

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Т.Г.ШЕВЧЕНКО

на правах рукописи
УДК 517.9

Константинов Алексей Юрьевич

КЛАССЫ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ И СУЩЕСТВОВАНИЕ
ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01. - математический анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
В.Д.Кошманенко

Киев - 1985

СОДЕРЖАНИЕ

Основные обозначения	3
Введение	5
ГЛАВА 1. Классы асимптотических постоянных $\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$. . .	24
1.1. Определение и простейшие свойства классов $\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$. . .	24
1.2. Связь с классами компактных операторов	38
1.3. Трансформаторы классов $(\mathcal{L}_p(H, \varphi), \mathcal{L}_p(H, \varphi))$	57
ГЛАВА 2. Существование волновых операторов и их инвариант- ность	69
2.1. Метод Кука	69
2.2. Связь между методом Кука и теорией ядерных возмущений. Принцип инвариантности волновых операторов	80
2.3. Ядерная теория рассеяния и гладкие возмущения	99
ГЛАВА 3. Возмущения гамильтониана свободного поля полиномами Вика и задача рассеяния	109
3.1. Сингулярные свойства полиномов Вика	109
3.2. Существование волновых операторов	120
Литература	127

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ - гильбертовы пространства /под гильбертовым пространством будет пониматься сепарабельное комплексное гильбертово пространство/. $B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $S_\infty(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ - множества ограниченных, соответственно компактных линейных операторов, действующих из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$. $S_p(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ / $p \in [1, \infty)$ / - класс тех компактных операторов A из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, для которых

$$\|A\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^p(A) \right)^{1/p} < \infty.$$

Здесь $s_k(A)$ - сингулярные числа оператора A /см. [16, 1] / , $B(\mathcal{H}) = B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$, $S_p(\mathcal{H}) = S_p(\mathcal{H}, \mathcal{H})$. Если A - линейный оператор из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{K}$, то $\mathcal{D}(A)$, $\text{Ker}(A)$, $\sigma(A)$ - область определения, образ и спектр оператора A соответственно. $R_A(z) = (A - z)^{-1}$ / $z \notin \sigma(A)$ / - резольвента A . $\bar{A}$ - замыкание A , A^* - сопряженный к A оператор. Для самосопряженного оператора H в $\mathcal{H}$ положим $U_H(t) = \exp(-itH)$, $E_H(\cdot)$ - спектральная мера H , $E_\lambda^H = E_H((-\infty, \lambda))$ - разложение единицы H . $\mathcal{H}_{ac}(H)$, $\mathcal{H}_c(H)$, $\mathcal{H}_s(H)$, $\mathcal{H}_{pp}(H)$ - абсолютно непрерывное, непрерывное, сингулярное, точечное подпространства оператора H соответственно. Пусть M - подмножество $\mathcal{H}$. $\bar{M}$, $\text{spa } M$, $\overline{\text{spa } M}$ - замыкание M , линейная оболочка M , замкнутая линейная оболочка M . Пусть $\varphi \in \mathcal{H}$. Положим $\mathcal{H}_\varphi(H) := \overline{\text{spa}} \{ U_H(t) \varphi, t \in \mathbb{R} \}$. P_{ac}^H , P_c^H , P_s^H , P_{pp}^H , P_φ^H - проекторы на $\mathcal{H}_{ac}(H)$, $\mathcal{H}_c(H)$, $\mathcal{H}_s(H)$, $\mathcal{H}_{pp}(H)$, $\mathcal{H}_\varphi(H)$ соответственно. Символами $s\text{-}\lim$, $w\text{-}\lim$ обозначаем сильный и слабый пределы.

Термины "измеримость", "почти везде" /п.в./ относятся, если не оговорено противное, к мере Лебега на $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^n$. Мера Лебега обозначается через $| \cdot |$ или $mes(\cdot)$. Если A - измеримое подмножество $\mathbb{R}^n$, то $L_p(A) \equiv L_p(A, dx)$, $L_p \equiv L_p(\mathbb{R}, dx)$ - пространства суммируемых с p -той степенью функций. χ_A - индикатор множества A . Символами $\mathcal{F}g$, $\mathcal{F}g^{-1}$ или $\hat{g}$, $\check{g}$ обозначаем прямое и обратное преобразование Фурье функции g . $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ - пространство Шварца быстро убывающих функций n переменных. $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$. $\int_{\mathbb{R}}$ обозначается через $\int$.

Ниже $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ - фиксированные гильбертовы пространства. Для упрощения записи будем писать B , S_p вместо $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $S_p(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Нумерация теорем, лемм, следствий и т.п. - двойная. Теорема 2.I - первая теорема второй главы. Ссылка на предложение I.I б/ означает ссылку на утверждение б/ предложения I.I. Символом Халмоза $\blacksquare$ обозначается конец доказательства.

В В Е Д Е Н И Е

Одним из основных вопросов математической теории рассеяния является вопрос существования волновых операторов $W^\pm = W^\pm(H_2, H_1, J)$, отвечающих паре самосопряженных операторов H_j $|j=1, 2|$, действующих в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_j$, и "отождествлению" J $|J \in B|$. Пусть $U_j(t) = U_{H_j}(t)$. Область определения $\mathcal{D}(W^\pm)$ волнового оператора $W^\pm$ состоит из тех векторов $\varphi \in \mathcal{H}_1$, для которых существует предел

$$\varphi^\pm = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_2(-t) J U_1(t), \quad |0.1|$$

а действие $W^\pm$ определяется соотношением

$$W^\pm \varphi = \varphi^\pm, \quad \varphi \in \mathcal{D}(W^\pm).$$

Одним из наиболее простых способов доказательства существования пределов $|0.1|$ является известный критерий Кука $|Д. Кук [53], см. также книги [42, 51]|$, утверждающий, что $\varphi \in \mathcal{D}(W^\pm)$, если найдется такое $t_\varphi > 0$, что при $t \gg t_\varphi$

$$U_1(\pm t) \varphi \in \mathcal{D}(H_2 J - J H_1) = \mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(H_2 J)$$

и

$$\int_{t_\varphi}^{\infty} \|(H_2 J - J H_1) U_1(\pm t) \varphi\| dt < \infty. \quad |0.2|$$

Здесь и ниже всякое соотношение или утверждение, содержащее символы " $\pm$ ", означает, что выполнены два соотношения или утверждения, отвечающие отдельно верхнему и нижнему знаку.

Отметим также, что норма и скалярное произведение в $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ обозначаются одинаково, через $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ соответственно, поскольку из контекста всегда ясно, в каком пространстве они рассматриваются.

Условие / 0.2 / включает в себя унитарную группу $U_1(\cdot)$ и; как правило, просто проверяется в том случае, когда H_1 - "свободный", а H_2 - соответственно "возмущенный" гамильтонианы. В такой ситуации группа $U_2(\cdot)$ обычно плохо известна и для доказательства существования "обратных" волновых операторов $W^\pm(H_1, H_2, J^*)$ применяются другие методы. В частности, в рамках теории ядерных возмущений самосопряженных операторов /М.Розенблум [64], Т.Като [55, 56], М.Ш.Бирман и М.Г.Крейн [8], М.Ш.Бирман [6, 7], А.Л.Белополюский и М.Ш.Бирман [2], Д.Пирсон [63]/ показано /см. [63] и книги [42, 51] /, что, если

$$J\mathcal{D}(H_1) \subset \mathcal{D}(H_2) \text{ и } \overline{H_2 J - J H_1} \in S_1, \quad / 0.3 /$$

то $\mathcal{H}_{j,ac} \subset \mathcal{D}(W^+) \cap \mathcal{D}(W^-)$. Здесь $\mathcal{H}_{j,ac} = \mathcal{H}_{ac}(H_j)$, $j = 1, 2$. Условие / 0.3 /, в отличие от / 0.2 /, симметрично относительно операторов H_1 и H_2 . Точнее, из него вытекает, что $J^*\mathcal{D}(H_2) \subset \mathcal{D}(H_1)$ и $\overline{H_1 J^* - J^* H_2} \in S_1(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ и, следовательно, $\mathcal{H}_{2,ac} \subset \mathcal{D}(W^\pm(H_1, H_2, J^*))$. При некоторых дополнительных условиях на J это приводит к полноте волновых операторов $W^\pm$ /т.е. к выполнению равенства $\text{Ran}(W^\pm) = \mathcal{H}_{2,ac}$ /, а также к унитарной эквивалентности абсолютно непрерывных частей операторов H_1 и H_2 .

Целью настоящей работы является установление связи между методом Кука и теорией ядерных возмущений. Такая связь не толь-

ко представляет определенный самостоятельный интерес, но и приводит к ряду содержательных математических результатов. В частности, в работе получены новые абстрактные признаки существования волновых операторов, включающие в себя в качестве частного случая критерий Кука /условие / 0.2 // и его обобщения, установленные М.Шехтером [65], Б.Саймоном [67] и Т.Като [59]. В условиях этих признаков доказан принцип инвариантности волновых операторов /М.Ш.Бирман [6, 7], Т.Като [56, 20] Л.А.Сахнович [45], В.Б.Матвеев [35], К.Чандлер и А.Гибсон [52], М.Шехтер [66], М.Волленберг и П.Оберман [62], М.Волленберг [72] /, что является новым результатом даже для обычного критерия Кука. В работе устанавливается также связь между ядерными методами и теорией гладких возмущений /Т.Като [57, 58], Р.Лавин [61]; см. также книги [42, 51] /. Эти результаты /основные в диссертации/ изложены во второй главе. Их доказательство основано на материале главы I, в которой вводятся и изучаются классы асимптотических постоянных $\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ / $p \in [1, \infty)$ /, т.е. классы операторов $T \in \mathcal{B}$, для которых

$$\int_0^\infty \|T U_H(\pm t) \varphi\|^p dt < \infty. \quad / 0.4 /$$

Здесь H - самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_1$. Отметим, что термин "асимптотическая постоянная" связан с тем, что в случае $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ из условия / 0.4 / следует существование и равенство нулю предела

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm \infty} U_H(-t) T U_H(t) \varphi. \quad / 0.5 /$$

Операторы, для которых пределы / 0.5 / существуют, называются

асимптотическими постоянными. Теория асимптотических постоянных систематически развита в работах Х.Баумгартеля и М.Волленберга /см.[51, 71, 72] и имеющуюся там библиографию/. Там же рассмотрены приложения этой теории к некоторым задачам математической теории рассеяния.

В третьей главе рассмотрены вопросы существования и справедливости принципа инвариантности волновых операторов в конкретной задаче рассеяния, возникающей при возмущении гамильтониана свободного поля полиномами Вика специального вида /в частности, виковой степенью поля/. Подчеркнем, что в отличие от обычного подхода, связанного с рассмотрением обрезанных взаимодействий и последующей аппроксимационной процедурой, здесь применяется метод, основанный на теории самосопряженных расширений. Этот метод восходит к известной работе Л.Д.Фаддеева и Ф.А.Березина [5], посвященной изучению возмущения оператора Лапласа δ -функцией Дирака, и к настоящему времени в различных модификациях применяется в ряде задач квантовой механики. Отметим, в частности, работы Б.С.Павлова [37], Б.С.Павлова и И.Ю.Попова [38], Б.С.Павлова и М.Д.Фаддеева [39], Д.Р.Яфаева [73], Д.Р.Яфаева и М.Р.Саяповой [50], Ю.Е.Карпешинной [19]. В квантовой теории поля метод самосопряженных расширений применялся В.Д.Кошманенко [28, 29].

Перейдем к более подробному изложению диссертации по главам. Глава I посвящена изучению классов асимптотических постоянных $\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.1 Линейный ограниченный оператор T , действующий из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ принадлежит классу $\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ если

$\in [1, \infty)$, если

$$\|T\|_{\pm, p, \varphi} = \left(\int_0^\infty \|T U_H(\pm t) \varphi\|^p dt \right)^{1/p} < \infty. \quad / 0.6 /$$

Если

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} T U_H(t) \varphi = 0,$$

то, будем говорить, что $T \in \mathcal{L}_\infty^\pm(H, \varphi)$. Положим $\|T\|_{\pm, \infty, \varphi} = \sup_{t \neq 0} \|T U_H(\pm t) \varphi\|$, $\mathcal{L}_p(H, \varphi) = \mathcal{L}_p^+(H, \varphi) \cap \mathcal{L}_p^-(H, \varphi)$,

$$\|T\|_{p, \varphi} = \|T\|_{+, p, \varphi} + \|T\|_{-, p, \varphi}.$$

Отметим, что при $p = 1$ условие / 0.6 / по существу совпадает с критерием Кука / 0.2 / при $T = H_2 J - J H_1$, $H = H_1$, а при $p = 2$ связано с теорией гладких возмущений / Т. Като [57, 58] /.

Основным результатом первой главы является установленная в §1.2 связь между классами $\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ и классами S_p компактных операторов. Ниже $E(\cdot) = E_H(\cdot)$, $\mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}_{ac}(H)$, $P_\varphi = P_\varphi^H$, $\rho_\varphi(\lambda) = \left(\frac{d}{d\lambda} (E_\lambda^H \varphi, \varphi) \right)^{1/2}$, Δ - конечный интервал.

ТЕОРЕМА 1.1 Пусть $\varphi \in E(\Delta) \mathcal{H}_{ac}$. Если $T \in \mathcal{L}_p(H, \varphi)$ при некотором $p \in [1, 2]$, то оператор $T \rho_\varphi(H) P_\varphi$ замыкаем и его замыкание $\overline{T \rho_\varphi(H) P_\varphi} \in S_p$.

Если же $p \geq 2$ и $\overline{T \rho_\varphi(H) P_\varphi} \in S_p$, то $T \in \mathcal{L}_p(H, \varphi)$.

Отметим, что функция ρ_φ определена для п.в. λ . Тем не менее, для $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$ $\rho_\varphi(H) P_\varphi$ - корректно определен-

ный оператор.

Приведем одно следствие из теоремы I.I. Ниже $m_\varphi = (E(\cdot)\varphi, \varphi)$.

СЛЕДСТВИЕ I.4 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{L}_p(H, \varphi)$ при некотором $p \in [1, 2]$. Тогда существует последовательность борелевских множеств M_n такая, что

$$TE(M_n)P_\varphi \in S_p$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_\varphi(R \setminus M_n) = 0.$$

В случае $p = 2$ в теореме I.I можно снять ограничение $\varphi \in E(\Delta)\mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА I.2 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$. Тогда $T \in \mathcal{L}_2(H, \varphi)$ тогда и только тогда, когда оператор $TP_\varphi(H)P_\varphi$ замыкаем и его замыкание - оператор Гильберта-Шмидта. Более того, справедливо соотношение

$$\int \|TU_H(t)\varphi\|^2 dt = 2\pi \overline{\|TP_\varphi(H)P_\varphi\|_2^2} \quad | 0.7 |$$

Здесь $\|\cdot\|_2$ - норма Гильберта-Шмидта.

Отметим, что из / 0.7 / непосредственно следует известная оценка М.Розенблюма [64] /см. также [1, 51] /:

$$\int \|TU_H(t)\varphi\|^2 dt \leq 2\pi \|P_\varphi\|_{L_\infty}^2 \|T\|_2^2.$$

Подобная, но несколько более сложная связь существует и между классами $\mathcal{L}_p^+(H, \varphi)$ и S_p .

ТЕОРЕМА I.3 Пусть $\varphi \in E(\Delta)\mathcal{H}_{ac}$, $p \in [1, 2]$. Тогда

существуют операторы $P^\pm \in B(\mathcal{H}_1)$ такие, что для всякого $T \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ оператор $T P_\varphi(H) P^\pm$ замыкаем и

$$\overline{T P_\varphi(H) P^\pm} \in S_p.$$

Операторы $P^\pm$ можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения

$$P^\pm = P^\pm P_\varphi = P_\varphi P^\pm, \quad P^+ + P^- = P_\varphi,$$

$$H P^\pm - P^\pm H \in S_1,$$

/ 0.8 /

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P^\mp U_H(t) = 0.$$

Введем класс допустимых на интервале Δ функций /ср. с [7, 20]/.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 Борелевская функция $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется допустимой на Δ , если α монотонна на Δ и для п.в. $x \in \Delta$ ее производная $\alpha'(x) > 0$.

ТЕОРЕМА 1.4 Пусть $\varphi \in E(\Delta) \mathcal{H}_{ac}$, $p \in [1, 2]$. Тогда существуют операторы $P^\pm \in B(\mathcal{H}_1)$ и ограниченные измеримые /относительно меры Лебега/ функции $a^\pm / a^\pm \neq 0 \pmod{m_\varphi}$ / такие, что для всякого оператора $T \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$

$$T a^\pm(H) P^\pm \in S_p.$$

Операторы $P^\pm$ можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения / 0.8 / и для всякой допустимой на Δ функции α

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P^\mp U_{\alpha(H)}(t) = 0.$$

Отметим, что если $P_\varphi \in L_\infty$, то можно положить $a^\pm = P_\varphi$.

В §1.3 мы рассматриваем двойные операторные интегралы Стилтеса как линейные ограниченные преобразования классов $\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ в себя. Отметим, что теория двойных операторных интегралов развита М.Ш.Бирманом и М.З.Соломяком в работах [9, 10, 11], где такие интегралы рассматривались как трансформаторы классов (B, B) и (S_p, S_p) , т.е. как линейные ограниченные преобразования классов операторов B и S_p соответственно.

Выражения $\|\cdot\|_{p, \varphi}$, $\|\cdot\|_{\pm, p, \varphi}$ /см. определение I.1/ задают полунорму на классах $\mathcal{L}_p(H, \varphi)$, $\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ соответственно. Трансформатор Φ класса (B, B) будем называть трансформатором класса $(\mathcal{L}_p(H, \varphi), \mathcal{L}_p(H, \varphi))$ / $p \in [1, \infty)$ /, если существует такое $C \geq 0$, что

$$\|\Phi T\|_{p, \varphi} \leq C \|T\|_{p, \varphi}.$$

Аналогично вводятся трансформаторы классов $(\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi), \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi))$ / $p \in [1, \infty)$ /. Трансформатор класса (B, B) будем называть трансформатором класса $(\mathcal{L}_\infty(H, \varphi), \mathcal{L}_\infty(H, \varphi))$, если

$$\Phi(\mathcal{L}_\infty(H, \varphi)) \subset \mathcal{L}_\infty(H, \varphi).$$

Аналогично определяются трансформаторы классов $(\mathcal{L}_\infty^\pm(H, \varphi), \mathcal{L}_\infty^\pm(H, \varphi))$.

Мы приведем здесь лишь формулировку тех утверждений, которые имеют отношение к теории рассеяния. Ниже H_1 , H_2 - самосопряженные операторы в пространствах $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ соответственно. $E_j(\cdot) = E_{H_j}(\cdot)$, $j = 1, 2$. $\delta = [a, b]$. Через $F(\delta)$ обозначим множество борелевских функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $f \in C^1(\delta)$ и f' удовлетворяет на δ условию

Гёльдера с каким-либо положительным показателем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.9 Пусть $f, g \in F(\delta)$, причем g - взаимнооднозначна на δ и $g'(x) \neq 0 \forall x \in \delta$; $\varphi \in E_1(\delta) \mathcal{H}_1$. Тогда трансформатор

$$\phi T = \iint_{\delta \times \delta} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{g(\lambda) - g(\mu)} E_2(d\mu) T E_1(d\lambda) \quad / 0.9 /$$

принадлежит классу $(\mathcal{L}_p(N_1, \varphi), \mathcal{L}_p(N_1, \varphi)) \quad \forall p \in [1, \infty)$, и классам $(\mathcal{L}_\infty^\pm(N_1, \varphi), \mathcal{L}_\infty^\pm(N_1, \varphi))$.

Отметим, что принадлежность трансформатора / 0.9 / классу $(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ / в случае $g(x) = x$ / доказана М.Ш. Бирманом и М.З. Соломьяком / см. [9, 11] /.

Из предложения I.9 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ I.9 Пусть $p \in [1, \infty)$, f, g такие, как в предложении I.9. Оператор $J \in \mathcal{B}$. Положим

$$T_{g, \delta} = g(N_2) E_2(\delta) J E_1(\delta) - E_2(\delta) J g(N_1) E_1(\delta).$$

Тогда, если $\varphi \in E_1(\delta) \mathcal{H}_1$ и $T_{g, \delta} \in \mathcal{L}_p(N_1, \varphi)$, то и $T_{f, \delta} \in \mathcal{L}_p(N_1, \varphi)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для классов $\mathcal{L}_\infty^\pm(N_1, \varphi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.10 Пусть $J \in \mathcal{B}$, $\varphi \in E_1(\delta) \mathcal{H}_1$, функция g такая, как в предложении I.9. Предположим, что $T_{g, \delta} \in \mathcal{L}_\infty^\pm(N_1, \varphi)$ или $\mathcal{S}_\infty$. Тогда для всякой функции $f \in F(\delta)$ оператор

$$\int_{\delta} \int_{\delta} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} E_2(d\mu) J E_1(d\lambda) - E_2(\delta) J f'(H_1) E_1(\delta) \in \\ \in \mathcal{L}_{\infty}^{\pm}(H_1, \varphi) \text{ или } S_{\infty} \text{ соответственно.}$$

Во второй главе диссертации результаты главы I применяются к абстрактной теории рассеяния в паре пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

§2.1 посвящен различным обобщениям критерия Кука / 0.2 /. Ниже

$$\tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_{H_j}, \quad R_j(z) = (H_j - z)^{-1} \mid z \in \tilde{\sigma}_j \mid.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ - борелевская функция такая, что $\overline{f(\mathbb{R})} \neq \mathbb{C}$. Предположим, что f дифференцируема на некотором открытом множестве Γ таком, что $|\tilde{\sigma}_1 \setminus \Gamma| = 0$ и f' удовлетворяет /локально/ на Γ условию Гельдера с каким-либо положительным показателем. Будем говорить, что f принадлежит классу $\mathcal{K}(H_1, H_2)$, если для всякого сегмента $\delta \subset \Gamma$

$$|\delta \cap f^{-1}(\overline{f(\tilde{\sigma}_2 \setminus \delta)})| = 0.$$

Основным результатом параграфа 2.1 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$ и функция $f \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Предположим, что существует $t_{\varphi} > 0$ такое, что при $t \geq t_{\varphi}$

$$U_1(\pm t) \varphi \in \mathcal{D}(f(H_2)J) \cap \mathcal{D}(f(H_1))$$

и

$$\int_{t_{\varphi}}^{\infty} \|(f(H_2)J - Jf(H_1))U_1(\pm t)\varphi\| dt < \infty. \quad / 0.10 /$$

Тогда $\varphi \in \mathcal{D}(W^{\pm})$.

Из теоремы 2.1 вытекает ряд полезных признаков существования волновых операторов /см. следствия 2.1 - 2.4 в тексте работы/. В частности, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{W}^\pm)$ при выполнении одного из следующих условий:

1/ Для некоторых целого $m \neq 0$ и $z \in \mathbb{C}$ $| \operatorname{Im} z \neq 0 |$

$$\int_{t_\varphi}^{\infty} \| (R_2^m(z)J - JR_1^m(z)) U_1(\pm t) \varphi \| dt < \infty ;$$

2/ $H_j \geq 0$, $\operatorname{Ker} H_j = 0$ $| j=1, 2 |$ и для некоторого вещественного $a \neq 0$

$$\int_{t_\varphi}^{\infty} \| (H_2^a J - J H_1^a) U_1(\pm t) \varphi \| dt < \infty ;$$

$$3/ \int_{t_\varphi}^{\infty} \| (\exp(H_2)J - J \exp(H_1)) U_1(\pm t) \varphi \| dt < \infty .$$

Отметим, что первое из перечисленных условий при $m = -1$ превращается в критерий Кука, а при $m = 1$ в теорему Т.Като [59]. См. также работы М. Шехтера [65] и Б.Саймона [67].

Приведем еще один результат, близкий по характеру к теореме 2.1.

ТЕОРЕМА 2.2 Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$ - периодическая функция такая, что ее производная f' удовлетворяет условию Гельдера с некоторым положительным показателем и $f'(x) \neq 0$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$. Предположим, что для некоторого $\varphi \in \mathcal{H}_a$ выполнено условие /0.10/ и для всякого конечного интервала Δ оператор

$$H_2 E_2(\Delta) J E_1(\Delta) - E_2(\Delta) J H_1 E_1(\Delta) \in \mathcal{L}_\infty^+(H_1, \varphi).$$

Тогда $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{W}^\pm)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.5 Предположим, что для всех $S > 0$

$$U_2(s)J - J U_1(s) \in \mathcal{L}_1^\pm(H_1, \varphi).$$

Тогда $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{W}^\pm)$.

Следует отметить, что аналогичный признак существования волновых операторов в рамках ядерной теории установлен М.Ш.Бирманом [7] /в [7] в случае $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1$, $J = \mathbb{1}$ показано, что $\mathcal{H}_{\text{ac}} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^\pm)$, если $U_2(s) - U_1(s) \in S_1$ для всех $s > 0$ /. Ядерные аналоги других приведенных следствий /см. утверждения I/ - 3/ / из теоремы 2.1 также хорошо известны /см. [6, 7], а также книги [20, 42, 51] /.

В параграфе 2.2 известный принцип инвариантности волновых операторов доказывается при выполнении условий метода Кука. Доказательство основано на вложении схемы метода Кука в рамки ядерной теории. Точнее, с помощью теоремы 1.4 показывается, что если условие / 0.10 / выполнено для ограниченной функции $f \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, то можно подобрать новый оператор отождествления $\tilde{J}$ такой, что

$$f(H_2)\tilde{J} - \tilde{J}f(H_1) \in S_1 \quad / 0.11 /$$

и $\tilde{J}$ "близок" к J /см. лемму 2.2 ниже/. Мы также распространяем результаты М.Ш.Бирмана [6, 7] и Т.Като [56, 20] об инвариантности волновых операторов при выполнении условий ядерного типа на более широкий класс допустимых функций /теорема 2.3/.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 Будем говорить, что борелевская функция $\mathcal{L} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ -допустима, если она монотонна на каждом подынтервале некоторого открытого множества Γ такого, что

$|\zeta_1 \setminus \Gamma| = 0$ и $\mathcal{L}'(x) > 0$ для п.в. $x \in \Gamma$.

Ниже $W_{\mathcal{L}}^{\pm} = W_{\mathcal{L}}^{\pm}(J) = W^{\pm}(\mathcal{L}(H_2), \mathcal{L}(H_1), J)$.

ТЕОРЕМА 2.3 Пусть функция $f \in \mathcal{H}(H_1, H_2)$, $J\mathcal{D}(f(H_1)) \subset \mathcal{D}(f(H_2))$ и

$$f(H_2)J - Jf(H_1) \in S_1.$$

/ 0.12 /

Тогда для всякой H_1 -допустимой функции $\mathcal{L}$ $\mathcal{H}_{1,ac} = \mathcal{D}(W_{\mathcal{L}}^+) \cap \mathcal{D}(W_{\mathcal{L}}^-)$ и

$$W_{\mathcal{L}}^{\pm} P_{1,ac} = W^{\pm} P_{1,ac}.$$

Здесь $P_{j,ac} = P_{ac}^{H_j}$. Ранее принцип инвариантности доказывался для более узкого класса допустимых функций /дополнительно требовалось, чтобы $\mathcal{L}'$ была бы непрерывной на Γ /см. определение 2.3/ и на каждом сегменте $\delta \subset \Gamma$ удовлетворяла условию Гельдера с некоторым положительным показателем [7] или имела /на δ / ограниченную вариацию [56, 20] /. В связи с этим М.Ш.Бирман [7] ставил вопрос о доказательстве принципа инвариантности для абсолютно непрерывных /внутри Γ / функций, у которых $\mathcal{L}'(x) > 0$ для п.в. $x \in \Gamma$. Этот вопрос решается теоремой 2.3. Доказательство теоремы 2.3 использует технику двойных интегралов, теорему Пирсона [63] и следующее обобщение одной леммы Т.Като [56, 20].

ЛЕММА 1.5 /ср. с [20, 42]/. Пусть $\mathcal{L}$ монотонна на $[a, b]$ и $\mathcal{L}'(x) > 0$ для п.в. $x \in [a, b]$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^{\infty} \left| \int_a^b e^{-isx} e^{-it\mathcal{L}(x)} dx \right|^2 ds = 0.$$

Следующая теорема устанавливает справедливость принципа инвариантности при выполнении условий метода Кука.

ТЕОРЕМА 2.4 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$, функция $f \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ и выполнено условие / 0.10 /. Тогда для всякой H_1 -допустимой функции α $\varphi \in \mathcal{D}(W_\alpha^\pm)$ и

$$W_\alpha^\pm \varphi = W^\pm \varphi. \quad / 0.13 /$$

В частности, принцип инвариантности выполняется в предположениях критерия Кука / 0.2 /. Отметим, что ранее для справедливости принципа инвариантности требовалось, чтобы для некоторого $\alpha > 0$

$$\int_1^\infty \| (H_2 J - J H_1) U_1(\pm t) \varphi \| t^\alpha dt < \infty$$

/К.Чандлер и А.Гибсон [52], см. также книги [42, 51] / или

$$\int_1^\infty \| (H_2 J - J H_1) U_1(\pm t) \varphi \| \log(1+t) dt < \infty$$

/М.Шехтер [66]/. Накладывались также дополнительные ограничения на вектор φ .

Теорема 2.4 сводится к теореме 2.3 с помощью следующей леммы, устанавливающей связь между методом Кука и теорией ядерных возмущений. Ниже $m_{j,\varphi} = (E_j(\cdot) \varphi, \varphi)$, δ - некоторый сегмент.

ЛЕММА 2.2 Пусть $\varphi \in E_1(\delta) \mathcal{H}_{1,ac}$, f - ограниченная функция класса $F(\delta)$. Предположим, что

$$f(H_2)J - Jf(H_1) \in \mathcal{L}_1^\pm(H_1, \varphi).$$

Тогда существуют новый оператор отождествления $\tilde{J} \in B$ и ограни-

ченная измеримая функция $a^{\pm}(x) \neq 0 \pmod{m_{1,\varphi}}$ такие, что выполнено / 0.II / и для всякой H_1 -допустимой функции $\mathcal{L}$

$$S\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\tilde{T} - T a^{\pm}(H_1)) U_{\mathcal{L}(H_1)}(t) = 0.$$

Приведем еще один результат, близкий к теореме 2.4.

ТЕОРЕМА 2.5 Пусть $f \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, H - самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_1$ и $H_1 = g(H)$ для некоторой вещественной борелевской функции g . Предположим, что $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$ и $\exists t_{\varphi} > 0$ такое, что

$$U_1(t)\varphi \in \mathcal{D}(f(H_1)) \cap \mathcal{D}(f(H_2)T), \quad |t| \geq t_{\varphi}$$

и

$$\int_{|t| \geq t_{\varphi}}^{\infty} \|(f(H_2)T - Tf(H_1))U_1(t)\varphi\| dt < \infty.$$

Тогда для всякой H_1 -допустимой функции $\mathcal{L}$ $\varphi \in \mathcal{D}(W_{\mathcal{L}}^+) \cap \mathcal{D}(W_{\mathcal{L}}^-)$ и соотношение / 0.I3 / выполнено для обоих знаков "+" и "-".

В параграфе 2.3 показывается как с помощью ядерной теории рассеяния можно получить некоторые результаты Т.Като [57] и Р.Лавина [61] о существовании волновых операторов, установленные в рамках теории гладких возмущений. Ниже предполагается, что

$$H_2 T - T H_1 = A_2^* A_1$$

в смысле форм, т.е. $\mathcal{D}(H_j) \subset \mathcal{D}(A_j)$ $j = 1, 2$ и для всех $u \in \mathcal{D}(H_2)$, $\varphi \in \mathcal{D}(H_1)$

$$(T\varphi, H_2 u) - (TH_1 \varphi, u) = (A_1 \varphi, A_2 u)_{\mathcal{H}}$$

Здесь A_1, A_2 - линейные операторы, действующие из $\mathcal{H}_1$ /соответственно $\mathcal{H}_2$ / в некоторое гильбертово пространство $\mathcal{K}$, $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{K}}$ - скалярное произведение в $\mathcal{K}$. Пусть Δ - конечный интервал, $P_{j,\varphi} = P_{\varphi}^{H_j}$. Основным результатом параграфа является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.6 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_1$. Предположим, что оператор A_2 H_2 -ограничен /т.е. $A_2 R_2(i) \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{K})$ / и для всякого $u \in \mathcal{H}_2$ $A_2 E_2(\Delta) P_{2,u} \in S_2(\mathcal{H}_2, \mathcal{K})$, причем,

$$\sup_{u \in \mathcal{H}_2} \|A_2 E_2(\Delta) P_{2,u}\|_2 < \infty.$$

Тогда, если оператор $A_1 E_1(\Delta)$ ограничен и

$$\int \|A_1 E_1(\Delta) U_1(t) \varphi\|_{\mathcal{K}}^2 dt < \infty,$$

то $E_1(\Delta) \varphi \in \mathcal{D}(W^+) \cap \mathcal{D}(W^-)$.

Отметим, что из теоремы 2.6 /см. также следствие I.4 из теоремы I.1/ легко вытекает известная теорема Д.Пирсона [63, 42, 51], утверждающая, что $\mathcal{H}_{1,ac} \subset \mathcal{D}(W^+) \cap \mathcal{D}(W^-)$ при выполнении условия /0.3/. Вместе с тем следует иметь в виду, что и доказательство теоремы 2.6 в существенном следует схеме доказательства упомянутой теоремы.

$$\text{Ниже } E_{\lambda}^j = E_{\lambda}^{H_j}, P_{j,s} = P_s^{H_j}, M_{j,\infty} = \\ = \{ \varphi \in \mathcal{H}_{j,ac} : \|\varphi\|_{j,\infty} := \|(\frac{d}{d\lambda}(E_{\lambda}^j \varphi, \varphi))^{1/2}\|_{L_{\infty}} < \infty \}.$$

Следующий результат также вытекает из теоремы 2.6 /см. также теорему I.2/.

ТЕОРЕМА 2.7 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_1$, оператор A_2 H_2 -ограничен, $A_2 E_2(\Delta) P_{2,s} = 0$ и

$$\sup_{\substack{u \in M_\infty(H_2) \\ \|u\|_{2,\infty} \leq 1}} \int \|A_2 E_2(\Delta) U_2(t) u\|_{\mathcal{H}}^2 dt < \infty. \quad / 0.14 /$$

Тогда, если A_1 удовлетворяет условиям теоремы 2.6, то $E_1(\Delta) \varphi \in \mathcal{D}(W^+) \cap \mathcal{D}(W^-)$.

Отметим, что если оператор A_2 H_2 -гладкий на Δ /см. [61, 43, 51] /, т.е.

$$\sup_{\|u\| \leq 1} \int \|A_2 E_2(\Delta) U_2(t) u\|_{\mathcal{H}}^2 dt < \infty,$$

то / 0.14 / выполнено. Таким образом, из теоремы 2.7 следует теорема Р.Лавина [61, 43, 51] о существовании волновых операторов для локально гладких возмущений, а также ее "несимметричный" вариант, предложенный Е.М.Ильиным [18]. В теореме 2.8 устанавливается справедливость принципа инвариантности волновых операторов в условиях теорем 2.6 и 2.7.

В третьей главе работы рассмотрены вопросы существования и инвариантности волновых операторов в случае возмущения оператора энергии свободного поля H_1 полиномами Вика специального вида, в частности, степенными /от поля/ возмущениями вида

$$\int_{\mathbb{R}^d} : \varphi^N(x) : dx. \quad / 0.15 /$$

Здесь $d \geq 2$ / $d+1$ - размерность физического пространства времени /, $N \geq 3$, $: \varphi^N(x) :$ - виковая степень свободного поля в точке x /см. [12, 15, 41, 49] /.

Для изучения таких возмущений мы применяем, как уже отмечалось, теорию расширений самосопряженных операторов. Точнее, возмущению / 0.15 / соответствует билинейная форма γ , обра-

щающаяся в нуль на некотором плотном линейном подмножестве Φ_0 пространства Фока $\mathcal{H}$. В качестве возмущенного оператора H_2 , соответствующего возмущению / 0.15 /, рассматривается некоторое самосопряженное расширение симметрического оператора

$$A = H_1 \upharpoonright \Phi_0.$$

Основным результатом главы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2 Существует линейное множество Φ_0 , содержащееся в ядре билинейной формы / 0.15 /, такое, что для всякого самосопряженного расширения H_2 оператора A существуют /на всемпространстве $\mathcal{H}$ / волновые операторы $W^\pm = W^\pm(H_2, H_1, 1)$.

В теореме 3.3 показывается, что в условиях теоремы 3.2 для волновых операторов $W^\pm$ справедлив принцип инвариантности.

Отметим, что если $d \geq 2$ и $N \geq N_0(d)$, где

$$N_0(d) = \begin{cases} 7, & d=2 \\ 5, & d=3 \\ 3, & d \geq 4 \end{cases},$$

то /в рассматриваемом подходе/ степенное возмущение / 0.15 / не оказывает влияния на свободный гамильтониан H_1 . Точнее, в этой ситуации Φ_0 можно подобрать так, чтобы H_1 был существенно самосопряжен на Φ_0 /см. следствие 3.2/ и тем самым $H_2 = \bar{A} = H_1$. В частности, в наиболее важной ситуации 4-мерного пространства-времени возмущение / 0.15 / оказывается тривиальным /для метода самосопряженных расширений/ при $N \geq 5$.

Отметим, что в близких задачах В.Д.Кошманенко применял подход, связанный с рассмотрением самосопряженных расширений в неко-

тором, более широком, гильбертовом пространстве /см. [28, 29, 60]/.

Основные результаты работы опубликованы в [21 - 27] и докладывались на XVII Всесоюзной зимней математической школе /Воронеж, 1983/, на VI Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ /Москва, 1984/, на Конференции молодых ученых ИМ АН УССР /Киев, 1984/, на Научной конференции профессорско-преподавательского состава КГУ /Киев, 1983/, на семинаре "Операторы математической физики" в ИМ АН УССР, на семинаре отдела математического анализа ИМ АН УССР, на семинаре кафедры математического анализа КГУ.

Автор выражает искреннюю признательность своему научному руководителю В.Д.Кошманенко за постановку и систематическое обсуждение различных вопросов и задач по математической теории рассеяния, постоянное внимание к работе.

КЛАССЫ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ $\mathcal{L}_p^{\pm}(H, \varphi)$.

I.1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА КЛАССОВ $\mathcal{L}_p^{\pm}(H, \varphi)$.

В этом параграфе вводятся классы асимптотических постоянных $\mathcal{L}_p^{\pm}(H, \varphi)$ и изучаются их основные свойства. Материал этого параграфа дает нам технический инструмент, широко используемый в работе.

Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_1$, H - самосопряженный в $\mathcal{H}_1$ оператор, $U(t) = U_H(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.1 Линейный ограниченный оператор T , действующий из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$ принадлежит классу $\mathcal{L}_p^{\pm}(H, \varphi)$ при некотором $p \in [1, \infty)$, если

$$\|T\|_{\pm, p, \varphi} = \left(\int_0^{\infty} \|T U(\pm t) \varphi\|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Если

$$S\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm \infty} T U(t) \varphi = 0,$$

то будем говорить, что $T \in \mathcal{L}_{\infty}^{\pm}(H, \varphi)$. Положим

$$\|T\|_{\pm, \infty, \varphi} = \sup_{t \geq 0} \|T U(\pm t) \varphi\|, \quad \mathcal{L}_p(H, \varphi) =$$

$$\mathcal{L}_p^+(H, \varphi) \cap \mathcal{L}_p^-(H, \varphi), \quad \|\cdot\|_{p, \varphi} = \|\cdot\|_{+, p, \varphi} + \|\cdot\|_{-, p, \varphi}.$$

Приведем некоторые примеры.

Пример I.1 Пусть $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L_2$, H - оператор умножения на x , $T = (\cdot, u) \vee 1 u$, $v \in L_2$, $\|v\| = 1$ - одномерный оператор. Имеем

$$\|T U(t) \varphi\| = \left| \int e^{-itx} \varphi(x) \bar{u}(x) dx \right| = \sqrt{2\pi} |\hat{f}(\varphi \bar{u})(t)|.$$

Следовательно, $T \in \mathcal{L}_p^+(H, \varphi)$ тогда и только тогда, когда $\chi_{R_+} \mathcal{F}(\varphi \bar{u}) \in L_p$. Например, если $\varphi u \in L_q$ при некотором $q \in [1, 2]$, то в силу неравенства Хаусдорфа-Юнга $T \in \mathcal{L}_p(H, \varphi)$; где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ в частности, для всех $\varphi, u \in L_2$ $T \in \mathcal{L}_\infty(H, \varphi)$. T принадлежит классу $\mathcal{L}_p(H, \varphi)$ при некотором $p \in [1, 2)$, если, например, $\varphi \bar{u}$ принадлежит соболевскому пространству $W_2^\alpha(\mathbb{R})$ при $\alpha > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$.

Пример I.2 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L_2$, $H = -i \frac{d}{dx}$. $P_\pm$ - операторы умножения на характеристические функции $\chi_{R_\pm}$. Тогда

$$\|P_+ U(t) \varphi\|^2 = \int_0^\infty |\varphi(x-t)|^2 dx = \int_t^\infty |\varphi(x)|^2 dx.$$

Следовательно, $P_+ \in \mathcal{L}_\infty^+(H, \varphi)$ /аналогично $P_- \in \mathcal{L}_\infty^-(H, \varphi)$ /, для всех $\varphi \in L_2$. Если φ имеет ограниченный носитель /или достаточно быстро убывает на бесконечности/, то $P_\pm \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ для всех $p \geq 1$.

Пример I.3 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L_2(\mathbb{R}^n)$. $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - борелевская функция, $H = P(D)$ / $D = -i(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ / - псевдодифференциальный оператор с постоянным символом. Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^n / P \text{ не бесконечно дифференцируема в окрестности точки } x, \text{ или } P'(x) = 0, \text{ или } \det P''(x) = 0\}$, V - измеримая функция на $\mathbb{R}^n$ такая, что

$$(1 + |x|)^{-m} V \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

при некотором m /здесь $|x|$ - евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ /. Предположим, что существует открытое множество Ω такое, что $M \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ и для всякого компакта $K \subset P'(\Omega)$

$$\int_{|t| \geq 1} \left(\int_K |V(\pm tx)|^2 dx \right)^{p/2} dt < \infty.$$

Тогда /см. [54]/ для всех $\varphi \in \mathcal{D} = \mathcal{F}^{-1} C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{|t| \gg 1} \|V U(t) \varphi\|^p dt < \infty.$$

В частности, если V к тому же ограничена, то $V \in \mathcal{L}_p(H, \varphi)$ для $\varphi \in \mathcal{D}$, /мы отождествляем функцию V и оператор умножения на V /.
 1.

Ниже $P_\varphi = P_\varphi^H$ - проектор на $\mathcal{H}_\varphi = \mathcal{H}_\varphi(H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.1 Пусть $p \in [1, \infty]$. Тогда

а/ $\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ - линейное подмножество в B и $\|\cdot\|_{\pm, p, \varphi}$ - полунорма на нем;

б/ если $T \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ и $A \in B(\mathcal{H}_2)$, то $AT \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$;

в/ если $p < \infty$, $T_n, T \in B$, $S\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n P_\varphi = T P_\varphi$,

$T_n \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ для всех $n \gg 1$ и

$$\sup_{n \gg 1} \|T_n\|_{\pm, p, \varphi} = C < \infty,$$

то $T \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ и $\|T\|_{\pm, p, \varphi} \leq C$;

г/ если $1 \leq p_1 < p_2 \leq \infty$, то $\mathcal{L}_{p_1}^\pm(H, \varphi) \subset \mathcal{L}_{p_2}^\pm(H, \varphi)$;

д/ если $T \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$, то

$$S\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} T U(t) P_\varphi = 0. \quad / \text{ I.1 } /$$

Доказательство. Утверждения а/, б/ - очевидны.
 в/ - следствие теоремы Фату о предельном переходе под знаком интеграла. Докажем г/. Если $p_2 < \infty$, то г/ вытекает из ограниченности функции $\|T U(t) \varphi\|$. Пусть $p_2 = \infty$. Положим /ср. с [59]/

$$\mathcal{D} = \{ \varphi : \varphi = \int g(s) U(s) \varphi ds, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \}.$$

Если $\text{supp } g \subset [a, b]$, то

$$\begin{aligned} \|TV(t)\varphi\|_{P_1}^{P_1} &\leq \left(\int_{t+a}^{t+b} |g(s)| \|TV(t+s)\varphi\| ds \right)^{P_1} \leq \\ &\leq C \int_{t+a}^{t+b} \|TV(s)\varphi\|^{P_1} ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm\infty. \end{aligned}$$

Так как T ограничен и $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}_\varphi$, то отсюда вытекает соотношение / I.1 /, а потому $T \in \mathcal{L}_\infty^\pm(\mathcal{H}, \varphi)$. В силу г/ д/ достаточно доказать для $p = \infty$. Из соотношения $T \in \mathcal{L}_\infty^\pm(\mathcal{H}, \varphi)$ следует, что $T \in \mathcal{L}_\infty^\pm(\mathcal{H}, \varphi)$ для всех $\varphi \in \text{spa} \{ U(t)\varphi, t \in \mathbb{R} \}$ и / I.1 / вытекает из ограниченности T и определения P_φ . ■

Если $T \in \mathcal{L}_\infty^\pm(\mathcal{H}, \varphi)$, то согласно предложению I.1 а/ $T \in \mathcal{L}_\infty^\pm(\mathcal{H}, \varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$. Для классов $\mathcal{L}_p^\pm(\mathcal{H}, \varphi)$ аналогичный результат уже вообще говоря не верен /см. примеры I.1, I.2/. Тем не менее можно показать, что $T \in \mathcal{L}_p^\pm(\mathcal{H}, g(\mathcal{H})\varphi)$ для достаточно хороших функций g .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.2 Пусть $p \in [1, \infty)$, μ - конечная комплексная мера на $\mathbb{R}$,

$$g(x) = \int e^{ixs} \mu(ds).$$

Тогда $\mathcal{L}_p(\mathcal{H}, \varphi) \subset \mathcal{L}_p(\mathcal{H}, g(\mathcal{H})\varphi)$ и

$$\|Tg(\mathcal{H})\|_{p, \varphi} \leq |\mu|(\mathbb{R}) \|T\|_{p, \varphi}. \quad / \text{I.2} /$$

Если дополнительно

$$C_\pm = \int_{\mathbb{R}_\pm} |s| |\mu|(ds) < \infty,$$

то $\mathcal{L}_p^\pm(\mathcal{H}, \varphi) \subset \mathcal{L}_p^\pm(\mathcal{H}, g(\mathcal{H})\varphi)$ и

$$\|Tg(\mathcal{H})\|_{\pm, p, \varphi}^p \leq (|\mu|(\mathbb{R}))^{p-1} (|\mu|(\mathbb{R})) \times \quad / \text{I.3} /$$

$$\times \|T\|_{\pm, p, \varphi}^p + c_{\pm} \|T\|^p \|\varphi\|^p).$$

Доказательство. Докажем / I.3 / // I.2 / доказывається аналогічно/. Пусть для определенности $T \in \mathcal{L}_p^+(H, \varphi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \|T U(t) g(H) \varphi\|^p dt &\leq \int_0^{\infty} dt \left(\int \|T U(t-s) \varphi\| |\mu|(ds) \right)^p \leq \\ &\leq \int_0^{\infty} dt \left(\int \|T U(t-s) \varphi\|^p |\mu|(ds) \right) \left(\int |\mu|(ds) \right)^{p-1} = \\ &= (|\mu|(R))^{p-1} \int |\mu|(ds) \int_{-s}^{\infty} \|T U(\tau) \varphi\|^p d\tau \leq \\ &\leq (|\mu|(R))^{p-1} (|\mu|(R) \|T\|_{\pm, p, \varphi}^p + c_{\pm} \|T\|^p \|\varphi\|^p). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приведем три простых следствия.

СЛЕДСТВИЕ I.1 Пусть $g \in W_2^{\lambda}(R)$ при некотором $\lambda > \frac{1}{2}$. Тогда $\mathcal{L}_p(H, \varphi) \subset \mathcal{L}_p(H, g(H) \varphi)$. Если $\lambda > \frac{3}{2}$, то $\mathcal{L}_p^{\pm}(H, \varphi) \subset \mathcal{L}_p^{\pm}(H, g(H) \varphi)$.

Доказательство. Докажем вторую часть следствия /первая доказывается аналогично/. Имеем /при $\lambda > 3/2$ /

$$\begin{aligned} \int (1 + |s|) |\hat{g}(s)| ds &\leq \left(\int |\hat{g}(s)|^2 (1 + s^2)^{\lambda} ds \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int \frac{(1 + |s|)^2}{(1 + s^2)^{\lambda}} ds \right)^{1/2} \leq c \|g\|_{W_2^{\lambda}(R)} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, g является обратным преобразованием Фурье меры $\mu(ds) = \hat{g}(s) ds$, имеющей конечный первый абсолютный момент. $\square$

Ниже $G = G(H)$, $R(z) = R_H(z)$, $E(\cdot) = E_H(\cdot)$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2 Пусть $T \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$. Тогда для всех $z \in \bar{G}$, $n \geq 1$ $TR^n(z) \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$.

Доказательство. Если $\operatorname{Im} z \neq 0$, то доказываемое утверждение вытекает из следствия 1.1. Если же $z \in \mathcal{R}$, то функцию $g(x) = (x - z)^{-n}$ можно сгладить в окрестности точки z не меняя ее на спектре оператора H , т.е. не меняя оператор $g(H)$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.3 Пусть $T \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$, $\varphi \in E(\Delta)\mathcal{H}_1$ / Δ - конечный интервал/. Тогда для всякой $g \in C^2(\mathcal{R})$ $TE \in \mathcal{L}_p^\pm(H, g(H)\varphi)$.

Отметим, что при $p=1$ утверждение первой части предложения 1.2 в определенном смысле неулучшаемо. Действительно, вернемся к примеру 1.1. Пусть g ограниченная измеримая функция. Тогда /по крайней мере формально/

$$\begin{aligned} \|Tg(H)U(t)\varphi\| &= \sqrt{2\pi} |\mathcal{F}(g\varphi u)|(t) = \\ &= |\mathcal{F}(g) * \mathcal{F}(\varphi u)|(t) = |\mathcal{F}(g) * \|TU(\cdot)\varphi\|| (t). \end{aligned}$$

Так как /см., например, [47, стр.39] /

$$\sup \{ \|\mathcal{F}(g) * f\|_{L_1} : f \in \mathcal{Y}(\mathcal{R}), \|f\|_{L_1} \leq 1 \} < \infty$$

тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(g)$ - конечная мера, то условие,

наложенное на g в предложении I.2, является и необходимым для выполнения неравенства

$$\|Tg(H)\|_{1,\varphi} \leq C \|T\|_{1,\varphi}$$

с некоторой постоянной $C > 0$. Здесь и ниже $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ - пространство Шварца быстро убывающих функций. С другой стороны при $\rho > 1$ подобная оценка справедлива для более широкого класса функций g /см. с [47, стр. 38]/. В частности, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.3 Пусть g - произвольная ограниченная борелевская функция. Тогда $\mathcal{L}_2(H, \varphi) \subset \mathcal{L}_2(H, g(H)\varphi)$ и

$$\|Tg(H)\|_{2,\varphi} \leq \|g\|_{L_\infty} \|T\|_{2,\varphi}. \quad \text{I.4}$$

Доказательство. Согласно предложению I.4 б) /см. ниже/ $TP_S P_\varphi = 0$, а потому можно сразу считать, что $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$. Здесь и ниже $P_S = P_S^H$, $P_{ac} = P_{ac}^H$ - проекторы на сингулярное $\mathcal{H}_S$ и абсолютно непрерывное $\mathcal{H}_{ac}$ подпространства оператора H соответственно. Через $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ обозначаем прямое и обратное преобразования Фурье слабо измеримых $\mathcal{H}_2$ -значных функций из $L_2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_2)$ /см., например, [42, стр 59]/. Рассмотрим для $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T U(t) g(H) \varphi &= (2\pi)^{-1/2} \int \hat{g}(s) T U(t-s) \varphi ds = \\ &= \mathcal{F}(g \mathcal{F}^{-1}(T U(\cdot) \varphi))(t). \end{aligned}$$

В силу равенства Парсеваля /см. [43, стр. 162] /

$$\int \|TV(t)g(H)\varphi\|^2 dt = \int |g(t)|^2 \times \\ \times |\mathcal{F}^{-1}(TV(\cdot)\varphi)(t)|^2 dt \leq \|g\|_{L_\infty}^2 \|T\|_{2,\varphi}^2$$

Т.е. мы доказали / I.4 / для $g \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$. Пусть теперь $g \in L_\infty(\mathbb{R})$, $g_n \in \mathcal{Y}(\mathbb{R})$ / $n \geq 1$,

$$\|g_n\|_{L_\infty} \leq \|g\|_{L_\infty}, \quad \forall n \geq 1$$

и $g_n(x) \rightarrow g(x)$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} Tg_n(H)P_{ac} = Tg(H)P_{ac}.$$

Кроме того

$$\|Tg_n(H)\|_{2,\varphi} \leq \|g_n\|_{L_\infty} \|T\|_{2,\varphi} \leq \|g\|_{L_\infty} \|T\|_{2,\varphi}$$

и доказываемое утверждение следует из предложения I.I в/. $\blacksquare$

Пусть $P_c = P_c^H$, $P_{pp} = P_{pp}^H$ - проекторы на $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_c(H)$, $\mathcal{H}_{pp} = \mathcal{H}_{pp}(H)$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.4

а/ если $T \in \mathcal{L}_\infty^\pm(H, \varphi)$, то $TP_{pp}P_\varphi = 0$;

б/ если $T \in \mathcal{L}_2(H, \varphi)$, то $TP_s P_\varphi = 0$.

В частности, если $T \in \mathcal{L}_2(H, \varphi)$, то $T \in \mathcal{L}_2(H, P_{ac}\varphi)$ и

$$\|T\|_{2,\varphi} = \|T\|_{2,P_{ac}\varphi}.$$

Доказательство. а/ Согласно предложению I.I д/ выполнено соотношение / I.I /. Если φ - собственный вектор оператора H /с собственным числом λ / , лежащий в $\mathcal{H}_\varphi$, то в

силу / I.I /

$$\|TV(t)\varphi\| = |e^{i\lambda t}| \|T\varphi\| = \|T\varphi\| = 0,$$

т.е. $T\varphi = 0$. $\square$

б/ Достаточно показать, что $\text{Ker}(T^*) \cap P_S \mathcal{H}_\varphi = \{0\}$. Пусть $\varphi \in P_S \mathcal{H}_\varphi$, $\varphi = T^*u$ ($u \in \mathcal{H}_2$). Рассмотрим

$$f_\lambda(t) = \int e^{-i\lambda t} d(E_\lambda \varphi, \varphi) = (U(t)\varphi, \varphi) = (TV(t)\varphi, u).$$

Следовательно, $f \in L_2$, а потому и $\check{f} \in L_2$ и мера $(E(\cdot)\varphi, \varphi)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Так как $\varphi \in \mathcal{H}_S$, то $(E(\cdot)\varphi, \varphi) \equiv 0$, и т.к. $\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ $\varphi = 0$. $\square$

Следует отметить, что часть б/ предложения I.4 аналогична соответствующему результату из теории гладких возмущений оператора H /см. Т.Като [56] и книги [42, 51]/.

Классы $\mathcal{L}_p^+(H, \varphi)$ допускают важную "дискретную" характеристику. Ниже Δ - ограниченный интервал, $|\Delta|$ - длина Δ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.5 Пусть $p \in [1, \infty)$, $\varphi \in E(\Delta) \mathcal{H}$. Для того, чтобы $T \in \mathcal{L}_p^+(H, \varphi)$, необходимо, чтобы для всех $\omega > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|TV(\pm \omega n)\varphi\|^p < \infty \quad / I.5 /$$

и достаточно, чтобы ряд / I.5 / сходиллся для некоторого $\omega \in (0, \frac{2\pi}{|\Delta|})$.

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия I.3 и оценки

$$|\omega \sum_{n=0}^{\infty} \|TV(\pm \omega n)\varphi\|^p - \|T\|_{\pm, p, \varphi}^p| \leq$$

$$\leq \omega(p-1) \|T\|_{\pm, p, \varphi}^p + \|T\|_{\pm, p, H\varphi}^p < \infty \quad / \text{I.6} /$$

/ I.6 / в свою очередь следует из цепочки неравенств

$$\begin{aligned} & | \omega \|T U(\omega n) \varphi\|^p - \int_{\omega n}^{\omega(n+1)} \|T U(t) \varphi\|^p dt | \leq \\ & \leq \int_{\omega n}^{\omega(n+1)} dt \int_{\omega n}^t p \|T U(\tau) \varphi\|^{p-1} \|T U(\tau) H\varphi\| d\tau \leq \\ & \leq \omega p \int_{\omega n}^{\omega(n+1)} \|T U(t) \varphi\|^{p-1} \|T U(t) H\varphi\| dt \leq \\ & \leq \omega p \left(\int_{\omega n}^{\omega(n+1)} \|T U(t) \varphi\|^p dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \times \\ & \times \left(\int_{\omega n}^{\omega(n+1)} \|T U(t) H\varphi\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega \times \\ & \times \left[(p-1) \int_{\omega n}^{\omega(n+1)} \|T U(t) \varphi\|^p dt + \int_{\omega n}^{\omega(n+1)} \|T U(t) H\varphi\|^p dt \right]. \end{aligned}$$

Докажем достаточность. Не ограничивая общности, будем считать, что $\bar{\Delta} \subset (-\pi, \pi)$ и $\omega = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|T\|_{+, p, \varphi}^p &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \|T U(t) \varphi\|^p dt \leq \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|T U(n) H^k \varphi\| \frac{(t-n)^k}{k!} \right)^p dt. \end{aligned}$$

Оценим сумму под знаком интеграла с помощью неравенства Гёльдера /ниже $q = p/(p-1)$, β - произвольное число, большее единицы,

$$B = b^{p-1}.$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \|TV(n)H^k \varphi\| \frac{(t-n)^{k/p}}{k! b^{-k/8}} \frac{(t-n)^{k/8}}{b^{k/8}} \right)^p \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|TV(n)H^k \varphi\|^p \frac{(t-n)^k}{(k!)^p} B^k \left(\frac{b}{b+n-t} \right)^{p-1}.$$

Так как

$$\int_n^{n+1} (t-n)^k \left(\frac{b}{b+n-t} \right)^{p-1} dt \leq 1,$$

то достаточно показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{(k!)^p} \|TV(n)H^k \varphi\|^p < \infty. \quad | \text{I.7} |$$

Пусть $g \in C_0^3(-\pi, \pi)$ такая, что $g(n)\varphi = \varphi$ и

$$X^k g(x) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} g_{k\ell} e^{-i\ell x}$$

- разложение в ряд Фурье функции $X^k g(x)$. Тогда $|g_{k\ell}| \leq c^k (1+|\ell|)^{-3}$, где $c > 0$ не зависит от ℓ и k . В этом легко убедиться интегрированием по частям. Следовательно, в силу неравенства Гёльдера

$$\|TV(n)H^k \varphi\|^p \leq \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \|TV(n+\ell)\varphi\| \frac{c^k}{(1+|\ell|)^3} \right)^p \leq$$

$$\leq c_1^k \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \|TV(n+\ell)\varphi\|^p (1+|\ell|)^{-3}.$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \|T U(n) H^{\kappa} \varphi\|^p &\leq C_1^{\kappa} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (1+|\ell|)^{-3} \sum_{n=-\ell}^{\infty} \|T U(n) \varphi\|^p \leq \\ &\leq C_2^{\kappa} (\|T\|^p \|\varphi\|^p + \sum_{n=0}^{\infty} \|T U(n) \varphi\|^p) \end{aligned}$$

и ряд / I.7 / сходится. $\blacksquare$

ЗАМЕЧАНИЕ I.I Аналогичный результат имеет место для классов $\mathcal{L}_{\infty}^{\pm}(H, \varphi)$ /см. [51, стр. III] /. Точнее, если $\varphi \in E(\Delta) \mathcal{H}$ и

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \pm\infty} T U(\omega n) \varphi = 0$$

для некоторого $\omega \in (0, 2\pi/|\Delta|]$, то $T \in \mathcal{L}_{\infty}^{\pm}(H, \varphi)$. Очевидно, приведенное соотношение /для всех $\omega > 0$ / является и необходимым для того, чтобы $T \in \mathcal{L}_{\infty}^{\pm}(H, \varphi)$.

В ряде конкретных задач квантовой механики удобнее контролировать поведение функции $TR(\lambda \pm i\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а не $TU(t)\varphi$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Часть а/ приводимого ниже предложения элементарна. Близкое к б/ утверждение доказано Е.М.Ильиным [18] /см. также работу Д.Р.Яфаева [50]/.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.6

а/ $T \in \mathcal{L}_2^{\pm}(H, \varphi)$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int \|TR(\lambda \pm i\varepsilon) \varphi\|^2 d\lambda < \infty;$$

б/ пусть Δ - конечный интервал. Предположим, что $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$ и

$$C = \sup_{\varepsilon \neq 0} \int_{\Delta} \|TR(\lambda + i\varepsilon)\varphi\|^2 d\lambda < \infty, \quad / 1.8 /$$

тогда $T \in \mathcal{L}_2(H, E(\Delta)\varphi)$.

Доказательство. а/ вытекает из соотношения /см. [57] или [43] стр. 163 /

$$\int \|TR(\lambda \pm i\varepsilon)\varphi\|^2 d\lambda = 2\pi \int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \|TV(\pm t)\varphi\|^2 dt.$$

Докажем б/. В силу хорошо известных свойств интеграла Коши-Стилтьеса для произвольного $u \in \mathcal{H}_2$ существуют /для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}$ / пределы

$$\begin{aligned} g^+(\lambda)[u] &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} (TR(\lambda \pm i\varepsilon)\varphi, u) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int \frac{1}{x - (\lambda \pm i\varepsilon)} d(E_\lambda \varphi, T^*u) \end{aligned}$$

и почти всюду

$$g^+(\lambda)[u] - g^-(\lambda)[u] = \frac{d}{d\lambda} (E_\lambda \varphi, T^*u).$$

Так как $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$, то

$$\begin{aligned} (TV(t)E(\Delta)\varphi, u) &= (2\pi i)^{-1} \times \\ &\times \int_{\Delta} e^{-it\lambda} (g^+(\lambda)[u] - g^-(\lambda)[u]) d\lambda. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\{u_k, k \geq 1\}$ - ортонормированный базис в $\mathcal{H}_2$.

В силу равенства Парсеваля и теоремы Фату для всех $n \geq 1$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \int | (TV(t) E(\Delta) \varphi, u_k) |^2 dt = \\ & = \sum_{k=1}^n (2\pi)^{-1} \int_{\Delta} | g^+(\lambda) [u_k] - g^-(\lambda) [u_k] |^2 d\lambda \leq (2\pi)^{-1} \times \\ & \times \sup_{\varepsilon > 0} \sum_{k=1}^n \int_{\Delta} | (TR(\lambda + i\varepsilon) \varphi, u_k) - (TR(\lambda - i\varepsilon) \varphi, u_k) |^2 d\lambda \leq \\ & \leq \frac{2}{\pi} \sup_{\varepsilon \neq 0} \sum_{k=1}^n \int_{\Delta} | (TR(\lambda + i\varepsilon) \varphi, u_k) |^2 d\lambda \leq \frac{2C}{\pi}. \end{aligned}$$

Устремив n к ∞ , получим, что $T \in \mathcal{L}_2(H, E(\Delta) \varphi)$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ I.2 Все изложенные в этом параграфе результаты /и их доказательства/ остаются в силе, если вместо ограниченности требовать некоторую подчиненность оператора T оператору H . Точнее, можно предполагать, что для некоторой положительной борелевской функции F на $\mathbb{R}$ оператор $TF^{-1}(H)P_{\varphi}$ был бы ограничен, а вектор $\varphi \in \mathcal{D}(F(H))$. Тогда из условия

$$\int_{\mathbb{R}^+} \|TV(t)\varphi\|^p dt < \infty$$

вытекает, что $TF^{-1}(H)P_{\varphi} \in \mathcal{L}_p^+(H, F(H)\varphi)$, что позволяет свести дело к рассмотренному случаю ограниченного T .

Часть изложенных результатов сохраняет силу и в том случае, когда T произвольный замкнутый оператор и $U(t)\varphi \in \mathcal{D}(T)$ при п. в. $t \in \mathbb{R}$.

1.2 СВЯЗЬ С КЛАССАМИ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

В этом параграфе будет показано, что между классами асимптотических постоянных $\mathcal{L}_p^+(H, \varphi)$ и классами S_p компактных операторов существует тесная связь. Отметим, что ранее было известно два результата в этом направлении. Первый из них - известная лемма М. Розенблума [64] /см. также [1] /, утверждающая, что если $T \in S_2$ и вектор φ удовлетворяет условию

$$\rho_\varphi(\lambda) := \rho_{H, \varphi}(\lambda) := \left(\frac{d}{d\lambda} (E_\lambda^H \varphi, \varphi) \right)^{1/2} \in L_\infty, \quad / 1.9 /$$

то $T \in \mathcal{L}_2(H, \varphi)$ и

$$\int \|T U(t) \varphi\|^2 dt \leq 2\pi \|\rho_\varphi\|_{L_\infty} \|T\|_2^2. \quad / 1.10 /$$

Второй - следующая простая лемма /см., например, [42, 51] /.

ЛЕММА 1.1 Если $T \in S_\infty$, то

$$s\text{-}\lim_{|t| \rightarrow \infty} T U(t) P_{ac} = 0,$$

т.е. $T \in \mathcal{L}_\infty(H, \varphi)$ для всех $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$.

Пусть $m_\varphi(\cdot) := m_{H, \varphi(\cdot)} := (E_H(\cdot) \varphi, \varphi)$, Δ - ограниченный интервал, $\bar{\Delta}$ - замыкание Δ .

ТЕОРЕМА 1.1 Пусть $\varphi \in E(\Delta) \mathcal{H}_{ac}$. Если $T \in \mathcal{L}_p(H, \varphi)$ при некотором $p \in [1, 2]$, то оператор $T' := T P_\varphi(H) P_\varphi$ замыкаем и его замыкание $\bar{T}' \in S_p$. Если же $p \geq 2$ и $\bar{T}' \in S_p$, то $T \in \mathcal{L}_p(H, \varphi)$.

Отметим, что функция ρ_φ определена для п.в. λ . Тем не

менее для $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$ $P_\varphi(H)P_\varphi$ - корректно определенный оператор $1/\mathcal{H}_\varphi \subset \mathcal{H}_{ac}$. Прежде чем доказывать теорему I.1 мы приведем одно следствие из нее, а также пример, поясняющий идею доказательства этой теоремы.

СЛЕДСТВИЕ I.4 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{L}_p(H, \varphi)$ при некотором $p \in [1, 2]$. Тогда существует последовательность борелевских множеств M_n такая, что

$$TE(M_n)P_\varphi \in S_p$$

$$\text{и } \lim_{n \rightarrow \infty} m_\varphi(\mathbb{R} \setminus M_n) = 0.$$

Доказательство следствия. В силу предложения I.4 в/можно сразу считать, что $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$. Пусть $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тогда /см. следствие I.1 / $T \in \mathcal{L}_p(H, g(H)\varphi)$ и по теореме I.1

$$\overline{TP_\varphi(H)|g|(H)P_\varphi} \in S_p.$$

Пусть теперь $n \gg 1$ и $g(x) = 1$ для $x \in (-n, n)$. После домножения справа на $E(-n, n)$ получим $\overline{TP_\varphi(H)E(-n, n)P_\varphi} \in S_p$.

В качестве искоемых множеств M_n теперь можно взять множества

$$M_n = \{x \in (-n, n) : P_\varphi(x) \geq \varepsilon_n\},$$

где $\varepsilon_n > 0$ выбираются так, чтобы

$$m_\varphi((-n, n) \setminus M_n) < 1/n. \quad \blacksquare$$

Пример I.4 Пусть $\mathcal{H}_1 = L_2(-T, T)$; H - оператор умножения на x , $\varphi(x) \equiv 1$, $p = 1$. Если $T \in \mathcal{L}_1(H, \varphi)$, то в си-

ду предложения I.5 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|Te^{-inx}\| < \infty$. Так как $\{e^{-inx}, n \in \mathbb{Z}\}$ - ортонормированный базис в $\mathcal{H}_1$, то $T \in S_1$.
 /сейчас $P_{\varphi}(H)P_{\varphi} = \mathbb{I}$.

Для доказательства теоремы I.I нам понадобится следующая лемма. Ниже $\|\cdot\|_A = (\|A \cdot\|^2 + \|\cdot\|^2)^{1/2}$ - норма графика оператора A .

ЛЕММА I.2 Пусть A - линейный оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathcal{H}$ в гильбертово пространство $\mathcal{K}$. Предположим, что существует ортонормированный базис $\{e_k, k \geq 1\}$ в $\mathcal{H}$ такой, что $e_k \in \mathcal{D}(A) \forall k \geq 1$ и $\text{sra } \{e_k, k \geq 1\}$ плотна в $\mathcal{D}(A)$ с нормой графика оператора A . Тогда, если при некотором $p \in [1, 2]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Ae_k\|^p < \infty, \quad / \text{I.II} /$$

то оператор A замыкаем и $\bar{A} \in S_p(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

Доказательство. Отметим, что в случае ограниченного A утверждение леммы хорошо известно /см., например, [16]/. Таким образом, достаточно показать, что A - замыкаем и $\bar{A} \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Если / I.II / выполнено при некотором $p \in [1, 2]$, то оно выполняется и при $p = 2$. Отсюда следует, что для всех $u \in \mathcal{D} = \text{sra } \{e_k, k \geq 1\}$

$$\|Au\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|Ae_k\|^2 \right)^{1/2} \|u\|. \quad / \text{I.I2} /$$

Так как по условию $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}(A)$ с нормой графика, то / I.I2 / выполняется для всех $u \in \mathcal{D}(A)$. Следовательно, A

замыкаем и

$$\|\bar{A}\| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|A e_k\|^2 \right)^{1/2} \quad \blacksquare$$

Доказательство теоремы I.I. Пусть интервал $(-b, b)$ такой, что $\bar{\Delta} \subset (-b, b)$. Положим $\delta = (-b, b) \setminus \text{supp } m_\varphi$ и рассмотрим пространство $\tilde{\mathcal{H}}_\varphi = \mathcal{H}_\varphi \oplus L_2(\delta)$. Положим

$$\varphi_n = U(\omega n) P_\varphi^{-1}(H) \varphi, \quad \omega = \pi/b,$$

$$e_n = (2b)^{-1/2} (\varphi_n \oplus e^{-in\omega x}),$$

$\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ - ортонормированный базис в $\tilde{\mathcal{H}}_\varphi$. Рассмотрим оператор $\tilde{T} := T' \oplus 0$, $T' = T P_\varphi(H) P_\varphi$, $\mathcal{D}(\tilde{T}) = \mathcal{D}(T') \oplus \mathcal{D}(L_2(\delta))$. $\tilde{T}$ - действует из $\tilde{\mathcal{H}}_\varphi$ в $\mathcal{H}_2$. Очевидно, $e_n \in \mathcal{D}(\tilde{T})$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\tilde{T} e_n\|^p = (2b)^{-p/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|T U(\omega n) \varphi\|^p. \quad / \text{I.I3} /$$

Пусть теперь $p \in [1, 2]$ и $T \in \mathcal{L}_p(H, \varphi)$. Достаточно показать, что $\tilde{T}$ замыкаем и $\tilde{\tilde{T}} \in S_p(\tilde{\mathcal{H}}_\varphi, \mathcal{H}_2)$. В силу предложения I.5 ряд / I.I3 / сходится, и согласно лемме I.2 достаточно показать, что $\mathcal{D} = \text{sra} \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ плотно в $\mathcal{D}(\tilde{T})$ с нормой графика $\|\cdot\|_{\tilde{T}}$. Так как

$$\|\cdot\|_{\tilde{T}} \leq C (\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\varphi}^2 + \|P_\varphi(H) \cdot\|_{\mathcal{H}_\varphi}^2)^{1/2},$$

где $C = \max\{1, \|T\|\}$, то плотность $\mathcal{D}$ вытекает из полноты тригонометрической системы $\{e^{-in\omega x}, n \in \mathbb{Z}\}$ в простран

стве

$$L_2((-b, b), (1 + \rho_\varphi^2(x)) dx).$$

Пусть теперь $p \geq 2$ и $\overline{T\rho_\varphi(H)\rho_\varphi} \in S_p$. Тогда, очевидно, $\overline{T} \in S_p(\mathcal{H}_\varphi, \mathcal{H}_2)$ и /см. [16]/ ряд / I.13 / сходится. Так как $\omega = \pi/b < 2\pi/|\Delta|$, то согласно предложению I.5 $T \in \mathcal{L}_p(H, \varphi)$.

Теорема I.1 показывает, что при $\varphi \in E(\Delta) \mathcal{H}_{ac}$ / Δ - конечный интервал/ $T \in \mathcal{L}_2(H, \varphi)$ тогда и только тогда, когда оператор $T\rho_\varphi(H)\rho_\varphi$ замыкаем и его замыкание - оператор Гильберта-Шмидта. Этот результат справедлив и без предположения $\varphi \in E(\Delta) \mathcal{H}$.

ТЕОРЕМА I.2 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$. Тогда $T \in \mathcal{L}_2(H, \varphi)$ тогда и только тогда, когда $T' = T\rho_\varphi(H)\rho_\varphi$ замыкаем и его замыкание $\overline{T'} \in S_2$.

Более того, справедливо равенство

$$\int \|TV(t)\varphi\|^2 dt = 2\pi \|T\rho_\varphi(H)\rho_\varphi\|_2^2. \quad / \text{I.14} /$$

Доказательство. Пусть сначала $\varphi \in E(\Delta) \mathcal{H}_{ac}$ / Δ - конечный интервал/. Тогда первое утверждение теоремы выполнено, и для $\omega \in (0, \pi/|\Delta|)$ справедливо соотношение /см. / I.13 //

$$\|T'\|_2^2 = \|\overline{T'}\|_2^2 = \frac{\omega}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|TV(\omega n)\varphi\|^2. \quad / \text{I.15} /$$

Так как при $\omega \rightarrow 0$ правая часть / I.15 / стремится к $\|T\|_{2,\varphi}^2 / 2\pi$ /см., например, оценку / I.6 //, то для $\varphi \in E(\Delta)$ $\mathcal{H}_{ac}$ / I.14 / доказано.

Пусть теперь φ произвольный вектор из $\mathcal{H}_{ac}$. Предположим, что $\overline{T'} \in S_2$. Пусть $\Delta = (-a, a)$. Тогда

$$\overline{T'E(\Delta)} = \overline{T \rho_{\varphi}(H) P_{\varphi} E(\Delta)} = \overline{T \rho_{E(\Delta)\varphi}(H) P_{E(\Delta)\varphi}} \in S_2.$$

Следовательно, по доказанному, $T \in \mathcal{L}_2(H, E(\Delta)\varphi)$ и

$$\int \|T U(t) E(\Delta)\varphi\|^2 dt = 2\pi \|\overline{T'E(\Delta)}\|_2^2 \leq 2\pi \|\overline{T'}\|_2^2.$$

Так как $TE(\Delta) \xrightarrow{S} T$ при $a \rightarrow +\infty$, то в силу предложения I.1 в/

$$T \in \mathcal{L}_2(H, \varphi) \text{ и } \|T\|_{2,\varphi}^2 \leq 2\pi \|\overline{T'}\|_2^2.$$

Наоборот, предположим теперь, что $T \in \mathcal{L}_2(H, \varphi)$. Тогда согласно предложению I.3 $T \in \mathcal{L}_2(H, E(\Delta)\varphi) | \Delta = (-a, a) |$ и $\|T\|_{2,E(\Delta)\varphi} \leq \|T\|_{2,\varphi}$. По доказанному оператор $T'E(\Delta)$ замыкаем,

$$\overline{T'E(\Delta)} = \overline{T \rho_{E(\Delta)\varphi}(H) P_{E(\Delta)\varphi}} \in S_2$$

и

$$\|\overline{T'E(\Delta)}\|_2^2 = (2\pi)^{-1} \|T\|_{2,E(\Delta)\varphi}^2 \leq (2\pi)^{-1} \|T\|_{2,\varphi}^2 \quad / \text{I.16} /$$

Из / I.16 / следует, что для $u \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(\rho_{\varphi}(H)) \cap \cap \text{spa } E(\Delta)\varphi$, Δ - конечный интервал }

$$\|T'u\| \leq (2\pi)^{-1} \|T\|_{2,\varphi} \|u\|.$$

Так как $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}(T')$ по норме графика оператора T' , то отсюда, как и при доказательстве леммы I.2 вытекает, что T' замыкаем и $\overline{T}' \in \mathcal{B}$. Тогда

$$\overline{T}' = s\text{-}\lim_{a \rightarrow +\infty} \overline{T}' E(-a, a)$$

и из / I.16 / следует /см. [16] /, что

$$\overline{T}' \in \mathcal{S}_2 \quad \text{и} \quad \|\overline{T}'\|_2 \leq (2\pi)^{-1} \|T\|_{2,\varphi}.$$

Так как противоположное неравенство уже установлено, то это окончательно доказывает теорему I.2. ■

Теорема I.2 усиливает уже упоминавшуюся лемму М.Розенблума. Действительно, из / I.14 / немедленно следует / I.10 /. Из теоремы I.2 вытекает также следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ I.5 Пусть $T \in \mathcal{L}_2(H, \varphi)$. Тогда

$$\mu(\cdot) = \|T\|_{2, E(\cdot)\varphi}^2$$

- конечная борелевская мера на $\mathcal{R}$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега. В частности, если $\mathcal{R} = \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} X_{\kappa}$, где X_{κ} - борелевские непересекающиеся множества, то

$$\int \|T U(t) \varphi\|^2 dt = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int \|T U(t) E(X_{\kappa}) \varphi\|^2 dt.$$

Доказательство. Согласно предложению I.4 можно

сразу считать, что $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$. Для $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$ утверждение следствия вытекает из соотношения

$$\mu(\cdot) = 2\pi \|\bar{T}' E(\cdot)\|_2^2. \blacksquare$$

Связь между классами $\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ и S_p несколько сложнее. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА I.3 Пусть $\varphi \in E(\Delta) \mathcal{H}_{ac}$, Δ - конечный интервал/. Тогда существуют операторы $P^\pm \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такие, что для всякого оператора $T \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ при некотором $p \in [1, 2]$ оператор $T_\pm' := T P_\varphi(H) P^\pm$ замыкаем и его замыкание $\bar{T}_\pm' \in S_p$. Эти операторы $P^\pm$ можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения

$$P^\pm = P^\pm P_\varphi = P_\varphi P^\pm, \quad P^+ + P^- = P_\varphi, \quad / \text{I.I7} /$$

$$\overline{HP^\pm - P^\pm H} \in S_1(\mathcal{H}_1), \quad / \text{I.I8} /$$

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P^\pm U(t) = 0. \quad / \text{I.I9} /$$

Отметим, что оператор $P_\varphi(H) P^\pm$ корректно определен /согласно / I.I7 / $P^\pm \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_\varphi \subset \mathcal{H}_{ac}$.

Доказательство. Для удобства записи будем считать, что $\bar{\Delta} \subset (-\pi, \pi)$. Положим $\delta = (-\pi, \pi) \setminus \text{supp } m_\varphi$ и /так же, как при доказательстве теоремы I.1/ рассмотрим пространство $\tilde{\mathcal{H}}_\varphi = \mathcal{H}_\varphi \oplus L_2(\delta)$ и ортонормированный базис

$$e_n = (2\pi)^{-1/2} [\varphi_n \oplus e^{-in\cdot}], \quad n \in \mathbb{Z},$$

в нем. Здесь

$$\varphi_n = U(n) \rho_\varphi^{-1}(H) \varphi.$$

Пусть $\tilde{\rho}^+$, $\tilde{\rho}^-$ - ортопроекторы в $\tilde{\mathcal{H}}_\varphi$ на $\overline{\text{spa}}\{e_n, n > 0\}$ и $\overline{\text{spa}}\{e_n, n \leq -1\}$ соответственно. $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\varphi, \tilde{\mathcal{H}}_\varphi)$ - оператор вложения $\mathcal{H}_\varphi$ в $\tilde{\mathcal{H}}_\varphi$, т.е.

$$\mathcal{H}_\varphi \ni \psi \rightarrow \psi \oplus 0 = I\psi \in \tilde{\mathcal{H}}_\varphi.$$

Положим

$$\rho^\pm = I * \tilde{\rho}^\pm I.$$

В дальнейшем будем рассматривать $\rho^\pm$ как операторы во всем пространстве $\mathcal{H}_1$, доопределив их на $\mathcal{H}_1 \ominus \mathcal{H}_\varphi$ нулем. Очевидно, соотношение / I.17 / выполнено. Из определения $\rho^\pm$ следует, что

$$\rho^+ \psi = (2\pi)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\psi, \varphi_k) \varphi_k,$$

/ I.20 /

$$\rho^- \psi = (2\pi)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\psi, \varphi_{-k}) \varphi_{-k}.$$

Рассмотрим операторы $V^\pm = U(-1) \rho^\pm - \rho^\pm U(-1)$.

Из / I.20 / вытекает, что

$$V^\pm \psi = \pm (2\pi)^{-1} (\psi, \varphi_0) \varphi_{-1}.$$

Т.е. $V^\pm$ - операторы ранга I. Соотношение / I.18 / вытекает теперь из теории двойных операторных интегралов [9, 11] /так как $\bar{\Delta} \subset (-\pi, \pi)$, то $H \rho^\pm - \rho^\pm H = f(H) \rho^\pm - \rho^\pm f(H)$ для некоторой достаточно гладкой 2π -периодической функции f /см.

/ I.17 ///. Докажем соотношение / I.19 / /например, для верхнего

знака/. Пусть

$$\tilde{U}(t) = U(t) P_\varphi \oplus e^{-itx}.$$

Так как

$$P^- U(t) = I^* \tilde{P}^- I U(t) P_\varphi = I^* \tilde{P}^- \tilde{U}(t) I P_\varphi,$$

то достаточно показать, что

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{P}^- \tilde{U}(t) = 0.$$

Последнее следует из соотношения

$$\begin{aligned} \|P^- \tilde{U}(t) e_n\|^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(t+n)x} e^{-ikx} dx \right|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (t+k)^{-2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Пусть теперь $T \in \mathcal{L}_p^+(H, \varphi)$ при некотором $p \in [1, 2]$. Покажем, что T_+' замыкаем и $\tilde{T}_+' \in S_p$ /случай оператора T , принадлежащего классу $\mathcal{L}_p^-(H, \varphi)$ рассматривается аналогично/. Положим $\tilde{T} = T P_\varphi(H) P_\varphi \oplus 0$, $\tilde{T}_+ = \tilde{T} \tilde{P}^+$. Тогда

$$T_+' = T P_\varphi(H) P^+ = T P_\varphi(H) I^* \tilde{P}^+ I = \tilde{T} \tilde{P}^+ I \quad /1.2I/$$

и достаточно показать, что $\tilde{T}_+$ замыкаем и его замыкание $\tilde{T}_+ \in S_p(\tilde{\mathcal{H}}_\varphi, \mathcal{H}_2)$. Очевидно, что $e_n \in \mathcal{D}(\tilde{T}_+)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$ и согласно предложению I.5

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\tilde{T}_+ e_n\|^p = (2\pi)^{-p/2} \sum_{n=0}^{\infty} \|T U(n) \varphi\|^p < \infty.$$

В силу леммы I.2 осталось проверить, что $\mathcal{D} = \overline{\text{spa}} \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ плотно в

$$\mathcal{D}(\tilde{T}^+) = \{u \in \tilde{\mathcal{H}}_\varphi : \tilde{P}^+ u \in \mathcal{D}(P_\varphi(H)P_\varphi) \oplus L_2(\delta)\}$$

с нормой графика оператора $\tilde{T}^+$. Для $f \in L_2(-\pi, \pi)$ положим

$$c_k(f) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, f_+(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) e^{-ikx}.$$

Пусть $\rho(x) = 1 + P_\varphi^2(x)$, $\mathcal{K} = L_2((-\pi, \pi), \rho(x) dx)$.

Плотность $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}(\tilde{T}^+)$ эквивалентна плотности $\tilde{\mathcal{D}} = \overline{\text{spa}} \{ \exp(-ikx), k \in \mathbb{Z} \}$ в $\{ f \in L_2(-\pi, \pi) : f_+ \in \mathcal{K} \}$

по норме

$$\|f\| = \|f\|_{L_2(-\pi, \pi)} + \|f_+\|_{\mathcal{K}}.$$

Последнее очевидно следует из плотности множества $\mathcal{D}_+ =$

$$= \overline{\text{spa}} \{ \exp(-ikx), k \geq 0 \} \text{ в } \mathcal{K}_+ = \{ f \in \mathcal{K} :$$

$f = f_+ \}$ по норме пространства $\mathcal{K}$. Рассмотрим в $\mathcal{K}$ ортогональное дополнение к $\mathcal{D}_+$. Имеем

$$\mathcal{D}_+^\perp = \overline{\text{spa}} \{ \rho^{-1}(x) \exp(-ikx), k \leq -1 \}$$

и $\tilde{\mathcal{D}} = (\mathcal{D}_+^\perp)^\perp = \mathcal{K}_+$. Теорема полностью доказана. ■

Отметим, что выбор операторов $P^\pm$, удовлетворяющих условиям теоремы I.3 существенно не однозначен. Операторы, построенные нами, близки к проекторам на уходящее и приходящее подпространства в абстрактной схеме теории рассеяния Лакса-Филлипса /см. [34]/. Точнее, в обозначениях доказательства теоре-

мы I.3, $\tilde{P}^+ (\tilde{P}^-)$ - проекторы на уходящее /соответственно приходящее/ подпространства оператора

$$U = U(1) \oplus e^{-iX}$$

рассматриваемого в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_\varphi$.

Непосредственное применение теоремы I.3 в теории рассеяния связано с некоторыми техническими трудностями, вызванными неограниченностью /вообще говоря/ функции ρ_φ . Приводимая ниже теорема I.4 показывает, что существуют некоторые функции $a_\varphi^\pm \in L_\infty$ такие, что $a_\varphi^\pm \neq 0 \pmod{m_\varphi}$ и для всякого $T \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$ при некотором $p \in [1, 2]$ оператор

$$T a_\varphi^\pm(H) P^\pm \in S_p. \quad / \text{ I.22 } /$$

Отметим, что если выполнено соотношение / I.9 /, то можно взять $a_\varphi^\pm = \rho_\varphi$. Кроме того, в теореме I.4 показано, что для широкого класса так называемых допустимых функций α

$$S\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P^\mp U_{\alpha(H)}(t) = 0, \quad / \text{ I.23 } /$$

что усиливает / I.19 /. Приведем сначала следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I.2 Будем говорить, что вещественная конечная борелевская функция α на $\mathbb{R}$ допустима на интервале Δ , если α монотонна на Δ и ее производная $\alpha'(x) > 0$ для п.в. $x \in \Delta$.

Отметим, что класс допустимых функций введен М.Ш. Бирманом [6, 7], а также Т. Като [56] в связи с принципом инвариант-

ности волновых операторов. Наше определение близко к определению М.Волленберга [72] и выделяет более широкий по сравнению с [7, 56] класс функций.

Ряд важных для дальнейшего свойств допустимых функций приведен в нижеследующих леммах. Ниже $/\cdot/$ - мера Лебега на $\mathbb{R}$.

ЛЕММА I.3 [см. [72, стр. 30]]. Пусть $\mathcal{L}$ допустима на конечном интервале Δ . Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует функция $\mathcal{L}_\varepsilon \in C^1(\bar{\Delta})$ такая, что для всех $x \in \bar{\Delta}$ $\mathcal{L}'_\varepsilon(x) > 0$ и $|\Delta \cap \{x : \mathcal{L}_\varepsilon(x) \neq \mathcal{L}(x)\}| < \varepsilon$.

ЛЕММА I.4 [ср. с [72]]. Пусть $\mathcal{L}$ допустима на Δ . Тогда $E(\Delta) \mathcal{H}_{ac} \subset \mathcal{H}_{ac}(\mathcal{L}(H))$.

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что Δ - конечный интервал. Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ - функция, удовлетворяющая утверждению леммы I.3. Положим $\Delta_\varepsilon = \{x \in \Delta : \mathcal{L}_\varepsilon(x) = \mathcal{L}(x)\}$. Так как $|\Delta \setminus \Delta_\varepsilon| < \varepsilon$, то достаточно показать, что $\forall \varepsilon > 0 \quad E(\Delta_\varepsilon) \mathcal{H}_{ac} \subset \mathcal{H}_{ac}(\mathcal{L}(H))$. Так как

$$E(\Delta_\varepsilon) = E_{\mathcal{L}(H)}(\mathcal{L}(\Delta_\varepsilon)) E(\Delta)$$

/функция $\mathcal{L}$ строго возрастает и, следовательно, взаимнооднозначна на Δ /, то достаточно проверить, что для всякого измеримого множества лебеговой меры нуль $M \subset \mathcal{L}(\Delta_\varepsilon)$

$$E_{\mathcal{L}(H)}(M) E(\Delta_\varepsilon) P_{ac} = 0.$$

Имеем

$$E_{\mathcal{L}(H)}(M) E(\Delta_\varepsilon) P_{ac} = E(\mathcal{L}^{-1}(M) \cap \Delta_\varepsilon) P_{ac} =$$

$$= E(\alpha_\varepsilon^{-1}(M)) P_{ac} = 0,$$

так как $|\alpha_\varepsilon^{-1}(M)| = 0$ /см. [36, стр. 231] /. ■

Отметим, что можно построить пример допустимой на $\mathcal{R}$ и даже непрерывной функции α и оператора H в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, что включение $\mathcal{H}_{ac} \subset \mathcal{H}_{ac}(\alpha(H))$ строгое /см., например, [51, стр. 32] /. Это связано с тем, что функция, обратная к допустимой, вообще говоря, не является допустимой.

Следующая лемма играет важную роль в доказательстве принципа инвариантности волновых операторов.

ЛЕММА I.5 Пусть α допустима на /конечном/ интервале (a, b) , $\Psi(t, s, x) = \exp(-i(t\alpha(x) + sx))$.

Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (2\pi)^{-1} \int_0^\infty \left| \int_a^b \Psi(t, s, x) dx \right|^2 ds = 0 \quad / \text{I.24} /$$

и для всех $\omega > 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^\infty \left| \int_a^b \Psi(t, \omega k, x) dx \right|^2 = 0. \quad / \text{I.25} /$$

ЗАМЕЧАНИЕ I.3 Т.Като [20, 56] доказал / I.24 / при условии $\alpha \in C^1[a, b]$, α' имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ и $\alpha'(x) > 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Доказательство леммы I.5 будет приведено нами в § 2.2 вто-

рой главы, посвященном принципу инвариантности волновых операторов.

ТЕОРЕМА I.4 Пусть $\varphi \in E(\Delta)$ и Δ - конечный интервал/. Тогда существуют операторы $P^\pm \in B(\mathcal{H}_1)$ и функции $a_\varphi^\pm \in L_\infty$ такие, что $a_\varphi^\pm \neq 0 \pmod{m_\varphi}$ и для всякого оператора $T \in \mathcal{L}_p^+(H, \varphi)$ /при некотором $p \in [1, 2]$ / выполнено / I.22 /. Эти операторы $P^\pm$ можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения / I.I7 / - / I.I9 / и для всякой допустимой на Δ функции α было бы выполнено / I.23 /.

Доказательство. Будем пользоваться обозначениями, введенными в доказательстве теоремы I.3 /для упрощения записи формул снова предполагаем, что $\bar{\Delta} \subset (-\pi, \pi)$ /. Пусть $P^\pm$ - операторы, введенные в теореме I.3. Тогда соотношения / I.I7 / - / I.I9 / выполнены. Проверим, что для всякой допустимой на Δ функции α выполнено / I.23 /. Аналогично доказательству / I.I9 / достаточно показать, что

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{P} - \tilde{U}_{\alpha(H)}(t) = 0,$$

где $\tilde{U}_{\alpha(H)}(t) = U_{\alpha(H)}(t) \oplus \exp(-it\alpha)$. Последнее легко установить на тотальном в $\mathcal{H}_\varphi$ множестве

$$\mathcal{D} = \{u = (E(a, b) \oplus \chi_{(a, b)})e_0 : a, b \in \mathbb{R}, -\pi < a < b < \pi\}.$$

Имеем

$$\|\tilde{P} - \tilde{U}_{\alpha(H)}(t)u\|^2 = (4\pi^2)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_a^b \exp(-i(t\alpha(x) + kx)) dx \right|^2$$

и правая часть стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ в силу / I.25 /.

Перейдем к доказательству / 1.2I /. Пусть для определенности $T \in \mathcal{L}_p^+(H, \varphi)$ при некотором $p \in [1, 2]$. Если $f_\varphi \in L_\infty$, то можно положить $a_\varphi^+ = f_\varphi$ /см. теорему I.3/. В противном случае нам понадобится более сложная конструкция. Пусть

$$f_\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-ikx} = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

- разложение функции $f_\varphi \in L_2(-\pi, \pi)$ в ряд Фурье, $\alpha_k = \operatorname{Re} c_k$, $\beta_k = \operatorname{Im} c_k$ / $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Положим $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-ikx}$. Тогда

$$\operatorname{Re} f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) = / \text{I. 26} /$$

$$= (c_0 + f_\varphi(x)) / 2 \geq c_0 / 2 > 0$$

/мы воспользовались неотрицательностью f_φ /. В частности,

$$f_\varphi(x) \leq 2 \operatorname{Re} f(x).$$

Таким образом, функции $g(x) = 1/f(x)$ и $a_\varphi^+(x) = \frac{f_\varphi(x)}{f(x)}$ принадлежат $L_\infty(-\pi, \pi)$ и $a_\varphi^+ \neq 0 \pmod{m_\varphi}$.

Рассмотрим аналитическую внутри единичного круга функцию $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. $\operatorname{Re} F(z)$ представляется интегралом Пуассона /см. [33] /:

$$\operatorname{Re} F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta-x)+r^2} \operatorname{Re} f(x) dx.$$

Здесь $z = re^{-i\theta}$, $r \in [0, 1)$. Из / I.26 / и неотрицательности ядра Пуассона следует, что $\operatorname{Re} F(z) \gg c_0/2 > 0$ / $|z| < 1$. Таким образом, $G(z) := 1/F(z)$ - ограниченная, аналитическая внутри единичного круга функция. Следовательно, /см. [33] /

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \text{ где } \sum_{k=0}^{\infty} |d_k|^2 < \infty.$$

Т.к. для п.в. $\theta \in (-\pi, \pi)$ $\lim_{r \rightarrow 1} F(z) = f(\theta)$ /см. [33] /, то для п.в. θ

$$g(\theta) = \lim_{r \rightarrow 1} G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-ik\theta}.$$

Пусть $\tilde{T}$, $\tilde{T}_+$ - операторы, введенные в доказательстве теоремы I.3. Так как для всех $n \geq 0$

$$\begin{aligned} (Ta_{\varphi}^+(n) \oplus 0)e_n &= (T\rho_{\varphi}(n) \oplus 0)(g(n) \oplus g(x))e_n = \\ &= \tilde{T}(\sum_{k=0}^{\infty} d_k e_{n+k}) = \tilde{T}\tilde{P}^+(\sum_{k=0}^{\infty} d_k e_{n+k}) = \\ &= \tilde{T}_+(g(n) \oplus g(x))e_n, \end{aligned}$$

то

$$(Ta_{\varphi}^+(n) \oplus 0)\tilde{P}^+ = \tilde{\overline{T}}_+(g(n) \oplus g(x))\tilde{P}^+.$$

Так как $\tilde{\overline{T}}_+ \in Sp(\tilde{\mathcal{H}}_{\varphi}, \mathcal{H}_2)$ /см. доказательство теоремы I.3/ и $g \in L_{\infty}$, то и

$$(Ta_{\varphi}^+(n) \oplus 0)\tilde{P}^+ \in Sp(\tilde{\mathcal{H}}_{\varphi}, \mathcal{H}_2).$$

/ I.22 / вытекает теперь из соотношения /ср. с / I.2I //

$$Ta_{\varphi}^{+}(H)P^{+} = Ta_{\varphi}^{+}(H)I^{*}\tilde{P}^{+}I = (Ta_{\varphi}^{+}(H)\oplus 0)\tilde{P}^{+}I. \blacksquare$$

Приведем одно следствие из теоремы I.4.

СЛЕДСТВИЕ I.6 /ср. с [35, 45, 66, 72]. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$, $T \in \mathcal{L}_2^{\pm}(H, \varphi)$. Тогда для всякой допустимой на некотором интервале Δ функции $\mathcal{L}$

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} T U_{\mathcal{L}(H)}(t) E(\Delta) P_{\varphi} = 0.$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{L}_2^{\pm}(H, \varphi)$. Согласно следствию I.1 $T \in \mathcal{L}_2^{\pm}(H, g(H)\varphi)$ для всякой $g \in C_0^{\infty}(R)$.

Следовательно, достаточно рассмотреть случай, когда Δ - конечный интервал и $\varphi \in E(\Delta)\mathcal{H}_{ac}$. Пусть a_{φ}^{+} - функция, $P^{\pm}$ - операторы из теоремы I.4. Положим $\Delta_n = \{x : |a_{\varphi}^{+}(x)| > \frac{1}{n}\}$. Т.к. $a_{\varphi}^{+} \neq 0 \pmod{m_{\varphi}}$, то достаточно показать, что для всех $n \gg 1$

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} T U_{\mathcal{L}(H)}(t) E(\Delta_n) P_{\varphi} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} T U_{\mathcal{L}(H)}(t) E(\Delta_n) P_{\varphi} &= T a_{\varphi}^{+}(H) P^{+} U_{\mathcal{L}(H)}(t) (a_{\varphi}^{+}(H))^{-1} \times \\ &\times E(\Delta_n) P_{\varphi} + T a_{\varphi}^{+}(H) P^{-} U_{\mathcal{L}(H)}(t) (a_{\varphi}^{+}(H))^{-1} E(\Delta_n) P_{\varphi}. \end{aligned}$$

Согласно теореме I.4 $Ta_{\varphi}^+(H)P^+ \in S_2$ и т.к. $\mathcal{H}_{\varphi} \subset \mathcal{H}_{ac}(f(H))$ /см. лемму I.4/, то по лемме I.I первое слагаемое сильно стремится к нулю. Второе слагаемое сильно стремится к нулю в силу / I.23 /.

ЗАМЕЧАНИЕ I.4 Отметим, что при выполнении дополнительно-го, условия / I.I0 / утверждение следствия хорошо известно /см., например, [66, 72]/. Ранее близкие результаты были получены Л.А.Сахновичем [45] и В.Б.Матвеевым. [35]

1.3 ТРАНСФОРМАТОРЫ КЛАССОВ $(\mathcal{L}_p(H, \varphi), \mathcal{L}_p(H, \varphi))$.

Напомним [см. [9, 10)], что трансформатором класса (B, B) / (S_p, S_p) / называется линейное ограниченное преобразование $\Phi: B \rightarrow B$ / $\Phi: S_p \rightarrow S_p$ /.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 Пусть $p \in [1, \infty)$. Трансформатор Φ класса (B, B) будем называть трансформатором класса $(\mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi), \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi))$, если $\exists c \geq 0: \forall T \in \mathcal{L}_p^\pm(H, \varphi)$

$$\|\Phi T\|_{\pm, p, \varphi} \leq c \|T\|_{\pm, p, \varphi}.$$

Если же Φ трансформатор класса (B, B) и

$$\Phi(\mathcal{L}_\infty^\pm(H, \varphi)) \subset \mathcal{L}_\infty^\pm(H, \varphi),$$

то будем говорить, что Φ трансформатор класса $(\mathcal{L}_\infty^\pm(H, \varphi), \mathcal{L}_\infty^\pm(H, \varphi))$. Для всех $q \in [1, \infty]$ положим

$$(\mathcal{L}_q(H, \varphi), \mathcal{L}_q(H, \varphi)) = \bigcap_{k=+, -} (\mathcal{L}_q^k(H, \varphi), \mathcal{L}_q^k(H, \varphi)).$$

Здесь будут рассмотрены трансформаторы специального вида, задаваемые двойными операторными интегралами /д.о.и./. Отметим, что теория д.о.и. как трансформаторов классов (B, B) и (S_p, S_p) /а также некоторых более общих классов/ развита М.Ш.Бирманом и М.З.Соломьяком [9 - 11]. В этом параграфе будут получены некоторые условия, при которых д.о.и. являются трансформаторами классов $(\mathcal{L}_p(H, \varphi), \mathcal{L}_p(H, \varphi))$.

Пусть H_2, H_1 - самосопряженные операторы в пространствах $\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1$ соответственно. $E_j(\cdot) = E_{H_j}(\cdot)$,

$U_j(t) = U_{H_j}(t)$ Λ, M - борелевские подмножества $\mathbb{R}$. Рассмотрим д.о.и.

$$Q = \Phi T = \int_{\Lambda} \int_M \mathcal{L}(\lambda, \mu) E_2(d\mu) T E_1(d\lambda). \quad / \text{I.27} /$$

Напомним некоторые свойства д.о.и.

ЛЕММА I.6 [9] Пусть Φ вида / I.27/ принадлежит классу (B, B) . Тогда

а/ $\Phi \in (S_p, S_p) \quad \forall p \in [1, \infty]$;

б/ если $A_j \in B(\mathcal{H}_j)$ и A_j коммутирует с H_j , то

$$\Phi(A_2 T A_1) = A_2 \Phi(T) A_1;$$

в/ если g_j - ограниченные борелевские функции, то

$$\Phi(g_2(H_2) T g_1(H_1)) = \int_{\Lambda} \int_M g_2(\mu) \mathcal{L}(\lambda, \mu) g_1(\lambda) E_2(d\mu) T E_1(d\lambda);$$

г/ если $Q_j \quad j=1,2$ д.о.и. / I.26 /, соответствующий функции $\mathcal{L}_j$, то

$$Q_1 Q_2 T = Q_2 Q_1 T = \int \int \mathcal{L}_1(\lambda, \mu) \mathcal{L}_2(\lambda, \mu) E_2(d\mu) T E_1(d\lambda).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.7 Пусть функция $\mathcal{L}$ допускает представление

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu) = \int e^{i\lambda \xi} \beta(\xi, \mu) \nu(d\xi), \quad / \text{I.28} /$$

где ν - σ -конечная борелевская мера на $\mathbb{R}$, β - борелевская функция такая, что

$$C = \int \sup_{\mu \in M} |\beta(\xi, \mu)| \nu(d\xi) < \infty \quad / \text{I.29} /$$

Тогда для всякого $\varphi \in E_1(\Lambda) \mathcal{H}_1$ и $p \in [1, \infty)$
 $\Phi \in (\mathcal{L}_p(N_1, \varphi), \mathcal{L}_p(N_1, \varphi))$.

Доказательство. Рассматриваемый трансформатор принадлежит классу (B, B) /см. [11, предложение 2.1] /. Более того, из леммы 2.2 работы [11] вытекает, что

$$Q = \Phi T = \int \beta(\xi, N_2) E_2(M) T U_1(-\xi) E_1(\Lambda) \nu(d\xi).$$

Положим $b(\xi) = \sup_{\mu \in M} |\beta(\xi, \mu)|$. Имеем

$$\begin{aligned} \|Q\|_{p, \varphi}^p &\leq \int \left(\int b(\xi) \|T U_1(t - \xi) \varphi\| \nu(d\xi) \right)^p dt \leq \\ &\leq \left(\int b(\xi) \nu(d\xi) \right)^{p-1} \iint b(\xi) \|T U_1(t - \xi) \varphi\| \nu(d\xi) dt = \\ &= C^p \|T\|_{p, \varphi}^p. \quad \square \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ I.7 Пусть функция $\mathcal{L}$ является обратным преобразованием Фурье по переменной λ функции $\hat{\mathcal{L}}$

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu) = (2\pi)^{-1/2} \int \hat{\mathcal{L}}(\xi, \mu) e^{i\lambda\xi} d\xi, \quad / \text{I.28a} /$$

причем,

$$\int \sup_{\mu \in M} |\hat{\mathcal{L}}(\xi, \mu)| d\xi < \infty. \quad / \text{I.29a} /$$

Тогда справедливо утверждение предложения I.7.

СЛЕДСТВИЕ I.8 Пусть функция α периодична по λ и разлагается в ряд

$$\alpha(\lambda, \mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}_n(\mu) e^{in\omega\lambda} \quad (\omega > 0), \quad / \text{I.286} /$$

причем,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{\mu \in M} |\hat{\alpha}_n(\mu)| < \infty. \quad / \text{I.296} /$$

Тогда справедливо утверждение предложения I.7.

ЗАМЕЧАНИЕ I.5 Если выполнены условия / I.28 / / I.29 / и, кроме того,

$$\left| \int_0^{+\infty} |\xi| \sup_{\mu \in M} |\beta(\xi, \mu)| \nu(d\xi) \right| < \infty,$$

то для всякого $\varphi \in E_1(\Lambda) \mathcal{H}_1$ и $p \in [1, \infty)$

$$\Phi \in (\mathcal{L}_p^{\pm}(H_1, \varphi), \mathcal{L}_p^{\pm}(H_1, \varphi)).$$

Доказательство аналогично доказательству предложения I.7 /см. также доказательство предложения I.2/.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.8 Пусть трансформатор / I.27 / принадлежит классу (B, B) и непрерывен относительно сильной операторной сходимости /т.е. $S\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi T_n = \Phi T$, как только $S\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ /. Тогда $\Phi \in (\mathcal{L}_{\infty}^{\pm}(H_1, \varphi), \mathcal{L}_{\infty}^{\pm}(H_1, \varphi))$.

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{L}_{\infty}^{\pm}(H_1, \varphi)$. Тогда по предложению I.1 $S\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} T U_1(t) P_{\varphi}^{H_1} = 0$ и с учетом леммы I.6 б/

$$S\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} (\Phi T) U_1(t) P_\varphi^{H_1} = S\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(T U_1(t) P_\varphi^{H_1}) = 0. \blacksquare$$

ЗАМЕЧАНИЕ I.6 Аналитические условия на функцию α в / I. 27 /, при которых выполнены условия предложения I.8, приведены в [11]. В частности, достаточно требовать, чтобы α удовлетворяла / I.28 /, / I.29 /.

Перейдем теперь к рассмотрению д.о.и. специального вида. Ниже δ - некоторый /конечный/ сегмент. Через $F(\delta)$ обозначим множество конечных комплекснозначных борелевских, заданных на $\mathbb{R}$ функций f таких, что $f \in C^1(\delta)$ и f' удовлетворяет на δ условию Гёльдера с некоторым положительным показателем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.9 Пусть $f, g \in F(\delta)$, причем, g - взаимнооднозначна на δ и $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \delta$. Тогда трансформатор

$$\tilde{\Phi} T = \iint_{\delta \delta} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{g(\lambda) - g(\mu)} E_2(d\mu) T E_1(d\lambda) \quad / I.30 /$$

принадлежит классу (B, B) . Если $\varphi \in E_1(\delta) \mathcal{H}_1$, то $\tilde{\Phi} \in (\mathcal{L}_\infty^\pm(H_1, \varphi), \mathcal{L}_\infty^\pm(H_1, \varphi))$ и $\forall p \in [1, \infty) \tilde{\Phi} \in (\mathcal{L}_p(H_1, \varphi), \mathcal{L}_p(H_1, \varphi))$.

Доказательство. Для удобства записи предположим, что $\delta \subset (0, 2\pi)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $f, g \in F([0, 2\pi])$, причем, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [0, 2\pi]$, g - взаимнооднозначна на $(0, 2\pi)$ и функции f, g 2π -периодические /изменение функций f, g вне δ не меняет трансформатор / I.30 //. Пусть сначала $g(\lambda) = e^{i\lambda}$.

Тогда / I.30 / имеет вид

$$\tilde{\Phi} T = \int \int_{\delta \delta} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{e^{i\lambda} - e^{i\mu}} E_2(d\mu) T E_1(d\lambda). \quad / \text{I.30a} /$$

Д.о.и. / I.30a / принадлежит классу (B, B) /см. [9, 11]/. Более того, в [9, 11] показано, что функция $\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{e^{i\lambda} - e^{i\mu}}$ удовлетворяет условиям / I.286 /, / I.296 / /с $\omega = 1$ / и, следовательно, для трансформатора / I.30a / выполнено доказываемое утверждение /см. следствие I.8 и замечание I.6/. Согласно лемме I.6 г/, теперь достаточно рассмотреть д.о.и.

$$\tilde{\Phi} T = \int \int_{\delta \delta} \frac{e^{i\lambda} - e^{i\mu}}{g(\lambda) - g(\mu)} E_2(d\mu) T E_1(d\lambda). \quad / \text{I.30б} /$$

Для завершения доказательства остается заметить, что подынтегральная функция в / I.30б / также удовлетворяет условиям / I.286 /, / I.296 / /ср. с [14]/, что вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА I.7 Пусть $\mathcal{L} \in C([0, 2\pi]^2)$ и удовлетворяет условиям / I.286 /, / I.296 / /с $\omega = 1$ /. Если $\mathcal{L}$ не обращается в нуль на $[0, 2\pi]^2$, то функция $1/\mathcal{L}$ также удовлетворяет условиям / I.286 /, / I.296 / /с $\omega = 1$ /.

Лемма I.7 является вариантом известной теоремы Винера-Леви /см. [17, 44]/ и может быть доказана по схеме доказательства этой теоремы в книге [17]. Для полноты изложения мы докажем лемму I.7 в конце этого параграфа.

Из предложения I.9 вытекает следующее важное следствие.

СЛЕДСТВИЕ I.9 Пусть f, g такие, как в предложении

I.9. Оператор $J \in B$. Положим

$$J_\delta = E_2(\delta) J E_1(\delta), \quad / \text{ I.31 } /$$

$$T_{g,\delta} = \overline{g(H_2) J_\delta - J_\delta g(H_1)}. \quad / \text{ I.32 } /$$

Пусть $p \in [1, \infty)$. Тогда, если $T_{g,\delta} \in S_p$ то и $T_{f,\delta} \in S_p$.
Если же $\varphi \in E_1(\delta) \mathcal{H}_1$ и $T_{g,\delta} \in \mathcal{L}_p(H_1, \varphi)$, то $T_{f,\delta} \in \mathcal{L}_p(H_1, \varphi)$.
То же верно и для классов $\mathcal{L}_\infty^\pm(H_1, \varphi)$.

Утверждение следствия вытекает из соотношения $\tilde{F} T_{g,\delta} = T_{f,\delta}$ /см. [9, 11], а также лемму I.6 в/1/.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.10 Пусть функция g такая, как в предложении I.9, $J \in B$, $\varphi \in E_1(\delta) \mathcal{H}_1$. Предположим, что $T_{g,\delta} \in \mathcal{L}_\infty^\pm(H_1, \varphi)$ /или S_∞ /. Тогда

- a/ $\forall h \in C(\delta) \quad T_{h,\delta} \in \mathcal{L}_\infty^\pm(H_1, \varphi)$ /или S_∞ /;
б/ $\forall f \in F(\delta)$ оператор $X = \int \int_{\delta \times \delta} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} E_2(d\mu) J E_1(d\lambda) - E_2(\delta) J f'(H_1) E_1(\delta) \in \mathcal{L}_\infty^\pm(H_1, \varphi)$ /или S_∞ /.

Отметим, что если g вещественная функция, то часть а/ предложения I.12 легко вытекает из теоремы Стоуна-Вейерштрасса и замкнутости классов $\mathcal{L}_\infty^\pm(H_1, \varphi)$ и S_∞ относительно равномерной операторной сходимости. В частности, в этом случае можно ослабить требование гладкости на g /достаточно требовать, чтобы $g \in C(\delta)$ /. Ср. с [51, 74].

Доказательство. Для $h \in F(\delta)$ а/ следует из следствия I.10. К произвольной $h \in C(\delta)$ можно перейти на

основании теоремы Стоуна-Вейерштрасса. Докажем б/для класса $\mathcal{L}_{\infty}^{+}(H, \varphi)$ /для других классов доказательство аналогично/. X можно записать как д.о.и.

$$X = \iint_{\delta \delta} \left(\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} - f'(\mu) \right) E_2(d\mu) J E_1(d\lambda).$$

Для удобства будем считать, что $\delta = (0, 2\pi)$. Преобразуем подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} - f'(\mu) &= \frac{e^{i\lambda} - e^{i\mu}}{\lambda - \mu} \left[\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{e^{i\lambda} - e^{i\mu}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{f'(\lambda)}{ie^{i\lambda}} \right] - \left(\frac{\lambda - \mu}{e^{i\lambda} - e^{i\mu}} - \frac{1}{ie^{i\lambda}} \right) f'(\lambda). \end{aligned}$$

Так как д.о.и. $\iint_{\delta \delta} \frac{e^{i\lambda} - e^{i\mu}}{\lambda - \mu} E_2(d\mu) J E_1(d\lambda)$ удовлетворяет условию предложения I.9, то в силу леммы I.6 г/ достаточно показать, что

$$\iint_{\delta \delta} \left[\frac{f(\lambda) - f(\mu)}{e^{i\lambda} - e^{i\mu}} - \frac{f'(\lambda)}{ie^{i\lambda}} \right] E_2(d\mu) J E_1(d\lambda) \in \mathcal{L}_{\infty}^{+}(H, \varphi) \quad \text{I.33 /}$$

и

$$\iint_{\delta \delta} \left[\frac{\lambda - \mu}{e^{i\lambda} - e^{i\mu}} - \frac{1}{ie^{i\lambda}} \right] E_2(d\mu) J E_1(d\lambda) \in \mathcal{L}_{\infty}^{+}(H, \varphi).$$

Так как $f_r(x) \equiv x \in F(\delta)$, то нужно доказать только / I.33 /. Поведение f вне δ не оказывает влияния на рассматриваемый д.о.и. Следовательно, можно считать, что $f \in F([0, 2\pi])$ и f 2π -периодическая функция. Пусть $f(\lambda) = \sum c_n e^{in\lambda}$ - разложение f в ряд Фурье. Подынтегральная функция в / I.33 / разлагается в ряд

$$\mathcal{L}(\lambda, \mu) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(C_n \frac{e^{in\lambda} - e^{in\mu}}{e^{i\lambda} - e^{i\mu}} - n C_n e^{i(n-1)\lambda} \right).$$

Рассмотрим

$$\mathcal{L}_e^{\pm}(\lambda, \mu) = \sum_{\pm n=l}^{\infty} \left(C_n \frac{e^{in\lambda} - e^{in\mu}}{e^{i\lambda} - e^{i\mu}} - n C_n e^{i(n-1)\lambda} \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e^+(\lambda, \mu) &= \sum_{n=l}^{\infty} C_n \left(\sum_{k=1}^n e^{i(k-1)\lambda} e^{i(n-k)\mu} - n e^{i(n-1)\lambda} \right) = \\ &= - \sum_{n=l}^{\infty} n C_n e^{i(n-1)\lambda} + \sum_{k=1}^l \left(\sum_{n=l}^{\infty} C_n e^{in\mu} \right) e^{-ik\mu} e^{i(k-1)\lambda} + \\ &+ \sum_{k=l+1}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} C_n e^{in\mu} \right) e^{-ik\mu} e^{i(k-1)\lambda}. \end{aligned}$$

Так как $f' \in \text{Lip } \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$, то по теореме Привалова /см., например, [17]/ f'_+ также принадлежит $\text{Lip } \varepsilon$ /здесь $f_+(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{in\lambda}$ /. В силу известных результатов /см. [17]/ о порядке приближения функций частными суммами их рядов Фурье имеем

$$\sup_{\mu} \left| \sum_{n=l}^{\infty} C_n e^{in\mu} \right| = O\left(\frac{\ln l}{l^{\varepsilon+1}}\right),$$

$$\sup_{\lambda} \left| \sum_{n=l}^{\infty} n C_n e^{i(n-1)\lambda} \right| = O\left(\frac{\ln l}{l^{\varepsilon}}\right).$$

Из леммы 2 работы [9] теперь следует, что

$$\| \int_{\delta} \int_{\delta} \mathcal{L}_e^+(\lambda, \mu) E_2(d\mu) J E_1(d\lambda) \| = O\left(\frac{\ln e}{e^{\varepsilon}}\right) +$$

$$+ O\left(\sum_{k=\ell+1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{1+\varepsilon}}\right) + O\left(\frac{\ln \ell}{e^{\varepsilon}}\right) \rightarrow 0, \ell \rightarrow +\infty.$$

Аналогичное соотношение верно и для $\mathcal{L}_e^-(\lambda, \mu)$. В силу замкнутости класса $\mathcal{L}_{\infty}^+(H, \varphi)$ относительно равномерной операторной сходимости теперь достаточно рассмотреть случай, когда f - тригонометрический полином. Пусть $f(\lambda) = e^{in\lambda}$ /случай общего полинома рассматривается аналогично/, тогда

$$\iint_{\delta\delta} \left(\frac{e^{in\lambda} - e^{in\mu}}{e^{i\lambda} - e^{i\mu}} - n e^{i(n-1)\lambda} \right) E_2(d\mu) J E_1(d\lambda) =$$

$$= \iint_{\delta\delta} \sum_{k=1}^n (e^{i(n-k)\mu} - e^{i(n-k)\lambda}) e^{i(k-1)\lambda} E_2(d\mu) J E_1(d\lambda) =$$

$$= \sum_{k=1}^n E_2(\delta) (U_2(k-n)J - JU_1(k-n)) E_1(\delta) U_1(1-k).$$

Последний оператор принадлежит $\mathcal{L}_{\infty}^+(H, \varphi)$ в силу пункта а/. ■

Доказательство леммы I.7 /ср. [14, стр. 391-392] /. Отметим сначала, что класс функций, выделяемый условиями / I.286 /, / I.296 /, является коммутативной банаховой алгеброй относительно поточечного умножения и нормы

$$||| \mathcal{L} ||| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sup_{\mu} |\hat{\mathcal{L}}_n(\mu)|.$$

Пусть теперь $\mathcal{L} \in C[0, 2\pi]^2$ и $\mathcal{L}$ не обращается в нуль на $[0, 2\pi]$. Положим

$$a = \frac{1}{2} \inf \{ \mathcal{L}(\lambda, \mu) \mid (\lambda, \mu) \in [0, 2\pi]^2 \} > 0.$$

Пусть K такое, что функция

$$S(\lambda, \mu) = \sum_{n=-K}^K \hat{\mathcal{L}}_n(\mu) e^{in\lambda}$$

удовлетворяет соотношению

$$\|S - \mathcal{L}\| \leq a/2.$$

Рассмотрим функцию

$$b(\lambda, \mu, \theta) = \frac{1}{S(\lambda, \mu) + a e^{i\theta}}, \quad (\lambda, \mu, \theta) \in [0, 2\pi]^3.$$

Очевидно, b - дважды непрерывно дифференцируемая по переменной λ функция. При этом соответствующие частные производные ограничены по μ и θ . Отсюда следует, что

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|b(\cdot, \cdot, \theta)\| = A < \infty.$$

Так как

$$(S + a e^{i\theta} - \mathcal{L})^{-1} = a^{-1} e^{-i\theta} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (S - \mathcal{L})^n a^{-n} e^{-in\theta} \right],$$

то

$$\|(S + a e^{i\theta} - \mathcal{L})^{-1}\| \leq a^{-1} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a/2)^n a^{-n} \right\} = 2/a.$$

По формуле Коши

$$\frac{1}{\lambda(\lambda, \mu)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{b(\lambda, \mu, \theta)}{s(\lambda, \mu) + ae^{i\theta} - \lambda(\lambda, \mu)} ae^{i\theta} d\theta.$$

Следовательно, $\|\lambda^{-1}\| \leq 2A/a < \infty$

Г Л А В А 2

СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ИНВАРИАНТНОСТЬ

2.1. МЕТОД КУКА.

Пусть H_j / $j = 1, 2$ / - самосопряженные операторы в $\mathcal{H}_j$,
 $U_j(t) = \exp(-itH_j)$, $R_j(z) = (H_j - z)^{-1}$, $\sigma_j = \sigma(H_j)$,
 $E_j(\cdot) = E_{H_j}(\cdot)$, $\mathcal{H}_{j,ac} = \mathcal{H}_{ac}(H_j)$. Для $\varphi \in \mathcal{H}_j$ по-
 ложим $\mathcal{H}_{j,\varphi} = \overline{\text{span}} \{U_j(t)\varphi, t \in \mathbb{R}\}$. $P_{j,ac}$, $P_{j,\varphi}$ -
 ортопроекторы на $\mathcal{H}_{j,ac}$, $\mathcal{H}_{j,\varphi}$ соответственно. Пусть $J \in \mathcal{B}$
 так называемый оператор отождествления. Положим

$$\mathcal{D}(W^\pm) = \{ \varphi \in \mathcal{H}_1 : \exists \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_2(-t) J U_1(t) \varphi = \varphi_\pm \}.$$

Действие волнового оператора $W^\pm = W^\pm(J) = W^\pm(H_2, H_1, J)$
 задается соотношением

$$W^\pm \varphi = \varphi^\pm, \quad \varphi \in \mathcal{D}(W^\pm).$$

Отметим, что $\mathcal{D}(W^\pm)$ замкнутые подпространства в $\mathcal{H}_1$, инва-
 риантные относительно действия $U_1(t)$. В частности, если
 $\varphi \in \mathcal{D}(W^\pm)$, то и $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^\pm)$.

Известный критерий Кука /см. [42, 51]/ утверждает, что
 если $U_1(t)\varphi \in \mathcal{D}(H_1) \cap \mathcal{D}(H_2 J)$ при $t \gg t_\varphi$ /для неко-
 торого t_φ / и

$$\int_{t_\varphi}^{\infty} \| (H_2 J - J H_1) U_1(\pm t) \varphi \| dt < \infty, \quad / 2.1 /$$

то $\varphi \in \mathcal{D}(W^\pm)$. Т.Като [59] показал, что оператор
 $H_2 J - J H_1$ в / 2.1 / может быть заменен разностью резоль-

вент $R_2(z)J - JR_1(z)$. Здесь будет показано, что для достаточно широкого класса функций $f \in H_2J - JH_1$ можно заменить на оператор

$$T_f := f(H_2)J - Jf(H_1), \quad / 2.2 /$$

определенный на $\mathcal{D}(T_f) = \mathcal{D}(f(H_1)) \cap \mathcal{D}(f(H_2)J)$.

Отметим, что подобные признаки близки по форме к ядерным условиям существования волновых операторов вида $T_f \in S_1$, установленным М.Ш.Бирманом [6, 7] /см. также Т.Като[20, 56]/. Мы используем также ряд технических приемов из [6, 7], в частности, систематически применяем технику двойных операторных интегралов. Более глубокая связь между методом Кука и теорией ядерных возмущений обсуждается в следующем параграфе.

Приведем некоторые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 Будем говорить, что линейный оператор T , действующий из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, принадлежит классу $\Lambda_p^{\pm}(H_1, \varphi)$ при некотором $p \in [1, \infty)$, если существует $t_\varphi > 0$, такое, что

$$U_1(\pm t)\varphi \in \mathcal{D}(T) \quad \text{для п.в. } t \gg t_\varphi \text{ и}$$

$$\int_{t_\varphi}^{\infty} \|TU_1(\pm t)\varphi\|^p dt < \infty. \quad / 2.3 /$$

Если же $S\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} TU_1(t)\varphi = 0$, то будем говорить, что

$$T \in \Lambda_{\infty}^{\pm}(H_1, \varphi).$$

Очевидно, что $\Lambda_p^{\pm}(H_1, \varphi) \cap \mathcal{B} = \mathcal{L}_p^{\pm}(H_1, \varphi)$.

Отметим, что подынтегральная функция в / 2.3 /, вообще говоря, неизмерима и интеграл следует понимать в смысле верхнего интеграла. Т.е.

$$\int_{t_0}^{\infty} \|TV_1(\pm t)\varphi\|^p dt = \inf \left\{ \int_{t_0}^{\infty} g(t) dt : \right.$$

g измерима и $g(t) \geq \|TV_1(\pm t)\varphi\|^p \pmod{(1.1)} \}$.

Пусть Γ - открытое множество в $\mathbb{R}$. Через $F_{loc}(\Gamma)$ обозначим класс функций, принадлежащих $F(\delta)$ /см. § 1.4/ для всякого сегмента $\delta \subset \Gamma$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 Пусть борелевская функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Будем говорить, что f принадлежит классу $\mathcal{H}(H_1, H_2)$, если $\overline{f(\mathbb{R})} \neq \mathbb{C}$ и для некоторого открытого $\Gamma \subset \mathbb{R}$ такого, что $|\sigma_1 \cap \Gamma| = 0$, функция $f \in F_{loc}(\Gamma)$, $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in \Gamma$ и для всякого сегмента $\delta \subset \Gamma$

$$|\delta \cap f^{-1}(\overline{f(\sigma_2 \cap \delta)})| = 0. \quad / 2.4 /$$

Отметим, что условие / 2.4 / означает "почти" взаимнооднозначность функции f .

ТЕОРЕМА 2.1 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$. Предположим, что

$$T_f \in \Lambda_1^{\pm}(H_1, \varphi) \quad / 2.5 /$$

для некоторой функции $f \in \mathcal{H}(H_1, H_2)$. Тогда $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^{\pm})$.

Приведем некоторые следствия. Ниже $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 Предположим, что при некоторых целом $m \neq 0$, комплексном z с $\operatorname{Im} z \neq 0$

$$R_2^m(z)J - JR_1^m(z) \in \Lambda_1^{\pm}(H_1, \varphi).$$

Тогда $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^\pm)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2 Пусть $H_j \geq 0$ и $\text{Ker } H_j = 0 \quad j=1, 2$.

Если

$$H_2^a J - J H_1^a \in \Lambda_1^\pm(H_1, \varphi)$$

при некотором действительном $a \neq 0$, то $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^\pm)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3 Если

$$\exp(H_2) J - J \exp(H_1) \in \Lambda_1^\pm(H_1, \varphi),$$

то $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^\pm)$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4 Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено одно из следующих двух условий:

$$H_2^{2n-1} J - J H_1^{2n-1} \in \Lambda_1^\pm(H_1, \varphi),$$

$$H_2^{\frac{1}{2n-1}} J - J H_1^{\frac{1}{2n-1}} \in \Lambda_1^\pm(H_1, \varphi).$$

Тогда $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^\pm)$.

Число подобных следствий нетрудно увеличить. Отметим лишь, что при $m=1$ следствие 2.1 превращается в теорему Т.Като [59], а при $m=-1$ - в обычный критерий Кука.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2.1 Отметим сначала, что из / 2.5 / и определения оператора T_f /см. / 2.2 // вытекает, что $\varphi \in \mathcal{D}(f(H_1))$. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{R})}$. Рассмотрим ограниченную борелевскую функцию $g(x) = (f(x) - z)^{-1}$. Очевидно, $g \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ и из соотношения

$$g(H_2)J - Jg(H_1) = -g(H_2)(f(H_2)J - Jf(H_1))g(H_1)$$

следует, что оператор $Tg \in \mathcal{L}_1^+(H_1, \Psi)$, где $\Psi = (f(H_1) - z)\varphi$. Так как $f'(x) \neq 0$ на Γ , то $\forall x \in \Gamma$ существует сегмент $\delta = \delta_x \subset \Gamma$ такой, что f взаимнооднозначна на δ . Так как $|\delta \setminus \Gamma| = 0$, то достаточно показать, что $E_1(\delta)\mathcal{H}_{\Psi} \subset \mathcal{D}(W^{\pm})$. Согласно следствию I.1 оператор $Tg \in \mathcal{L}_1^+(H_1, h(H_1)\Psi)$ для всех $h \in C_0^{\infty}(\delta)$. Так как

$$Tg h(H_1)\Psi = g(H_2) T_{f,\delta} E_1(\delta) h(H_1)\varphi,$$

то для всех таких функций h оператор

$$\begin{aligned} T_{f,\delta} &= f(H_2)E_2(\delta)JE_1(\delta) - E_2(\delta)Jf(H_1)E_1(\delta) = \\ &= \overline{f(H_2)J_{\delta} - J_{\delta}f(H_1)} \in \mathcal{L}_1^+(H_1, h(H_1)\varphi). \end{aligned}$$

Здесь $J_{\delta} = E_2(\delta)JE_1(\delta)$. С другой стороны,

$$\overline{T_{f,\delta}} = H_2 \tilde{J}_{\delta} - \tilde{J}_{\delta} H_1,$$

где

$$\tilde{J}_{\delta} = \int_{\delta} \int_{\delta} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} E_2(d\mu) J E_1(d\lambda)$$

[см. [9, 11)]. Следовательно, для всех $h \in C_0^{\infty}(\delta)$

$$H_2 \tilde{J}_{\delta} - \tilde{J}_{\delta} H_1 \in \mathcal{L}_1^+(H_1, h(H_1)\varphi)$$

и по критерию Кука $E_1(\delta)\mathcal{H}_{\Psi} \subset \mathcal{D}(W^{\pm}(\tilde{J}_{\delta}))$

воспользовались плотностью множества $\{h(H_1)\varphi, h \in C_0^{\infty}(\delta)\}$ в $E_1(\delta)\mathcal{H}_{\Psi}$. Согласно предложению I.10 б/

$$\widetilde{J}_\delta - E_2(\delta) J f'(H_1) E_1(\delta) \in \mathcal{L}_\infty^\pm(H_1, \varphi)$$

и, следовательно, существует

$$S\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_2(-t) E_2(\delta) J f'(H_1) E_1(\delta) U_1(t) P_{1,\varphi}.$$

Так как $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in \delta$, то отсюда следует, что $E_1(\delta) \mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^\pm(J_\delta))$. Для завершения доказательства теоремы теперь осталось показать, что

$$S\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U_2(-t) E_2(\mathbb{R} \setminus \delta) J E_1(\delta) U_1(t) P_{1,\varphi} = 0. \quad / 2.6 /$$

В силу / 2.4 / для всякого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество A_ε такое, что $\delta \cap f^{-1}(\overline{f(\mathbb{C}_2 \setminus \delta)}) \subset A_\varepsilon$ и $|A_\varepsilon| < \varepsilon$.

Тогда $f(\delta \setminus A_\varepsilon) \cap \overline{f(\mathbb{C}_2 \setminus \delta)} = \emptyset$ и, так как $f(\delta \setminus A_\varepsilon)$ - непустой компакт в $\mathbb{C}$ для малых $\varepsilon > 0$, то

$$\inf \{ |g(\lambda) - g(\mu)| : \lambda \in \delta \setminus A_\varepsilon, \mu \in \mathbb{C}_2 \setminus \delta \} > 0.$$

Функция $g \in C^1(\delta)$. Отсюда следует /см. предложение 7.3 работы М.Ш.Бирмана и М.З.Соломяка [11]/, что д.о.и.

$$\Phi T = \int_{\delta \setminus A_\varepsilon} \int_{\mathbb{C}_2 \setminus \delta} (g(\lambda) - g(\mu))^{-1} E_2(d\mu) T E_1(d\lambda)$$

принадлежит классу (B, B) и непрерывен относительно сильной операторной сходимости. Так как $T_g \in \mathcal{L}_\infty^\pm(H_1, \varphi)$ и $T_g \in \mathcal{L}_1^\pm(H_1, \varphi)$ и $P_{1,\varphi} = P_{1,\varphi} I$, то согласно предложению 1.8

$$E_2(\mathbb{R} \setminus \delta) J E_1(\delta \setminus A_\varepsilon) = \Phi T_g \in \mathcal{L}_\infty^\pm(H_1, \varphi). \quad \text{Соотношение } / 2.6' /$$

теперь вытекает из произвольности $\varepsilon > 0$. ■

Из доказательства теоремы 2.1 непосредственно вытекают два следующих предложения. Ниже δ - некоторый сегмент.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 Пусть функция $f \in F(\delta)$, f взаимнооднозначна на δ и $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \delta$. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$ и выполнено / 2.5 /. Тогда $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^{\pm}(J_{\delta}))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 Пусть конечная борелевская функция f на $\mathbb{R}$ такова, что $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{C}$, $f \in C^1(\delta)$ и выполнено условие / 2.4 /. Предположим, что $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^{\pm}(J_{\delta}))$ и

$$T_f \in \Lambda_{\infty}^{\pm}(\mathcal{H}_1, \varphi).$$

Тогда $E_1(\delta)\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^{\pm}(J))$.

Условие непрерывной дифференцируемости / функции f на δ / в предложении 2.2 можно заменить на условие Гёльдера с некоторым показателем, большим половины / см. [11, предложение 7.3] и доказательство теоремы 2.1/. В случае $f(x) = (x-z)^{-1}$ утверждение предложения 2.2 принадлежит Р.Лавину [61].

Приведем еще один признак существования волновых операторов, близкий по характеру к теореме 2.1. Ниже $J_{\Delta} = E_2(\Delta) J E_1(\Delta)$.

ТЕОРЕМА 2.2 Пусть $f \in C^1(\mathbb{R})$ - периодическая функция такая, что ее производная f' удовлетворяет условию Гёльдера с некоторым положительным показателем и $f'(x) \neq 0$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$. Предположим, что для некоторого $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$ вы-

полнено / 2.5 / и для всякого конечного интервала Δ оператор

$$V(\Delta) := H_2 E_2(\Delta) J E_1(\Delta) - E_2(\Delta) J H_1 E_1(\Delta) \in \mathcal{L}_\infty^+(H_1, \varphi). \quad / 2.7 /$$

Тогда $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^+)$.

Доказательство. Для определенности будем считать, что условия / 2.5 /, / 2.7 / выполнены для верхнего знака. Так как множество $\Gamma = \{x: f'(x) \neq 0\}$ открыто, то для п.в. $x \in \mathbb{R}$ существует /конечный/ интервал Δ_x такой, что $x \in \Delta_x \subset \Gamma$. Следовательно, по предложению 2.1 $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^+(J_{\Delta_x}))$. Докажем сначала, что для всякого конечного сегмента $\delta \subset \mathbb{R}$

$$\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^+(E_2(\delta)J)). \quad / 2.8 /$$

Для этого покажем, что для всех $x \in \Gamma$ $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^+(E_2(\delta)J E_1(\Delta_x)))$. Достаточно показать, что

$$S\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U_2(-t) E_2(\delta \setminus \Delta_x) J E_1(\Delta_x) U_1(t) P_{1,\varphi} = 0. \quad / 2.9 /$$

Последнее доказывается так же, как и / 2.6 /. Действительно, если $\tilde{\delta}$ - произвольный интервал, содержащийся в Δ_x , то

$$E_2(\delta \setminus \Delta_x) J E_1(\tilde{\delta}) = \int_{\tilde{\delta}} \int_{\delta \setminus \Delta_x} (\lambda - \mu)^{-1} E_2(d\mu) V(\delta \cup \tilde{\delta}) E_1(d\lambda).$$

Из / 2.7 / и предложения I.8 вытекает, что

$$E_2(\delta \setminus \Delta_x) J E_1(\tilde{\delta}) \in \mathcal{L}_\infty^+(H_1, \varphi)$$

и, следовательно, справедливо / 2.9 /. Таким образом, / 2.8 / доказано /для всякого сегмента δ /, а потому существует

$$A_+ = \mathcal{W}\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} U_2(-t) J U_1(t) P_{1,\varphi}.$$

В дальнейшем для удобства считаем, что f 2π -периодическая функция. Введем вспомогательный оператор отождествления

$$\tilde{J} = \iint \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{e^{-i\lambda} - e^{-i\mu}} E_2(d\mu) J E_1(d\lambda).$$

Согласно [9]

$$U_2(1)\tilde{J} - \tilde{J}U_1(1) = f(H_2)J - Jf(H_1).$$

Так как $T_f \in \mathcal{L}_1^+(H_1, \varphi)$, то из предложений I.2, I.5 следует, что для $\psi \in \mathcal{D} = \{g(H_1)\varphi, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(U_2(1)\tilde{J} - \tilde{J}U_1(1))U_1(n)\psi\| < \infty. \quad / 2.10 /$$

Так как $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}_\varphi$ и

$$U_2(-n)\tilde{J}U_1(n) - J = \sum_{k=0}^{n-1} U_2(-k-1)(U_2(1)\tilde{J} - \tilde{J}U_1(1))U_1(k)$$

то из / 2.10 / вытекает, что существует $S\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_2(-n)\tilde{J}U_1(n)P_{1,\varphi}$.

Дословно повторяя доказательство предложения I.10 б), можно показать, что $\tilde{J} - Jf'(H_1) \in \mathcal{L}_\infty^+(H_1, \varphi)$, а потому существует

$$Y_+ = S\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} U_2(-n)JU_1(n)P_{1,\varphi} \quad / 2.11 /$$

/мы воспользовались тем, что $f'(x) \neq 0$ для п.в. x /. Очевидно, $Y_+ = A_+$. Так как A_+ переплетающий оператор для H_2 и H_1 , то таким будет и Y_+ . Т.е.

$$U_2(t)Y_+ = Y_+U_1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad / 2.12 /$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из следующей леммы. ■

ЛЕММА 2.1 Пусть существует предел / 2.II / и выполнено / 2. I2 /. Тогда $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^+)$.

Доказательство. Из / 2.II /, / 2.I2 / следует, что

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} (Y_+ - J) U_1(n) P_{1,\varphi} = 0.$$

Отсюда вытекает /см. замечание I.I/, что для $\varphi \in E_1(\Delta) \mathcal{H}_{1,\varphi}$ / Δ - произвольный интервал такой, что $|\Delta| \leq 2\pi$ / $Y_+ - J \in \mathcal{L}_\infty^+(H_1, \varphi)$, а потому

$$s - \lim_{t \rightarrow +\infty} (Y_+ - J) U_1(t) P_{1,\varphi} = 0.$$

Теперь утверждение леммы следует из соотношения /см. / 2.I2 //

$$U_2(-t)(Y_+ - J) U_1(t) = Y_+ - U_2(-t) J U_1(t). \quad \blacksquare$$

СЛЕДСТВИЕ 2.5 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$ и для всех $S > 0$

$$U_2(S) J - J U_1(S) \in \mathcal{L}_1^+(H_1, \varphi). \text{ Тогда } \mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^+).$$

Доказательство. Согласно теореме 2.1 нужно лишь показать, что для всякого конечного интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$ выполнено соотношение / 2.7 /. Пусть $S > 0$ такое, что $\bar{\Delta} \subset (-\pi/S, \pi/S)$. Тогда $g_S(x) = \exp(-iSx)$ взаимнооднозначна на Δ и так как /см. предложение I.I г//

$$E_2(\Delta)(g_S(H_2) J - J g_S(H_1)) E_1(\Delta) \in \mathcal{L}_\infty^+(H_1, \varphi),$$

то / 2.7 / следует из предложения I.10 а/.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1 Теорема 2.1 справедлива и для $\varphi \in \mathcal{H}_{1,c}$ - непрерывному подпространству оператора H_1 . Нужно лишь потребовать, чтобы $f \in \mathcal{K}_\varphi(H_1, H_2)$, а не $\mathcal{K}(H_1, H_2)$. Класс функций $\mathcal{K}_\varphi(H_1, H_2)$ определяется аналогично классу $\mathcal{K}(H_1, H_2)$, только мера Лебега $|\cdot|$ в определении 2.2 заменяется всюду на меру $m_{1,\varphi}(\cdot) := (E_1(\cdot)\varphi, \varphi)$. Аналогично можно переформулировать и теорему 2.2 /нужно лишь требовать, чтобы $f'(x) \neq 0 \pmod{m_{1,\varphi}}/$. Более того, из предложения I.4 а/ легко следует, что утверждения следствий 2.1 - 2.5 справедливы для произвольного вектора $\varphi \in \mathcal{H}_1$.

2.2 СВЯЗЬ МЕЖДУ МЕТОДОМ КУКА И ТЕОРИЕЙ ЯДЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ.

В настоящем параграфе метод Кука вкладывается в схему теории ядерных возмущений самосопряженных операторов. Это позволяет доказать известный в теории рассеяния принцип инвариантности в предположениях критерия Кука. Мы также распространяем результаты М.Ш. Бирмана [6, 7] и Т. Като [20, 56] об инвариантности волновых операторов при выполнении условий ядерного типа на более широкий класс допустимых функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 Будем говорить, что борелевская функция $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ H_1 -допустима, если она монотонна на каждом подынтервале некоторого открытого множества Γ такого, что $|\partial \Gamma| = 0$ и $\alpha'(x) > 0$ для п.в. $x \in \Gamma$.

Обозначим $W_\alpha^\pm = W_\alpha^\pm(J) = W^\pm(\alpha(H_2), \alpha(H_1), J)$.

ТЕОРЕМА 2.3 Пусть функция $f \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ и

$$T_f \in S_1. \quad / 2.13 /$$

Тогда для всякой H_1 -допустимой функции α $\mathcal{H}_{1,ac} \subset \mathcal{D}(W_\alpha^+) \cap \mathcal{D}(W_\alpha^-)$ и

$$W_\alpha^\pm P_{1,ac} = W^\pm P_{1,ac}, \quad / 2.14 /$$

т.е. справедлив принцип инвариантности волновых операторов.

Отметим, что функция f , вообще говоря, не ограничена и соотношение / 2.13 / понимается в смысле форм. То есть для всех $\varphi \in \mathcal{D}(f(H_1))$, $\psi \in \mathcal{D}(f(H_2))$

$$(J\varphi, f(H_2)u) - (Jf(H_1)\varphi, u) = (A\varphi, u),$$

где оператор $A \in S_1$. Очевидно, последнее эквивалентно тому, что $J\mathcal{D}(f(H_1)) \subset \mathcal{D}(f(H_2))$, T_f замыкаем с $\mathcal{D}(f(H_1))$ и $\overline{T_f} \in S_1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2 Теорема 2.3 решает поставленный М.Ш.Вирманом [7] вопрос о доказательстве принципа инвариантности /в рамках ядерной теории/ для кусочно монотонных и абсолютно непрерывных внутри Γ функций α / Γ - открытое множество такое, что $|\partial_1 \setminus \Gamma| = 0$ /. Ранее требовалось, чтобы производная функции α была непрерывной на Γ и удовлетворяла /локально/ условию Гёльдера с каким-либо положительным показателем /М.Ш.Вирман [7] / или имела /локально/ ограниченную вариацию /Т.Като [20] /.

Для доказательства теоремы 2.3 нам понадобится лемма 1.5, усиливающая аналогичную лемму Т.Като /см. замечание 1.2/. Лемма 1.5 была сформулирована нами в §1.3, приведем теперь ее доказательство.

Доказательство леммы 1.5. Пусть функция α допустима на (a, b) , т.е. α монотонна на (a, b) и $\alpha'(x) > 0$ для п.в. $x \in (a, b)$. Положим $\psi(t, s, x) = \exp(-i(t\alpha(x) + sx))$. Докажем соотношение / 1.24 / // 1.25 / доказываем аналогично/. Пусть

$$F_\alpha(t) = (2\pi)^{-1/2} \left(\int_0^\infty \left| \int_a^b \psi(t, s, x) dx \right|^2 ds \right)^{1/2} =$$

$$= \| F(\chi_{(a,b)} \exp(-it\alpha)) \|_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Здесь $\chi_{(a,b)}$ - характеристическая функция интервала (a,b) .
Согласно лемме I.3 для всякого $\varepsilon > 0$ существует функция $\alpha_\varepsilon \in C^1[a,b]$ такая, что $\alpha'_\varepsilon(x) > 0$ для всех $x \in [a,b]$ и

$$|\{x \in [a,b] : \alpha_\varepsilon(x) \neq \alpha(x)\}| < \varepsilon.$$

Из равенства Парсеваля следует, что

$$|F_\alpha(t) - F_{\alpha_\varepsilon}(t)| \leq \| \exp(-it\alpha) - \exp(-it\alpha_\varepsilon) \|_{L_2(a,b)} < 2\varepsilon.$$

Таким образом, достаточно доказать, утверждение леммы для $\alpha \in C^1[a,b]$. Пусть $p(x) = \alpha'(x) \geq c > 0$, g - ступенчатая на $[a,b]$ функция /т.е.:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \chi_{[a_k, a_{k+1})}(x), \quad a = a_0 < a_1 < \dots < a_m = b, \quad 1$$

такая, что $\|p - g\|_{L_2(a,b)} < \varepsilon$ и $g(x) \geq c \quad \forall x \in [a,b]$.
Имеем

$$F_\alpha(t) \leq I_1(t) + I_2(t),$$

где

$$I_1^2(t) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty \left| \int_a^b t \psi(t, s, x) \frac{g(x) - p(x)}{s + t g(x)} dx \right|^2 ds,$$

$$I_2^2(t) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty \left| \int_a^b \Psi(t, s, x) \frac{s + t p(x)}{s + t g(x)} dx \right|^2 ds.$$

Пусть

$$c_{i_0} \leq c_{i_1} \leq \dots \leq c_{i_{m-1}}.$$

Здесь $\{i_0, i_1, \dots, i_{m-1}\}$ - некоторая перестановка чисел $\{0, 1, \dots, m-1\}$, $c_k = g(x)$ для $x \in [a_k, a_{k+1})$. Рассмотрим

$$E_k(t, s) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{j=0}^k \int_{a_{i_j}}^{a_{i_{j+1}}} \Psi(t, s, x) (g(x) - p(x)) dx =$$

$$= \mathcal{F}(\exp(-itf)(g-p) \sum_{j=0}^k \chi_{[a_{i_j}, a_{i_{j+1}})})(s).$$

Из равенства Парсеваля следует, что

$$\|E_k(t, \cdot)\|_{L_2} \leq \|g-p\|_{L_2(a, b)} < \varepsilon.$$

Применяя преобразование Абеля [ниже $t > 0$ фиксированное], получим

$$I_1(t) = (2\pi)^{-1/2} \left(\int_0^\infty \left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t}{s + t c_{i_k}} \int_{a_{i_k}}^{a_{i_{k+1}}} \Psi(t, s, x) (g(x) - p(x)) dx \right|^2 ds \right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty \left| \sum_{k=0}^{m-2} \left(\frac{t}{s + t c_{i_k}} - \frac{t}{s + t c_{i_{k+1}}} \right) E_k(t, s) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{t}{s+tC_{i_{m-1}}} |E_{m-1}(t, s)|^2 ds)^{1/2} \leq \\
 & \leq \sum_{k=0}^{m-2} \sup_{s \geq 0} \left| \frac{t}{s+tC_k} - \frac{t}{s+tC_{k+1}} \right| \|E_k(t, \cdot)\|_{L_2} + \\
 & + \frac{\|E_{m-1}(t, \cdot)\|_{L_2}}{C_{i_{m-1}}} \leq \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{m-2} \left| \frac{1}{C_k} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{C_{k+1}} \right| + \frac{1}{C_{i_{m-1}}} \right) = \frac{\varepsilon}{C_{i_0}} = \frac{\varepsilon}{c}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, теперь достаточно показать, что $I_2(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$. Имеем /при $t > 0$ /

$$\begin{aligned}
 I_2^2(t) &= (2\pi)^{-1} \int_0^\infty \left| \int_a^b (s+tq(x))^{-1} \frac{d}{dx} (\psi(t, s, x)) dx \right|^2 ds = \\
 &= (2\pi)^{-1} \int_0^\infty \left| \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{s+tC_k} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{d}{dx} (\psi(t, s, x)) dx \right|^2 ds \leq \\
 &\leq \frac{4m^2}{2\pi} \int_0^\infty (tc+s)^{-2} ds = \frac{2m^2}{\pi ct}.
 \end{aligned}$$

Лемма полностью доказана. $\blacksquare$

Доказательство теоремы 2.3. Пусть α - произвольная H_1 -допустимая функция, Γ_f , Γ_α - открытые множества, фигурирующие в определениях 2.2, 2.3 соответственно. Положим $\Gamma = \Gamma_f \cap \Gamma_\alpha$. Очевидно, $|\Gamma| = 0$. Так как

$f'(x) \neq 0$ на Γ , то для всякого $x \in \Gamma$ существует сегмент $\delta \subset \Gamma$ такой, что $x \in \delta$ и f взаимнооднозначна на δ . Достаточно показать, что

$$E_1(\delta) \mathcal{H}_{1,ac} \subset \mathcal{D}(W_2^\pm) \text{ и } W_2^\pm E_1(\delta) P_{1,ac} = W^\pm E_1(\delta) P_{1,ac}. \quad 2.15$$

Из / 2.13 / следует, что оператор

$$T_{f,\delta} = E_2(\delta) T_f E_1(\delta) = \overline{f(H_2) T_\delta - T_\delta f(H_1)} \in S_1$$

/см. соотношения / I.31 /, / I.32 //. Согласно следствию I.9

$V(\delta) = H_2 T_\delta - T_\delta H_1 \in S_1$ /т.к. $H_2 T_\delta$ ограничен, то это эквивалентно тому, что $H_2 T_\delta - T_\delta H_1 \in S_1$ в смысле форм/. В силу теоремы Д.Пирсона $\mathcal{H}_{1,ac} \subset \mathcal{D}(W^\pm(T_\delta))$. Пусть

$$P_{j,\varphi}(\lambda) = P_{H_j,\varphi}(\lambda) = \left(\frac{d}{d\lambda} (E_\lambda^{H_j} \varphi, \varphi) \right)^{1/2},$$

$$M_{j,\infty} = M_\infty(H_j) = \{ \varphi \in \mathcal{H}_{j,ac} : P_{j,\varphi} \in L_\infty \}, \quad 2.16$$

$$\| \varphi \|_{j,\infty} = \| \varphi \|_{H_j,\infty} = \| P_{j,\varphi} \|_{L_\infty}.$$

Для $\varphi \in M_{1,\infty}$ справедлива оценка /см. [63, 42, 51] /

$$\begin{aligned} & \| (W^\pm(T_\delta) - T_\delta) U_{\mathcal{L}(H_1)}(t) \varphi \| \leq 8(2\pi)^{1/2} \| T_\delta \| \| |V(\delta)|^{1/2} \|_2^{\times} \\ & \times \| \varphi \|_{1,\infty} \left(\sum_n \mu_n \int_0^\infty |(\varphi_n, \exp(-isH_1 - it\mathcal{L}(H_1)) E_1(\delta) \varphi)|^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь $\| \cdot \|_2$ - норма Гильберта-Шмидта, $|V(\delta)| = \sum_n \mu_n (\varphi_n, \cdot) \varphi_n$ - модуль оператора $V(\delta)$, $\sum_n \mu_n < \infty$, $\{ \varphi_n \}$ - ортонормированная система в $\mathcal{H}_1$. Из приведенной оценки и леммы I.5

стандартным образом /см. книги [20, 42] для $J_\delta = \mathbb{I}$ и книгу [51] для произвольного ограниченного J_δ / вытекает, что $\mathcal{H}_{1,ac} = \mathcal{D}(W_\lambda^\pm(J_\delta))$ и $W_\lambda^\pm(J_\delta) P_{1,ac} = W^\pm(J_\delta) P_{1,ac}$.

Для доказательства / 2.15 / теперь остается показать, что для всякой H_1 -допустимой функции λ /и, в частности, для $\lambda(x) \equiv x$ /

$$s\text{-}\lim_{|t| \rightarrow \infty} E_2(R \setminus \delta) T E_1(\delta) U_{\lambda(H_1)}(t) P_{1,ac} . \quad / 2.17 /$$

/ 2.17 / доказывается аналогично соотношению / 2.6 /. Пусть $\varepsilon > 0$ и A_ε - открытое множество, такое, что $\delta \cap f^{-1}(f(\delta_2 \setminus \delta)) \subset A_\varepsilon$ и $|A_\varepsilon| < \varepsilon$ /см. / 2.4 // . Тогда $f(\delta \setminus A_\varepsilon) \cap f(\delta_2 \setminus \delta) = \emptyset$ и в силу компактности $f(\delta \setminus A_\varepsilon)$ $\inf \{ |f(\lambda) - f(\mu)| : \lambda \in \delta \setminus A_\varepsilon, \mu \in \delta_2 \setminus \delta \} > 0$.

Так как f непрерывно дифференцируема на δ , то д.о.и.

$$\Phi T = \int_{\delta \setminus A_\varepsilon} \int_{\delta_2 \setminus \delta} \frac{1}{f(\lambda) - f(\mu)} E_2(d\mu) T E_1(d\lambda)$$

принадлежит классу (S_1, S_1) /см. [9 , теорема 3] / и следовательно,

$$E_2(R \setminus \delta) T E_1(\delta \setminus A_\varepsilon) = \Phi T_f \in S_1 .$$

Соотношение / 2.17 / теперь вытекает из леммы I.I и произвольности $\varepsilon > 0$. Теорема полностью доказана. ■

Отметим, что из доказательства теоремы 2.3 немедленно вытекает следующий несколько более сильный результат /ср. с [7]/.

ТЕОРЕМА 2.3' Пусть Γ - открытое множество такое, что $|B_1 \setminus \Gamma| = 0$, функция $f \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. Предположим, что для всякого конечного сегмента $\delta \subset \Gamma$

$$V(\delta) = \overline{H_2 T_\delta - T_\delta H_1} \in S_1$$

и $T_f E_1(\delta) \in S_\infty$ /в смысле форм/. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.3.

Перейдем к доказательству инвариантности волновых операторов при выполнении условий метода Кука.

ТЕОРЕМА 2.4 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$, функция f принадлежит классу $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ и выполнено условие / 2.5 /. Тогда для всякой H_1 -допустимой функции ω $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\omega_\omega^\pm)$ и

$$\omega_\omega^\pm P_{1,\varphi} = \omega^\pm P_{1,\varphi} . \quad / 2.18 /$$

То есть справедлив принцип инвариантности волновых операторов.

СЛЕДСТВИЕ 2.6 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$ и выполнены предположения одного из следствий 2.1 - 2.4. Тогда справедливо утверждение теоремы 2.4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3 Вне рамок ядерной теории первые результаты об инвариантности волновых операторов получены Л.А.Сахновичем [45], а также В.Б.Матвеевым [35]. В [45, 35] доказана справедливость принципа инвариантности при выполнении условия

$$\|\omega^\pm - U_2(-t) T U_1(t)\| \varphi = O(|t|^{-1/2}) , t \rightarrow \pm\infty .$$

Последнее условие заведомо выполнено, если для некоторого $\beta > \frac{1}{2}$

$$\int_1^{\infty} \| (H_2 J - J H_1) U_1(\pm t) \varphi \| t^{\beta} dt < \infty. \quad / 2.19 /$$

К. Чандлер и А. Гибсон [52] показали, что достаточно требовать, чтобы соотношение / 2.19 / было выполнено для некоторого $\beta > 0$. М. Шехтер [66] заменил t^{β} в / 2.19 / на $\log(1+t)$. Следствие 2.6 показывает, что принцип инвариантности справедлив при выполнении обычного критерия Кука / 2.1 /, т.е. в / 2.18 / можно положить $\beta = 0$. Отметим также, что результаты работ [35, 45, 52] применимы к обобщенным волновым операторам, модифицированным для далекодействующих потенциалов. Вместе с тем они установлены для несколько более узкого класса допустимых функций.

Доказательству теоремы 2.4 мы предположим лемму, устанавливающую связь между методом Кука и теорией ядерных возмущений самосопряженных операторов. Пусть σ - конечный сегмент. Напомним, что через $F(\sigma)$ мы обозначаем / см. § 1.4 / класс боре-левских функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $f \in C^1(\sigma)$ и f' удовлетворяет на σ условию Гельдера с некоторым положительным показателем. Пусть $m_{j,\varphi}(\cdot) = (E_j(\cdot) \varphi, \varphi)$.

ЛЕММА 2.2 Пусть $\varphi \in E_1(\sigma) \mathcal{H}$, а с ,

$$T_g = g(H_2) J - J g(H_1) \in \mathcal{L}_1^{\pm}(H_1, \varphi)$$

для некоторой ограниченной функции $g \in F(\sigma)$. Тогда существуют новый оператор отождествления $\tilde{T} \in \mathcal{B}$ и ограниченная измеримая функция $a_{\varphi}^{\pm}(x) \neq 0 \pmod{m_{1,\varphi}}$ такая, что

$$g(H_2) \tilde{T} - \tilde{T} g(H_1) \in S_1 \quad / 2.20 /$$

и для всякой H_1 -допустимой функции α

$$S\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\tilde{T} - T a_{\psi}^{\pm}(H_1)) U_{\alpha(H_1)}(t) P_{1,\psi} = 0. / 2.21 /$$

Доказательство. Пусть для определенности $Tg \in \mathcal{L}_1^+(H_1, \psi)$. В силу теоремы I.4 существуют операторы $P^{\pm} \in B(\mathcal{H}_1)$ и ограниченная измеримая функция $a_{\psi}^+(x) \neq 0 \pmod{m_{1,\psi}}$ такие, что

$$Tg a_{\psi}^+(H_1) P^+ \in S_1.$$

$$P^{\pm} = P^{\pm} P_{1,\psi} = P_{1,\psi} P^{\pm}, P^+ P^- = P_{1,\psi}, / 2.22 /$$

$$\underline{H_1 P^+ - P^+ H_1 \in S_1(\mathcal{H}_1)} \quad / 2.23 /$$

и для всякой H_1 -допустимой функции α

$$S\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} P^- U_{\alpha(H_1)}(t) = 0 \quad / 2.24 /$$

/мы воспользовались тем, что произвольная H_1 -допустимая функция α является допустимой в смысле определения I.2 на любом подынтервале множества Γ , фигурирующего в определении 2.3/.

Положим $\tilde{T} = T a_{\psi}^+(H_1) P^+$. Тогда

$$\begin{aligned} g(H_2)\tilde{J}-\tilde{J}g(H_1) &= g(H_2)Ja_{\psi}^+(H_1)P^+-Ja_{\psi}^+(H_1)P^+g(H_1)= \\ &= T_g a_{\psi}^+(H_1)P^+ + Ja_{\psi}^+(H_1)(g(H_1)P^+-P^+g(H_1)). \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства соотношения / 2.20 / достаточно показать, что

$$g(H_1)P^+-P^+g(H_1) \in S_1(\mathcal{H}_1).$$

Так как $P^+=E_1(\delta)P^+E_1(\delta)$, то последнее непосредственно следует из теории д.о.и. /см. [9]/. Соотношение / 2.21 / вытекает из / 2.24 / и равенства

$$Ja_{\psi}^+(H_1)-\tilde{J}=Ja_{\psi}^+(H_1)P_- . \quad \square$$

Доказательство теоремы 2.4. Предположим для определенности, что $T_f \in \Lambda_1^+(H_1, \varphi)$. Пусть α - произвольная H_1 -допустимая функция и $z \in \mathbb{C} \setminus f(\mathbb{R})$ /см. определение 2.2/. Рассмотрим ограниченную функцию $g(x) = (f(x) - z)^{-1}$. Функция $g \in \mathcal{H}(H_1, H_2)$ и оператор $T_g \in \mathcal{L}_1^+(H_1, u)$, где $u = (f(H_1) - z)\varphi$ /см. доказательство теоремы 2.1/. Пусть Γ - открытое множество, отвечающее функции g в силу определения 2.2. Согласно следствию 1.3 для произвольных сегмента $\delta \subset \Gamma$ и функции $h \in C_0^\infty(\delta)$ оператор $T_g \in \mathcal{L}_1^+(H_1, \varphi)$, где $\varphi = h(H_1)u$. Множество таких векторов φ плотно в $\mathcal{H}_{1, \varphi}$ /т.к. $|\delta \setminus \Gamma| = 0$ / и, следовательно, достаточно показать, что $\varphi \in \mathcal{D}(W_{\alpha}^{\pm})$ и $W_{\alpha}^{\pm} \varphi = W^{\pm} \varphi$ / $\varphi \in \mathcal{D}(W^{\pm})$ в силу теоремы 2.1/. Из определения 2.2 следует, что $g \in F(\delta)$ для всякого сегмента $\delta \subset \Gamma$. Таким об-

разом в силу леммы 2.2 существует оператор отождествления $\tilde{J} \in \mathcal{B}$ и ограниченная измеримая функция $a_{\psi}^{+}(x) \neq 0 \pmod{m_{1,\psi}}$ такие, что выполнены соотношения / 2.20 / и / 2.21 /. Согласно теореме 2.3 $\mathcal{H}_{1,\psi} \subset \mathcal{D}(W^{+}(\tilde{J})) \cap \mathcal{D}(W_{\alpha}^{+}(\tilde{J}))$ и $W_{\alpha}^{+}(\tilde{J})P_{1,\psi} = W^{+}(\tilde{J})P_{1,\psi}$. Из / 2.21 / теперь следует, что $a_{\psi}^{+}(H_1)\mathcal{H}_{1,\psi} \subset \mathcal{D}(W_{\alpha}^{+}) \cap \mathcal{D}(W^{+})$ и

$$W_{\alpha}^{+}a_{\psi}^{+}(H_1)P_{1,\psi} = W^{+}a_{\psi}^{+}(H_1)P_{1,\psi}.$$

Так как $a_{\psi}^{+}(x) \neq 0 \pmod{m_{1,\psi}}$, то утверждение теоремы вытекает из плотности $a_{\psi}^{+}(H_1)\mathcal{H}_{1,\psi}$ в $\mathcal{H}_{1,\psi}$. ■

Следующее утверждение показывает, что в условиях теоремы 2.4 принцип инвариантности справедлив не только для волновых операторов $W^{\pm}(\mathcal{J})$ с отождествлением $\mathcal{J}$, но и для волновых операторов $W^{\pm}(\mathcal{J}')$ с отождествлением $\mathcal{J}'$, "близким" к $\mathcal{J}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.7 Пусть выполнены условия теоремы 2.4, $\mathcal{J} \in \mathcal{B}$. Предположим, что

$$\mathcal{J}' - \mathcal{J} \in \mathcal{L}_2^{\pm}(H_1, \varphi). \quad / 2.25 /$$

Тогда для всякой H_1 -допустимой функции α $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^{\pm}(\mathcal{J}'))$ и

$$W_{\alpha}^{\pm}(\mathcal{J}')P_{1,\varphi} = W^{\pm}(\mathcal{J}')P_{1,\varphi} = W_{\alpha}^{\pm}(\mathcal{J})P_{1,\varphi} = W^{\pm}(\mathcal{J})P_{1,\varphi}.$$

Доказательство. Пусть α - произвольная H_1 -допустимая функция. Γ - множество, фигурирующее в определении 2.3. Тогда α допустима на каждом подынтервале Γ в смысле оп-

ределения I.2 и, следовательно, в силу следствия I.6

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} (J' - J) U_{\mathcal{L}(H_1)}(t) P_{1,\varphi} = 0.$$

Так как /см. теорему 2.4/ $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^\pm(J)) \cap \mathcal{D}(W_\Delta^\pm(J))$,
то $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^\pm(J')) \cap \mathcal{D}(W_\Delta^\pm(J'))$ и

$$W^\pm(J) P_{1,\varphi} = W^\pm(J') P_{1,\varphi}, \quad W_\Delta^\pm(J) P_{1,\varphi} = W_\Delta^\pm(J') P_{1,\varphi}.$$

Утверждение следствия вытекает из / 2.18 /. ■

Отметим, что условие / 2.25 / можно заменить условием компактности операторов $(J' - J) E_1(\Delta)$ для всякого ограниченного Δ /см. [42, 51] или лемму I.1/.

Приведем некоторые примеры применения доказанных теорем.

Пример 2.1. Пусть $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L_2(\mathbb{R}^n)$, $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - полином, $H_1 = P(D)$, $D = -i \nabla$ - дифференциальный оператор. Будем предполагать, что множество

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : P'(x) = 0 \text{ или } \det P''(x) = 0\}$$

имеет /лебегову/ меру нуль. Пусть V - вещественная измеримая функция такая, что при некотором m

$$(1 + |x|)^{-m} V \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

G - некоторое открытое подмножество $\mathbb{R}^n$; H_2 - некоторый самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор такой, что

$$H_2 \varphi = H_1 \varphi + V \varphi$$

для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ с носителями, лежащими в G . Положим

$$F = \mathbb{R}^n \setminus G, \quad F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) < \varepsilon\}, \quad F^\varepsilon = F_\varepsilon \setminus$$

$\setminus F$ /здесь $\varepsilon > 0$, d - евклидово расстояние в $\mathbb{R}^n$!.

Пусть Ω - открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ такое, что $\mathbb{R}^n \setminus M \supset \Omega$ и $\text{mes}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) = 0$. Предположим, что для всякого компакта $K \subset P'(\Omega)$ и некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int_{|t| \geq t_\varphi} \int_K |V(tx)|^2 dx + \text{mes}(K \cap (F^\varepsilon/t)) \}^{1/2} dt < \infty. \quad / 2.26 /$$

Здесь $F^\varepsilon/t = \{x \in \mathbb{R}^n : tx \in F^\varepsilon\}$, $t_\varphi > 0$. Тогда для всякой H_1 -допустимой функции α существуют /на всем пространстве $\mathcal{H}_1$ / волновые операторы $W_\alpha^\pm(J)$ и $W_\alpha^\pm(J) = W^\pm(J)$.

Здесь J - оператор умножения на характеристическую функцию множества G . Для доказательства /ср. с [40]/ введем вспомогательный оператор отождествления J^ε . J^ε - оператор умножения на функцию $\chi^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ - множество бесконечно дифференцируемых, ограниченных вместе со всеми производными функций / такую, что

$$\chi^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}^n \setminus F_\varepsilon, \\ 0, & x \in F \end{cases}$$

и $0 \leq \chi^\varepsilon(x) \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Так как для $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(H_2 J^\varepsilon - J^\varepsilon H_1) \varphi = H_1(\chi^\varepsilon \varphi) - \chi^\varepsilon H_1 \varphi + V \chi^\varepsilon \varphi$$

и $H_1 J^\varepsilon - J^\varepsilon H_1$ - дифференциальный оператор с гладкими ограниченными коэффициентами, равными нулю вне F^ε , то из соотношения / 2.26 / /см. [54] или пример I.3/ вытекает, что

$$\int_{|t| \geq t_\varphi} \|(H_2 J^\varepsilon - J^\varepsilon H_1) U_1(t) \varphi\| dt < \infty$$

для $\varphi \in \mathcal{D} = \mathcal{F}^{-1} C_0^\infty(\Omega)$. Так как $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}_1$,

то согласно следствию 2.6 для всякой H_1 -допустимой функции χ $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{D}(W_\chi^\pm(J^\varepsilon))$ и $W_\chi^\pm(J^\varepsilon) = W^\pm(J^\varepsilon)$.

Покажем, что J^ε можно заменить на J . Так как $J^\varepsilon - J$ оператор умножения на ограниченную функцию, равную нулю вне F^ε , то из / 2.26 / следует, что

$$J^\varepsilon - J \in \mathcal{L}_1(H_1, \varphi)$$

для $\varphi \in \mathcal{D}$. Доказываемое утверждение следует теперь из следствия 2.7.

Отметим, что существование волновых операторов $W^\pm(H_2, H_1, J)$ в аналогичных предположениях доказано в работе [40], там же при существенно более жестких ограничениях доказана инвариантность этих волновых операторов.

Если в дополнение к / 2.26 / предположить, что для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^1(\Omega)$

$$\int_{|t| \geq t_0} \text{mes}(K \cap (F/t)) dt < \infty, \quad / 2.27 /$$

то для всякой H_1 -допустимой функции χ $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{D}(W_\chi^\pm(\mathbb{1}))$ и $W_\chi^\pm(\mathbb{1}) = W^\pm(\mathbb{1})$. Действительно, в этом случае / см. [54] или пример I.3/

$$J - \mathbb{1} \in \mathcal{L}_2(H_1, \varphi)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ и применимо следствие 2.7.

Отметим, что условия / 2.26 /, / 2.27 / заведомо выполнены / для всякого $\varepsilon > 0$ и $\Omega = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \neq 0\}$ /, если $H_1 = (-\Delta)^\ell$ ($\ell = 1, 2, \dots$) - полигармонический оператор, $F \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 \leq C(1 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^\ell\}$,

где $c > 0$, $b < 1$ /ср. с [40] / и

$$|V(x)| \leq f(|x|) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad / 2.28 /$$

где $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ - невозрастающая функция такая, что

$$\int_1^\infty f(\rho) d\rho < \infty. \quad / 2.29 /$$

Действительно, в этом случае $P'(\Omega) \subset \Omega$ и для всякого компакта $K \subset \Omega$

$$K \cap (F_\varepsilon / t) = \{x \in K : tx \in F_\varepsilon\} = \emptyset$$

для достаточно больших $|t|$, и, кроме того, для подходящего $t_\varphi > 0$

$$\int_{|t| > t_\varphi} \left\{ \int_{K \cap G} |V(tx)|^2 dx \right\}^{1/2} dt \leq 2 \int_{t_\varphi}^\infty f(ta) dt < \infty,$$

где $a = \inf \{|x| : x \in K\}$.

Отметим, что результат о справедливости принципа инвариантности волновых операторов в условиях примера I.I, новый уже при $G = \mathbb{R}^n$ и V , удовлетворяющей условиям / 2.28 /, / 2.29 /. Включение в рассмотрение множества $G \neq \mathbb{R}^n$ показывает, что поведение возмущенного оператора на, вообще говоря, достаточно широком множестве $F = \mathbb{R}^n \setminus G$ не влияет на существование волновых операторов и их инвариантность.

Теорема 2.4 позволяет рассмотреть и случай, когда возмущение задается потенциалом V , не лежащим в $L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$. Приведем конкретный пример.

Пример 2.2. Пусть $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L_2(\mathbb{R}^3)$, $J = \mathbb{1}$, $H_1 = -\Delta$ - оператор Лапласа, $H_2 = -\Delta + V$. Предположим, что $V = V_1 + V_2$,

где V_j $j = 1, 2$ - вещественные функции и

$$0 \leq V_1 \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3), \quad V_2 \in L_2(\mathbb{R}^3) + L_\infty(\mathbb{R}^3)$$

Тогда H_2 определен как форм-сумма $H_1 + V_2$ и V_1 . Предположим дополнительно, что при некотором m

$$(1 + |x|)^{-m} V_1 \in L_1(\mathbb{R}^3)$$

и для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$ существует компакт $K = K_x$, содержащий точку x такой, что

$$\int_{|t| \geq 1} \left(\int_K (V_1(tx) + |V_2(tx)|^2) dx \right)^{1/2} dt < \infty.$$

Тогда для всякой H_1 -допустимой функции $\varphi \in \mathcal{D}(W_\alpha^\pm) = \mathcal{H}_1$ и $W_\alpha^\pm = W^\pm$.

Доказательство вытекает из следствия 2.6, примера I.3 и оценки [59] /

$$\|(R_2(i) - R_1(i))\varphi\| \leq c(\|V_1^{1/2}\varphi\| + \|V_2\varphi\|).$$

Здесь $c > 0$ / постоянная, зависящая от V_1 и V_2 и не зависящая от φ , $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Приведем еще один результат, близкий к теореме 2.4. Ниже

$$\Lambda_p(H, \varphi) = \Lambda_p^+(H, \varphi) \cap \Lambda_p^-(H, \varphi).$$

ТЕОРЕМА 2.5 Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$, $f \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, H - самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_1$ и $H_1 = g(H)$ для некоторой вещественной борелевской функции g . Предположим, что

$$f(H_2)J - Jf(H_1) \in \Lambda_1(H, \varphi).$$

Тогда для всякой H_1 -допустимой функции $\varphi \in \mathcal{D}(W_\alpha^+) \cap$

$\cap \mathcal{D}(W_\alpha^\pm)$ и соотношение / 2.18 / выполнено для обоих знаков "+" и "-".

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{R})}$, $\psi = (f(H_1) - z)\varphi$. Тогда /см. доказательство теоремы 2.1/

$$(f(H_2) - z)^{-1}J - J(f(H_1) - z)^{-1} \in \mathcal{L}_1(H, \psi).$$

Мы воспользовались тем, что $U_H(t)$ коммутирует с оператором $(f(H_1) - z)$. Согласно следствию 1.4 существует последовательность борелевских множеств M_n такая, что $m_{H, \psi}(\mathbb{R} \setminus M_n) \rightarrow 0$ и

$$((f(H_2) - z)^{-1}J - J(f(H_1) - z)^{-1})E_H(M_n)P_\psi^H \in S_1.$$

Положим $J_n = J E_H(M_n) P_\psi^H$. Так как $(f(H_1) - z)^{-1}$ коммутирует с $E_H(M_n) P_\psi^H$, то

$$(f(H_2) - z)^{-1}J_n - J_n(f(H_1) - z)^{-1} \in S_1.$$

Согласно теореме 2.3 для всякой H_1 -допустимой функции α $\varphi \in \mathcal{D}(W_\alpha^\pm(J_n))$ и $W_\alpha^\pm(J_n)\varphi = W^\pm(J_n)\varphi$. Так как $\varphi \in \mathcal{H}_\psi(H)$ $|\varphi = (f(H_1) - z)^{-1}\psi|$ и $U_{\alpha(H_1)}(t)$ коммутирует с $E_H(M_n)$, то $E_H(M_n)\varphi \in \mathcal{D}(W_\alpha^\pm)$ и

$$W_\alpha^\pm E_H(M_n)\varphi = W^\pm E_H(M_n)\varphi.$$

Утверждение теоремы получается предельным переходом по n . ■

Рассмотрим пример применения теоремы 2.5.

Пример 2.3. Пусть $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L_2(\mathbb{R}^n)$, $J = \mathbb{I}$, H - псевдодифференциальный оператор такой, как в примере 1.3. Предположим, что вещественная функция V и открытое множество Ω также удо-

влетворяют условиям примера I.3 /при $\rho = 1$ /. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$;

$H_1 = g(H)$ - для некоторой вещественной борелевской функции g и H_2 - самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператор такой, что

$$H_2 \varphi = H_1 \varphi + V \varphi \quad , \quad \varphi \in \mathcal{D} .$$

Так как $U_H(t) \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ / $H = P(-i \nabla)$, где P - бесконечно дифференцируема на Ω /, то /см. пример I.3/ $H_2 - H_1 \in$

$\dot{A}_1(H, \varphi)$. Если дополнительно предположить, что $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{H}_{ac}$, то для всякой H_1 -допустимой функции χ $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}_\chi^\pm)$ и $\mathcal{W}_\chi^\pm \varphi = \mathcal{W}^\pm \varphi$ для $\varphi \in \overline{\mathcal{D}}$.

Отметим, что в условиях примера 2.3 $H_1 = \tilde{P}(-i \nabla)$, где функция $\tilde{P}$, вообще говоря, не обладает достаточной гладкостью для применения метода стационарной фазы /ср. с [42, 54]/. Тем не менее мы доказываем существование волновых операторов и справедливость принципа инвариантности при тех же условиях на V , что и в случае гладких $\tilde{P}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4 Принцип инвариантности выполняется также в условиях теоремы 2.2. Нужно лишь заменить соотношение / 2.7 / на условие $V(\Delta) \in \mathcal{L}_2^\pm(H_1, \varphi)$ или $V(\Delta) \in S_\infty$ /ср. со следствием 2.7/.

В заключение параграфа отметим, что М.Волленберг [72]/см. также [62, 51]/ для аналогичного класса допустимых функций доказал принцип инвариантности в "слабой" форме. Точнее, в [72, 62] показано, что из включения $\mathcal{H}_{ac} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^\pm) \cap \mathcal{D}(\mathcal{W}_\chi^\pm)$ следует равенство / 2.14 /. Там же установлена справедливость принципа инвариантности для абелевых волновых операторов /см. [51]/.

2.3 ЯДЕРНАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ И ГЛАДКИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ.

В настоящем параграфе будет показано, что, применяя ядерные методы, можно получить некоторые результаты о существовании волновых операторов, установленные ранее в рамках теории гладких возмущений /Т.Като [57, 58], Р.Лавин [61]/. Более того, мы докажем новый признак существования волновых операторов, включающий в себя как теорему Д.Пирсона [63] /см. также [42, теорема XI.7] /, так и признак Р.Лавина [61] /см. также [43, теорема XIII.3I] /.

Перейдем к формулировкам основных результатов параграфа. Будем предполагать, что

$$H_2 J - J H_1 = A_2^* A_1$$

в смысле форм, т.е. $\mathcal{D}(H_1) \subset \mathcal{D}(A_1)$, $\mathcal{D}(H_2) \subset \mathcal{D}(A_2)$ и для всех $u \in \mathcal{D}(H_2)$, $\psi \in \mathcal{D}(H_1)$

$$(J\psi, H_2 u) - (JH_1\psi, u) = (A_1\psi, A_2 u)_{\mathcal{H}} \quad / 2.3I /$$

Здесь A_1 , A_2 - линейные операторы, действующие из $\mathcal{H}_1$ /соответственно $\mathcal{H}_2$ / в некоторое гильбертово пространство $\mathcal{H}$, $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ - скалярное произведение в $\mathcal{H}$.

Отметим, что если оператор A_2 H_2 -ограничен /т.е. $A_2 R_2(i) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H})$ /, то / 2.3I / эквивалентно соотношению

$$R_2(z) J - J R_1(z) = -(A_2 R_2(z))^* A_1 R_1(z) \quad / 2.32 /$$

где $\text{Im } z \neq 0$. Ниже Δ - конечный интервал.

ТЕОРЕМА 2.6 Пусть оператор A_2 H_2 -ограничен и для всех $u \in \mathcal{H}_2$ $A_2 E_2(\Delta) P_{2,u} \in S_2(\mathcal{H}_2, \mathcal{K})$, причем

$$\sup_{u \in \mathcal{H}_2} \|A_2 E_2(\Delta) P_{2,u}\|_2 < \infty. \quad / 2.33 /$$

Тогда, если $\varphi \in \mathcal{H}_1$, оператор $A_1 E_1(\Delta)$ ограничен и

$$\int \|A_1 E_1(\Delta) U_1(t) \varphi\|_{\mathcal{K}}^2 dt < \infty, \quad / 2.34 /$$

то $E_1(\Delta) \mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^+) \cap \mathcal{D}(W^-)$.

Прежде чем доказывать теорему, приведем некоторые следствия из нее.

СЛЕДСТВИЕ 2.8 /Д.Пирсон [63]/. Пусть

$$V = H_2 J - J H_1 \in S_1$$

в смысле форм. Тогда $\mathcal{H}_{1,ac} \subset \mathcal{D}(W^+) \cap \mathcal{D}(W^-)$.

Доказательство. Можно считать, что выполнено соотношение / 2.31 / с $A_1 \in S_2(\mathcal{H}_1, \mathcal{K})$, $A_2 \in S_2(\mathcal{H}_2, \mathcal{K})$ /достаточно положить $\mathcal{K} = \mathcal{H}_1$, $A_1 = |V|^{1/2}$, $A_2 = |V|^{1/2} (\operatorname{sgn} V)^*$. Тогда / 2.33 / справедливо для всякого интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$. Из оценки М.Розенблума /см. / I.10 //вытекает, что / 2.34 / выполняется для всех $\varphi \in M_\infty(H_1)$ /см. / 2.16 //. Так как $\{E_1(\Delta) M_\infty(H_1) \mid \Delta \subset \mathbb{R}\}$ плотно в $\mathcal{H}_{1,ac}$, то следствие доказано. $\square$

Пусть $P_{j,s} = P_s^{H_j}$. Следующий результат также вытекает из теоремы 2.6.

ТЕОРЕМА 2.7 Пусть оператор A_2 H_2 -ограничен, $A_2 E_2(\Delta) P_{2,S} = 0$ и

$$\sup_{\substack{u \in M_\infty(H_2) \\ \|u\|_{2,\infty} \leq 1}} \int \|A_2 E_2(\Delta) U_2(t) u\|_{\mathcal{H}}^2 dt < \infty. \quad / 2.35 /$$

Тогда, если $\varphi \in \mathcal{H}_1$ и оператор A_1 удовлетворяет условиям, теоремы 2.6, то $E_1(\Delta) \mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^+) \cap \mathcal{D}(W^-)$.

Доказательство. В силу теоремы I.2 и определения $\|\cdot\|_{2,\infty}$ левая часть / 2.35 / совпадает с

$$\sup_{u \in \mathcal{H}_{2,ac}} \|A_2 E_2(\Delta) P_{2,u}\|_2^2.$$

Следовательно, из / 2.35 / и соотношения $A_2 E_2(\Delta) P_{2,S} = 0$ вытекает / 2.33 /. $\square$

Отметим, что соотношение / 2.35 / заведомо выполнено, если оператор A_2 H_2 -гладкий на Δ / см. [61, 43, 52] /, т.е.

$$\sup_{\|u\| \leq 1} \int \|A_2 E_2(\Delta) U_2(t) u\|_{\mathcal{H}}^2 dt < \infty.$$

Более того, в этом случае и $A_2 E_2(\Delta) P_{2,S} = 0$ / см. [57, 43] /. Следовательно, из теоремы 2.7 вытекает теорема Р.Лавина [61], а также ее "несимметричный" вариант, предложенный Е.М.Ильиным [18].

СЛЕДСТВИЕ 2.9 /Р.Лавин [61]/. Пусть оператор A_2 H_2 -ограничен и H_2 -гладкий на Δ , а оператор A_1 H_1 -ограничен и H_1 -гладкий на Δ . Тогда $E_1(\Delta) \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{D}(W^\pm)$ и $E_2(\Delta) \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{D}(W^\pm(H_1, H_2, J^*))$.

СЛЕДСТВИЕ 2.10 /Е.М.Ильин [18]/. Пусть оператор A_2

удовлетворяет предположениям следствия 2.9, а оператор A_1 условиям теоремы 2.6. Тогда $E_1(\Delta) \mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^\pm)$.

Доказательство теоремы 2.6. Из соотношений / 2.34 /, / 2.32 / и следствия I.2 вытекает, что

$$R_2(i)J - JR_1(i) \in \mathcal{L}_2(H_1, E_1(\Delta)\varphi) \quad . \quad / 2.36 /$$

Предположим сначала, что $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$. Согласно [61, 43] / см. также предложение 2.2 / нужно лишь показать, что $\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^\pm(J_\Delta))$. Здесь $J_\Delta = E_2(\Delta)JE_1(\Delta)$. Проведем доказательство для знака "+". В силу следствия I.4 существует последовательность борелевских множеств Y_n таких, что $Y_n \subset \Delta$, $A_1 E_1(Y_n)P_{1,\varphi} \in S_2(\mathcal{H}_1, \mathcal{H})$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{1,\varphi}(\Delta \setminus Y_n) = 0$. Достаточно показать, что для всех $n \geq 1$ $E_1(Y_n)\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^+(J_\Delta))$. Пусть

$$W(t) = U_2(-t)J_\Delta E_1(Y_n)P_{1,\varphi}U_1(t).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|(W(t) - W(s))\varphi\| &= \sup_{u \in \mathcal{H}_2, \|u\| \leq 1} |((W(t) - W(s))\varphi, u)| = \\ &= \sup_{u \in \mathcal{H}_2} \|P_{2,u}(W(t) - W(s))\varphi\|. \end{aligned}$$

Покажем, что для $\varphi \in M_\infty(H_1)$

$$\lim_{t,s \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathcal{H}_2} \|P_{2,u}(W(t) - W(s))\varphi\| = 0.$$

Будем пользоваться схемой доказательства теоремы Д.Пирсона [63] / см. также [42, 51] /. Положим $\tilde{T}_u = P_{2,u}J_\Delta E_1(Y_n)P_{1,\varphi}$.

Тогда $V_u := \overline{H_2 J_u - J_u H_1} = (A_2 E_2(\Delta) P_{2,u})^* A_1 E_1(Y_u) P_{1,\psi} \in S_1$
и /см. [63] или [42, стр. 35 - 37] /

$$\|P_{2,u}(W(t) - W(s))\psi\| = \lim_{a \rightarrow +\infty} (\psi, F_a(X_{t,t} - X_{t,s} - X_{s,t} + X_{s,s})\psi).$$

Здесь

$$F_a(X) = -i \int_0^a U_1(-\tau) X U_1(\tau) d\tau,$$

$$X_{t,s} = U_1(-t) (J_u^* U_2(t-s) V_u - V_u^* U_2(t-s) J_u) U_1(s).$$

Докажем, что

$$\lim_{t,s \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathcal{H}_2} \sup_{a \geq 0} |(\psi, F_a(X_{t,s})\psi)| = 0.$$

Достаточно показать, что

$$\lim_{t,s \rightarrow \infty} \sup_{u \in \mathcal{H}_2} \sup_{a \geq 0} \left| \int_0^a (\psi, U_1(-t - \tau) J_u^* U_2(t-s) V_u U_1(s+\tau)\psi) d\tau \right| = 0. \quad / 2.37 /$$

Из соотношения / 2.33 / и оценки М.Розенблума вытекает, что

$$\begin{aligned} & \int_0^a |U_2(s-t) J_u U_1(t+\tau)\psi, V_u U_1(s+\tau)\psi| d\tau \leq \\ & \leq \int \|A_2 E_2(\Delta) P_{2,u} U_2(s-t) J_u U_1(\tau)\psi\|_{\mathcal{H}}^2 d\tau \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left(\int_s^{s+s} \|A_1 E_1(Y_n) P_{1,\varphi} U_1(\tau) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \\
 & \leq \sqrt{2\pi} \|A_2 E_2(\Delta) P_{2,u}\|_2 \|U_2(s-t) J_u\| \|\varphi\|_{1,\infty} \times \\
 & \times \left(\int_s^\infty \|A_1 E_1(Y_n) P_{1,\varphi} U_1(\tau) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \\
 & \leq \sqrt{2\pi} \sup_{u \in \mathcal{H}_2} \|A_2 E_2(\Delta) P_{2,u}\|_2 \|J\| \|\varphi\|_{1,\infty} \times \\
 & \times \left(\int_s^\infty \|A_1 E_1(Y_n) P_{1,\varphi} U_1(\tau) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 d\tau \right)^{1/2} \rightarrow 0, s \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Так как $M_\infty(H_1)$ плотно в $\mathcal{H}_{1,ac}$, то отсюда следует, что $E_1(Y_n) \mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(W^\pm(J_\Delta))$ и теорема 2.6 для $\varphi \in \mathcal{H}_{1,ac}$ доказана. Пусть теперь φ - произвольный вектор из $\mathcal{H}_1$. Согласно предложению 1.4 б) $A_1 E_1(\Delta) P_{1,s} P_{1,\varphi} = 0$ и /см. / 2.32 //

$$R_2(z) J E_1(\Delta) P_{1,s} P_{1,\varphi} = J E_1(\Delta) P_{1,s} P_{1,\varphi} R_1(z) \quad | \operatorname{Im} z \neq 0 |.$$

Отсюда вытекает /см. [1, 20] /, что оператор $J E_1(\Delta) P_{1,s} P_{1,\varphi}$ - переплетающий для пары $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_1$. Следовательно, для всякой ограниченной борелевской функции

$$g(H_2) J E_1(\Delta) P_{1,s} P_{1,\varphi} = J E_1(\Delta) P_{1,s} P_{1,\varphi} g(H_1).$$

В частности, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$U_2(-t) J U_1(t) E_1(\Delta) P_{1,s} P_{1,\varphi} = J E_1(\Delta) P_{1,s} P_{1,\varphi}$$

и $E_1(\Delta)P_{1,S}\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^+)$. Далее,

$$\int \|A_1 E_1(\Delta)P_{1,ac} U_1(t) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 dt < \infty$$

/см. предложение I.4 б// и по уже доказанному $E_1(\Delta)P_{1,ac}\mathcal{H}_{1,\varphi} \subset \mathcal{D}(\mathcal{W}^+)$. $\square$

Как уже отмечалось, условия / 2.33 /, / 2.35 / выполняются, если A_2 - оператор Гильберта-Шмидта или A_2 H_2 -гладкий на Δ оператор. Приведем еще один пример оператора, удовлетворяющего этим условиям.

Пример I.4. Пусть $\mathcal{H} = L_2(\Delta, \tilde{\mathcal{H}})$ - пространство слабо измеримых функций φ со значениями в гильбертовом пространстве $\tilde{\mathcal{H}}$ таких, что

$$\int_{\Delta} \|\varphi(x)\|^2 dx < \infty,$$

$E \in L_2(\Delta \times \Delta, B(\tilde{\mathcal{H}}))$ и T - интегральный оператор с ядром E , т.е.

$$(T\varphi)(x) = \int_{\Delta} E(x,y) \varphi(y) dy.$$

H -оператор умножения на x в $\mathcal{H}$. Покажем, что

$$\sup_{\varphi \in M_{\infty}(H), \|\varphi\|_{H,\infty} \leq 1} \int \|T U_H(t) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 dt < \infty. \quad / 2.35a /$$

Отметим, что сейчас $\|\varphi\|_{H,\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{y \in \Delta} \|\varphi(y)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}$. Согласно равенству Парсеваля имеем

$$\int \|T U_H(t) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 dt = \int dt \int_{\Delta} dx \left\| \int_{\Delta} E(x,y) e^{-ity} \varphi(y) dy \right\|_{\tilde{\mathcal{H}}}^2 =$$

$$= \int_{\Delta} dx \int dt \left\| \int_{\Delta} E(x, y) e^{-ity} \varphi(y) dy \right\|_{\tilde{\mathcal{H}}}^2 =$$

$$= \int_{\Delta} dx \int_{\Delta} \|E(x, y) \varphi(y)\|_{\tilde{\mathcal{H}}}^2 dy \leq \|\varphi\|_{H, \infty}^2 \int_{\Delta} \int_{\Delta} \|E(x, y)\|^2 dx dy. \quad \blacksquare$$

Докажем, что в условиях теоремы 2.6 /а/, следовательно, и теоремы 2.7/ справедлив принцип инвариантности волновых операторов.

ТЕОРЕМА 2.8 Пусть выполнены условия теоремы 2.6. Тогда для всякой H_1 -допустимой функции $\mathcal{L} \in E_1(\Delta) \mathcal{H}_{1, \varphi} \subset \mathcal{D}(W_{\mathcal{L}}^{\pm})$ и

$$W_{\mathcal{L}}^{\pm} E_1(\Delta) P_{1, \varphi} = W^{\pm} E_1(\Delta) P_{1, \varphi}.$$

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 2.6, достаточно рассмотреть случай $\varphi \in \mathcal{H}_{1, ac}$. Пусть $\mathcal{L}$ - произвольная H_1 -допустимая функция. Из следствия I.6 и соотношения / 2.36 / вытекает, что

$$S\text{-}\lim_{|t| \rightarrow \infty} (R_2(i)J - JR_1(i)) U_{\mathcal{L}(H_1)} P_{1, \varphi} = 0.$$

Следовательно /см. [61] или доказательство теоремы 2.1/,

$$S\text{-}\lim_{|t| \rightarrow \infty} E_2(R \setminus \Delta) U_{\mathcal{L}(H_2)} (-t) J U_{\mathcal{L}(H_1)} (t) E_1(\Delta) P_{1, \varphi} = 0.$$

Таким образом, остается показать, что $\mathcal{H}_{1, \varphi} \subset \mathcal{D}(W_{\mathcal{L}}^{\pm}(J_{\Delta}))$ и $W_{\mathcal{L}}^{\pm}(J_{\Delta}) P_{1, \varphi} = W^{\pm}(J_{\Delta}) P_{1, \varphi}$. Рассмотрим случай знака "+". Пусть Y_n такие, как в доказательстве теоремы 2.6. Достаточно показать, что $E_1(Y_n) \mathcal{H}_{1, \varphi} \subset \mathcal{D}(W_{\mathcal{L}}^{\pm}(J_{\Delta}))$ и

$$W_{\Delta}^{\pm}(J_{\Delta})E_1(Y_n)P_{1,\varphi} = W^{\pm}(J_{\Delta})E_1(Y_n)P_{1,\varphi}. \quad / 2.38 /$$

Из доказательства теоремы 2.6 вытекает оценка

$$\begin{aligned} \| (W^{\pm}(J_{\Delta}) - J_{\Delta}) E_1(Y_n) P_{1,\varphi} \Psi \| &\leq 8\sqrt{2\pi} \sup_{u \in \mathcal{H}_2} \| A_2 E_2(\Delta) P_{2,u} \|_2 \times \\ &\times \| J \| \| \Psi \|_{1,\infty} \left(\int_0^{\infty} \| A_1 E_1(Y_n) P_{1,\varphi} U_1(\tau) \Psi \|_{\mathcal{H}}^2 d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\Psi \in M_{\infty}(H_1)$. Так как $A_1 E_1(Y_n) P_{1,\varphi}$ - оператор Гильберта-Шмидта, то $|A E_1(Y_n) P_{1,\varphi}| = \sum_k \mu_k(\Psi_k, \cdot) \Psi_k$, где $\sum_k \mu_k^2 < \infty$, $\{\Psi_k\}$ - ортонормированная система в $\mathcal{H}_1$.
Имеем

$$\begin{aligned} \| (W^{\pm}(J_{\Delta}) - J_{\Delta}) E_1(Y_n) P_{1,\varphi} U_{\mathcal{L}(H_1)}(t) \Psi \| &\leq \\ &\leq 8\sqrt{2\pi} \| J \| \| \Psi \|_{1,\infty} \sup_{u \in \mathcal{H}_2} \| A_2 E_2(\Delta) P_{2,u} \|_2 \times \\ &\times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \int_0^{\infty} |(\Psi_k, \exp(-i\tau H_1 - it\mathcal{L}(H_1)) \Psi)|^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы I.5 /см. книги [20, 42, 51]/ вытекает, что

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} (W^{\pm}(J_{\Delta}) - J_{\Delta}) E_1(Y_n) U_{\mathcal{L}(H_1)}(t) P_{1,\varphi} = 0$$

и /т.к. $W^{\pm}(J_{\Delta})$ - переплетающий оператор для пары H_2, H_1 /

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} (U_{\mathcal{L}(H_2)}(-t) J_{\Delta} U_{\mathcal{L}(H_1)}(t) - W^{\pm}(J_{\Delta})) E_1(Y_n) P_{1,\varphi} = 0.$$

Соотношение / 2.38 /, а вместе с ним и теорема доказаны. $\blacksquare$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5 Утверждение теоремы 2.6 сохраняется в том случае когда

$$f(H_2)J - Jf(H_1) = A_2^* A_1$$

/ в смысле форм / для некоторой функции f класса $\mathcal{H}^\circ(H_1, H_2)$, и операторы A_2, A_1 удовлетворяют условиям упомянутой теоремы. Нужно лишь дополнительно потребовать, чтобы $\varphi \in \mathcal{H}_{lac}$ и вместо H_2 -ограниченности A_2 предполагать, что оператор $A_2(f(H_2) - z)^{-1}$ ограничен для некоторого $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{R})}$. Отметим, что достаточно показать /см. предложение 2.2 /, что $\varphi \in \mathcal{D}(W^\pm(J_\delta))$ для всякого сегмента $\delta \subset \Gamma \cap \Delta$ / $\Gamma = \Gamma_f$ -множество из определения 2.2 /. Если ввести вспомогательный оператор отождествления /ср. с доказательством теоремы 2.1 /

$$\tilde{J}_\delta = \int_\delta \int_\delta \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} E_2(d\mu) J E_1(d\lambda),$$

то из соотношения $H_2 \tilde{J}_\delta - \tilde{J}_\delta H_1 = \overline{f(H_2)J_\delta - J_\delta f(H_1)} = (A_2 E_2(\delta))^* A_1 E_1(\delta)$ и теоремы 2.6 легко следует, что $\varphi \in \mathcal{D}(W^\pm(\tilde{J}_\delta))$. Переход к отождествлению J_δ осуществляется также как в теореме 2.1. Аналогичные обобщения допускают и теоремы 2.7, 2.8.

Г Л А В А 3

ВОЗМУЩЕНИЯ ГАМИЛЬТониАНА СВОБОДНОГО ПОЛЯ ПОЛИНОМАМИ ВИКА И ЗАДАЧА РАССЕЙАНИЯ.

3.1 СИНГУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА ПОЛИНОМОВ ВИКА.

В настоящей главе доказывается существование и инвариантность волновых операторов при возмущении оператора энергии свободного поля H_1 полиномами Вика специального вида, в частности, степенными /от поля/ возмущениями вида

$$\int_{\mathbb{R}^d} : \varphi^N(x) : dx. \quad / 3.1 /$$

Здесь $d \geq 2$ / $d+1$ - размерность физического пространства-времени/, $N \geq 3$, $: \varphi^N(x) :$ - N -ая виковая степень оператора свободного поля $\varphi(x)$ /в нулевой момент времени/ в точке x /см. [12, 15, 41]/. Возмущению / 3.1 / соответствует билинейная форма, изучению сингулярных свойств которой посвящен этот параграф.

Остановимся на понятии сингулярной билинейной формы, введенном для неотрицательных форм Б.Саймоном [68] и В.Д.Кошманенко [28, 30, 31] /см. также работу Ю.М.Березанского [4]

1. Не напоминая определения, отметим лишь /см. [31]/, что достаточным условием сингулярности в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ неотрицательной формы γ является плотность ядра

$$\text{Ker } \gamma = \{ \varphi \in \mathcal{D}(\gamma) : \gamma(\varphi, \varphi) = 0 \} \quad \text{в } \mathcal{H}. \quad \text{Здесь}$$

$\mathcal{D}(\gamma)$ - область определения γ . При некоторых дополнительных ограничениях это условие является и необходимым. Нам удобно ввести следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 Произвольную /вообще говоря, не неотрицательную/ билинейную форму γ будем называть сингулярной в $\mathcal{H}$, если $\text{Ker } \gamma$ содержит линейал, плотный в $\mathcal{H}$.

Отметим, что из сингулярности ненулевой формы γ следует ее незамыкаемость.

В настоящем параграфе показывается, что билинейная форма γ , соответствующая / 3.1 /, сингулярна в пространстве Фока $\mathcal{H}$. Это позволяет применять для рассмотрения возмущенного оператора H_2 /формально $H_2 = H_1 + \gamma$ / метод самосопряженных расширений, восходящий к известной работе Ф.А.Березина и Л.Д.Фаддеева [5], посвященной изучению оператора Лапласа, возмущенного δ -функцией Дирака. Точнее, H_2 можно понимать как некоторое самосопряженное расширение симметрического оператора $A = H_1 \upharpoonright \Phi_0$, где Φ_0 - плотный в $\mathcal{H}$ линейал, содеожайщийся в $\text{Ker } \gamma$. Более того, мы показываем, что при выполнении соотношения

$$\left[\frac{N+1}{2} \right] \gg \frac{d+2}{d-1}$$

H_1 существенно самосопряжен на некотором линейале, содержащемся в $\text{Ker } \gamma$. Последнее означает, что в этой ситуации метод самосопряженных расширений приводит к тривиальному возмущению и форма / 3.1 / не оказывает какого-либо влияния на свободный гамильтониан.

Введем необходимые обозначения. Пусть $F^0 = \mathbb{C}$, $F^1 = L_2(\mathbb{R}^d)$, F^k , $k \gg 2$ - пространство симметрических функций из $L_2(\mathbb{R}^{kd})$ / f называется симметрической, если

$f(p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(k)}) = f(p_1, \dots, p_k)$ для всех $p_i \in \mathbb{R}^d$ и произвольной перестановки σ . Пространство $\mathcal{H} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} F^k$ называется симметрическим /бозонным/ пространством Фока над F^1 , F^k называется k -частичным подпространством $\mathcal{H}$. Оператор энергии свободного поля действует /в импульсном представлении/ в $\mathcal{H}$ как $H_1 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_1^{(k)}$, где $H_1^{(0)} = 0$, $H_1^{(k)}$ - оператор умножения на функцию $\sum_{i=1}^k \mu(p_i)$. Здесь $\mu(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$, $m > 0$ - масса свободного поля.

Векторы $u \in \mathcal{H}$ записываем в виде $u = (u_k)_{k=0}^{\infty} \mid u_k \in F^k$. Через Φ обозначим подмножество векторов из $\mathcal{H}$, у которых только конечное число компонент u_k отлично от нуля и, кроме того, $u_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{kd})$, $k \geq 1$. H_1 - существенно самосопряженный оператор на Φ .

Изучаемые здесь возмущения оператора H_1 /виковские мономы и полиномы/ удобно первоначально ввести на формальном уровне через так называемые операторы рождения и уничтожения. Действие оператора уничтожения $a(p)$ $p \in \mathbb{R}^d$ определяется соотношением

$$(a(p)u)_n(p_1, \dots, p_n) = \sqrt{n+1} u_{n+1}(p, p_1, \dots, p_n), u \in \Phi.$$

$a(p)$ переводит Φ в Φ и потому можно определить произведение $\prod_{i=1}^n a(p_i)$. Оператор $a(p)$ не имеет замыкания и область определения оператора, ему сопряженного, состоит лишь из нуля. Тем не менее, $a^*(p)$ /оператор рождения/ - корректно определенная билинейная форма на $\Phi \times \Phi$. Аналогично,

смысл формы на $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ имеет произведение $\prod_{i=1}^{n_1} a^*(p_i) \times$
 $\times \prod_{i=1}^{n_2} a(p_i')$. Для $u, v \in \mathcal{F}$

$$(u, \prod_{i=1}^{n_1} a^*(p_i) \prod_{i=1}^{n_2} a(p_i') v) :=$$

$$:= (\prod_{i=1}^{n_1} a(p_i) u, \prod_{i=1}^{n_2} a(p_i') v)$$

является /по переменным p, p' / функцией из пространства $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^{d(n_1+n_2)})$. Поэтому для всякой $\mathcal{L} \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R}^{d(n_1+n_2)})$ можно определить моном Вика степени n_1, n_2 с ядром $\mathcal{L}$:

$$\gamma := \int_{\mathbb{R}^{d(n_1+n_2)}} \mathcal{L}(p_1, \dots, p_{n_1}, p'_1, \dots, p'_{n_2}) \prod_{i=1}^{n_1} a^*(p_i) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n_2} a(p_i') dp_1 \dots dp_{n_1} dp'_1 \dots dp'_{n_2},$$

представляющий собой форму на $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$:

$$\gamma(u, v) := \int_{\mathbb{R}^{d(n_1+n_2)}} \mathcal{L}(p_1, \dots, p_{n_1}, p'_1, \dots, p'_{n_2}) \times$$

$$\times (\prod_{i=1}^{n_1} a(p_i) u, \prod_{i=1}^{n_2} a(p_i') v) dp_1 \dots dp_{n_1} dp'_1 \dots dp'_{n_2}.$$

Произвольная конечная линейная комбинация мономов Вика называется полиномом Вика.

Поясним теперь смысл выражения / 3.I /. Свободное поле $\varphi(x)$ /в нулевой момент времени/ задается формальным выражением

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ipx} [a^*(p) + a(-p)] \frac{dp}{\sqrt{2\mu(p)}},$$

а / 3.I / представляет собой полином Вика:

$$\int_{\mathbb{R}^d} : \varphi^N(x) : dx := (2\pi)^{-\frac{Nd}{2}} \sum_{n_1+n_2=N} C_N^{n_1} \int_{\mathbb{R}^d} dx \times$$

$$\times \left(\int_{\mathbb{R}^{Nd}} \exp(-ix) \left(\sum_1^{n_1} p_i + \sum_1^{n_2} p'_i \right) \prod_1^{n_1} \frac{a^*(p_i)}{\sqrt{2\mu(p_i)}} \times \right. \\ \left. \times \prod_1^{n_2} \frac{a(-p'_i)}{\sqrt{2\mu(p'_i)}} dp_1 \dots dp_{n_1}, dp'_1 \dots dp'_{n_2} = (2\pi)^{-\frac{(N-2)d}{2}} \times \right.$$

$$\times \sum_{\substack{n_1+n_2=N \\ n_i \geq 0}} C_N^{n_1} \int_{\mathbb{R}^{Nd}} \delta \left(\sum_1^{n_1} p_i - \sum_1^{n_2} p'_i \right) \times \quad | 3.2 |$$

$$\times \prod_1^{n_1} \frac{a^*(p_i)}{\sqrt{2\mu(p_i)}} \prod_1^{n_2} \frac{a(p'_i)}{\sqrt{2\mu(p'_i)}} dp_1 \dots dp_{n_1}, dp'_1 \dots dp'_{n_2} =$$

$$= \sum_{\substack{n_1+n_2=N \\ n_i \geq 0}} C_N^{n_1} \gamma_{n_1, n_2}.$$

Здесь $C_N^{n_1}$ - биномиальные коэффициенты, γ_{n_1, n_2} - мономы Вика /билинейные формы/ вида

$$\gamma_{n_1, n_2}(u, v) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c(n_1, n_2, \ell) \gamma_{n_1, n_2}^{\ell}(u_{n_1+\ell}, v_{n_2+\ell}) \quad | 3.3 |$$

/для любых $u, v \in \mathcal{F}$ сумма в | 3.3 | конечна/, где

$$c(n_1, n_2, \ell) = 2^{-\frac{n_1+n_2}{2}} ((n_1+\ell)! (n_2+\ell)!)^{1/2} / \ell!,$$

$$\begin{aligned} \gamma_{n_1 n_2}^e = (2\pi)^{-\frac{d(n_1+n_2-2)}{2}} \int_{\mathbb{R}^{(n_1+n_2+e)d}} \delta\left(\sum_{i=1}^{n_1} p_i - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{n_2} p'_i\right) \prod_{i=1}^{n_1} (\mu(p_i))^{-1/2} \prod_{i=1}^{n_2} (\mu(p'_i))^{-1/2} \times \\ \times u_{n_1+e}(p_1, \dots, p_{n_1}, q_1, \dots, q_e) \bar{v}_{n_2+e}(p'_1, \dots, p'_{n_2}, \\ q_1, \dots, q_e) dp_1 \dots dp_{n_1} dp'_1 \dots dp'_{n_2} dq_1 \dots dq_e. \end{aligned} \quad / 3.4 /$$

В дальнейшем нам будет удобно работать в координатном, а не импульсном представлении. В координатном представлении $H_1 = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_1^{(k)}$, где $H_1^{(0)} = 0$,

$$(H_1^{(k)} u)(x_1, \dots, x_k) = \left(\sum_{i=1}^k \mu(p_i) \hat{u}(p_1, \dots, p_k) \right)^{\vee}, \quad k \geq 1,$$

а формы $\gamma_{n_1 n_2}$ имеют вид / 3.3 /, где

$$\begin{aligned} \gamma_{n_1 n_2}^e(u_{n_1+e}, v_{n_2+e}) = \int_{\mathbb{R}^{(e+1)d}} [(\hbar^{-1/2})^{\otimes n_1} \otimes \\ \otimes 1^{\otimes e} u_{n_1+e}](\underbrace{x_1, \dots, x_{n_1}}_{n_1}, x_1, \dots, x_e) [(\hbar^{-1/2})^{\otimes n_2} \otimes \\ \otimes 1^{\otimes e} v_{n_2+e}](\underbrace{x_1, \dots, x_{n_2}}_{n_2}, x_1, \dots, x_e) dx dx_1 \dots dx_e. \end{aligned} \quad / 3.5 /$$

Через $\hbar$ здесь и ниже обозначается оператор $(-\Delta + m^2)^{1/2}$, где $-\Delta$ - оператор Лапласа в $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Введем по оператору H_1 гильбертову шкалу пространств $\mathcal{H}_\beta = \mathcal{D}(H_1^{\beta/2})$ с $(\cdot, \cdot)_\beta = (H_1^{\beta/2} \cdot, \cdot)$. В частности,

$\mathcal{H}_2 = \mathcal{D}(H_1)$ с нормой графика.

ТЕОРЕМА 3.1 Пусть $\beta \geq 0$. Форма γ_{n_1, n_2} сингулярна в пространстве $\mathcal{H}_\beta$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий

$$\max \{n_1, n_2\} (d-1) \geq d + \beta, \quad / 3.6 /$$

$$n_1 \cdot n_2 = 0, \quad n_1 + n_2 \geq 1. \quad / 3.7 /$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1 Билинейная форма / 3.2 / сингулярна в пространстве Фока $\mathcal{H}$ для всех $d \geq 2$ и $N \geq 3$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2 Пусть $d \geq 2$, $N \geq N_0(d)$, где

$$N_0(d) = \begin{cases} 7, & d=2 \\ 5, & d=3 \\ 3, & d \geq 4 \end{cases}$$

Тогда существует линейал, содержащийся в ядре формы / 3.2 / и являющийся существенной областью оператора H_1 .

Доказательство теоремы 3.1. Пусть выполнено соотношение / 3.6 /. Положим $n = \max \{n_1, n_2\}$. Рассмотрим линейал $\Phi_{0n} = \{u = (u_k)_{k=0}^\infty \in \Phi : u_k \in A_n^k, k \geq n\}$.

Здесь $A_n^k = \{u_k \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^{kd}) \mid (\mathcal{H}^{-1/2})^{\otimes k} u_k(\xi) = 0$

$\forall \xi \in M^{k,n}\}$, $M^{k,n} = \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n = k} M^{k,n,i_1, \dots, i_n}$,

$M^{k,n,i_1, \dots, i_n} = \{\xi = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{kd} : x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_n}\}$.

В силу / 3.3 /, / 3.5 /. $\Phi_{0n} \subset \text{Ker } \gamma_{n_1, n_2}$. Покажем, что Φ_{0n} плотно в $\mathcal{H}_\beta$. Очевидно, достаточно проверить, что $A_n^k \cap F^k$

плотно в K -частичном подпространстве пространства $\mathcal{H}_\beta$. Так как норма в этом подпространстве эквивалентна норме соболевского пространства $W_2^{\beta/2}(R^{kd})$, а $P_K A_n^K \subset A_n^K \cap F^K$, P^K -проектор на F^K в $L_2(R^{kd})$, то последнее будет следовать из плотности A_n^K в $W_2^{\beta/2}(R^{kd})$, что в свою очередь вытекает из плотности $C_0^\infty(R^{kd}, M^{k,n})$ в $G(R^{kd})$. $G(R^{kd})$ - пополнение $\mathcal{Y}(R^{kd})$ по норме $\|(\hbar^{1/2})^{\otimes K}\|_{W_2^{\beta/2}(R^{kd})}$. Хорошо известно [см., например, [48, 69]], что если M - гиперплоскость в R^N коразмерности ℓ , то $C_0^\infty(R^N \setminus M)$ плотно в $W_2^p(R^N)$ тогда и только тогда, когда $p \leq \frac{\ell}{2}$. Следовательно, [см. 1.3.6], $C_0^\infty(R^{nd}, M_n^{n,n,1,2,\dots,n})$ плотно в $W_2^{\frac{n+\beta}{2}}(R^{nd})$. Поскольку оператор вложения из $W_2^{\frac{n+\beta}{2}}(R^{nd}) \otimes G(R^{(k-n)d})$ в $G(R^{kd})$ ограничен, то $C_0^\infty(R^{kd}, M_n^{k,n,1,2,\dots,n})$ плотно в $G(R^{kd})$ т.к.

$$C_0^\infty(R^{nd}, M_n^{n,n,1,2,\dots,n}) \otimes C_0^\infty(R^{(k-n)d}) \subset C_0^\infty(R^{kd}, M_n^{k,n,1,2,\dots,n})$$

1. Плотность $C_0^\infty(R^{kd}, M^{k,n})$ в $G(R^{kd})$ вытекает теперь из следующей очевидной леммы, доказательство которой будет для полноты изложения приведено в конце параграфа.

ЛЕММА 3.1 Пусть B - банахово пространство, содержащее $C_0^\infty(R^\ell)$ такое, что $\forall f \in C_0^\infty(R^\ell)$ отображение $C_0^\infty(R^\ell) \ni h(x) \rightarrow f(x)h(x)$ непрерывно в B ; G_1, G_2 - замкнутые подмножества R^ℓ , $G = G_1 \cup G_2$. Тогда из плотности

$C_0^\infty(\mathbb{R}^L, G_i)$ $i = 1, 2$ в B вытекает плотность $C_0^\infty(\mathbb{R}^L, G)$ в B .

Пусть теперь выполнено / 3.7 /, т.е. $J_{n_1, n_2} = J_{n_0}$ или $J_{0, n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Положим $\tilde{\Phi}_{0n} = \{u = (u_k)_{k=0}^\infty \in \Phi : u_k \in B_n^k, k \geq n\}$, где $B_n^k = \{\varphi_k \in \mathcal{U}_k : \hat{u}_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{kd}, \tilde{M}^{n,k})\}$, $\tilde{M}^{n,k} = \{\xi = (p_1, p_2, \dots, p_k) \in \mathbb{R}^{kd} : p_1 + p_2 + \dots + p_k = 0\}$.

Из соотношений / 3.3 /, / 3.4 / вытекает, что $\tilde{\Phi}_{0n} = \text{Ker } J_{n_1, n_2}$. Так как $C_0^\infty(\mathbb{R}^{kd}, \tilde{M}^{k,n})$ плотно в $L_2(\mathbb{R}^{kd}, (1+|\xi|^2)^{\beta/2} d\xi)$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$, то B_n^k плотно в $W_2^{\beta/2}(\mathbb{R}^{kd})$, а потому и $\tilde{\Phi}_{0n}$ плотно в пространствах $\mathcal{H}_\beta$ $\forall \beta \in \mathbb{R}$. Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь ни одно из условий / 3.6 /, / 3.7 / не выполнено. Мы покажем, что в этом случае форма J_{n_1, n_2} ограничена на каждом K -частичном подпространстве пространства $\mathcal{H}_\beta$. Точнее, будет доказано, что

$$|J_{n_1, n_2}^e(u_{n_1+e}, v_{n_2+e})| \leq c \|u_{n_1+e}\|_{W_2^{\beta/2}(\mathbb{R}^{d(n_1+e)})} \times \|v_{n_2+e}\|_{W_2^{\beta/2}(\mathbb{R}^{d(n_2+e)})}, \quad c > 0. \quad / 3.8 /$$

Из / 3.8 / следует, что существует постоянная $C'(n) > 0$, зависящая от n , такая, что $\forall u = (u_0, u_1, \dots, u_n, 0, 0, \dots) \in \Phi$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_n, 0, 0, \dots) \in \Phi$

$$|J_{n_1, n_2}(u, v)| \leq C'(n) \|u\|_\beta \|v\|_\beta. \quad / 3.9 /$$

Если теперь предположить существование линеала $\Phi_0 = \text{Ker } \gamma_{n,n_2} \subset \Phi$, плотного в $\mathcal{H}_\beta$, то /т.к. $\gamma_{n,n_2}(u,v) = 0 \forall u,v \in \Phi_0$ / согласно / 3.9 / $\gamma_{n,n_2}(u,v) = 0 \forall u,v \in \Phi$. Это противоречит определению γ_{n,n_2} . Вернемся к доказательству / 3.8 /. Из оценки

$$|\gamma_{n,n_2}^{\ell}(u_{n+\ell}, v_{n_2+\ell})| \leq (\gamma_{n,n_1}^{\ell}(u_{n+\ell}, u_{n+\ell}) \gamma_{n_2,n_2}(v_{n_2+\ell}, v_{n_2+\ell}))^{1/2}$$

следует, что достаточно показать, что

$$\gamma_{nn}^{\ell}(u_{n+\ell}, u_{n+\ell}) \leq C \|u_{n+\ell}\|_{W_2^{\beta/2}(\mathbb{R}^{(n+\ell)d})}^2, \quad / 3.10 /$$

где $C > 0$, $n \geq 1$, $n(d-1) < d + \beta$. В силу того, что для

$$u_{n+\ell} = u_n \otimes u^{\ell} (u_n \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^{nd}), u^{\ell} \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^{\ell d})),$$

$$\gamma_{nn}^{\ell}(u_{n+\ell}, u_{n+\ell}) = \gamma_{nn}^0(u_n, u_n) \|u^{\ell}\|_{L_2(\mathbb{R}^{\ell d})}^2,$$

/ 3.10 / нужно доказывать только для $\ell = 0$. Это вытекает из хорошо известного факта /см. [3] / ограниченности тензорного произведения операторов $A \otimes B$ при условии ограниченности A и B . Пусть $M = \{ \xi = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{nd} : x_1 = x_2 = \dots = x_n \}$. Так как вложение $\bigotimes_{i=1}^n W_2^s(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(M)$ ограничено, если $ns > \frac{d(n-1)}{2}$, то

$$\gamma_{nn}^0(u_n, u_n) \leq C \| (h_0^{-1/2})^{\otimes n} u_n \|_{\bigotimes_{i=1}^n W_2^s(\mathbb{R}^d)}^2 \leq$$

$$\leq C_1 \|u_n\|_{\bigotimes_{i=1}^n W_2}^2 S^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^d), \quad S > \frac{d(n-1)}{2n}.$$

Если $\frac{d(n-1)}{2n} < \frac{1}{2}$ т.е. $n(d-1) < d$, то

$$\gamma_{nn}(u_n, u_n) \leq C_2 \|u_n\|_{L_2(\mathbb{R}^{nd})}^2,$$

и оценка / 3.10 / доказана в случае $\beta = 0$. Если же $\frac{d(n-1)}{2n} \gg \frac{1}{2}$, то

$$\gamma_{nn}^0(u_n, u_n) \leq C_3 \|u_n\|_{W_2^{(S-\frac{1}{2})n}(\mathbb{R}^{nd})}^2.$$

Так как $(\frac{d(n-1)}{2n} - \frac{1}{2})n < \frac{\beta}{2}$ при $n(d-1) < d + \beta$, то в последнем неравенстве можно выбрать S так, чтобы $(S - \frac{1}{2})n = \frac{\beta}{2}$.

Отметим, что идея изучения сингулярных свойств форм γ_{n_1, n_2} в координатном представлении /формула / 3.5 // принадлежит В.Д. Кошманенко [28, 29]. Им же доказана плотность $\text{Ker } \gamma_{n_1, n_2}$ в $\mathcal{H}_0$ при $d=3$, $n_1 \gg 2$, $n_2 \gg 2$.

Доказательство леммы 3.1. Пусть $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus G_1)$, $\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ такая, что $\alpha(x) = 1$, $x \in \text{supp } f$. Пусть $\alpha_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus G_2)$ $| n \gg 1$ - последовательность функций, сходящаяся к α в B . Положим $f_n = \alpha_n f$. Тогда $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus G)$ $| \forall n \gg 1$ и $f - f_n = (\alpha - \alpha_n)f \xrightarrow{B} 0$, $n \rightarrow \infty$. Лемма доказана. $\blacksquare$

3.2 СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ОПЕРАТОРОВ.

Рассмотрим возмущение оператора H_1 , задаваемое конечной линейной комбинацией мономов Вика χ_{n_1, n_2}

$$\chi = \sum_{n_1, n_2=0}^M c_{n_1, n_2} \chi_{n_1, n_2}. \quad / 3.II /$$

Здесь $c_{n_1, n_2} = \overline{c_{n_2, n_1}}$ - комплексные числа, $M \geq 1$, χ - симметрическая билинейная форма на $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Будем предполагать, что $d \geq 2$, $c_{00} = c_{11} = 0$. Тогда в силу теоремы 3.1 форма

χ сингулярна в $\mathcal{H}$. Отметим, что, выбирая в / 3.II / коэффициенты c_{n_1, n_2} надлежащим образом, можно рассмотреть степенные возмущения вида / 3.2 / при $d \geq 2$, $N \geq 3$, а также возмущения, соответствующие ряду других моделей квантовой теории поля /например, моделям Ли /см. [49]//. Из доказательства теоремы 3.1 следует, что в качестве плотного в $\mathcal{H}$ ли-неала, содержащегося в $\text{Ker } \chi$, можно взять множество Φ_{02} . Для изучения возмущенного гамильтониана H_2 применим метод самосопряженных расширений. Точнее, гамильтониан H_2 , отвечающий возмущению оператора H_1 формой / 3.II /, будем понимать как некоторое самосопряженное расширение симметрического оператора

$$A = H_1 \upharpoonright \Phi_{02}. \quad / 3.I2 /$$

Отметим, что для конкретной билинейной формы χ вида / 3.II / может найтись более широкий /по сравнению с Φ_{02} / ли-неал, содержащийся в $\text{Ker } \chi$. Это приводит к тому, что можно рассматривать меньший запас самосопряженных расширений оператора A . В частности, H_1 может оказаться существенно

самосопряженным на $\ker \gamma$ /см. следствие 3.2/, что приводит к тривиальности /в рассматриваемом подходе/ возмущения и равенству $H_2 = H_1$. Отметим также, что и само множество Φ_{02} является существенной областью оператора H_1 при $d \geq 4$ /см. доказательство теоремы 3.1/. Последнее означает тривиальность возмущений вида / 3.II / при $d \geq 4$, $C_{00} = C_{11} = 0$. Основным результатом параграфа является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2 Пусть H_2 - произвольное самосопряженное расширение оператора A /см. / 3.I2 // . Тогда для пары H_2 , H_1 существуют волновые операторы $W^\pm = W^\pm(H_2, H_1, \mathbb{I})$ /т.е. $\mathcal{D}(W^\pm) = \mathcal{H}_1$ /.

Докажем сначала одно вспомогательное предложение. Пусть $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ - множество бесконечно дифференцируемых, ограниченных вместе со всеми производными функций на $\mathbb{R}^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 Пусть Q - оператор умножения на симметрическую функцию $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{kd})$ в пространстве Γ^k . Тогда оператор $T = (h^{1/2})^{\otimes k} Q (h^{-1/2})^{\otimes k}$ ограничен в Γ^k и $\|T\| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{kd})} + C(k) \sum_{0 < |\alpha| \leq 2k} \|D^\alpha g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{kd})}$. Здесь $C(k) \geq 0$ - некоторая постоянная, зависящая от k , но не зависящая от g .

Доказательство. Доказываемое утверждение вытекает из интерполяции между $\|Q\| = \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{kd})}$ и $\|(h^2)^{\otimes k} Q (h^{-2})^{\otimes k}\| \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{kd})} +$

$$+ c(k) \sum_{0 < |\alpha| \leq 2k} \| D^\alpha f \|_{L^\infty(\mathbb{R}^{kd})}.$$

Мы воспользовались тем, что $(h^2)^{\otimes k}$ - дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и формулой Лейбница. ■

Доказательство теоремы 3.2. Введем вспомогательный оператор отождествления $J = \bigoplus_{k=0}^{\infty} J_k$, $J_k = \mathbb{I}$ $k=0, 1$

$$J_k = (h^{1/2})^{\otimes k} Q_k (h^{-1/2})^{\otimes k}, \quad k \geq 2.$$

Здесь Q_k - оператор умножения /в пространстве F^k / на симметрическую функцию $q_k \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{kd})$ такую, что $q_k(\xi) \in [0, 1]$, $\xi \in \mathbb{R}^{kd}$ и

$$q_k(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in N_{a_k/2}^k \\ 1, & \xi \in \bar{N}_{a_k}^k \end{cases}, \quad 1/a_k > 0,$$

где $N_a^k = \{ \xi = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{kd} \mid \exists i_1, i_2: 1 \leq i_1 < i_2 \leq k \text{ и } |x_{i_1} - x_{i_2}| \leq a \}$. Согласно предложению 3.1

$$\| J_k \| \leq \| q_k \|_{L^\infty} + c(k) \sum_{0 < |\alpha| \leq 2k} \| D^\alpha q_k \|_{L^\infty}.$$

Рассмотрим q_k специального вида

$$q_k = \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} b(|x_{i_1} - x_{i_2}| / a_k),$$

где $b \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ такая, что $b(t) \in [0, 1]$, $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\text{и } \theta(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1, & t \in [1, +\infty) \end{cases}$$

Тогда при $|\alpha| > 0$

$$\|D^{\alpha} f_k\|_{L^{\infty}} \rightarrow 0, \quad a_k \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, выбирая достаточно большие $a_k > 0$, можно добиться выполнения неравенства

$$\|J_k\| \leq \|f_k\|_{L^{\infty}} + 1 \leq 2, \quad k \gg 2.$$

Тогда оператор J ограничен и $\|J\| \leq 2$. Мы докажем существование волновых операторов $W^{\pm}(H_2, H_1, J)$ с помощью обычного критерия Кука. Из определения J ясно, что $J\phi \subset \phi_{02}$, кроме того, $U_{H_1}(t)\phi \subset \phi$. Для $u = (u_k)_{k=0}^{\infty} \in \phi$ имеем

$$\begin{aligned} (H_2 J - J H_1) U_{H_1}(t) u &= (H_2 J - J H_1) U_{H_1}(t) u = \\ &= 0 \oplus 0 \oplus \left(\bigoplus_{k=2}^{\infty} (H_1^{(k)} J_k - J_k H_1^{(k)}) U_{H_1^{(k)}}(t) u_k \right). \end{aligned} \quad / 3.13 /$$

Рассмотрим на $\mathcal{Y}_k := \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{kd}) \cap F^k$

$$\begin{aligned} H_1^{(k)} J_k - J_k H_1^{(k)} &= H_1^{(k)} (J_k - \mathbb{I}) + (\mathbb{I} - J_k) H_1^{(k)} = \\ &= H_1^{(k)} (h^{-3/2})^{\otimes k} (h^2)^{\otimes k} (Q_k - \mathbb{I}) (h^{-1/2})^{\otimes k} + \\ &+ (h^{-3/2})^{\otimes k} (h^2)^{\otimes k} (\mathbb{I} - Q_k) (h^{-1/2})^{\otimes k} H_1^{(k)}. \end{aligned} \quad / 3.14 /$$

Положим $N^k = M^{k,2}$ /см. доказательство теоремы 3.1/, $\mathcal{D}_k = F^{-1}(C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{kd}, N^k)) \cap F^k$. Покажем, что $\forall u_k \in \mathcal{D}_k$
 $(h^2)^{\otimes k} (\mathbb{I} - Q_k) \in \Lambda_1(H_1^{(k)}, u_k).$ / 3.15 /

Оператор $H_1^{(k)}$ - псевдодифференциальный оператор с постоянным символом $P(\xi) = \sum_{i=1}^k \mu(\xi_i)$ $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^{kd}$.

Непосредственно проверяется, что $\det P''(\xi) \neq 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^{kd}$, и $P'(\mathbb{R}^{kd} \setminus N^k) \subset \mathbb{R}^{kd} \setminus N^k$. Следовательно, согласно [54] /см. также пример I.3/, достаточно показать, что для всякого компактного в $\mathbb{R}^{kd}$ множества $\omega \subset \mathbb{R}^{kd} \setminus N^k$

$$\int \left(\int_{\omega} \chi_{N_{a_k}^k}(tx) dx \right)^{1/2} dt < \infty. \quad / 3.16 /$$

Здесь χ_A - характеристическая функция множества A /мы воспользовались тем, что $(h^2)^{\otimes k} (1 - Q_k)$ - дифференциальный оператор с ограниченными коэффициентами, равными нулю вне $N_{a_k}^k$ /. Так как

$$\int_{\omega} \chi_{N_{a_k}^k}(tx) dx = \text{mes}(\omega \cap N_{a_k}^k / |t|)$$

/ mes - мера Лебега в $\mathbb{R}^{kd}$ / и $\omega \cap N^k = \emptyset$, то в силу компактности ω для достаточно больших $|t|$ $\omega \cap N_{a_k}^k / |t| = \emptyset$ и интеграл / 3.16 / сходится. В силу / 3.14 /, / 3.15 /, ограниченности операторов $(h^{-3/2})^{\otimes k}$, $H_1^{(k)}(h^{-3/2})^{\otimes k}$ и того, что операторы $(h^{-1/2})^{\otimes k}$, $H_1^{(k)}$ сохраняют $\mathcal{D}_k$, / 3.14 / выполнено для $\forall \varphi_k \in \mathcal{D}_k$. Следовательно, /см. / 3.13 //

$$H_2 J - J H_1 \in \Lambda_1(H_1, u).$$

$\forall u \in \mathcal{D} = \{u \in \mathcal{F} : u_k \in \mathcal{D}_k, k \geq 2\}$. Из плотности $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}$ вытекает существование волновых операторов $W^{\pm}(H_2, H_1, J)$. Для

доказательства существования $W^{\pm}(H_2, H_1, \mathbb{I})$ достаточно убедиться, что J_{H_1} -асимптотически эквивалентен единичному оператору, т.е.

$$S\text{-}\lim_{|t| \rightarrow \infty} (\mathbb{I} - J) U_{H_1}(t) = 0.$$

Последнее вытекает из соотношения

$$S\text{-}\lim_{|t| \rightarrow \infty} (\mathbb{I} - J_k) U_{H_1^{(k)}}(t) = 0 \quad |k \neq 2| \quad |3.17|$$

Имеем /на J_k /

$$(\mathbb{I} - J_k) = (h^{-3/2})^{\otimes k} (h^2)^{\otimes k} (\mathbb{I} - Q_k) (h^{-1/2})^{\otimes k}. \quad |3.18|$$

Таким образом, / 3.17 / следует из / 3.15 / , ограниченности оператора $(h^{-3/2})^{\otimes k}$, соотношения $(h^{-1/2})^{\otimes k} Q_k \subset Q_k$ и плотности Q_k в F^k . $\square$

Покажем, что в условиях теоремы 3.2 справедлив принцип инвариантности волновых операторов.

ТЕОРЕМА 3.3 Пусть H_2 - произвольное самосопряженное расширение оператора A . Тогда для всякой H_1 -допустимой функции α существуют волновые операторы $W_{\alpha}^{\pm} = W^{\pm}(\alpha(H_2), \alpha(H_1), \mathbb{I})$, $\mathcal{D}(W_{\alpha}^{\pm}) = \mathcal{H}_1$ и $W_{\alpha}^{\pm} = W^{\pm}$.

Доказательство. Пусть α - произвольная H_1 -допустимая функция. Из определения множества Φ_{02} вытекает, что оператор H_2 совпадает с H_1 на 0 -частичном подпространстве F^0 . Следовательно, достаточно показать, что $\mathcal{H}^0 := (F^0)^{\perp} \subset \mathcal{D}(W_{\alpha}^{\pm})$ и $W_{\alpha}^{\pm} P^0 = W^{\pm} P^0$. Здесь P^0 - проектор

на $\mathcal{H}^0$. Отметим, что $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}_{1,ac}$. Пусть оператор $\mathcal{J}$ и множество $\mathcal{D}$ такие, как в доказательстве теоремы 3.2. Положим $\mathcal{D}^0 = \{u \in \mathcal{D} : u_0 = 0\}$. Очевидно, $\mathcal{D}^0$ плотно в $\mathcal{H}^0$. Для всякого $u \in \mathcal{D}^0$ /см. доказательство теоремы 3.2/

$$H_2 \mathcal{J} - \mathcal{J} H_1 \in \Lambda_1(H_1, u)$$

и, согласно следствию 2.7, достаточно показать, что для $u \in \mathcal{D}^0$

$$\mathcal{J} - \mathbb{1} \in \mathcal{L}_2(H_1, u).$$

Последнее вытекает из определений $\mathcal{J}$ и $\mathcal{D}^0$ и соотношений / 3.15 /, / 3.18 /. $\blacksquare$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 544с.
2. Белопольский А.Л., Бирман М.Ш. Существование волновых операторов в теории рассеяния для пары пространств. - Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, т.32, №5, с.1162-1175.
3. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965. 798с.
4. Березанский Ю.М. Билинейные формы и гильбертовы оснащения. - В кн.: Спектральный анализ дифференциальных операторов. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980, с.83-106.
5. Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. - Докл. АН СССР, 1961, т.137, №5, с.1011-1014.
6. Бирман М.Ш. Об условиях существования волновых операторов. - Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, т.27, №4, с.883-906.
7. Бирман М.Ш. Локальный признак существования волновых операторов. - Изв. АН СССР. Сер. мат., 1968, т.32, №4, с.914-942.
8. Бирман М.Ш., Крейн М.Г. К теории волновых операторов и операторов рассеяния. Докл. АН СССР, 1962, т.144, №3, с.475-478.
9. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Двойные операторные интегралы Стильтеса. - В кн.: Проблемы математической физики. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1966, вып.1, с.33-67.
10. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Двойные операторные интегралы Стильтеса, II. - В кн.: Проблемы математической физики. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1967, вып.2, с.26-60.
11. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Двойные операторные интегралы

- Стилтьеса, III. - В кн.: Проблемы математической физики. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1973, вып. 6, с. 27-53.
12. Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Тодоров И.Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. М.: Наука, 1969. 424с.
13. Виноградов С.А. Непрерывность возмущенных интегральных операторов, интегралы типа Коши, максимальные операторы. - Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1977, т. 73, с. 24-34.
14. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320с.
15. Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М.: Мир, 1984. 448с.
16. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамо-сопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448с.
17. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965, т. I. 615 с.
18. Ильин Е.М. Принцип предельного поглощения и рассеяние на некомпактном препятствии, I. - Изв. вузов. Матем., 1984, №1, с. 46-55.
19. Карпешина Ю.Е. Теорема разложения по собственным функциям задачи рассеяния на однородных периодических носителях типа цепочки в трехмерном пространстве. - В кн.: Проблемы математической физики. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981, вып. 10, с. 137-163.
20. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740с.
21. Константинов А.Ю. Об условиях существования волновых опера-

- торов. - Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, №II, с.18-21.
22. Константинов А.Ю. Локальная ядерность в методе Кука. - В кн.: Спектральная теория операторов в задачах математической физики. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983, с.107-112.
23. Константинов А.Ю. Принцип инвариантности волновых операторов. - Докл. АН СССР, 1985, т.281, №5, с.1041-1044.
24. Константинов А.Ю. О принципе инвариантности волновых операторов. - Укр. мат. журн., 1984, т.36, №6, с.704-709.
25. Константинов А.Ю. О принципе инвариантности в теории рассеяния. - В кн.: Теория вероятностей, теория случайных процессов и функциональный анализ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985, с.112-114.
26. Константинов А.Ю. Сингулярные свойства мономов Вика. - Укр. мат. журн., 1983, т.35, №6, с.757-760.
27. Константинов А.Ю. Сингулярность мономов Вика в пространстве Фока. - В кн.: Прямые и обратные задачи теории рассеяния. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с.43-47.
28. Кошманенко В.Д. Операторное представление для незамкнутых квадратичных форм и задача рассеяния. - Докл. АН СССР., 1979, т.245, №2, с.295-298.
29. Кошманенко В.Д. Метод ортогонального расширения в задаче рассеяния квантовой теории поля. - В кн.: Прямые и обратные задачи теории рассеяния. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с.48-55.
30. Кошманенко В.Д. Замыкаемые расширения билинейных форм с выходом в новое пространство. - Мат. заметки, 1981, т.30, вып. 6, с.857-864.

31. Кошманенко В.Д. Классификация сингулярных возмущений самосопряженных операторов. Препринт 82.34. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. 48с.
32. Крейн М.Г. О некоторых новых исследованиях по теории возмущений самосопряженных операторов. - В кн.: Первая летняя математическая школа, I. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964, с.103-187.
33. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984. 368с.
34. Лакс П., Филлипс Р. Теория рассеяния. М.: Мир, 1971. 312с.
35. Матвеев В.Б. Принцип инвариантности для обобщенных волновых операторов. - Теор. и мат. физика. 1971, т.8, №1, с.49-54.
36. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480с.
37. Павлов Б.С. Модель потенциала нулевого радиуса с внутренней структурой. - Теор. и мат. физика, 1984, т.59, №3, с.345-353.
38. Павлов Б.С., Попов И.Ю. Рассеяние на резонаторах с малым и с точечным отверстием. - Вестник ЛГУ, 1984, №13, с.116-118.
39. Павлов Б.С., Фаддеев М.Д. О рассеянии на полом резонаторе с малым отверстием. - Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1983, т.126, с.159-169.
40. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир, 1977, т.1. 360с.
41. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир, 1978, т.2. 395с.
42. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир, 1982, т.3. 443с.

43. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. М.: Мир, 1982, т.4. 428с.
44. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 529с.
45. Сахнович Л.А. Принцип инвариантности для обобщенных волновых операторов. - Функц. анализ и его прил., 1971, т.5, №1, с.61-68.
46. Саяпова М.Р., Яфаев Д.Р. Теория рассеяния для периодических по времени потенциалов нулевого радиуса. - В кн.: Проблемы математической физики. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981, вып. 10, с.252-266.
47. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 335с.
48. Фрагела А. О возмущении полигармонического оператора потенциалами с малыми носителями. - ДАН СССР, 1979, т.245, №1, с.272-274.
49. Хепп К. Теория перенормировок. М.: Наука, 1974. 256с.
50. Яфаев Д.Р. Замечания о спектральной теории для оператора Шредингера многочастичного типа. - Зап. научн. семин. ЛОМИ, 1984, т.133, с.277-298.
51. Baumgartel H., Wollenberg M. Mathematical scattering theory. Berlin: Acad.-Verl., 1983. 449 p.
52. Chandler C., Gibson A.G. Invariance principle for scattering with long-range (and other) potentials. - Indiana Univ. Math. J., 1976, v.25, p. 443-460.
53. Cook J.M. Convergence to the Möller wave

- matrix. - *J. Math. Phys.*, v. 36, p. 82 - 87.
54. Klörmann L. The existence of the wave operators in scattering theory. - *Math. Z.*, 1976, v. 146, p. 69-91.
 55. Kato J. Perturbation of continuous spectra by trace class operators. - *Proc. Japan Acad.*, 1957, v. 33, p. 260-264.
 56. Kato J. Wave operators and unitary equivalence. - *Pacif. J. Math.*, 1965, v. 15, p. 171-180.
 57. Kato J. Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators. - *Math. Ann.*, 1966, v. 162, p. 258-279.
 58. Kato J. Smooth operators and commutators. - *Studia Math.*, 1968, v. 31, p. 535-546.
 59. Kato J. On the Cook-Kuroda criterion in scattering theory. - *Comm. Math. Phys.*, 1979, v. 67, p. 85-90.
 60. Koshmanenko V. D., Neidhart H., Wollenberg M. Singular perturbation and method of orthogonal extension. Preprint P-Math-14/83. Berlin: Institut für mathematik, 1983. 30p.
 61. Lavine R. Commutators and scattering theory. II. A class of one body problems. - *Indiana Univ. Math. J.*, 1972, v. 21, p. 643-656.
 62. Oberman P., Wollenberg M. Abel wave operators. II. - *J. Funct. Anal.*, 1978, v. 30, p. 48-59.
 63. Pearson D. B. A generalization of the Birman trace theorem. - *J. Funct. Anal.*, 1978,

- v. 28, p. 182-186.
64. Rozenblum M. Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence. - *Pacif. J. Math.*, 1957, v. 7, p. 997-1010.
 65. Schechter M. A new criterion for scattering theory. - *Duke Math. J.*, 1977, v. 44, p. 863-872.
 66. Schechter M. The invariance principle. - *Comment. Math. Helv.*, 1979, v. 54, p. 111-125.
 67. Simon B. Scattering theory and quadratic forms: On a theorem of Schechter. - *Comm. Math. Phys.*, 1977, v. 53, p. 151-153.
 68. Simon B. A canonical decomposition for quadratic forms with applications to monotone convergence theorems. - *J. of Funct. Analysis*, 1978, v. 28, p. 377-385.
 69. Swendsen E. S. The effect of submanifolds upon essential self-adjointness and deficiency indices. - *J. of Math. An. and Appl.*, 1981, v. 80, p. 551-565.
 70. Tayaoshi T. Wave operators in the scattering problem related to nonfinite obstacles. - *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 1980, v. 16, p. 627-634.
 71. Wollenberg M. Wave algebras and scattering theory. I. Report R-07/79. Berlin: Zentralinstitut für Mathematic und Mechanic, 1979. 91p.
 72. Wollenberg M. Wave algebras and scattering theory. II. Report R-10/79. Berlin:

Zentralinstitut für Mathematic und
Mechanic, 1979. 91 p.

73. Yafaev D. R. Scattering theory for time-
dependent zero-range potentials. - Ann.
Inst. H. Poincaré, Sect. A, 1984, v. 40.
p. 343-359.
74. Yafaev D. R. On the proof Enss of asym-
ptotic completeness in potentials scatte-
ring theory. LOMI Preprint E-2-79.
Leningrad: LOMI, 1979. 20 p.