87)$$

де $Q_2 = -\frac{1}{2}u^a\partial_{u^a}$, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_3, \lambda_4$ — довільні сталі.

Тому в наших дослідженнях зосередимо увагу на можливості розширення алгебри Галілея (2.12) для системи (2.65). Результати таких досліджень відображені в наступній теоремі.

Теорема 2.4. Система (0.14) з нелінійною матрицею дифузії F інваріантна відносно:

1) розширеної алгебри Галілея (2.51), якщо вона локально еквівалентна системі (2.65) при $g(u^2) \neq \text{const}$;

2) розширеної алгебри Галілея

$$\begin{aligned} AG_1(1, 1) &= \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + xQ_1, \\ Q_1 &= -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1}, D = 2t\partial_t + x\partial_x + Q_2 \rangle \end{aligned} \quad (2.88)$$

якщо вона локально еквівалентна системі

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 (u^2)^k \\ \lambda_4 (u^2)^{k+1} \end{pmatrix}, \quad (2.89)$$

причому

$$Q_2 = \frac{2}{k} u^2 \partial_{u^2}, \quad (2.90)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, k$ — довільні сталі.

3) узагальненої алгебри Галілея

$$\begin{aligned} AG_2(1, 1) &= \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + xQ_1, \\ Q_1 &= -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}, \quad D = 2t\partial_t + x\partial_x - u^2 \partial_{u^2}, \\ \Pi &= t^2 \partial_t + tx\partial_x - \left(\frac{x^2}{4\lambda_1} + \frac{t}{2}\right) u^1 \partial_{u^1} - tu^2 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (2.91)$$

якщо вона локально еквівалентна системі

$$U_t = \partial_x \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} U_x \right] + \begin{pmatrix} \lambda_3 u^1 (u^2)^2 \\ \lambda_4 (u^2)^3 \end{pmatrix}. \quad (2.92)$$

Доведення. Якщо доповнити алгебру (2.12) оператором (2.4), то одержиться алгебра $AG_1(1, 1)$, яка згідно [107] називається розширеною алгеброю Галілея. З комутаційних співвідношень між її операторами випливає, що $[D, G] = G$. Обчисливши дужку Лі $[D, G]$, отримуємо $[D, G] = G + x(Q_2 Q_1 - Q_1 Q_2)$. Тоді, врахувавши наведене вище комутаційне співвідношення, очевидно, що оператори Q_1 та Q_2 повинні задовольняти умову $[Q_1, Q_2] = 0$. Звідси випливає уточнений вигляд оператора Q_2 :

$$Q_2 = \gamma_{11} u^1 \partial_{u^1} + (\gamma_{22} u^2 + \delta_2) \partial_{u^2}. \quad (2.93)$$

Запишемо координати оператора (2.4), (2.93):

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2t, \quad \xi^1 = x, \\ \eta^1 &= \gamma_{11} u^1, \quad \eta^2 = \gamma_{22} u^2 + \delta_2. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Підставивши (2.94) в рівняння (2.18), отримуємо наступні умови:

$$\delta_2 = 0, \quad \gamma_{22} \dot{\varphi} = 0. \quad (2.95)$$

Далі розв'язуватимемо рівняння (2.68). Підставивши формули (2.94) в рівняння (2.68), отримуємо:

$$\begin{aligned} \gamma_{22} u^2 \dot{\varphi}^1 &= -2\varphi^1, \\ \gamma_{22} u^2 \dot{\varphi}^2 &= (\gamma_{22} - 2)\varphi^2. \end{aligned} \quad (2.96)$$

З умови (2.95) випливають два розгалуження:

1) при $\dot{\varphi} \neq 0$, $\gamma_{22} = 0$ з рівнянь (2.96) випливає, що

$$\varphi^1 = 0, \quad \varphi^2 = 0. \quad (2.97)$$

Тоді, враховуючи формули (2.12), (2.4), очевидно, що приходимо до 1) пункту теореми.

2) при $\dot{\varphi} = 0$, γ_{22} — довільна стала, розв'язавши рівняння (2.96), отримуємо:

$$\varphi^1 = \lambda_3(u^2)^k, \quad \varphi^2 = \lambda_4(u^2)^{k+1}, \quad (2.98)$$

$$\gamma_{22} = -\frac{2}{k}. \quad (2.99)$$

Якщо врахувати формули (2.12), (2.4), то одержаний результат приводить нас до пункту 2) теореми.

Далі встановимо, чи можливе розширення алгебр (2.51), (2.88) проективним оператором вигляду (2.5).

Спочатку спробуємо розширити алгебру (2.51) оператором (2.5). В цьому випадку $\dot{\varphi} \neq 0$, $\gamma_{22} = 0$ і оператор Π має вигляд

$$\Pi = t^2 \partial_t + tx \partial_x + t\gamma_{11} u^1 \partial_{u^1} - \frac{x^2}{4\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}. \quad (2.100)$$

Неважко переконатися, що в цьому випадку система рівнянь (2.18), (2.68) несумісна. Отже, у випадку $\dot{\varphi} \neq 0$ система (2.65) неінваріантна відносно оператора (2.5).

Тепер спробуємо розширити алгебру (2.88) оператором (2.5). В цьому випадку $\dot{\varphi} = 0$, $\gamma_{22} = -\frac{2}{k}$ і оператор Π має вигляд

$$\Pi = t^2 \partial_t + tx \partial_x + t(\gamma_{11} u^1 \partial_{u^1} - \frac{2}{k} u^2 \partial_{u^2}) - \frac{x^2}{4\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}. \quad (2.101)$$

Оператору (2.101) відповідають наступні координати інфінітезимального оператора X :

$$\begin{aligned} \xi^0 &= t^2, & \xi^1 &= tx, \\ \eta^1 &= (-\frac{1}{4\lambda_1} x^2 + \gamma_{11} t) u^1, & \eta^2 &= -\frac{2}{k} t u^2. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Функції (2.102) систему (2.18) задовольняють тотожньо, а рівняння (2.68) при умовах:

$$k = 2, \quad \gamma_{11} = -\frac{1}{2}, \quad \gamma_{22} = -1. \quad (2.103)$$

Отже, у випадку $\dot{\varphi} = 0$, розширивши алгебру інваріантності (2.88) системи (2.89) оператором (2.101) при умові (2.103), отримуємо алгебру (2.91), а система (2.89) стає локально еквівалентна до системи (2.92).

Теорему 2.4 доведено.

Таким чином, серед систем вигляду (0.14) інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея лише системи локально еквівалентні до систем (2.92), (2.84), (2.86).

2.2. Нелокальні перетворення системи нелінійних рівнянь дифузії

Розглянемо сукупність трьох перетворень:

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v_x^a, \quad (2.104)$$

де $v^a = v^a(t, x)$ — нові невідомі функції;

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \quad (2.105)$$

де x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні;

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^a = z^a, \quad (2.106)$$

де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні.

Теорема 2.5. *Перетворення (2.104), (2.105), (2.106) є перетвореннями еквівалентності системи (0.13).*

Доведення. Застосуємо до системи (0.13) нелокальну заміну вигляду (2.104), тобто в системі (0.13) покладемо, що

$$t = t, \quad x = x, \quad u^1 = v_x^1, \quad u^2 = v_x^2,$$

де $v^a = v^a(t, x)$ — нові невідомі функції. Підставивши (2.104) в (0.13) і проінтегрувавши одержану систему по змінній x , будемо мати:

$$V_t = f(V_x)V_{xx} + \dot{G}(t), \quad (2.107)$$

де $V = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$, $G(t) = \begin{pmatrix} g^1(t) \\ g^2(t) \end{pmatrix}$, $\dot{G} = \frac{dG}{dt}$, $g^a(t)$ — довільні гладкі функції змінної t . Надалі будемо розглядати систему

$$V_t = f(V_x)V_{xx}, \quad (2.108)$$

оскільки заміною $V \rightarrow V + G$ система (2.107) зводиться до системи (2.108).

Якщо до системи (2.108) застосувати перетворення годографа вигляду (2.105), тобто виконати в ній заміну

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2,$$

де x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні, то дана система зведеться до вигляду

$$\begin{aligned} w_0^1 &= \frac{1}{(w_1^1)^2} [(f^{11} + w_1^2 f^{12})w_{11}^1 - w_1^1 f^{12} w_{11}^2], \\ w_0^2 &= \frac{1}{(w_1^1)^3} [(f^{11} + w_1^2 f^{12})w_1^2 - (f^{21} + w_1^2 f^{22})]w_{11}^1 + \\ &+ \frac{1}{(w_1^1)^2} (f^{22} - w_1^2 f^{12})w_{11}^2, \end{aligned} \quad (2.109)$$

де $w_\mu^a = \frac{\partial w^a}{\partial x_\mu}$, $w_{11}^a = \frac{\partial^2 w^a}{\partial x_1^2}$, $\mu = 0, 1$, причому у формулах (2.109)

$$f^{ab} = f^{ab} \left(\frac{1}{w_1^1}, \frac{w_1^2}{w_1^1} \right); a, b = \overline{1, 2}. \quad (2.110)$$

Продиференціювавши систему (2.109) по змінній x_1 , та поділявши перетвореннями (2.106), тобто ввівши в системі (2.109) заміну

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^1 = z^1, \quad w_1^2 = z^2,$$

де $z^a = z^a(x_0, x_1)$ — нові залежні змінні, одержимо наступну систему

$$Z_0 = \partial_1 [\Phi(Z)Z_1], \quad (2.111)$$

де $Z = \begin{pmatrix} z^1 \\ z^2 \end{pmatrix}$, $Z_\mu = \frac{\partial Z}{\partial x_\mu}$, $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $F(Z) = \begin{pmatrix} \Phi^{11} & \Phi^{12} \\ \Phi^{21} & \Phi^{22} \end{pmatrix}$,
 $\Phi^{ab} = \Phi^{ab}(Z)$, $\mu = 0, 1$,

причому функції $F^{ab}(Z)$ пов'язані із функціями f^{ab} наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\Phi^{11} &= (z^1)^{-2}[f^{11} + z^2 f^{12}], & \Phi^{12} &= -(z^1)^{-1} f^{12}, \\ \Phi^{21} &= (z^1)^{-3}[z^2(f^{11} + z^2 f^{12}) - (f^{21} + z^2 f^{22})], \\ \Phi^{22} &= (z^1)^{-2}[f^{22} - z^2 f^{12}],\end{aligned}\tag{2.112}$$

де $f^{ab} = f^{ab}(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1})$, $\Phi^{ab} = \Phi^{ab}(Z)$.

Таким чином, ми встановили, що ланцюжок заміन (2.104), (2.105), (2.106) зводить систему (0.13) до системи рівнянь того ж класу вигляду (2.111) і навпаки не важко переконатися, що система (2.111) за допомогою вказаних заміин зводиться до системи (0.13).

Теорему 2.5 доведено.

Оскільки система (0.13) містить дві функції u^1 та u^2 то перетворення подографа типу (2.105) не єдиноможливе для цієї системи. Так, якщо в (2.105) замінити: $v^1 \rightarrow v^2, v^2 \rightarrow v^1, w^1 \rightarrow w^2, w^2 \rightarrow w^1$, то замість (2.105) одержимо:

$$t = x_0, \quad x = w^2, \quad v^1 = w^1, \quad v^2 = x_1.\tag{2.113}$$

Теорема 2.6. *Перетворення (2.104), (2.113), (2.106) є перетвореннями еквівалентності системи (0.13).*

Доведення. Провівши міркування аналогічні до тих, що проведені в доведенні теореми 2.1, приходимо до висновку, що ланцюжок заміин (2.104), (2.113), (2.106) також зводить систему (0.13) до системи рівнянь того ж класу вигляду (2.111) і, навпаки, система (2.111) за допомогою вказаних заміин зводиться до системи (0.13), причому функції $F^{ab}(Z)$ пов'язані із функціями f^{ab} наступними співвідношеннями, відмінними від (2.112):

$$\begin{aligned}\Phi^{11} &= (z^2)^{-2}[f^{11} - z^1 f^{21}], \\ \Phi^{12} &= (z^2)^{-3}[-(z^1 f^{11} + f^{12}) + z^1(z^1 f^{21} + f^{22})], \\ \Phi^{21} &= -(z^2)^{-1} f^{21}, & \Phi^{22} &= (z^2)^{-2}[z^1 f^{21} + f^{22}],\end{aligned}\tag{2.114}$$

де $f^{ab} = f^{ab}(\frac{z^1}{z^2}, \frac{1}{z^2})$, $\Phi^{ab} = \Phi^{ab}(z^1, z^2)$.

Теорему 2.6 доведено.

Для простоти міркувань надалі суперпозицію перетворень (2.104), (2.105), (2.106) назвемо *перетворенням* P_1 , а суперпозицію перетворень (2.104), (2.113), (2.106) — *перетворенням* P_2 .

Теорема 2.7. *Перетворення P_1 і P_2 утворюють некомутативну групу з операцією групового множення " $\circ$ ", яка діє таким чином: $P_1 \circ P_2 = P_2$, $P_2 \circ P_1 = P_1$, $P_1 \circ P_1 = P_1$, $P_2 \circ P_2 = P_2$.*

Доведення. Розглянувши дію суперпозиції перетворень P_1 та P_2 на системі (0.13), стає зрозуміло, що:

- а) послідовною дією цих перетворень на систему (0.13) в порядку P_1 , P_2 , одержується система, локально еквівалентна до системи (2.111) з матрицею коефіцієнтів (2.114);
- б) послідовною дією цих перетворень на систему (0.13) в порядку P_2 , P_1 , одержується система, локально еквівалентна до системи (2.111) з матрицею коефіцієнтів (2.112);
- с) послідовною дією цих перетворень на систему (0.13) в порядку P_1 , P_2 , P_1 та P_2 , P_1 , P_2 одержується системи, локально еквівалентні до системи (0.13).

Теорему 2.7 доведено.

Зауваження 2.2. *Розглянемо випадок довільної кількості залежних змінних системи (0.13), тобто $U \in R^n$.*

Якщо заміни (2.104), (2.105), (2.106) узагальнити таким чином:

$$\begin{aligned} t &= t, \quad x = x, \quad u^a = v_x^a, \quad a = \overline{1; n}; \\ t &= x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^k = w^k, \quad k = \overline{2; n}; \\ x_0 &= x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^a = z^a, \quad a = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

то система (0.13) при $U \in R^n$ зведеться до системи (2.111), записаної для випадку $Z \in R^n$, причому зв'язок між функціями Φ^{ab} та f^{ab} буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi^{11} &= (z^1)^{-2} [f^{11} + z^l f^{1l}], & \Phi^{1k} &= -(z^1)^{-1} f^{1k}, \\ \Phi^{k1} &= (z^1)^{-3} [z^k (f^{11} + z^l f^{1l}) - (f^{k1} + z^l f^{kl})], \\ \Phi^{kl} &= (z^1)^{-2} [f^{kl} - z^k f^{1l}], \end{aligned} \quad (2.116)$$

де $\Phi^{ab} = \Phi^{ab}(Z)$, $f^{ab} = f^{ab}(\frac{1}{z^1}, \frac{z^2}{z^1}, \dots, \frac{z^n}{z^1})$, $k, l = \overline{2; n}$.

Теорема 2.8. *Перетворення (2.104), (2.105), (2.106) є перетвореннями інваріантності системи (0.13), якщо функції f^{ab} задовольняють системі*

$$\begin{aligned} f^{11}(\frac{1}{z^1}; \frac{z^2}{z^1}) + z^2 f^{12}(\frac{1}{z^1}; \frac{z^2}{z^1}) &= (z^1)^2 f^{11}(z^1; z^2), \\ f^{12}(\frac{1}{z^1}; \frac{z^2}{z^1}) &= -z^1 f^{12}(z^1; z^2), \\ f^{21}(\frac{1}{z^1}; \frac{z^2}{z^1}) + z^2 f^{22}(\frac{1}{z^1}; \frac{z^2}{z^1}) &= -(z^1)^3 f^{21}(z^1; z^2) - z^2 (z^1)^2 f^{11}(z^1; z^2), \\ (z^1)^2 f^{22}(z^1; z^2) + z^1 z^2 f^{12}(z^1; z^2) &= f^{22}(\frac{1}{z^1}; \frac{z^2}{z^1}). \end{aligned} \quad (2.117)$$

Доведення. Поставимо задачу, знайти такі функції $f(U)$, при яких система (0.13) дією перетворення P_1 переходить сама в себе. Для цього у формулах (2.112) необхідно покласти

$$\Phi^{ab}(z^1; z^2) = f^{ab}(z^1; z^2). \quad (2.118)$$

Внаслідок цього і одержуємо систему функціональних рівнянь (2.117) для знаходження функцій f^{ab} .

Теорему 2.8 доведено.

Зауваження 2.3. *Аналогічні результати одержуються, якщо використати перетворення P_2 та систему (2.114).*

Розв'язком системи (2.117) можуть бути, наприклад, такі функції:

$$\begin{aligned} f^{11} &= \frac{\lambda^1}{z^1}, f^{12} = 0, \\ f^{21} &= (z^1)^{-\frac{3}{2}} \Psi(\ln z^1; \frac{z^2}{\sqrt{z^1}}), f^{22} = \frac{\lambda^2}{z^1}, \end{aligned}$$

де $\Psi(\ln z^1; \frac{z^2}{\sqrt{z^1}})$ - довільна гладка функція своїх аргументів, яка задовольняє умову: $\Psi(-\alpha_1; \alpha_2) = -\Psi(\alpha_1; \alpha_2)$.

При виконанні умов (2.117) формули (2.104), (2.105), (2.106) будуть нелокальними перетвореннями інваріантності системи (0.13). Цей факт можна використати для побудови нелокальних формул розмноження розв'язків даної системи.

Теорема 2.9. Система вигляду (2.111) лінеаризується тоді і тільки тоді коли вона локально еквівалентна системі

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1 \left[\frac{\lambda_{11} + \lambda_{12} z^2}{(z^1)^2} z_1^1 - \frac{\lambda_{12}}{z^1} z_1^2 \right], \\ z_0^2 &= \partial_1 \left[\frac{z^2(\lambda_{11} + \lambda_{12} z^2) - (\lambda_{21} + \lambda_{22} z^2)}{(z^1)^3} z_1^1 + \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12} z^2}{(z^1)^2} z_1^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Доведення. Якщо припустити, що система (0.13), лінійна, тобто $f(U) = \Lambda$, де $\Lambda = (\lambda_{ab})$ - стала матриця, то, використавши формулу (2.112), одержимо систему (2.119), яка за допомогою перетворень (2.104), (2.105), (2.106) зводиться до лінійної системи вигляду

$$U_t = \Lambda U_{xx}. \quad (2.120)$$

Теорему 2.9 доведено.

Зауваження 2.4. Аналогічний результат можна одержати на випадок системи (0.13) при $U \in R^n$. Узагальнивши перетворення P_1 формулами (2.115), одержимо лінеаризацію наступної системи:

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1 \left[\frac{\lambda_{11} + \lambda_{1l} z^l}{(z^1)^2} z_1^1 - \frac{\lambda_{1l}}{z^1} z_1^l \right], \\ z_0^k &= \partial_1 \left[\frac{-\lambda_{k1} - \lambda_{kl} z^l + \lambda_{11} z^k + \lambda_{1l} z^k z^l}{(z^1)^3} z_1^1 + \frac{\lambda_{kl} - \lambda_{1l} z^k}{(z^1)^2} z_1^l \right], \end{aligned} \quad (2.121)$$

де $k, l = \overline{2; n}$.

Нижче ми детальніше зупинимося на системі (2.119), хоч всі отримані для неї результати легко переносяться на багатокomпонентну систему (2.121).

Найпростіший випадок системи (2.119) виникає при $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda \neq 0$, $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$ і тоді вона набуває вигляду:

$$z_0^1 = \lambda \partial_1 ((z^1)^{-2} z_1^1), \quad z_0^2 = \lambda \partial_1 ((z^1)^{-2} z_1^2). \quad (2.122)$$

Легко помітити, що обидва рівняння в системі (2.120) мають таку ж саму нелінійність, як і нелінійне рівняння дифузії, лінеаризоване в роботах [185], [118], тобто вона є двокомпонентним аналогом цього рівняння. Цікаво зазначити, що система (2.122) володіє значно ширшою алгеброю інваріантності, ніж її скалярний аналог (див. перше рівняння в системі). Справді, прямим застосуванням алгоритму Лі до системи (2.122) можна встановити,

що максимальною алгеброю інваріантності (МАІ) цієї системи (2.120) є восьми-вимірна алгебра з базовими операторами:

$$\begin{aligned} \partial_0 &= \frac{\partial}{\partial x_0}, \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1, D_2 = x_1\partial_1 - z^1\partial_{z^1}, \\ Q_1 &= x_1z^1\partial_{z^2}, Q_2 = z^1\partial_{z^2}, Q_3 = z^2\partial_{z^2}, Q_4 = \partial_{z^2}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

Як відомо, у скалярному випадку отримується лише чотири-вимірна МАІ [61]. Неважко переконатися, що локальною заміною

$$u = -\frac{1}{z^1}, \quad v = z^2 \quad (2.124)$$

система (2.119) зводиться до вигляду:

$$\begin{aligned} u_0^1 &= u^2\partial_1[(\lambda_{11} + \lambda_{12}v)u_1] + \lambda_{12}uv_1, \\ v_0^2 &= \partial_1[(\lambda_{21} + (\lambda_{22} - \lambda_{11})v - \lambda_{12}v^2)u_1 + (\lambda_{22} - \lambda_{12}v)u^2v_1]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Як бачимо, система (2.125) містить лише поліноміальні нелінійності (кубічні і четвертого степеня). Добре відомо, що деякі складні процеси у живій природі моделюються дифузивними системами з перехресною дифузією та поліноміальною залежністю коефіцієнтів дифузії від шуканих функцій (див., наприклад, [188]). Система (2.125) при $\lambda_{12} \neq 0$ або $\lambda_{22} \neq 0$ належить саме до систем такого типу. Можна помітити, що при $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$ вона набуває вигляду:

$$u_0 = \lambda_{11}u^2u_{11}, \quad v_0 = \partial_1[(\lambda_{22} - \lambda_{11})vuu_1 + \lambda_{22}u^2v_1], \quad (2.126)$$

яка містить лише кубічні нелінійності.

Зауважимо, що в роботі [89] за допомогою відповідних нелокальних перетворень дещо іншу систему рівнянь з кубічними нелінійностями, а саме:

$$\begin{aligned} u_0 &= \lambda_{11}(u + v)^2u_{11} + (\lambda_{11} - \lambda_{22})(u + v)u_1v_1, \\ v_0 &= \lambda_{22}(u + v)^2v_{11} + (\lambda_{22} - \lambda_{11})(u + v)u_1v_1, \end{aligned} \quad (2.127)$$

також зведено до системи двох лінійних рівнянь дифузії:

$$u_t^1 = \lambda_{11}u_{xx}^1, \quad u_t^2 = \lambda_{22}u_{xx}^2. \quad (2.128)$$

Таким чином, за допомогою ланцюжка нелокальних перетворень систему нелінійних дифузійних рівнянь (2.126) можна звести до вигляду (2.128) і

навпаки. Наголосимо, що локальними перетвореннями цього зробити неможливо, бо ці системи мають різні розмірності алгебр симетрій Лі. МАІ системи (2.126) є шестивимірною і породжується базисними операторами:

$$\begin{aligned} A_1 = \langle \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \\ D_2 = x_1\partial_1 - u\partial_u, \quad Q_1 = u\partial_v, \quad Q_2 = v\partial_v \rangle, \end{aligned} \quad (2.129)$$

а МАІ системи (2.128) є п'ятивимірною з базисними операторами:

$$\begin{aligned} A_2 = \langle \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_1 = 2t\partial_t + x\partial_x, \\ D_2 = x\partial_x - u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}, \quad Q = \partial_{u^1} - \partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Як приклад, наведемо точний розв'язок системи нелінійних рівнянь (2.126):

$$u = -\frac{c_1}{\sqrt{x_0\psi(x_0, x_1)}}, \quad v = \frac{c_2}{c_1}(\psi(x_0, x_1))^{1-\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}}}, \quad (2.131)$$

де $\psi(x_0, x_1)$ є розв'язком рівняння:

$$\psi^2 \sqrt{\ln \psi} \frac{d\psi}{dx_1} = \frac{c_1^4}{\sqrt{\lambda_{11}}} x_0^{-\frac{5}{2}};$$

який отримується з фундаментального розв'язку системи (2.128):

$$u^1 = \frac{c_1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda_{11}t}\right), \quad u^2 = \frac{c_2}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\lambda_{22}t}\right), \quad (2.132)$$

де $c_1, c_2 \in \mathbf{R}^1$, шляхом застосування ланцюжка перетворень (2.104), (2.105), (2.106).

2.3. Нелокальні формули розмноження розв'язків системи нелінійних рівнянь дифузії

В залежності від вигляду матриці Λ алгебра інваріантності системи (2.120) задається наступними операторами:

$$1) \text{ при } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \langle A, Q = -\frac{1}{2}u^a\partial_{u^a}, Q_1 = u^1\partial_{u^1}, Q_2 = u^1\partial_{u^2}, Q_3 = u^2\partial_{u^1} \rangle;$$

2) при $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$,

$$A_2 = \langle A, Q = -\frac{1}{2\lambda_1}u^1\partial_{u^1} - \frac{1}{2\lambda_2}u^2\partial_{u^2}, Q_1 = u^1\partial_{u^1} \rangle;$$

3) при $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$,

$$A_3 = \langle A, Q = -\frac{1}{2}u^a\partial_{u^a} + \frac{\lambda}{2}u^1\partial_{u^2} \rangle;$$

4) при $\Lambda = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$,

$$A_4 = \langle A, Q = \frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}[-\alpha u^a\partial_{u^a} + \beta(u^2\partial_{u^1} - u^1\partial_{u^2})] \rangle;$$

де

$$A = \langle \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, G = t\partial_x + xQ, Q, D = 2t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{2}u^a\partial_{u^a},$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{2}tu^a\partial_{u^a} + \frac{x^2}{2}Q, X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2} \rangle,$$

причому функції $\beta = \beta(t, x)$ є довільними розв'язками системи

$$L\beta = 0,$$

де $\beta = \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \end{pmatrix}$, $L = \partial_t + \Lambda\partial_{xx}$.

Система (2.120) на відміну від системи (2.119) інваріантна відносно оператора $G = t\partial_x + xQ$, де $Q = -\frac{1}{2}u^a\partial_{u^a}$, наприклад для $\Lambda = E$.

Неважко переконатися, що оператор $G = t\partial_x + xQ$ породжує перетворення:

$$\begin{aligned} t &= t, & x &= x + \theta t, \\ u^1(t; x) &= u^1(t; x) e^{-\frac{\theta^2}{4}t - \frac{\theta}{2}x}, \\ u^2(t; x) &= u^2(t; x) e^{-\frac{\theta^2}{4}t - \frac{\theta}{2}x}. \end{aligned}$$

Нехай, $u^1 = u^1(t; x)$; $u^2 = u^2(t; x)$ — деякий гладкий розв'язок системи

$$U_t^2 = U_{xx}^{22}. \quad (2.133)$$

Нехай дія оператора G перетворює цей розв'язок системи (2.133) в наступний розв'язок:

$$u^1 = u^1(t; x); \quad u^2 = u^2(t; x)$$

системи

$$U_t^1 = U_{xx}^{11}.$$

Позначимо $t = t, x = x, \theta = a$. Тоді запишемо Ліівські формули розмноження розв'язків:

$$\begin{aligned} u^1(t; x) &= u^1(t; at + x) e^{\frac{a^2}{4}t + \frac{a}{2}x}, \\ u^2(t; x) &= u^2(t; at + x) e^{\frac{a^2}{4}t + \frac{a}{2}x}, \\ x &= x - at. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Для побудови нелокальних формул розмноження розв'язків системи (2.119) подіємо на Ліівські формули розмноження розв'язків (2.134) нелокальними перетвореннями (2.105), (2.104). (При цьому використовуємо той факт, що для лінеаризації системи (2.119) достатньо лише перетворень (2.104), (2.105)).

Для дії на формули (2.134) перетворення (2.105) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} t &= t, \quad x = V^1(t, \tau), \quad u^1(t, x) = \tau, \quad u^2(t, x) = v^1(t, \tau), \\ t &= t, \quad x = V^1(t, y), \quad u^1(t, x) = y, \quad u^2(t, x) = v^2(t, y). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Подіавши перетвореннями (2.135) на (2.134), одержуємо:

$$\begin{aligned} v^1(t; y) &= v^1(t; \tau) - at, \\ v^2(t; y) &= v^2(t; \tau) e^{\frac{a^2}{4}t + \frac{a}{2}v^1(t; y)}, \\ y &= \tau e^{\frac{a^2}{4}t + \frac{a}{2}v^1(t; y)}. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Продиференціювавши (2.136) по y , одержимо:

$$\begin{aligned} v_y^1(t; y) &= \tau_y v_\tau^1(t; \tau), \\ v_y^2(t; y) &= [\tau_y v_\tau^2(t; \tau) + \frac{a}{2} v^2(t; \tau) v_y^1(t; y)] e^{\frac{a^2}{4}t + \frac{a}{2}v^1(t; y)}, \\ 1 &= \tau_y e^{\frac{a^2}{4}t + \frac{a}{2}v^1(t; y)} + \frac{a}{2} \tau e^{\frac{a^2}{4}t + \frac{a}{2}v^1(t; y)} v_y^1(t; y), \end{aligned} \quad (2.137)$$

якщо врахувати співвідношення:

$$e^{\frac{a^2}{4}t + \frac{a}{2}v^1(t; y)} = \frac{\tau}{y},$$

то формули (2.137) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} v_y^1(t; y) &= \tau_y v_\tau^1(t; \tau), \\ v_y^2(t; y) &= \frac{y}{\tau} \tau_y [v_\tau^2(t; \tau) + \frac{a}{2} v^2(t; \tau) v_\tau^1(t; \tau)], \\ \tau_y &= \frac{1}{y(\tau^{-1} + \frac{a}{2} v_\tau^1(t; \tau))}. \end{aligned} \quad (2.138)$$

Для даної задачі перетворення (2.104) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} t = t, \quad \tau = \tau(t; y), \quad V_\tau^1(t, \tau) &= z^1(t; \tau), \quad v_\tau^2(t, \tau) = z^2(t, \tau), \\ t = t, \quad y = y, \quad V_y^1(t, y) &= z^1(t; y), \quad v_y^2(t, y) = z^2(t, y). \end{aligned} \quad (2.139)$$

Подіавши перетвореннями (2.139) на (2.138), одержуємо:

$$\begin{aligned} z^1(t; y) &= \tau_y z^1(t; \tau), \\ z^2(t; y) &= \frac{y}{\tau} \tau_y [z^2(t; \tau) + \frac{a}{2} \int z^2(t; \tau) d\tau \cdot z^1(t; \tau)], \\ \tau_y &= \frac{1}{y(\tau^{-1} + \frac{a}{2} z^1(t; \tau))}. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Остаточно нелокальні формули розмноження розв'язків системи

$$z_t^1 = \partial_y \left[\frac{z_y^1}{(z^1)^2} \right], \quad z_t^2 = \partial_y \left[\frac{z_y^2}{(z^1)^2} \right], \quad (2.141)$$

можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} z^1(t; y) &= \frac{z^1(t; \tau)}{y(\tau^{-1} + \frac{a}{2} z^1(t; \tau))}, \\ z^2(t; y) &= \frac{\tau z^2(t; \tau) - \int z^2(t; \tau) d\tau}{\tau^2 [\tau^{-1} + \frac{a}{2} z^1(t; \tau)]} + \tau^{-1} \int z^2(t; \tau) d\tau, \\ \tau_y &= \frac{1}{y(\tau^{-1} + \frac{a}{2} z^1(t; \tau))}, \quad \tau_t = (z^1)^{-2} \tau_y^{-2} \tau_{yy} + \frac{a}{z^1}. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Зауважимо, що останнє рівняння в формулах (2.142) одержується внаслідок підстановки формул (2.140) у рівняння (2.141).

Використавши симетрію системи (2.120) при $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, а саме, перетворення, породжені операторами G , Π її алгебри інваріантності, неважко одержати інші нелокальні формули розмноження розв'язків систем вигляду (2.119).

Так, оператор $G = t\partial_x + x(-\frac{1}{2}u^c\partial_{u^c} + \frac{\lambda}{2}u^1\partial_{u^2})$, де $c = \overline{1;2}$ породжує перетворення:

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ t=t, & x=x + 2a \frac{2}{t}, \end{matrix}$$

$$u^1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & x \end{pmatrix} = u^1 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ t & x \end{pmatrix} e^{-a^2 t - a^2 x},$$

$$u^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ t & x \end{pmatrix} = [u^2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ t & x \end{pmatrix} + \lambda(a^2 \frac{2}{t} + a \frac{2}{x}) u^1 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ t & x \end{pmatrix}] e^{-a^2 t - a^2 x}.$$

На основі вище наведених перетворень легко одержати "ліівські"

формули розмноження розв'язків системи (2.120):

$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ t=t, & x=x + 2a \frac{2}{t}, \end{matrix}$$

$$u^1 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ t & x \end{pmatrix} = u^1 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ t & x + 2a \frac{2}{t} \end{pmatrix} e^{a^2 t + a^2 x},$$

$$u^2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ t & x \end{pmatrix} = [u^2 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ t & x + 2a \frac{2}{t} \end{pmatrix} - \lambda(a^2 \frac{2}{t} + a \frac{2}{x}) u^1 \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ t & x + 2a \frac{2}{t} \end{pmatrix}] e^{a^2 t + a^2 x}.$$

Подіавши на ці формули нелокальними перетвореннями (2.135) та (2.139), одержуємо нелокальні формули розмноження розв'язків системи (2.119):

$$\begin{aligned} z^1(t; y) &= \frac{z^1(t; \tau)}{y(\tau^{-1} + az^1(t; \tau))}, \\ z^2(t; y) &= \frac{z^2(t; \tau) + \lambda a \tau (a^2 t - 1) z^1(t; \tau) + \lambda a^2 t}{1 + a \tau z^1(t; \tau)} - \lambda a \int z^1(t; \tau) d\tau, \\ \tau_y &= \frac{1}{y(\tau^{-1} + az^1(t; \tau))}, \\ \tau_t &= (z^1)^{-2} (\tau_y)^{-2} \tau_{yy} + \frac{2a}{z^1}. \end{aligned} \tag{2.143}$$

Оператор $\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + \frac{x^2}{2}(-\frac{1}{2}u^c\partial_{u^c} + \frac{\lambda}{2}u^1\partial_{u^2}) - \frac{1}{2}tu^c\partial_{u^c}$, де $c = \overline{1;2}$, породжує перетворення:

$$\begin{aligned} t &= \frac{t^2}{1-bt^2}, & x &= \frac{x^2}{1-bx^2}, \\ u^1(t; x) &= \sqrt{1-bt^2} u^1\left(\frac{t^2}{1-bt^2}; \frac{x^2}{1-bx^2}\right) e^{\frac{-bx^2}{4(1-bt^2)}}, \\ u^2(t; x) &= [u^2\left(\frac{t^2}{1-bt^2}; \frac{x^2}{1-bx^2}\right) \sqrt{1-bt^2} + \lambda \frac{b}{8} u^1\left(\frac{t^2}{1-bt^2}; \frac{x^2}{1-bx^2}\right) \frac{x^2}{\sqrt{1-bt^2}}] e^{\frac{-bx^2}{4(1-bt^2)}}. \end{aligned}$$

З наведених перетворень легко одержати "ліівські" формули розмноження розв'язків системи (2.120):

$$\begin{aligned} t &= \frac{t}{1+bt}, & x &= \frac{x}{1+bx}, \\ u^1(t; x) &= u^1\left(\frac{t}{1+bt}; \frac{x}{1+bx}\right) e^{\frac{bx^2}{4(1-bt^2)}}, \\ u^2(t; x) &= [u^2\left(\frac{t}{1+bt}; \frac{x}{1+bx}\right) - \frac{\lambda b}{8} \frac{x}{1-bt^2} u^1\left(\frac{t}{1+bt}; \frac{x}{1+bx}\right)] e^{\frac{bx^2}{4(1-bt^2)}}. \end{aligned}$$

Подіавши на ці формули нелокальними перетвореннями (2.135) та (2.139), одержуємо нелокальні формули розмноження розв'язків системи (2.120):

$$\begin{aligned} z^1(t; y) &= \frac{\tau_y z^1(\frac{t}{1-bt}; \tau)}{bt+1}, \\ z^2(t; y) &= \tau_y [z^2 - \frac{\lambda b y z^1}{bt+1} (\frac{1}{4} \int z^1 d\tau + \\ &+ (\frac{1}{2\lambda\tau} - \frac{1}{8\tau z^1}) (\int z^1 d\tau)^2 - \frac{b(\int z^1 d\tau)^3}{16(bt+1)})], \\ \tau_y &= \frac{\tau}{y(1+\frac{b}{2}\tau(1-bt)z^1 \int z^1 d\tau)}. \end{aligned} \tag{2.144}$$

Покажемо ефективність нелокальних формул розмноження розв'язків. В якості прикладу виберемо наступний розв'язок системи (2.141):

$$z^1(t; y) = 1, \quad z^2(t; y) = t + \frac{1}{2}y^2.$$

На наведений розв'язок подіємо формулами (2.142). Внаслідок цього одержуємо такий розв'язок системи (2.141)

$$z^1 = \frac{1}{y(\tau^{-1} + \frac{a}{2})}, \quad z^2 = t + (\frac{1}{3(1+\frac{a}{2}\tau)} + \frac{1}{6})\tau^2,$$

де τ — розв'язок рівняння $\ln \tau + \frac{a}{2}\tau = \ln y + \frac{a^2}{4}t + c_1$.

В якості другого прикладу виберемо наступний розв'язок системи (2.119) при $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$:

$$z^1(t; y) = 1, \quad z^2(t; y) = 1.$$

На наведений розв'язок подіємо формулами (2.144). Внаслідок цього одержуємо такий розв'язок системи (2.119)

$$z^1 = \frac{(1-bt)\tau}{y(1+\frac{b}{2}(1-bt)\tau^2)}, \quad z^2 = \tau_y [1 - \lambda b(1-bt)((\frac{1}{8} + \frac{1}{2\lambda})\tau - \frac{b(1-bt)\tau^3}{16})],$$

де τ — розв'язок рівняння $\ln \tau + \frac{b}{4}(1-bt)\tau^2 = \ln y + \ln \sqrt{bt-1} + d$, $d = \text{const}$.

2.4. Нелокальна редукція системи нелінійних рівнянь дифузії

2.4.1. Ліївські анзаци та редукція системи (2.11).

Використаємо Ліївську симетрію системи (2.11) для побудови інваріантних анзацив та редукції цієї системи.

Розв'язок системи (2.11) будемо шукати у вигляді

$$U = A(t, x)\varphi(\omega),$$

де $A(t, x)$, $\omega = \omega(t, x)$ — деякі гладкі функції, які знаходяться після розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dt}{\xi^0} = \frac{dx}{\xi^1} = \frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du^2}{\eta^2} = dt, \quad (2.145)$$

$\varphi(\omega)$ — невідома функція.

1. Як показано в підрозділі 2.1., система (2.11) у випадку, коли функція $g(u^2)$ — довільна, інваріантна відносно алгебри (2.51). Координати інфінітезимального оператора для цього випадку задаються формулами:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_5t + c_1; \quad \xi^1 = c_4t + c_5x + c_2; \\ \eta^1 &= (c_4x + c_3)u^1; \quad \eta^2 = 0, \end{aligned}$$

де $c_1, \dots, c_5$ — групові параметри. Система (2.145) має вигляд:

$$\frac{dt}{2c_5t + c_1} = \frac{dx}{c_4t + c_5x + c_2} = \frac{du^1}{(c_4x + c_3)u^1} = \frac{du^2}{0} = d\tau,$$

або

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 2c_5t + c_1, & \dot{x} &= c_4t + c_5x + c_2, \\ \dot{u}^1 &= (c_4x + c_3)u^1, & \dot{u}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.146)$$

Перед тим, як розв'язувати систему рівнянь (2.146), приведемо її до більш простого вигляду за допомогою перетворень інваріантності, які породжуються алгеброю $AG_1(1, 1)$:

$$\begin{aligned} t' &= e^{2\theta_5}t + \theta_1, & x' &= e^{\theta_5}(\theta_4t + x) + \theta_2, \\ u^{1'} &= e^{(\frac{1}{2}\theta_4^2t + \theta_4x + \theta_3)}u^1, & u^{2'} &= u^2. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Підставляючи перетворення (2.147) в систему (2.146), записану

в системі координат (t', x', u_1', u_2') , одержуємо:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= 2C_5t + C_1, & \dot{x} &= C_4t + C_5x + C_2, \\ \dot{u}^1 &= (C_4x + C_3)u^1, & \dot{u}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (2.148)$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 виражаються через c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} C_1 &= (c_1 + 2\theta_1c_5)e^{-2\theta_5}, & C_2 &= (c_2 + \theta_1c_4 + \theta_2c_5)e^{-\theta_5} + \theta_4C_1, \\ C_3 &= \theta_2c_4 + c_3 + \frac{\theta_4^2}{2}C_1 + \theta_4e^{-\theta_5}(c_2 + \theta_1c_4 + \theta_2c_5), \\ C_4 &= e^{\theta_5}(c_4 - \theta_4c_5), \\ C_5 &= c_5. \end{aligned}$$

Можливі такі нееквівалентні випадки:

- 1) $C_4 = C_5 = 0; C_1, C_2, C_3 \neq 0;$
- 2) $C_5 = 0, C_4 \neq 0;$
- 3) $C_5 \neq 0.$

У першому випадку система (2.146) запишеться так:

$$\dot{t} = c_1, \quad \dot{x} = c_2, \quad \dot{u}^1 = c_3u^1, \quad \dot{u}^2 = 0.$$

Розв'язавши цю систему, одержимо такий вигляд інваріантного анзацу:

$$u^1 = e^{k_3t}\varphi^1(\omega), \quad u^2 = \varphi^2(\omega), \quad \omega = k_2t + x, \quad (2.149)$$

де $k_3 = \frac{c_3}{c_1}$, $k_2 = -\frac{c_2}{c_1}$.

В другому випадку, вибравши: $\theta_1 = -\frac{c_2}{c_4} + c_1\theta_4$, $\theta_2 = -\frac{c_3}{c_4} - c_1\frac{\theta_4^2}{2}$, одержимо:

$$\dot{t} = c_1, \quad \dot{x} = c_4 t, \quad \dot{u}^1 = c_4 x u^1, \quad \dot{u}^2 = 0.$$

Розв'язавши цю систему, одержимо такий інваріантний анзац:

$$u^1 = e^{-kt(\frac{1}{3}kt^2+x)}\varphi^1(\omega), \quad u^2 = \varphi^2(\omega), \quad \omega = \frac{1}{2}kt^2 + x, \quad (2.150)$$

де $k = -\frac{c_4}{c_1}$.

Якщо ж у випадку, коли $C_5 \neq 0$, покласти:

$$\theta_1 = -\frac{c_1}{2c_5}; \quad \theta_2 = -\frac{c_2}{c_5} + \frac{c_1 c_4}{2c_5^2}; \quad \theta_4 = \frac{e^{\theta_5 c_4}}{c_5},$$

то система (2.146) спроститься до наступної:

$$\dot{t} = 2c_5 t, \quad \dot{x} = c_5 x, \quad \dot{u}^1 = c_3 u^1, \quad \dot{u}^2 = 0.$$

Розв'язок цієї системи задає наступний інваріантний анзац:

$$u^1 = t^k \varphi^1(\omega), \quad u^2 = \varphi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}} x, \quad (2.151)$$

де $k = \frac{c_3}{2}$.

Для знаходження невідомих функцій φ^1, φ^2 необхідно одержані анзаці (2.149), (2.150), (2.151) підставити у систему (2.11). В результаті отримаємо відповідно три редуковані системи рівнянь:

$$1^0 \quad \ddot{\varphi}^1 + 2k_2 \dot{\varphi}^1 + 2k_3 \varphi^1 = 0, \quad (g(\varphi^2) \dot{\varphi}^2 - \frac{\varphi^2}{\varphi^1} \dot{\varphi}^1 - k_2 \varphi^2)' = 0;$$

$$2^0 \quad \ddot{\varphi}^1 - 2k\omega \dot{\varphi}^1 = 0, \quad (g(\varphi^2) \dot{\varphi}^2 - \frac{\varphi^2}{\varphi^1} \dot{\varphi}^1)' = 0;$$

$$3^0 \quad \ddot{\varphi}^1 - \omega \dot{\varphi}^1 + 2k \varphi^1 = 0, \quad (g(\varphi^2) \dot{\varphi}^2 - \frac{\varphi^2}{\varphi^1} \dot{\varphi}^1)' + \frac{1}{2} \omega \dot{\varphi}^2 = 0.$$

Розглянемо систему (2.11), яка при $g(u^2) = \lambda$, де $\lambda - const$, еквівалентна системі:

$$u_t^1 = \partial_x [-\frac{1}{2} u_x^1], \quad u_t^2 = \partial_x [-\frac{u^2}{u^1} u_x^1 + \lambda u_x^2]. \quad (2.152)$$

Нехай $\lambda \neq 0; \frac{1}{2}$. В цьому випадку, як випливає з результатів теореми 2.2, система (2.152) інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, 1)$ з базисними операторами (2.52). Для побудови інваріантних анзаців даної системи необхідно проінтегрувати систему звичайних диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= c_7 t^2 + 2c_5 t + c_1, & \dot{x} &= c_7 t x + c_4 t + c_5 x + c_2, \\ \dot{u}^1 &= (\frac{c_7}{2} x^2 - \frac{c_7}{2} t + c_4 x + c_3) u^1, & \dot{u}^2 &= (-c_7 t + c_6) u^2, \end{aligned} \quad (2.153)$$

де $c_1, \dots, c_7$ — довільні числові параметри. Щоб полегшити інтегрування системи (2.153), зведемо її до більш простого вигляду. Це можна зробити, якщо подіяти на неї перетвореннями групи інваріантності системи (2.152):

$$\begin{aligned} t' &= e^{2\theta_5} \frac{t}{1-\theta_7 t} + \theta_1, & x' &= e^{\theta_5} \frac{\theta_4 t + x}{1-\theta_7 t} + \theta_2, \\ u^{1'} &= e^A (1 - \theta_7 t)^{\frac{1}{2}} u^1, & u^{2'} &= e^{\theta_6} (1 - \theta_7 t) u^2, \end{aligned} \quad (2.154)$$

де $A = \frac{\theta_7 x^2 + 2\theta_4 x + \theta_4^2 t}{2(1-\theta_7 t) + \theta_3}$. В результаті такої дії система (2.153) зведеться до системи:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= C_7 t^2 + 2C_5 t + C_1, & \dot{x} &= C_7 t x + C_4 t + C_5 x + C_2, \\ \dot{u}^1 &= \left(\frac{C_7}{2} x^2 - \frac{C_7}{2} t + C_4 x + C_3\right) u^1, & \dot{u}^2 &= (-C_7 t + C_6) u^2, \end{aligned} \quad (2.155)$$

де:

$$\begin{aligned} C_1 &= e^{-2\theta_5} \xi^0(\theta_1) = e^{-2\theta_5} (c_7 \theta_1^2 + 2c_5 \theta_1 + c_1), \\ C_2 &= \theta_4 C_1 + e^{-\theta_5} \xi^1(\theta_1, \theta_2), \\ C_3 &= \frac{\theta_7 + \theta_4^2}{2} C_1 + \theta_4 e^{-\theta_5} \xi^1(\theta_1, \theta_2) + \eta^1(\theta_1, \theta_2), \\ C_4 &= e^{\theta_5} \xi_0^1(\theta_1, \theta_2) - \theta_4 \xi_1^1(\theta_1, \theta_2) + \theta_4 \theta_7 C_1 - e^{-\theta_5} \theta_7 \xi^1(\theta_1, \theta_2), \\ C_5 &= \xi_1^1(\theta_1, \theta_2) - \theta_7 C_1, \\ C_6 &= \theta_7 C_1 + \eta^2(\theta_1, \theta_2), \\ C_7 &= e^{2\theta_5} c_7 - 2\theta_7 \xi_1^1(\theta_1, \theta_2) + \theta_7^2 C_1. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Як ми бачимо з (2.155), перетворення (2.154) не змінили вигляд системи (2.153), але за рахунок того, що нові сталі C_k залежать від групових параметрів θ_k , ці параметри в силу їх довільності можна вибрати так, щоб деякі з C_k стали рівними 0.

Спробуємо підібрати $\theta_i, i = \overline{1; 7}$ так, щоб максимально спростити систему (2.155). Спочатку з'ясуємо, для якого набору θ_k має місце тотожність

$C_7 = 0$, для цього перепишемо C_7 у вигляді:

$$C_7 = e^{-2\theta_5} c_7 \left[(e^{2\theta_5} - \theta_7 (\theta_1 + \frac{c_5}{c_7}))^2 + \frac{\theta_7^2}{c_7^2} (c_1 c_7 - c_5^2) \right].$$

З останньої рівності стає очевидним, що $C_7 = 0$ при умові: $c_1 c_7 - c_5^2 \leq 0$.

Тоді для одержаної системи можливі два нееквівалентні випадки:

1) $C_7 = 0; c_1 c_7 - c_5^2 \leq 0;$

2) $C_7 \neq 0, \text{ при } c_1 c_7 - c_5^2 > 0.$

В першому випадку система (2.155) запишеться так:

$$\dot{t} = 2C_5t + C_1, \quad \dot{x} = C_4t + C_5x + C_2, \\ \dot{u}^1 = (C_4x + C_3)u^1, \quad \dot{u}^2 = C_6u^2.$$

Як і для випадку системи (2.11) при $g(u^2)$ — довільній гладкій функції від u^2 , для системи (2.152) можливі такі розгалуження:

- 1) $C_4 = C_5 = 0; C_1, C_2, C_3 \neq 0;$
- 2) $C_5 = 0, C_4 \neq 0;$
- 3) $C_5 \neq 0.$

Розв'язуючи системи, які внаслідок цього одержуються:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= c_1, \quad \dot{x} = c_2, \quad \dot{u}^1 = c_3u^1, \quad \dot{u}^2 = c_6u^2; \\ \dot{t} &= c_1, \quad \dot{x} = c_4t, \quad \dot{u}^1 = c_4xu^1, \quad \dot{u}^2 = c_6u^2; \\ \dot{t} &= 2c_5t, \quad \dot{x} = c_5x, \quad \dot{u}^1 = c_3u^1, \quad \dot{u}^2 = c_6u^2, \end{aligned}$$

знаходимо відповідно такі нееквівалентні анзаци:

$$u^1 = e^{k_3t}\varphi^1(\omega), \quad u^2 = e^{k_4t}\varphi^2(\omega), \quad \omega = k_2t + x, \quad (2.157)$$

де $k_2 = -\frac{c_2}{c_1}; k_3 = \frac{c_3}{c_1}, k_4 = \frac{c_6}{c_1};$ якщо $c_4 = c_5 = 0;$

$$u^1 = e^{-kt(\frac{1}{3}kt^2+x)}\varphi^1(\omega), \quad u^2 = e^{k_2t}\varphi^2(\omega), \quad \omega = \frac{1}{2}kt^2 + x, \quad (2.158)$$

де $k = -\frac{c_4}{c_1}; k_2 = \frac{c_6}{c_1},$ якщо $c_2 = c_3 = c_5 = 0$ та

$$u^1 = t^{k_1}\varphi^1(\omega), \quad u^2 = t^{k_2}\varphi^2(\omega), \quad \omega = t^{-\frac{1}{2}}x, \quad (2.159)$$

де $k_1 = \frac{c_3}{2c_5}; k_2 = \frac{c_6}{2c_5},$ якщо $c_1 = c_2 = c_4 = 0.$

В другому випадку, вибравши:

$$\theta_1 = -\frac{c_5}{c_7}; \quad \theta_2 = -\frac{c_4}{c_7}; \quad \theta_4 = \frac{c_2c_7 - c_4c_5}{c_1c_7 - c_5^2},$$

$$\theta_3 = \theta_6 = \theta_7 = 0; \quad \theta_5 = \frac{1}{4} \ln \frac{c_1c_7 - c_5^2}{c_7^2}$$

та перепозначивши $\tau \rightarrow m\tau$, одержимо:

$$\begin{aligned} \dot{t} &= t^2 + 1, \quad \dot{x} = tx, \\ \dot{u}^1 &= \left(\frac{x^2-t}{2} + k_1\right)u^1, \quad \dot{u}^2 = (-t + k_2)u^2, \end{aligned} \quad (2.160)$$

причому k_1, k_2 деяким чином виражаються через $c_i; i = \overline{1; 7}$.

Розв'язавши систему (2.160), одержимо наступний вигляд інваріантного анзацу:

$$\begin{aligned} u^1 &= e^{\frac{1}{2}tx^2(t^2+1)^{-1}+k_1\arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega), \\ u^2 &= e^{k_2\arctgt}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\varphi^2(\omega), \\ \omega &= x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.161)$$

Підставивши анзац (2.157), (2.158), (2.159), (2.161) у систему (2.152),

отримаємо відповідно чотири редуковані системи рівнянь:

$$\begin{aligned} 1^I \quad \ddot{\varphi}^1 + 2k_2\dot{\varphi}^1 + 2k_3\varphi^1 &= 0, \quad (\lambda\dot{\varphi}^2 - \frac{\varphi^2}{\varphi^1}\dot{\varphi}^1 - k_2\varphi^2)' = k_4\varphi^2; \\ 2^I \quad \ddot{\varphi}^1 - 2k\omega\dot{\varphi}^1 &= 0, \quad (\lambda\dot{\varphi}^2 - \frac{\varphi^2}{\varphi^1}\dot{\varphi}^1)' = k_2\varphi^2; \\ 3^I \quad \ddot{\varphi}^1 - \omega\dot{\varphi}^1 + 2k\varphi^1 &= 0, \quad (\lambda\dot{\varphi}^2 - \frac{\varphi^2}{\varphi^1}\dot{\varphi}^1)' + \frac{1}{2}\omega\dot{\varphi}^2 = k_2\varphi^2; \\ 4^I \quad \ddot{\varphi}^1 + (\omega^2 + 2k_1)\varphi^1 &= 0, \quad (\lambda\dot{\varphi}^2 - \frac{\varphi^2}{\varphi^1}\dot{\varphi}^1)' = k_2\varphi^2. \end{aligned}$$

Розв'язавши деякі з редукованих систем, одержимо інваріантні розв'язки системи (2.11) та системи (2.152). Так, наприклад, в результаті розв'язання системи 1⁰ одержимо:

а) при $k_2^2 > 2k_3$

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= c_1 e^{\lambda_1 \omega} + c_2 e^{\lambda_2 \omega}, \\ \int_0^{\varphi^2} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau &= \ln(c_1 e^{\lambda_1 \omega} + c_2 e^{\lambda_2 \omega}), \end{aligned} \quad (2.162)$$

$$\lambda_{1,2} = -k_2 \pm \sqrt{k_2^2 - 2k_3};$$

б) при $k_2^2 = 2k_3$

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= (c_1 + c_2 \omega) e^{-k_2 \omega}, \\ \int_0^{\varphi^2} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau &= -k_2 \omega + \ln(c_1 + c_2 \omega); \end{aligned} \quad (2.163)$$

в) при $k_2^2 < 2k_3$

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= e^{-k_2 \omega} (c_1 \cos(2k_3 - k_2^2)\omega + c_2 \sin(2k_3 - k_2^2)\omega), \\ \int_0^{\varphi^2} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau &= \ln(c_1 \cos(2k_3 - k_2^2)\omega + c_2 \sin(2k_3 - k_2^2)\omega) - \\ &\quad - k_2 \omega. \end{aligned} \quad (2.164)$$

В результаті розв'язання системи 2⁰ одержимо:

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= c_1 \text{Ai}(m\omega) + c_2 \text{Bi}(m\omega), \\ \int_0^{\varphi^2} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau &= \ln(c_1 \text{Ai}(m\omega) + c_2 \text{Bi}(m\omega)), \end{aligned} \quad (2.165)$$

де $m = \sqrt[3]{2k}$; $\text{Ai} = \text{Ai}(m\omega)$, $\text{Bi} = \text{Bi}(m\omega)$ — функції Ейрі.

В результаті розв'язання системи 3^I одержимо:

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= e^{\frac{\omega^2}{4} - \int R_2(\omega) d\omega}, \\ \varphi^2 &= (R_3 + \frac{1}{2\lambda} R_2) e^{\int (R_3 + \frac{1}{2\lambda} R_2) d\omega},\end{aligned}\quad (2.166)$$

де R_2, R_3 — розв'язки наступних рівнянь Рікаті:

$$\begin{aligned}\dot{R}_2 &= -R_2^2 + \frac{\omega^2}{4} - 2k - \frac{1}{2}, \\ \dot{R}_3 &= -R_3^2 + (\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda}) R_2^2 - \frac{\omega^2}{8\lambda} + \frac{1}{\lambda} (k - k_2 + \frac{3}{4}).\end{aligned}\quad (2.167)$$

В результаті розв'язання системи 4^I одержимо:

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= e^{\int R_1(\omega) d\omega}, \\ \varphi^2 &= (R_4 + \frac{1}{2\lambda} R_1) e^{\int (R_4 + \frac{1}{2\lambda} R_1) d\omega},\end{aligned}\quad (2.168)$$

де R_1, R_4 — розв'язки наступних рівнянь Рікаті:

$$\begin{aligned}\dot{R}_1 &= -R_1^2 - \omega^2 - 2k_1, \\ \dot{R}_4 &= -R_4^2 + (\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda}) R_1^2 + \frac{\omega^2 + 2k_1 + 2k_2}{2\lambda}.\end{aligned}\quad (2.169)$$

Підставивши (2.162), (2.163), (2.164) у (2.149), одержимо відповідно такі частинні розв'язки системи (2.11):

$$\begin{aligned}u^1 &= c_1 e^{(\lambda_1 k_2 + k_3)t + \lambda_1 x} + c_2 e^{(\lambda_2 k_2 + k_3)t + \lambda_1 x}, \\ \int_0^{u^2} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau &= \ln(c_1 e^{\lambda_1(k_2 t + x)} + c_2 e^{\lambda_2(k_2 t + x)}); \end{aligned}\quad (2.170)$$

$$\begin{aligned}u^1 &= (c_1 + c_2 k_2 t + c_2 x) e^{-k_2^2 t - k_2 x}, \\ \int_0^{u^2} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau &= -(k_2^2 t + k_2 x) + \ln(c_1 + c_2(k_2 t + x)); \end{aligned}\quad (2.171)$$

$$\begin{aligned}u^1 &= e^{(k_3 - k_2^2)t - k_2 x} (c_1 \cos(2k_3 - k_2^2)\omega + c_2 \sin(2k_3 - k_2^2)\omega), \\ \int_0^{u^2} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau &= \ln(c_1 \cos(2k_3 - k_2^2)\omega + c_2 \sin(2k_3 - k_2^2)\omega) - \\ &\quad - k_2 \omega, \end{aligned}\quad (2.172)$$

$$\omega = k_2 t + x.$$

Підставивши (2.165) у (2.150), одержимо частинний розв'язок системи (2.11)

$$\begin{aligned}u^1 &= e^{kt(\frac{1}{3}kt^2 + x)} (c_1 \text{Ai}(m(\frac{1}{2}kt^2 + x)) + c_2 \text{Bi}(m(\frac{1}{2}kt^2 + x))), \\ \int_0^{u^2} \frac{g(\tau)}{\tau} d\tau &= \ln(c_1 \text{Ai}(m(\frac{1}{2}kt^2 + x)) + c_2 \text{Bi}(m(\frac{1}{2}kt^2 + x))), \end{aligned}\quad (2.173)$$

де $m = \sqrt[3]{2k}$. Підставивши (2.166) у (2.159) та (2.168) у (2.161), одержимо відповідно такі частинні розв'язки системи (2.152):

$$\begin{aligned} u^1 &= t^{k_1} e^{\frac{x^2}{4t} - \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} R_2(\tau) d\tau}, \\ u^2 &= t^{k_2} \left(R_3\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2\lambda} R_2\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right) e^{\int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} (R_3(\tau) + \frac{1}{2\lambda} R_2(\tau)) d\tau}, \end{aligned} \quad (2.174)$$

де R_2, R_3 задовольняють (2.167);

$$\begin{aligned} u^1 &= (t^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2} t x^2 (t^2 + 1)^{-1} + k_1 \arctan t + \int_0^{x(t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}} R_1(\tau) d\tau}, \\ u^2 &= (t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \left(R_4 + \frac{1}{2\lambda} R_1 \right) e^{k_2 \arctan t + \int_0^{x(t^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}} (R_4(\tau) + \frac{1}{2\lambda} R_1(\tau)) d\tau}, \end{aligned} \quad (2.175)$$

де R_1, R_4 задовольняють (2.169).

2.4.2. Симетрійні властивості образів системи (2.11).

Якщо до системи рівнянь (2.11) застосувати перетворення P_1 (див. підрозділ 2.2.), то одержимо наступну систему:

$$z_0^1 = \partial_1 \left[\frac{z_1^1}{2(z_1^1)^2} \right], \quad z_0^2 = \partial_1 \left[-\frac{z_1^2}{(z_1^1)^3} \left(\frac{1}{2} + g\left(\frac{z_1^2}{z_1^1}\right) \right) z_1^1 + g\left(\frac{z_1^2}{z_1^1}\right) \frac{z_1^2}{(z_1^1)^2} \right], \quad (2.176)$$

яку ми назвемо образом O_1 системи (2.11).

Результат дослідження алгебр симетрій Лі системи (2.176) подамо в таблиці 1.

Таблиця 1. Симетрійні властивості системи (2.176).

№ п/п	Вигляд функції $g\left(\frac{z_1^2}{z_1^1}\right)$	Максимальна алгебра інваріантності
1.	g - довільна гладка функція	$\partial_0, \partial_1, D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1,$ $D_2 = x_1\partial_1 - z^a\partial_{z^a}$
2.	$g = \lambda, \lambda - const, \lambda \neq -\frac{1}{2}$	$\partial_0, \partial_1, D_1, D_2, I = z^2\partial_{z^2}$
3.	$g = -\frac{1}{2}$	$\partial_0, \partial_1, D_1, D_2, I, Q_1 = x_1\partial_{z^2},$ $Q_2 = \partial_{z^2}$

Якщо ж подіяти на систему (2.11) перетворенням P_2 (див. підрозділ 2.2.), то одержимо образ O_2 системи (2.11):

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1 \left[-\frac{1}{2(z_1^2)^2} z_1^1 + \left(g + \frac{1}{2} \right) \frac{z_1^1}{(z_1^2)^3} z_1^2 \right], \\ z_0^2 &= \partial_1 \left[-\frac{1}{z_1^1 z_1^2} z_1^1 + \frac{g+1}{(z_1^2)^2} z_1^2 \right], \end{aligned} \quad (2.177)$$

де $g = g(\frac{1}{z^2})$.

Результат дослідження симетрії системи (2.177) подамо в таблиці 2.

Таблиця 2. Симетрійні властивості системи (2.177).

№ n/n	Вигляд функції $g(\frac{1}{z^2})$	Максимальна алгебра інваріантності
1.	g - довільна гладка функція	$\partial_0, \partial_1, D_1 = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1,$ $I = z^1\partial_{z^1}$
2.	$g = \lambda, \lambda - const, \lambda \neq -\frac{1}{2}$	$\partial_0, \partial_1, D_1, D_2 = x_1\partial_1 - z^2\partial_{z^2}, I$
3.	$g = -\frac{1}{2}$	$\partial_0, \partial_1, D_1, D_2, I_2,$ $Q = \partial_{z^1}$

2.4.3. Нелокальні анзаци та розв'язки образів системи (2.11).

Як показано вище, система (2.11), інваріантна відносно алгебри $AG_2(1;1)$, під дією композиції нелокальних перетворень (2.104), (2.105), (2.106) переходить в систему (2.176), яка неінваріантна відносно оператора $G = t\partial_x + xu^1\partial_{u^1}$. Неінваріантність системи (2.176) відносно алгебри $AG_2(1;1)$ звужує множину інваріантних анзаци цієї системи порівняно із системою (2.11), за допомогою яких можна було б звести (2.176) до системи звичайних диференціальних рівнянь і в подальшому побудувати інваріантні точні розв'язки цієї системи.

Для відшукування додаткових нелінійських анзаци системи (2.176) подіємо композицією нелокальних перетворень (2.104), (2.105), (2.106) на уже знайдені анзаци системи (2.11). Проілюструємо процес одержання нелінійських анзаци на прикладі перетворення анзацу (2.161), одержаного з умови інваріантності цієї системи відносно оператора $X = \Pi + \partial_t + k_1u^1\partial_{u^1} + k_2u^2\partial_{u^2}$. Поділявши спочатку на (2.161) перетворенням (2.104), одержуємо:

$$v_x^1 = e^{-\frac{1}{2}tx^2(t^2+1)^{-1}+k_1\arctgt(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}}\varphi^1(\omega),$$

$$v_x^2 = e^{k_2\arctgt(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}}\varphi^2(\omega),$$

$$\omega = x(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Під дією перетворень годографа (2.105), анзац набуває вигляду:

$$\begin{aligned}w_1^1 &= e^{\frac{1}{2}x_0\omega^2 - k_1 \arctg x_0} (x_0^2 + 1)^{\frac{1}{4}} (\varphi^1(\omega))^{-1}, \\w_1^2 &= e^{\frac{1}{2}x_0\omega^2 + (k_2 - k_1) \arctg x_0} (x_0^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} (\varphi^1(\omega))^{-1} \varphi^2(\omega), \\ \omega &= (x_0^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} w^1.\end{aligned}$$

Після дії перетворення (2.106) на даний анзац, остаточно одержуємо:

$$\begin{aligned}z^1 &= e^{\frac{1}{2}x_0\omega^2 - k_1 \arctg x_0} (x_0^2 + 1)^{\frac{1}{4}} (\varphi^1(\omega))^{-1}, \\z^2 &= e^{\frac{1}{2}x_0\omega^2 + (k_2 - k_1) \arctg x_0} (x_0^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} (\varphi^1(\omega))^{-1} \varphi^2(\omega), \\ \omega &= (x_0^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \tau,\end{aligned}$$

$$\text{де } \tau = \int z^1 dx_1.$$

Аналогічно одержуються образи лівських анзаців систем (2.11) та (2.152) як відносно перетворення P_1 так і відносно P_2 . Не вдаючись у деталі їх знаходження, наведемо остаточні результати.

Нелокальні анзаци для системи (2.176):

$$\begin{aligned}z^1 &= e^{k_1 x_0} (\varphi^1(\omega))^{-1}, \\1^{II}. \quad z^2 &= e^{(k_2 - k_1)x_0} (\varphi^1(\omega))^{-1} \varphi^2(\omega), \\ \omega &= (kx_0 + \tau); \\z^1 &= e^{-kx_0(\tau + \frac{1}{3}kx_0^2)} (\varphi^1(\omega))^{-1}, \\2^{II}. \quad z^2 &= e^{-x_0(k_2 + k\tau + \frac{1}{3}k^2x_0^2)} (\varphi^1(\omega))^{-1} \varphi^2(\omega), \\ \omega &= (\frac{1}{2}kx_0^2 + \tau); \\z^1 &= x_0^{-k_1} (\varphi^1(\omega))^{-1}, \\3^{II}. \quad z^2 &= x_0^{k_2 - k_1} (\varphi^1(\omega))^{-1} \varphi^2(\omega), \\ \omega &= x_0^{-\frac{1}{2}} \tau; \\z^1 &= e^{\frac{1}{2}x_0\omega^2 - k_1 \arctg x_0} (x_0^2 + 1)^{\frac{1}{4}} (\varphi^1(\omega))^{-1}, \\4^{II}. \quad z^2 &= e^{\frac{1}{2}x_0\omega^2 + (k_2 - k_1) \arctg x_0} (x_0^2 + 1)^{-\frac{1}{4}} (\varphi^1(\omega))^{-1} \varphi^2(\omega), \\ \omega &= (x_0^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \tau, \\ \text{де } \tau &= \int z^1 dx_1.\end{aligned}$$

Нелокальні анзаци для системи (2.177):

$$\begin{aligned}z^1 &= e^{(k_1 - k_2)x_0} (\varphi^2(\omega))^{-1} \varphi^1(\omega), \\1^{III}. \quad z^2 &= e^{-k_2 x_0} (\varphi^2(\omega))^{-1}, \\ \omega &= kx_0 + \tau; \\z^1 &= e^{x_0(k_2 + k\tau + \frac{1}{3}k^2x_0^2)} (\varphi^2(\omega))^{-1} \varphi^1(\omega), \\2^{III}. \quad z^2 &= e^{k_2 x_0} (\varphi^2(\omega))^{-1}, \\ \omega &= \frac{1}{2}kx_0^2 + \tau;\end{aligned}$$

$$z^1 = x_0^{k_1-k_2}(\varphi^2(\omega))^{-1}\varphi^1(\omega),$$

$$3^{III}. z^2 = x_0^{-k_2}(\varphi^2(\omega))^{-1},$$

$$\omega = x_0^{-\frac{1}{2}}\tau;$$

$$z^1 = e^{\frac{1}{2}x_0\omega^2 + (k_1-k_2)\arctg x_0}(x_0^2 + 1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^2(\omega))^{-1}\varphi^1(\omega),$$

$$4^{III}. z^2 = e^{k_2\arctg x_0}(x_0^2 + 1)^{\frac{1}{4}}(\varphi^2(\omega))^{-1},$$

$$\omega = (x_0^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}\tau,$$

$$\text{де } \tau = \int z^2 dx_1.$$

Нелокальні анзаци $1^{II} - 4^{II}$ та $1^{III} - 4^{III}$ для систем (2.176) та (2.177) не можливо одержати в рамках теорії С. Лі. Анзаци $1^{II} - 4^{II}$ редукують систему (2.176) при $g(\frac{z^2}{z^1}) = \lambda - const$, а анзаци $1^{III} - 4^{III}$ редукують систему (2.177) при $g(\frac{1}{z^2}) = \lambda - const$ до системи звичайних диференціальних рівнянь $1^I - 4^I$ відповідно. Звідси випливає, що розв'язки (2.170), (2.171), (2.172), (2.173), (2.174), (2.175) системи (2.152) в той же час будуть розв'язками і системи (2.176) при $g(\frac{z^2}{z^1}) = \lambda - const$.

2.5. Висновки до розділу 2

У даному розділі нелокальні перетворення еквівалентності системи нелінійних рівнянь дифузії застосовані до лінеаризації системи нелінійних рівнянь дифузії, знаходження нелінійських анзацив, що редукують її до системи звичайних диференціальних рівнянь та для побудови нелокальних формул розмноження розв'язків.

З основних результатів, отриманих в даному розділі випливають наступні висновки:

1. Показано, що розглянуті нелокальні перетворення зводять систему нелінійних рівнянь дифузії до системи того ж вигляду, одержані формули зв'язку між початковою системою та системою-образом, а також встановлено вигляд систем нелінійних рівнянь дифузії, які лінеаризуються дією нелокальних перетворень.
2. Встановлено вигляд систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея $AG(1, 1)$, розширеної алгебри Галілея

$AG_1(1, 1)$ та узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, 1)$. Одержаний результат узагальнено для випадку системи нелінійних рівнянь дифузії з реакцією.

3. Проведено редукцію Галілеївськи інваріантних систем нелінійних рівнянь дифузії та побудовано їх точні розв'язки.
4. Для систем-образів галілеївськи інваріантної системи нелінійних рівнянь дифузії знайдені нелокальні анзаци, які редукують їх до систем звичайних диференціальних рівнянь.
5. Побудовано нелокальні формули розмноження розв'язків систем нелінійних рівнянь дифузії, неінваріантних відносно алгебри Галілея $AG(1, 1)$, розширеної алгебри Галілея $AG_1(1, 1)$ та узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, 1)$.

Основні результати розділу 2 опубліковані в роботах: [64], [65], [66], [69], [84], [87].

РОЗДІЛ 3

СИМЕТРИЙНА КЛАСИФІКАЦІЯ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ХЕМОТАКСИСУ

В сучасних біофізичних дослідженнях процеси симетричного розповсюдження бактеріальних популяційних хвиль, коли кільця хемотаксису зберігають різко окреслену форму і рухаються зі сталою швидкістю, яка залежить від рухливості бактерій та їх хемотаксисних властивостей, добре описуються математичними моделями, основаними на рівняннях Келлера-Сегеля (1.13) (див. [149]). Моделлю Келлера-Сегеля та її деякими модифікаціями описується також формування та поширення хемотаксисних кілець Адлера [110] та різні процеси структуроутворення в бактеріальних колоніях при їх взаємодії [31].

Перепишемо систему (1.13) у звичних для математичних досліджень позначеннях, узагальнивши її наступним чином

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ f(u^1)u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

де $g^1(u^1, u^2), g^2(u^1, u^2), f(u^1)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, причому $f \neq 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, u^a = u^a(x_0, x_1), a = \overline{1, 2}, x_0$ — часова, x_1 — просторова змінні. Зауважимо, що система (3.1) є частинним випадком системи нелінійних рівнянь реакції дифузії (0.14), яка вивчалася нами в попередньому розділі з точки зору галілеївської інваріантності. По цій причині ми більш детально вивчимо систему (3.1) з точки зору симетрійного аналізу. Тобто в даному розділі поставимо перед собою задачу: дослідити симетрійні властивості системи (3.1) в залежності від значення функцій

$f(u^1)$, $g^1(u^1, u^2)$, $g^2(u^1, u^2)$ та сталих λ_1, λ_2 .

3.1. Основна алгебра інваріантності та необхідні умови її розширення

Для дослідження симетрійних властивостей системи (3.1) застосуємо алгоритм Лі [26], [27], [28], [37], [61], [63], [107]. Подіявши продовженням інфінітезимального оператора

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^a \partial_{u^a}, \quad (3.2)$$

де $\xi^\mu = \xi^\mu(x_0, x_1, u^1, u^2)$, $\eta^a = \eta^a(x_0, x_1, u^1, u^2)$, $\mu = \overline{0, 1}$, $a = \overline{1, 2}$, на систему (3.1), після переходу на многовид та розщеплення отриманої системи по похідних функцій u^a , одержимо визначальну систему для визначення координат інфінітезимального оператора (3.2) та функцій f, g^1, g^2 . Визначальна система складається з трьох підсистем:

$$S_1(\xi, \eta) = 0, \quad S_2(\xi, \eta, f) = 0, \quad S_3(\xi, \eta, f, g^1, g^2) = 0.$$

Система $S_1 = 0$ є системою диференціальних рівнянь лише відносно функцій ξ^μ і η^a

$$\begin{aligned} \xi_0^1 &= \xi_{u^a}^\mu = \eta_{u^2}^1 = \eta_{u^b u^c}^a = 0, \quad a, b, c = 1; 2, \\ \xi_0^0 &= 2\xi_1^1, \quad 2\lambda_1 \eta_{1u^1}^1 = -\xi_0^1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Система $S_2(\xi, \eta, f) = 0$ пов'язує між собою координати інфінітезимального оператора ξ^μ , η^a та функцію $f(u^1)$ і має вигляд

$$\begin{aligned} \eta^1 \dot{f} + (\eta_{u^1}^1 - \eta_{u^2}^2 - \frac{1}{u^2} \eta^2) f + \frac{1}{u^2} (\lambda_2 - \lambda_1) \eta_{u^1}^2 &= 0, \\ u^2 \eta_1^1 \dot{f} + (u^2 \eta_{1u^1}^1 + \frac{1}{2} \eta_1^2) f + \lambda_2 \eta_{1u^1}^2 &= 0, \\ \eta_1^1 f + 2\lambda_2 \eta_{1u^2}^2 &= -\xi_0^1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Система $S_3(\xi, \eta, f, g^1, g^2) = 0$ складається з двох диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \eta^1 g_{u^1}^1 + \eta^2 g_{u^2}^1 &= (\eta_{u^1}^1 - \xi_0^0) g^1 + \eta_{u^2}^1 g^2 + \eta_0^1 - \lambda_1 \eta_{11}^1, \\ \eta^1 g_{u^1}^2 + \eta^2 g_{u^2}^2 &= (\eta_{u^2}^2 - \xi_0^0) g^2 + \eta_{u^1}^2 g^1 + \eta_0^2 - \lambda_2 \eta_{11}^2 - u^2 f \eta_{11}^1, \end{aligned} \quad (3.5)$$

які пов'язують між собою функції g^1, g^2 та функції ξ^μ, η^a, f .

Зауваження 3.1. Покладаючи $f, g^1, g^2, \lambda_1, \lambda_2$ довільними у системах (3.3), (3.4), (3.5), одержимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = \eta^2 = 0, \quad (3.6)$$

де d_0, d_1 – довільні сталі. В цьому випадку оператор (3.2) має вигляд

$$X = d_0 \partial_0 + d_1 \partial_1. \quad (3.7)$$

Оператор (3.7) породжує алгебру

$$A_0 = \langle \partial_0, \partial_1 \rangle, \quad (3.8)$$

яку назовемо **основною алгеброю інваріантності системи (3.1)**.

Дослідимо, при яких значеннях функцій f, g^1, g^2 симетрія системи (3.1) ширша порівняно з алгеброю A_0 . Необхідними умовами розширення симетрії є наступне твердження.

Теорема 3.1. Якщо система (3.1) допускає розширення алгебри A_0 , то функція $f(u^1)$ набуває одного із наступних виглядів:

$$1. f = \varphi(u^1). \quad 2. f = \lambda. \quad 3. f = \frac{\lambda}{u^1}. \quad 4. f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}. \quad 5. f = \frac{2\lambda_1}{u^1},$$

де $\varphi(u^1)$ – довільна гладка функція, λ – довільна стала.

Доведення.

Для доведення теореми розв'яжемо систему визначальних рівнянь, що складається із систем S_1 та S_2 .

Загальним розв'язком системи $S_1(\xi, \eta)$ є функції

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2A(x_0), \quad \xi^1 = \dot{A}(x_0)x_1 + B(x_0), \\ \eta^1 &= \alpha^1(x_0, x_1)u^1 + \beta^1(x_0, x_1), \\ \eta^2 &= \alpha^{21}(x_0, x_1)u^1 + \alpha^{22}(x_0, x_1)u^2 + \beta^2(x_0, x_1), \end{aligned}$$

де $\alpha^1(x_0, x_1) = -\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{1}{2}\ddot{A}(x_0)x_1^2 + \dot{B}(x_0)x_1 + C(x_0)]$, $A, B, C, \alpha^{2a}, \beta^a$ – довільні гладкі функції своїх аргументів.

Внаслідок сумісного розв'язання 1-го та 3-го рівнянь системи (3.4) одержуються умови $\alpha_1^{21} = \alpha_1^{22} = \beta_1^2 = 0$. Тоді система $S_2 = 0$ набуде вигляду

$$\begin{aligned} (\alpha^{11}u^1 + \beta^1)\dot{f} &= -\alpha^{11}f, \\ (\alpha_1^{11}u^1 + \beta_1^1)f &= 2\lambda_1\alpha_1^{11}, \\ (\alpha^{21}u^1 + \beta^2)f &= (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha^{21}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Розв'язання системи (3.9) приводить до появи 5-ти нееквівалентних випадків вигляду функції f , наведених у формулюванні теореми.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо і покажемо, що при вказаних значеннях функції $f(u^1)$ можливе розширення симетрії системи (3.1) порівняно з A_0 .

1. $f = \varphi(u^1)$ — довільна гладка функція. З системи (3.9) випливає

$$\xi_0^1 = \alpha^{a1} = \beta^a = 0. \quad (3.10)$$

Враховавши (3.10), одержимо

$$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \quad \xi = c_1x_1 + d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = \alpha^{22}(x_0)u^2, \quad (3.11)$$

де $\alpha^{22}(x_0)$ — довільна гладка функція, c_1, d_0, d_1 — довільні сталі. Порівнявши формули (3.6) і (3.11), легко бачити можливість розширення симетрії (3.8).

Аналогічно доводиться можливість розширення симетрії (3.8) у випадках 2-5. Не повторюючи цих міркувань, наведемо остаточний вигляд координат інфінітезимального оператора для кожної з вказаних $f(u^1)$.

2. При $f = \lambda$ координати інфінітезимального оператора (3.2) мають вигляд

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, & \xi &= c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= \beta^1(x_0), & \eta^2 &= \alpha^{22}(x_0)u^2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

де $\beta^1(x_0)$ — довільна гладка функція.

3. При $f = \frac{\lambda}{u^1}$ (λ — довільна стала) з системи (3.9) знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, & \xi^1 &= c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= \alpha^1(x_0)u^1, & \eta^2 &= \alpha^{22}(x_0)u^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

де $\alpha^1(x_0)$ — довільна гладка функція.

4. При $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$ одержимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, & \xi &= c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= \alpha^1(x_0)u^1, & \eta^2 &= \alpha^{21}(x_0)u^1 + \alpha^{22}(x_0)u^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

де $\alpha^{21}(x_0)$ — довільна гладка функція.

5. При $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ маємо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2A(x_0), \quad \xi^1 = \dot{A}(x_0)x_1 + B(x_0), \\ \eta^1 &= \alpha^1(x_0, x_1)u^1, \quad \eta^2 = \alpha^{22}(x_0)u^2,\end{aligned}\tag{3.15}$$

де $\alpha^1(x_0, x_1) = -\frac{1}{2\lambda_1}[\frac{1}{2}\ddot{A}(x_0)x_1^2 + \dot{B}(x_0)x_1 + C(x_0)]$, $A(x_0), B(x_0), C(x_0)$ — довільні гладкі функції.

Теорему 3.1 доведено.

Лема 3.1. Система (3.1) має групу неперервних перетворень еквівалентності, що задаються наступними формулами координат оператора еквівалентності E

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2c_1x_0 + c_2, \quad \xi^1 = c_1x_1 + c_3, \\ \eta^1 &= c_4u^1 + c_5, \quad \eta^2 = c_6u^1 + c_7u^2,\end{aligned}\tag{3.16}$$

в яких $c_1, \dots, c_7$ — довільні сталі, на які в залежності від вигляду функції f накладаються наступні обмеження:

- 1) при $f = \varphi(u^1)$, $c_6 = 0$;
- 2) при $f = \lambda$, $c_4 = c_6 = 0$;
- 3) при $f = \frac{\lambda}{u^1}$, $c_5 = c_6 = 0$;
- 4) при $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$, $c_5 = 0$;
- 5) при $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$, $c_5 = c_6 = 0$.

Доведення. Для доведення леми застосуємо алгоритм відшукування перетворень еквівалентності (див., наприклад, [29], [37], [61]).

Вигляд оператора еквівалентності E залежить від вигляду функції f .

1. Якщо $f = \varphi(u^1)$ — довільна гладка функція, то оператор E шукаємо у вигляді:

$$E = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^a \partial_{u^a} + \zeta \partial_f + \tau^a \partial_{g^a},\tag{3.17}$$

Подіявши оператором E на систему (3.1) та на додаткові умови

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f}{\partial u^2} = \frac{\partial g^a}{\partial x^\mu} = 0,\tag{3.18}$$

отримуємо систему визначальних рівнянь для координат оператора (3.17) $\xi^\mu, \eta^a, \zeta, \tau^a$.

$$\begin{aligned}\xi_1^0 &= \xi_0^1 = \xi_{u^a}^\mu = \eta_{u^2}^1 = \eta_{u^b u^c}^a = \eta_\mu^a = \eta_{u^1}^2 = 0, \quad a, b, c = 1; 2, \\ \xi_0^0 &= 2\xi_1^1, \quad u^2 \eta_{u^2}^2 - \eta^2 = 0,\end{aligned}\tag{3.19}$$

$$\zeta = \eta_{u^1}^1 f, \quad \tau^1 = (\eta_{u^1}^1 - \xi_0^0)g^1, \quad \tau^2 = (\eta_{u^2}^2 - \xi_0^0)g^2. \quad (3.20)$$

Загальний розв'язок системи (3.19) має вигляд (3.16). Рівності (3.20) при умовах (3.16) запишуться так

$$\zeta = c_4 f, \quad \tau^1 = (c_4 - 2c_1)g^1, \quad \tau^2 = (c_6 - 2c_1)g^2.$$

2. Якщо $f(u^1)$ — не довільна, а задається однією з формул f випадків 2) - 5) з умови леми, то інфінітезимальний оператор еквівалентності E шукаємо у вигляді:

$$E = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^a \partial_{u^a} + \tau^a \partial_{g^a}. \quad (3.21)$$

Подіавши продовженням оператора E на систему (3.1) і додаткові умови

$$\frac{\partial g^a}{\partial x^\mu} = 0, \quad (3.22)$$

після застосування алгоритму [37], знаходимо систему визначальних рівнянь для координат оператора (3.21) ξ^μ, η^a, τ^a .

$$\begin{aligned} \xi_1^0 &= \xi_0^1 = \xi_{u^a}^\mu = \eta_{u^2}^1 = \eta_{u^b u^c}^a = \eta_\mu^a = \eta_{u^2}^1 = 0, \\ a, b, c &= 1; 2, \quad \mu = 0; 1 \\ \xi_0^0 &= 2\xi_1^1, \quad u^2 \eta_{u^2}^2 - \eta^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \tau^1 &= (\eta_{u^1}^1 - \xi_0^0)g^1, \quad \tau^2 = \eta_{u^1}^2 g^1 + (\eta_{u^2}^2 - \xi_0^0)g^2, \\ \eta^1 \dot{f} + f \eta_{u^1}^1 &= 0, \quad (u^2 \eta_{u^2}^2 - \eta^2) f = (\lambda_2 - \lambda_1) \eta_{u^1}^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Загальним розв'язком (3.23) є функції

$$\begin{aligned} \xi_0^0 &= 2c_1 x_0 + c_2, \quad \xi_1^1 = c_1 x_1 + c_3, \\ \eta^1 &= c_4 u^1 + c_5, \quad \eta^2 = c_6 u^1 + c_7 u^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Якщо (3.25) підставити у (3.24), то одержимо

$$\tau^1 = (c_4 - 2c_1)g^1, \quad \tau^2 = c_6 g^1 + (c_7 - 2c_1)g^2, \quad (3.26)$$

$$(c_4 u^1 + c_5) \dot{f} + c_4 f = 0, \quad c_6 (u^1 f - \lambda_1 + \lambda_2) = 0. \quad (3.27)$$

Розв'язавши рівняння (3.27), і приходимо до випадків 2) - 5) леми.

Лему 3.1 доведено.

Зауваження 3.2. Крім перетворень еквівалентності, одержаних в лемі (3.1), для більш конкретних функцій f і g мають місце і інші перетворення, які ми назвемо додатковими. Додаткові перетворення будуть вказані нижче для функції f конкретного вигляду.

3.2. Симетрійні властивості у випадку довільної функції $f = \varphi(u^1)$

Розглянемо систему

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ u^2 \varphi(u^1) & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

та прокласифікуємо її симетрійні властивості в залежності від вигляду функцій $g^a(u^1; u^2)$ при довільній функції $\varphi(u^1)$.

Зауваження 3.3. З леми 3.1 випливає, що основна група перетворень еквівалентності системи (3.28) має вигляд

$$\begin{aligned} x_0 &= te^{2\theta_2} + \theta_0, & x_1 &= xe^{\theta_2} + \theta_1, \\ u^1 &= w^1 e^{\theta_3} + \theta_5, & u^2 &= w^2 e^{\theta_4}. \end{aligned}$$

Крім основної групи еквівалентності система (3.28) при конкретних g допускає деякі додаткові перетворення еквівалентності, наприклад

$$x_0 = at, \quad x_1 = bx, \quad u^1 = w^1, \quad u^2 = w^2 e^{mt},$$

де a, b, m — деякі сталі.

Враховуючи зауваження (3.3), теореми про максимальну алгебру інваріантності системи (3.28) формулюватимемо з точністю до вказаних перетворень еквівалентності.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.2. Якщо система (3.28) допускає розширення алгебри інваріантності A_0 , то функції g^1, g^2 задаються однією із наступних формул:

$$g^1 = \varphi^1(u^1), \quad g^2 = u^2[\varphi^2(u^1) + \lambda_3 \ln u^2]; \quad (3.29)$$

$$g^1 = (u^2)^m \varphi^1(u^1), \quad g^2 = (u^2)^{m+1} \varphi^2(u^1), \quad (3.30)$$

де λ_3, m — довільні сталі, $\varphi^1(u^1), \varphi^2(u^1)$ — довільні гладкі функції.

Доведення. Враховуючи формули (3.11), систему (3.5) перепишемо наступним чином.

$$\begin{aligned} \alpha^{22}(x_0) u^2 g_{u^2}^1 &= -2c_1 g^1, \\ \alpha^{22}(x_0) u^2 g_{u^2}^2 &= (\alpha^{22}(x_0) - 2c_1) g^2 + \dot{\alpha}^{22}(x_0) u^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

При довільних g^1 і g^2 з системи (3.31) випливає, що $\alpha^{22}(x_0) = c_1 = 0$. Врахувавши формули (3.11), одержуємо, що в цьому випадку МАІ системи (3.28) є алгебра A_0 .

Проаналізуємо тепер, при яких функціях g^1, g^2 система (3.28) допускає розширення алгебри A_0 . Для цього необхідно, як випливає з (3.31), щоб функції g^1, g^2 були розв'язками такої структурної системи, (див. [61], [107])

$$\varkappa u^2 g_{u^2}^1 = m g^1, \quad \varkappa u^2 g_{u^2}^2 = (m+1) g^2 + \lambda_3 u^2, \quad (3.32)$$

де $\varkappa = \{0; 1\}$, m, λ_3 — довільні сталі, які ми будемо називати *структурними константами*. Система (3.32) при $\varkappa = 1$ зв'язана з системою (3.31) умовами

$$m \alpha^{22}(x_0) = -2c_1, \quad \lambda_3 \alpha^{22} = \dot{\alpha}^{22}. \quad (3.33)$$

Розв'язок системи (3.32) при $\varkappa = 1$ залежить від значення сталої m .

Можливі два суттєво різні випадки.

1. $m = 0$. Загальний розв'язок системи (3.32) має вигляд (3.29), де $\lambda_3 \neq 0$, φ^1, φ^2 — довільні гладкі функції.

2. $m \neq 0$. З диференціальних наслідків умов (3.33) випливає, що $\dot{\alpha}^{22} = \lambda_3 = 0$. Тоді загальний розв'язок системи (3.32) має вигляд (3.30).

При $\varkappa = 0$ з системи (3.32) одержуємо $g^1 = g^2 = 0$, що є частинним випадком формул (3.29), (3.30).

Теорему 3.2 доведено.

Зауваження 3.4. Оскільки формули (3.29), (3.30) при $\lambda_3 = m = 0$ співпадають, то, щоб уникнути їх перетину, при дослідженні симетрійних властивостей системи (3.28) у формулах (3.29) будемо вважати $\lambda_3 \neq 0$.

Умови теореми 1 є лише необхідними умовами розширення ядра алгебри інваріантності A_0 системи (3.28), але не достатніми. Класифікація симетрійних властивостей системи (3.28) подана в наступній теоремі.

Теорема 3.3. *Якщо система (3.28) допускає розширення основної алгебри інваріантності A_0 , то її максимальні алгебри інваріантності в залежності від вигляду функцій g^1, g^2 наведені у таблиці 1.*

Таблиця 1. Класифікація симетрійних властивостей системи (3.28)

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1	$g^1 = \varphi^1(u^1),$ $g^2 = u^2(\varphi^2(u^1) + r_4 \ln u^2);$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{r_4 x_0} u^2 \partial_{u^2}$
2	$g^1 = (u^2)^m \varphi^1(u^1),$ $g^2 = (u^2)^{m+1} \varphi^2(u^1);$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2u^2 \partial_{u^2}$
3	$g^1 = 0,$ $g^2 = 0.$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1,$ $I = u^2 \partial_{u^2}$

В таблиці 1 $\varphi^1(u^1), \varphi^2(u^1)$ — довільні гладкі функції, $r_4 \in \{-1, 1\}$, m — довільна стала.

Доведення. В теоремі 3.2 показано, що розширення ядра алгебри інваріантності A_0 системи (3.28) можливе лише у випадку, коли функції g^a задаються формулами (3.29) або (3.30). Розглянемо кожну з цих формул окремо.

А. Нехай, функції g^1, g^2 мають вигляд (3.29). Підставивши (3.29) в систему (3.5), одержимо $c_1 = 0$, $\dot{\alpha}^{22} - \lambda_3 \alpha^{22} = 0$, звідки $\alpha^{22} = c_2 e^{\lambda_3 x_0}$, c_2 — довільна стала.

З формул (3.11) одержуємо алгебру, наведену в першому пункті таблиці 1.

В. Якщо функції g^a задаються формулами (3.30), то з системи (3.5) маємо

$$\begin{aligned} (m\alpha^{22} + 2c_1)\varphi^1 &= 0, \\ (m\alpha^{22} + 2c_1)\varphi^2 &= \dot{\alpha}^{22}(u^2)^{-m}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

У випадку, коли φ^1, φ^2 — довільні гладкі функції, з системи (3.34) отримуємо $\dot{\alpha}^{22} = 0$, $m\alpha^{22} + 2c_1 = 0$, тобто

$$\alpha^{22} = -2c_2, \quad c_1 = mc_2, \quad (3.35)$$

де c_2 — довільна стала. З формул (3.11), (3.35) одержуємо алгебру, наведену в другому пункті таблиці 1. Розширення симетрії другого пункту таблиці 1 можливі лише при

$$m = 0, \quad \varphi^1 = 0, \quad \varphi^2 = \lambda_4. \quad (3.36)$$

У цьому випадку

$$\alpha^{22} = 2\lambda_4 c_1 x_0 + c_2, \quad (3.37)$$

де λ_4 і c_2 — довільні сталі. З формул (3.11), (3.37) одержуємо 3-й пункт таблиці 1.

Теорему 3.3 доведено.

3.3. Симетрійні властивості при $f = \lambda$

Розглянемо систему

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

та проведемо класифікацію її симетрійних властивостей в залежності від вигляду функцій $g^a(u^1; u^2)$.

Зауваження 3.5. З леми 3.1 випливає, що основна група перетворень еквівалентності системи (3.38) має вигляд

$$\begin{aligned} x_0 &= te^{2\theta_2} + \theta_0, & x_1 &= xe^{\theta_2} + \theta_1, \\ u^1 &= w^1 + \theta_3, & u^2 &= w^2 e^{\theta_4}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Крім основної групи еквівалентності система (3.38) при конкретних g допускає додаткові перетворення еквівалентності, наприклад

$$x_0 = at, \quad x_1 = bx, \quad u^1 = w^1 + kt, \quad u^2 = w^2 e^{mt}, \quad (3.40)$$

де a, b, k, m деякі сталі.

Враховуючи зауваження (3.5), теореми про максимальну алгебру інваріантності системи (3.38) будемо формулювати з точністю до перетворень еквівалентності (3.39) та (3.40).

Необхідною умовою розширення алгебри інваріантності A_0 системи (3.38) є наступне твердження.

Теорема 3.4. *Якщо система (3.38) допускає розширення алгебри інваріантності A_0 , то функції g^1, g^2 задаються формулами (3.29), (3.30) або однією із наступних формул:*

$$g^1 = \varphi^1(\omega) + \lambda_3 u^1, \quad g^2 = u^2[\varphi^2(\omega) + \lambda_4 u^1]; \quad (3.41)$$

$$g^1 = e^{mu^1} \varphi^1(\omega), \quad g^2 = u^2 e^{mu^1} \varphi^2(\omega), \quad (3.42)$$

де $\omega = ku^1 + \ln u^2$, $m, k, \lambda_3, \lambda_4$ — довільні сталі, $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Доведення. Підставивши формули (3.12) у систему (3.5), одержимо

$$\begin{aligned} \beta^1(x_0)g_{u^1}^1 + \alpha^{22}(x_0)u^2g_{u^2}^1 &= -2c_1g^1 + \dot{\beta}^1(x_0), \\ \beta^1(x_0)g_{u^1}^2 + \alpha^{22}(x_0)u^2g_{u^2}^2 &= (\alpha^{22}(x_0) - 2c_1)g^2 + \dot{\alpha}^{22}(x_0)u^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

З (3.43) випливає, що функції g^a повинні задовольняти наступній структурній системі

$$\begin{aligned} \varkappa g_{u^1}^1 - ku^2g_{u^2}^1 &= mg^1 + \lambda_3, \\ \varkappa g_{u^1}^2 - ku^2g_{u^2}^2 &= (m - k)g^2 + \lambda_4 u^2, \end{aligned} \quad (3.44)$$

де $\varkappa = \{0; 1\}$, $k, m, \lambda_3, \lambda_4$ — довільні сталі. Якщо $\varkappa = 0$, то система (3.44) співпадає з системою (3.32), проаналізованою в теоремі 3.2, згідно якої функції g^a задаються формулами (3.29) та (3.30).

Якщо $\varkappa = 1$, то система (3.44) зв'язана з системою (3.43) умовами

$$\alpha^{22} + k\beta^1 = 0, \quad m\beta^1 = -2c_1, \quad \lambda_3\beta^1 = \dot{\beta}^1, \quad \lambda_4\alpha^{22} = \dot{\alpha}^{22}. \quad (3.45)$$

Розв'язок системи (3.44) при $\varkappa = 1$ залежить від значення сталої m .

Можливі два суттєво різні випадки.

1. $m = 0$. В цьому випадку загальний розв'язок системи (3.44)

задається функціями (3.41).

2. $m \neq 0$. З диференціальних наслідків 1-ї та 2-ї умови (3.45) одержуємо

$$\dot{\alpha}^{22} = \dot{\beta}^1 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0. \quad (3.46)$$

При умовах (3.46) загальним розв'язком системи (3.44) є функції (3.42).

Теорему 3.4 доведено.

Зауваження 3.6. Оскільки формули (3.41), (3.42) при $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $m = 0$ співпадають, то, щоб уникнути їх перетину, при дослідженні симетрійних властивостей системи (3.38) у формулах (3.41) будемо вважати $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$.

Прокласифікуємо тепер симетрійні властивості системи (3.38), використавши результати теореми 3.4.

Теорема 3.5. Якщо система (3.38) допускає розширення основної алгебри інваріантності A_0 , то її максимальні алгебри інваріантності в залежності від вигляду функцій g^1 , g^2 наведені у таблиці 1 та в таблиці 2.

Таблиця 2. Класифікація симетрійних властивостей системи (3.38)

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1	$g^1 = e^{mu^1} \varphi^1(\omega),$ $g^2 = u^2 e^{mu^1} \varphi^2(\omega);$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) +$ $+ 2(-\partial_{u^1} + ku^2 \partial_{u^2})$
2	$g^1 = \varphi^1(\omega) + r_4 u^1,$ $g^2 = u^2(\varphi^2(\omega) - kr_4 u^1);$	$\partial_0, \partial_1, Q = e^{r_4 x_0}(\partial_{u^1} - ku^2 \partial_{u^2})$
3	$g^1 = r_1 e^{u^1},$ $g^2 = r_2 e^{u^1} u^2;$	$\partial_0, \partial_1, Q = u^2 \partial_{u^2},$ $D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - 2\partial_{u^1}$
4	$g^1 = r_1(u^2)^n e^{mu^1} - m\lambda_9,$ $g^2 = u^2(r_2(u^2)^n e^{mu^1} + n\lambda_9);$	$\partial_0, \partial_1, Q = n\partial_{u^1} - mu^2 \partial_{u^2},$ $D = n(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) +$ $+ 2n\lambda_9 x_0 Q - 2u^2 \partial_{u^2}$
5	$g^1 = \lambda_3 u^1 + r_1 \ln u^2 + \lambda_7,$ $g^2 = u^2(\lambda_4 u^1 + r_2 \ln u^2 + \lambda_8);$ $\Delta > 0$	$\partial_0, \partial_1,$ $Q_1 = e^{m_1 x_0}(r_1 \partial_{u^1} + (m_1 - \lambda_3)u^2 \partial_{u^2}),$ $Q_2 = e^{m_2 x_0}((m_2 - r_2)\partial_{u^1} + \lambda_4 u^2 \partial_{u^2})$

6	$g^1 = \lambda_3 u^1 + r_1 \ln u^2 + \lambda_7,$ $g^2 = u^2(\lambda_4 u^1 + r_2 \ln u^2 + \lambda_8);$ $\Delta = 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\alpha x_0} [x_0(2r_1 \partial_{u^1} +$ $+(r_2 - \lambda_3)u^2 \partial_{u^2}) + u^2 \partial_{u^2}],$ $Q_2 = e^{\alpha x_0} [2r_1 \partial_{u^1} + (r_2 - \lambda_3)u^2 \partial_{u^2}]$
7	$g^1 = \lambda_3 u^1 + r_1 \ln u^2 + \lambda_7,$ $g^2 = u^2(\lambda_4 u^1 + r_2 \ln u^2 + \lambda_8);$ $\Delta < 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\alpha x_0} [2r_1 \cos \beta x_0 \partial_{u^1} +$ $+(r_2 - \lambda_3) \cos \beta x_0 - 2\beta \sin \beta x_0) u^2 \partial_{u^2}],$ $Q_2 = e^{\alpha x_0} [2r_1 \sin \beta x_0 \partial_{u^1} +$ $+(2\beta \cos \beta x_0 + (r_2 - \lambda_3) \sin \beta x_0) u^2 \partial_{u^2}]$
8	$g^1 = 0,$ $g^2 = u^1 u^2;$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = \partial_{u^1} + x_0 Q_2, Q_2 = u^2 \partial_{u^2}$
9	$g^1 = 0,$ $g^2 = 0.$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = u^2 \partial_{u^2},$ $D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1$

В таблиці 2 $m, n, \lambda_i, i = \overline{1; 9}$ — довільні сталі, $r_1 \in \{-1, 0, 1\}$,

$r_2 = \begin{cases} \pm 1, & r_1 = 0; \\ r, & r_1 = \pm 1, \end{cases} \quad r \in R, \omega = \ln u^2 + k u^1, \varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega) — \text{довільні}$
гладкі функції, $\Delta = (\lambda_3 - r_2)^2 + 4\lambda_4 r_1$ — дискримінант, а m_1, m_2 — корені
характеристичного рівняння $m^2 - (\lambda_3 + r_2)m + \lambda_3 r_2 - \lambda_4 r_1 = 0$, $\alpha = \frac{\lambda_3 + r_2}{2}$,
 $\beta = \frac{1}{2} \sqrt{|(\lambda_3 - r_2)^2 + 4\lambda_4 r_1|}$.

Доведення. В теоремі 3.4 показано, що розширення алгебри інваріантності A_0 системи (3.38) можливе лише у випадку, коли функції g^a задаються формулами (3.29), (3.30) або (3.41), (3.42). Розглянемо кожне з цих зображень функцій g^a окремо.

А. Нехай, функції g^1, g^2 мають вигляд (3.29). Підставивши (3.29) в систему (3.43), одержимо

$$c_1 = 0, \quad \beta^1 \dot{\varphi}^1 = \dot{\beta}^1, \quad \beta^1 \dot{\varphi}^2 = \dot{\alpha}^{22} - \lambda_3 \alpha^{22}. \quad (3.47)$$

Встановимо спочатку основну алгебру інваріантності системи (3.38), (3.29). Для цього в рівняннях (3.47) вважаємо функції φ^a довільними. Тоді з рівнянь (3.47) випливає, що

$$\beta^1 = c_1 = 0, \quad \alpha^{22} = c_3 e^{\lambda_3 x_0}. \quad (3.48)$$

Очевидно, що оператор (3.2) з координатами (3.12), (3.48) породжує алгебру інваріантності з пункту 1 таблиці 1, яка є алгеброю інваріантності A_0 системи (3.38), (3.29).

Далі дослідимо, які можливі розширення основної алгебри інваріантності системи (3.38), (3.29). Тоді із рівнянь (3.47) випливає, що функції φ^a

є розв'язком системи

$$\dot{\varphi}^1 = \lambda_5, \quad \dot{\varphi}^2 = \lambda_6, \quad (3.49)$$

де λ_5, λ_6 — довільні сталі, причому система (3.47) пов'язана із системою (3.49) наступними співвідношеннями

$$\dot{\beta}^1 - \lambda_5 \beta^1 = 0, \quad \lambda_6 \beta^1 = \dot{\alpha}^{22} - \lambda_3 \alpha^{22}. \quad (3.50)$$

Загальним розв'язком системи (3.49) є функції

$$\varphi^1 = \lambda_5 u^1 + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6 u^1 + \lambda_8, \quad (3.51)$$

де λ_7, λ_8 — сталі інтегрування. Якщо функції (3.51) підставити в (3.47), то одержимо

$$\dot{\beta}^1 = \lambda_5 \beta^1, \quad \dot{\alpha}^{22} - \lambda_3 \alpha^{22} = \lambda_6 \beta^1. \quad (3.52)$$

Залежно від співвідношення між сталими λ_3, λ_5 з рівнянь (3.52) одержуємо два розгалуження.

1. $\lambda_5 \neq \lambda_3$. Розв'язавши рівняння (3.52), знаходимо

$$c_1 = 0, \quad \beta^1 = c_2 e^{\lambda_5 x_0}, \quad \alpha^{22} = c_3 e^{\lambda_3 x_0} + \frac{\lambda_6}{\lambda_5 - \lambda_3} c_2 e^{\lambda_5 x_0}. \quad (3.53)$$

Підставивши формули (3.53) у (3.12), отримуємо наступний вигляд координат оператора (3.2)

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 e^{\lambda_5 x_0}, \quad \eta^2 = [c_3 e^{\lambda_3 x_0} + \frac{\lambda_6}{\lambda_5 - \lambda_3} c_2 e^{\lambda_5 x_0}] u^2. \quad (3.54)$$

Отже, при

$$\begin{aligned} g^1 &= \lambda_5 u^1 + \lambda_7, \quad \lambda_5 \neq \lambda_3, \\ g^2 &= [\lambda_6 u^1 + \lambda_3 \ln u^2 + \lambda_8] u^2, \end{aligned} \quad (3.55)$$

оператор (3.2) з координатами (3.54) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.38)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\lambda_5 x_0} [(\lambda_5 - \lambda_3) \partial_{u^1} + \lambda_6 u^2 \partial_{u^2}], Q_2 = e^{\lambda_3 x_0} u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (3.56)$$

Функції g^a вигляду (3.55) з відповідною алгеброю інваріантності (3.56) містяться в пункті 5 таблиці 2.

2. $\lambda_5 = \lambda_3$.

Розв'язавши рівняння (3.52), знаходимо

$$c_1 = 0, \quad \beta^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \alpha^{22} = c_3 e^{\lambda_3 x_0} (\lambda_6 c_2 x_0 + c_3) u^2. \quad (3.57)$$

Врахувавши (3.57), із (3.12) одержуємо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = 2e^{\lambda_3 x_0}, \quad \eta^2 = e^{\lambda_3 x_0} [\lambda_6 c_2 x_0 + c_3] u^2. \quad (3.58)$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3 u^1 + \lambda_7, \quad g^2 = [\lambda_6 u^1 + \lambda_3 \ln u^2 + \lambda_8] u^2, \quad (3.59)$$

оператор (3.2) з координатами (3.58) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.38)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\lambda_3 x_0} (\partial_{u^1} + \lambda_6 x_0 u^2 \partial_{u^2}), Q_2 = e^{\lambda_3 x_0} u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (3.60)$$

Функції g^a вигляду (3.59) з відповідною алгеброю інваріантності (3.60) містяться в пункті 6 таблиці 2.

В. Нехай розширення основної групи симетрії системи (3.38) відбувається при g^a вигляду (3.30). Підставивши в систему (3.43) формули (3.30), одержимо рівняння

$$\begin{aligned} (u^2)^m [\beta^1 \dot{\varphi}^1 + (m\alpha^{22} + 2c_1) \varphi^1] &= \dot{\beta}^1, \\ (u^2)^m [\beta^1 \dot{\varphi}^2 + (m\alpha^{22} + 2c_1) \varphi^2] &= \dot{\alpha}^{22}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Спочатку дослідимо основну алгебру інваріантності системи (3.38), (3.30). Для цього в рівняннях (3.61) вважаємо функції φ^a довільними. Тоді з рівнянь (3.61) випливає, що

$$\beta^1 = 0, \quad \alpha^{22} = -2c_3, \quad c_1 = mc_3. \quad (3.62)$$

Врахувавши (3.62), із (3.12) одержуємо

$$\xi^0 = 2mc_3 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = mc_3 x_1 + d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = -2c_3 u^2. \quad (3.63)$$

Оператор (3.2) з координатами (3.63) породжує наступну алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (3.64)$$

Функції g^a вигляду (3.30) з відповідною алгеброю інваріантності (3.64) відповідають пункту 2 таблиці 1.

Тепер дослідимо розширення основної алгебри інваріантності (3.64) системи (3.38), (3.30). При цьому найбільш широкий клас функцій φ^a , які можуть задовольняти систему (3.61), має вигляд

$$\varphi^1 = \lambda_3 u^1 + \lambda_5, \quad \varphi^2 = \lambda_4 u^1 + \lambda_6, \quad (3.65)$$

або

$$\varphi^1 = \lambda_3 e^{ku^1} + \lambda_5, \quad \varphi^2 = \lambda_4 e^{ku^1} + \lambda_6, \quad (3.66)$$

$\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, k$ — довільні сталі.

Зауваження 3.7. Оскільки формули (3.65), (3.66) при $\lambda_3 = \lambda_4 = 0, k = 0$ співпадають, то, щоб уникнути їх перетину, при дослідженні симетричних властивостей системи (3.38) у формулах (3.66) будемо вважати $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0, k \neq 0$.

1. Після підстановки (3.65) у (3.61) одержимо

$$\begin{aligned} (u^2)^m [\lambda_3 \beta^1 + \lambda_5 (m\alpha^{22} + 2c_1)] &= \dot{\beta}^1, \\ (u^2)^m [\lambda_4 \beta^1 + \lambda_6 (m\alpha^{22} + 2c_1)] &= \dot{\alpha}^{22}, \\ \lambda_3 (m\alpha^{22} + 2c_1) &= \lambda_4 (m\alpha^{22} + 2c_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Розв'язок системи (3.67) залежить від значення параметра m .

1.1. Якщо $m \neq 0$, то з рівнянь (3.67) випливає, що

$$\begin{aligned} \beta^1 &= c_2, \quad \alpha^{22} = -2c_3, \quad \lambda_3(-mc_3 + c_1) = 0, \quad \lambda_4(-mc_3 + c_1) = 0, \\ \lambda_3 c_2 + \lambda_5(-2mc_3 + 2c_1) &= 0, \quad \lambda_4 c_2 + \lambda_6(-2mc_3 + 2c_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Проаналізувавши рівняння (3.68), приходимо до висновку, що розширення основної алгебри інваріантності (3.64) можливе лише при умові

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0. \quad (3.69)$$

Враховуючи умову (3.69), із рівнянь (3.68) випливають два розгалуження:

а) $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, б) $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$.

a) $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$. Тоді із рівнянь (3.68) отримуємо

$$c_1 = mc_3. \quad (3.70)$$

З формул (3.12), врахувавши (3.70), одержуємо

$$\xi^0 = 2mc_3x_0 + d_0, \quad \xi^1 = mc_3x_1 + d_1, \quad \eta^1 = c_2, \quad \eta^2 = c_3u^2. \quad (3.71)$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5(u^2)^m, \quad g^2 = \lambda_6(u^2)^{m+1} \quad (3.72)$$

оператор (3.2) з координатами (3.72) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + u^2\partial_{u^2}, Q = \partial_{u^1} \rangle, \quad (3.73)$$

що є частинним випадком пункту 4 таблиці 2.

b) $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$. Тоді з формул (3.12), врахувавши (3.68), одержуємо

$$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1x_1 + d_1, \quad \eta^1 = c_2, \quad \eta^2 = c_3u^2. \quad (3.74)$$

Отже, при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = 0 \quad (3.75)$$

оператор (3.2) з координатами (3.74) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1, Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = u^2\partial_{u^2} \rangle, \quad (3.76)$$

що міститься в пункті 9 таблиці 2.

1.2. Якщо $m = 0$, то з рівнянь (3.67) знаходимо, що

$$\lambda_3\beta^1 + 2\lambda_5c_1 = \dot{\beta}^1, \quad \lambda_4\beta^1 + 2\lambda_6c_1 = \dot{\alpha}^{22}, \quad \lambda_3c_1 = \lambda_4c_1 = 0. \quad (3.77)$$

З рівнянь (3.77) маємо два розгалуження:

a) $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, **b)** $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

a) $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$. Тоді із рівнянь (3.77) випливає, що

$$c_1 = 0, \quad \beta^1 = c_2e^{\lambda_3x_0}, \quad \dot{\alpha}^{22} = \lambda_4c_2e^{\lambda_3x_0}. \quad (3.78)$$

Якщо в рівняннях (3.78) $\lambda_3 \neq 0$, то розв'язавши (3.78), отримуємо

$$\alpha^{22} = \frac{\lambda_4}{\lambda_3}c_2e^{\lambda_3x_0} + c_3. \quad (3.79)$$

З формул (3.12), врахувавши (3.78), (3.79), одержуємо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \eta^2 = \left(\frac{\lambda_4}{\lambda_3} c_2 e^{\lambda_3 x_0} + c_3\right) u^2. \quad (3.80)$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3 u^1 + \lambda_5, \quad g^2 = u^2 (\lambda_4 u^1 + \lambda_6) \quad (3.81)$$

оператор (3.2) з координатами (3.80) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\lambda_3 x_0} (\lambda_3 \partial_{u^1} + \lambda_4 u^2 \partial_{u^2}), Q_2 = u^2 \partial_{u^2} \rangle, \quad (3.82)$$

що є частинним випадком пункту 5 таблиці 2.

Якщо в рівняннях (3.78) $\lambda_3 = 0$, то розв'язавши (3.78), маємо

$$\alpha^{22} = \lambda_4 c_2 x_0 + c_3. \quad (3.83)$$

З формул (3.12), врахувавши (3.78), (3.83), знаходимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2, \quad \eta^2 = (\lambda_4 c_2 x_0 + c_3) u^2. \quad (3.84)$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5, \quad g^2 = u^2 (\lambda_4 u^1 + \lambda_6) \quad (3.85)$$

оператор (3.2) з координатами (3.84) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = \partial_{u^1} + \lambda_4 x_0 u^2 \partial_{u^2}, Q_2 = u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (3.86)$$

що співпадає з пунктом 8 таблиці 2.

б) $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Тоді з рівнянь (3.78) отримуємо

$$\beta^1 = 2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2, \quad \alpha^{22} = 2\lambda_6 c_1 x_0 + c_3. \quad (3.87)$$

З формул (3.12), врахувавши (3.87), одержуємо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1 x_0 + d_0, & \xi^1 &= c_1 x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= 2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2, & \eta^2 &= (2\lambda_6 c_1 x_0 + c_3) u^2. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5, \quad g^2 = \lambda_6 u^2 \quad (3.89)$$

оператор (3.2) з координатами (3.88) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2x_0(\lambda_5\partial_{u^1} + \lambda_6u^2\partial_{u^2}), \\ Q_1 = \partial_{u^1}, Q_2 = u^2\partial_{u^2} \rangle, \quad (3.90)$$

що співпадає з пунктом 9 таблиці 2.

2. Якщо ж тепер в (3.61) підставити формули (3.66), то одержимо

$$m\alpha^{22} + 2c_1 = -k\beta^1, \quad -k\lambda_5\beta^1(u^2)^m = \dot{\beta}^1, \quad -k\lambda_6\beta^1(u^2)^m = \dot{\alpha}^{22}. \quad (3.91)$$

Розв'язок системи (3.91) залежить від значення параметра m .

2.1. Якщо $m \neq 0$, то з рівнянь (3.91) випливає, що

$$\beta^1 = -2c_2, \quad \alpha^{22} = -2c_3, \quad \lambda_5c_2 = \lambda_6c_2 = 0, \quad -mc_3 + c_1 = kc_2. \quad (3.92)$$

З рівнянь (3.92) бачимо, що розширення основної алгебри інваріантності (3.64) можливе лише при умові, що

$$\lambda_5 = \lambda_6 = 0. \quad (3.93)$$

Враховуючи умови (3.92), (3.93), з формул (3.12) знаходимо координати оператора (3.2)

$$\xi^0 = 2c_1x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 = -2c_2, \quad \eta^2 = \frac{1}{m}(c_1 - kc_2)u^2. \quad (3.94)$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3(u^2)^me^{ku^1}, \quad g^2 = \lambda_4(u^2)^{m+1}e^{ku^1} \quad (3.95)$$

оператор (3.2) з координатами (3.94) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + u^2\partial_{u^2}, Q = 2m\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2} \rangle, \quad (3.96)$$

що є частинним випадком пункту (4) таблиці 2.

2.2. Якщо $m = 0$, то з рівнянь (3.91) випливає, що

$$\lambda_5c_1 = 0, \quad \beta^1 = -\frac{2c_1}{k}, \quad \dot{\alpha}^{22} = 2\lambda_6c_1x_0. \quad (3.97)$$

Якщо $\lambda_5 \neq 0$, то одержуємо результат, який є частинним випадком пункту 1 таблиці 1.

Якщо $\lambda_5 = 0$, то, враховуючи умови (3.97), з формул (3.12) знаходимо координати оператора (3.2)

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, & \xi^1 &= c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= -\frac{2c_1}{k}, & \eta^2 &= (2\lambda_6c_1x_0 + c_3)u^2.\end{aligned}\tag{3.98}$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3 e^{ku^1}, \quad g^2 = (\lambda_4 e^{ku^1} + \lambda_6)u^2\tag{3.99}$$

оператор (3.2) з координатами (3.98) породжує алгебру

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \frac{2}{k}\partial_{u^1} + 2\lambda_6x_0u^2\partial_{u^2}, \\ Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q = u^2\partial_{u^2} \rangle,\end{aligned}\tag{3.100}$$

що еквівалентно пункту 3 таблиці 2.

С. Дослідимо тепер симетрійні властивості системи (3.38) при умові, що функції g^a мають вигляд (3.41).

Якщо формули (3.41) підставити в систему (3.43) та розщепити одержані рівняння по змінній u^1 , то будемо мати $c_1 = 0$ та

$$\begin{aligned}(\alpha^{22} + k\beta^1)\dot{\varphi}^1 &= \dot{\beta}^1 - \lambda_3\beta^1, \\ (\alpha^{22} + k\beta^1)\dot{\varphi}^2 &= \dot{\alpha}^{22} - \lambda_4\beta^1.\end{aligned}\tag{3.101}$$

Спочатку дослідимо основну алгебру інваріантності системи (3.38), (3.41). Для цього в рівняннях (3.101) вважаємо функції φ^a та сталі λ_3, λ_4 довільними. Тоді з рівнянь (3.101) випливає, що

$$\lambda_4 = -k\lambda_3, \quad \beta^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \alpha^{22} = -kc_2 e^{\lambda_3 x_0}.\tag{3.102}$$

Враховавши (3.102), із (3.12) одержуємо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \eta^2 = -kc_2 e^{\lambda_3 x_0} u^2.\tag{3.103}$$

Отже, основною алгеброю інваріантності системи (3.38), (3.41) є алгебра

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q = e^{\lambda_3 x_0}(\partial_{u^1} - ku^2\partial_{u^2}) \rangle,\tag{3.104}$$

яка відповідає пункту 2 таблиці 2.

Тепер дослідимо розширення основної алгебри інваріантності (3.104) системи (3.38), (3.41). Набільш широкий клас функцій φ^1, φ^2 , які можуть

задовольняти систему (3.101), і при яких можливе розширення алгебри (3.104), має вигляд

$$\varphi^1 = \lambda_5 \omega + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6 \omega + \lambda_8, \quad (3.105)$$

де $\omega = \ln u^2 + ku^1$, $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$ — довільні сталі.

Зауваження 3.8. У формулах (3.105) будемо вважати, що $m \neq 0$, і $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, оскільки в протилежному випадку одержимо функції g^1, g^2 вигляду (3.89).

Якщо формули (3.105) підставити у систему (3.101), то одержимо, що $c_1 = 0$ та

$$\begin{aligned} \dot{\beta}^1 &= (\lambda_3 + k\lambda_5)\beta^1 + \lambda_5\alpha^{22}, \\ \dot{\alpha}^{22} &= (\lambda_4 + k\lambda_6)\beta^1 + \lambda_6\alpha^{22}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Розв'язок системи (3.106) залежить від вигляду коренів характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_3 - m & \lambda_5 \\ \tilde{\lambda}_4 & \lambda_6 - m \end{vmatrix} = 0, \quad (3.107)$$

де $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + k\lambda_5$, $\tilde{\lambda}_4 = \lambda_4 + k\lambda_6$. Вигляд коренів рівняння (3.107) залежить від значення дискримінанта

$$D = (\tilde{\lambda}_3 - \lambda_6)^2 + 4\tilde{\lambda}_4\lambda_5. \quad (3.108)$$

1. Якщо $D > 0$, то рівняння (3.107) має два дійсні різні корені m_1, m_2 . Тоді загальний розв'язок системи (3.106) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \beta^1 &= c_2\lambda_5 e^{m_1 x_0} + c_3(m_2 - \lambda_6)e^{m_2 x_0}, \\ \alpha^{22} &= c_2(m_1 - \tilde{\lambda}_3)e^{m_1 x_0} + c_3\lambda_4 e^{m_2 x_0}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Із (3.12), врахувавши (3.109), при $c_1 = 0$ одержуємо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2\lambda_5 e^{m_1 x_0} + c_3(m_2 - \lambda_6)e^{m_2 x_0}, \\ \eta^2 &= [c_2(m_1 - \tilde{\lambda}_3)e^{m_1 x_0} + c_3\lambda_4 e^{m_2 x_0}]u^2. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Оператор (3.2) з координатами (3.110) породжує наступну МАІ системи (3.38), (3.41)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{m_1 x_0} (c_2 \lambda_5 \partial_{u^1} + (m_1 - \tilde{\lambda}_3) u^2 \partial_{u^2}, \\ Q_2 = e^{m_2 x_0} [(m_2 - \lambda_6) \partial_{u^1} + \tilde{\lambda}_4 u^2 \partial_{u^2}] \rangle, \end{aligned} \quad (3.111)$$

що відповідає пункту 5 таблиці 2.

2. Якщо $D = 0$, $|\lambda_3| + |\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, то $m_1 = m_2 = m = \frac{\tilde{\lambda}_3 + \lambda_6}{2}$. Тоді загальний розв'язок системи (3.106) задається формулами

$$\begin{aligned} \beta^1 &= \lambda_5 e^{m x_0} (c_2 x_0 + c_2 + c_3), \\ \alpha^{22} &= e^{m x_0} [(m - \tilde{\lambda}_3) (c_2 x_0 + c_3) + c_2]. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Підставляючи (3.112) у (3.12), при $c_1 = 0$ одержуємо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = \lambda_5 e^{m x_0} (c_2 x_0 + c_2 + c_3), \\ \eta^2 &= e^{m x_0} [(m - \tilde{\lambda}_3) (c_2 x_0 + c_3) + c_2] u^2. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Оператор (3.2) з координатами (3.113) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.38), (3.41), яка відповідає пункту 6 таблиці 2.

3. Якщо ж $D = 0$, $\lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, то тоді функції g^a задаються формулами вигляду (3.85), при яких МАІ системи (3.38) досліджена в розділі В даної теореми.

4. Якщо $D < 0$, то рівняння (3.107) має комплексні корені $m_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, причому $\alpha = \frac{\tilde{\lambda}_3 + \lambda_6}{2}$, $\beta = \frac{1}{2} \sqrt{|D|}$. Тоді розв'язок системи (3.106) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \beta^1 &= e^{\alpha x_0} \lambda_5 [c_2 \cos \beta x_0 + c_3 \sin \beta x_0], \\ \alpha^{22} &= e^{\alpha x_0} [c_2 ((\alpha - \tilde{\lambda}_3) \cos \beta x_0 - \beta \sin \beta x_0 + \\ &\quad + c_3 (\beta \cos \beta x_0 + (\alpha - \tilde{\lambda}_3) \sin \beta x_0)]. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Із (3.12), врахувавши (3.114), при $c_1 = 0$ одержуємо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \\ \eta^1 &= e^{\alpha x_0} \lambda_5 [c_2 \cos \beta x_0 + c_3 \sin \beta x_0], \\ \eta^2 &= e^{\alpha x_0} [c_2 ((\alpha - \tilde{\lambda}_3) \cos \beta x_0 - \beta \sin \beta x_0 + \\ &\quad + c_3 (\beta \cos \beta x_0 + (\alpha - \tilde{\lambda}_3) \sin \beta x_0)] u^2. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Оператор (3.2) з координатами (3.115) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.38), (3.41), яка відповідає пункту 7 таблиці 2.

Д. В цій частині теореми дослідимо симетрійні властивості системи (3.38) при функціях g^a вигляду (3.42).

Підставивши в систему (3.43) формули (3.42), одержимо рівняння

$$\begin{aligned} e^{tu^1}[(\alpha^{22} + k\beta^1)\dot{\varphi}^1 + (m\beta^1 + 2c_1)\varphi^1] &= \dot{\beta}^1, \\ e^{tu^1}[(\alpha^{22} + k\beta^1)\dot{\varphi}^2 + (m\beta^1 + 2c_1)\varphi^2] &= \dot{\alpha}^{22}. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Встановимо спочатку основну алгебру інваріантності системи (3.38), (3.42), поклавши в рівняннях (3.116) функції φ^a довільними. З рівнянь (3.116) випливає, що

$$\begin{aligned} \alpha^{22} + k\beta^1 &= 0, \quad m\beta^1 + 2c_1 = 0, \quad \dot{\beta}^1 = 0, \quad \dot{\alpha}^{22} = 0, \quad \text{звідки} \\ \beta^1 &= -2c_2, \quad \alpha^{22} = 2kc_2, \quad c_1 = mc_2, \end{aligned} \quad (3.117)$$

c_2 - довільна стала. Врахувавши (3.117), із (3.12) знаходимо

$$\xi^0 = 2mc_2x_0 + d_0, \quad \xi^1 = mc_2x_1 + d_1, \quad \eta^1 = -2c_2, \quad \eta^2 = 2kc_2u^2. \quad (3.118)$$

Отже, основною алгеброю інваріантності системи (3.38), (3.42) є алгебра

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + 2(-\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}) \rangle. \quad (3.119)$$

Цей результат відповідає пункту 1 таблиці 2.

Тепер дослідимо розширення основної алгебри інваріантності (3.119) системи (3.38), (3.42). Набільш широкий клас функцій φ^1, φ^2 , які можуть задовольняти систему (3.116), і при цьому відбувається розширення алгебри (3.119), має вигляд

$$\varphi^1 = \lambda_5 e^{n\omega} + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6 e^{(n+1)\omega} + \lambda_8, \quad (3.120)$$

$\omega = \ln u^2 + ku^1$, λ_5, λ_6, n - довільні сталі.

Зауваження 3.9. У формулах (3.120) покладемо $n \neq 0$ та $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, щоб уникнути перетину з (3.89), (3.99).

Підставивши (3.120) в (3.116), та розщепивши по функції e^{nw} , одержимо

$$\alpha^{22} = -\frac{1}{n}[(m + kn)\beta^1 + 2c_1], \quad \lambda_7 e^{mu^1}(m\beta^1 + 2c_1) = \dot{\beta}^1, \quad (n\lambda_8 + (m + kn)\lambda_7)(m\beta^1 + 2c_1) = 0. \quad (3.121)$$

Проаналізувавши рівняння системи (3.121), приходимо до висновку, що можливі наступні нееквівалентні випадки:

1. $n\lambda_8 + (m + kn)\lambda_7 \neq 0$. З системи (3.121) випливає, що цей випадок приводить до основної алгебри інваріантності (3.119).

2. $n\lambda_8 + (m + kn)\lambda_7 = 0, m \neq 0$. Цей випадок при $\lambda_7 \neq 0$ теж приводить до основної алгебри інваріантності (3.119), а при $\lambda_7 = 0$ очевидно, що і $\lambda_8 = 0$, одержуємо результати (3.95), (3.96).

3. $n\lambda_8 + (m + kn)\lambda_7 = 0, m = 0$. З рівнянь (3.121) отримуємо

$$\beta^1 = 2\lambda_7 c_1 x_0 + c_2, \quad \alpha^{22} = -k(2\lambda_7 c_1 x_0 + c_2) - \frac{2}{n}c_1. \quad (3.122)$$

Підставивши формули (3.122) у (3.12), знаходимо

$$\xi^0 = 2c_1 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1 x_1 + d_1, \quad \eta^1 = 2\lambda_7 c_1 x_0 + c_2, \quad \eta^2 = [-k(2\lambda_7 c_1 x_0 + c_2) - \frac{2}{n}c_1]u^2. \quad (3.123)$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5(u^2)^n e^{knu^1} + \lambda_7, \quad g^2 = u^2(\lambda_6(u^2)^n e^{knu^1} - k\lambda_7) \quad (3.124)$$

оператор (3.2) з координатами (3.123) породжує наступну МАІ системи (3.38), (3.42)

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D_1 = n(2x_0 + x_1 \partial_1 + 2\lambda_7 x_0 Q) - 2u^2 \partial_{u^2}, \quad Q = \partial_{u^1} - ku^2 \partial_{u^2} \rangle, \quad (3.125)$$

яка відповідає пункту 4 таблиці 2.

Теорему 3.5 доведено.

3.4. Симетрійні властивості при $f = \frac{\lambda}{u^1}$ у випадку довільної λ

В цьому підрозділі розглянемо систему

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \frac{\lambda}{u^1} u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix}, \quad (3.126)$$

де λ — довільна стала, та проведемо класифікацію її симетрійних властивостей в залежності від вигляду функцій $g^a(u^1; u^2)$.

Зауваження 3.10. З лєми 3.1 випливає, що основна група перетворень еквівалентності системи (3.126) має вигляд

$$\begin{aligned} x_0 &= te^{2\theta_2} + \theta_0, & x_1 &= xe^{\theta_2} + \theta_1, \\ u^1 &= w^1 e^{\theta_3}, & u^2 &= w^2 e^{\theta_4}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Крім основної групи еквівалентності система (3.126) при конкретних g допускає додаткові перетворення еквівалентності, наприклад

$$x_0 = at, \quad x_1 = bx, \quad u^1 = w^1 e^{kt}, \quad u^2 = w^2 e^{mt}, \quad (3.128)$$

де a, b, k, m деякі сталі. Тому теореми про максимальну алгебру інваріантності системи (3.126) будемо формулювати з точністю до перетворень еквівалентності (3.127), (3.128).

Необхідною умовою розширення основної алгебри інваріантності A_0 системи (3.126) є твердження.

Теорема 3.6. Якщо система (3.126) допускає розширення основної алгебри інваріантності A_0 , то функції g^1, g^2 задаються формулами (3.29), (3.30) або однією із наступних формул:

$$g^1 = u^1(\varphi^1(\omega) + \lambda_3 \ln u^1), \quad g^2 = u^2(\varphi^2(\omega) + \lambda_4 \ln u^2); \quad (3.129)$$

$$g^1 = (u^1)^{m+1} \varphi^1(\omega), \quad g^2 = u^2 (u^1)^m \varphi^2(\omega); \quad (3.130)$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$; $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції, $m, k, \lambda_3, \lambda_4$ — довільні сталі.

Доведення. Підставивши формули (3.13), які задають координати інфінітезимального оператора (3.2) для системи (3.126), у систему (3.5), одержимо

$$\begin{aligned} \alpha^1(x_0) u^1 g_{u^1}^1 + \alpha^{22}(x_0) u^2 g_{u^2}^1 &= (\alpha^1(x_0) - 2c_1) g^1 + \dot{\alpha}^1(x_0) u^1, \\ \alpha^1(x_0) u^1 g_{u^1}^2 + \alpha^{22}(x_0) u^2 g_{u^2}^2 &= (\alpha^{22}(x_0) - 2c_1) g^2 + \dot{\alpha}^{22}(x_0) u^2. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Очевидно, що при довільних функціях g^1, g^2 система (3.131) не допускає розширення основної алгебри інваріантності A_0 .

Система (3.131) допускає найбільш широкий клас функцій g^a , при яких можливе розширення основної алгебри інваріантності A_0 , якщо вони задовольняють структурній системі

$$\begin{aligned} \varkappa u^1 g_{u^1}^1 + k u^2 g_{u^2}^1 &= (m+1)g^1 + k_1 u^1, \\ \varkappa u^1 g_{u^1}^2 + k u^2 g_{u^2}^2 &= (m+k)g^2 + k_2 u^2, \end{aligned} \quad (3.132)$$

де $\varkappa = \{0; 1\}$; k, m, k_1, k_2 - довільні сталі. Загальний розв'язок системи (3.132) при $\varkappa = 0$ задається формулами (3.29), (3.30). Система (3.132) при $\varkappa = 1$ зв'язана з системою (3.131) умовами

$$\alpha^{22} - k\alpha^1 = 0, \quad m\alpha^1 = -2c_1, \quad k_1\alpha^1 = \dot{\alpha}^1, \quad k_2\alpha^1 = \dot{\alpha}^{22}. \quad (3.133)$$

Розв'язок системи (3.132) залежить від значення сталої m .

Якщо $m = 0$, то загальний розв'язок системи (3.132) має вигляд (3.129), а при $m \neq 0$ задається формулами (3.130).

Теорему 3.6 доведено.

Зауваження 3.11. Якщо у зображеннях функцій g^a , заданих формулами (3.129) покласти $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, то одержаний вигляд функцій g^a буде частинним випадком зображення функцій g^a , заданих формулами (3.130), при умові $m = 0$. А отже, класи систем (3.126), (3.129) та (3.126), (3.130) матимуть непорожній перетин. Щоб уникнути в наступних дослідженнях симетрійних властивостей розгляду еквівалентних систем, накладаємо обмеження на параметри зображень функцій g^a у формулах (3.129): $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$.

Прокласифікуємо тепер симетрійні властивості системи (3.126), використавши результати теореми 3.6.

Теорема 3.7. Якщо система (3.126) допускає розширення основної алгебри інваріантності A_0 , то її максимальні алгебри інваріантності в залежності від вигляду функцій g^1, g^2 наведені у таблиці 1 та в таблиці 3.

Таблиця 3. Класифікація симетрійних властивостей системи (3.126)

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^2) + r_1 \ln u^1),$ $g^2 = \varphi^2(u^2);$	$\partial_0, \partial_1, Q = e^{r_1 x_0} u^1 \partial_{u^1}$
2	$g^1 = u^1(\varphi^1(\omega) + r_1 \ln u^1),$ $g^2 = u^2(\varphi^2(\omega) + r_1 \ln u^2);$	$\partial_0, \partial_1, Q = e^{r_1 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + k u^2 \partial_{u^2})$
3	$g^1 = (u^1)^{m+1} \varphi^1(\omega),$ $g^2 = u^2 (u^1)^m \varphi^2(\omega);$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) -$ $-2(u^1 \partial_{u^1} + k u^2 \partial_{u^2})$
4	$g^1 = u^1(r_1 (u^1)^n (u^2)^m + m \lambda_7),$ $g^2 = u^2(r_2 (u^1)^n (u^2)^m - n \lambda_7);$	$\partial_0, \partial_1, Q = m u^1 \partial_{u^1} - n u^2 \partial_{u^2},$ $D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2 \lambda_7 x_0 Q) -$ $-2 u^2 \partial_{u^2}$
5	$g^1 = r_1 (u^1)^{n+1},$ $g^2 = r_2 (u^1)^n u^2;$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - \frac{2}{n} u^1 \partial_{u^1},$ $Q = u^2 \partial_{u^2}$
6	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + r_1 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^1 + r_2 \ln u^2 + \lambda_8);$ $\Delta > 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{m_1 x_0} (r_1 u^1 \partial_{u^1} +$ $+(m_1 - \lambda_3) u^2 \partial_{u^2})$ $Q_2 = e^{m_2 x_0} ((m_2 - r_2) u^1 \partial_{u^1} +$ $+ \lambda_4 u^2 \partial_{u^2})$
7	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + r_1 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^1 + r_2 \ln u^2 + \lambda_8);$ $\Delta = 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\alpha x_0} [x_0 (r_1 u^1 \partial_{u^1} +$ $+(\alpha - \lambda_3) u^2 \partial_{u^2}) + u^2 \partial_{u^2}]$ $Q_2 = e^{\alpha x_0} [r_1 u^1 \partial_{u^1} + (\alpha - \lambda_3) u^2 \partial_{u^2}]$
8	$g^1 = r_1 u^1,$ $g^2 = r_2 u^2 \ln u^1;$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = u^2 \partial_{u^2},$ $Q_2 = u^1 \partial_{u^1} + r_2 x_0 u^2 \partial_{u^2}$
9	$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + r_1 \ln u^2 + \lambda_7),$ $g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^1 + r_2 \ln u^2 + \lambda_8);$ $\Delta < 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\alpha x_0} [r_1 \cos \beta x_0 u^1 \partial_{u^1} +$ $+(\alpha - \lambda_3) \cos \beta x_0 - \beta \sin \beta x_0 u^2 \partial_{u^2}]$ $Q_2 = e^{\alpha x_0} [r_1 \sin \beta x_0 u^1 \partial_{u^1} +$ $+(\beta \cos \beta x_0 + (\alpha - \lambda_3) \sin \beta x_0) u^2 \partial_{u^2}]$
10	$g^1 = 0,$ $g^2 = 0.$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = u^1 \partial_{u^1}, Q_2 = u^2 \partial_{u^2},$ $D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1$

В таблиці 3 $m, n, \lambda_i, i = \overline{1;9}$ — довільні сталі, $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$, $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Зауваження 3.12. З доведенням теореми 3.7 можна ознайомитися в додатку А дисертації.

3.5. Симетрійні властивості при $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$

Розглянемо систему

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1} u^2 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix} \quad (3.134)$$

та проведемо класифікацію її симетрійних властивостей в залежності від вигляду функцій $g^a(u^1; u^2)$.

Зауваження 3.13. З лемми 3.1 випливає, що основна група перетворень еквівалентності системи (3.134) має вигляд

$$\begin{aligned} x_0 &= te^{2\theta_2} + \theta_0, & x_1 &= xe^{\theta_2} + \theta_1, \\ u^1 &= w^1 e^{\theta_3}, & u^2 &= w^2 e^{\theta_4} + \theta_5 w^1. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Крім основної групи еквівалентності система (3.134) при конкретних g допускає додаткові перетворення еквівалентності, вигляду (3.128). Тому теорему про максимальну алгебру інваріантності системи (3.134) будемо формулювати з точністю до перетворень еквівалентності (3.135) та (3.128).

Необхідною умовою розширення основної алгебри інваріантності A_0 системи (3.134) є наступне твердження.

Теорема 3.8. Якщо система (3.134) допускає розширення алгебри A_0 , то функції g^1, g^2 задаються формулами (3.29), (3.30), (3.129), (3.130) або з точністю до перетворень еквівалентності (3.135) мають вигляд

$$g^1 = u^1(\varphi^1(\omega) + \lambda_3), \quad g^2 = u^1\varphi^2(\omega) + u^2\varphi^1(\omega), \quad (3.136)$$

де $\omega = u^1$, λ_3 — довільна стала;

$$g^1 = u^1 e^{\frac{u^2}{u^1}} \varphi^1(\omega), \quad g^2 = e^{\frac{u^2}{u^1}} [u^1 \varphi^2(\omega) + u^2 \varphi^1(\omega)], \quad (3.137)$$

де $\omega = u^1$;

$$g^1 = (u^1)^{m+1} \varphi^1(\omega), \quad g^2 = (u^1)^m [u^1 \varphi^2(\omega) + u^2 \varphi^1(\omega)], \quad (3.138)$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + k \ln u^1$, $k \neq 0$, m — довільні сталі;

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1(\varphi^1(\omega) + \lambda_3) + \lambda_4 u^2, \\ g^2 &= u^1 \varphi^2(\omega) + u^2 \varphi^1(\omega) + \lambda_4 \frac{(u^2)^2}{u^1}, \end{aligned} \quad (3.139)$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + k \ln u^1$, λ_3, λ_4, k — довільні сталі, $k \neq 0$, $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$; причому в формулах (3.136) — (3.139) $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Доведення. Як уже вказано на початку даного розділу, розв'язком визначальних систем $S_1(\xi, \eta) = 0$ та $S_2(\xi, \eta, f) = 0$ при $f = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{u^1}$ є координати оператора (3.2), задані формулами (3.14), враховуючи які, визначальну систему $S_3(\xi, \eta, f, g) = 0$ перепишемо наступним чином

$$\begin{aligned} \alpha^1(x_0)u^1 g_{u^1}^1 + (\alpha^{21}(x_0)u^1 + \alpha^{22}u^2)g_{u^2}^1 &= \\ &= (\alpha^1(x_0) - 2c_1)g^1 + \dot{\alpha}^1 u^1, \\ \alpha^1(x_0)u^1 g_{u^1}^2 + (\alpha^{21}(x_0)u^1 + \alpha^{22}u^2)g_{u^2}^2 &= \\ &= (\alpha^{22}(x_0) - 2c_1)g^2 + \alpha^{21}(x_0)g^1 + \dot{\alpha}^{21}u^1 + \dot{\alpha}^{22}u^2. \end{aligned} \quad (3.140)$$

Найбільш широкий клас функцій g^a , що задовольняють систему (3.140), при цьому розширюється основна алгебри інваріантності A_0 , можливий при умовах

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= k_1 \varphi(x_0), \quad \alpha^{21} = k_0 \varphi(x_0), \quad \alpha^{22} = k_2 \varphi(x_0), \quad -2c_1 = k_3 \varphi(x_0), \\ \dot{\alpha}^1 &= k_4 \varphi(x_0), \quad \dot{\alpha}^{21} = k_5 \varphi(x_0), \quad \dot{\alpha}^{22} = k_6 \varphi(x_0), \end{aligned} \quad (3.141)$$

де $\varphi(x_0)$ — довільна гладка функція, $k_0, k_1, \dots, k_6$ — довільні сталі. Враховуючи (3.141), з (3.140) одержуємо структурну систему для визначення функцій g^a :

$$\begin{aligned} k_1 u^1 g_{u^1}^1 + (k_0 u^1 + k_2 u^2)g_{u^2}^1 &= (k_1 + k_3)g^1 + k_4 u^1, \\ k_1 u^1 g_{u^1}^2 + (k_0 u^1 + k_2 u^2)g_{u^2}^2 &= (k_2 + k_3)g^2 + k_0 g^1 + k_5 u^1 + k_6 u^2. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Проаналізуємо структурну систему (3.142) та її вплив на розв'язки системи (3.140). Розв'язок системи (3.142) суттєво залежить від співвідношення між сталими k_0, k_1, k_2 . Якщо в структурній системі (3.142) покласти $k_0 = 0$, то система (3.142) співпадає з системою (3.132). Якщо ж $k_0 \neq 0$, і $k_1 \neq k_2$, то система (3.142) за допомогою перетворень еквівалентності (3.135) при

$\theta = -\frac{k_0}{k_2}$ зводиться до системи (3.132), дослідженої в теоремі 3.6, згідно якої функції g^a задаються формулами (3.130), (3.129) або (3.29), (3.30).

Якщо $k_0 \neq 0$ (не втрачаючи загальності, можна вважати $k_0 = 1$) і $k_1 = k_2$, то, як випливає із формул (3.141), стає очевидно, що $k_4 = k_6$. Тоді система (3.142) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} k_1 u^1 g_{u^1}^1 + (u^1 + k_1 u^2) g_{u^2}^1 &= (k_1 + k_3) g^1 + k_4 u^1, \\ k_1 u^1 g_{u^1}^2 + (u^1 + k_1 u^2) g_{u^2}^2 &= (k_1 + k_3) g^2 + g^1 + k_4 u^2 + k_5 u^1. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Розв'язок системи (3.143) залежить від значень параметрів k_1, k_3 . Одержуємо 4 нееквівалентні випадки:

1) $k_1 = 0, k_3 = 0$, 2) $k_1 = 0, k_3 \neq 0$,

3) $k_1 \neq 0, k_3 = 0$, 4) $k_1 \neq 0, k_3 \neq 0$.

1) Нехай $k_1 = 0, k_3 = 0$. Якщо $k_1 = 0$, то з рівнянь (3.141) випливає, що $k_4 = 0$. Тоді система (3.143) набуде вигляду

$$\begin{aligned} u^1 g_{u^2}^1 &= 0, \\ u^1 g_{u^2}^2 &= g^1 + k_5 u^1. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Розв'язавши рівняння (3.144), одержуємо зображення функцій g^a вигляду (3.136), де $\lambda_3 = -k_5$.

2) Розглянемо випадок $k_1 = 0, k_3 \neq 0$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $k_3 = 1$. З рівнянь (3.141) випливає, що $k_4 = k_5 = 0$. Тоді система (3.143) набуде вигляду

$$\begin{aligned} u^1 g_{u^2}^1 &= g^1, \\ u^1 g_{u^2}^2 &= g^2 + g^1, \end{aligned} \quad (3.145)$$

загальним розв'язком якої є функції (3.137).

3) Якщо $k_1 \neq 0, k_3 = 0$, то система (3.143) набуде наступного вигляду

$$\begin{aligned} k_1 u^1 g_{u^1}^1 + (u^1 + k_1 u^2) g_{u^2}^1 &= k_1 g^1 + k_4 u^1, \\ k_1 u^1 g_{u^1}^2 + (u^1 + k_1 u^2) g_{u^2}^2 &= k_1 g^2 + g^1 + k_5 u^1 + k_4 u^2. \end{aligned} \quad (3.146)$$

Загальний розв'язок системи (3.146) має вигляд (3.139), де $k = -\frac{1}{k_1}$, $\lambda_3 = -k_5, \lambda_5 = k_4$.

4) Якщо $k_1 \neq 0$, $k_3 \neq 0$, то з (3.141) випливає, що $k_4 = k_5 = 0$. В цьому випадку система (3.143) має вигляд

$$\begin{aligned} k_1 u^1 g_{u^1}^1 + (u^1 + k_1 u^2) g_{u^2}^1 &= (k_1 + k_3) g^1, \\ k_1 u^1 g_{u^1}^2 + (u^1 + k_1 u^2) g_{u^2}^2 &= (k_1 + k_3) g^2 + g^1. \end{aligned} \quad (3.147)$$

Розв'язавши систему (3.147), одержуємо зображення функцій g^a , задане формулами (3.138), де $m = \frac{k_3}{k_1}$.

Теорему 3.8 доведено.

Зауваження 3.14. У формулах (3.138), (3.139) обмеження накладені з метою уникнути їх перетину.

Прокласифікуємо тепер симетрійні властивості системи (3.134), використавши результати теореми 3.8.

Теорема 3.9. Якщо система (3.134) допускає розширення основної алгебри інваріантності A_0 системи, то з точністю до перетворень еквівалентності її максимальні алгебри інваріантності в залежності від вигляду функцій g^1 , g^2 наведені у таблицях 1, 3 та в таблиці 4.

Таблиця 4. Класифікація симетрійних властивостей системи (3.134)

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1	$g^1 = u^1(\varphi^1(u^1) + r_1),$ $g^2 = u^1\varphi^2(u^1) + u^2\varphi^1(u^1);$	$\partial_0, \partial_1, Q = e^{-r_1 x_0} u^1 \partial_{u^2}$
2	$g^1 = u^1 e^{\frac{u^2}{u^1}} \varphi^1(u^1),$ $g^2 = e^{\frac{u^2}{u^1}} (u^1 \varphi^2(u^1) + u^2 \varphi^1(u^1));$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - 2u^1 \partial_{u^2}$
3	$g^1 = (u^1)^{m+1} \varphi^1(\omega),$ $g^2 = (u^1)^m (u^1 \varphi^2(\omega) + u^2 \varphi^1(\omega)),$ $\omega = \frac{u^2}{u^1} + r_5 \ln u^1$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) -$ $-2I + 2r_5 u^1 \partial_{u^2}$
4	$g^1 = u^1(\varphi^1(\omega) + k) + u^2,$ $g^2 = u^1 \varphi^2(\omega) + u^2 \varphi^1(\omega) + \frac{(u^2)^2}{u^1},$ $\omega = \frac{u^2}{u^1} + k \ln u^1,$ $k \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q = e^{-k x_0} (I - k u^1 \partial_{u^2})$

5	$g^1 = (u^1)^{m+1},$ $g^2 = u^1((u^1)^n + \lambda_8) + u^2(u^1)^m,$ $m \neq 0, n \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q = u^1 \partial_{u^2},$ $D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2I +$ $+ 2n\lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2} + 2(m-n)u^2 \partial_{u^2}$
6	$g^1 = r_1(u^1)^{m+1},$ $g^2 = (u^1)^m(r_2 u^2 + u^1),$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2I,$ $Q = u^1 \partial_{u^2} + (r_2 - r_1)u^2 \partial_{u^2}$
7	$g^1 = u^1((u^1)^m + \lambda_6),$ $g^2 = u^2((u^1)^m + \lambda_7) + \lambda_8 u^1,$ $m \neq 0, \lambda_6 \neq 0, \lambda_7 \neq \lambda_6$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{(\lambda_7 - \lambda_6)x_0} u^1 \partial_{u^2},$ $Q_2 = \lambda_8 u^1 \partial_{u^2} + (\lambda_7 - \lambda_6)u^2 \partial_{u^2}$
8	$g^1 = u^1((u^1)^m + \lambda_7),$ $g^2 = u^2((u^1)^m + \lambda_7) + \lambda_8 u^1,$ $m \neq 0, \lambda_7 \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = \lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^2},$ $Q_2 = u^1 \partial_{u^2}$
9	$g^1 = (u^1)^k,$ $g^2 = (u^1)^{k-1}(u^2 + \lambda_8(u^1)^k),$ $k \neq 1,$	$\partial_0, \partial_1, Q = u^1 \partial_{u^2},$ $D = (k-1)(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) -$ $- 2(u^1 \partial_{u^1} + k u^2 \partial_{u^2})$
10	$g^1 = r_1 u^1,$ $g^2 = (u^1)^{n+1} + \lambda_7 u^2,$ $n \neq 0, \lambda_7 \neq r_1$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{(\lambda_7 - r_1)x_0} u^1 \partial_{u^2},$ $Q_2 = I + n u^2 \partial_{u^2}$
11	$g^1 = u^1,$ $g^2 = u^1((u^1)^n + \lambda_8) + u^2,$ $n \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = u^1 \partial_{u^2},$ $Q_2 = I + n u^2 \partial_{u^2} - n \lambda_8 x_0 Q_1$
12	$g^1 = 0,$ $g^2 = (u^1)^n + \lambda_6 u^1 + \lambda_7,$ $n \neq 1, \lambda_7 \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2u^2 \partial_{u^2},$ $Q = u^1 \partial_{u^2}$
13	$g^1 = r_1 u^2 + \lambda_5 u^1,$ $g^2 = u^1(r_3(\frac{u^2}{u^1})^2 + \frac{(\lambda_6 - \lambda_5)^2}{4(r_3 - r_1)} +$ $+ \lambda_6 u^2,$ $\lambda_6 \neq \lambda_5,$	$\partial_0, \partial_1, Q = I,$ $D = (r_3 - r_1)[(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) -$ $- 2u^2 \partial_{u^2}] - (\lambda_6 - \lambda_5)u^1 \partial_{u^2} +$ $+ x_0(2\lambda_5(r_3 - r_1) - r_1(\lambda_6 - \lambda_5))Q$
14	$g^1 = u^2,$ $g^2 = u^1((\frac{u^2}{u^1})^2 + \lambda_8) \pm u^2,$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = I,$ $Q_2 = e^{\pm x_0}(Q_1 \pm u^1 \partial_{u^2})$
15	$g^1 = e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^{p+1},$ $g^2 = e^{\frac{u^2}{u^1}}(u^1)^p(u^2 + \lambda_4 u^1),$ $p \neq 0$	$\partial_0, \partial_1,$ $D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - 2u^1 \partial_{u^2},$ $Q = I - p u^1 \partial_{u^2}$
16	$g^1 = [r_1 e^{n \frac{u^2}{u^1}}(u^1)^p + \lambda_5]u^1,$ $g^2 = e^{n \frac{u^2}{u^1}}(u^1)^p(r_1 u^2 + \lambda_4 u^1) +$ $+ \lambda_5 u^2 - \frac{p}{n} \lambda_5 u^1,$ $n \neq 0, r_1 + \lambda_4 \neq 0$	$\partial_0, \partial_1,$ $Q = I - \frac{p}{n} u^1 \partial_{u^2},$ $D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\lambda_5 x_0 Q - \frac{2}{n} u^1 \partial_{u^2}$
17	$g^1 = (u^1)^{m+1},$ $g^2 = u^1(\ln u^1 + \lambda_8) + u^2(u^1)^m,$ $m \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, Q = u^1 \partial_{u^2},$ $D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2I - 2x_0 u^1 \partial_{u^2}$

18	$g^1 = u^1(r_1 \ln u^1 + \lambda_3) + \lambda_4 u^2,$ $g^2 = (r_2 u^1 + r_1 u^2) \ln u^1 +$ $\quad + \lambda_8 u^1 + \lambda_7 u^2 + \lambda_4 \frac{(u^2)^2}{u^1},$ $\Delta > 0$	$\partial_0, \partial_1,$ $Q_1 = e^{m_1 x_0} [\lambda_4 I + (m_1 - r_1) u^1 \partial_{u^2}],$ $Q_2 = e^{m_2 x_0} [\lambda_4 I + (m_2 - r_1) u^1 \partial_{u^2}]$
19	$g^1 = u^1(r_1 \ln u^1 + \lambda_3) + \lambda_4 u^2,$ $g^2 = (r_2 u^1 + r_1 u^2) \ln u^1 +$ $\quad + \lambda_8 u^1 + \lambda_7 u^2 + \lambda_4 \frac{(u^2)^2}{u^1},$ $\Delta = 0$	$\partial_0, \partial_1,$ $Q_1 = e^{\alpha x_0} [\lambda_4 I + (\alpha - r_1) u^1 \partial_{u^2}],$ $Q_2 = e^{\alpha x_0} u^1 \partial_{u^2} + x_0 Q_1$
20	$g^1 = u^1(r_1 \ln u^1 + \lambda_3) + \lambda_4 u^2,$ $g^2 = (r_2 u^1 + r_1 u^2) \ln u^1 +$ $\quad + \lambda_8 u^1 + \lambda_7 u^2 + \lambda_4 \frac{(u^2)^2}{u^1},$ $\Delta < 0$	$\partial_0, \partial_1,$ $Q_1 = e^{\alpha x_0} [\lambda_4 \cos \beta x_0 I +$ $\quad + ((\alpha - r_1) \cos \beta x_0 - \beta \sin \beta x_0) u^1 \partial_{u^2}],$ $Q_2 = e^{\alpha x_0} [\lambda_4 \sin \beta x_0 I +$ $\quad + ((\alpha - r_1) \sin \beta x_0 + \beta \cos \beta x_0) u^1 \partial_{u^2}]$
21	$g^1 = u^1(r_1 \ln u^1 + \lambda_3),$ $g^2 = u^1 \ln u^1 + u^2(r_1 \ln u^1 + \lambda_7),$ $\lambda_3 \neq \lambda_7 - r_1$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{(\lambda_7 - \lambda_3) x_0} u^1 \partial_{u^2},$ $Q_2 = e^{r_1 x_0} [(\lambda_3 + r_1 - \lambda_7) I + u^1 \partial_{u^2}]$
22	$g^1 = u^1(r_1 \ln u^1 + \lambda_7 - r_1),$ $g^2 = u^1 \ln u^1 + u^2(r_1 \ln u^1 + \lambda_7);$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{r_1 x_0} u^1 \partial_{u^2},$ $Q_2 = e^{r_1 x_0} I + x_0 Q_1$
23	$g^1 = 0,$ $g^2 = \ln u^1;$	$\partial_0, \partial_1, Q = u^1 \partial_{u^2},$ $D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2u^2 \partial_{u^2}$
24	$g^1 = (u^1)^{m+1},$ $g^2 = u^2 (u^1)^m + \lambda_8 u^1,$ $m \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) +$ $\quad + 2\lambda_8 x_0 Q_1 - 2I,$ $Q_1 = u^1 \partial_{u^2}, Q_2 = \lambda_8 x_0 Q_1 - u^2 \partial_{u^2}$
25	$g^1 = r_1 u^1,$ $g^2 = u^1((u^1)^n + \lambda_8) +$ $\quad + (n+1)r_1 u^2,$ $n \neq 0$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2r_1 x_0 Q_2 - \frac{2}{n} I,$ $Q_1 = e^{nr_1 x_0} u^1 \partial_{u^2},$ $Q_2 = r_1(I + nu^2 \partial_{u^2}) + \lambda_8 u^1 \partial_{u^2}$
26	$g^1 = 0,$ $g^2 = u^1((u^1)^n + \lambda_8),$ $n \neq 0,$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - \frac{2}{n} I +$ $\quad + 2\lambda_8 x_0 Q_1, Q_1 = u^1 \partial_{u^2},$ $Q_2 = I + nu^2 \partial_{u^2} - n\lambda_8 x_0 Q_1$
27	$g^1 = u^2,$ $g^2 = u^1((\frac{u^2}{u^1})^2 + \lambda_8);$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = I, Q_2 = x_0 Q_1 + u^1 \partial_{u^2},$ $D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\lambda_8 x_0^2 Q_1 +$ $\quad + 4\lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2} - 2u^2 \partial_{u^2}$
28	$g^1 = 0,$ $g^2 = r_5 u^1 + r_1;$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2u^2 \partial_{u^2},$ $Q_1 = u^1 \partial_{u^2}, Q_2 = u^1 \partial_{u^1} + r_5 x_0 Q_1$
29	$g^1 = u^1 \ln u^1,$ $g^2 = u^2 \ln u^1 + \lambda_8 u^1;$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{x_0} I, Q_2 = u^1 \partial_{u^2},$ $Q_3 = u^2 \partial_{u^2} - \lambda_8 x_0 Q_2$
30	$g^1 = r_1 u^1,$ $g^2 = u^1 \ln u^1 + r_1 u^2;$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = u^1 \partial_{u^2}, Q_2 = I + x_0 u^1 \partial_{u^2},$ $D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2r_1 x_0 Q_2 -$ $\quad - r_1 x_0^2 u^1 \partial_{u^2} + 2u^2 \partial_{u^2}$

31	$g^1 = 0,$ $g^2 = u^1 \ln u^1;$	$\partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2u^2 \partial_{u^2},$ $Q_1 = I + x_0 Q_2, Q_2 = u^1 \partial_{u^2}$
32	$g^1 = 0,$ $g^2 = u^2;$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{x_0} u^1 \partial_{u^2}, Q_2 = u^1 \partial_{u^1},$ $D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2x_0 u^2 \partial_{u^2}, Q_3 = I$
33	$g^1 = 0,$ $g^2 = r_1 u^1.$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = u^1 \partial_{u^2}, Q_2 = I,$ $D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2r_1 x_0 Q_1,$ $Q_3 = u^1 \partial_{u^1} + r_1 x_0 u^1 \partial_{u^2}$
34	$g^1 = r_4 (u^1)^{m+1},$ $g^2 = u^2 (r_4 (u^1)^m + \lambda_7) + r_5 u^1;$ $m \neq 0, \lambda_7 \neq 0,$	$\partial_0, \partial_1, D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) +$ $+ 2x_0 Q_1 - 2(u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}),$ $Q_1 = r_5 u^1 \partial_{u^2} + \lambda_7 u^2 \partial_{u^2}, Q_2 = e^{\lambda_7 x_0} u^1 \partial_{u^2}$
35	$g^1 = u^1 (r_4 \ln u^1 + \lambda_3),$ $g^2 = r_5 u^1 + u^2 (r_4 \ln u^1 + \lambda_7);$ $\lambda_3 \neq \lambda_7$	$\partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{r_4 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}),$ $Q_2 = r_5 u^1 \partial_{u^2} + (\lambda_7 - \lambda_3) u^2 \partial_{u^2},$ $Q_3 = e^{(\lambda_7 - \lambda_3) x_0} u^1 \partial_{u^2}$

В таблиці 4 $m, n, \lambda_i, i = \overline{3; 9}$ — довільні сталі,

$$r_3 = \begin{cases} \pm 1, & r_1 = 0; \\ \tilde{r} \in R \setminus \{\pm 1\}, & r_1 = \pm 1, \end{cases}, r_5 \in \{0, 1\}, \omega = \frac{u^2}{u^1} + k \ln u^1, \varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega) —$$

довільні гладкі функції; $\Delta = (\lambda_3 + r_1 - \lambda_7)^2 + 4\lambda_4 r_2$ — дискримінант,

$$\text{а } m_1, m_2 — \text{корені характеристичного рівняння } \begin{vmatrix} r_1 - m & \lambda_4 \\ r_2 & \lambda_7 - \lambda_3 - m \end{vmatrix} = 0,$$

$$\alpha = \frac{\lambda_7 + r_1 - \lambda_3}{2}, \beta = \frac{1}{2} \sqrt{|\Delta|}, I = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}.$$

Зауваження 3.15. Доведення теореми 3.9 наведене в Додатку Б.

3.6. Інваріантність відносно алгебри Галілея

В даному підрозділі детально дослідимо симетрійні властивості системи

$$(3.1) \text{ у випадку } f(u^1) = \frac{2\lambda_1}{u^1}.$$

Отже, розглянемо систему (3.1) вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} g^1(u^1, u^2) \\ g^2(u^1, u^2) \end{pmatrix}. \quad (3.148)$$

Зауваження 3.16. З леми 2.1 випливає, що основна група перетворень еквівалентності системи (3.148) має вигляд

$$\begin{aligned} x_0 &= te^{2\theta_2} + \theta_0, & x_1 &= xe^{\theta_2} + \theta_1, \\ u^1 &= w^1 e^{\theta_3}, & u^2 &= w^2 e^{\theta_4}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Крім основної групи перетворень еквівалентності (3.149) система (3.148) при конкретних g допускає додаткові перетворення еквівалентності вигляду (3.128). Тому теореми про максимальну алгебру інваріантності системи (3.148) формулюватимемо з точністю до вказаних перетворень еквівалентності.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 3.10. Якщо система (3.148) допускає розширення основної алгебри інваріантності A_0 , то функції g^1, g^2 задаються формулами (3.29), (3.30), (3.129), або формулою:

$$g^1 = u^1[(u^1)^m \varphi^1(\omega) + \lambda_3], \quad g^2 = u^2[(u^1)^m \varphi^2(\omega) + \lambda_4], \quad (3.150)$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$, $m, \lambda_3, \lambda_4, k$ — довільні сталі, $\varphi^a(\omega)$ — довільні гладкі функції.

Доведення. Як було показано в результаті доведення теореми 3.1, у випадку $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ розв'язком систем $S_1(\xi, \eta) = 0$ та $S_2(\xi, \eta, f) = 0$ є координати інфінітезимального оператора X , задані формулами (3.15).

Враховуючи значення ξ^0, ξ^1, η^a з формул (3.15), систему (3.5) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha^1 u^1 g_{u^1}^1 + \alpha^{22} u^2 g_{u^2}^1 &= (\alpha^1 - 2\dot{A})g^1 + (\alpha_0^1 - \lambda_1 \alpha_{11}^1)u^1, \\ \alpha^1 u^1 g_{u^1}^2 + \alpha^{22} u^2 g_{u^2}^2 &= (\alpha^{22} - 2\dot{A})g^2 + (\alpha_0^{22} - 2\lambda_1 \alpha_{11}^1)u^2. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Так як функції α^1, α^{22}, A залежать лише від змінних x_0, x_1 , а функції g^a — від змінних u^1, u^2 , то найбільш широкий клас функцій g^1, g^2 , що задовольняють системі (3.151), і при цьому можливе розширення основної алгебри інваріантності A_0 , є розв'язком структурної системи

$$\begin{aligned} \varkappa u^1 g_{u^1}^1 + k u^2 g_{u^2}^1 &= (m + \varkappa)g^1 + k_1 u^1, \\ \varkappa u^1 g_{u^1}^2 + k u^2 g_{u^2}^2 &= (m + k)g^2 + k_2 u^2, \end{aligned} \quad (3.152)$$

причому $\alpha^1 = \varkappa \psi(x_0, x_1)$, $\alpha^{22} = k \psi(x_0, x_1)$, $-2\dot{A} = m \psi(x_0, x_1)$, $\alpha_0^1 - \lambda_1 \alpha_{11}^1 = k_1 \psi(x_0, x_1)$, $\alpha_0^{22} - 2\lambda_1 \alpha_{11}^1 = k_2 \psi(x_0, x_1)$, де $\varkappa = \{0, 1\}$; k, m, k_1, k_2 — довільні сталі, $\psi(x_0, x_1)$ — деяка гладка функція.

1. Якщо $\varkappa = 0$, то система (3.152) набуває вигляду (3.31), розв'язками якої, як було показано в теоремі 3.2, є формули (3.29), (3.30).

2. Якщо $\varkappa = 1$, то загальний розв'язок системи (3.152) виражається через перші інтеграли системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{du^1}{u^1} = \frac{du^2}{ku^2} = \frac{dg^1}{(m+1)g^1 + k_1u^1} = \frac{dg^2}{(k+m)g^2 + k_2u^2}. \quad (3.153)$$

Одним з перших інтегралів системи (3.153) є $J_1 = \omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$, а два інших J_2, J_3 залежать від значення сталої m .

Можливі наступні нееквівалентні випадки:

2.1) $m = 0$. В цьому випадку $J_2 = \frac{g^1}{u^1} - k_1 \ln u^1$, $J_3 = \frac{g^2}{u^2} - k_2 \ln u^1$.

Стандартним способом (див., наприклад, [88]) побудувавши загальний розв'язок системи (3.152), одержимо формули (3.129), де $\lambda_3 = -k_1$,

$\lambda_4 = -k_2$ - довільні сталі, $\varphi^a(\omega)$ - довільні гладкі функції, $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$.

2.2) $m \neq 0$. В цьому випадку, аналогічно, як і в попередньому, знайшовши перші інтеграли системи (3.153): $J_2 = (u^1)^{-m}(\frac{g^1}{u^1} + \frac{k_1}{m})$, $J_3 = (u^1)^{-m}(\frac{g^2}{u^2} + \frac{k_2}{m})$, одержуємо загальний розв'язок системи (3.152), який має вигляд (3.150), де $\lambda_3 = -\frac{k_1}{m}$, $\lambda_4 = -\frac{k_2}{m}$ - довільні сталі, $\varphi^a(\omega)$ - довільні гладкі функції, $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$.

Отже, розв'язавши систему $S_3(\xi, \eta, f, g) = 0$ стосовно g^1, g^2 при $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$, ми одержали нееквівалентні зображення (3.29), (3.30), (3.129), (3.150) функцій g^1, g^2 , що й доводить теорему.

Теорему 3.10 доведено.

Умови теореми 3.10, як і теореми 3.1, є лише необхідними умовами розширення основної алгебри інваріантності системи (3.1). Щоб отримати достатні умови, необхідно кожне зображення функцій g^a вигляду (3.29), (3.30), (3.129), (3.150) підставити в систему $S_3 = 0$ і розв'язати одержану систему відносно функцій $A(x_0), B(x_0), C(x_0), \alpha(x_0)$ в залежності від вигляду функцій $\varphi^a(\omega)$ та значень сталих $m, k, \lambda_3, \lambda_4$. Результатом таких досліджень є наступне твердження.

Теорема 3.11. *Максимальні алгебри інваріантності системи (3.148) залежно від значень функцій g^1, g^2 наведені у таблицях 1, 3, 5.*

Таблиця 5. Класифікація симетрійних властивостей системи (3.148)

№ з/п	Зображення функцій g^1, g^2	Оператори максимальної алгебри інваріантності
1	$g^1 = u^1 \varphi^1(u^2),$ $g^2 = u^2 \varphi^2(u^2);$	$\partial_0, \partial_1, G = x_0 - \frac{x_1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}, I_1 = u^1 \partial_{u^1}$
2	$g^1 = r u^1 \ln u^2,$ $g^2 = r_4 u^2 \ln u^2;$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, Q_1 = e^{r_4 x_0} (r I_1 + r_4 I_2)$
3	$g^1 = r_4 u^1 \ln u^2,$ $g^2 = r u^2;$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, r_4 x_0 I_1 + I_2$
4	$g^1 = r_1 u^1 (u^2)^n,$ $g^2 = r_2 (u^2)^{n+1};$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1,$ $D_1 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - \frac{2}{n} I_2$
5	$g^1 = r_1 u^1 (u^2)^2,$ $g^2 = r_2 (u^2)^3;$	$D_2 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - I_2,$ $\Pi_1 = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 -$ $-\frac{1}{2\lambda_1} (\frac{x_1^2}{2} - \lambda_1 x_0) I_1 - x_0 I_2$
6	$g^1 = 0,$ $g^2 = 0;$	$\partial_0, \partial_1, G, I_1, I_2,$ $D_3 = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - \frac{1}{2} I_1 - I_2,$ $\Pi_2 = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 - (\frac{x_1^2}{4\lambda_1} + x_0) I_1 - x_0 I_2$
7	$g^1 = u^1 (\varphi^1(u^2) + r_4 \ln u^1),$ $g^2 = u^2 \varphi^2(u^2);$	$\partial_0, \partial_1, \mathcal{G} = e^{r_4 x_0} (\partial_1 - \frac{r_4}{2\lambda_1} x_1 I_1),$ $M = e^{r_4 x_0} I_1$
8	$g^1 = u^1 (r_4 \ln u^1 + r \ln u^2),$ $g^2 = r_5 u^2 \ln u^2,$	$\partial_0, \partial_1, \mathcal{G}, M,$ $Q_2 = e^{r_5 x_0} (r I_1 + (r_5 - r_4) I_2)$
9	$g^1 = u^1 (r_4 \ln u^1 + r \ln u^2),$ $g^2 = r_4 u^2 \ln u^2.$	$\partial_0, \partial_1, \mathcal{G}, M,$ $Q_3 = e^{r_4 x_0} (r x_0 I_1 + I_2)$

В таблиці 5 $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$ - довільні гладкі функції, $I_2 = u^2 \partial_{u^2}$.

Зауваження 3.17. Доведення теореми 3.11 наведене у додатку В дисертації.

3.7. Висновки до розділу 3

У даному розділі вперше проведено повну групову класифікацію системи нелінійних рівнянь хемотаксису.

З основних результатів, отриманих в даному розділі випливають наступні висновки:

1. Встановлено основну алгебру інваріантності системи нелінійних рівнянь хемотаксису.
2. Досліджено групу неперервних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь хемотаксису.
3. Встановлено 5 нееквівалентних виглядів функції $f(u^1)$, при яких можливе розширення основної алгебри інваріантності системи нелінійних рівнянь хемотаксису.
4. Для кожного з нееквівалентних виглядів функції $f(u^1)$, одержано зображення функцій g^a , при яких можливе розширення основної алгебри інваріантності системи нелінійних рівнянь хемотаксису.
5. Використовуючи зображення функцій g^a та враховуючи їх можливі перетини для кожного з 5 нееквівалентних виглядів функції $f(u^1)$ досліджено максимальну алгебру інваріантності системи нелінійних рівнянь хемотаксису.

Основні результати розділу 3 опубліковані в роботах: [67], [85], [187].

ВИСНОВКИ

Основні результати дисертації можна підсумувати таким чином.

1. Показано, що нелокальні перетворення зводять систему нелінійних рівнянь дифузії до системи того ж вигляду, одержані формули зв'язку між даною системою та системою-образом. Встановлено вигляд систем нелінійних рівнянь дифузії, які лінеаризуються дією нелокальних перетворень.
2. Встановлено вигляд систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея $AG(1, 1)$, розширеної алгебри Галілея $AG_1(1, 1)$ та узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1, 1)$. Даний результат узагальнено для системи нелінійних рівнянь дифузії з реакцією.
3. Проведено редукцію Галілеєвськи інваріантних систем нелінійних рівнянь дифузії та побудовано їх точні розв'язки.
4. Для систем-образів системи рівнянь дифузії (2.11) знайдені нелокальні анзаци, які редукують цю систему до системи звичайних диференціальних рівнянь.
5. Побудовано нелокальні формули розмноження розв'язків систем нелінійних рівнянь дифузії, неінваріантних відносно алгебр Галілея $AG(1, 1)$, $AG_1(1, 1)$ та $AG_2(1, 1)$.
6. Встановлено групу неперервних перетворень еквівалентності системи нелінійних рівнянь хемотаксису.
7. В залежності від вигляду нелінійностей $f(u^1)$, $g^a(u^1, u^2)$ проведено повну групову класифікацію симетрійних властивостей системи нелінійних рівнянь хемотаксису.

Список використаних джерел

- [1] Абраменко А.А. Групповая классификация нелинейных эволюционных уравнений. II. Инвариантность относительно разрешимых групп локальных преобразований / А.А. Абраменко, В.И. Лагно, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 482–489.
- [2] Аль Фарах Х., Портенко М. Гранична теорема для кількості перетинів фіксованого рівня слабо збіжною послідовністю дифузійних процесів / Х. Аль Фарах, М. Портенко // Ін-т математики НАН України. — К. — 2007. — 24 с. — (Препр. 2007.6).
- [3] Андреева Н.В. (тепер Ічанська Н.В.) Симетрійні властивості нелінійної системи рівнянь параболічного типу / Н.В. Андреева // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. — 1998. — Т. 19. — С. 10–13.
- [4] Ахатов Н.Ш. Групповая классификация уравнений нелинейной фильтрации / Н.Ш. Ахатов, Р.К. Газизов, Н.Х. Ибрагимов // Докл. АН СССР — 1987. — Т. 293. — С. 1033–1035.
- [5] Ахатов Н.Ш. Нелокальные симметрии. Эвристический подход / Н.Ш. Ахатов, Р.К. Газизов, Н.Х. Ибрагимов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1989. — Т. 34. — С. 3–83.
- [6] Белоколот Е.Д. О решениях в эллиптических функциях нелинейных уравнений в частных производных, интегрируемых методом обратной задачи теории рассеяния / Е.Д. Белоколот, В.З. Эпольский // Успехи математических наук. — 1982. — Т. 37, № 4. — С. 89–120.

- [7] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. — К.: Наукова думка. — 1965. — 798 с.
- [8] Березанский Ю.М. Самосопряженные операторы в пространстве бесконечного числа переменных / Ю.М. Березанский. — К.: Наукова думка. — 1978. — 360 с.
- [9] Березанский Ю.М. Гармонический анализ в гиперкомплексных системах / Ю.М. Березанский, А.А. Калужный. — К.: Наукова думка. — 1992. — 352 с.
- [10] Березанский Ю.М. Спектральные методы в бесконечномерном анализе / Ю.М. Березанский, Ю.Г. Кондратьев. — К.: Наукова думка. — 1988. — 680 с.
- [11] Биркгоф Г. Гидродинамика. / Г. Биркгоф. — М.: Иностранная литература. — 1963. — 400 с.
- [12] Боголюбов Н.Н. Приложение ренормализационной группы к улучшению формул теории возмущений / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков // ДАН СССР. — 1955. — Т. 103, № 3. — С. 203.
- [13] Боголюбов Н.Н. Группа перенормировок заряда в квантовой теории поля / Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков // ДАН СССР. — 1955. — Т. 103. — С. 391.
- [14] Бойко В.М. Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку / В.М. Бойко, Р.О. Попович // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — Т. 36. — С. 45–50.
- [15] Болграбская И.А. Замкнутые системы связанных твердых тел / И.А. Болграбская, А.Я. Савченко, Н.Н. Щепин // Механика твердого тела: Межвед. сб. науч. тр. — 2006. — Вып. 36. — С. 94–103.

- [16] Вільгельмссон Г. Коливання та встановлення рівноваги за умов взаємозв'язку температури та густини у термоядерних плазмах / Г. Вільгельмссон // УМЖ. — 1993. — Т. 38, № 1. — С. 44–53.
- [17] Власенко Л.А. О разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений с импульсным воздействием / Л.А. Власенко, Н.А. Перестюк // Укр. мат. журн. — 2005. — 57, N 4. — С. 458–468.
- [18] Галактионов В.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры / В.А. Галактионов, В.А. Дородницын, Г.Г. Еленин, С.П. Курдюмов, А.А. Самарский // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1986. — Т. 28. — С. 95–206.
- [19] Глеба А.В. Симетрійні властивості і точні розв'язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь: дис... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03 / Глеба Аліна Володимирівна. — К., 2003. — 120 с.
- [20] Голод П.І. Математичні основи теорії симетрій / П.І. Голод, А.У. Клімич. — К.: Наукова думка, 1992. — 380 с.
- [21] Гор Г.В. Нелинейный анализ поведения механических систем / Г.В. Гор, А.А. Илюхин, А.М. Ковалев, А.Я. Савченко — К.: Наук. думка, 1984. — 285 с.
- [22] Дородницын В.А. Об инвариантных решениях уравнений нелинейной теплопроводности с источником / В.А. Дородницын // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1982. — Т. 22, № 6. — С. 1393–1400.
- [23] Дородницын В.А. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях / В.А. Дородницын, И.В. Князева, С.Р. Свирщевский // Дифференц. уравнения. — 1983. — Т. 19. — С. 1215–1223.

- [24] Есипов С.Э. Нелокальная фононная теплопроводность в условиях сильного возбуждения / С.Э. Есипов, И.Б. Левинсон // Письма в ЖЭТФ. — 1981. — Т. 34, № 4. — С. 218–221.
- [25] Жданов Р.З. Групова класифікація рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом / Р.З. Жданов, В.І. Лагно // Доп. НАН України. — 2000. — № 3. — С. 12–16.
- [26] Ибрагимов Н.Х. Групповые свойства некоторых дифференциальных уравнений / Н.Х. Ибрагимов. — Новосибирск: Наука, 1967. — 59 с.
- [27] Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики / Н.Х. Ибрагимов. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1972. — 200 с.
- [28] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике / Н.Х. Ибрагимов. — М.: Наука, 1983. — 280 с.
- [29] Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. — Москва: Знание (Новое в жизни, науке, технике. Сер. "Математика, Кибернетика"), 1991. — № 7 — 48 с. .
- [30] Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике / Н.Х. Ибрагимов // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, вып. 4 (286). — С. 83–144.
- [31] Иваницкий Г.Р. От беспорядка к упорядоченности - на примере движения микроорганизмов / Г.Р. Иваницкий, А.Б. Медвинский, М.А. Цыганов // Успехи физических наук. — 1991. — Т. 161, № 4. — С. 13–71.
- [32] Катков В.Л. Групповая классификация и решения уравнения Хопфа / В.Л. Катков // Журнал прикладной механики и теоретической физики. — 1965. — Т. 6. — С.105-106.

- [33] Костенко В.Г. Інтегрування деяких диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом / В.Г. Костенко. — Львів: Львівський держ. університет, 1959. — 22 с.
- [34] Курант Р. Методы математической физики / Р. Курант, Д. Гильберт. — М.: Гостехиздат, 1951. — Т. 1. — 476 с., Т. 2. — 544 с.
- [35] Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
- [36] Лагно В.И. Групповая классификация нелинейных уравнений эволюционных уравнений. I. Инвариантность относительно полупростых групп локальных преобразований / В.И. Лагно, А.М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 3. — С. 365–372.
- [37] Лагно В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу / В.І. Лагно, С.В. Спічак, В.І. Стогній // Праці Інституту математики НАН України : Мат-ка та її застосування. — К., 2002. — Т. 45. — 359 с.
- [38] Лазарь Р.Д. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями / Р.Д. Лазарь, В.Л. Макаров, А.А. Самарский. — М.: В. школа, 1987. — 296 с.
- [39] Луковский И.А. Нелинейные колебания жидкости в сосудах сложной геометрической формы / И.А. Луковский. — Киев.: Наукова думка, 1975. — 135 с.
- [40] Луковский И.А. Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности / И.А. Луковский. — Киев.: Наукова думка, 1977. — 240 с.
- [41] Луковський І.А. Введення в нелінійну динаміку твердого тіла з порожнинами, що містять рідину / І.А. Луковський. — Київ.: Наукова думка, 1990. — 296 с.

- [42] Луковський І.О. До розв'язування спектральних задач лінійної теорії коливань рідини в кінцевих баках / І.О. Луковський // Доп. НАН України. — 2002. — № 5. — С. 53–58.
- [43] Луковский И.А. Вариационные методы исследования задач динамики твердых тел с жидкостью / И.А. Луковский // Приклад. механика. — 2004. — Т. 40, № 10. — С. 37–77.
- [44] Луковский И.А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости / И.А. Луковский, М.Я. Барняк, А.Н. Комаренко. — Киев.: Наукова думка, 1984. — 232 с.
- [45] Луковский И.А. Сравнительный анализ двух вариационных моделей в нелинейной теории относительного движения жидкости / И.А. Луковский, Г.Ф. Золотенко, А.М. Пилькевич // Приклад. гидромеханика. — 2003. — 5, № 4. — С. 12–43.
- [46] Луковський І.О. Нелінійна модель руху маси рідини в циліндричних ємностях, розділених на відсіки / І.О. Луковський, О.В. Солодун // Доп. НАН України. — 2001. — № 5. — С. 51–55.
- [47] Луковский И.А. Собственные колебания жидкости в усеченных конических баках / И.А. Луковский, А.В. Солодун, А.Н. Тимоха // Акуст. вісн. — 2006. — 9, № 3. — С. 42–61.
- [48] Луковский И.А. Взаимодействие тонкостенных упругих элементов с жидкостью в подвижных полостях / И.А. Луковский, В.А. Троценко, В.И. Усюкин. — Киев.: Наукова думка, 1989. — 239 с.
- [49] Ляшко И.И. Методы вычислений: Численный анализ. Методы решения задач математической физики / И.И. Ляшко, В.Л. Макаров, А.А. Скоробогатько. — Киев.: Вища школа, 1977. — 408 с.
- [50] Мартынюк Д.Н. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами / Д.Н. Мартынюк, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко. — К.: Наук. думка. — 1984. — 213 с.

- [51] Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. — Київ: Наук. думка, 1977. — 331 с.
- [52] Миллер У. мл. Симметрия и разделение переменных / У. Миллер (мл.). — М.: Мир, 1981. — 342 с.
- [53] Митропольский Ю.А. Асимптотическое исследование слабонелинейных колебательных систем / Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко. — К.: Наукова думка, 1976. — 54 с.
- [54] Митропольский Ю.А. Математические проблемы нелинейной механики / Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко. — К.: Вища шк., 1987. — 69 с.
- [55] Нариманов Г.С. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью / Г.С. Нариманов, Л.В. Докучаев, И.А. Луковский. — Киев.: Наукова думка, 1977. — 208 с.
- [56] Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния / Л.П. Нижник. — К.: Наук. думка, 1973. — 182 с.
- [57] Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений / Л.П. Нижник. — К.: Наук. думка, 1991. — 232 с.
- [58] Нижник Л.П. Интегрирование пространственно-двумерного уравнения Шредингера методом обратной задачи / Л.П. Нижник, М.Д. Починайко // Функц. анализ. — 1982. — Т. 16, вып. 1. — С. 80–82.
- [59] Нижник Л.П. Обратная задача рассеяния на всей оси для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Л.П. Нижник, Лой Ву Фам. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. — 16 с. (Препринт).
- [60] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности / Л.В. Овсянников // ДАН СССР. — 1959. — Т. 125, № 3. — С. 492–495.

- [61] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
- [62] Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики / Л.В. Овсянников. — М.: Наука, 1981. — 386 с.
- [63] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям П. Олвер. — М.: Мир, 1989. — 581 с.
- [64] Омелян О.М. Інваріантність нелінійної системи дифузії відносно алгебри Галілея / О.М. Омелян // Матеріали ІХ міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. — Київ. — 2002. — С. 149.
- [65] Омелян О.М. Редукція та розв'язки систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея / О.М. Омелян // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: "Математика. Механіка". — 2004. — № 11-12. — С. 95–100.
- [66] Омелян О.М. Нелокальні формули розмноження розв'язків системи нелінійних рівнянь дифузії / О.М. Омелян // Матеріали Х міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука. — Київ. — 2004. — С. 197.
- [67] Омелян О.М. Інваріантність системи рівнянь хемотаксису відносно алгебри Галілея / О.М. Омелян // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер.: "Математика. Механіка". — 2008. — № 19. — С. 29–35.
- [68] Омелян О.М. Нелокальні перетворення системи нелінійних рівнянь дифузії / О.М. Омелян // Матеріали ІІ міжнародної наукової конференції молодих вчених по диференціальних рівняннях імені Я.Б. Лопатинського. — Донецьк. — 2008. — С. 90.
- [69] Омелян О.М. Галілейівська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції дифузії / О.М. Омелян // Тр. Ин-та ИПММ НАН Украины. — Донецк. — 2009. — Т. 18. — С. 138–147.

- [70] Перестюк Н.А. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / Н.А. Перестюк, В.А. Плотников, А.М. Самойленко, Н.В. Скрипник // Тр. Ин-та математики НАН Украины. Сер.: Математика и её применение. — К, 2007. — Т. 67. — 427 с.
- [71] Перестюк Н.А. О существовании периодических решений некоторых классов систем дифференциальных уравнений со случайным импульсным воздействием / Н.А. Перестюк, А.М. Самойленко, А.Н. Станжицкий // Укр. мат. журн. — 2001. — 53, N 8. — С. 1061–1079.
- [72] Попович Р.О. Про симетрію та точні розв'язки одного рівняння переносу / Р.О. Попович // УМЖ. — 1995. — Т. 47, № 1. — С. 121–125.
- [73] Попович Р.О. Про Q -умовну симетрію лінійного n -вимірного рівняння теплопровідності / Р.О. Попович, І.П. Корнева // Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. НАН України. Інститут математики. — 1998. — Т. 19. — С. 200–211.
- [74] Портенко Н.И. Обобщенные диффузионные процессы / Н.И. Портенко. — К.: Наук. думка, 1982. — 208 с.
- [75] Портенко М.І. Про рівняння відновлення, які виникають в деяких задачах теорії узагальнених дифузійних процесів / М.І. Портенко // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, N 9. — С. 1302–1312.
- [76] Портенко М.І. Ймовірнісне зображення розв'язку однієї задачі математичної фізики / М.І. Портенко // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, N 9. — С. 1272–1282.
- [77] Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования периодических решений / Н.И. Ронто, А.М. Самойленко. — Киев.: Вища школа. Изд. при Киев. ун-те, 1976. — 180 с.

- [78] Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования краевых задач / Н.И. Ронто, А.М. Самойленко. — Киев.: Наук. думка, 1986. — 222 с.
- [79] Савченко А.Я. О скорости затухания малых колебаний физического маятника в окрестности положения его равновесия в режиме пассивной стабилизации / А.Я. Савченко, В.В. Кравченко // Межвед. сб. науч. тр. : Механика твердого тела: — 2004. — Вып. 34. — С. 106–111.
- [80] Савченко А.Я. Обобщенные уравнения Эйлера - Пуассона / А.Я. Савченко, А.А. Савченко // Пр. Ін-ту математики НАН України: Вопр. аналит. механіки і її применений: — 1999. — Т. 26 — С. 338–351.
- [81] Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы / А.М. Самойленко. — М.: Наука, 1987. — 301 с.
- [82] Самойленко А.М. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / А.М. Самойленко, Н.И. Ронто. — Киев.: Наук. думка, 1992. — 279 с.
- [83] Серов Н.И. Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности / Н.И. Серов // УМЖ. — 1990. — Т. 42, № 10. — С. 1370–1376.
- [84] Серов М.І. Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень / М.І. Серов, О.М. Омелян, Р.М. Черніга // Доп. НАН України. — 2004. — № 10. — С. 39–45.
- [85] Серов М.І. Класифікація симетрійних властивостей системи рівнянь хемотаксису / М.І. Серов, О.М. Омелян // Український математичний вісник. — 2008. — Т. 5, № 4. — С. 536–562.

- [86] Серов М.І. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь з конвективним членом / М.І. Серов, Р.М. Черніга // УМЖ. — 1997. — Т. 49, № 9. — С. 1262–1270.
- [87] Серов М.І. Галілеївська інваріантність системи нелінійних рівнянь реакції-кнвекції-дифузії / М.І. Серов, М.М. Серова, О.М. Омелян, Т.О. Карпалюк // Матеріали Українського математичного конгресу (до 100-річчя від дня народження М.М. Боголюбова). — Київ. — 2009. — URL: <http://www.imath.kiev.ua/congress2009/Abstracts/Serov.pdf>
- [88] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. — М.: ГИФМЛ, 1958. — 468 с.
- [89] Соколов В.В. О симметриях эволюционных уравнений / В.В. Соколов // Успехи мат. наук — 1988. — Т. 43, вып. 5. — С. 133–163.
- [90] Тычинин В.А. Преобразование Бэклунда дифференциальных уравнений, приводимых конечным преобразованием Ли-Бэклунда / В.А. Тычинин. — Деп. в ВИНТИ № 3172.80 (Рукопись представлена Днепропетровским ун-том 18 июля 1980 г.). — Днепропетровск. — 1980. — 19 с.
- [91] Тычинин В.А. Симметрия и точные решения уравнения $u_t = h(u)u_{xx}$ / В.А. Тычинин // Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР: Симметричный анализ и решения уравнений матфизики: — Киев. — 1988. — № 8. — С. 72–77.
- [92] Тичинін В.А. Нелокальна симетрія та розмноження розв'язків рівняння $u_0 u_{11} + 1 = 0$ / В.А. Тичинін // Зб. наук. праць Ін-ту математики АН України: Симетрійний аналіз рівнянь математичної фізики. — Київ. — 1993. — С. 26–33.

- [93] Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики / В.И. Фущич // Докл. АН СССР. — 1979. — Т. 246, № 4. — С. 846–850.
- [94] Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики / В.И. Фущич // Ин-т математики АН УССР : Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. — Киев. — 1981. — С. 6–28.
- [95] Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? / В.И. Фущич // Ин-т математики АН УССР: Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев. — 1987. — С. 4–16.
- [96] Фущич В.И. Условная симметрия уравнений нелинейной математической физики / В.И. Фущич // УМЖ. — 1991. — Т. 43, № 11. — С. 1456–1470.
- [97] Фущич В.И. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений / В.И. Фущич, Л.Ф. Баранник, А.Ф. Баранник. — Киев: Наук. думка. — 1991. — 304 с.
- [98] Фущич В.И. Симметрия уравнений квантовой механики / В.И. Фущич, А.Г. Никитин. — М.: Наука, 1990. — 400 с.
- [99] Фущич В.И. Условная инвариантность и редукция нелинейного уравнения теплопроводности / В.И. Фущич, Н.И. Серов // Докл. АН УССР. — 1990. — Сер. А, № 7. — С. 24–27.
- [100] Фущич В.И. О нелокальных анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности / В.И. Фущич, Н.И. Серов, Т.К. Амеров // Доклады АН Украины. — 1992. — № 1. — С. 26–30.
- [101] Фущич В.И. Условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности / В.И. Фущич, Н.И. Серов, Т.К. Амеров // Докл. АН УССР. — 1990. — № 11. — С. 15–18.

- [102] Фущич В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности / В.И. Фущич, Н.И. Серов, В.И. Чопик // Докл. АН УССР. — 1988. — Сер. А, № 9. — С. 17–20.
- [103] Фущич В.И. О линеаризации некоторых нелинейных уравнений с помощью нелокальных преобразований / В.И. Фущич, В.А. Тычинин. — Препринт, Ин-т математики АН УССР. — 1982. — № 82.33. — 54 с.
- [104] Фущич В.І. Точні розв'язки та принцип суперпозиції для нелінійних хвильових рівнянь / В.І. Фущич, В.А. Тичинін // Доповіді АН УРСР. — 1990. — № 5. — С. 32–36.
- [105] Фущич В.І. Системи лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень / В.І. Фущич, Р.М. Черніга // Доповіді АН України. — 1993. — № 8. — С. 44–51.
- [106] Фущич В.І., Чопик В.І. Умовна симетрія і нові зображення алгебри Галілея для нелінійних параболічних рівнянь / В.І. Фущич, В.І. Чопик // УМЖ. — 1993. — Т. 45, № 10. — С. 1433–1443.
- [107] Фущич В.И. Симметричный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / В.И. Фущич, В.М. Штеленъ, Н.И. Серов. — Киев.: Наукова думка. — 1989. — 339 с.
- [108] Черніга Р.М. О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа / Р.М. Черніга // Сб. науч. тр. Ин-та математики АН УССР: Симметричный анализ и решения уравнений матфизики. — Киев. — 1988. — № 8. — С. 49–53.
- [109] Черніга Р.М. Симетрія і точні розв'язки рівнянь тепломасопереносу у термоядерній плазмі / Р.М. Черніга // Доповіді АН України. — 1995. — № 4. — С. 17–21.
- [110] Adler J. Chemotaxis in bacteria / J. Adler // Sciense. — 1996. — V. 153, P. 708–716.

- [111] Anderson R.L. Lie-Backlund transformations in applications / R.L. Anderson, N.H. Ibragimov. — Philadelphia. — SIAM, 1979.
- [112] Baikov V.A. Lie symmetry classification analysis for nonlinear coupled diffusion. V.A. Baikov, A.V. Gladkov and R.J. Wiltshire // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — Vol. 31. — P. 7483–7499.
- [113] Basarab-Horwath P. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. P. Basarab-Horwath, V. Lahno and R. Zhdanov // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 69, № 1. — P. 43–94.
- [114] Bateman H. Partial Differential Equations of Mathematical Physics. / H. Bateman. — Cambridge: Univ. Press, 1992. — 386 p.
- [115] Bateman H. The transformations of electrodynamical equations / H. Bateman // Proc. London Math. Soc. — 1909. — Vol. 8. — P. 223–264.
- [116] Bluman G.W. The general similarity solution of the heat equation / G.W. Bluman, J.D. Cole // J. Math. Mech. — 1969. — Vol. 18, № 11. — P. 1025–1042.
- [117] Bluman G. Similarity methods for differenyial equations / G.W. Bluman, J.D. Cole. — Berlin: Springer, 1974. — 332 p.
- [118] Bluman G.W. On the remarkable nonlinear diffusion equation $\frac{\partial}{\partial x}[a(u+b)^{-2}\frac{\partial u}{\partial x}] = \frac{\partial u}{\partial t}$ / G.W. Bluman, S. Kumei // Journ. of Mathemat. Physics. — 1980. — V. 21. — P. 1019–1025.
- [119] Bluman G.W. Symmetries and differential equations / G.W. Bluman, S. Kumei. — New York: Springer. — Verlag. — 1989. — 142 p.
- [120] Bluman G.W. New classes of symmetries for partial differential equations / G.W. Bluman, G.J. Reid, S. Kumei // J. Math. Phys. — 1988. — V.29 — P. 806–811.
- [121] Boyer C.P. On some solutions of a nonlinear diffusion equation / C.P. Boyer // J. Math. Phys. — 1961. — V 40, №1. — P. 42–46.

- [122] Burgan J.R. Homology and the nonlinear heat diffusion equations / J.R. Burgan, A. Munier, M.R. Feix, E. Fijalkow // SIAM. — J. Appl. Math. — 1984. — V.44, № 1. — P. 11–18.
- [123] Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence —/ J.M. Burgers, von R. Mises, von Th. Kamran (eds.) // Adv. Appl. Mech. — V.1. — New York: Academic Press. — 1975. — P. 171–199.
- [124] Cherniha R.M. Galilean-invariant nonlinear PDEs and their exact solutions / R.M. Cherniha // J. Nonlin. Math. Phys. — 1995. — Vol. 2, № 3. — P. 374–383.
- [125] Cherniha R. Symmetries ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection terms / R. Cherniha, M. Serov // Euro. J. of Appl. Math. — 1998. — Vol. 9. — P. 527–542.
- [126] Cherniha R. Lie symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations / R. Cherniha, M. Serov, I. Rasokha // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — V. 342. — P. 1363–1379.
- [127] Cherniha R.M. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I / R.M. Cherniha and J.R. King // J. Phys. — 2000. — A 33. — P. 267–282.
- [128] Cherniha R.M. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: I. Addendum / R.M. Cherniha and J.R. King // J. Phys. — 2000. — A 33. — P. 7839–7841.
- [129] Cherniha R.M. Lie symmetries of non-linear multidimensional reaction-diffusion systems: II / R.M. Cherniha and J.R. King // J. Phys. — 2002. — A 36. — P. 405–425.
- [130] Cole J.D. On a quasilinear parabolic equations used in aerodynamics / J.D. Cole // Quart. Appl. Math. — 1951. — V.9. — P. 225–236.

- [131] Edwards M.P. Classical symmetry reductions of nonlinear diffusion-convection equations / M.P. Edwards // *Phys. Lett. A.* — 1994. — Vol. 190. — P. 149–154.
- [132] Fokas A.S. On the exactly solvable equations
 $S_t = [(\beta S + \gamma)^{-2} S_x]_x + \alpha(\beta S + \gamma)^{-2} S_x$ occurring in two-phase flow in porous media / A.S. Fokas, Y.C. Yortsos // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 1982. — V. 42, № 2. — P. 318–332.
- [133] Forsyth A.R. Theory of differential equations / A.R. Forsyth. — Cambridge: Cambridge University Press, 1906. — V. 6. — 304 p.
- [134] Fushchych W. Ansatz' 95 / W. Fushchych // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — V. 2, № 3–4. — P. 216–235.
- [135] Fushchish W.I. Q -conditional symmetry of the linear heat equation / W.I. Fushchish, N.I. Serov, W.M. Shtelen and R.E. Popovich // *Proc. Acad. of Sci. Ukraine.* — 1992. — № 12. — P. 27–32.
- [136] Fushchich W.I. On nonlocal symmetries of the nonlinear heat equation / W.I. Fushchich, N.I. Serov, V.A. Tychynin and T.K. Amerov // *Proc. Acad. of Sci. Ukraine.* — 1992. — № 11. — P. 27–33.
- [137] Fushchych W. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics / W. Fushchych, W. Shtelen and N. Serov. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 436 p.
- [138] Fushchish W.I. On the connection between solutions of Dirac and Maxwell equations, dual Poincare invariance and superalgebras of invariance and solutions of nonlinear Dirac equations / W.I. Fushchish, N.I. Serov, W.M. Shtelen and R.E. Popovich // *J. Phys. A.* — 1991. — V. 24, № 8. — P. 1683–1698.
- [139] Fushchych W. On reduction and exact solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry / W. Fushchych, I. Tsyfra // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1987. — Vol. 20. — P. 145–147.

- [140] Fushchich W.I. Hodograph transformations and generating of solutions for nonlinear differential equations / W.I. Fushchich, V.A. Tychynin // Proc. Acad. of Sci. Ukraine. — 1993. — № 10. — P. 52–58.
- [141] Fushchich W.I. Generating solutions for nonlinear equations by the Legendre transformation and / W.I. Fushchich, V.A. Tychynin // Proc. Acad. of Sci. Ukraine. — 1992. — № 7. — P. 20–25.
- [142] Gagnon L. Lie symmetries of a generalized nonlinear Schrödinger equation. 1. The symmetry group and its subgroups / L. Gagnon, P. Winternitz // J. Phys. A: Math. and Gen. — 1988. — Vol. 21, № 7. — P. 1493–1511.
- [143] Gazizov R.K. Contact transformations of equations of the type of nonlinear filtration / R.K. Gazizov // CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. — 1987. — Vol. 1. — P. 125–135.
- [144] Goard J. and Broadbridge P. Nonclassical symmetry analysis of nonlinear reaction–diffusion equations in two spatial dimensions / J. Goard, P. Broadbridge // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. — 1996. — Vol. 26, № 4. — P. 735–756.
- [145] Heredero R.H. Classification of invariant wave equations / R.H. Heredero, P.J. Olver // J. Math. Phys. — 1996. — Vol. 37, № 12. — P. 6414–6438.
- [146] Hopf E. The partial differential equations $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ / E. Hopf // Comm. Pure Appl. Math. — 1950. — V.3. — P. 201–230.
- [147] Ibragimov N.H. Lie group analysis of differential equations – symmetries, exact solutions and conservation laws / N.H. Ibragimov (Editor). — Boca Raton, Florida: CRC Press. — 1994. — Vol. 1.
- [148] Karczewska A. Statical solutions to turbulent diffusion / A. Karczewska // Pergamon: Nonlinear Analysis. — 1999. — V. 37. — P. 635–675.
- [149] Keller E.F. Model for chemotaxis / E.F. Keller, L.A. Segel // J.Theor.Biol. — 1971. — V. 30. — P. 225–234.

- [150] King J.R. Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation / J.R. King // *Journal of Mathematical Physics*. — 1990. — V. 23. — P. 5441–5464.
- [151] King J.R. Exact results for the nonlinear diffusion equations

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{-4/3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \text{ and } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u^{-2/3} \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$
 / J.R. King // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1991. — V. 24, № 24. — P. 5721–5745.
- [152] Knyazeva I.V. Group classification of diffusion equations / I.V. Knyazeva, M.D. Popov // *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations* (Ed. N. Ibragimov), CRC Press. — 1994. — Vol. 1. — P. 171–176.
- [153] Krivsky Yu.I. On the nonlocal symmetries of the Maxwell equations and the conservation laws / Yu.I. Krivsky, V.I. Simulik // *Ukr. J. Phys.* — 2007. — Vol. 52, № 2. — P. 119–127.
- [154] Levi D. Non-classical symmetry reduction: example of the Boussinesq equation / D. Levi, P. Winternitz // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1989. — Vol. 22, № 15. — P. 2915–2924.
- [155] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ / S. Lie // *Arch. Math.* — 1881. — Vol. 8, № 1. — P. 112–125.
- [156] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differentialgleichung / S. Lie // *Arch. Math.* — 1881. — Vol. 6, № 3. — P. 328–368.
- [157] Lie S. Über Differentialinvarianten / S. Lie // *Math. Ann.* — 1884. — Vol. 24, № 1. — P. 52–89.
- [158] Lie S. Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen / S. Lie. — Leipzig: Teubner — 1893. — 805 p.
- [159] Lie S. Klassifikation und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen x, y , die eine Gruppe von Transformationen gestatten / S. Lie // *I, II, Math. Ann.* — 1888. — Vol. 32. — P. 213–281.

- [160] Lie S. Theorie der Transformationsgruppen / S. Lie, F. Engel. — Leipzig: Teubner. — Bd. 1–3. — 1888, 1890, 1893. — 623s., 554s., 830s.
- [161] Lisle I.G. Equivalence transformations for classes of differential equations / I.G. Lisle // PhD. Thesis. — University of British Columbia. — 1992. (www.ise.canberra.edu.au/mathstat/StaffPages/LialeDissertation.pdf).
- [162] Nanjundiah V. Chemotaxis, signal relaying and aggregation morphology / V. Nanjundiah // J. Theor. Biol. — 1973. — Vol. 42, № 1. — P. 63–105.
- [163] Nikitin A.G. Group Classification of Nonlinear Schrodinger Equations / A.G. Nikitin, R.O. Popovych // Ukrainian Mathematical Journal. — 2001. — Vol. 53, № 8. — P. 1255–1265.
- [164] Nikitin A.G. System of reaction–diffusion equations and their symmetry properties / A.G. Nikitin, R.J. Wiltshire // J. Math. Phys. — 2001. — Vol. 42. — P. 1666–1688.
- [165] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I Generalized Ginzburg-Landau equations / A.G. Nikitin // J. Math. Anal. and Appl. (JMAA). — 2006. — V. 324. — P. 615–628.
- [166] Nikitin A.G. Group Classification of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations / A.G. Nikitin // Ukrainian Mathematical Bulletin. — 2005. — Vol. 2, № 2, — P. 153–204.
- [167] Nikitin A.G. Symmetries of Systems of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations in Symmetries in Nonlinear Mathematical Physics / A.G. Nikitin, R. Wiltshire // Proc. of the Third Int. Conf. — Kiev, July 12–18. — 1999, Ed. A.M. Samoilenko (Inst. of Mathematics of Nat. Acad. Sci. of Ukraine). — P. 47–59.
- [168] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing

systems / A.G. Nikitin // J. Math. Analysis and Applications (JMAA). — 2007. — Vol. 332, № 1, — P. 666–690.

- [169] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. III. Triangular diffusion matrix / A.G. Nikitin // Ukrainian Mathematical Journal. — 2007. — Vol. 59, № 3, — P. 395–411.
- [170] Olver P. Applications of Lie Groups to Differential Equations / P. Olver. — Berlin: Springer, 1986. — 510 p.
- [171] Olver P. Direct reduction and differential constraints / P. Olver // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1994. — Vol. 444. — P. 509–523.
- [172] Olver P. Differential invariants and invariant differential equations / P. Olver // Lie Groups Appl. — 1994. — Vol. 1. — P. 177–192.
- [173] Olver P. Group-invariant solutions of differential equations / P. Olver, P. Rosenau // SIAM J. Appl. Math. — 1987. — Vol. 47. — P. 263–278.
- [174] Olver P.J. The construction of special solutions to partial differential equations / P.J. Olver, P. Rosenau // Phys. Lett. — 1986. — V. 114A, № 3. — P. 107–112.
- [175] Oron A. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations / A. Oron, P. Rosenau // Phys. Lett. A. — 1986. — Vol. 118, № 4. — P. 172–176.
- [176] Patera J. Subgroup of the Poincare group and their invariants / J. Patera, R. Sharp and P. Winternitz and H. Zassenhaus // J. Math. Phys. — 1976. — Vol. 17, № 6. — P. 977–984.
- [177] Patera J. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincare group / J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus // J. Math. Phys. — 1975. — Vol. 16, № 8. — P. 1597–1612.

- [178] Patera J. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group / J. Patera, P. Winternitz, H. Zassenhaus // J. Math. Phys. — 1975. — V. 16, № 8. — P. 1613–1624.
- [179] Patera J. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups / J. Patera, R.T. Sharp, P. Winternitz, and H. Zassenhaus // J. Math. Phys. — 1977. — V. 18, №12. — P. 2259–2288.
- [180] Pava J.A. On the Cauchy problem for a Boussinesq-Type system / J.A. Pava // Advances in Differential Equations. — 1999. — Vol. 4, № 4. — P. 457–492.
- [181] Popovych R.O. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations / R.O. Popovych, N.M. Ivanova // J. Phys. A.: Math. Gen. — 2004. — V.37. — P. 7547–7565.
- [182] Popovych R.O. Equivalence of Q -conditional symmetries under group of local transformation / R.O. Popovych // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2000. — Vol. 30, Part 1. — P. 184–189.
- [183] Pukhnachov V.V. Nonlocal symmetries in nonlinear heat equations / V.V. Pukhnachov // Energy methods in continuum mechanics. — Oviedo, — 1994. — P. 75–99.
- [184] Rideau G. Nonlinear equations invariant under the Poincare, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time / G. Rideau, P. Winternitz // J. Math. Phys. — 1990. — Vol. 31. — P. 1095–1105.
- [185] Rosen G. Nonlinear heat conduction in solid / G. Rosen // Phys. Rev. B. — 1979. — Vol. 19. — P. 2398–2399.
- [186] Sachdev P.L. Nonlinear diffusive waves / P.L. Sachdev. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. — 246 p.
- [187] Serov M.I. Classification of symmetry properties of a system of chemotaxis equations / M.I. Serov, O.M. Omelyan // Ukrainian Mathematical Bulletin. — 2008. — Vol. 5, № 4. — P. 529–557.

- [188] Shigesada N. Spatial segregation of interacting species / N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto // *Journ of Theoret. Biol.* — 1979. — V. 79. — P. 83–89.
- [189] Shtelen W.M. Lie and Q-conditional symmetry and exact solutions of local Wilson renormalization group equation / W.M. Shtelen, S.V. Spichak // *Symmetry analysis of equations of mathematical physics. Proc. of Inst. Math. of Acad. Sci. Ukraine* . — 1992. — P. 50–54.
- [190] Spichak S.V. Symmetry analysis of the Kramers equation / S.V. Spichak, V.I. Stognii // *Rep. Math. Phys.* — 1997. — V. 40, № 1. — P. 125–130.
- [191] Spichak S.V. Symmetry classification and exact solutions of the Kramers equation / S.V. Spichak, V.I. Stognii // *J. Math. Phys.* — 1998. — V. 39, N 6, P. 3505–3510.
- [192] Spichak S.V. Symmetry classification and exact solutions of the one-dimensional Fokker-Planck equation with arbitrary coefficients of drift and diffusion / S.V. Spichak, V.I. Stognii // *J. Phys. A.* — 1999. — V. 32, № 47. — P. 8341–8353.
- [193] Spichak S.V. Symmetric classification of the one-dimensional Fokker-Planck-Kolmogorov equation with arbitrary drift and diffusion coefficients / S.V. Spichak, V.I. Stognii // *Nonlinear oscillations.* — 1999. — V. 2, № 3. — P. 401–413. (in Russian).
- [194] Storm M.L. Heat conduction in simple metals / M.L. Storm // *J. Appl. Phys.* — 1951. — V. 22. — P. 940–951.
- [195] Strampp W. Bäcklund transformations for diffusion equations / W. Strampp // *Physica D.* — 1982. — V.6. — P. 113–118.
- [196] Tsyfra I. Symmetry and nonlocal ansatzes for nonlinear heat equations / I. Tsyfra // *J. Nonlin. Math. Phys.* — 1995. — V. 2, № 3–4. — P. 312–318.
- [197] Tsyfra I. Nonlocal ansatzes for nonlinear heat and wave equations / I. Tsyfra // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1997. — V. 30, № 6. — P. 2251–2262.

- [198] Tychynin V.A. Symmetries and Generation of Solutions for Partial Differential Equations / V.A. Tychynin, O.V. Petrova, O.M. Tertyshnyk // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA) — 2007. — V. 3, 019. — 14 p. — URL: <http://arxiv.org/abs/math-ph/0702033>
- [199] Tychynin V.A. Non-local symmetry and generating solutions for Harry-Dym-type equations / V.A. Tychynin // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Vol. 27. — P. 4549–4556.
- [200] Wilhelmsson H. Plasma temperature and density dynamics including particle and heat pinch effects / H. Wilhelmsson // Physica Scripta. — 1992. — Vol. 46. — P. 177–181.
- [201] Winternitz P. Exact solutions of the multidimensional classical Φ^6 field equations obtained by symmetry reduction / P. Winternitz, A.M. Grundland, J.A. Tuszynski // J. Math. Phys. — 1987. — Vol. 28, № 9. — P. 2194–2212.
- [202] Yung C.M. Group classification and symmetry reductions of the nonlinear diffusion-convection equation $u_t = (D(u)u_x)_x - K'(u)u_x$ / C.M. Yung, K. Verburg, P. Baveye // Int. J. Non-Linear Mech. — 1994. — V. 29, № 3. — P. 273–278.
- [203] Zhdanov R.Z. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source / R.Z. Zhdanov, V.I. Lahno // J.Phys.A: Math. Gen. — 1999. — Vol. 32. — P. 7405–7418.
- [204] Zhdanov R.Z. A precise definition of reduction of partial differential equations / R.Z. Zhdanov, I.M. Tsyfra, and R.O. Popovych // J. Math. Anal. Appl. — 1999. — Vol. 238, № 1. — P. 101–123.

Додаток А

Доведення теореми 3.7

Доведення. В теоремі 3.6 показано, що розширення основної алгебри інваріантності A_0 системи (3.126) можливе лише у випадку, коли функції g^a задаються формулами (3.29), (3.30) або (3.130), (3.129), причому такий висновок був зроблений внаслідок аналізу системи (3.131). В доведенні ж даної теореми ми, використовуючи одержані в теоремі 3.6 зображення функції g^a , дослідимо відповідні симетрійні властивості системи (3.126) на основі аналізу розв'язків системи (3.131).

Розглянемо кожне з цих зображень функцій g^a окремо.

А. Спочатку дослідимо можливість розширення основної групи симетрії системи (3.126) при зображенні функцій g^a у вигляді (3.29). Підставивши зображення функцій g^a , задані формулами (3.29), у рівняння (3.131), та розщепивши одержані рівняння по $\ln u^2$, одержуємо $c_1 = 0$ та

$$\begin{aligned}\alpha^1(x_0)(u^1\dot{\varphi}^1 - \varphi^1) &= \dot{\alpha}^1(x_0)u^1, \\ \alpha^1(x_0)u^1\dot{\varphi}^2 &= \dot{\alpha}^{22}(x_0) - \lambda_3\alpha^{22}(x_0).\end{aligned}\tag{A.1}$$

Встановимо спочатку основну алгебру інваріантності системи (3.126), (3.29). Для цього в рівняннях (A.1) вважаємо функції φ^a довільними. Тоді з рівнянь (A.1) випливає, що

$$\alpha^1 = c_1 = 0, \quad \alpha^{22} = c_3 e^{\lambda_3 x_0}.\tag{A.2}$$

Очевидно, що оператор (3.2) з координатами (3.13), (A.2) породжує алгебру інваріантності з пункту 2 таблиці 1, яка, очевидно, і є ядром симетрії системи (3.126), (3.29).

Далі дослідимо, які можливі розширення основної алгебри інваріантності у системи (3.126), (3.29). Рівняння (A.1) допускають найбільш широкий клас функцій φ^a , якщо ці функції є розв'язком наступної системи

$$\dot{\varphi}^1 = \frac{\varphi^1}{u^1} + \lambda_5, \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{\lambda_4}{u^1}. \quad (\text{A.3})$$

Розв'язавши рівняння (A.3), одержуємо

$$\varphi^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7), \quad \varphi^2 = \lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6, \quad (\text{A.4})$$

де $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ — довільні сталі.

Враховучи вигляд функцій φ^a (A.4), із рівнянь (A.1), одержуємо рівності

$$\dot{\alpha}^1 - \lambda_5 \alpha^1 = 0, \quad \dot{\alpha}^{22} - \lambda_3 \alpha^{22} = \lambda_4 \alpha^1. \quad (\text{A.5})$$

Розв'язок рівнянь (A.5) залежить від співвідношення між сталими λ_3, λ_5 .

1. Нехай спочатку в рівняннях (A.5) має місце співвідношення $\lambda_5 \neq \lambda_3$.

Тоді розв'язавши рівняння (A.5), одержуємо

$$c_1 = 0, \quad \alpha^1 = c_2 e^{\lambda_5 x_0}, \quad \alpha^{22} = c_3 e^{\lambda_3 x_0} + \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_3} c_2 e^{\lambda_5 x_0}. \quad (\text{A.6})$$

Підставивши формули (A.6) у (3.13), отримуємо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = 2e^{\lambda_5 x_0} u^1, \quad \eta^2 = [c_3 e^{\lambda_3 x_0} + \frac{\lambda_4}{\lambda_5 - \lambda_3} c_2 e^{\lambda_5 x_0}] u^2. \quad (\text{A.7})$$

Отже, при

$$\begin{aligned} g^1 &= \lambda_5 u^1 + \lambda_7, \quad \lambda_5 \neq \lambda_3, \\ g^2 &= [\lambda_4 u^1 + \lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6] u^2 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

оператор (3.2) з координатами (A.7) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.126)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\lambda_5 x_0} [(\lambda_5 - \lambda_3) u^1 \partial_{u^1} + \lambda_4 u^2 \partial_{u^2}], Q_2 = e^{\lambda_3 x_0} u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{A.9})$$

Функції g^a вигляду (A.8) з відповідною алгеброю інваріантності (A.9) містяться в пункті 6 таблиці 3.

2. Якщо $\lambda_5 = \lambda_3$, то розв'язавши рівняння (A.5), одержуємо

$$c_1 = 0, \quad \alpha^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \alpha^{22} = c_3 e^{\lambda_3 x_0} (\lambda_4 c_2 x_0 + c_3). \quad (\text{A.10})$$

Враховавши (A.10), із (3.13) знаходимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = 2e^{\lambda_3 x_0} u^1, \quad \eta^2 = e^{\lambda_3 x_0} (\lambda_4 c_2 x_0 + c_3) u^2. \quad (\text{A.11})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3 u^1 + \lambda_7, \quad g^2 = (\lambda_4 u^1 + \lambda_3 \ln u^2 + \lambda_6) u^2 \quad (\text{A.12})$$

оператор (3.2) з координатами (A.11) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.126)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\lambda_3 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + \lambda_4 x_0 u^2 \partial_{u^2}), Q_2 = e^{\lambda_3 x_0} u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{A.13})$$

Функції g^a вигляду (A.12) з відповідною алгеброю інваріантності (A.13) містяться в пункті 7 таблиці 3.

В. Нехай розширення основної групи симетрії системи (3.126) відбувається при g^a вигляду (3.30). Підставивши в систему (A.1) формули (3.30), маємо

$$\begin{aligned} (u^2)^m [\alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^1 + (m\alpha^{22} - \alpha^1 + 2c_1) \varphi^1] &= \dot{\alpha}^1 u^1, \\ (u^2)^m [\alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^2 + (m\alpha^{22} + 2c_1) \varphi^2] &= \dot{\alpha}^{22}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Спочатку дослідимо основну алгебру інваріантності системи (3.126), (3.30). Для цього в рівняннях (A.14) вважаємо функції φ^a довільними. Тоді з рівнянь (A.14) випливає, що

$$\alpha^1 = 0, \quad \alpha^{22} = -2c_2, \quad c_1 = mc_2. \quad (\text{A.15})$$

Враховавши (A.15), з (3.13) одержуємо

$$\xi^0 = 2mc_2 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = mc_2 x_1 + d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = -2c_2 u^2. \quad (\text{A.16})$$

Оператор (3.2) з координатами (A.16) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2u^2 \partial_{u^2} \rangle, \quad (\text{A.17})$$

що відповідає пункту 1 таблиці 1.

Тепер дослідимо розширення основної алгебри інваріантності (A.17) системи (3.126), (3.30). Тоді найбільш широкий клас функцій φ^a , які можуть задовольняти систему (A.14), має вигляд

$$\varphi^1 = u^1 [\lambda_3 (u^1)^n + \lambda_5], \quad \varphi^2 = \lambda_4 (u^1)^n + \lambda_6, \quad (\text{A.18})$$

або

$$\varphi^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5), \quad \varphi^2 = \lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6, \quad (\text{A.19})$$

де $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, n$ — довільні сталі.

Зауваження А.1. Оскільки формули (A.18), (A.19) при $\lambda_3 = \lambda_4 = n = 0$ співпадають, то, щоб уникнути їх перетину, при дослідженні симетрійних властивостей системи (3.126) у формулах (A.18) будемо вважати $n \neq 0$, а у формулах (A.19) — $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$.

1. Підставивши функції (A.18) у (A.14), та розщепивши одержані рівняння по степенях $(u^1)^n$, маємо

$$\lambda_3(n\alpha^1 + m\alpha^{22} + 2c_1) = \lambda_4(n\alpha^1 + m\alpha^{22} + 2c_1) = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$(u^2)^m \lambda_5(m\alpha^{22} + 2c_1) = \dot{\beta}^1, \quad (u^2)^m \lambda_6(m\alpha^{22} + 2c_1) = \dot{\alpha}^{22}. \quad (\text{A.21})$$

Розв'язок рівнянь (A.20), (A.21) залежить від значення параметра m .

1.1. Якщо $m \neq 0$, то з рівнянь (A.20), (A.21) випливає, що

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= -2c_2, \quad \alpha^{22} = -2c_3, \\ \lambda_3(nc_2 + mc_3 - c_1) &= \lambda_5(nc_2 + mc_3 - c_1) = 0, \\ \lambda_5(mc_3 - c_1) &= 0, \quad \lambda_4(mc_3 - c_1) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

В залежності від сталих $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ з рівнянь (A.22) маємо наступні розгалуження:

а) $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0, |\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$. Цей випадок приводить до основної алгебри інваріантності (A.17).

б) $\lambda_3 = \lambda_4 = 0, |\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$. В цьому випадку з рівнянь (A.22) отримуємо

$$c_1 = mc_3. \quad (\text{A.23})$$

В формул (3.13), врахувавши (A.22), (A.23) знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2mc_3x_0 + d_0, \quad \xi^1 = mc_3x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= -2c_2u^1, \quad \eta^2 = -2c_3u^2. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5 u^1 (u^2)^m, \quad g^2 = \lambda_4 (u^2)^{m+1} \quad (\text{A.25})$$

оператор (3.2) з координатами (A.24) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2u^2 \partial_{u^2}, Q = \partial_{u^1} \rangle, \quad (\text{A.26})$$

що є частинним випадком пункту 4 таблиці 3 при $n = \lambda_7 = 0$.

с) $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0, \lambda_5 = \lambda_6 = 0$. В цьому випадку з рівнянь (A.22) отримуємо

$$c_1 = nc_2 + mc_3. \quad (\text{A.27})$$

З формул (3.13), врахувавши (A.22), (A.27) знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2(nc_2 + mc_3)x_0 + d_0, & \xi^1 &= (nc_2 + mc_3)x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= -2c_2 u^1, & \eta^2 &= -2c_3 u^2. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3 (u^1)^{n+1} (u^2)^m, \quad g^2 = \lambda_4 (u^1)^n (u^2)^{m+1} \quad (\text{A.29})$$

оператор (3.2) з координатами (A.28) породжує алгебру

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, D &= m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2u^2 \partial_{u^2}, \\ Q &= m u^1 \partial_{u^1} - n u^2 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

що є частинним випадком пункту 4 таблиці 3 при $\lambda_7 = 0$.

д) $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$. В цьому випадку з формул (3.13), врахувавши (A.22), знаходимо

$$\xi^0 = 2c_1 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1 x_1 + d_1, \quad \eta^1 = c_2 u^1, \quad \eta^2 = c_3 u^2. \quad (\text{A.31})$$

Отже, при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = 0 \quad (\text{A.32})$$

оператор (3.2) з координатами (A.31) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1, Q_1 = u^1 \partial_{u^1}, Q_2 = u^2 \partial_{u^2} \rangle, \quad (\text{A.33})$$

що відповідає пункту 10 таблиці 3.

1.2. Якщо $m \neq 0$, то з рівнянь (A.20), (A.21) випливає, що

$$\begin{aligned} \lambda_3(n\alpha^1 + 2c_1) &= \lambda_4(n\alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \dot{\alpha}^1 &= 2\lambda_5c_1, \quad \dot{\alpha}^{22} = 2\lambda_6c_1. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

З рівнянь (A.34), отримаємо

$$\alpha^1 = 2\lambda_5c_1x_0 - 2c_2, \quad \dot{\alpha}^{22} = 2\lambda_6c_1x_0 - 2c_3, \quad (\text{A.35})$$

$$\lambda_3\lambda_5c_1 = \lambda_4\lambda_5c_1 = 0, \quad \lambda_3(nc_2 - c_1) = \lambda_4(nc_2 - c_1) = 0. \quad (\text{A.36})$$

Рівняння (A.36), в залежності від сталих $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$, приводять до наступних розгалужень:

а) $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0, \lambda_5 \neq 0$. З рівнянь (A.35) неважко переконатися, що в даному випадку при

$$g^1 = u^1[\lambda_3(u^1)^n + \lambda_5], \quad g^2 = u^2[\lambda_4(u^1)^n + \lambda_6] \quad (\text{A.37})$$

максимальна алгебра інваріантності системи (3.126) задається операторами

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q = u^2\partial_{u^2} \rangle, \quad (\text{A.38})$$

що є основною алгеброю інваріантності (A.17) системи (3.126), (3.30) при $m = 0$.

б) $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0, \lambda_5 = 0$. З рівняння (A.36) випливає, що $nc_2 = 2c_1$. Тоді з формул (3.12), врахувавши (A.35), знаходимо

$$\xi^0 = nc_2x_0 + d_0, \quad \xi^1 = \frac{n}{2}c_2x_1 + d_1, \quad \eta^1 = c_2, \quad \eta^2 = c_3u^2. \quad (\text{A.39})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3(u^1)^{n+1}, \quad g^2 = u^2[\lambda_4(u^1)^n + \lambda_6] \quad (\text{A.40})$$

оператор (3.2) з координатами (A.39) породжує алгебру

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, D = n(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + 2\lambda_6x_0u^2\partial_{u^2} - 2u^1\partial_{u^1}, \\ Q = u^2\partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

що відповідає пункту 5 таблиці 3.

с) $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Тоді з формул (3.12), врахувавши (А.35), знаходимо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, & \xi^1 &= c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= (2\lambda_5c_1x_0 + 2)u^1, & \eta^2 &= (2\lambda_6c_1x_0 + 3)u^2.\end{aligned}\quad (\text{А.42})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5u^1, \quad g^2 = \lambda_6u^2 \quad (\text{А.43})$$

оператор (3.2) з координатами (А.42) породжує алгебру

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2x_0(\lambda_5Q_1 + \lambda_6Q_2), \\ Q_1 = u^1\partial_{u^1}, \quad Q_2 = u^2\partial_{u^2} \rangle,\end{aligned}\quad (\text{А.44})$$

що відповідає пункту 10 таблиці 3.

2. Підставивши функції φ^a вигляду (А.19) у рівняння (А.14), та розщепивши одержані рівняння по $\ln u^1$, одержимо

$$m\alpha^{22} + 2c_1 = 0, \quad (u^2)^m\lambda_5\alpha^1 = \dot{\alpha}^1, \quad (u^2)^m\lambda_4\alpha^1 = \dot{\alpha}^{22}. \quad (\text{А.45})$$

Якщо в рівняннях (А.45) вважати, що $m \neq 0$, то ці рівняння приводять до ядра симетрії (А.17).

Якщо в рівняннях (А.45) $m = 0$, то в цьому випадку розв'язок рівнянь (А.45) залежить від значення сталої λ_3 .

а) якщо $\lambda_3 \neq 0$, то з рівнянь (А.45) випливає, що

$$c_1 = 0, \quad \alpha^1 = c_2e^{\lambda_3x_0}, \quad \alpha^{22} = \lambda_4c_2e^{\lambda_3x_0} + c_3. \quad (\text{А.46})$$

З формул (3.12), врахувавши (А.46), одержуємо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2e^{\lambda_3x_0}u^1, \quad \eta^2 = (\lambda_4c_2e^{\lambda_3x_0} + c_3)u^2. \quad (\text{А.47})$$

Отже, при

$$g^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5), \quad g^2 = u^2(\lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6) \quad (\text{А.48})$$

оператор (3.2) з координатами (А.47) породжує МАІ системи (3.126), (3.30)

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = e^{\lambda_3x_0}(\lambda_3u^1\partial_{u^1} + \lambda_4u^2\partial_{u^2}), \quad Q_2 = u^2\partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{А.49})$$

Функції g^a вигляду (А.48) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (А.49) містяться у пункті 6 таблиці 3.

б) якщо $\lambda_3 = 0$, то з рівнянь (А.45) випливає, що

$$c_1 = 0, \quad \alpha^1 = c_2, \quad \alpha^{22} = \lambda_4 c_2 x_0 + c_3. \quad (\text{А.50})$$

З формул (3.12), врахувавши (А.50), одержуємо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 u^1, \quad \eta^2 = (\lambda_4 c_2 x_0 + c_3) u^2. \quad (\text{А.51})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5 u^1, \quad g^2 = u^2 (\lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6) \quad (\text{А.52})$$

оператор (3.2) з координатами (А.51) породжує МАІ системи (3.126), (3.30)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = u^1 \partial_{u^2} + \lambda_4 x_0 \partial_{u^2}, Q_2 = u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{А.53})$$

Функції g^a вигляду (А.52) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (А.53) відповідають пункту 7 таблиці 3.

С. Тепер вивчимо можливість розширення основної групи симетрії системи (3.126) при зображенні функцій g^a формулами (3.129).

Підставивши зображення функцій g^a , задані формулами (3.129), у рівняння (3.131), одержуємо $c_1 = 0$ та

$$\begin{aligned} (\alpha^{22}(x_0) - k\alpha^1(x_0))\omega\dot{\varphi}^1 &= \dot{\alpha}^1(x_0) - \lambda_3\alpha^1(x_0), \\ (\alpha^{22}(x_0) - k\alpha^1(x_0))\omega\dot{\varphi}^2 &= \dot{\alpha}^{22}(x_0) - \lambda_4\alpha^{22}(x_0). \end{aligned} \quad (\text{А.54})$$

Встановимо спочатку основну алгебру інваріантності системи (3.126), (3.130). Для цього в рівняннях (А.54) вважаємо функції φ^a та сталі λ_3, λ_4 довільними. Тоді з рівнянь (А.54) випливає, що

$$\dot{\alpha}^1 - \lambda_3\alpha^1 = 0, \quad \dot{\alpha}^{22} - \lambda_4\alpha^{22} = 0, \quad \alpha^{22} = k\alpha^1. \quad (\text{А.55})$$

Розв'язавши рівняння (А.55), знаходимо, що

$$\alpha^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \alpha^{22} = k c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad k(\lambda_3 - \lambda_4)c_2 = 0. \quad (\text{А.56})$$

З останньої рівності (А.56) очевидно, що розширення основної алгебри інваріантності A_0 системи (3.126) можливе лише при умовах: $\lambda_3 = \lambda_4$ або $k = 0$.

1. $\lambda_3 = \lambda_4$. При цій умові функції g^a набувають вигляду

$$g^1 = u^1(\varphi^1(\omega) + \lambda_3 \ln u^1), \quad g^2 = u^2(\varphi^2(\omega) + \lambda_3 \ln u^2), \quad (\text{A.57})$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$, $\lambda_3 \neq 0$. З формул (3.13), врахувавши (A.57), одержуємо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0} u^1, \quad \eta^2 = k c_2 e^{\lambda_3 x_0} u^2. \quad (\text{A.58})$$

Отже, якщо зображення функцій g^a задаються формулами (A.57), то оператор (3.2) з координатами (A.58) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.126), (3.129), наведену у пункті 2 таблиці 3.

2. $k = 0$. При цій умові функції g^a набувають вигляду

$$g^1 = u^1(\varphi^1(u^2) + \lambda_3 \ln u^1), \quad g^2 = u^2(\varphi^2(u^2) + \lambda_4 \ln u^2), \quad (\text{A.59})$$

де $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$.

З формул (3.13), врахувавши (A.59), отримуємо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0} u^1, \quad \eta^2 = 0. \quad (\text{A.60})$$

Отже, якщо зображення функцій g^a мають вигляд (A.53), то оператор (3.2) з координатами (A.60) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.126), (3.129), що співпадає з пунктом 1 таблиці 3.

Далі дослідимо, можливість розширення основної алгебри інваріантності системи (3.126), (3.129). Найбільш широкий клас функцій φ^a , які є розв'язком системи (A.48) і при цьому відбувається розширення основної алгебри інваріантності системи (3.126), (3.129), має вигляд

$$\varphi^1 = \lambda_5 \ln \omega + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6 \ln \omega + \lambda_8, \quad (\text{A.61})$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$, λ_7, λ_8 — довільні сталі.

Підставивши зображення функцій φ^a (A.61) у рівняння (A.54), маємо

$$\dot{\alpha}^1 = \tilde{\lambda}_3 \alpha^1 + \lambda_5 \alpha^{22}, \quad \dot{\alpha}^{22} = \tilde{\lambda}_4 \alpha^1 + \tilde{\lambda}_6 \alpha^{22}, \quad (\text{A.62})$$

$$\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 - k \lambda_5, \quad \tilde{\lambda}_4 = -k \lambda_6, \quad \tilde{\lambda}_6 = \lambda_4 + \lambda_6.$$

Розв'язок рівнянь (A.62) залежить від вигляду коренів характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_3 - m & \lambda_5 \\ \tilde{\lambda}_4 & \tilde{\lambda}_6 - m \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{A.63})$$

Вигляд коренів характеристичного рівняння (A.63) залежить від знаку дискримінанта

$$D = (\tilde{\lambda}_3 - \tilde{\lambda}_6)^2 + 4\tilde{\lambda}_4\lambda_5. \quad (\text{A.64})$$

1. Якщо $D > 0$, то розв'язок системи (A.62) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= c_2\lambda_5 e^{m_1 x_0} + c_3(m_2 - \tilde{\lambda}_6) e^{m_2 x_0}, \\ \alpha^{22} &= c_2(m_1 - \tilde{\lambda}_3) e^{m_1 x_0} + c_3\tilde{\lambda}_4 e^{m_2 x_0}, \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

де $m_1, m_2 = \frac{\lambda_3 + \lambda_6 \pm \sqrt{D}}{2}$. Із (3.12), врахувавши (A.65) та умову $c_1 = 0$, одержуємо координати оператора (3.2)

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = [c_2\lambda_5 e^{m_1 x_0} + c_3(m_2 - \tilde{\lambda}_6) e^{m_2 x_0}] u^1, \\ \eta^2 &= [c_2(m_1 - \tilde{\lambda}_3) e^{m_1 x_0} + c_3\tilde{\lambda}_4 e^{m_2 x_0}] u^2. \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Оператор (3.2) з координатами (A.66) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.126), (3.129)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 &= e^{m_1 x_0} [\lambda_5 u^1 \partial_{u^1} + (m_1 - \tilde{\lambda}_3) u^2 \partial_{u^2}], \\ Q_2 &= e^{m_2 x_0} [(m_2 - \tilde{\lambda}_6) u^1 \partial_{u^1} + \tilde{\lambda}_4 u^2 \partial_{u^2}] \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

що співпадає з пунктом 6 таблиці 3.

2. Якщо $D = 0$, і $|\lambda_3| + |\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, то розв'язок системи (A.62) має вигляд

$$\alpha^1 = \lambda_5 e^{m x_0} (c_2 x_0 + c_3), \quad \alpha^{22} = e^{m x_0} [(m - \tilde{\lambda}_3)(c_2 x_0 + c_3) + c_2], \quad (\text{A.68})$$

де $m = \frac{\lambda_3 + \lambda_6}{2}$. Підставляючи (A.68) у (3.12) одержуємо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = \lambda_5 e^{m x_0} (c_2 x_0 + c_3) u^1, \\ \eta^2 &= [e^{m x_0} [(m - \tilde{\lambda}_3)(c_2 x_0 + c_3) + c_2]] u^2. \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Оператор (3.2) з координатами (A.71) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.126),

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 &= e^{m x_0} [x_0 (\lambda_5 u^1 \partial_{u^1} + (m - \tilde{\lambda}_3) u^2 \partial_{u^2}) + u^2 \partial_{u^2}], \\ Q_2 &= e^{m x_0} [\lambda_5 u^1 \partial_{u^1} + (m - \tilde{\lambda}_3) u^2 \partial_{u^2}] \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

що співпадає з пунктом 7 таблиці 3.

3. Якщо $D = 0$, і $\lambda_3 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, то розв'язок системи (A.62) має вигляд

$$\alpha^1 = c_2, \quad \alpha^{22} = \lambda_3 c_2 x_0 + c_3. \quad (\text{A.71})$$

Підставляючи (A.71) у (3.12), одержуємо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 u^1, \quad \eta^2 = (\lambda_3 c_2 x_0 + c_3) u^2. \quad (\text{A.72})$$

Оператор (3.2) з координатами (A.71) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.126),

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = u^1 \partial_{u^1} + \lambda_4 x_0 u^2 \partial_{u^2} \rangle, \quad (\text{A.73})$$

що відповідає пункту 8 таблиці 3.

4. Якщо $D < 0$, то $m_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - корені рівняння (A.63), причому $\alpha = \frac{\tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_6}{2}$, $\beta = \frac{1}{2} \sqrt{|D|}$. Тоді розв'язок системи (A.62) матиме наступний вигляд

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= e^{\alpha x_0} \lambda_5 [c_2 \cos \beta x_0 + c_3 \sin \beta x_0], \\ \alpha^2 &= e^{\alpha x_0} [c_2 ((\alpha - \tilde{\lambda}_3) \cos \beta x_0 - \beta \sin \beta x_0) + \\ &\quad + c_3 (\beta \cos \beta x_0 + (\alpha - \tilde{\lambda}_3) \sin \beta x_0)]. \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

Із (3.12), врахувавши (A.74), одержуємо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = e^{\alpha x_0} \lambda_5 [c_2 \cos \beta x_0 + c_3 \sin \beta x_0] u^1, \\ \eta^2 &= e^{\alpha x_0} [c_2 ((\alpha - \tilde{\lambda}_3) \cos \beta x_0 - \beta \sin \beta x_0) + \\ &\quad + c_3 (\beta \cos \beta x_0 + (\alpha - \tilde{\lambda}_3) \sin \beta x_0)] u^2. \end{aligned} \quad (\text{A.75})$$

Оператор (3.2) з координатами (A.75) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.126),

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 &= e^{\alpha x_0} [\lambda_5 \cos \beta x_0 u^1 \partial_{u^1} + \\ &\quad + ((\alpha - \tilde{\lambda}_3) \cos \beta x_0 - \beta \sin \beta x_0) u^2 \partial_{u^2}], \\ Q_2 &= e^{m x_0} [\lambda_5 \sin \beta x_0 u^1 \partial_{u^1} + (\beta \cos \beta x_0 + (\alpha - \tilde{\lambda}_3) \sin \beta x_0) u^2 \partial_{u^2}] \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

що співпадає з пунктом 9 таблиці 3.

Отже, при

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1 [\tilde{\lambda}_3 \ln u^1 + \lambda_5 \ln u^2 + \lambda_7], \\ g^1 &= u^2 [\tilde{\lambda}_4 \ln u^1 + \tilde{\lambda}_6 \ln u^2 + \lambda_8] \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

максимальні алгебри інваріантності системи (3.126), (3.129) наведені в пунктах 6-9 таблиці 3 відповідно.

Д. Далі розглянемо розширення основної алгебри інваріантності A_0 системи (3.126), яке відбувається при вигляді функцій g^a , заданому формулами (3.130).

Підставивши у визначальні рівняння (3.131) зображення функцій g^a (3.130), одержимо

$$\begin{aligned} [(\alpha^{22} - k\alpha^1)\omega\dot{\varphi}^1 + (m\alpha^1 + 2c_1)\varphi^1](u^1)^m &= \dot{\alpha}^1, \\ [(\alpha^{22} - k\alpha^1)\omega\dot{\varphi}^2 + (m\alpha^1 + 2c_1)\varphi^2](u^1)^m &= \dot{\alpha}^{22}. \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

Спочатку визначимо основну алгебру інваріантності системи (3.126), (3.130). Якщо в рівняннях (A.78) функції φ^a довільні, то з рівнянь (A.78) випливає, що

$$\alpha^1 = -2c_2, \quad \alpha^{22} = k\alpha^1, \quad mc_2 - c_1 = 0. \quad (\text{A.79})$$

З формул (3.13), враховуючи (A.79), одержуємо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2mc_2x_0 + d_0, \quad \xi^1 = mc_2x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= -2c_2u^1, \quad \eta^2 = -2kc_2u^2. \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Оператор (3.2) з координатами (A.80) породжує основну алгебру інваріантності системи (3.126), (3.130):

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2(u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}) \rangle. \quad (\text{A.81})$$

Одержана основна алгебра інваріантності (A.81) системи (3.126), (3.130) відповідає пункту 3 таблиці 3.

Тепер дослідимо можливі розширення основної алгебри інваріантності системи (3.126), (3.130). При цьому найбільш широкий клас функцій φ^a , які є розв'язками системи (A.78), має вигляд

$$\varphi^1 = \lambda_3 \ln \omega + \lambda_5, \quad \varphi^2 = \lambda_4 \ln \omega + \lambda_6, \quad (\text{A.82})$$

або

$$\varphi^1 = \lambda_3(\omega)^n + \lambda_5, \quad \varphi^2 = \lambda_4(\omega)^n + \lambda_6, \quad (\text{A.83})$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$, $\lambda_3, \dots, \lambda_6, n$ — довільні сталі.

Функції g^a , побудовані за формулами (3.129), (A.82), мають вигляд

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1[-k\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_3 \ln u^2 + \lambda_5], \\ g^2 &= u^2[-k\lambda_4 \ln u^1 + \lambda_4 \ln u^2 + \lambda_6]. \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

Формули (A.84) при $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ співпадають з формулами (A.41), а при $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$ є частинним випадком формул (A.77). Розширення основної алгебри інваріантності в цих випадках досліджено вище.

Розглянемо тепер функції φ^a , задані формулами (A.83). Для того, щоб забезпечити відмінність цих формул від (A.82), будемо вважати, що $n \neq 0$ і $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$. Якщо (A.83) підставити в систему (A.78), то одержимо

$$\begin{aligned} [\lambda_3(n\alpha^{22} + (m - kn)\alpha^1)(\omega)^n + \lambda_5(m\alpha^1 + 2c_1)](u^1)^m &= \dot{\alpha}^1, \\ (\lambda_4(n\alpha^{22} + (m - kn)\alpha^1)(\omega)^n + \lambda_6(m\alpha^1 + 2c_1))(u^1)^m &= \dot{\alpha}^{22}. \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Розв'язок системи (A.85) залежить від значення сталої m .

1. $m = 0$. Розщепивши (A.85) по степенях ω , одержимо

$$\dot{\alpha}^1 = 2\lambda_5 c_1, \quad \dot{\alpha}^{22} = 2\lambda_6 c_1, \quad n(\alpha^{22} - k\alpha^1) + 2c_1 = 0, \quad (\text{A.86})$$

звідки

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= 2\lambda_5 c_1 x_0 - 2c_2, \quad \alpha^{22} = 2\lambda_6 c_1 x_0 - 2c_3, \\ n(\lambda_6 - k\lambda_5)c_1 x_0 - n(c_3 - kc_2) + c_1 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.87})$$

Враховуючи, що $n \neq 0$, розщепивши останнє рівняння (A.87) по x_0 , одержуємо, що

$$c_1 = nc_4, \quad c_3 = kc_2 + c_4, \quad (\lambda_6 - k\lambda_5)c_4 = 0. \quad (\text{A.88})$$

З рівнянь (A.88) неважко побачити, що розширення основної алгебри інваріантності (A.81) системи (3.126) можливе лише при умові, що $\lambda_6 = k\lambda_5$.

Тоді із формул (3.13), враховуючи (A.87), (A.88), одержуємо наступні координати оператора (3.2):

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2nc_4 x_0 + d_0, & \xi^1 &= nc_4 x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= (2n\lambda_5 c_4 x_0 - 2c_2)u^1, & \eta^2 &= (2nk\lambda_5 c_4 x_0 - 2kc_2 - 2c_4)u^2. \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

Оператор (3.2) з координатами (A.89) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = n(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_5x_0Q) - 2u^2\partial_{u^2}, \\ Q = u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{A.90})$$

Отже, з (3.130), (A.83) знаходимо

$$g^1 = u^1[\lambda_3(u^1)^{-nk}(u^2)^n + \lambda_5], \quad g^2 = u^2[\lambda_4(u^1)^{-nk}(u^2)^n + k\lambda_5]. \quad (\text{A.91})$$

Формули (A.90), (A.91) доводять пункт 4 таблиці 3.

2. $m \neq 0$. Розщепивши рівняння (A.85) по степенях змінних ω та u^1 , одержимо

$$\dot{\alpha}^1 = \dot{\alpha}^{22} = 0, \quad n\alpha^{22} + (m - kn)\alpha^1 = 0, \\ \lambda_5(m\alpha^1 + 2c_1) = \lambda_6(m\alpha^1 + 2c_1) = 0. \quad (\text{A.92})$$

Очевидно, що розв'язок рівнянь (A.78) залежить від значення сталих λ_5, λ_6 .

Можливі наступні розгалуження: **2.1.** $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$; **2.2.** $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$.

2.1. Випадок $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$ приводить до основної алгебри інваріантності (A.81) системи (3.126), (3.130).

2.2. Випадок $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$ приводить до випадку (A.90), (A.91) при $\lambda_5 = 0$.

Теорему 3.7 доведено.

Додаток В

Доведення теореми 3.9

Доведення. В теоремі 3.8 показано, що розширення ядра симетрії A_0 системи (3.134) можливе лише у випадку, коли функції g^a задаються формулами (3.29), (3.30), (3.129), (3.130), або (3.136), (3.137), (3.138), (3.139). Такий висновок був зроблений в результаті аналізу системи (3.141). В доведенні ж даної теореми ми, використовуючи одержані в теоремі 3.8 зображення функції g^a , дослідимо відповідні симетрійні властивості системи (3.134) на основі аналізу розв'язків системи (3.140). Розглянемо кожне з цих зображень функцій g^a окремо.

Насамперед зауважимо, що при $\alpha^{21} = 0$ формули (3.14) співпадають з формулами (3.13) а система (3.140) із системою (3.131) і, отже, симетрійні властивості системи (3.134) при умовах (3.29), (3.30), (3.129), (3.130) прокласифіковані вище (див. таблиця 1, таблиця 3). В зв'язку з цим надалі в пунктах А, В, С і D доведення даної теореми будемо вважати, що $\alpha^{21} \neq 0$.

А. Спочатку дослідимо можливість розширення основної групи симетрії системи (3.134) при зображенні функцій g^a у вигляді (3.29). Підставивши зображення функцій g^a , задані формулами (3.29), у рівняння (3.140), та розщепивши їх по $\ln u^2$ одержимо, що $\alpha^{21} = c_1 = 0$ та

$$\begin{aligned} \alpha^1(x_0)(u^1\dot{\varphi}^1 - \varphi^1) &= \dot{\alpha}^1(x_0)u^1, \\ \alpha^1(x_0)u^1\dot{\varphi}^2 &= (\dot{\alpha}^{22}(x_0) - \lambda_3\alpha^{22}(x_0)). \end{aligned} \tag{В.1}$$

Рівняння (В.1) співпадають з рівняннями (А.1), які вже проаналізовані в доведенні теореми 6, а одержані розширення основної алгебри інваріантності A_0 представлені в таблиці 1 та в таблиці 3.

В. Тепер дослідимо можливість розширення основної групи симетрії системи (3.134) при зображенні функцій g^a у вигляді (3.30). Підставивши

зображення функцій g^a , задані формулами (3.30), у рівняння (3.140), одержуємо

$$\begin{aligned} & (u^2)^m [\alpha^1(x_0)u^1\dot{\varphi}^1 + ((m\alpha^{22}(x_0) - \alpha^1(x_0) + 2c_1)\varphi^1] + \\ & + m(u^2)^{m-1}\alpha^{21}(x_0)u^1\varphi^1 = \dot{\alpha}^1(x_0)u^1, \\ & (u^2)^{m+1}[\alpha^1(x_0)u^1\dot{\varphi}^2 + ((m\alpha^{22}(x_0) + 2c_1)\varphi^2] + \\ & + (u^2)^m\alpha^{21}(x_0)[(m+1)u^1\varphi^2 - \varphi^1] = \dot{\alpha}^{21}(x_0)u^1 + \dot{\alpha}^{22}(x_0)u^2. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Одразу встановимо основну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.30). Для цього у рівняннях (B.2) вважаємо функції φ^a довільними. Тоді з рівнянь (B.2) випливає, що

$$\alpha^1 = \alpha^{21} = 0, \quad \alpha^{22} = -2c_3, \quad c_1 = mc_3. \quad (\text{B.3})$$

Очевидно, що оператор (3.2) з координатами (3.14), (B.3) породжує алгебру інваріантності

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2u^2\partial_{u^2} \rangle, \quad (\text{B.4})$$

яка співпадає з пунктом 2 таблиці 1, і очевидно, є основною алгеброю інваріантності системи (3.134), (3.30).

Далі дослідимо, які можливі розширення основної алгебри інваріантності системи (3.134), (3.30).

Аналогічно, як і в теоремі 3.6, проаналізувавши систему (B.2) приходимо до висновку, що найбільш широкий клас функцій φ^a , при яких допускається розширення основної алгебри інваріантності (B.4), має вигляд

$$\begin{aligned} & \varphi^1 = u^1(\lambda_3(u^1)^n + \lambda_5), \quad \varphi^2 = \lambda_4(u^1)^n + \lambda_6u^1 + \lambda_7, \\ & n \neq 0; \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned} & \varphi^1 = u^1(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5), \quad \varphi^2 = \lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6, \\ & |\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0; \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} & \varphi^1 = \lambda_3(u^1)^2, \quad \varphi^2 = u^1(\lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6), \\ & \lambda_4 \neq 0, \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

де $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, n$ — довільні сталі.

Зауваження В.1. Обмеження на значення сталих λ_3, λ_4, n у формулах (В.5), (В.6), (В.7) накладені з метою уникнути їх перетину при дослідженні розширень ядра симетрії системи (3.134), (3.30).

1. Нехай функції φ^a задаються формулами (В.5). В такому випадку функції g^a , задані формулами (3.30), матимуть вигляд

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1(u^2)^m(\lambda_3(u^1)^n + \lambda_5), \\ g^2 &= (u^2)^{m+1}(\lambda_4(u^1)^n + \lambda_6 u^1 + \lambda_7). \end{aligned} \quad (\text{В.8})$$

Після підстановки (В.5) у (В.4), одержуємо

$$\begin{aligned} &(u^2)^m[(u^1)^n \lambda_3(m\alpha^{22} + n\alpha^1 + 2c_1) + \lambda_5(m\alpha^{22} + 2c_1)] + \\ &+ (u^2)^{m-1} u^1 m \alpha^{21} (\lambda_3(u^1)^n + \lambda_5) = \dot{\alpha}^1, \\ &(u^2)^{m+1}[(u^1)^n \lambda_4(m\alpha^{22} + n\alpha^1 + 2c_1) + \\ &+ u^1 \lambda_6(m\alpha^{22} + \alpha^1 + 2c_1) + \lambda_7(m\alpha^{22} + 2c_1)] + \\ &+ (u^2)^m u^1 \alpha^{21} ((u^1)^n ((m+1)\lambda_4 - \lambda_3) + \\ &+ u^1(m+1)\lambda_6 + (m+1)\lambda_7 - \lambda_5) = \dot{\alpha}^{21} u^1 + \dot{\alpha}^{22} u^2. \end{aligned} \quad (\text{В.9})$$

Розв'язок системи (В.9) залежить від значень параметрів m, n та λ_i .

1.1. Нехай $m \neq 0; \pm 1$. Розщепивши систему (В.9) по степенях функцій u^1 та u^2 , приходимо до рівностей

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^1 &= \dot{\alpha}^{21} = \dot{\alpha}^{22} = 0, \quad \lambda_i \alpha^{21} = 0, \quad i = \overline{3, 7}, \\ \lambda_3(m\alpha^{22} + n\alpha^1 + 2c_1) &= \lambda_4(m\alpha^{22} + n\alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_6(m\alpha^{22} + \alpha^1 + 2c_1) &= 0, \\ \lambda_5(m\alpha^{22} + 2c_1) &= \lambda_7(m\alpha^{22} + 2c_1) = 0. \end{aligned} \quad (\text{В.10})$$

Проаналізувавши розв'язки системи (В.10), приходимо до висновку, що розширення основної алгебри інваріантності (В.4) відбувається лише у випадку $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$. При цих умовах

$$g^1 = 0, \quad g^2 = 0, \quad (\text{В.11})$$

а максимальна алгебра інваріантності системи (3.134), (В.11) задається операторами

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1, \\ Q_1 = u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = u^1 \partial_{u^2}, \quad Q_3 = u^2 \partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{В.12})$$

Функції g^a вигляду (В.11) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.12) містяться у пункті 33 таблиці 4.

1.2. Якщо $m = 0$, то з системи (В.9) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned}\lambda_3(n\alpha^1 + 2c_1) &= \lambda_4(n\alpha^1 + 2c_1) = \lambda_6(\alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ (\lambda_3 - \lambda_4)\alpha^{21} &= \lambda_6\alpha^{21} = 0, \\ \dot{\alpha}^1 &= 2\lambda_5c_1, \quad \dot{\alpha}^{21} = (\lambda_7 - \lambda_5)\alpha^{21}, \quad \dot{\alpha}^{22} = 2\lambda_7c_1.\end{aligned}\tag{В.13}$$

З системи (В.13) при умові, що $\alpha^{21} \neq 0$, випливають рівності

$$\lambda_4 = \lambda_3, \quad \lambda_6 = 0.\tag{В.14}$$

Проаналізувавши рівняння (В.13) при наявності умов (В.14) приходимо до розгалужень: **а)** $\lambda_3 \neq 0, \lambda_5 \neq 0$, **б)** $\lambda_3 \neq 0, \lambda_5 = 0$, **с)** $\lambda_3 = 0$.

а) у випадку, коли $\lambda_3 \neq 0, \lambda_5 \neq 0$, з рівнянь (В.13) одержуємо

$$\alpha^1 = c_1 = 0, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{(\lambda_7 - \lambda_5)x_0}, \quad \alpha^{22} = c_4.\tag{В.15}$$

З формул (3.14), врахувавши (В.15), можна переконатися, що при

$$\begin{aligned}g^1 &= u^1(\lambda_3(u^1)^n + \lambda_5), \quad g^2 = u^2(\lambda_3(u^1)^n + \lambda_7), \\ \lambda_3 &\neq 0, \lambda_5 \neq 0, n \neq 0\end{aligned}\tag{В.16}$$

МАІ системи (3.134) складається з операторів

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{(\lambda_7 - \lambda_5)x_0} u^1 \partial_{u^2}, Q_2 = u^2 \partial_{u^2} \rangle.\tag{В.17}$$

Функції g^a вигляду (В.16) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.17) містяться у пункті 7 таблиці 4 при $\lambda_8 = 0$.

б) якщо $\lambda_3 \neq 0, \lambda_5 = 0$, з рівнянь (В.13) отримуємо

$$\alpha^1 = -\frac{2}{n}c_1, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{\lambda_7 x_0}, \quad \alpha^{22} = 2\lambda_7 c_1 x_0 + c_4.\tag{В.18}$$

Формули (3.14) разом з (В.18) при

$$\begin{aligned}g^1 &= \lambda_3(u^1)^{n+1}, \quad g^2 = u^2(\lambda_3(u^1)^n + \lambda_7), \\ \lambda_3 &\neq 0, n \neq 0\end{aligned}\tag{В.19}$$

приводять до наступної МАІ системи (3.134)

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \partial_1, D &= n(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2u^1 \partial_{u^1} + 2n\lambda_7 x_0 u^2 \partial_{u^2}, \\ Q_1 &= e^{\lambda_7 x_0} u^1 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = u^2 \partial_{u^2} \rangle.\end{aligned}\tag{В.20}$$

Функції g^a вигляду (В.19) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.20) відповідають пункту 24 таблиці 4 при $\lambda_8 = 0$.

с) при $\lambda_3 = 0$, з рівнянь (В.13) одержимо

$$\alpha^1 = 2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{(\lambda_7 - \lambda_5)x_0}, \quad \alpha^{22} = 2\lambda_7 c_1 x_0 + c_4. \quad (\text{В.21})$$

З формул (3.14), врахувавши рівності (В.21), при

$$g^1 = \lambda_5 u^1, \quad g^2 = \lambda_7 u^2 \quad (\text{В.22})$$

знаходимо наступну МАІ системи (3.134)

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2x_0(\lambda_5 Q_1 + \lambda_7 Q_2), \\ Q_1 = u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_3 = e^{(\lambda_7 - \lambda_5)x_0} u^1 \partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{В.23})$$

Функції g^a вигляду (В.22) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.23) відповідають пункту 32 таблиці 4.

1.3. Якщо $m = 1$, то з системи (В.9) при $\alpha^{21} \neq 0$ отримуємо рівняння

$$\dot{\alpha}^{21} = 0, \quad \lambda_5 = \lambda_7 = 0, \\ \lambda_5(\alpha^{22} + 2c_1) = \lambda_7(\alpha^{22} + 2c_1) = 0, \\ \lambda_3(n\alpha^1 + \alpha^{22} + 2c_1) = 0, \quad (\text{В.24}) \\ (u^1)^{n-1} \lambda_4(n\alpha^1 + \alpha^{22} + 2c_1) + \lambda_6(\alpha^1 + \alpha^{22} + 2c_1) = 0, \\ \dot{\alpha}^1 = \lambda_3 \alpha^{21} (u^1)^{n+1}, \quad \dot{\alpha}^{22} = u^1 \alpha^{21} [(u^1)^n (2\lambda_4 - \lambda_3) + 2\lambda_6 u^1].$$

Аналіз рівнянь (В.24) приводить до двох розгалужень: а) $n \neq -1$,

б) $n = -1$.

а) якщо $n \neq -1$, то приходимо до зображень функцій g^a у вигляді $g^1 = g^2 = 0$, при яких розширення основної алгебри інваріантності (В.4) розглянуті вище.

б) $n = -1$. В такому випадку з системи (В.24) отримуємо

$$\alpha^{21} = c_3, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0, \\ \lambda_3(-\alpha^1 + \alpha^{22} + 2c_1) = 0, \quad \lambda_4(-\alpha^1 + \alpha^{22} + 2c_1) = 0, \quad (\text{В.25}) \\ \dot{\alpha}^1 = \lambda_3 \alpha^{21}, \quad \dot{\alpha}^{22} = \alpha^{21} (2\lambda_4 - \lambda_3).$$

Якщо припустити, що в рівняннях (В.25) $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, то знову приходимо до зображень функцій g^a у вигляді $g^1 = g^2 = 0$, при яких розширення основної алгебри інваріантності (В.4) розглянуті вище.

Тому в рівняннях (В.25) вважаємо, що $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$. Тоді із (В.25) знаходимо

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \lambda_3, \quad \alpha^{21} = c_3, \\ \alpha^1 &= \lambda_3 c_3 x_0 + c_2, \quad \alpha^{22} = \lambda_3 c_3 x_0 + c_2 - 2c_1. \end{aligned} \quad (\text{В.26})$$

З формул (3.14), (В.26), при

$$g^1 = \lambda_3 u^2, \quad g^2 = \lambda_3 \frac{(u^2)^2}{u^1} \quad (\text{В.27})$$

приходимо до наступної МАІ системи (3.134), (3.30)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - 2u^2 \partial_{u^2}, \\ Q_1 = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = \lambda_3 x_0 Q_1 + u^1 \partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{В.28})$$

Функції g^a вигляду (В.27) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.28) відповідають пункту 27 таблиці 4 при $\lambda_8 = 0$.

1.4. $m = -1$. Розщепивши рівняння (В.9) по степенях u^1, u^2 , при умові $\alpha^{21} \neq 0$, отримуємо

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^1 &= \dot{\alpha}^{22} = 0, \\ \lambda_3 &= \lambda_5 = 0, \\ \lambda_5(\alpha^{22} - 2c_1) &= \lambda_7(\alpha^{22} - 2c_1) = \lambda_3(-\alpha^{22} + n\alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ (u^1)^n \lambda_4(-\alpha^{22} + n\alpha^1 + 2c_1) &+ u^1 \lambda_6(-\alpha^{22} + \alpha^1 + 2c_1) = \dot{\alpha}^{21} u^1. \end{aligned} \quad (\text{В.29})$$

З останнього рівняння (В.29) випливають розгалуження: **1.4.1. $n \neq 1$;**

1.4.2. $n = 1$.

1.4.1. $n \neq 1$. Тоді рівняння (В.29) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^1 &= \dot{\alpha}^{22} = 0, \\ \lambda_7(-\alpha^{22} + 2c_1) &= \lambda_4(-\alpha^{22} + n\alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_6(-\alpha^{22} + \alpha^1 + 2c_1) &= \dot{\alpha}^{21}. \end{aligned} \quad (\text{В.30})$$

Проаналізувавши розв'язки системи (В.30), та враховуючи особливості виглядів φ^a , приходимо до висновку, що для даного випадку, суттєвими є два розгалуження: **а) $\lambda_7 \neq 0, \lambda_4 \neq 0$; б) $\lambda_7 \neq 0, \lambda_4 = 0$.**

а) $\lambda_7 \neq 0, \lambda_4 \neq 0$. В цьому випадку, розв'язавши (В.30), отримаємо

$$\alpha^1 = 0, \quad \alpha^{22} = 2c_1, \quad \alpha^{21} = c_2. \quad (\text{В.31})$$

З формул (3.14), (B.31) при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = \lambda_4(u^1)^n + \lambda_6 u^1 + \lambda_7 \quad (\text{B.32})$$

приходимо до наступної МАІ системи (3.134), (3.30)

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2u^2\partial_{u^2}, Q = u^1\partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{B.33})$$

Функції g^a вигляду (B.32) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (B.33) відповідають пункту 12 таблиці 4.

б) $\lambda_7 \neq 0, \lambda_4 = 0$. В цьому випадку отримаємо наступний розв'язок рівнянь (B.30)

$$\alpha^1 = c_2, \quad \alpha^{22} = 2c_1, \quad \alpha^{21} = \lambda_6 c_2 x_0 + c_3. \quad (\text{B.34})$$

З формул (3.14), (B.31) при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = \lambda_6 u^1 + \lambda_7 \quad (\text{B.35})$$

приходимо до МАІ системи (3.134), (3.30), яка задається операторами

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2u^2\partial_{u^2}, Q_1 = u^1\partial_{u^2}, \\ Q_2 = u^1\partial_{u^1} + \lambda_6 x_0 Q_1 \rangle. \quad (\text{B.36})$$

Функції g^a вигляду (B.35) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (B.36) доводять пункт 28 таблиці 4.

1.4.2. $n = 1$. Тоді рівняння (B.29) запишуться у вигляді

$$\dot{\alpha}^1 = \dot{\alpha}^{22} = 0, \\ \lambda_7(-\alpha^{22} + 2c_1) = 0, \quad \tilde{\lambda}_4(-\alpha^{22} + \alpha^1 + 2c_1) = \dot{\alpha}^{21}, \quad (\text{B.37})$$

де $\tilde{\lambda}_4 = \lambda_4 + \lambda_6$. При розв'язанні системи (B.37), суттєвими є два розгалуження: **а)** $\lambda_7 \neq 0$; **б)** $\lambda_7 = 0$.

а) $\lambda_7 \neq 0$. В цьому випадку, формули B.8 для функцій g^a набувають вигляду (B.35). Розв'язавши (B.37), неважко переконатись, що МАІ системи (3.134), (3.30) матиме вигляд (B.36).

б) $\lambda_7 = 0$. В цьому випадку розв'язком (B.37) буде

$$\alpha^1 = c_2, \quad \alpha^{22} = c_4, \quad \alpha^{21} = \lambda_4(2c_1 + c_2 - c_4)x_0 + c_3. \quad (\text{B.38})$$

З формул (3.14), (B.38) при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = \lambda_4 u^1 \quad (\text{B.39})$$

приходимо до МАІ системи (3.134), (3.30), яка задається операторами

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\lambda_4 x_0 u^1 \partial_{u^2}, \\ Q_1 = u^1 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = u^1 \partial_{u^1} + \lambda_4 x_0 Q_1, \quad Q_3 = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Функції g^a вигляду (B.39) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (B.40) містяться у пункті 33 таблиці 4.

2. Нехай функції φ^a задаються формулами (B.6). Підставивши (B.6) у (B.2), та розщепивши по u^1, u^2 , при $\alpha^{21} \neq 0$ одержуємо

$$\begin{aligned} m\lambda_3 = 0, \quad (m+1)\lambda_4 - \lambda_3 = 0, \\ m\alpha^{22} + 2c_1 = 0, \quad (u^2)^m \lambda_4 \alpha^1 = \dot{\alpha}^{22}, \\ (u^2)^m ((m+1)\lambda_6 - \lambda_5) \alpha^{21} = \dot{\alpha}^{21}, \\ (u^2)^m \lambda_3 \alpha^1 + (u^2)^{m-1} m \lambda_5 \alpha^{21} = \dot{\alpha}^1. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Враховавши обмеження $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, з двох перших рівнянь (B.41) маємо наступні розгалуження: **2.1.** $m = 0$; **2.2.** $m = -1$.

2.1. Якщо $m = 0$, то, враховуючи, що $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, отримуємо $\lambda_4 = \lambda_3$. Розв'язавши в цьому випадку рівняння (B.41), одержуємо

$$c_1 = 0, \quad \alpha^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_5) x_0}, \quad \alpha^{22} = c_2 e^{\lambda_3 x_0} + c_4. \quad (\text{B.42})$$

Отже, при

$$g^1 = u^1 (\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5), \quad g^2 = u^2 (\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_6), \quad (\text{B.43})$$

де $\lambda_3 \neq 0$, підстановка (B.42) у формули (3.14) приводить до наступної МАІ системи (3.134), (3.30)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = e^{\lambda_3 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}), \\ Q_3 = e^{(\lambda_6 - \lambda_5) x_0} u^1 \partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Функції g^a вигляду (B.43) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (B.44) відповідають пункту 29 таблиці 4 при $\lambda_8 = 0$.

2.2. Якщо $m = -1$, то $\lambda_3 = 0$. Розв'язавши в цьому випадку рівняння (В.41), одержуємо

$$\lambda_5 = 0, \quad \alpha^1 = 0, \quad \alpha^{21} = c_3, \quad \alpha^{22} = 2c_1. \quad (\text{В.45})$$

Отже, при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = \lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6 \quad (\text{В.46})$$

підставивши (В.45) у формули (3.14), приходимо до наступної МАІ системи (3.134), (3.30)

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2u^2\partial_{u^2}, Q = u^1\partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{В.47})$$

Функції g^a вигляду (В.46) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.47) відповідають пункту 23 таблиці 4.

3. Нехай функції φ^a задаються формулами (В.7). Підставивши (В.7) у (В.2), та розщепивши по u^1, u^2 , одержуємо

$$\begin{aligned} m\lambda_3\alpha^{21} &= 0, \quad (m+1)\lambda_4\alpha^{21} = 0, \quad ((m+1)\lambda_6 - \lambda_3)\alpha^{21} = 0, \\ \lambda_3(\alpha^1 + m\alpha^{22} + 2c_1) &= 0, \quad \lambda_4(\alpha^1 + m\alpha^{22} + 2c_1) = 0, \\ \dot{\alpha}^1 &= \dot{\alpha}^{22} = 0, \\ (u^2)^{m+1}(\lambda_4 + \lambda_6)\alpha^1 + \lambda_6(m\alpha^{22} + 2c_1) &= \dot{\alpha}^{21}. \end{aligned} \quad (\text{В.48})$$

Оскільки $\lambda_4 \neq 0$ і $\alpha^{21} \neq 0$, то з (В.48) одержуємо $m = -1$ і $\lambda_3 = 0$. Розв'язавши в цьому випадку рівняння (В.48), знаходимо

$$\alpha^1 = c_2, \quad \alpha^{21} = \lambda_4 c_2 x_0 + c_3, \quad \alpha^{22} = 2c_1 + c_2. \quad (\text{В.49})$$

Отже, при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = u^1(\lambda_4 \ln u^1 + \lambda_6), \quad (\text{В.50})$$

де $\lambda_4 \neq 0$, підставивши (В.49) у формули (3.14) приходимо до наступної МАІ системи (3.134), (3.30)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2u^2\partial_{u^2}, Q_1 = u^1\partial_{u^2}, \\ Q_2 = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} + \lambda_4 x_0 Q_1 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{В.51})$$

Функції g^a вигляду (В.50) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.51) відповідають пункту 31 таблиці 4.

С. Далі дослідимо можливість розширення основної групи симетрії системи (3.134) при зображенні функцій g^a у вигляді (3.130). Неважко переконатися, виконавши, наприклад, заміну

$$\varphi^1(\omega) = \varphi^1(\omega), \quad \varphi^2(\omega) = \frac{1}{\omega} \tilde{\varphi}^2(\omega), \quad (\text{B.52})$$

що зображення функцій g^a вигляду (3.130) еквівалентні наступним

$$g^1 = (u^1)^{m+1} \varphi^1(\omega), \quad g^2 = (u^1)^{m+k} \varphi^2(\omega), \quad (\text{B.53})$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$. Підставивши (B.53) у рівняння (3.140), одержуємо

$$\begin{aligned} & (u^1)^m [(\alpha^{22}(x_0) - k\alpha^1(x_0))\omega\dot{\varphi}^1 + (m\alpha^1(x_0) + 2c_1)\varphi^1] + \\ & + \alpha^{21}(x_0)(u^1)^{m-k+1}\dot{\varphi}^1 = \dot{\alpha}^1(x_0), \\ & (u^1)^m [(\alpha^{22}(x_0) - k\alpha^1(x_0))\omega\dot{\varphi}^2 + (m\alpha^1(x_0) + 2c_1 - \\ & - (\alpha^{22}(x_0) - k\alpha^1(x_0)))\varphi^2] + \alpha^{21}(x_0)(u^1)^{m-k+1}(\dot{\varphi}^2 - \varphi^1) = \\ & = \dot{\alpha}^{21}(x_0)(u^1)^{1-k} + \dot{\alpha}^{22}(x_0)\omega. \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

Одразу встановимо основну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.130). Для цього в рівняннях (B.54) вважаємо функції φ^a довільними. Тоді з рівнянь (B.54) випливає, що

$$\alpha^{21} = 0, \quad m\alpha^1 + 2c_1 = 0, \quad \alpha^{22} = k\alpha^1. \quad (\text{B.55})$$

Із (3.14), (B.34) знаходимо координати оператора (3.2).

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2mc_2x_0 + d_0, \quad \xi^1 = mc_2x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= -2c_2u^1, \quad \eta^2 = -2kc_2u^2. \end{aligned} \quad (\text{B.56})$$

Очевидно, що (3.14), (B.56) породжує алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2(u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}) \rangle. \quad (\text{B.57})$$

Одержаний результат відповідає пункту 3 таблиці 3.

Далі дослідимо, які можливі розширення основної алгебри інваріантності (B.36) системи (3.134), (3.130).

Якщо в системі (B.54) $\alpha^{21} = 0$, то вона з точністю до перетворень (B.52) співпадає з системою (A.78), яка досліджена в теоремах 3.6, 3.7, згідно яких функції g^a задаються формулами (3.130), (3.129), а відповідні максимальні

алгебри інваріантності містяться у таблиці 3. Тому надалі будемо вважати $\alpha^{21} \neq 0$.

Аналіз рівнянь (В.54) дозволяє стверджувати, що найбільш широкий клас функцій φ^a , які задовольняють рівняння (В.54), можна подати у вигляді наступних зображень

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \lambda_3 \omega + \lambda_5, \\ \varphi^2 &= \lambda_4 \omega^2 + \lambda_6 \omega + \lambda_8, \\ \omega &= \frac{u^2}{(u^1)^k};\end{aligned}\tag{В.58}$$

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \lambda_3 e^\omega + \lambda_5, \\ \varphi^2 &= (\lambda_4 \omega + \lambda_6) e^\omega + \lambda_8 \omega + \lambda_{10}, \\ \omega &= \frac{u^2}{u^1}, \quad |\lambda_3| + |\lambda_4| + |\lambda_6| \neq 0.\end{aligned}\tag{В.59}$$

Зауваження В.2. Обмеження на сталі у формулах (В.59) накладені з метою уникнення їх перетину з формулами (В.58).

1. При зображеннях φ^a , заданих формулами (В.58), з рівнянь (В.54) після розщеплення по ω отримуємо

$$\begin{aligned}(\alpha^{22} - k\alpha^1 + m\alpha^1 + 2c_1)\lambda_3 &= 0, \\ (\alpha^{22} - k\alpha^1 + m\alpha^1 + 2c_1)\lambda_4 &= 0, \\ (u^1)^m \lambda_5 (m\alpha^1 + 2c_1) + (u^1)^{m-k+1} \lambda_3 \alpha^{21} &= \dot{\alpha}^1, \\ (u^1)^m \lambda_6 (m\alpha^1 + 2c_1) + (u^1)^{m-k+1} (2\lambda_4 - \lambda_3) \alpha^{21} &= \dot{\alpha}^{22}, \\ (u^1)^m \lambda_8 (m\alpha^1 + 2c_1 - (\alpha^{22} - k\alpha^1)) + \\ + (u^1)^{m-k+1} (\lambda_6 - \lambda_5) \alpha^{21} &= (u^1)^{1-k} \dot{\alpha}^{21}.\end{aligned}\tag{В.60}$$

Проаналізувавши рівняння (В.60), одержуємо наступні прозгалуження:

- 1.1) $k \neq 1, m \neq 0, \pm(k-1)$;
- 1.2) $k \neq 1, m = 0$;
- 1.3) $k \neq 1, m = k-1$;
- 1.4) $k \neq 1, m = -(k-1)$;
- 1.5) $k = 1, m \neq 0$;
- 1.6) $k = 1, m = 0$.

Розглянемо кожен випадок окремо.

1.1) $k \neq 1$, $m \neq 0, \pm(k-1)$. Розщепивши рівняння (В.60) по степенях u^1 , одержимо

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^1 &= \dot{\alpha}^{21} = \dot{\alpha}^{22} = 0, \\ \lambda_3 \alpha^{21} &= \lambda_4 \alpha^{21} = (\lambda_6 - \lambda_5) \alpha^{21} = 0, \\ \lambda_5 (m \alpha^1 + 2c_1) &= \lambda_6 (m \alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_3 (\alpha^{22} - k \alpha^1 + m \alpha^1 + 2c_1) &= 0, \\ \lambda_4 (\alpha^{22} - k \alpha^1 + m \alpha^1 + 2c_1) &= 0, \\ \lambda_8 (\alpha^{22} - k \alpha^1 - m \alpha^1 - 2c_1) &= 0. \end{aligned} \tag{В.61}$$

Оскільки $\alpha^{21} \neq 0$, то з рівнянь (В.61) отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= c_2, \quad \alpha^{21} = c_3, \quad \alpha^{22} = c_4, \\ \lambda_3 &= \lambda_4 = 0, \quad \lambda_6 = \lambda_5, \\ \lambda_5 (m c_2 + 2c_1) &= 0, \\ \lambda_8 (c_4 - k c_2 - (m c_2 + 2c_1)) &= 0. \end{aligned} \tag{В.62}$$

З рівнянь (В.62) випливають розгалуження: **а)** $\lambda_5 \neq 0$, $\lambda_8 \neq 0$;

б) $\lambda_5 \neq 0$, $\lambda_8 = 0$; **в)** $\lambda_5 = 0$, $\lambda_8 \neq 0$; **г)** $\lambda_5 = \lambda_8 = 0$.

а) Якщо $\lambda_5 \neq 0$, $\lambda_8 \neq 0$, то з рівнянь (В.62) отримуємо

$$c_1 = m \tilde{c}_2, \quad \alpha^1 = -2\tilde{c}_2, \quad \alpha^{21} = c_3, \quad \alpha^{22} = -2k\tilde{c}_2, \tag{В.63}$$

де $\tilde{c}_2 = -\frac{1}{2}c_2$. Тоді формули (3.14), (В.63) при

$$g^1 = \lambda_5 (u^1)^{m+1}, \quad g^2 = (u^1)^m (\lambda_5 u^2 + \lambda_8 (u^1)^k), \tag{В.64}$$

де $k \neq 1$, $m \neq 0, \pm(k-1)$, $\lambda_5 \neq 0$, $\lambda_8 \neq 0$, приводять до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2(u^1 \partial_{u^1} + k u^2 \partial_{u^2}), \\ Q = u^1 \partial_{u^2} \rangle \end{aligned} \tag{В.65}$$

Одержаний результат міститься у пункті 5 таблиці 4 при $\lambda_8 = 0$.

б) Якщо $\lambda_5 \neq 0$, $\lambda_8 = 0$, то з рівнянь (В.62) отримуємо

$$c_1 = m \tilde{c}_2, \quad \alpha^1 = -2\tilde{c}_2, \quad \alpha^{21} = c_3, \quad \alpha^{22} = c_4, \tag{В.66}$$

де $\tilde{c}_2 = -\frac{1}{2}c_2$. Тоді при

$$g^1 = \lambda_5 (u^1)^{m+1}, \quad g^2 = \lambda_5 u^2 (u^1)^m, \tag{В.67}$$

де $k \neq 1$, $m \neq 0, \pm(k-1)$, $\lambda_5 \neq 0$, МАІ системи (3.134) є алгебра

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2u^1\partial_{u^1}, \\ Q_1 = u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = u^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

Одержаний результат міститься у пункті 24 таблиці 4 при $\lambda_8 = 0$.

с) $\lambda_5 = 0$, $\lambda_8 \neq 0$. З рівнянь (B.62) отримуємо

$$\alpha^1 = c_2, \quad \alpha^{21} = c_3, \quad \alpha^{22} = 2c_1 + (m+k)c_2. \quad (\text{B.69})$$

Отже, при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = \lambda_8(u^1)^{m+k}, \quad (\text{B.70})$$

де $k \neq 1$, $m \neq 0, \pm(k-1)$, $\lambda_8 \neq 0$, система (3.134) інваріантна відносно алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2u^2\partial_{u^2}, \\ Q_1 = u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = u^1\partial_{u^1} + (m+k)u^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

Одержаний результат міститься у пункті 26 таблиці 4 при $\lambda_5 = \lambda_8 = 0$, $n = m + k - 1$.

д) $\lambda_5 = \lambda_8 = 0$, тоді функції g^a набувають вигляду (B.11), при якому максимальна алгебра інваріантності системи (3.134) наведена у (B.12) (див. розділ В доведення даної теореми).

1.2) $k \neq 1$, $m = 0$. Розщепивши рівняння (B.60) по степенях u^1 , маємо

$$\begin{aligned} \lambda_3\alpha^{21} = \lambda_4\alpha^{21} = 0, \\ \lambda_5(m\alpha^1 + 2c_1) = \lambda_6(m\alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_3(\alpha^{22} - k\alpha^1 + 2c_1) = 0, \quad \lambda_4(\alpha^{22} - k\alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_8(\alpha^{22} - k\alpha^1 - 2c_1) = 0, \\ \dot{\alpha}^1 = 2\lambda_5c_1, \quad \dot{\alpha}^{22} = 2\lambda_6c_1, \quad \dot{\alpha}^{21} = (\lambda_6 - \lambda_5)\alpha^{21}. \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

Оскільки $\alpha^{21} \neq 0$, то з рівнянь (B.72) отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \\ \alpha^1 = 2\lambda_5c_1x_0 + c_2, \quad \alpha^{21} = c_3e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0}, \quad \alpha^{22} = 2\lambda_6c_1x_0 + c_4, \\ \lambda_8(2(\lambda_6 - k\lambda_5)c_1x_0 - 2c_1 - kc_2 + c_4) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

З рівнянь (В.73) випливають розгалуження: **а)** $\lambda_8 \neq 0, \lambda_6 \neq k\lambda_5$;
б) $\lambda_8 \neq 0, \lambda_6 = k\lambda_5$; **в)** $\lambda_8 = 0$.

а) $\lambda_8 \neq 0, \lambda_6 \neq k\lambda_5$, тоді з рівнянь (В.73) отримуємо

$$c_1 = 0, \quad \alpha^1 = c_2, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0}, \quad \alpha^{22} = kc_2. \quad (\text{В.74})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5 u^1, \quad g^2 = \lambda_8 (u^1)^k + \lambda_6 u^2, \quad (\text{В.75})$$

де $k \neq 1, \lambda_8 \neq 0, \lambda_6 \neq k\lambda_5$, приходимо до алгебри

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0} u^1 \partial_{u^2}, Q_2 = u^1 \partial_{u^1} + k u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{В.76})$$

Одержаний результат відповідає пункту 10 таблиці 4.

б) $\lambda_6 = k\lambda_5$, тоді з рівнянь (В.73) отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= 2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{\lambda_5(k-1)x_0}, \\ \alpha^{22} &= 2k\lambda_5 c_1 x_0 + 2c_1 + kc_2. \end{aligned} \quad (\text{В.77})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5 u^1, \quad g^2 = \lambda_8 (u^1)^k + k\lambda_5 u^2, \quad (\text{В.78})$$

де $k \neq 1, \lambda_8 \neq 0$, підстановка (В.77) у формули (3.14), приводить до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, Q_1 &= e^{\lambda_5(k-1)x_0} u^1 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = u^1 \partial_{u^1} + k u^2 \partial_{u^2}, \\ D &= 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\lambda_5 x_0 (u^1 \partial_{u^1} + k u^2 \partial_{u^2}) + 2u^2 \partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{В.79})$$

Одержаний результат відповідає пункту 25 таблиці 4 при $\lambda_8 = 0, n = k - 1$.

в) $\lambda_8 = 0$, тоді функції g^a набувають вигляду

$$g^1 = \lambda_5 u^1, \quad g^2 = \lambda_6 u^2,$$

при якому симетрійні властивості системи (3.134) досліджені в розділі В доведення даної теореми (див. формули (В.22), (В.23)).

1.3) $k \neq 1, m = k - 1$. Розщепивши рівняння (В.60) по степенях u^1 , одержимо

$$\begin{aligned} (\lambda_6 - \lambda_5)\alpha^{21} &= 0, \quad \dot{\alpha}^{21} = 0, \\ \lambda_5((k-1)\alpha^1 + 2c_1) &= \lambda_6((k-1)\alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_3(\alpha^{22} - \alpha^1 + 2c_1) &= 0, \quad \lambda_4(\alpha^{22} - \alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_8(\alpha^{22} - (2k-1)\alpha^1 - 2c_1) &= 0, \\ \dot{\alpha}^1 &= \lambda_3 \alpha^{21}, \quad \dot{\alpha}^{22} = (2\lambda_4 - \lambda_3)\alpha^{21}. \end{aligned} \quad (\text{В.80})$$

Оскільки $\alpha^{21} \neq 0$, то з рівнянь (В.80) отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_6 &= \lambda_5, \quad \alpha^{21} = c_3, \\ \lambda_5((k-1)\alpha^1 + 2c_1) &= \lambda_3(\alpha^{22} - \alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_4(\alpha^{22} - \alpha^1 + 2c_1) &= \lambda_8(\alpha^{22} - (2k-1)\alpha^1 - 2c_1) = 0, \\ \dot{\alpha}^1 &= \lambda_3\alpha^{21}, \quad \dot{\alpha}^{22} = (2\lambda_4 - \lambda_3)\alpha^{21}. \end{aligned} \quad (\text{В.81})$$

Проаналізувавши рівняння (В.81), можна виділити наступні розгалуження:

- a)** $\lambda_5 \neq 0, |\lambda_4| + |\lambda_8| \neq 0$; **b)** $\lambda_5 \neq 0, \lambda_4 = \lambda_8 = 0$;
c) $\lambda_5 = 0, |\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$; **d)** $\lambda_5 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Розглянемо кожне з них окремо.

a) $\lambda_5 \neq 0, |\lambda_4| + |\lambda_8| \neq 0$, тоді з рівнянь (В.81) отримуємо

$$\lambda_3 = 0, \quad \alpha^1 = -\frac{2}{k-1}c_1, \quad \alpha^{21} = c_3, \quad \alpha^{22} = -\frac{2k}{k-1}c_1. \quad (\text{В.82})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5(u^1)^k, \quad g^2 = (u^1)^{2k-1}(\lambda_5 \frac{u^2}{(u^1)^k} + \lambda_8), \quad (\text{В.83})$$

де $k \neq 1, \lambda_5 \neq 0, |\lambda_4| + |\lambda_8| \neq 0$, підставивши (В.82) у формули (3.14), приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = (k-1)(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2(u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}), \\ Q = u^1\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{В.84})$$

Одержаний результат відповідає пункту 9 таблиці 4.

b) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_4 = \lambda_8 = 0$, тоді отримуємо

$$g^1 = \lambda_5(u^1)^k, \quad g^2 = \lambda_5 u^2 (u^1)^{k-1}, \quad (\text{В.85})$$

де $k \neq 1, \lambda_5 \neq 0$, що еквівалентно формулам (В.67).

c) $\lambda_5 = 0, |\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, тоді з рівнянь (В.81) отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \lambda_3, \quad \alpha^1 = \lambda_3 c_3 x_0 + c_2, \\ \alpha^{21} &= c_3, \quad \alpha^{22} = \lambda_3 c_3 x_0 + c_2 - 2c_1. \end{aligned} \quad (\text{В.86})$$

Неважко переконатися, що в цьому випадку приходимо до зображень g^a вигляду (В.27), при яких максимальна алгебра інваріантності системи (3.134) відображена у (В.28) (див. розділ В доведення теореми).

d) $\lambda_5 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. В цьому випадку

$$g^1 = 0, \quad g^2 = \lambda_8(u^1)^{2k-1}, \quad (\text{B.87})$$

де $k \neq 1$, що еквівалентно формулам (B.70).

1.4) $k \neq 1$, $m = 1 - k$. Розщепивши рівняння (B.60) по степенях u^1 , одержимо

$$\begin{aligned} \lambda_3 \alpha^{21} &= \lambda_4 \alpha^{21} = (\lambda_6 - \lambda_5) \alpha^{21} = 0, \quad \dot{\alpha}^1 = \dot{\alpha}^{22} = 0, \\ \lambda_5((1-k)\alpha^1 + 2c_1) &= \lambda_6((1-k)\alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_3(\alpha^{22} + (1-2k)\alpha^1 + 2c_1) &= 0, \\ \lambda_4(\alpha^{22} + (1-2k)\alpha^1 + 2c_1) &= 0, \\ \dot{\alpha}^{21} &= \lambda_8(\alpha^1 - \alpha^{22} + 2c_1). \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

Оскільки $\alpha^{21} \neq 0$, то з рівнянь (B.88) отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \lambda_4 = 0, \quad \lambda_6 = \lambda_5, \quad \lambda_5((k-1)c_2 + 2c_1) = 0, \\ \alpha^1 &= c_2, \quad \alpha^{22} = c_4, \\ \dot{\alpha}^{21} &= \lambda_8(c_2 - c_4 + 2c_1) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

З рівнянь (B.89), випливають наступні розгалуження: а) $\lambda_5 \neq 0$; б) $\lambda_5 = 0$.

а) $\lambda_5 \neq 0$, тоді з рівнянь (B.89) отримуємо

$$\alpha^1 = \frac{2}{k-1}c_1, \quad \alpha^{21} = \lambda_8\left(\frac{2k}{k-1}c_1 - c_4\right)x_0 + c_3, \quad \alpha^{22} = c_4. \quad (\text{B.90})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5(u^1)^{2-k}, \quad g^2 = u^1\left(\lambda_5\frac{u^2}{(u^1)^k} + \lambda_8\right), \quad (\text{B.91})$$

де $k \neq 1$, $\lambda_5 \neq 0$, приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 &= u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = \lambda_8 x_0 Q_1 - u^2\partial_{u^2}, \\ D &= (k-1)(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + 2(u^1\partial_{u^1} + 2k\lambda_8 x_0 u^1\partial_{u^2}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.92})$$

Одержаний результат відповідає пункту 24 таблиці 4 при $m = 1 - k$.

б) $\lambda_5 = 0$. В цьому випадку функції g^a мають вигляд

$$g^1 = 0, \quad g^2 = \lambda_8 u^1,$$

що еквівалентно формулам (B.39).

1.5) $k = 1, m \neq 0$. Розщепивши рівняння (В.60) по степенях u^1 , після спрощення одержимо

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= c_2, & \alpha^{21} &= c_3, & \alpha^{22} &= c_4, \\ \lambda_3(c_4 + (m-1)c_2 + 2c_1) &= \lambda_4(c_4 + (m-1)c_2 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_5(mc_2 + 2c_1) + \lambda_3c_3 &= \lambda_6(mc_2 + 2c_1) + (2\lambda_4 - \lambda_3)c_3 = 0, \\ \lambda_8((m+1)c_2 + 2c_1 - c_4) &+ (\lambda_6 - \lambda_5)c_3 = 0.\end{aligned}\tag{В.93}$$

З рівнянь (В.93) випливають два розгалуження:

а) $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$; б) $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Розглянемо кожен з випадків окремо.

а) $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$. Тоді рівняння (В.93) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= c_2, & \alpha^{21} &= c_3, & \alpha^{22} &= c_4, & c_4 &= (1-m)c_2 - 2c_1, \\ \lambda_5(mc_2 + 2c_1) + \lambda_3c_3 &= \lambda_6(mc_2 + 2c_1) + (2\lambda_4 - \lambda_3)c_3 = 0, \\ 2\lambda_8(mc_2 + 2c_1) &+ (\lambda_6 - \lambda_5)c_3 = 0.\end{aligned}\tag{В.94}$$

Якщо ввести позначення $\frac{mc_2+2c_1}{c_3} = X$, то одержимо рівняння

$$\begin{aligned}\lambda_5 X &= -\lambda_3, \\ \lambda_6 X &= \lambda_3 - 2\lambda_4, \\ 2\lambda_8 X &= \lambda_5 - \lambda_6.\end{aligned}\tag{В.95}$$

Розглянемо два можливі при розв'язанні системи (В.95) випадки.

Якщо $\lambda_3 \neq 0$, то неважко переконатися, що необхідною умовою сумісності системи (В.95) є рівності

$$\lambda_6 = \lambda_5 \frac{2\lambda_4 - \lambda_3}{\lambda_3}, \quad \lambda_8 = \lambda_5^2 \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{\lambda_3^2}.$$

В цьому випадку

$$\varphi^1 = \lambda_3(\omega + \frac{\lambda_5}{\lambda_3}), \quad \varphi^2 = \lambda_4(\omega + \frac{\lambda_5}{\lambda_3})^2 - \lambda_5(\omega + \frac{\lambda_5}{\lambda_3}).$$

З точністю до перетворень еквівалентності (див. зауваження 3.13) можна вважати, що $\lambda_5 = 0$. А отже і $\lambda_6 = \lambda_8 = 0$.

Тоді із системи (В.93) випливає, що $\lambda_3c_3 = 0$, що неможливо. Тому надалі будемо вважати, що $\lambda_3 = 0$. Тоді з умови $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$ очевидно, що $\lambda_4 \neq 0$.

Враховуючи наведені вище міркування, із рівнянь (В.94) випливає, що $\lambda_5 = 0$. Тоді одержуємо зображення функцій g^a у вигляді

$$g^1 = 0, \quad g^2 = (u^1)^{m+1} \lambda_4 \left(\frac{u^2}{u^1} + \frac{\lambda_6}{2\lambda_4} \right)^2, \quad (\text{В.96})$$

де $m \neq 0$, $\lambda_4 \neq 0$.

Зауваження В.3. Враховуючи зауваження 3.13, можна стверджувати, що, якщо у перетвореннях (3.135) покласти $\theta_5 = -\frac{\lambda_6}{2\lambda_4}$, $\theta_0 = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$, то зображення g^a (В.96) еквівалентні наступним зображенням

$$g^1 = 0, \quad g^2 = \lambda_4 u^2 (u^1)^m, \quad (\text{В.97})$$

при яких розширення основної групи симетрії системи (3.134) вже розглянуті у теоремі 3.7 і містяться у таблиці 3.

б) $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$. З рівнянь (В.93) випливає

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= c_2, \quad \alpha^{21} = c_3, \quad \alpha^{22} = c_4, \\ \lambda_5(m c_2 + 2c_1) &= 0, \quad \lambda_6(m c_2 + 2c_1) = 0, \\ \lambda_8((m+1)c_2 + 2c_1 - c_4) + (\lambda_6 - \lambda_5)c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{В.98})$$

З рівнянь (В.98) випливають розгалуження: **б1)** $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, $\lambda_8 \neq 0$;

б2) $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, $\lambda_8 = 0$; **б3)** $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$.

б1) $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, $\lambda_8 \neq 0$. З рівнянь (В.98), враховуючи, що $\alpha^{21} \neq 0$, отримуємо

$$\alpha^1 = -2c_1, \quad \alpha^{21} = c_3, \quad \alpha^{22} = -2c_1 + \frac{\lambda_6 - \lambda_5}{\lambda_8} c_3. \quad (\text{В.99})$$

Тоді формули (3.14), (В.99) при

$$g^1 = \lambda_5 (u^1)^{m+1}, \quad g^2 = (u^1)^m (\lambda_6 u^2 + \lambda_8 u^1), \quad (\text{В.100})$$

де $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, $\lambda_8 \neq 0$, приводять до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2(u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}), \\ Q = \lambda_8 u^1 \partial_{u^2} + (\lambda_6 - \lambda_5) u^2 \partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{В.101})$$

Одержаний результат з точністю до перетворень еквівалентності (3.135) та (3.128) відповідає пункту 6 таблиці 4.

b2) $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0, \lambda_8 = 0$. З рівнянь (В.93) очевидно, що $\lambda_6 = \lambda_5$.

В цьому випадку g^a набувають вигляду (В.67), при якому максимальна алгебра інваріантності системи (3.134) наведена у (В.68) (див. пункт 1.1)).

b3) $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$. В цьому випадку при $\lambda_8 \neq 0$ g^a набувають вигляду (В.70), при якому максимальна алгебра інваріантності системи (3.134) наведена у (В.71) (див. пункт 1.1)), а при $\lambda_8 = 0$ g^a набувають вигляду (В.11), при якому максимальна алгебра інваріантності системи (3.134) наведена у (В.12) (див. розділ В доведення даної теореми).

1.6) $k = 1, m = 0$. Розщепивши рівняння (В.60) по степенях u^1 , після спрощення одержимо

$$\begin{aligned} \lambda_3(\alpha^{22} - \alpha^1 + 2c_1) &= \lambda_4(\alpha^{22} - \alpha^1 + 2c_1) = 0, \\ \dot{\alpha}^1 &= \lambda_3\alpha^{21} + 2\lambda_5c_1, \quad \dot{\alpha}^{22} = (2\lambda_4 - \lambda_3)\alpha^{21} + 2\lambda_6c_1, \\ \dot{\alpha}^{21} &= (\lambda_6 - \lambda_5)\alpha^{21} + \lambda_8(\alpha^1 - \alpha^{22} + 2c_1). \end{aligned} \quad (\text{В.102})$$

З рівнянь (В.102) випливають розгалуження: **a)** $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0, \lambda_6 \neq \lambda_5$;

b) $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0, \lambda_6 = \lambda_5$; **c)** $\lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_6 \neq \lambda_5$; **d)** $\lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_6 = \lambda_5$.

a) Якщо $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0, \lambda_6 \neq \lambda_5$, то з рівнянь (В.102), враховуючи, що $\alpha^{21} \neq 0$, отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_6 - \lambda_5} c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0} + (2\lambda_5 - 4\frac{\lambda_3\lambda_8}{\lambda_6 - \lambda_5})c_1x_0 + c_2, \\ \alpha^{21} &= c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0} - 4\frac{\lambda_8(2\lambda_4 - \lambda_3)}{\lambda_6 - \lambda_5} c_1, \\ \alpha^{22} &= \frac{2\lambda_4 - \lambda_3}{\lambda_6 - \lambda_5} c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0} + (2\lambda_6 - 4\frac{\lambda_8(2\lambda_4 - \lambda_3)}{\lambda_6 - \lambda_5})c_1x_0 + c_2 - 2c_1, \\ (\lambda_4 - \lambda_3)c_3 &= 0, \quad (4\lambda_8(\lambda_4 - \lambda_3) - (\lambda_6 - \lambda_5)^2)c_1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{В.103})$$

З двох останніх рівнянь (В.103) випливають розгалуження:

a1) $\lambda_4 \neq \lambda_3$, **a2)** $\lambda_4 = \lambda_3$.

a1) $\lambda_4 \neq \lambda_3$, тоді із (В.103), знаходимо, що $c_3 = 0$ та

$$\begin{aligned} \lambda_8 &= \frac{(\lambda_6 - \lambda_5)^2}{4(\lambda_4 - \lambda_3)}, \\ \alpha^1 &= (2\lambda_5 - \frac{\lambda_3(\lambda_6 - \lambda_5)}{\lambda_4 - \lambda_3})c_1x_0 + c_2, \quad \alpha^{21} = -\frac{\lambda_6 - \lambda_5}{\lambda_4 - \lambda_3}c_1, \\ \alpha^{22} &= (2\lambda_5 - \frac{\lambda_3(\lambda_6 - \lambda_5)}{\lambda_4 - \lambda_3})c_1x_0 + c_2 - 2c_1. \end{aligned} \quad (\text{В.104})$$

Підстановка (В.104) у формули (3.14) при

$$g^1 = \lambda_3 u^2 + \lambda_5 u^1, \quad g^2 = u^1(\lambda_4(\frac{u^2}{u^1})^2 + \lambda_6 \frac{u^2}{u^1} + \frac{(\lambda_6 - \lambda_5)^2}{4(\lambda_4 - \lambda_3)}), \quad (\text{В.105})$$

де $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0, \lambda_4 \neq \lambda_3, \lambda_6 \neq \lambda_5$, приводить до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = (\lambda_4 - \lambda_3)(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - 2u^2\partial_{u^2}) + \\ + x_0(2\lambda_5(\lambda_4 - \lambda_3) - \lambda_3(\lambda_6 - \lambda_5))Q - (\lambda_6 - \lambda_5)u^1\partial_{u^2}, \\ Q = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.106})$$

Одержаний результат співпадає з пунктом 13 таблиці 4.

a2) $\lambda_4 = \lambda_3$, тоді із (B.103), знаходимо, що $c_1 = 0$ та

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \frac{\lambda_3}{\lambda_6 - \lambda_5} c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0} + c_2, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0}, \\ \alpha^{22} &= \frac{\lambda_3}{\lambda_6 - \lambda_5} c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0} + c_2. \end{aligned} \quad (\text{B.107})$$

Підставивши (B.107) у формули (3.14) при

$$g^1 = \lambda_3 u^2 + \lambda_5 u^1, \quad g^2 = u^1(\lambda_3(\frac{u^2}{u^1})^2 + \lambda_6 \frac{u^2}{u^1} + \lambda_8), \quad (\text{B.108})$$

де $\lambda_3 \neq 0, \lambda_6 \neq \lambda_5$, приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, \\ Q_2 = e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0}(\lambda_3 Q_1 + (\lambda_6 - \lambda_5)u^1\partial_{u^2}) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.109})$$

Одержаний результат з точністю до перетворень еквівалентності (3.135) та (3.128) відповідає пункту 14 таблиці 4.

b) $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0, \lambda_6 = \lambda_5$, тоді із (B.102), знаходимо

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \lambda_3, \\ \alpha^1 &= 2\lambda_3\lambda_8 c_1 x_0^2 + (\lambda_3 c_3 + 2\lambda_5 c_1)x_0 + c_2, \\ \alpha^{21} &= 4\lambda_8 c_1 x_0 + c_3, \\ \alpha^{22} &= 2\lambda_3\lambda_8 c_1 x_0^2 + (\lambda_3 c_3 + 2\lambda_5 c_1)x_0 + c_2 - 2c_1. \end{aligned} \quad (\text{B.110})$$

Підстановка (B.110) у формули (3.14) при

$$g^1 = \lambda_3 u^2 + \lambda_5 u^1, \quad g^2 = u^1(\lambda_3(\frac{u^2}{u^1})^2 + \lambda_5 \frac{u^2}{u^1} + \lambda_8), \quad (\text{B.111})$$

де $\lambda_3 \neq 0$ приводить до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, \quad Q_2 = \lambda_3 x_0 Q_1 + u^1\partial_{u^2}, \\ D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2(\lambda_3\lambda_8 x_0^2 + \lambda_5 x_0)Q_1 + \\ + 4\lambda_8 x_0 u^1\partial_{u^2} - 2u^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.112})$$

Одержаний результат з точністю до перетворень еквівалентності (3.135) та (3.128) відповідає пункту 27 таблиці 4.

с) $\lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_6 \neq \lambda_5$, тоді із (В.102), знаходимо

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= 2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2, & \alpha^{22} &= 2\lambda_6 c_1 x_0 + c_4, \\ \alpha^{21} &= c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0} + 2\lambda_8 c_1 x_0 + \frac{\lambda_8}{\lambda_5 - \lambda_6} (c_2 - c_4).\end{aligned}\quad (\text{В.113})$$

Підставивши (В.113) у формули (3.14), при

$$g^1 = \lambda_5 u^1, \quad g^2 = \lambda_6 u^2 + \lambda_8 u^1, \quad (\text{В.114})$$

де $\lambda_6 \neq \lambda_5$, приходимо до алгебри

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2x_0(\lambda_5 u^1 \partial_{u^1} + \lambda_6 u^2 \partial_{u^2} + \lambda_8 u^1 \partial_{u^2}), \\ Q_1 = e^{(\lambda_6 - \lambda_5)x_0} u^1 \partial_{u^2}, Q_2 = (\lambda_5 - \lambda_6) u^1 \partial_{u^1} + \lambda_8 u^1 \partial_{u^2}, \\ Q_3 = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} \rangle.\end{aligned}\quad (\text{В.115})$$

Одержаний результат з точністю до перетворень еквівалентності (3.135) та (3.128) відповідає пункту 32 таблиці 4.

д) $\lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_6 = \lambda_5$, тоді із (В.102), знаходимо

$$\begin{aligned}\alpha^1 &= 2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2, & \alpha^{22} &= 2\lambda_5 c_1 x_0 + c_4, \\ \alpha^{21} &= \lambda_8 x_0 (2c_1 + c_2 - c_4) + c_3.\end{aligned}\quad (\text{В.116})$$

Підставивши (В.116) у формули (3.14), при

$$g^1 = \lambda_5 u^1, \quad g^2 = \lambda_5 u^2 + \lambda_8 u^1 \quad (\text{В.117})$$

одержуємо алгебру

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2x_0(\lambda_5 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + \lambda_8 u^1 \partial_{u^2}), \\ Q_1 = u^1 \partial_{u^2}, Q_2 = u^1 \partial_{u^1} + \lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2}, Q_3 = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} \rangle.\end{aligned}\quad (\text{В.118})$$

Цей результат з точністю до перетворень еквівалентності (3.135) та (3.128) відповідає пункту 33 таблиці 4.

2. Підставивши зображення φ^a , задані формулами (В.59), у рівняння (В.54), після розщеплення по ω отримуємо

$$\begin{aligned}\lambda_3(\alpha^{22} - \alpha^1) &= \lambda_4(\alpha^{22} - \alpha^1) = 0, \\ \lambda_3(\alpha^{21} + m\alpha^1 + 2c_1) &= 0, \\ \lambda_4(\alpha^{21} + m\alpha^1 + 2c_1) + \lambda_6(\alpha^{22} - \alpha^1) &= 0, \\ \lambda_6(m\alpha^1 + 2c_1 - (\alpha^{22} - \alpha^1)) + (\lambda_4 - \lambda_3 + \lambda_6)\alpha^{21} &= 0, \\ (u^1)^m \lambda_5(m\alpha^1 + 2c_1) &= \dot{\alpha}^1, & (u^1)^m \lambda_8(m\alpha^1 + 2c_1) &= \dot{\alpha}^{22}, \\ (u^1)^m [\lambda_{10}(m\alpha^1 + 2c_1 - (\alpha^{22} - \alpha^1)) + (\lambda_8 - \lambda_5)\alpha^{21}] &= \dot{\alpha}^{21}.\end{aligned}\quad (\text{В.119})$$

Проаналізувавши перші п'ять рівнянь системи (В.119), приходимо до висновку, що при $\alpha^{21} \neq 0$ мають місце рівності

$$\lambda_4 = \lambda_3, \quad \alpha^{22} = \alpha^1, \quad \alpha^{21} = -mc_2 - 2c_1. \quad (\text{В.120})$$

та

$$\lambda_8 = \lambda_5, \quad \dot{\alpha}^1 = -\lambda_5(u^1)^m \alpha^{21}, \quad \dot{\alpha}^{21} = -\lambda_{10}(u^1)^m \alpha^{21}. \quad (\text{В.121})$$

З рівнянь (В.121) випливають розгалуження:

2.1) $m \neq 0$; **2.2)** $m = 0$.

2.1) $m \neq 0$. Розщепивши рівняння (В.121) по степенях u^1 , та врахувавши (В.120), після розв'язання одержимо

$$\begin{aligned} \lambda_4 = \lambda_3, \quad \lambda_{10} = \lambda_8 = \lambda_5 = 0, \\ \alpha^1 = \alpha^{22} = c_2, \quad \alpha^{21} = -mc_2 - 2c_1. \end{aligned} \quad (\text{В.122})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3(u^1)^{m+1}e^{\frac{u^2}{u^1}}, \quad g^2 = (u^1)^{m+1}e^{\frac{u^2}{u^1}}(\lambda_3\frac{u^2}{u^1} + \lambda_6), \quad (\text{В.123})$$

де $m \neq 0$, $|\lambda_3| + |\lambda_6| \neq 0$, підставивши (В.122) у формули (3.14), приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - 2u^1\partial_{u^2}, \\ Q = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} - mu^1\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{В.124})$$

Врахувавши перетворення еквівалентності (3.135) та (3.128), стає зрозуміло, що одержаний результат міститься у пункті 15 таблиці 4 при $n = 1, p = m$.

2.2) $m = 0$. Із рівнянь (В.120), (В.121) отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_8 = \lambda_5, \quad \lambda_{10} = 0, \\ \alpha^{22} = \alpha^1 = 2\lambda_5c_1x_0 + c_2, \quad \alpha^{21} = -2c_1. \end{aligned} \quad (\text{В.125})$$

Отже, при

$$g^1 = u^1(\lambda_3e^{\frac{u^2}{u^1}} + \lambda_5), \quad g^2 = u^1(e^{\frac{u^2}{u^1}}(\lambda_3\frac{u^2}{u^1} + \lambda_6) + \lambda_5\frac{u^2}{u^1}), \quad (\text{В.126})$$

де $|\lambda_3| + |\lambda_6| \neq 0$, підставивши (В.126) у формули (3.14), приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - 2u^1\partial_{u^2} + 2\lambda_5x_0Q, \\ Q = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{В.127})$$

Одержаний результат міститься у пункті 16 таблиці 4 при $n = 1, p = 0$.

Д. Тепер дослідимо розширення основного ядра симетрії A_0 системи (3.134) при функціях g^a , заданих формулами (3.129). Можна показати, що зображення функцій g^a , задані формулами (3.129), рівносильні наступним

$$g^1 = u^1(\varphi^1(\omega) + \lambda_3 \ln u^1), \quad g^2 = u^2(\varphi^2(\omega) + \lambda_4 \ln u^1), \quad (\text{В.128})$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$; $\varphi^1(\omega), \varphi^2(\omega)$ — довільні гладкі функції, k — довільна стала, $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$.

Підставивши формули (В.128), у рівняння (3.140) та розщепивши по $\ln u^1$, одержуємо, що $c_1 = 0$ та

$$\begin{aligned} (\lambda_3 - \lambda_4)\alpha^{21} &= 0, \\ ((\alpha^{22}(x_0) - k\alpha^1(x_0))\omega + \alpha^{21}(x_0)(u^1)^{1-k})\dot{\varphi}^1 &= \dot{\alpha}^1(x_0) - \lambda_3\alpha^1, \\ [(\alpha^{22}(x_0) - k\alpha^1(x_0))\omega + \alpha^{21}(x_0)(u^1)^{1-k}]\dot{\varphi}^2 + \\ + \frac{\alpha^{21}}{\omega}(u^1)^{1-k}(\varphi^2 - \varphi^1) &= \frac{\dot{\alpha}^{21}}{\omega}(u^1)^{1-k} + \dot{\alpha}^{22} - \lambda_4\alpha^1. \end{aligned} \quad (\text{В.129})$$

Одразу встановимо ядро симетрії системи (3.134), (В.128). Для цього в рівняннях (В.129) вважаємо функції φ^a довільними. Тоді з рівнянь (В.129) випливає, що $\alpha^{21} = 0$ та

$$\dot{\alpha}^1 = \lambda_3\alpha^1, \quad \alpha^{22} = k\alpha^1, \quad (\text{В.130})$$

$$(k\lambda_3 - \lambda_4)\alpha^1 = 0. \quad (\text{В.131})$$

Загальним розв'язком рівнянь (В.130) є функції

$$\alpha^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \alpha^{22} = k c_2 e^{\lambda_3 x_0}. \quad (\text{В.132})$$

З рівнянь (В.131) випливає, що розширення основної алгебри інваріантності системи (3.134) можливе лише при умові $\lambda_4 = k\lambda_3$. Враховуючи останню рівність, із (3.14), (В.132) знаходимо координати оператора (3.2).

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = \bar{d}_1, \quad \eta^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0} u^1, \quad \eta^2 = k c_2 e^{\lambda_3 x_0} u^2. \quad (\text{В.133})$$

Отже, оператор (3.2) з координатами (3.14), (В.133) при умові $\lambda_4 = k\lambda_3$ породжує наступну алгебру інваріантності

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q = e^{\lambda_3 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + k u^2 \partial_{u^2}) \rangle, \quad (\text{В.134})$$

яка, очевидно, $i \in$ ядром симетрії системи (3.134), (B.128) при $\lambda_4 = k\lambda_3$. Цей результат відповідає пункту 2 таблиці 3.

Якщо ж $\lambda_4 \neq k\lambda_3$, то ядром симетрії системи (3.134), (B.128) є основна алгебра інваріантності системи (3.134).

Далі дослідимо можливі розширення ядра симетрії системи (3.134), (3.30) в залежності від конкретного вигляду функцій φ^a .

Набільш широкий клас функцій φ^a , які задовольняють системі (B.129) при умові $\alpha^{21} \neq 0$, з точністю до перетворень (3.135) має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \lambda_5 \omega + \lambda_7, & \varphi^2 &= \frac{\lambda_6}{\omega} + \lambda_8 + \lambda_{10} \omega, \\ \omega &= \frac{u^2}{(u^1)^k}. \end{aligned} \quad (\text{B.135})$$

Відповідно зображення функцій g^a набудуть вигляду

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1 (\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \frac{u^2}{(u^1)^k} + \lambda_7), \\ g^2 &= u^2 (\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_6 \frac{(u^1)^k}{u^2} + \lambda_8 + \lambda_{10} \frac{u^2}{(u^1)^k}), \\ \lambda_3 &\neq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.136})$$

Зауваження В.4. Поклавши у формулах (3.135) $\lambda_3 e^{\theta_3} + \lambda_7 = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_4 = \theta_5 = 0$, стає зрозуміло, що, не втративши загальності, у формулах (B.135) та (B.136) можна вважати $\lambda_7 = 0$.

Підставивши φ^a (B.135) у рівняння (B.129) та розщепивши одержані рівняння по u^2 , отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_5 (\alpha^{22} - k\alpha^1) &= \lambda_{10} (\alpha^{22} - k\alpha^1) = 0, \\ (u^1)^{1-k} (\dot{\alpha}^{21} - \lambda_8 \alpha^{21}) &= -\lambda_6 (\alpha^{22} - \alpha^1), \\ (u^1)^{k-1} (\dot{\alpha}^1 - \lambda_3 \alpha^1) &= \lambda_5 \alpha^{21}, \\ (u^1)^{k-1} (\dot{\alpha}^{22} - \lambda_3 \alpha^1) &= (2\lambda_{10} - \lambda_5) \alpha^{21}. \end{aligned} \quad (\text{B.137})$$

З рівнянь (B.137) випливають розгалуження: 1. $k \neq 1$; 2. $k = 1$.

1. $k \neq 1$. В такому випадку, розщепивши рівняння (B.137) по степенях u^1 , при умові $\alpha^{21} \neq 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_5 &= \lambda_{10} = 0, \\ \lambda_6 (\alpha^{22} - k\alpha^1) &= 0, \\ \dot{\alpha}^{21} - \lambda_8 \alpha^{21} &= \dot{\alpha}^1 - \lambda_3 \alpha^1 = \dot{\alpha}^{22} - \lambda_3 \alpha^1 = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.138})$$

Розв'язок рівнянь (В.138) залежить від значення сталої λ_6 .

1.1) $\lambda_6 \neq 0$. В такому випадку, розв'язавши рівняння (В.138), отримуємо

$$\alpha^1 = \alpha^{22} = 0, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{\lambda_8 x_0}. \quad (\text{В.139})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3 u^1 \ln u^1, \quad g^2 = u^2 (\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_8) + \lambda_6 (u^1)^k, \quad (\text{В.140})$$

де $k \neq 1$, $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_6 \neq 0$, одержуємо алгебру

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q = e^{\lambda_8 x_0} u^1 \partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{В.141})$$

Функції g^a вигляду (В.140) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.141) містяться у пункті 1 таблиці 4.

1.2) $\lambda_6 = 0$. В цьому випадку, розв'язавши рівняння (В.138), знаходимо

$$\alpha^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \alpha^{22} = c_2 e^{\lambda_3 x_0} + c_4, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{\lambda_8 x_0}. \quad (\text{В.142})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3 u^1 \ln u^1, \quad g^2 = u^2 (\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_8), \quad (\text{В.143})$$

де $k \neq 1$, $\lambda_3 \neq 0$, із (3.14), (В.142) одержуємо МАІ системи (3.134), (В.143)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = e^{\lambda_8 x_0} u^1 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = e^{\lambda_3 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}), \quad Q_3 = u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{В.144})$$

Функції g^a вигляду (В.143) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.144) відповідають пункту 35 таблиці 4 при $\lambda_8 = 0$.

2. $k = 1$. З (В.137) одержуємо

$$\begin{aligned} \lambda_5 (\alpha^{22} - \alpha^1) &= \lambda_{10} (\alpha^{22} - \alpha^1) = 0, \\ \dot{\alpha}^{21} - \lambda_8 \alpha^{21} &= -\lambda_6 (\alpha^{22} - \alpha^1), \\ \dot{\alpha}^1 - \lambda_3 \alpha^1 &= \lambda_5 \alpha^{21}, \\ \dot{\alpha}^{22} - \lambda_3 \alpha^1 &= (2\lambda_{10} - \lambda_5) \alpha^{21}. \end{aligned} \quad (\text{В.145})$$

З перших двох рівнянь (В.145) випливають розгалуження:

$$\mathbf{2.1)} \quad |\lambda_5| + |\lambda_{10}| \neq 0; \quad \mathbf{2.2)} \quad \lambda_5 = \lambda_{10} = 0.$$

2.1) $|\lambda_5| + |\lambda_{10}| \neq 0$. В такому випадку із перших двох рівнянь (В.145) отримуємо, що $\alpha^{22} = \alpha^1$. Решта рівнянь (В.145) набувають вигляду

$$\dot{\alpha}^{21} = \lambda_8 \alpha^{21}, \quad \dot{\alpha}^1 - \lambda_3 \alpha^1 = \lambda_5 \alpha^{21}, \quad \lambda_{10} = \lambda_5. \quad (\text{В.146})$$

Розв'язок рівнянь (В.146) залежить від співвідношення між λ_3, λ_8 .

а) $\lambda_8 \neq \lambda_3$. Тоді, розв'язавши рівняння (В.146), отримуємо, що

$$\alpha^{21} = c_3 e^{\lambda_8 x_0}, \quad \alpha^1 = \alpha^{22} = c_2 e^{\lambda_3 x_0} + c_3 \frac{\lambda_5}{\lambda_8 - \lambda_3} e^{\lambda_8 x_0}. \quad (\text{В.147})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3 u^1 \ln u^1 + \lambda_5 u^2, \quad g^2 = u^2 (\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \frac{u^2}{u^1} + \lambda_8) + \lambda_6 u^1, \quad (\text{В.148})$$

де $\lambda_5 \neq 0, \lambda_3 \neq 0, \lambda_8 \neq \lambda_3$, з (3.14), (В.147) приходимо до МАІ системи (3.134), (В.128)

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = e^{\lambda_8 x_0} (\lambda_5 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + (\lambda_8 - \lambda_3) u^1 \partial_{u^2}), \quad (\text{В.149}) \\ Q_2 = e^{\lambda_3 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) \rangle.$$

Функції g^a вигляду (В.148) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.149) містяться у пункті 18 таблиці 4 при $\lambda_3 = \lambda_6 = 0$.

б) $\lambda_8 = \lambda_3$. Розв'язавши рівняння (В.146), отримуємо

$$\alpha^{21} = c_3 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \alpha^1 = \alpha^{22} = e^{\lambda_3 x_0} (\lambda_5 c_3 x_0 + c_2). \quad (\text{В.150})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3 u^1 \ln u^1 + \lambda_5 u^2, \quad g^2 = u^2 (\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5 \frac{u^2}{u^1} + \lambda_3) + \lambda_6 u^1, \quad (\text{В.151})$$

де $\lambda_5 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$, з формул (3.14), врахувавши (В.150), приходимо до МАІ системи (3.134), (В.128)

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = e^{\lambda_3 x_0} (\lambda_5 x_0 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + u^1 \partial_{u^2}), \quad (\text{В.152}) \\ Q_2 = e^{\lambda_3 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) \rangle.$$

Функції g^a вигляду (В.151) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.152) містяться у пункті 19 таблиці 4 при $\lambda_3 = \lambda_6 = 0$.

2.2) $\lambda_5 = \lambda_{10} = 0$. В такому випадку із рівнянь (В.145) випливає

$$\dot{\alpha}^{21} - \lambda_8 \alpha^{21} = 0, \quad \dot{\alpha}^1 = \lambda_3 \alpha^1, \quad \dot{\alpha}^{22} = \lambda_3 \alpha^1. \quad (\text{В.153})$$

Розв'язок рівнянь (В.153) залежить від співвідношення між λ_3, λ_8 .

а) $\lambda_8 \neq 0$. В цьому випадку функції g^a задаються формулами

$$g^1 = \lambda_3 u^1 \ln u^1, \quad g^2 = u^2(\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_8) + \lambda_6 u^1, \quad (\text{В.154})$$

де $\lambda_3 \neq 0, \lambda_8 \neq 0$. Перетворення (3.135) при $\theta_5 = -\frac{\lambda_6}{\lambda_8}, \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = 0$ зводять даний випадок до випадку 1.2).

б) $\lambda_8 = 0$. Розв'язавши рівняння (В.153), знаходимо

$$\alpha^1 = c_2 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \alpha^{22} = c_2 e^{\lambda_3 x_0} + c_4, \quad \alpha^{21} = -\lambda_6 c_4 x_0 + c_3. \quad (\text{В.155})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_3 u^1 \ln u^1, \quad g^2 = \lambda_3 u^2 \ln u^1 + \lambda_6 u^1, \quad (\text{В.156})$$

де $\lambda_3 \neq 0$, формули (3.14), (В.155) приводять до МАІ системи (3.134), (В.128)

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = u^1 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = (-\lambda_6 x_0 u^1 + u^2) \partial_{u^2}, \quad Q_3 = e^{\lambda_3 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) \rangle. \quad (\text{В.157})$$

Функції g^a вигляду (В.156) з відповідною максимальною алгеброю інваріантності (В.157) відповідають пункту 29 таблиці 4.

Е. Тепер дослідимо можливість розширення основної групи симетрії системи (3.134) при зображенні функцій g^a формулами (3.136).

Підставивши зображення функцій g^a , задані формулами (3.136), у рівняння (3.140), після спрощення одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^1 + 2c_1 \varphi^1 &= \dot{\alpha}^1 - 2\lambda_3 c_1, \\ \alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^2 + (2\lambda_3 c_1 x_0 + 2c_1 - c_4) \varphi^2 &= \dot{\alpha}^{21} + \lambda_3 \alpha^{21}, \\ \alpha^{22} &= \alpha^1 - 2\lambda_3 c_1 x_0 + c_4. \end{aligned} \quad (\text{В.158})$$

Встановимо спочатку основну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136).

Для цього в рівняннях (В.158) вважаємо функції φ^a довільними. Тоді

$$\alpha^{22} = \alpha^1 = c_1 = c_4 = 0, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{-\lambda_3 x_0}. \quad (\text{В.159})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.159), одержуємо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} u^1. \quad (\text{В.160})$$

Оператор (3.2) з координатами (В.160) породжує основну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q = e^{-\lambda_3 x_0} u^1 \partial_{u^2} \rangle, \quad (\text{В.161})$$

наведене у пункті 1 таблиці 4.

Далі дослідимо розширення основної алгебри інваріантності (В.161) системи (3.134) при g^a вигляду (3.136).

Найбільш широкий клас зображень функцій φ^a , які задовольняють рівняння (В.158) і при цьому можливе розширення основної алгебри інваріантності (В.161),

надається наступними формулами:

$$1. \varphi^1 = \lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6 \ln u^1 + \lambda_8; \quad (\text{В.162})$$

$$2. \varphi^1 = \lambda_5 (u^1)^m + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6 \ln u^1 + \lambda_8, \quad \lambda_5, m \neq 0; \quad (\text{В.163})$$

$$3. \varphi^1 = \lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6 (u^1)^n + \lambda_8, \quad \lambda_6, n \neq 0; \quad (\text{В.164})$$

$$4. \varphi^1 = \lambda_5 (u^1)^m + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6 (u^1)^n + \lambda_8, \quad \lambda_5, \lambda_6, m, n \neq 0. \quad (\text{В.165})$$

Зауваження В.5. Обмеження, накладені у формулах (В.163) - (В.165), мають на меті уникнути перетину цих формул із формулою (В.162).

Щоб провести симетрійну класифікацію системи (3.134), (3.136), кожне з зображень функцій φ^a (В.162) - (В.165) підставлятимемо у рівняння (В.158).

1. Підставивши (В.162) у рівняння (В.158), та розщепивши одержані рівняння по степенях $\ln u^1$, отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_5 c_1 &= 0, \quad \lambda_3 \lambda_6 c_1 = 0, \quad \lambda_6 (2c_1 - c_4) = 0, \\ \dot{\alpha}^1 - \lambda_5 \alpha^1 &= 2(\lambda_3 + \lambda_7) c_1, \quad \alpha^{22} = \alpha^1 - 2\lambda_3 c_1 x_0 + c_4, \\ \dot{\alpha}^{21} + \lambda_3 \alpha^{21} &= \lambda_6 \alpha^1 + \lambda_8 (2\lambda_3 c_1 x_0 + 2c_1 - c_4). \end{aligned} \quad (\text{В.166})$$

З рівнянь (В.166) випливають наступні розгалуження:

- a) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 \neq 0, \lambda_3 + \lambda_5 \neq 0$;
- b) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 \neq 0, \lambda_3 + \lambda_5 = 0$;
- c) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 = 0, \lambda_3 \neq 0$;
- d) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 = 0, \lambda_3 = 0$;
- e) $\lambda_5 = 0, \lambda_6 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$;
- f) $\lambda_5 = 0, \lambda_6 \neq 0, \lambda_3 = 0$;
- g) $\lambda_5 = \lambda_6 = 0, \lambda_3 \neq 0$;
- h) $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_3 = 0$.

a) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 \neq 0, \lambda_3 + \lambda_5 \neq 0$. З трьох перших рівнянь (В.166) випливає, що $c_1 = c_4 = 0$. Розв'язавши решту рівнянь (В.166) при $c_1 = c_4 = 0$, одержуємо

$$\alpha^1 = \alpha^{22} = c_2 e^{\lambda_5 x_0}, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} + \frac{\lambda_6}{\lambda_3 + \lambda_5} c_2 e^{\lambda_5 x_0}. \quad (\text{В.167})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.167), знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 e^{\lambda_5 x_0} u^1, \\ \eta^2 &= (c_3 e^{-\lambda_3 x_0} + \frac{\lambda_6}{\lambda_3 + \lambda_5} c_2 e^{\lambda_5 x_0}) u^1 + c_2 e^{\lambda_5 x_0} u^2. \end{aligned} \quad (\text{В.168})$$

Отже, при

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1 (\lambda_5 \ln u^1 + \tilde{\lambda}_3), \\ g^2 &= u^1 (\lambda_6 \ln u^1 + \lambda_8) + u^2 (\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7), \end{aligned} \quad (\text{В.169})$$

де $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_7$, $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 \neq 0, \tilde{\lambda}_3 \neq \lambda_7 - \lambda_5$, оператор (3.2) з координатами (В.168) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_2 &= e^{(\lambda_7 - \tilde{\lambda}_3)x_0} u^1 \partial_{u^2}, \\ Q_1 &= e^{\lambda_5 x_0} [(\tilde{\lambda}_3 + \lambda_5 - \lambda_7)(u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + \lambda_6 u^1 \partial_{u^2}] \rangle. \end{aligned} \quad (\text{В.170})$$

яка відповідає пункту 21 таблиці 4.

b) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 \neq 0, \lambda_3 + \lambda_5 = 0$. З трьох перших рівнянь (В.166) випливає, що $c_1 = c_4 = 0$. Розв'язавши решту рівнянь (В.166) при $c_1 = c_4 = 0$, одержуємо

$$\alpha^1 = \alpha^{22} = c_2 e^{\lambda_5 x_0}, \quad \alpha^{21} = e^{\lambda_5 x_0} (\lambda_6 c_2 x_0 + c_3). \quad (\text{В.171})$$

З формул (3.14), врахувавши (B.171), знаходимо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 e^{\lambda_5 x_0} u^1, \\ \eta^2 &= e^{\lambda_5 x_0} [(\lambda_6 c_2 x_0 + c_3) u^1 + c_2 u^2].\end{aligned}\quad (\text{B.172})$$

Отже, при

$$\begin{aligned}g^1 &= u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7 - \lambda_5), \\ g^2 &= u^1(\lambda_6 \ln u^1 + \lambda_8) + u^2(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7),\end{aligned}\quad (\text{B.173})$$

де $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (B.172) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = e^{\lambda_5 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} + \lambda_6 x_0 u^1 \partial_{u^2}), \\ Q_2 = e^{\lambda_5 x_0} u^1 \partial_{u^2} \rangle.\end{aligned}\quad (\text{B.174})$$

що відповідає пункту 22 таблиці 4.

с) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 = 0, \lambda_3 \neq 0$.

З першого рівняння (B.166) випливає, що $c_1 = 0$. Розв'язавши решту рівнянь (B.166) при $c_1 = 0$, одержуємо

$$\alpha^1 = c_2 e^{\lambda_5 x_0}, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} - \frac{\lambda_8}{\lambda_3} c_4, \quad \alpha^{22} = c_2 e^{\lambda_5 x_0} + c_4. \quad (\text{B.175})$$

З формул (3.14), врахувавши (B.175), знаходимо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 e^{\lambda_5 x_0} u^1, \\ \eta^2 &= (c_3 e^{-\lambda_3 x_0} - \frac{\lambda_8}{\lambda_3} c_4) u^1 + (c_2 e^{\lambda_5 x_0} + c_4) u^2.\end{aligned}\quad (\text{B.176})$$

Отже, при

$$\begin{aligned}g^1 &= u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \tilde{\lambda}_3), \\ g^2 &= \lambda_8 u^1 + u^2(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7),\end{aligned}\quad (\text{B.177})$$

де $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_7, \tilde{\lambda}_3 \neq \lambda_7, \lambda_5 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (B.176) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = e^{\lambda_5 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}), \\ Q_2 = [\lambda_8 u^1 + (\lambda_7 - \tilde{\lambda}_3) u^2] \partial_{u^2}, \quad Q_3 = e^{(\lambda_7 - \tilde{\lambda}_3) x_0} u^1 \partial_{u^2} \rangle,\end{aligned}\quad (\text{B.178})$$

що відповідає пункту 35 таблиці 4.

d) $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 = 0, \lambda_3 = 0$.

З першого рівняння (В.166) випливає, що $c_1 = 0$. Розв'язавши решту рівнянь (В.166) при $c_1 = 0$, одержуємо

$$\alpha^1 = c_2 e^{\lambda_5 x_0}, \quad \alpha^{21} = -\lambda_8 c_4 x_0 + c_3, \quad \alpha^{22} = c_2 e^{\lambda_5 x_0} + c_4. \quad (\text{В.179})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.179) та що $c_1 = 0$, знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 e^{\lambda_5 x_0} u^1, \\ \eta^2 &= (-\lambda_8 c_4 x_0 + c_3) u^1 + (c_2 e^{\lambda_5 x_0} + c_4) u^2. \end{aligned} \quad (\text{В.180})$$

Отже, при

$$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7), \quad g^2 = \lambda_8 u^1 + u^2(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7), \quad (\text{В.181})$$

де $\lambda_5 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (В.180) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 &= e^{\lambda_5 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}), \\ Q_2 &= \lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^2}, \quad Q_3 = u^1 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{В.182})$$

що відповідає пункту 29 таблиці 4.

e) $\lambda_5 = 0, \lambda_6 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$.

З перших двох рівнянь (В.166) випливає, що $c_1 = c_4 = 0$. Розв'язавши решту рівнянь (В.166) при $c_1 = c_4 = 0$, одержуємо

$$\alpha^1 = c_2, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} + \frac{\lambda_6}{\lambda_3} c_2, \quad \alpha^{22} = c_3. \quad (\text{В.183})$$

Враховуючи (В.183), неважко переконатися, що в цьому випадку максимальна алгебра інваріантності системи (3.134), (3.136) та зображення функцій g^a матимуть відповідно вигляд (В.170), (В.169) при $\lambda_5 = 0$.

f) $\lambda_5 = 0, \lambda_6 \neq 0, \lambda_3 = 0$.

З перших трьох рівнянь (В.166) випливає, що $c_4 = 2c_1$. Тоді, розв'язавши рівняння (В.166), одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= 2\lambda_7 c_1 x_0 + c_2, \quad \alpha^{21} = \lambda_6 (\lambda_7 c_1 x_0^2 + c_2 x_0) + c_3, \\ \alpha^{22} &= 2\lambda_7 c_1 x_0 + 2c_1 + c_2. \end{aligned} \quad (\text{В.184})$$

формул (3.14), врахувавши (B.184), знаходимо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, & \xi^1 &= c_1x_1 + d_1, & \eta^1 &= (2\lambda_7c_1x_0 + c_2)u^1, \\ \eta^2 &= [\lambda_6(\lambda_7c_1x_0^2 + c_2x_0) + c_3]u^1 + (2c_1\lambda_7x_0 + 2c_1 + c_2)u^2.\end{aligned}\quad (\text{B.185})$$

тже, при

$$g^1 = \lambda_7u^1, \quad g^2 = u^1(\lambda_6 \ln u^1 + \lambda_8) + \lambda_7u^2, \quad (\text{B.186})$$

якщо $\lambda_6 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (B.185) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2\lambda_7x_0Q_1 - \lambda_6\lambda_7x_0^2Q_2 + 2u^2\partial_{u^2}, \\ Q_1 = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} + \lambda_6x_0u^1\partial_{u^2}, \quad Q_2 = u^1\partial_{u^2} \rangle,\end{aligned}\quad (\text{B.187})$$

яка відповідає пункту 30 таблиці 4.

г) $\lambda_5 = \lambda_6 = 0, \lambda_3 \neq 0$. В цьому випадку зображення функцій g^a матимуть вигляд

$$g^1 = \tilde{\lambda}_3u^1, \quad g^2 = \lambda_8u^1 + \lambda_7u^2, \\ \text{якщо } \tilde{\lambda}_3 \neq \lambda_7, \text{ що рівносильно формулам (B.114).}$$

д) $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_3 = 0$. В цьому випадку функції g^a матимуть вигляд

$$g^1 = \lambda_7u^1, \quad g^2 = \lambda_8u^1 + \lambda_7u^2, \\ \text{які еквівалентно формулам (B.117).}$$

2. Підставивши зображення функцій φ^a , задані формулами (B.163) у визначальні рівняння (B.158), та розщепивши отримані рівняння по степеням u^1 , одержимо

$$\begin{aligned}m\alpha^1 + 2c_1 &= 0, & \lambda_3\lambda_6c_1 &= 0, & \lambda_6(2c_1 - c_4) &= 0, \\ \dot{\alpha}^1 &= 2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1, & \alpha^{22} &= \alpha^1 - 2\lambda_3c_1x_0 + c_4, \\ \dot{\alpha}^{21} + \lambda_3\alpha^{21} &= \lambda_6\alpha^1 + \lambda_8(2\lambda_3c_1x_0 + 2c_1 - c_4).\end{aligned}\quad (\text{B.188})$$

Другого рівняння (B.188) впливають наступні розгалуження:

а) $\lambda_3 \neq 0, \lambda_6 \neq 0$; б) $\lambda_3 \neq 0, \lambda_6 = 0$;

в) $\lambda_3 = 0, \lambda_6 \neq 0$; г) $\lambda_3 = \lambda_6 = 0$.

а) Розв'язавши рівняння (B.188) при $\lambda_3 \neq 0, \lambda_6 \neq 0$, отримуємо

$$c_1 = c_2 = \alpha^1 = \alpha^{22} = 0, \quad \alpha^{21} = c_3e^{-\lambda_3x_0}. \quad (\text{B.189})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.167), знаходимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} u^1. \quad (\text{В.190})$$

З координат оператора (3.2) стає очевидно, що в даному випадку не відбувається розширення основної алгебри інваріантності (В.161) системи (3.134), (3.136).

b) $\lambda_3 \neq 0, \lambda_6 = 0$.

З рівнянь (В.188) випливає, що

$$\begin{aligned} (\lambda_3 + \lambda_7)c_2 &= 0, \quad \alpha^1 = -2c_2, \\ \dot{\alpha}^{21} + \lambda_3 \alpha^{21} &= \lambda_8(2\lambda_3 m c_2 x_0 + 2m c_2 - c_4), \\ \alpha^{22} &= -2\lambda_3 m c_2 x_0 - 2c_2 + c_4, \end{aligned} \quad (\text{В.191})$$

причому $m c_2 = c_1$.

З першого рівняння (В.191) очевидні два розгалуження.

b1) $\lambda_3 + \lambda_7 \neq 0$. Тоді $c_2 = 0$. Розв'язавши рівняння (В.191), одержуємо

$$\alpha^1 = 0, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} - \frac{\lambda_8}{\lambda_3} c_4, \quad \alpha^{22} = c_4. \quad (\text{В.192})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.192), знаходимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = (c_3 e^{-\lambda_3 x_0} - \frac{\lambda_8}{\lambda_3} c_4) u^1 + c_4 u^2. \quad (\text{В.193})$$

Отже, при

$$g^1 = u^1(\lambda_5(u^1)^m + \tilde{\lambda}_3), \quad g^2 = \lambda_8 u^1 + u^2(\lambda_5(u^1)^m + \lambda_7), \quad (\text{В.194})$$

де $m \neq 0, \lambda_5 \neq 0, \tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_7, \tilde{\lambda}_3 \neq 0, \tilde{\lambda}_3 \neq \lambda_7$, оператор (3.2) з координатами (В.193) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 &= e^{(\lambda_7 - \tilde{\lambda}_3)x_0} u^1 \partial_{u^2}, \\ Q_2 &= \lambda_8 u^1 \partial_{u^2} + (\lambda_7 - \tilde{\lambda}_3) u^2 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{В.195})$$

що відповідає пункту 7 таблиці 4.

b2) $\lambda_7 = -\lambda_3$. Розв'язавши рівняння (В.191), одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= -2c_2, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} + 2\lambda_8 m c_2 x_0 - \frac{\lambda_8}{\lambda_3} c_4, \\ \alpha^{22} &= -2\lambda_3 m c_2 x_0 - 2c_2 + c_4. \end{aligned} \quad (\text{В.196})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.196), знаходимо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2mc_2x_0 + d_0, \quad \xi^1 = mc_2x_1 + d_1, \quad \eta^1 = -2c_2u^1, \\ \eta^2 &= (c_3e^{-\lambda_3x_0} + 2\lambda_8mc_2x_0 - \frac{\lambda_8}{\lambda_3}c_4)u^1 + \\ &\quad + (-2\lambda_3mc_2x_0 - 2c_2 + c_4)u^2.\end{aligned}\quad (\text{В.197})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5(u^1)^{m+1}, \quad g^2 = \lambda_8u^1 + u^2(\lambda_5(u^1)^m - \lambda_3), \quad (\text{В.198})$$

де $m \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_5 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (В.197) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = \lambda_8u^1\partial_{u^2} - \lambda_3u^2\partial_{u^1}, \quad Q_2 = e^{-\lambda_3x_0}u^1\partial_{u^2}, \\ D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) + 2mx_0Q_1 - 2(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}) \rangle,\end{aligned}\quad (\text{В.199})$$

що відповідає пункту 34 таблиці 4.

с) $\lambda_6 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$. З рівнянь (В.188) випливає, що

$$\begin{aligned}\lambda_7c_1 &= 0, \quad c_4 = 2c_1, \\ \alpha^1 &= -\frac{2}{m}c_1, \quad \alpha^{22} = (2 - \frac{2}{m})c_1, \quad \dot{\alpha}^{21} = -\frac{2}{m}\lambda_6c_1.\end{aligned}\quad (\text{В.200})$$

З рівнянь (В.200) випливає, що розширення основної алгебри інваріантності (В.158) системи (3.134) (3.136) можливе лише при умові, що $\lambda_7 = 0$. Розв'язавши рівняння (В.200), одержуємо

$$\alpha^1 = -\frac{2}{m}c_1, \quad \alpha^{21} = -\frac{2}{m}\lambda_6c_1x_0 + c_3, \quad \alpha^{22} = 2\frac{m-1}{m}c_1. \quad (\text{В.201})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.201), знаходимо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1x_1 + d_1, \quad \eta^1 = -\frac{2}{m}c_1u^1, \\ \eta^2 &= (-\frac{2}{m}\lambda_6c_1x_0 + c_3)u^1 + 2\frac{m-1}{m}c_1u^2.\end{aligned}\quad (\text{В.202})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5(u^1)^{m+1}, \quad g^2 = u^1(\lambda_6 \ln u^1 + \lambda_8) + \lambda_5u^2(u^1)^m, \quad (\text{В.203})$$

де $m \neq 0$, $\lambda_5 \neq 0$, $\lambda_6 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (В.202) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q = u^1\partial_{u^2}, \quad D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + 2u^2\partial_{u^2}) - \\ - 2(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} + \lambda_6x_0u^1\partial_{u^2}) \rangle,\end{aligned}\quad (\text{В.204})$$

що відповідає пункту 17 таблиці 4.

d) $\lambda_3 = \lambda_6 = 0$. З рівнянь (В.188) випливає, що

$$\lambda_7 c_1 = 0, \quad \alpha^1 = -\frac{2}{m} c_1, \quad \alpha^{22} = c_4 - \frac{2}{m} c_1, \quad \dot{\alpha}^{21} = \lambda_8 (2c_1 - c_4). \quad (\text{В.205})$$

З першого рівняння (В.205) очевидні два розгалуження.

d1) $\lambda_7 \neq 0$. Тоді з першого рівняння (В.205) випливає, що $c_1 = 0$. Розв'язавши рівняння (В.205) при $c_1 = 0$, одержуємо

$$\alpha^1 = 0, \quad \alpha^{21} = -\lambda_8 c_4 x_0 + c_3, \quad \alpha^{22} = c_4. \quad (\text{В.206})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.206), знаходимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = (-\lambda_8 c_4 x_0 + c_3) u^1 + c_4 u^2. \quad (\text{В.207})$$

Отже, при

$$g^1 = u^1 (\lambda_5 (u^1)^m + \lambda_7), \quad g^2 = \lambda_8 u^1 + u^2 (\lambda_5 (u^1)^m + \lambda_7), \quad (\text{В.208})$$

де $m \neq 0$, $\lambda_5 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (В.207) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = \lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^2}, Q_2 = u^1 \partial_{u^2} \rangle, \quad (\text{В.209})$$

що відповідає пункту 8 таблиці 4.

d2) $\lambda_7 = 0$. Розв'язавши рівняння (В.205), одержуємо

$$\alpha^1 = -\frac{2}{m} c_1, \quad \alpha^{21} = \lambda_8 (2c_1 - c_4) x_0 + c_3, \quad \alpha^{22} = c_4 - \frac{2}{m} c_1. \quad (\text{В.210})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.210), знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1 x_0 + d_0, & \xi^1 &= c_1 x_1 + d_1, & \eta^1 &= -\frac{2}{m} c_1 u^1, \\ \eta^2 &= (\lambda_8 (2c_1 - c_4) x_0 + c_3) u^1 + (c_4 - \frac{2}{m} c_1) u^2. \end{aligned} \quad (\text{В.211})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5 (u^1)^{m+1}, \quad g^2 = \lambda_8 u^1 + \lambda_5 u^2 (u^1)^m, \quad (\text{В.212})$$

де $m \neq 0$, $\lambda_5 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (В.211) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, D &= 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2} - \frac{2}{m} (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}), \\ Q_1 &= \lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2} - u^2 \partial_{u^2}, Q_2 = u^1 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{В.213})$$

що відповідає пункту 24 таблиці 4.

3. Підставивши зображення функцій φ^a , задані формулами (В.164) у визначальні рівняння (В.158), одержуємо

$$\begin{aligned}\lambda_5 c_1 &= 0, \\ \alpha^1 &= -\frac{1}{n}(2\lambda_3 c_1 x_0 + 2c_1 - c_4), \quad \dot{\alpha}^1 - \lambda_5 \alpha^1 = 2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1, \\ \dot{\alpha}^{21} + \lambda_3 \alpha^{21} &= \lambda_8(2\lambda_3 c_1 x_0 + 2c_1 - c_4), \\ \alpha^{22} &= \alpha^1 - 2\lambda_3 c_1 x_0 + c_4.\end{aligned}\tag{B.214}$$

Розв'язавши рівняння (В.214) при $\lambda_5 \neq 0$, отримуємо

$$c_1 = c_2 = \alpha^1 = \alpha^{22} = 0, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{-\lambda_3 x_0}.\tag{B.215}$$

З формул (3.14), врахувавши (В.215), знаходимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} u^1.\tag{B.216}$$

З вигляду (В.216) координат оператора (3.2) стає очевидно, що в даному випадку не відбувається розширення основної алгебри інваріантності (В.161) системи (3.134), (3.136).

Якщо $\lambda_5 = 0$, то з рівнянь (В.214) випливає, що

$$\begin{aligned}((n+1)\lambda_3 + n\lambda_7)c_1 &= 0, \\ \alpha^1 &= -\frac{1}{n}(2\lambda_3 c_1 x_0 + 2c_1 - c_4), \quad \dot{\alpha}^1 = 2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1, \\ \dot{\alpha}^{21} + \lambda_3 \alpha^{21} &= \lambda_8(2\lambda_3 c_1 x_0 + 2c_1 - c_4), \\ \alpha^{22} &= -2\lambda_3 \frac{n+1}{n} c_1 x_0 + \frac{n+1}{n} c_4 - \frac{2}{n} c_1.\end{aligned}\tag{B.217}$$

Розв'язок рівнянь (В.217) залежить від значення сталих λ_3, λ_7 . Можливі наступні суттєво різні випадки:

- a)** $(n+1)\lambda_3 + n\lambda_7 \neq 0, \lambda_3 \neq 0;$ **b)** $\lambda_7 \neq 0, \lambda_3 = 0;$
c) $(n+1)\lambda_3 + n\lambda_7 = 0, \lambda_3 \neq 0;$ **d)** $\lambda_7 = 0, \lambda_3 = 0.$

a) $(n+1)\lambda_3 + n\lambda_7 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$. Тоді з рівнянь (В.217) випливає, що $c_1 = 0$ та

$$\alpha^1 = \frac{1}{n} c_4, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} - \frac{\lambda_8}{\lambda_3} c_4, \quad \alpha^{22} = \frac{n+1}{n} c_4.\tag{B.218}$$

З формул (3.14), врахувавши (В.218), знаходимо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = \frac{1}{n} c_4 u^1, \\ \eta^2 &= (c_3 e^{-\lambda_3 x_0} - \frac{\lambda_8}{\lambda_3} c_4) u^1 + \frac{n+1}{n} c_4 u^2.\end{aligned}\tag{B.219}$$

тже, при

$$g^1 = \tilde{\lambda}_3 u^1, \quad g^2 = u^1(\lambda_6(u^1)^n + \lambda_8) + \lambda_7 u^2, \quad (\text{B.220})$$

$n \neq 0, \lambda_6 \neq 0, \tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_7, \tilde{\lambda}_3 \neq \lambda_7$, оператор (3.2) з координатами (219) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = (\lambda_7 - \tilde{\lambda}_3)(u^1 \partial_{u^1} + (n+1)u^2 \partial_{u^2}) - \lambda_8 n u^1 \partial_{u^2}, Q_2 = e^{(\lambda_7 - \tilde{\lambda}_3)x_0} u^1 \partial_{u^2} \rangle, \quad (\text{B.221})$$

відповідає пункту 10 таблиці 4.

б) $\lambda_7 \neq 0, \lambda_3 = 0$. Розв'язавши рівняння (B.217), одержуємо, що $c_1 = 0$

$$\alpha^1 = \frac{1}{n} c_4, \quad \alpha^{21} = -\lambda_8 c_4 x_0 + c_3, \quad \alpha^{22} = \frac{n+1}{n} c_4. \quad (\text{B.222})$$

формул (3.14), врахувавши (B.222), знаходимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = \frac{1}{n} c_4 u^1, \quad \eta^2 = (-\lambda_8 c_4 x_0 + c_3) u^1 + \frac{n+1}{n} c_4 u^2. \quad (\text{B.223})$$

тже, при

$$g^1 = \lambda_7 u^1, \quad g^2 = u^1(\lambda_6(u^1)^n + \lambda_8) + \lambda_7 u^2, \quad (\text{B.224})$$

$n, \lambda_6 \neq 0, \lambda_7 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (B.223) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = u^1 \partial_{u^1} + (n+1)u^2 \partial_{u^2} - n\lambda_8 x_0 Q_2, Q_2 = u^1 \partial_{u^2} \rangle, \quad (\text{B.225})$$

відповідає пункту 11 таблиці 4.

с) $(n+1)\lambda_3 + n\lambda_7 = 0, \lambda_3 \neq 0$. Розв'язавши рівняння (B.217), одержуємо

$$\alpha^1 = -\frac{1}{n}(2\lambda_3 c_1 x_0 + 2c_1 - c_4), \quad \alpha^{22} = -2\frac{n+1}{n}\lambda_3 c_1 x_0 - \frac{2}{n}c_1 + \frac{n+1}{n}c_4, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} + 2\lambda_8 c_1 x_0 - \frac{\lambda_8}{\lambda_3} c_4. \quad (\text{B.226})$$

формул (3.14), врахувавши (B.226), знаходимо

$$\xi^0 = 2c_1 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1 x_1 + d_1, \quad \eta^1 = -\frac{1}{n}(2\lambda_3 c_1 x_0 + 2c_1 - c_4)u^1, \quad \eta^2 = (c_3 e^{-\lambda_3 x_0} + 2\lambda_8 c_1 x_0 - \frac{\lambda_8}{\lambda_3} c_4)u^1 + (-2\frac{n+1}{n}\lambda_3 c_1 x_0 - \frac{2}{n}c_1 + \frac{n+1}{n}c_4)u^2. \quad (\text{B.227})$$

Отже, при

$$g^1 = \tilde{\lambda}_3 u^1, \quad g^2 = u^1(\lambda_6(u^1)^n + \lambda_8) + (n+1)\tilde{\lambda}_3 u^1, \quad (\text{B.228})$$

де $\tilde{\lambda}_3 = -\frac{1}{n}\lambda_3, n \neq 0, \tilde{\lambda}_3 \neq 0, \lambda_6 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (B.227) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = \tilde{\lambda}_3 u^1 \partial_{u^1} + (n+1)\tilde{\lambda}_3 u^2 \partial_{u^2} + \lambda_8 u^1 \partial_{u^2}, \\ Q_2 = e^{n\tilde{\lambda}_3 x_0} u^1 \partial_{u^2}, \quad D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - \frac{2}{n}(u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + \\ + 2x_0[\tilde{\lambda}_3(u^1 \partial_{u^1} + (n+1)u^2 \partial_{u^2}) + \lambda_8 u^1 \partial_{u^2}] \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.229})$$

що відповідає пункту 25 таблиці 4.

d) $\lambda_7 = 0, \lambda_3 = 0$. Розв'язавши рівняння (B.217), одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= -\frac{1}{n}(2c_1 - c_4), \quad \alpha^{21} = \lambda_8(2c_1 - c_4)x_0 + c_3, \\ \alpha^{22} &= -\frac{2}{n}c_1 + \frac{n+1}{n}c_4. \end{aligned} \quad (\text{B.230})$$

З формул (3.14), врахувавши (B.230), знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1 x_1 + d_1, \quad \eta^1 = -\frac{1}{n}(2c_1 - c_4)u^1, \\ \eta^2 &= (\lambda_8(2c_1 - c_4)x_0 + c_3)u^1 + (-\frac{2}{n}c_1 + \frac{n+1}{n}c_4)u^2. \end{aligned} \quad (\text{B.231})$$

Отже, при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = u^1(\lambda_6(u^1)^n + \lambda_8), \quad (\text{B.232})$$

де $n, \lambda_6 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (B.231) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 - \frac{2}{n}(u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + 2\lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2}, \\ Q_1 = u^1 \partial_{u^1} + (n+1)u^2 \partial_{u^2} - n\lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = u^1 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.233})$$

що відповідає пункту 26 таблиці 4.

4. Підставивши зображення функцій φ^a , задані формулами (B.165) у визначальні рівняння (B.158), та розщепивши отримані рівняння по степенях u^1 , одержимо

$$\begin{aligned} m\alpha^1 + 2c_1 &= 0, \quad n\alpha^1 + 2\lambda_3 c_1 x_0 + 2c_1 - c_4 = 0, \\ \dot{\alpha}^1 &= 2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1, \quad \dot{\alpha}^{21} + \lambda_3 \alpha^{21} = \lambda_8(2\lambda_3 c_1 x_0 + 2c_1 - c_4), \\ \alpha^{22} &= \alpha^1 - 2\lambda_3 c_1 x_0 + c_4. \end{aligned} \quad (\text{B.234})$$

З перших трьох рівнянь (В.234) випливають наступні розгалуження:

а) $|\lambda_3| + |\lambda_7| \neq 0$; **б)** $\lambda_3 = \lambda_7 = 0$.

а) $|\lambda_3| + |\lambda_7| \neq 0$. Розв'язавши рівняння (В.234), отримуємо

$$c_1 = c_2 = \alpha^1 = \alpha^{22} = 0, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{-\lambda_3 x_0}. \quad (\text{В.235})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.235), знаходимо

$$\xi^0 = d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = c_3 e^{-\lambda_3 x_0} u^1. \quad (\text{В.236})$$

З вигляду (В.236) координат оператора (3.2) стає очевидно, що в даному випадку не відбувається розширення основної алгебри інваріантності (В.161) системи (3.134), (3.136).

б) $\lambda_3 = \lambda_7 = 0$. Розв'язавши рівняння (В.234), одержуємо, що $c_1 = m c_2$ та

$$\alpha^1 = -2c_2, \quad \alpha^{21} = 2n\lambda_8 c_2 x_0 + c_3, \quad \alpha^{22} = 2(m - n - 1)c_2. \quad (\text{В.237})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.237), знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2m c_2 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = m c_2 x_1 + d_1, \quad \eta^1 = -2c_2 u^1, \\ \eta^2 &= (2n\lambda_8 c_2 x_0 + c_3) u^1 + 2(m - n - 1)c_2 u^2. \end{aligned} \quad (\text{В.238})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_5 (u^1)^{m+1}, \quad g^2 = u^1 (\lambda_6 (u^1)^n + \lambda_8) + \lambda_5 u^2 (u^1)^m, \quad (\text{В.239})$$

де $\lambda_5, \lambda_6, m, n \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (В.238) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.136)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = m(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2(u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + \\ + 2n\lambda_8 x_0 u^1 \partial_{u^2} + 2(m - n)u^2 \partial_{u^2}, \quad Q = u^1 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{В.240})$$

що відповідає пункту 5 таблиці 4.

Г. Тепер дослідимо можливість розширення основної групи симетрії системи (3.134) при зображенні функцій g^a формулами (3.137).

Підставивши зображення функцій g^a , задані формулами (3.137), у визначальні рівняння (3.140), після розщеплення по $\frac{u^2}{u^1}$ та деякого спрощення одержуємо

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}^1 &= \dot{\alpha}^{21} = \dot{\alpha}^{22} = 0, & (\alpha^{22} - \alpha^1)\varphi^2 &= 0, \\ (\alpha^{22} - \alpha^1)\varphi^1 &= 0, \\ \alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^1 + (\alpha^{21} + 2c_1)\varphi^1 &= 0, \\ \alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^2 + (\alpha^1 - \alpha^{22} + \alpha^{21} + 2c_1)\varphi^2 &= 0.\end{aligned}\tag{B.241}$$

Встановимо спочатку основну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.137). Для цього в рівняннях (B.241) вважаємо функції φ^a довільними. Тоді

$$\alpha^{22} = \alpha^1 = 0, \quad \alpha^{21} = -2c_1.\tag{B.242}$$

З формул (3.14), врахувавши (B.242), одержуємо

$$\xi^0 = 2c_1 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1 x_1 + d_1, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^2 = -2c_1 u^1.\tag{B.243}$$

Оператор (3.2) з координатами (B.243) породжує основну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.137)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q = u^1 \partial_{u^2} \rangle,\tag{B.244}$$

яке міститься у пункті 2 таблиці 4.

Далі дослідимо розширення основної алгебри інваріантності (B.244) системи (3.134), при g^a вигляду (3.137). Оскільки симетрійні властивості системи (3.134), при $g^a = 0$ уже досліджені вище, то на функції φ^a накладемо обмеження $|\varphi^1| + |\varphi^2| \neq 0$. Тоді з рівнянь (B.241) випливає

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}^1 &= \dot{\alpha}^{21} = \dot{\alpha}^{22} = 0, & \alpha^1 &= \alpha^{22}, \\ \alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^1 + (\alpha^{21} + 2c_1)\varphi^1 &= 0, \\ \alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^2 + (\alpha^{21} + 2c_1)\varphi^2 &= 0.\end{aligned}\tag{B.245}$$

З рівнянь (B.245) випливає, що розширення основної алгебри інваріантності (3.134), (3.137) можливе лише у випадку $\alpha^1 \neq 0$. Тоді рівняння (B.245) допускають найбільш широкий клас зображень φ^a при умові, що вони є розв'язком структурної системи

$$u^1 \dot{\varphi}^1 - m\varphi^1 = 0, \quad u^1 \dot{\varphi}^2 - m\varphi^2 = 0,\tag{B.246}$$

розв'язавши яку, одержуємо наступні зображення функцій φ^a

$$\varphi^1 = \lambda_3(u^1)^m, \quad \varphi^2 = \lambda_4(u^1)^m, \quad (\text{B.247})$$

де $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$. Підставивши φ^a (B.247) у рівняння (B.245), після розв'язання одержуємо

$$\alpha^1 = \alpha^{22} = c_2, \quad \alpha^{21} = -mc_2 - 2c_1. \quad (\text{B.248})$$

З формул (3.14), врахувавши (B.248), отримуємо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= c_2u^1, \quad \eta^2 = (-mc_2 - 2c_1)u^1 + c_2u^2. \end{aligned} \quad (\text{B.249})$$

Отже, якщо зображення функцій g^a задаються формулами

$$g^1 = \lambda_3 e^{\frac{u^2}{u^1}} (u^1)^{m+1}, \quad g^2 = e^{\frac{u^2}{u^1}} (u^1)^m (\lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^1), \quad (\text{B.250})$$

де $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, то оператор (3.2) з координатами (B.249) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.137)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - 2u^1\partial_{u^2}, \\ Q = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} - mu^1\partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.251})$$

яка міститься у пункті 15 таблиці 4 при $n = 1$.

Г. Тепер дослідимо можливість розширення основної групи симетрії системи (3.134) при зображенні функцій g^a формулами (3.138).

Підставивши зображення функцій g^a , задані формулами (3.138), у рівняння (3.140), та розщепивши отримані рівняння по $\ln u^1$, після деякого спрощення одержуємо

$$\begin{aligned} (\alpha^{22} - \alpha^1)\dot{\varphi}^1 &= 0, \\ (u^1)^m(\alpha^{22} - \alpha^1)\dot{\varphi}^2 - (\dot{\alpha}^{22} - \dot{\alpha}^1) &= 0, \\ (u^1)^m[(\alpha^{22} - \alpha^1)\omega + k\alpha^1 + \alpha^{21}]\dot{\varphi}^1 + (m\alpha^1 + 2c_1)\varphi^1 &= \dot{\alpha}^1, \\ (u^1)^m[(\alpha^{22} - \alpha^1)\omega + k\alpha^1 + \alpha^{21}]\dot{\varphi}^2 + & \\ + (m\alpha^1 + 2c_1 - (\alpha^{22} - \alpha^1))\varphi^2 &= (\dot{\alpha}^{22} - \dot{\alpha}^1)\omega + \dot{\alpha}^{21}. \end{aligned} \quad (\text{B.252})$$

Встановимо спочатку основну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.138). Для цього в рівняннях (B.252) вважаємо функції φ^a довільними. Отримуємо

$$\alpha^{22} = \alpha^1 = c_2, \quad \alpha^{21} = -kc_2, \quad c_1 = -\frac{m}{2}c_2. \quad (\text{B.253})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.253), знаходимо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= -mc_2x_0 + d_0, & \xi^1 &= -\frac{m}{2}c_2x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= c_2u^1, & \eta^2 &= -kc_2u^1 + c_2u^2.\end{aligned}\tag{В.254}$$

Оператор (3.2) з координатами (В.254) породжує ядро симетрії системи (3.134), (3.138)

$$\langle \partial_0, \partial_1, D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}) + 2ku^1\partial_{u^2} \rangle, \tag{В.255}$$

наведене у пункті 3 таблиці 4.

Далі дослідимо розширення основної алгебри інваріантності (В.161) системи (3.134), при g^a вигляду (3.138). Проаналізувавши систему (В.252), приходимо до висновку, що найбільш широкий клас функцій φ^a , при яких може відбуватися розширення ядра симетрії (В.255), має вигляд

$$\varphi^1 = \lambda_3\omega + \lambda_5, \quad \varphi^2 = \lambda_4\omega + \lambda_6, \tag{В.256}$$

або

$$\begin{aligned}\varphi^1 &= \lambda_3e^{n\omega} + \lambda_5, & \varphi^2 &= \lambda_4e^{n\omega} + \lambda_6, \\ |\lambda_3| + |\lambda_4| &\neq 0, n \neq 0,\end{aligned}\tag{В.257}$$

де $\omega = \frac{u^2}{u^1} + k \ln u^1$; $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, k \neq 0$ — сталі.

Встановимо розширення основної алгебри інваріантності системи (В.255) при одержаних зображеннях функцій φ^a (В.256), (В.257). Для цього підставлятимемо їх у визначальні рівняння (В.252).

1. Нехай функції φ^a задаються формулами (В.256). Тоді, підставивши формули (В.256) у визначальні рівняння (В.252), після розщеплення по ω отримуємо

$$\begin{aligned}\lambda_3(\alpha^{22} - \alpha^1) &= 0, & \lambda_3(m\alpha^1 + 2c_1) &= 0, \\ \lambda_4[m\alpha^1 + 2c_1 - (\alpha^{22} - \alpha^1)] &= 0, \\ (u^1)^m \lambda_4(m\alpha^1 + 2c_1) &= \dot{\alpha}^{22} - \dot{\alpha}^1, \\ (u^1)^m [\lambda_3(k\alpha^1 + \alpha^{21}) + \lambda_5(m\alpha^1 + 2c_1)] &= \dot{\alpha}^1, \\ (u^1)^m [\lambda_4(k\alpha^1 + \alpha^{21}) + \lambda_6(m\alpha^1 + 2c_1 - (\alpha^{22} - \alpha^1))] &= \dot{\alpha}^{21}.\end{aligned}\tag{В.258}$$

Із рівнянь (В.258) випливає, що розширення ядра симетрії (В.255) можливе лише при $m = 0$. В такому випадку, враховуючи, що $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, із рівнянь (В.258) отримуємо

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \quad \alpha^{22} = \alpha^1, \\ \dot{\alpha}^1 &= \lambda_3(k\alpha^1 + \alpha^{21}), \quad \dot{\alpha}^{21} = \lambda_4(k\alpha^1 + \alpha^{21}). \end{aligned} \quad (\text{В.259})$$

Розв'язок рівнянь (В.259) залежить від співвідношення між λ_3, λ_4 .

Отримуємо два нееквівалентні випадки.

1.1. $\lambda_4 \neq -k\lambda_3$. Розв'язавши рівняння (В.259), одержуємо

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \quad \alpha^{22} = \alpha^1 = -c_2 + \lambda_3 c_3 e^{(k\lambda_3 + \lambda_4)x_0}, \\ \alpha^{21} &= kc_2 + \lambda_4 c_3 e^{(k\lambda_3 + \lambda_4)x_0}. \end{aligned} \quad (\text{В.260})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.260), знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = [-c_2 + \lambda_3 c_3 e^{(k\lambda_3 + \lambda_4)x_0}]u^1, \\ \eta^2 &= [kc_2 + \lambda_4 c_3 e^{(k\lambda_3 + \lambda_4)x_0}]u^1 + [-c_2 + \lambda_3 c_3 e^{(k\lambda_3 + \lambda_4)x_0}]u^2. \end{aligned} \quad (\text{В.261})$$

Отже, якщо зображення функцій g^a задаються формулами

$$\begin{aligned} g^1 &= [\lambda_3 \frac{u^2}{u^1} + k\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5]u^1, \\ g^2 &= (\lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^1)k \ln u^1 + (\lambda_4 + \lambda_5)u^2 + \lambda_6 u^1 + \lambda_3 \frac{(u^2)^2}{u^1}, \end{aligned} \quad (\text{В.262})$$

де $k \neq 0, \lambda_4 \neq -k\lambda_3, |\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, то оператор (3.2) з координатами (В.261) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.138)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} - ku^1 \partial_{u^2} \\ Q_2 = e^{(k\lambda_3 + \lambda_4)x_0} [\lambda_3 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + \lambda_4 u^1 \partial_{u^2}] \rangle, \end{aligned} \quad (\text{В.263})$$

яка міститься у пункті 18 таблиці 4.

1.2. $\lambda_4 = -k\lambda_3$. Розв'язавши рівняння (В.259) при $\lambda_4 = -k\lambda_3$, отримуємо

$$\alpha^{22} = \alpha^1 = \lambda_3 c_3 x_0 + c_2, \quad \alpha^{21} = -k(\lambda_3 c_3 x_0 + c_2) + c_3. \quad (\text{В.264})$$

З формул (3.14), врахувавши (В.264) знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = (\lambda_3 c_3 x_0 + c_2)u^1, \\ \eta^2 &= [-k(\lambda_3 c_3 x_0 + c_2) + c_3]u^1 + (\lambda_3 c_3 x_0 + c_2)u^2. \end{aligned} \quad (\text{В.265})$$

Отже, якщо зображення функцій g^a задаються формулами

$$\begin{aligned} g^1 &= (\lambda_3 \frac{u^2}{u^1} + k\lambda_3 \ln u^1 + \lambda_5)u^1, \\ g^2 &= (u^2 - ku^1)k\lambda_3 \ln u^1 + (-k\lambda_3 + \lambda_5)u^2 + \lambda_6 u^1 + \lambda_3 \frac{(u^2)^2}{u^1}, \end{aligned} \quad (\text{B.266})$$

де $k \neq 0, \lambda_3 \neq 0$, то оператор (3.2) з координатами (B.265)

породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.138)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, Q_1 = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} - ku^1 \partial_{u^2}, \\ Q_2 = \lambda_3 x_0 Q_1 + u^1 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.267})$$

яка міститься у пункті 19 таблиці 4.

2. Нехай функції φ^a задаються формулами (B.257). Тоді, підставивши формули (B.257) у визначальні рівняння (B.252), після розщеплення по ω та спрощення отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha^{22} &= \alpha^1, \\ \alpha^{21} &= -\frac{1}{n}[(m + kn)\alpha^1 + 2c_1], \\ ((m + kn)\lambda_5 + n\lambda_6)(m\alpha^1 + 2c_1) &= 0, \\ (u^1)^m \lambda_5 (m\alpha^1 + 2c_1) &= \dot{\alpha}^1. \end{aligned} \quad (\text{B.268})$$

Із рівнянь (B.268) випливає, що розширення ядра симетрії (B.255) можливе лише при $(m + kn)\lambda_5 + n\lambda_6 = 0$; В такому випадку, із рівнянь (B.268) отримуємо розгалуження: **2.1.** $m \neq 0, \lambda_5 \neq 0$; **2.2** $m \neq 0, \lambda_5 = 0$;

2.3. $m = 0$.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

2.1. $m \neq 0, \lambda_5 \neq 0$. В цьому випадку із третього рівняння (B.268) випливає, що $m\alpha^1 + 2c_1 = 0$, і в результаті приходимо до основної алгебри інваріантності (B.255).

2.2 $m \neq 0, \lambda_5 = 0$. Тоді, очевидно, і $\lambda_6 = 0$. Розв'язавши рівняння (B.268), отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha^{22} &= \alpha^1 = c_2, \\ \alpha^{21} &= -\frac{1}{n}[(m + kn)c_2 + 2c_1]. \end{aligned} \quad (\text{B.269})$$

З формул (3.14), врахувавши (B.269) знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1 x_1 + d_1, \\ \eta^1 &= c_2 u^1, \quad \eta^2 = -(\frac{1}{n}(2c_1 + (m + kn)c_2)u^1 + c_2 u^2). \end{aligned} \quad (\text{B.270})$$

Отже, якщо зображення функцій g^a задаються формулами

$$g^1 = \lambda_3 e^{n \frac{u^2}{u^1}} (u^1)^{p+1}, \quad g^2 = e^{n \frac{u^2}{u^1}} (u^1)^p (\lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^1), \quad (\text{B.271})$$

де $p = m + kn, p \neq 0, n \neq 0, \lambda_3 \neq 0$, то оператор (3.2) з координатами (B.270) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.138)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = n(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1) - 2u^1 \partial_{u^2}, \\ Q = n(u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) - pu^1 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.272})$$

наведену у пункті 15 таблиці 4.

2.3 $m = 0$. Тоді, очевидно, $\lambda_6 = k\lambda_5$. Розв'язавши рівняння (B.268), отримуємо

$$\alpha^{22} = \alpha^1 = 2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2, \quad \alpha^{21} = -k(2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2) - \frac{2}{n} c_1. \quad (\text{B.273})$$

З формул (3.14), врахувавши (B.273) знаходимо

$$\begin{aligned} \xi^0 = 2c_1 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1 x_1 + d_1, \quad \eta^1 = (2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2) u^1, \\ \eta^2 = -(k(2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2) + \frac{2}{n} c_1) u^1 + (2\lambda_5 c_1 x_0 + c_2) u^2. \end{aligned} \quad (\text{B.274})$$

Отже, якщо зображення функцій g^a задаються формулами

$$\begin{aligned} g^1 = [\lambda_3 e^{n \frac{u^2}{u^1}} (u^1)^p + \lambda_5] u^1, \\ g^2 = e^{n \frac{u^2}{u^1}} (u^1)^p (\lambda_3 u^2 + \lambda_4 u^1) + \lambda_5 u^2 - k\lambda_5 u^1, \end{aligned} \quad (\text{B.275})$$

де $p = kn, k \neq 0, n \neq 0, |\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, то оператор (3.2) з координатами (B.274) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.138)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\lambda_5 x_0 Q - \frac{2}{n} u^1 \partial_{u^2}, \\ Q = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} - ku^1 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.276})$$

наведену у пункті 16 таблиці 4.

Н. Тепер дослідимо можливість розширення основної групи симетрії системи (3.134) при зображенні функцій g^a формулами (3.139).

Підставивши зображення функцій g^a , задані формулами (3.139), у рівняння (3.140), та розщепивши отримані рівняння по $\ln u^1$, після деякого спрощення одержуємо

$$\begin{aligned}(\alpha^{22} - \alpha^1)\dot{\varphi}^1 &= \lambda_4(\alpha^1 - \alpha^{22} - 2c_1), \\(\alpha^{22} - \alpha^1)\dot{\varphi}^2 &= \dot{\alpha}^{22} - \dot{\alpha}^1 + 2\lambda_3c_1, \\(k\alpha^1 + \alpha^{21})\dot{\varphi}^1 + 2c_1\varphi^1 &= \dot{\alpha}^1 - \lambda_4\alpha^{21} - 2\lambda_3c_1, \\(k\alpha^1 + \alpha^{21})\dot{\varphi}^2 + (\alpha^1 - \alpha^{22} + 2c_1)\varphi^2 &= \dot{\alpha}^{21} + \lambda_3\alpha^{21}.\end{aligned}\tag{B.277}$$

Встановимо спочатку основну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.139). Для цього в рівняннях (B.277) вважаємо функції φ^a довільними. Маємо

$$\begin{aligned}c_1 = 0, \quad \alpha^{22} = \alpha^1, \quad \alpha^{21} + k\alpha^1 &= 0, \\ \dot{\alpha}^1 = \lambda_4\alpha^1, \quad \dot{\alpha}^{21} + \lambda_3\alpha^1 &= 0.\end{aligned}\tag{B.278}$$

Розв'язок рівнянь (B.278) залежить від співвідношення між λ_3, λ_4 .

1) $\lambda_3 \neq k\lambda_4$. Тоді з рівнянь (B.278) випливає, що

$$c_1 = \alpha^{22} = \alpha^{21} = \alpha^1 = 0.\tag{B.279}$$

З формул (B.279) очевидно, що в цьому випадку основна алгебра інваріантності системи (3.134), (3.139) співпадає з основною групою симетрії системи (3.134).

2) $\lambda_3 = k\lambda_4$. Тоді з рівнянь (B.278) випливає, що

$$c_1 = 0, \quad \alpha^{22} = \alpha^1 = c_2e^{-k\lambda_4x_0}, \quad \alpha^{21} = -kc_2e^{-k\lambda_4x_0}.\tag{B.280}$$

З формул (3.14), врахувавши (B.280), знаходимо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2e^{-k\lambda_4x_0}u^1, \\ \eta^2 &= -kc_2e^{-k\lambda_4x_0}u^1 + c_2e^{-k\lambda_4x_0}u^2.\end{aligned}\tag{B.281}$$

Оператор (3.2) з координатами (B.281) породжує основну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.139)

$$\langle \partial_0, \partial_1, Q = e^{-k\lambda_4x_0}(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} - ku^1\partial_{u^2}) \rangle,\tag{B.282}$$

наведену у пункті 4 таблиці 4.

Далі дослідимо розширення ядра симетрії (В.282) системи (3.134), при g^a вигляду (3.139).

Найбільш широкий клас функцій φ^a , які задовольняють рівняння (В.277) та при яких може відбуватися розширення ядра симетрії (В.282), має вигляд

$$\varphi^1 = \lambda_5 \omega + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6 \omega + \lambda_8. \quad (\text{В.283})$$

Підставивши формули (В.283) у визначальні рівняння (В.252), після розщеплення по ω та спрощення отримуємо

$$\begin{aligned} \lambda_5 c_1 &= 0, \quad \lambda_6(\alpha^1 - \alpha^{22} + 2c_1) = 0, \\ (\lambda_4 + \lambda_5)(\alpha^{22} - \alpha^1) &= -2\lambda_4 c_1, \\ \dot{\alpha}^{22} - \dot{\alpha}^1 &= \lambda_6(\alpha^{22} - \alpha^1) - 2\lambda_3 c_1, \\ \dot{\alpha}^1 - k\lambda_5 \alpha^1 &= (\lambda_4 + \lambda_5)\alpha^{21} + 2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1, \\ \dot{\alpha}^{21} + (\lambda_3 - \lambda_6)\alpha^{21} &= k\lambda_5 \alpha^1 + \lambda_8(\alpha^1 - \alpha^{22} + 2c_1). \end{aligned} \quad (\text{В.284})$$

Проаналізувавши систему (В.284), приходимо до висновку, що при її розв'язанні можливі наступні розгалуження:

1. $\lambda_5 \neq 0, |\lambda_6| + |\lambda_5 + \lambda_4| \neq 0$.
2. $\lambda_5 \neq 0, \lambda_6 = 0, \lambda_5 = -\lambda_4$.
3. $\lambda_5 = 0$.

Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

1. $\lambda_5 \neq 0, |\lambda_6| + |\lambda_5 + \lambda_4| \neq 0$.

З рівнянь (В.284) випливає, що

$$\begin{aligned} c_1 = c_4 &= 0, \quad \alpha^{22} = \alpha^1, \\ \dot{\alpha}^1 &= \tilde{\lambda}_5 \alpha^1 + \tilde{\lambda}_4 \alpha^{21}, \quad \dot{\alpha}^{21} = \tilde{\lambda}_6 \alpha^1 + (\tilde{\lambda}_7 - \tilde{\lambda}_3) \alpha^{21}, \end{aligned} \quad (\text{В.285})$$

де $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_7, \tilde{\lambda}_4 = \lambda_4 + \lambda_5, \tilde{\lambda}_5 = k\lambda_5, \tilde{\lambda}_6 = k\lambda_6, \tilde{\lambda}_7 = \lambda_6 + \lambda_7$.

Розв'язок рівнянь (В.285) залежить від вигляду коренів характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_5 - m & \tilde{\lambda}_4 \\ \tilde{\lambda}_6 & \tilde{\lambda}_7 - \tilde{\lambda}_3 - m \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{В.286})$$

Вигляд коренів характеристичного рівняння (В.286) залежить від знаку дискримінанта

$$D = (\tilde{\lambda}_3 + \tilde{\lambda}_5 - \tilde{\lambda}_7)^2 + 4\tilde{\lambda}_4\tilde{\lambda}_6. \quad (\text{В.287})$$

а) якщо $D > 0$, то $m_1, m_2 = \frac{\tilde{\lambda}_7 + \tilde{\lambda}_5 - \tilde{\lambda}_3 \pm \sqrt{D}}{2} \in R$ — корені рівняння (В.286), тоді розв'язок системи (В.285) матиме наступний вигляд

$$\begin{aligned}\alpha^{22} &= \alpha^1 = c_2 \tilde{\lambda}_4 e^{m_1 x_0} + c_3 \tilde{\lambda}_4 e^{m_2 x_0}, \\ \alpha^{21} &= c_2 (m_1 - \tilde{\lambda}_5) e^{m_1 x_0} + c_3 (m_2 - \tilde{\lambda}_5) e^{m_2 x_0}.\end{aligned}\quad (\text{В.288})$$

Із (3.14), врахувавши (В.288) та умову $c_1 = c_4 = 0$, одержуємо наступні координати оператора (3.2)

$$\begin{aligned}\xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = \tilde{\lambda}_4 [c_2 e^{m_1 x_0} + c_3 e^{m_2 x_0}] u^1, \\ \eta^2 &= [c_2 (m_1 - \tilde{\lambda}_5) e^{m_1 x_0} + c_3 (m_2 - \tilde{\lambda}_5) e^{m_2 x_0}] u^1 + \\ &+ \tilde{\lambda}_4 [c_2 e^{m_1 x_0} + c_3 e^{m_2 x_0}] u^2.\end{aligned}\quad (\text{В.289})$$

Отже, при

$$\begin{aligned}g^1 &= u^1 (\tilde{\lambda}_5 \ln u^1 + \tilde{\lambda}_3) + \tilde{\lambda}_4 u^2, \\ g^2 &= \ln u^1 (\tilde{\lambda}_6 u^1 + \tilde{\lambda}_5 u^2) + \lambda_8 u^1 + \tilde{\lambda}_7 u^2 + \tilde{\lambda}_4 \frac{(u^2)^2}{u^1},\end{aligned}\quad (\text{В.290})$$

де $|\tilde{\lambda}_5| + |\tilde{\lambda}_6| \neq 0$, якщо $D > 0$, то оператор (3.2) з координатами (В.289) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.139)

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 &= e^{m_1 x_0} [\tilde{\lambda}_4 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + (m_1 - \tilde{\lambda}_5) u^1 \partial_{u^2}], \\ Q_2 &= e^{m_2 x_0} [\tilde{\lambda}_4 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + (m_2 - \tilde{\lambda}_5) u^1 \partial_{u^2}] \rangle,\end{aligned}\quad (\text{В.291})$$

що співпадає з пунктом 18 таблиці 4.

б) якщо $D = 0$, то $m_1 = m_2 = m = \frac{\tilde{\lambda}_7 + \tilde{\lambda}_5 - \tilde{\lambda}_3}{2} \in R$ — корені рівняння (В.286), тоді розв'язок системи (В.285) матиме наступний вигляд

$$\alpha^1 = e^{m x_0} \tilde{\lambda}_4 (c_2 x_0 + c_3), \quad \alpha^{21} = e^{m x_0} [(m - \tilde{\lambda}_5) (c_2 x_0 + c_3) + c_2]. \quad (\text{В.292})$$

Підставляючи (В.292) у (3.14) одержуємо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = e^{m x_0} \tilde{\lambda}_4 (c_2 x_0 + c_3) u^1, \\ \eta^2 &= e^{m x_0} [(m - \tilde{\lambda}_5) (c_2 x_0 + c_3) + c_2] u^1 + e^{m x_0} \tilde{\lambda}_4 (c_2 x_0 + c_3) u^2.\end{aligned}\quad (\text{В.293})$$

Отже, при функціях g^a , заданих формулами (В.290), якщо $D = 0$, то оператор (3.2) з координатами (В.293) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.139)

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 &= e^{m x_0} [\tilde{\lambda}_4 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + (m - \tilde{\lambda}_5) u^1 \partial_{u^2}], \\ Q_2 &= e^{m x_0} [x_0 (\tilde{\lambda}_4 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + (m - \tilde{\lambda}_5) u^1 \partial_{u^2}) + u^1 \partial_{u^2}] \rangle,\end{aligned}\quad (\text{В.294})$$

що співпадає з пунктом 19 таблиці 4.

с) якщо $D < 0$, то $m_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ — корені рівняння (В.286), причому $\alpha = \frac{\tilde{\lambda}_7 + \tilde{\lambda}_5 - \tilde{\lambda}_3}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{|D|}$. Тоді розв'язок системи (В.285) матиме наступний вигляд

$$\begin{aligned}\alpha^{22} &= \alpha^1 = \tilde{\lambda}_4 e^{\alpha x_0} [c_2 \cos \beta x_0 + c_3 \sin \beta x_0], \\ \alpha^{21} &= e^{\alpha x_0} [c_2 ((\alpha - \tilde{\lambda}_5) \cos \beta x_0 - \beta \sin \beta x_0) + \\ &+ c_3 (\beta \cos \beta x_0 + (\alpha - \tilde{\lambda}_5) \sin \beta x_0)].\end{aligned}\quad (\text{В.295})$$

Із (3.14), врахувавши (В.295), одержуємо

$$\begin{aligned}\xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = \tilde{\lambda}_4 e^{\alpha x_0} [c_2 \cos \beta x_0 + c_3 \sin \beta x_0] u^1, \\ \eta^2 &= e^{\alpha x_0} [c_2 ((\alpha - \tilde{\lambda}_5) \cos \beta x_0 - \beta \sin \beta x_0) + c_3 (\beta \cos \beta x_0 + \\ &+ (\alpha - \tilde{\lambda}_5) \sin \beta x_0)] u^1 + \tilde{\lambda}_4 e^{\alpha x_0} [c_2 \cos \beta x_0 + c_3 \sin \beta x_0] u^2.\end{aligned}\quad (\text{В.296})$$

Отже, при функціях g^a , заданих формулами (В.290), якщо $D < 0$, то оператор (3.2) з координатами (В.296) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.139)

$$\begin{aligned}\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 &= e^{\alpha x_0} [\tilde{\lambda}_4 \cos \beta x_0 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + \\ &+ ((\alpha - \tilde{\lambda}_5) \cos \beta x_0 - \beta \sin \beta x_0) u^1 \partial_{u^2}], \\ Q_2 &= e^{\alpha x_0} [\tilde{\lambda}_4 \sin \beta x_0 (u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) + \\ &+ ((\alpha - \tilde{\lambda}_5) \sin \beta x_0 + \beta \cos \beta x_0) u^1 \partial_{u^2}] \rangle,\end{aligned}\quad (\text{В.297})$$

що співпадає з пунктом 20 таблиці 4.

2. $\lambda_5 \neq 0$, $\lambda_6 = 0$, $\lambda_5 = -\lambda_4$. З рівнянь (В.284) випливає, що

$$\begin{aligned}c_1 &= 0, \quad \alpha^{22} = \alpha^1 + c_4, \\ \dot{\alpha}^1 + k \lambda_4 \alpha^1 &= 0, \quad \dot{\alpha}^{21} + \lambda_3 \alpha^{21} = -\lambda_8 c_4,\end{aligned}\quad (\text{В.298})$$

З останнього рівняння (В.298) очевидні два розгалуження:

а) $\lambda_3 \neq 0$; б) $\lambda_3 = 0$.

а) $\lambda_3 \neq 0$. В цьому випадку одержуємо наступні зображення функцій g^a

$$g^1 = u^1 (\tilde{\lambda}_4 \ln u^1 + \tilde{\lambda}_3), \quad g^2 = u^2 (\tilde{\lambda}_4 \ln u^1 + \lambda_7) + \lambda_8 u^1,$$

де $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_7$, $\tilde{\lambda}_3 \neq \lambda_7$, $\tilde{\lambda}_4 = -k \lambda_4$, що еквівалентно формулам (В.177).

б) $\lambda_3 = 0$. В цьому випадку зображення функцій g^a матимуть вигляд

$g^1 = u^1(\tilde{\lambda}_4 \ln u^1 + \lambda_7)$, $g^2 = u^2(\tilde{\lambda}_4 \ln u^1 + \lambda_7) + \lambda_8 u^1$,
де $\tilde{\lambda}_4 = -k\lambda_4$, що еквівалентно формулам (В.181).

3. $\lambda_5 = 0$. З рівнянь (В.284) випливає, що

$$\begin{aligned} \lambda_4[2(\lambda_6 - \lambda_3)c_1x_0 + 2c_1 + c_4] &= 0, \\ \lambda_6[2(\lambda_6 - \lambda_3)c_1x_0 - 2c_1 + c_4] &= 0, \\ \alpha^{22} &= \alpha^1 + 2(\lambda_6 - \lambda_3)c_1x_0 + c_4, \\ \dot{\alpha}^1 &= \lambda_4\alpha^{21} + 2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1, \\ \dot{\alpha}^{21} &= k\lambda_6\alpha^1 + (\lambda_6 - \lambda_3)\alpha^{21} - \lambda_8(2(\lambda_6 - \lambda_3)c_1x_0 - 2c_1 + c_4). \end{aligned} \quad (\text{В.299})$$

З перших двох рівнянь (В.299) отримуємо розгалуження:

3.1. $\lambda_4 \neq 0, \lambda_6 \neq 0$; **3.2.** $\lambda_6 \neq 0, \lambda_4 = 0$; **3.3.** $\lambda_6 = 0, \lambda_4 \neq 0$; **3.4.** $\lambda_6 = \lambda_4 = 0$.

3.1. $\lambda_4 \neq 0, \lambda_6 \neq 0$. З рівнянь (В.299) випливає, що

$$\begin{aligned} c_1 = c_4 = 0, \quad \alpha^{22} &= \alpha^1, \\ \dot{\alpha}^1 &= \lambda_3\alpha^{21}, \quad \dot{\alpha}^{21} = k\lambda_6\alpha^1 + (\lambda_6 - \lambda_4)\alpha^{21}. \end{aligned} \quad (\text{В.300})$$

Одержали частинний випадок системи (В.285), розв'язки якої наведені в п.1.

3.2. $\lambda_6 \neq 0, \lambda_4 = 0$. Тоді з рівнянь (В.299) випливає, що

$$\begin{aligned} c_4 &= 2c_1, \quad (\lambda_6 - \lambda_3)c_1 = 0, \\ \alpha^{22} &= \alpha^1 + 2c_1, \\ \dot{\alpha}^1 &= \lambda_4\alpha^{21} + 2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1, \\ \dot{\alpha}^{21} &= k\lambda_6\alpha^1 + (\lambda_6 - \lambda_3)\alpha^{21} - \lambda_8(2(\lambda_6 - \lambda_3)c_1x_0 - 2c_1 + c_4). \end{aligned} \quad (\text{В.301})$$

Розв'язуючи рівняння (В.301), одержуємо два розгалуження:

а) $\lambda_6 \neq \lambda_3$; **б)** $\lambda_6 = \lambda_3$.

а) $\lambda_6 \neq \lambda_3$. Тоді розв'язок рівнянь (В.301) матиме наступний вигляд

$$c_1 = 0, \quad \alpha^1 = \alpha^{22} = c_2, \quad \alpha^{21} = c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_3)x_0} - k \frac{\lambda_6}{(\lambda_6 - \lambda_3)} c_2. \quad (\text{В.302})$$

Із (3.14), врахувавши (В.302) та умову $c_1 = 0$, одержуємо наступні координати оператора (3.2)

$$\begin{aligned} \xi^0 &= d_0, \quad \xi^1 = d_1, \quad \eta^1 = c_2 u^1, \\ \eta^2 &= (c_3 e^{(\lambda_6 - \lambda_3)x_0} - k \frac{\lambda_6}{(\lambda_6 - \lambda_3)} c_2) u^1 + c_2 u^2. \end{aligned} \quad (\text{В.303})$$

Отже, при

$$g^1 = \tilde{\lambda}_3 u^1, \quad g^2 = u^1(\tilde{\lambda}_6 \ln u^1 + \lambda_8) + \tilde{\lambda}_7 u^2, \quad (\text{B.304})$$

де $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_7$, $\tilde{\lambda}_3 \neq \tilde{\lambda}_7$, $\tilde{\lambda}_6 = k\lambda_6$, оператор (3.2) з координатами (B.303) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.139)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q_1 = (\tilde{\lambda}_7 - \tilde{\lambda}_3)(u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}) - \tilde{\lambda}_6 u^1 \partial_{u^2}, \\ Q_2 = e^{(\tilde{\lambda}_7 - \tilde{\lambda}_3)x_0} u^1 \partial_{u^2} \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.305})$$

що міститься у пункті 21 таблиці 4 при $\lambda_5 = 0$.

б) $\lambda_6 = \lambda_3$. В цьому випадку, розв'язавши рівняння (B.301), отримуємо

$$\begin{aligned} \alpha^1 = 2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1 x_0 + c_2, \quad \alpha^{22} = 2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1 x_0 + c_2 + 2c_1, \\ \alpha^{21} = k\lambda_6(\lambda_3 + \lambda_7)c_1 x_0^2 + k\lambda_6 c_2 x_0 + c_3. \end{aligned} \quad (\text{B.306})$$

Із (3.14), врахувавши (B.306), одержуємо наступні координати оператора (3.2)

$$\begin{aligned} \xi^0 = 2c_1 x_0 + d_0, \quad \xi^1 = c_1 x_1 + d_1, \quad \eta^1 = [2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1 x_0 + c_2]u^1, \\ \eta^2 = [k\lambda_6(\lambda_3 + \lambda_7)c_1 x_0^2 + k\lambda_6 c_2 x_0 + c_3]u^1 + \\ + [2(\lambda_3 + \lambda_7)c_1 x_0 + c_2 + 2c_1]u^2. \end{aligned} \quad (\text{B.307})$$

Отже, при

$$g^1 = \tilde{\lambda}_3 u^1, \quad g^2 = u^1(\tilde{\lambda}_6 \ln u^1 + \lambda_8) + \lambda_3 u^2, \quad (\text{B.308})$$

де $\tilde{\lambda}_3 = \lambda_3 + \lambda_7$, $\tilde{\lambda}_6 = k\lambda_6$, $\tilde{\lambda}_6 \neq 0$, оператор (3.2) з координатами (B.307) породжує максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.139)

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\tilde{\lambda}_3 x_0 Q_1 - \tilde{\lambda}_6 \tilde{\lambda}_3 x_0^2 Q_2 + 2u^2 \partial_{u^2}, \\ Q_1 = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} + \tilde{\lambda}_6 x_0 u^1 \partial_{u^2}, \quad Q_2 = u^1 \partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.309})$$

що відповідає пункту 30 таблиці 4 при $\lambda_5 = 0$.

3.3. $\lambda_4 \neq 0$, $\lambda_6 = 0$. Тоді зображення функцій g^a матимуть вигляд

$$g^1 = \tilde{\lambda}_3 u^1 + \lambda_4 u^2, \quad g^2 = \lambda_8 u^1 + \lambda_7 u^2 + \lambda_4 \frac{(u^2)^2}{u^1},$$

що рівносильно формулам (B.108).

б) $\lambda_3 = 0$. В цьому випадку отримуємо наступні зображення функцій g^a

$$g^1 = \lambda_7 u^1 + \lambda_4 u^2, \quad g^2 = \lambda_8 u^1 + \lambda_7 u^2 + \lambda_4 \frac{(u^2)^2}{u^1},$$

що еквівалентно формулам (В.111).

3.4. $\lambda_6 = \lambda_5 = \lambda_4 = 0$. В цьому випадку зображення функцій g^a мають вигляд (В.220) та (В.224), при якому максимальну алгебру інваріантності системи (3.134), (3.139) встановлено в розділі G доведення теореми.

Теорему 3.9 доведено.

Додаток С

Доведення теореми 3.11

Доведення. З теореми 3.10 випливає, що система (3.148) допускає розширення основної алгебри інваріантності, якщо функції g^1, g^2 мають вигляд (3.29), (3.30), (3.129), (3.150). Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

Випадок А. Нехай, функції g^1, g^2 задаються формулами (3.29). В цьому випадку система (3.148) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} \varphi^1(u^1) \\ u^2[\varphi^2(u^1) + \lambda_3 \ln u^2] \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

де $\lambda_3 \neq 0$.

В результаті підстановки g^1, g^2 із (3.29) разом з $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ та відповідними координатами (3.15) оператора (3.2) у систему (3.5) одержується система

$$\begin{aligned} \alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^1 - (\alpha^1 - 2\dot{A})\varphi^1 &= (\alpha_0^1 - \lambda_1 \alpha_{11}^1)u^1, \\ \alpha^1 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{A}\varphi^2 &= -2\lambda_1 \alpha_{11}^1 + \alpha_0^{22} - \lambda_3 \alpha^{22}, \\ \lambda_3 \dot{A} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Спочатку визначимо основну алгебру інваріантності системи (C.1). Для цього вважаємо функції φ^1, φ^2 у системі (C.2) довільними. Тоді із системи (C.2) випливає

$$\alpha^1 = 0, \quad \dot{A} = 0, \quad \dot{B} = 0, \quad C = 0, \quad \alpha^{22} = c_4 e^{\lambda_3 x_0}. \quad (\text{C.3})$$

Із (C.3) одержуємо

$$A = c_1, \quad B = c_2, \quad C = 0, \quad \alpha^{22} = c_3 e^{\lambda_3 x_0}, \quad (\text{C.4})$$

де c_1, c_2, c_3 — сталі інтегрування. Із формул (3.15), (С.3) стає очевидно, що основною алгеброю інваріантності системи (С.1) є алгебра з пункту 1 таблиці 1.

Дослідимо тепер, при яких значеннях функцій φ^a відбувається розширення основної алгебри інваріантності системи (С.1).

Продиференціювавши друге рівняння системи (С.2) по змінній x_1 , одержуємо рівняння $\alpha_1^1 \dot{\varphi}^2 = 0$, з якого випливають два розгалуження: **1.** $\dot{\varphi}^2 \neq 0$, **2.** $\dot{\varphi}^2 = 0$.

1. Якщо $\dot{\varphi}^2 \neq 0$, то система (С.2) набуває вигляду (А.1), розв'язки якої вже проаналізовані в розділі А доведення теореми 7.

2. $\dot{\varphi}^2 = 0$. Тоді, враховуючи зауваження 2, із системи (С.2) випливає

$$\dot{\alpha}^{22} = \lambda_3 \alpha^{22}, \quad (\text{С.5})$$

$$\alpha^1(u^1 \dot{\varphi}^1 - \varphi^1) = \alpha_0^1 u^1. \quad (\text{С.6})$$

Із (С.6) випливає, що найбільш широкий клас функцій φ^a , які задовольняють рівняння (С.2), і при яких можливе розширення основної алгебри інваріантності системи (С.1), має вигляд

$$\varphi^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7), \quad \varphi^2 = \lambda_4. \quad (\text{С.7})$$

Підставляючи (С.7) у (С.6), враховуючи формули (3.15), маємо

$$\dot{A} = 0, \quad \ddot{B} = \lambda_5 \dot{B}, \quad \dot{C} = \lambda_5 C, \quad (\text{С.8})$$

де c_1, c_2, c_3 — сталі інтегрування. Розв'язок рівнянь (С.8) залежить від значення сталої λ_5 .

Розв'язавши (С.5), (С.8) при $\lambda_5 \neq 0$, одержуємо

$$A = c_1, \quad B = c_2 e^{\lambda_5 x_0} + c_3, \quad C = c_4 e^{\lambda_5 x_0}, \quad \alpha^{22} = c_5 e^{\lambda_3 x_0}. \quad (\text{С.9})$$

Із формул (3.15), (С.9) приходимо до алгебри

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad \mathcal{G} = e^{\lambda_5 x_0} (\partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1} \lambda_5 x_1 u^1 \partial_{u^1}), \quad (\text{С.10}) \\ Q_1 = e^{\lambda_5 x_0} u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = e^{\lambda_3 x_0} u^2 \partial_{u^2} \rangle.$$

Отже, при

$$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7), \quad g^2 = u^2(\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_4) \quad (\text{С.11})$$

максимальною алгеброю інваріантності системи (С.1) є алгебра (С.10), що при $\lambda_6 = 0$ відповідає пункту 8 таблиці 5.

Розв'язавши (С.5), (С.8) при $\lambda_5 = 0$, одержуємо

$$A = c_1, \quad B = c_2 x_0 + c_3, \quad C = c_4, \quad \alpha^{22} = c_5 e^{\lambda_3 x_0}. \quad (\text{С.12})$$

Із формул (3.15), (С.12) приходимо до алгебри

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0 \partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1} x_1 u^1 \partial_{u^1}, \\ Q_1 = u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = e^{\lambda_3 x_0} u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (\text{С.13})$$

Отже, при

$$g^1 = \lambda_7 u^1, \quad g^2 = u^2 (\lambda_3 \ln u^2 + \lambda_4) \quad (\text{С.14})$$

максимальною алгеброю інваріантності системи (С.1) є алгебра (С.13), що при $\lambda_6 = 0$ відповідає пункту 2 таблиці 5.

Випадок **В**. Нехай, функції g^1, g^2 задаються формулами (3.30). В цьому випадку система (3.148) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} (u^2)^m \varphi^1(u^1) \\ (u^2)^{m+1} \varphi^2(u^1) \end{pmatrix}. \quad (\text{С.15})$$

Підставивши g^1, g^2 із (3.30) разом з $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ та відповідними координатами (3.15) оператора (3.2) у систему (3.5), одержуємо систему

$$\begin{aligned} (u^2)^m [\alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^1 + (m\alpha^{22} - \alpha^1 + 2\dot{A})\varphi^1] &= (\alpha_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A})u^1, \\ (u^2)^m [\alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^2 + (m\alpha^{22} + 2\dot{A})\varphi^2] &= \dot{\alpha}^{22} + \ddot{A}. \end{aligned} \quad (\text{С.16})$$

Спочатку визначимо основну алгебру інваріантності системи (С.15). Для цього вважаємо функції φ^1, φ^2 у системі (С.16) довільними. Тоді із системи (С.16) випливає

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= 0, \quad \ddot{A} = 0, \quad \dot{B} = 0, \quad C = 0, \\ m\alpha^{22} + 2\dot{A} &= 0, \quad \dot{\alpha}^{22} = 0. \end{aligned} \quad (\text{С.17})$$

Із (С.17) одержуємо

$$A = c_1 x_0 + c_2, \quad B = c_3, \quad C = 0, \quad \alpha^{22} = -2c_4, \quad c_1 = mc_4 \quad (\text{С.18})$$

де c_1, c_2, c_3 — сталі інтегрування. Із формул (3.15), (С.3) стає очевидно, що основною алгеброю інваріантності системи (С.1) є алгебра з пункту 2 таблиці 1.

Дослідимо тепер, при якому вигляді функцій φ^a відбувається розширення основної алгебри інваріантності системи (С.15).

Продиференціювавши друге рівняння системи (С.16) по змінній x_1 , одержуємо рівняння $\alpha_1^1 \dot{\varphi}^2 = 0$, з якого випливають два розгалуження:

1. $\dot{\varphi}^2 \neq 0$, 2. $\dot{\varphi}^2 = 0$.

1. Якщо $\dot{\varphi}^2 \neq 0$, то система (С.16) набуває вигляду (А.14), розв'язки якої вже проаналізовані в розділі В доведення теореми (3.9).

2. $\dot{\varphi}^2 = 0$. Тоді зрозуміло, що $\varphi^2 = \lambda_4$, в залежності від значення сталої m при розв'язанні системи (С.16) одержуємо два розгалуження :

2.1. $m \neq 0$. 2.2. $m = 0$.

2.1. $m \neq 0$. Розщепивши систему (С.16) по $(u^2)^m$, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} \alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^1 + (m\alpha^{22} - \alpha^1 + 2\dot{A})\varphi^1 &= 0, \\ \alpha_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} &= 0, \quad \lambda_4(m\alpha^{22} + 2\dot{A}) = 0, \quad \dot{\alpha}^{22} + \ddot{A} = 0. \end{aligned} \quad (\text{С.19})$$

Із (С.19) випливає, що найбільш широкий клас функцій φ^1 , які задовольняють рівняння (С.19), і при яких можливе розширення ядра симетрії системи (С.15) має вигляд

$$\varphi^1 = \lambda_5 (u^1)^n, \quad (\text{С.20})$$

де λ_5, n — довільні сталі. Підставляючи (С.20) у (С.19), маємо

$$\begin{aligned} \lambda_5[(n-1)\alpha^1 + m\alpha^{22} + 2\dot{A}] &= 0, \quad \lambda_4(m\alpha^{22} + 2\dot{A}) = 0, \\ \dot{\alpha}_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} &= 0, \quad \dot{\alpha}^{22} + \ddot{A} = 0. \end{aligned} \quad (\text{С.21})$$

Проаналізувавши рівняння (С.21), отримуємо розгалуження:

а) $\lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \neq 0$; б) $\lambda_4 \neq 0, \lambda_5 = 0$;

с) $\lambda_4 = 0, \lambda_5 \neq 0$; д) $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$.

а) $\lambda_4 \neq 0, \lambda_5 \neq 0$; Із (С.21) випливає

$$\begin{aligned} (n-1)\alpha^1 &= 0, \quad (m-2)\ddot{A} = 0, \\ \dot{\alpha}_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} &= 0, \quad m\alpha^{22} + 2\dot{A} = 0. \end{aligned} \quad (\text{С.22})$$

При $n \neq 1$ система (С.22) набуває вигляду (С.17), і відповідно приходимо до алгебри з пункту 2 таблиці 1. Тому надалі будемо вважати, що $n = 1$. При цьому з другого рівняння (С.22) очевидні розгалуження:

a1) $n = 1, m \neq 2$; **a2)** $n = 1, m = 2$.

a1) $n = 1, m \neq 2$. Розв'язавши (С.22), та врахувавши (3.15), одержуємо

$$A = mc_1x_0 + c_2, \quad B = c_3x_0 + c_4, \quad C = c_5, \quad \alpha^{22} = -2c_1. \quad (\text{С.23})$$

Із формул (3.15), (С.23) приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2u^2\partial_{u^2}, \\ G = x_0\partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1}x_1u^1\partial_{u^1}, \quad Q = u^1\partial_{u^1} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{С.24})$$

Отже, стає зрозуміло, що при

$$g^1 = \lambda_5 u^1 (u^2)^m, \quad g^2 = \lambda_4 (u^2)^{m+1}, \quad (\text{С.25})$$

де $\lambda_4, \lambda_5 \neq 0, m \neq 2$, максимальна алгебра інваріантності (С.24) системи (С.1) міститься в пункті 4 таблиці 5.

a2) $n = 1, m = 2$. Розв'язавши (С.22), та врахувавши (3.15), одержуємо

$$\begin{aligned} A = c_1x_0^2 + c_2x_0 + c_3, \quad B = c_4x_0 + c_5, \\ C = \lambda_1(2c_1x_0 + c_2) + c_6, \quad \alpha^{22} = -(2c_1x_0 + c_2). \end{aligned} \quad (\text{С.26})$$

Із формул (3.15), (С.26) приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \frac{1}{2}u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}, \\ G = x_0\partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1}x_1u^1\partial_{u^1}, \quad Q = u^1\partial_{u^1}, \\ \Pi = 2x_0^2\partial_0 + 2x_0x_1\partial_1 - (\frac{1}{2\lambda_1}x_1^2 + x_0)u^1\partial_{u^1} - 2x_0u^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{С.27})$$

Отже, стає зрозуміло, що при

$$g^1 = \lambda_5 u^1 (u^2)^2, \quad g^2 = \lambda_4 (u^2)^3, \quad (\text{С.28})$$

де $\lambda_4, \lambda_5 \neq 0$, максимальна алгебра інваріантності (С.27) системи (С.1) міститься в пункті 5 таблиці 5.

b) $\lambda_4 \neq 0, \lambda_5 = 0$. Із (С.21) випливає

$$\ddot{\alpha}_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} = 0, \quad (m-2)\ddot{A} = 0, \quad m\alpha^{22} + 2\dot{A} = 0. \quad (\text{С.29})$$

З другого рівняння (С.29) очевидні розгалуження: **b1)** $m \neq 2$; **b2)** $m = 2$.

b1) $m \neq 2$. Розв'язавши (С.29), та врахувавши (3.15), одержуємо

$$A = mc_1x_0 + c_2, \quad B = c_3x_0 + c_4, \quad C = c_5, \quad \alpha^{22} = -2c_1. \quad (\text{С.30})$$

Із формул (3.15), (С.30) приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2u^2\partial_{u^2}, \\ G = x_0\partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1}x_1u^1\partial_{u^1}, \quad Q = u^1\partial_{u^1} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{С.31})$$

Отже, стає зрозуміло, що при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = \lambda_4(u^2)^{m+1}, \quad (\text{С.32})$$

де $\lambda_5 \neq 0, m \neq 0, 2$, максимальна алгебра інваріантності (С.31) системи (С.1) міститься в пункті 4 таблиці 5.

b2) $m = 2$.

Розв'язавши (С.22), та врахувавши (3.15), одержуємо

$$\begin{aligned} A = c_1x_0^2 + c_2x_0 + c_3, \quad B = c_4x_0 + c_5, \\ C = \lambda_1(2c_1x_0 + c_2) + c_6, \quad \alpha^{22} = -(2c_1x_0 + c_2). \end{aligned} \quad (\text{С.33})$$

Із формул (3.15), (С.28) приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \frac{1}{2}u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}, \\ G = x_0\partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1}x_1u^1\partial_{u^1}, \quad Q = u^1\partial_{u^1}, \\ \Pi = 2x_0^2\partial_0 + 2x_0x_1\partial_1 - (\frac{1}{2\lambda_1}x_1^2 + x_0)u^1\partial_{u^1} - 2x_0u^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{С.34})$$

Отже, стає зрозуміло, що при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = \lambda_4(u^2)^3, \quad (\text{С.35})$$

де $\lambda_4 \neq 0$, максимальна алгебра інваріантності (С.34) системи (С.15) міститься в пункті 5 таблиці 5.

с) $\lambda_4 = 0, \lambda_5 \neq 0$. Із (С.21) випливає

$$\dot{\alpha}_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} = 0, \quad (\text{С.36})$$

$$\alpha^{22} = c_7 - \dot{A}, \quad (n-1)\alpha^1 + (2-m)\dot{A} + mc_7 = 0. \quad (\text{С.37})$$

Розв'язавши (С.37), та врахувавши (3.15), одержуємо

$$\begin{aligned} A &= c_1 x_0^2 + c_2 x_0 + c_3, & B &= c_4 x_0 + c_5, \\ C &= \lambda_1(2c_1 x_0 + c_2 + 2c_6), & \alpha^{22} &= c_7 - (2c_1 x_0 + c_2), \\ \alpha^1 &= -\frac{1}{2\lambda_1}[c_1 x_1^2 + c_4 x_1 + \lambda_1(2c_1 x_0 + c_2 + 2c_6)]. \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Підставивши (С.38) у (С.37), отримуємо

$$\begin{aligned} (n-1)c_1 &= (m-2)c_1 = (n-1)c_4 = 0, \\ mc_7 &= (m-2)c_2 + (n-1)c_6. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

З рівнянь (С.39) очевидні розгалуження: **с1)** $n \neq 1$; **с2)** $n = 1, m \neq 2$; **с3)** $n = 1, m = 2$.

с1) $n \neq 1$. Із (С.39) отримуємо

$$c_1 = c_4 = 0, \quad mc_7 = (m-2)c_2 + (n-1)c_6. \quad (\text{C.40})$$

Із (С.38), (С.40) та врахувавши (3.15), приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \frac{1}{2}u^1\partial_{u^1}) - 2u^2\partial_{u^2}, \\ Q = mu^1\partial_{u^1} - (n-1)u^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.41})$$

Отже, стає зрозуміло, що при

$$g^1 = \lambda_5(u^2)^m(u^1)^n, \quad g^2 = 0, \quad (\text{C.42})$$

де $\lambda_5 \neq 0, n \neq 1$, максимальна алгебра інваріантності (С.41) системи (С.15) міститься в пункті 4 таблиці 3.

с2) $n = 1, m \neq 2$. Із (С.39) отримуємо

$$c_1 = 0, \quad c_7 = \frac{m-2}{m}c_2. \quad (\text{C.43})$$

Із (С.38), (С.43) та врахувавши (3.15), приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - \frac{1}{2}u^1\partial_{u^1} - \frac{2}{m}u^2\partial_{u^2}, \\ G = x_0\partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1}x_1u^1\partial_{u^1}, \quad Q = u^1\partial_{u^1} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.44})$$

Отже, стає зрозуміло, що при

$$g^1 = \lambda_5(u^2)^m u^1, \quad g^2 = 0, \quad (\text{C.45})$$

де $\lambda_5 \neq 0, m \neq 0, m \neq 2$, максимальна алгебра інваріантності (С.44) системи (С.15) міститься в пункті 4 таблиці 5.

с3) $n = 1, m = 2$. Із (С.39) отримуємо

$$c_7 = 0. \quad (\text{С.46})$$

Із (С.38), (С.46) та врахувавши (3.15), приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - (u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}), \\ G = x_0\partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1}x_1u^1\partial_{u^1}, \quad Q = u^1\partial_{u^1}, \\ \Pi = 2x_0^2\partial_0 + 2x_0x_1\partial_1 - (\frac{1}{2\lambda_1}x_1^2 + x_0)u^1\partial_{u^1} - 2x_0u^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{С.47})$$

Отже, стає зрозуміло, що при

$$g^1 = \lambda_5(u^2)^2u^1, \quad g^2 = 0, \quad (\text{С.48})$$

де $\lambda_5 \neq 0$, максимальна алгебра інваріантності (С.47) системи (С.15) міститься в пункті 5 таблиці 5.

d) $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$.

Розв'язавши (С.21), та врахувавши (3.15), одержуємо

$$\begin{aligned} A = c_1x_0^2 + c_2x_0 + c_3, \quad B = c_4x_0 + c_5, \\ C = \lambda_1(2c_1x_0 + c_2) + c_6, \quad \alpha^{22} = c_7 - (2c_1x_0 + c_2). \end{aligned} \quad (\text{С.49})$$

Із формул (3.15), (С.49) приходимо до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \partial_1, D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - (u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}), \\ G = x_0\partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1}x_1u^1\partial_{u^1}, \quad Q_1 = u^1\partial_{u^1}, \quad Q_2 = u^2\partial_{u^2}, \\ \Pi = 2x_0^2\partial_0 + 2x_0x_1\partial_1 - (\frac{1}{2\lambda_1}x_1^2 + x_0)u^1\partial_{u^1} - 2x_0u^2\partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{С.50})$$

Отже, стає зрозуміло, що при

$$g^1 = 0, \quad g^2 = 0, \quad (\text{С.51})$$

максимальна алгебра інваріантності (С.50) системи (С.15) міститься в пункті 6 таблиці 5.

2.2. $m = 0$. Оскільки $\varphi^2 = \lambda_4$, то рівняння (С.16) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \alpha^1 u^1 \dot{\varphi}^1 + (2\dot{A} - \alpha^1) \varphi^1 &= u^1 (\alpha_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A}), \\ \dot{\alpha}^{22} &= -\ddot{A} + 2\lambda_4 \dot{A}. \end{aligned} \quad (\text{С.52})$$

Із (С.52) випливає, що найбільш широкий клас функцій φ^1 , які задовольняють рівняння (С.52), і при яких можливе розширення основної алгебри інваріантності системи (С.15), є розв'язком структурного рівняння

$$k_1 u^1 \dot{\varphi}^1 - (k_1 + k_2) \varphi^1 = k_3 u^1, \quad (\text{С.53})$$

де k_1, k_2, k_3 — довільні сталі, причому

$$\alpha^1 = k_1 \psi(x_0, x_1), \quad -2\dot{A} = k_2 \psi(x_0, x_1), \quad \alpha_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} = k_3 \psi(x_0, x_1).$$

Розв'язуючи (С.53), в залежності від значення сталих k_1, k_2, k_3 одержуємо наступний вигляд функції φ^1

$$\varphi^1 = u^1(\lambda_5 (u^1)^n + \lambda_7), \quad (\text{С.54})$$

$$\varphi^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7). \quad (\text{С.55})$$

Зауваження С.1. У формулах (С.54), (С.55) накладаємо обмеження $\lambda_5 \neq 0$ з метою уникнути їх перетину.

2.2.1. Підставляючи (С.54) у (С.52), маємо

$$\begin{aligned} \lambda_5(n\alpha^1 + 2\dot{A})(u^1)^n &= \alpha_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} - 2\lambda_7\dot{A}, \\ \alpha^{22} &= -\dot{A} + 2\lambda_4 A + c_7. \end{aligned} \quad (\text{С.56})$$

Проаналізувавши рівняння (С.56), отримуємо розгалуження: а) $n \neq 0$; б) $n = 0$.

а) $n \neq 0$. Із (С.56) випливає

$$\begin{aligned} \lambda_5(n\alpha^1 + 2\dot{A}) &= 0, \quad \alpha_0^1 = -\frac{1}{2}\ddot{A} + 2\lambda_7\dot{A}, \\ \alpha^{22} &= -\dot{A} + 2\lambda_4 A + c_7. \end{aligned} \quad (\text{С.57})$$

Враховуючи вигляд α^1 у формулах (3.15), з рівнянь (С.57) випливає:

$$\begin{aligned} A &= c_1 x_0 + c_2, \quad B = c_3, \quad nC = 4\lambda_1 c_1, \\ \alpha^{22} &= 2\lambda_4 c_1 x_0 + c_4, \quad \lambda_7 c_1 = 0, \end{aligned} \quad (\text{С.58})$$

де $c_4 = 2\lambda_4 c_2 - c_1 + c_7$. З формул (С.58) випливає, що розширення основної алгебри інваріантності системи (С.15) можливе лише при $\lambda_7 = 0$. В такому випадку формули (3.15), (С.58) приводять до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D &= n(2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + 2\lambda_4 x_0 u^2 \partial_{u^2}) - 2u^1 \partial_{u^1}, \\ Q &= u^2 \partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{С.59})$$

Отже, стає зрозуміло, що з точністю до перетворень 3.128 функції

$$g^1 = \lambda_5(u^1)^{n+1}, \quad g^2 = \lambda_4 u^2, \quad (\text{C.60})$$

де $\lambda_5 \neq 0, n \neq 0$, та максимальна алгебра інваріантності (C.59) системи (C.15), (C.60) містяться в пункті 5 таблиці 3.

б) $n = 0$. Із (C.56) випливає

$$\alpha_0^1 = -\frac{1}{2}\ddot{A} + 2\tilde{\lambda}_5(n\alpha^1 + 2\dot{A}) = 0, \quad \alpha^{22} = -\dot{A} + 2\lambda_4 A + c_7, \quad (\text{C.61})$$

де $\tilde{\lambda}_5 = \lambda_5 + \lambda_7$.

Враховуючи вигляд α^1 у формулах (3.15), з рівнянь (C.61) випливає:

$$\begin{aligned} A &= c_1 x_0^2 + c_2 x_0 + c_3, \quad B = c_4 x_0 + c_5, \\ C &= -2\lambda_1[2\tilde{\lambda}_5 A - \frac{1}{2}\dot{A}] + c_6, \\ \alpha^{22} &= 2\lambda_4(c_1 x_0^2 + c_2 x_0 + c_3) - 2c_1 x_0 - c_2 + c_7. \end{aligned} \quad (\text{C.62})$$

Формули (C.62), (3.15) приводять до алгебри

$$\begin{aligned} \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad G &= x_0 \partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1} x_1 u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_1 = u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = u^2 \partial_{u^2}, \\ D &= 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + (2\lambda_5 x_0 - \frac{1}{2}) u^1 \partial_{u^1} + (2\lambda_4 x_0 - 1) u^2 \partial_{u^2}, \\ \Pi &= 2x_0^2 \partial_0 + 2x_0 x_1 \partial_1 + (2\tilde{\lambda}_5 x_0^2 - \frac{1}{2\lambda_1} x_1^2 - x_0) u^1 \partial_{u^1} + \\ &+ (2\lambda_4 x_0^2 - 2x_0) u^2 \partial_{u^2} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

Отже, стає зрозуміло, що при

$$g^1 = \tilde{\lambda}_5 u^1, \quad g^2 = \lambda_4 u^2 \quad (\text{C.64})$$

максимальна алгебра інваріантності (C.63) системи (C.15) відповідає пункту 6 таблиці 5.

2.2.2. Підставляючи (C.55) у (C.52), після розщеплення по $\ln u^1$ маємо

$$\begin{aligned} \lambda_5(\alpha^1 - 2\dot{A}) &= 0, \quad (\lambda_5 - \lambda_7)\alpha^1 + 2\lambda_7 \dot{A} = 0, \\ \alpha_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} &= 0, \quad \dot{\alpha}^{22} = -\ddot{A} + 2\lambda_4 A. \end{aligned} \quad (\text{C.65})$$

Оскільки згідно зауваження (C.1) $\lambda_5 \neq 0$, то з рівнянь (C.65) отримуємо

$$\alpha^1 = \dot{A} = 0, \quad \dot{\alpha}^{22} = c_7. \quad (\text{C.66})$$

Враховуючи формули (3.15), з рівнянь (C.66) стає зрозуміло, що при

$$g^1 = u^1(\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7), \quad g^2 = \lambda_4 u^2, \quad (\text{C.67})$$

де $\lambda_5 \neq 0$, розширення ядра симетрії системи (С.15) не відбувається.

Випадок С. Нехай, функції g^1, g^2 задаються формулами (3.129). В цьому випадку система (С.15) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} u^1[\varphi^1(\omega) + \lambda_3 \ln u^1] \\ u^2[\varphi^2(\omega) + \lambda_4 \ln u^1] \end{pmatrix}, \quad (\text{С.68})$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$, $|\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$ — довільні сталі.

В результаті підстановки g^1, g^2 із (3.129) разом з $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ та відповідними координатами (3.15) оператора (3.2) у систему $S_3 = 0$, після розщеплення по $\ln u^1$, одержується система

$$\begin{aligned} \dot{A} &= 0, \\ (\alpha^{22} - k\alpha^1)\omega\dot{\varphi}^1 &= \alpha_0^1 - \lambda_3\alpha^1, \\ (\alpha^{22} - k\alpha^1)\omega\dot{\varphi}^2 &= \dot{\alpha}^{22} - \lambda_4\alpha^1. \end{aligned} \quad (\text{С.69})$$

Спочатку визначимо ядро симетрій системи (С.68). Для цього вважаємо функції φ^1, φ^2 у системі (С.69) довільними. Тоді із системи (С.69) випливає

$$\dot{A} = 0 \quad \alpha^{22} - k\alpha^1 = 0, \quad \alpha_0^1 - \lambda_3\alpha^1 = 0, \quad \dot{\alpha}^{22} - \lambda_4\alpha^1 = 0. \quad (\text{С.70})$$

Якщо врахувати формули (3.15), то проаналізувавши рівняння (С.70), одержимо розгалуження: 1) $\lambda_4 \neq k\lambda_3$, 2) $\lambda_4 = k\lambda_3$, $k \neq 0$, 3) $\lambda_4 = k = 0$.

1) $\lambda_4 \neq k\lambda_3$. В цьому випадку, розв'язавши рівняння (С.70), отримуємо

$$A = c_1, \quad B = c_2, \quad C = 0, \quad \alpha^1 = 0, \quad \alpha^{22} = 0. \quad (\text{С.71})$$

Із (С.71) очевидно, що в цьому випадку ядро системи (С.68) співпадає з основною групою симетрій (3.8).

2) $\lambda_4 = k\lambda_3, k \neq 0$. В цьому випадку, розв'язавши рівняння (С.70), отримуємо

$$\begin{aligned} A &= c_1, \quad B = c_2, \quad C = c_3 e^{\lambda_3 x_0}, \\ \alpha^1 &= -\frac{1}{2\lambda_1} c_3 e^{\lambda_3 x_0}, \quad \alpha^{22} = -\frac{k}{2\lambda_1} c_3 e^{\lambda_3 x_0}. \end{aligned} \quad (\text{С.72})$$

Формули (3.15), (С.72) приводять до наступного ядра симетрії системи (С.68)

$$< \partial_0, \quad \partial_1, \quad Q = e^{\lambda_3 x_0} (u^1 \partial_{u^1} + k u^2 \partial_{u^2}) > \quad (\text{С.73})$$

при довільних функціях $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$ та $k \neq 0$. Алгебра (С.73) відповідає алгебрі пункту 2 таблиці 3.

3) $\lambda_4 = k = 0$. Тоді $\lambda_3 \neq 0$. Із (С.70) одержуємо

$$A = c_1, \quad B = c_2 g e^{\lambda_3 x_0} + c_3, \quad C = c_4 e^{\lambda_3 x_0}, \quad (\text{С.74})$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 — сталі інтегрування. Формули (3.15), (С.74) приводять до алгебри

$$\langle \partial_0, \partial_1, \mathcal{G} = e^{\lambda_3 x_0} (\partial_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_1} x_1 u^1 \partial_{u^1}), Q = e^{\lambda_3 x_0} u^1 \partial_{u^1} \rangle \quad (\text{С.75})$$

при довільних функціях $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$ та $k = \lambda_4 = 0, \lambda_3 \neq 0$. Одержана алгебра (С.75) відповідає алгебрі пункту 7 таблиці 5.

Дослідимо тепер, при яких значеннях функцій φ^a відбувається розширення ядра симетрії системи (С.68).

Найбільш широкий клас функцій φ^a , які задовольняють систему (С.69), і при яких можливе розширення ядра симетрії системи (С.68), має вигляд

$$\varphi^1 = \lambda_6 \ln \omega + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_8 \ln \omega + \lambda_9, \quad (\text{С.76})$$

або, враховуючи вигляд ω ,

$$\varphi^1 = \lambda_6 \ln u^2 - k \lambda_6 \ln u^1 + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_8 \ln u^2 - k \lambda_8 \ln u^1 + \lambda_9, \quad (\text{С.77})$$

причому λ_7, λ_9 — довільні сталі. Відповідно функції g^a матимуть вигляд

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1 (\lambda_6 \ln u^2 - k \lambda_6 \ln u^1 + \lambda_7), \\ g^2 &= u^2 (\lambda_8 \ln u^2 - k \lambda_8 \ln u^1 + \lambda_9). \end{aligned} \quad (\text{С.78})$$

Підставивши (С.77) у (С.69), одержимо

$$\alpha_0^1 - \lambda_{10} \alpha^1 - \lambda_6 \alpha^{22} = 0, \quad \alpha_0^{22} - \lambda_8 \alpha^{22} - \lambda_{11} \alpha^1 = 0, \quad (\text{С.79})$$

де

$$\lambda_{10} = (\lambda_3 - k \lambda_6), \quad \lambda_{11} = (\lambda_4 - k \lambda_8). \quad (\text{С.80})$$

Якщо врахувати (3.15), то (С.79) перепишеться наступним чином

$$\begin{aligned} (\ddot{B}x_1 + \dot{C}) - \lambda_{10}(\dot{B}x_1 + C) + 2\lambda_1 \lambda_6 \alpha^{22} &= 0, \\ \dot{\alpha}^{22} - \lambda_8 \alpha^{22} + \frac{\lambda_{11}}{2\lambda_1}(\dot{B}x_1 + C) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{С.81})$$

Розщепивши рівняння системи (С.81) по змінній x_1 , одержимо

$$\begin{aligned}\lambda_{11}\dot{B} &= 0, \quad \ddot{B} - \lambda_{10}\dot{B} = 0, \quad \dot{\alpha}^{22} - \lambda_8\alpha^{22} = -\frac{\lambda_{11}}{2\lambda_1}C, \\ \dot{C} - \lambda_{10}C &= -2\lambda_1\lambda_6\alpha^{22}.\end{aligned}\quad (\text{С.82})$$

З першого рівняння (С.82) випливають два розгалуження:

I. $\lambda_{11} \neq 0$; **II.** $\lambda_{11} = 0$.

I. $\lambda_{11} \neq 0$. В такому випадку з першого рівняння (С.82) очевидно, що $\dot{B} = 0$. Тоді зрозуміло, що $\alpha^1 = -\frac{1}{2\lambda_1}C$. Тому визначальні рівняння (С.82) набувають вигляду (А.62), розв'язок яких задається в розділі С доведення теореми 3.7 формулами (А.65), (А.68), (А.71), (А.74), а відповідні максимальні алгебри інваріантності наведені у пунктах 6,7,8,9 таблиці 3.

II. $\lambda_{11} = 0$. Тоді рівняння (С.82) набувають вигляду

$$\ddot{B} - \lambda_{10}\dot{B} = 0, \quad \dot{\alpha}^{22} - \lambda_8\alpha^{22} = 0, \quad \dot{C} - \lambda_{10}C = -2\lambda_1\lambda_6\alpha^{22}. \quad (\text{С.83})$$

Загальним розв'язком другого рівняння (С.83) є функція

$$\alpha^{22} = c_4 e^{\lambda_8 x_0}. \quad (\text{С.84})$$

Враховуючи (С.84), перше і третє рівняння (С.83) перепишемо у вигляді

$$\ddot{B} - \lambda_{10}\dot{B} = 0, \quad \dot{C} - \lambda_{10}C = -2\lambda_1\lambda_6c_4e^{\lambda_8 x_0}. \quad (\text{С.85})$$

В залежності від значень λ_{10} , λ_8 система (С.85) може мати наступні розв'язки.

II.1. Якщо $\lambda_{10} = \lambda_8 = 0$, то розв'язок (С.85) задається формулами

$$B = c_2x_0 + c_3, \quad C = -2\lambda_1\lambda_6c_4x_0 + c_5. \quad (\text{С.86})$$

У цьому випадку функції g^a мають вигляд

$$g^1 = u^1(\lambda_6 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = \lambda_9 u^2. \quad (\text{С.87})$$

Координати оператора (3.2) набувають значень

$$\begin{aligned}\xi^0 &= 2c_1, \quad \xi^1 = c_2x_0 + c_3, \\ \eta^1 &= \frac{-1}{2\lambda_1}(c_2x_1 - 2\lambda_1\lambda_6c_4x_0 + c_4)u^1, \quad \eta^2 = c_4u^2.\end{aligned}\quad (\text{С.88})$$

Неважко переконатися, що оператор (3.2) з координатами (С.88) породжує алгебру інваріантності системи (С.68), яка міститься в пункті 3 таблиці 5.

II.2. Якщо $\lambda_{10} \neq 0, \lambda_8 \neq 0$, то розв'язком першого рівняння системи (С.83) буде функція

$$B = c_2 e^{\lambda_{10} x_0} + c_3. \quad (\text{С.89})$$

При розв'язуванні другого рівняння (С.50) залежно від значень λ_8 виникають два розгалуження.

II.2.1. Якщо $\lambda_8 \neq \lambda_{10}$, то $C = c_5 e^{\lambda_{10} x_0} + \frac{2\lambda_1 \lambda_6}{\lambda_{10} - \lambda_8} c_4 e^{\lambda_8 x_0}$. В цьому випадку функції g^a матимуть вигляд

$$g^1 = u^1(\lambda_{10} \ln u^1 + \lambda_6 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = u^2(\lambda_8 \ln u^2 + \lambda_9). \quad (\text{С.90})$$

Координати оператора (3.2) набувають значень

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1, \quad \xi^1 = c_2 e^{\lambda_{10} x_0} + c_3, \\ \eta^1 &= \frac{-1}{2\lambda_1} [e^{\lambda_{10} x_0} (c_2 \lambda_{10} x_1 + c_5) + \frac{2\lambda_1 \lambda_6}{\lambda_{10} - \lambda_8} c_4 e^{\lambda_8 x_0}] u^1, \\ \eta^2 &= c_4 e^{\lambda_8 x_0} u^2. \end{aligned} \quad (\text{С.91})$$

Оператор (3.2) з координатами (С.91) породжує алгебру інваріантності системи (С.68), (С.90), яка міститься в пункті 8 таблиці 5.

II.2.2. Якщо $\lambda_8 = \lambda_{10}$, то $C = (c_5 - 2\lambda_1 \lambda_6 c_4 x_0) e^{\lambda_{10} x_0}$.

В цьому випадку функції g^a матимуть вигляд

$$g^1 = u^1(\lambda_{10} \ln u^1 + \lambda_6 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = u^2(\lambda_{10} \ln u^2 + \lambda_9). \quad (\text{С.92})$$

Координати оператора (3.2) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1, \quad \xi^1 = c_2 e^{\lambda_{10} x_0} + c_3, \\ \eta^1 &= \frac{-1}{2\lambda_1} e^{\lambda_{10} x_0} (c_2 \lambda_{10} x_1 + c_5 - 2\lambda_1 \lambda_6 c_4 x_0) u^1, \quad \eta^2 = c_4 e^{\lambda_{10} x_0} u^2. \end{aligned} \quad (\text{С.93})$$

Неважко переконатися, що алгебра інваріантності системи (С.68), (С.92), породжена оператором (3.2) з координатами (С.93) відповідає алгебрі пункту 9 таблиці 5.

II.3. Якщо $\lambda_8 = 0, \lambda_{10} \neq 0$, то розв'язком системи (С.83) будуть функції

$$B = c_2 e^{\lambda_{10} x_0} + c_3, \quad C = c_5 e^{\lambda_{10} x_0} - \frac{2\lambda_1 \lambda_6}{\lambda_{10}} c_4 x_0. \quad (\text{С.94})$$

В цьому випадку функції g^a матимуть вигляд

$$g^1 = u^1(\lambda_{10} \ln u^1 + \lambda_6 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = \lambda_9 u^2. \quad (\text{C.95})$$

Координати оператора (3.2) набувають значень

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1, \quad \xi^1 = c_2 e^{\lambda_{10} x_0} + c_3, \\ \eta^1 &= \frac{-1}{2\lambda_1} [e^{\lambda_{10} x_0} (c_2 \lambda_{10} x_1 + c_5) - \frac{2\lambda_1 \lambda_6}{\lambda_{10}} c_4] u^1, \quad \eta^2 = c_4 u^2. \end{aligned} \quad (\text{C.96})$$

Побудуємо алгебру інваріантності, породжену оператором (3.2) з координатами (C.96)

$$\begin{aligned} \partial_0, \quad \partial_1, \quad M &= e^{\lambda_{10} x_0} I_1, \\ Q_2 &= \lambda_6 I_1 - \lambda_{10} I_2, \quad \mathcal{G} = e^{\lambda_{10} x_0} (\partial_1 - \frac{\lambda_{10}}{2\lambda_1} x_1 I_1). \end{aligned} \quad (\text{C.97})$$

Очевидно, що алгебра інваріантності (C.97) системи (C.68), (C.95) відповідає пункту 8 таблиці 5 при $\lambda_8 = 0$.

II.4. Якщо $\lambda_8 \neq 0$, $\lambda_{10} = 0$, то розв'язком системи (C.83) будуть функції

$$B = c_2 x_0 + c_3, \quad C = -\frac{2\lambda_1 \lambda_6}{\lambda_8} c_4 e^{\lambda_8 x_0}. \quad (\text{C.98})$$

В цьому випадку функції g^a матимуть вигляд

$$g^1 = u^1(\lambda_6 \ln u^2 + \lambda_7), \quad g^2 = u^2(\lambda_8 \ln u^2 + \lambda_9). \quad (\text{C.99})$$

Координати оператора (3.2) набувають значень

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1, \quad \xi^1 = c_2 x_0 + c_3, \\ \eta^1 &= \frac{-1}{2\lambda_1} [c_2 x_1 + c_5 - \frac{2\lambda_1 \lambda_6}{\lambda_8} c_4 e^{\lambda_8 x_0}] u^1, \quad \eta^2 = c_4 e^{\lambda_8 x_0} u^2. \end{aligned} \quad (\text{C.100})$$

Алгебра інваріантності системи (C.68), (C.99), породжена оператором (3.2) з координатами (C.100), відповідає пункту 2 таблиці 5.

D. Нехай, функції g^1, g^2 задаються формулами (3.150). В цьому випадку система (3.148) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_0 = \partial_1 \left[\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_1 \frac{u^2}{u^1} & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_1 \right] + \begin{pmatrix} u^1 [(u^1)^m \varphi^1(\omega) + \lambda_3] \\ u^2 [(u^1)^m \varphi^2(\omega) + \lambda_4] \end{pmatrix}, \quad (\text{C.101})$$

де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$, $m \neq 0$, k, λ_3, λ_4 — довільні сталі.

Підставивши формули (3.150), (3.15) та $f = \frac{2\lambda_1}{u^1}$ у систему $S_3 = 0$, одержимо

$$\begin{aligned} (u^1)^m[(\alpha^{22} - k\alpha^1)\omega\dot{\varphi}^1 + (2\dot{A} + m\alpha^1)\varphi^1] &= \frac{1}{2}\ddot{A} - 2\lambda_3\dot{A} + \alpha_0^1, \\ (u^1)^m[(\alpha^{22} - k\alpha^1)\omega\dot{\varphi}^2 + (2\dot{A} + m\alpha^1)\varphi^2] &= \ddot{A} - 2\lambda_4\dot{A} + \dot{\alpha}^{22}. \end{aligned} \quad (\text{C.102})$$

Спочатку визначимо основну алгебру інваріантності системи (C.101). Для цього вважаємо функції φ^1, φ^2 у системі (C.102) довільними. Тоді з системи (C.102) випливає

$$\begin{aligned} \alpha^{22} - k\alpha^1 &= 0, \quad m\alpha^1 + 2\dot{A} = 0, \\ \alpha_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} - 2\lambda_3\dot{A} &= 0, \quad \ddot{A} - 2\lambda_4\dot{A} + \dot{\alpha}^{22} = 0. \end{aligned} \quad (\text{C.103})$$

Якщо врахувати формули (3.15), то з рівнянь системи (C.103) випливає

$$\begin{aligned} k\ddot{A} = m\ddot{A} = \ddot{A} &= 0, \quad k\dot{B} = m\dot{B} = \ddot{B} = 0, \\ (\frac{k}{2} - 1)\ddot{A} + 2(\lambda_4 - k\lambda_3)\dot{A} &= 0, \quad mC = 4\lambda_1\dot{A}, \\ \alpha^{22} = -\frac{k}{2\lambda_1}C, \quad \dot{C} &= 2\lambda_1(\frac{1}{2}\ddot{A} - 2\lambda_3\dot{A}). \end{aligned} \quad (\text{C.104})$$

Проаналізувавши перші три рівняння (C.104), отримуємо наступні розгалуження: 1) $m \neq 0, |\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, 2) $m \neq 0, \lambda_4 = \lambda_3 = 0$, 3) $k \neq 0, m = 0$, 4) $k = m = 0$.

Розв'язавши рівняння (C.104) при 1) $m \neq 0, |\lambda_3| + |\lambda_4| \neq 0$, отримуємо

$$A = c_2, \quad B = c_3, \quad C = \alpha^1 = \alpha^{22} = 0. \quad (\text{C.105})$$

Із (3.15), (C.105) очевидно, що в цьому випадку основна алгебра інваріантності (C.101) співпадає з основною групою інваріантності (3.8).

Розв'язавши рівняння (C.104) у випадку 2), 3), отримуємо

$$\begin{aligned} A = mc_1x_0 + c_2, \quad B = c_3, \quad C = 4\lambda_1c_1x_0, \\ \alpha^1 = -2c_1, \quad \alpha^{22} = -2kc_1. \end{aligned} \quad (\text{C.106})$$

Формули (3.15), (C.106) приводять до наступної основної алгебри інваріантності системи (C.101)

$$< \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = m(2x_0\partial_0 + x_1\partial_1) - 2(u^1\partial_{u^1} + ku^2\partial_{u^2}) > \quad (\text{C.107})$$

при довільних функціях $\varphi^a = \varphi^a(\omega)$, де $\omega = \frac{u^2}{(u^1)^k}$. Алгебра (C.107) відповідає алгебрі пункту 3 таблиці 3.

4) $k = m = 0$. Розв'язавши рівняння (С.104), одержуємо

$$A = c_1, \quad B = c_3 x_0 + c_4, \quad C = -2\lambda_1 c_5, \quad \alpha^1 = c_5, \quad \alpha^{22} = 0, \quad (\text{С.108})$$

де c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 — сталі інтегрування. Формули (3.15), (С.108) приводять до алгебри

$$\langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad G = x_0 \partial_1 - \frac{1}{2\lambda_1} x_1 u^1 \partial_{u^1}, \quad Q = u^1 \partial_{u^1} \rangle \quad (\text{С.109})$$

при довільних функціях $\varphi^a = \varphi^a(u^2)$. Одержана алгебра (С.109) відповідає алгебрі пункту 1 таблиці 5.

Дослідимо тепер симетрію системи (С.101), при конкретних значеннях функцій φ^a . Проаналізувавши структуру рівнянь (С.102) відносно змінної ω аналогічно до того, як це було зроблено при доведенні теореми 5, стає зрозуміло, що найбільш широкий клас функцій φ^a , які задовольняють рівняння (С.102) і при яких можливе основної алгебри інваріантності системи (С.101), має вигляд

$$\varphi^1 = \lambda_5(\omega)^n + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6(\omega)^n + \lambda_8, \quad (\text{С.110})$$

або

$$\varphi^1 = \lambda_5 \ln \omega + \lambda_7, \quad \varphi^2 = \lambda_6 \ln \omega + \lambda_8, \quad (\text{С.111})$$

де $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, n, λ_7, λ_8 — довільні сталі.

I. Підставляючи функції φ^a , задані формулами (С.110) у рівняння (С.102), маємо:

$$\begin{aligned} (u^1)^m [\lambda_5((m - kn)\alpha^1 + n\alpha^{22} + 2\dot{A})\omega^n + \lambda_7(m\alpha^1 + 2\dot{A})] &= \\ &= \frac{1}{2}\ddot{A} - 2\lambda_3\dot{A} + \alpha_0^1, \\ (u^1)^m [\lambda_6((m - kn)\alpha^1 + n\alpha^{22} + 2\dot{A})\omega^n + \lambda_8(m\alpha^1 + 2\dot{A})] &= \\ &= \ddot{A} - 2\lambda_4\dot{A} + \dot{\alpha}^{22}. \end{aligned} \quad (\text{С.112})$$

В даному випадку функції g^a матимуть вигляд

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1 [\lambda_5(u^1)^{\tilde{k}}(u^2)^n + \lambda_7(u^1)^m + \lambda_3], \\ g^2 &= u^2 [\lambda_6(u^1)^{\tilde{k}}(u^2)^n + \lambda_8(u^1)^m + \lambda_4], \end{aligned} \quad (\text{С.113})$$

де $\tilde{k} = m - kn$.

Проаналізувавши рівняння системи (С.112), та враховуючи при цьому вигляд, якого набувають формули (С.113), залежно від значення сталих $n, \tilde{k}, k$ отримуємо розгалуження: 1. $n \neq 0, \tilde{k} \neq 0$, 2. $n \neq 0, \tilde{k} = 0$.

3. $n = 0, \tilde{k} = m \neq 0$. 4. $n = 0, \tilde{k} = 0$. Розглянемо кожен з випадків окремо.

1. $n \neq 0, \tilde{k} \neq 0$. Розщепивши рівняння системи (С.112) по змінним ω, x_1 , враховуючи при цьому вигляд α^1 із формул (3.15), та обмеження $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0$, одержимо

$$\begin{aligned} \ddot{A} = \dot{B} = 0, \quad C &= \frac{2\lambda_1}{k}(2\dot{A} + n\alpha^{22}), \\ \lambda_7 n(2k\dot{A} + m\alpha^{22})(u^1)^m &= n\dot{\alpha}^{22} + 2\tilde{k}\lambda_3\dot{A}, \\ \lambda_8 n(2k\dot{A} + m\alpha^{22})(u^1)^m &= -\tilde{k}(\dot{\alpha}^{22} - 2\lambda_4\dot{A}). \end{aligned} \quad (\text{С.114})$$

Розв'язуючи рівняння (С.114), приходимо до висновку, що розширення основної алгебри інваріантності системи (С.101) можливе лише при умові $\lambda_4 = -\frac{\tilde{k}}{n}\lambda_3, \lambda_7 = \lambda_8 = 0$. При цьому знаходимо, що

$$\begin{aligned} A &= c_1 x_0 + c_2, \quad B = c_3, \\ C &= \frac{2\lambda_1}{k}(n(2\lambda_4 c_1 x_0 + c_4) + 2c_1), \quad \alpha^{22} = 2\lambda_4 c_1 x_0 + c_4, \end{aligned} \quad (\text{С.115})$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 — довільні сталі. З формул (3.15), (С.115) приходимо до алгебри пункту 4 таблиці 3.

2. $n \neq 0, \tilde{k} = 0$. Аналізуючи розв'язки рівнянь (С.112), приходимо до висновку, що розширення ядра симетрії системи (С.101) можливе лише при умовах $\lambda_4 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0$ або $m = \lambda_4 = 0$, накладання яких на формули (С.113) приводить до одержання функцій g^a , еквівалентних наступним

$$g^1 = u^1[\lambda_5(u^2)^n + \lambda_3], \quad g^2 = \lambda_6(u^2)^{n+1}. \quad (\text{С.116})$$

Розв'язуючи рівняння (С.112), зокрема при умовах $\lambda_4 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0$, отримуємо

$$(n-2)c_1 = 0, \quad (\text{С.117})$$

$$\begin{aligned} A &= c_1 x_0^2 + c_2 x_0 + c_3, \quad B = c_4 x_0 + c_5, \\ C &= \lambda_1[-4\lambda_3(c_1 x_0^2 + c_2 x_0) + 2c_1 x_0 + c_6], \\ \alpha^{22} &= -2\frac{2}{n}(2c_1 x_0 + c_2). \end{aligned} \quad (\text{С.118})$$

З рівняння (C.117) очевидні два розгалуження: **a)** $n \neq 2$, **b)** $n = 2$.

a) $n \neq 2$. В цьому випадку формули (3.15), (C.118) приводять до алгебри пункту 4 таблиці 5.

b) $n = 2$. В цьому випадку формули (3.15), (C.118) приводять до алгебри пункту 5 таблиці 5.

3. $n = 0, \tilde{k} = m \neq 0$. В цьому випадку розщепивши рівняння системи (C.112) по змінній u^1 , одержимо

$$\tilde{\lambda}_5(m\alpha^1 + 2\dot{A}) = 0, \quad \tilde{\lambda}_6(m\alpha^1 + 2\dot{A}) = 0, \quad (\text{C.119})$$

$$\alpha_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} - 2\lambda_3\dot{A} = 0, \quad \dot{\alpha}^{22} + \ddot{A} - 2\lambda_4\dot{A} = 0, \quad (\text{C.120})$$

причому формули (C.113) матимуть вигляд

$$g^1 = u^1[\tilde{\lambda}_5(u^1)^m + \lambda_3], \quad g^2 = u^2[\tilde{\lambda}_6(u^1)^m + \lambda_4], \quad (\text{C.121})$$

де $\tilde{\lambda}_5 = \lambda_5 + \lambda_7$, $\tilde{\lambda}_6 = \lambda_6 + \lambda_8$.

Розв'язуючи рівняння (C.119), (C.120), приходимо до висновку, що розширення ядра симетрії системи (C.101) можливе лише у випадку:

$|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0, \lambda_3 = 0$. Випадок $\lambda_5 = \lambda_6 = 0$ тут не має змісту, оскільки тоді втрачається сенс умови $\tilde{k} = m \neq 0$.

Отже, покладаючи $|\lambda_5| + |\lambda_6| \neq 0, \lambda_3 = 0$ з рівнянь (C.119) знаходимо, що

$$A = c_1x_0 + c_2, \quad B = c_3, \quad \alpha^1 = -\frac{2}{m}c_1, \quad \alpha^{22} = 2\lambda_4c_1x_0 + c_4, \quad (\text{C.122})$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 — довільні сталі. З формул (3.15), (C.122) приходимо до алгебри, що відповідає пункту 5 таблиці 3.

4. $n = 0, \tilde{k} = 0$. В цьому випадку рівняння (C.112) набувають вигляду (C.120). Розв'язуючи рівняння (C.120), знаходимо, що

$$\begin{aligned} A &= c_1x_0^2 + c_2x_0 + c_3, \quad B = c_4x_0 + c_5, \\ C &= \lambda_1[-4\lambda_3(c_1x_0^2 + c_2x_0) + 2c_1x_0 + c_6], \\ \alpha^{22} &= 2\lambda_4(c_1x_0^2 + c_2x_0) - 2c_1x_0 + c_7. \end{aligned} \quad (\text{C.123})$$

Формули (3.15), (C.123) приводять до алгебри, що відповідає пункту 5 таблиці 5.

II. Підставляючи функції φ^a , задані формулами (С.111), у рівняння (С.102), після розщеплення по ω , маємо:

$$\begin{aligned} m\alpha^1 + 2\dot{A} &= 0, \\ (u^1)^m \lambda_5 (\alpha^{22} - k\alpha^1) &= \alpha_0^1 + \frac{1}{2}\ddot{A} - 2\lambda_3\dot{A}, \\ (u^1)^m \lambda_6 (\alpha^{22} - k\alpha^1) &= \dot{\alpha}^{22} + \ddot{A} - 2\lambda_4\dot{A}. \end{aligned} \quad (\text{С.124})$$

В даному випадку функції g^a матимуть вигляд

$$\begin{aligned} g^1 &= u^1[(u^1)^m(\lambda_5 \ln u^2 - k\lambda_5 \ln u^1 + \lambda_7) + \lambda_3], \\ g^2 &= u^2[(u^1)^m(\lambda_6 \ln u^2 - k\lambda_6 \ln u^1 + \lambda_8) + \lambda_4]. \end{aligned} \quad (\text{С.125})$$

Проаналізувавши розв'язки рівнянь (С.124), та враховуючи при цьому вигляд, якого набувають формули (С.125), залежно від значення сталих $m, \tilde{k}, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$, приходимо до висновку, що розширення ядра симетрії системи (С.101) можливе лише при умові $m = 0$. В цьому випадку формули (С.125) набувають вигляду (С.78), при якому симетрійні властивості системи (3.148) досліджені в розділі С доведення теореми.

Теорему 3.11 доведено.