АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи
УДК 517.944

Фурсевич Людмила Викторовна

НЕЛИНЕЙНЫЕ И НЕОДНОРОДНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФУЗИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАТУХАЮЩЕЙ ПАМЯТЬЮ

01.01.02 - дифференциальные уравнения
и математическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель -
кандидат технических наук,
старший научный сотрудник
Галицын Анатолий Степанович

Киев - 1987

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА I. Уравнение переноса тепла в средах с памятью и некоторые свойства его решений 20

§ I. Интегро-дифференциальное уравнение переноса в средах с тепловой памятью..... 20

§ 2. Преобразование Лапласа и сведение задач к эллиптическим 28

§ 3. Фундаментальное решение оператора $\mathfrak{M}$ и некоторые его свойства 35

§ 4. Распространение температурных волн в средах с тепловой памятью 46

ГЛАВА 2. Операторные уравнения, отвечающие неоднородным и нелинейным задачам с нестационарными граничными условиями 54

§ 5. Операторная формулировка неоднородных начально-граничных задач..... 54

§ 6. Спектральные свойства операторов A_1 и A_2 и аппроксимационные свойства их собственных функций 62

§ 7. Одномерные собственные функции оператора A_2 и формулы разложения 76

§ 8. Собственные функции для некоторых типов областей 85

ГЛАВА 3. Решения операторных уравнений теплопроводности сред с памятью 9I

§ 9. Линейные неоднородные задачи 9I

§ IO. Локальная и глобальная по времени разрешимость нелинейных неоднородных задач 98

§ II. Приближенные методы интегрирования нелинейных операторных уравнений теплопроводности сред с памятью I02
ЛИТЕРАТУРА I09

Введение

В настоящее время имеются экспериментальные доказательства того, что классическое линейное уравнение теплопроводности

$$Tu \equiv c_v \frac{\partial u}{\partial t} - k \nabla^2 u = f_0 \qquad (c_v, k = const > 0) \quad , \qquad (I)$$

в основу которого положены гипотезы о линейной зависимости внутренней энергии тела от температуры и вектора теплового потока от градиента температуры, является весьма приближенной моделью, границы применимости которой определяются лишь достаточно устойчивыми полями с умеренными градиентами. В более сложных ситуациях, когда необходимо учитывать большие внешние воздействия, быстротечность процессов или тепловую историю материала, уравнение (I) оказывается непригодным для адекватного их описания. Это, например, имеет место при исследованиях эволюции тепловых возмущений в плазме, в жидком гелии-П , в некоторых диэлектриках и полимерах при низких температурах [I] . Поэтому математическое исследование новых, естественно,более сложных, чем (I), уравнений переноса тепла в средах со специальным поведением их физических свойств, является задачей весьма актуальной как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

Для исследования тепловых процессов, протекающих с конечной скоростью передачи возмущений, получило распространение гиперболическое уравнение теплопроводности, лежащее в основе обобщенной термомеханики [2] .

Другой важный класс процессов (режимы с обострением) обстоятельно исследован в вышедшей в 1987 г. коллективной монографии [28] на основе квазилинейных уравнений теплопроводности, в

которых коэффициент теплопроводности и источник тепла являются степенными функциями температуры: $k(u)=u^m$, $f_0(u)=u^\sigma$.

Внимание к исследованию процессов в средах с памятью уделяется все возрастающее внимание в связи с многочисленными применениями в технике и слабой изученностью. Памятью обладают многие реологические вязко-пластические среды, такие, как металлы, пластики, суспензии и др., где наследственность (или память) проявляются через физические и термодинамические характеристики.

Основные результаты по обоснованию теории теплопроводности в средах, для которых эффекты памяти весьма существенны, начали публиковаться в зарубежной периодической литературе в 60-х годах и связаны с именами Трусделла, Коулмена, Нолла, Дэйя, Гуртина, Нунзиато и др. [I,3-II] . В нашей стране внимание на данный класс процессов было обращено, по-видимому, только после выхода в 1974 г. обзорной статьи А.В.Лыкова [75] и монографии У.Дэйя [II] . За истекшее после этого время появилось весьма небольшое число работ чисто прикладного характера [I2,I3,I7,I8,73-76]. Список математических работ по этой теме еще короче [I3,68-7I,77]

Один из возможных путей получения уравнения теплопроводности, учитывающего эффекты памяти, описан в главе I настоящей работы. Рассмотрим фундаментальное уравнение сохранения энергии

$$\frac{de}{dt} + \operatorname{div}\vec{q} = f_0 \quad , \tag{2}$$

где e - массовая плотность энергии, $\vec{q}$ - поток тепловой энергии, f_0 - локальные источники энергии. Конкретным заданием законов $\vec{q} = q(\vec{g})$ и $e = e(u)$, где $\vec{g} = \operatorname{grad} u$, из (2) можно вывести требующееся уравнение, если потребовать выполнения неравенства Клаузиса-Дюгема

$$\frac{\partial s}{\partial t} \geqslant \frac{f_0}{u} - \operatorname{div}\left(\frac{1}{u}\vec{q}\right) \tag{3}$$

(s - энтропия системы), которое имеет место только для физи-

чески реальных процессов. Для конкретизации $q(\vec{g})$ и $e(u)$ вводится история до момента $t=t$ температуры $u^t(\tau)=u(x,t-\tau)$ и градиента температуры $\vec{g}^t(\tau)=\mathrm{grad}\,u(x,t-\tau)$. Упорядоченная пара таких функций $\Lambda^t(\tau)\equiv\{u^t(\tau),\vec{g}^t(\tau)\}$ называется тепловой историей точки x тела до текущего момента времени $t=t$; $0\le\tau\le t$. Тогда температурное поле в веществе, обладающем памятью, можно описать в общем виде с помощью нелинейных функционалов от истории $\Lambda^t(\tau)$:

$$e=\mathcal{E}(\Lambda^t)\ ,\quad s=\mathcal{S}(\Lambda^t)\ ,\quad \vec{q}=\mathcal{Q}(\Lambda^t)\ . \qquad (4)$$

Предполагая изотропность материала, непрерывность и достаточную гладкость функционалов $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Q}$, а также малость отклонения энергетического состояния тела от равновесного (от равновесной термической истории $\Lambda_0=\{u_0,\vec{0}\}$), эти функционалы можно аппроксимировать более простыми за счет разложения (4) в окрестности Λ_0 в обобщенные ряды Тейлора. Ограничившись в них первыми двумя членами, получим линейные и ограниченные функционалы, которые, согласно теореме Рисса [14], могут быть представлены как скалярные произведения в некотором гильбертовом пространстве H_p. Используя затем ряд теорем неравновесной термодинамики и неравенство Клаузиса-Дюгема (3), после соответствующих вычислений получаем линеаризированные определяющие уравнения

$$\vec{q}(x,t)=-\lambda(0)\vec{g}(x,t)-\int_0^\infty\dot{\lambda}(\tau)\vec{g}(x,t-\tau)\,d\tau,$$
$$e(x,t)=e_0+\varepsilon(0)u+\int_0^\infty\dot{\varepsilon}(\tau)u(x,t-\tau)\,d\tau \qquad (5)$$

для теплового потока и внутренней энергии в среде с тепловой памятью. Введенные здесь функции $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$ называются ядрами релаксации теплового потока и энергии соответственно.

Внеся (5) в уравнение (2), получим интегро-дифференциальное уравнение

$$\mathcal{M}u \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda_0 \nabla^2 u + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 u = f_0 \quad , \tag{6}$$

При $\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} = 0$ из него следует классическое уравнение (I). Относительно $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$ предполагается монотонность на $[0, \infty)$ и достаточная гладкость, причем $\lambda_\infty = \lambda(\infty) = k$, $\varepsilon_\infty = \varepsilon(\infty) = c_v$, $\varepsilon(\infty) \geq \varepsilon(0)$.

В § 2 показано, что применением по t преобразования Лапласа уравнение (6) приводится к эллиптическому уравнению

$$-[\hat{\lambda}(p) + \lambda_0] \nabla^2 \hat{u}(x;p) + p[\hat{\varepsilon}(p) + \varepsilon_0] \hat{u}(x;p) = \hat{f}_0(x;p) + \varepsilon_\infty u_0(x) \, , \tag{7}$$

где $u_0(x) = u(x, +0)$, p – комплексный параметр преобразования, а знак $\hat{}$ обозначает операцию преобразования соответствующей функции.

В § 3 методом преобразований Фурье и Лапласа строится фундаментальное решение оператора $\mathcal{M}$, которое в изображениях имеет вид

$$\hat{G}(x;p) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E^n} \frac{e^{-i(\xi, x)} \, d\xi}{\mu(p)[|\xi|^2 + \sigma(p)]} \, , \tag{8}$$

где n – размерность пространства, $\mu(p) = p\,\hat{\lambda}(p)$, $\sigma(p) = p\,\hat{\varepsilon}(p)/\hat{\lambda}(p)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. В предположении аналитичности ядер релаксации и их изображаемости по Лапласу изучено асимптотическое поведение фундаментального решения при $t \to 0$ и $t \to \infty$ и установлена его связь с фундаментальным решением оператора T. В частности, если

$$Q(x,t) = \frac{\Theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \, , \tag{9}$$

фундаментальное решение уравнения (I), то для малых t имеет место формула

$$G(x,t) = \Theta(t) \Big\{ Q(x,t) - \varepsilon_1 \Big[\varkappa_1 \int_0^t Q(x,\tau) \, d\tau + (1-\varkappa_1) t \, Q(x,t) \Big] +$$

$$+\varepsilon_1^2\left[\varkappa_1(3\varkappa_1-2)\int_0^t d\tau\int_0^\tau Q(x,\vartheta)\,d\vartheta+\frac{1}{2}(1-\varkappa_1)^2 t^2 Q(x,t)\right]-$$

$$-\varepsilon_2\left[\varkappa_2\int_0^t d\tau\int_0^\tau Q(x,\vartheta)\,d\vartheta+(1-\varkappa_2)\int_0^t \tau Q(x,\tau)\,d\tau\right]+O(t^3)\Big\}\,, \qquad (10)$$

где $\varepsilon_k=\varepsilon^{(k)}(0)$, $\varkappa_k=\lambda_k/\varepsilon_k$. При этом $G(x,0)=Q(x,0)=\delta(x)$, где $\Theta(t)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – дельта-функция.

Установлено также, что при $\lambda(0)=\lambda_0\neq 0$ качественно характер распространения тепла близок к даваемому классическим уравнением, и сохраняется бесконечная скорость передачи возмущений. Однако при $\lambda_0=0$ и $\lambda_1\neq 0$ решение уравнения (6) является финитной функцией, имеет решения вида $\varphi\left(t-\frac{|x|}{v}\right)$, т.е. описывает распространение тепла с конечной скоростью $v=1/\sqrt{\varepsilon_0}$.

В § 4 для рассмотренных выше двух принципиально различных случаев изучается распространение в средах с памятью затухающих температурных волн вида

$$u(x,t)=A\exp\left[-\nu(\vec{x},\vec{m})+i\omega\left(t-\frac{(\vec{x},\vec{m})}{v}\right)\right]\,, \qquad (11)$$

где $v>0$, $A>0$, $\nu\geqslant 0$ и $\omega\in[0,\infty)$ – вещественные константы, $\vec{m}=(m_1,m_2,\ldots,m_n)$ – вектор, задающий направление движения волны, $|\vec{m}|=1$. Показано, что (11) является решением уравнения (6) при $f_0=0$ тогда, и только тогда, когда ядра релаксации удовлетворяют соотношению

$$i\left(\nu+i\frac{\omega}{v}\right)^2\hat{\lambda}(\omega)=\omega\hat{\varepsilon}(\omega)\,, \qquad (12)$$

где $\hat{\lambda}$ и $\hat{\varepsilon}$ – односторонние преобразования Фурье $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$

$$\hat{\lambda}(\omega)=\int_0^\infty \lambda(t)e^{-i\omega t}dt\,,\quad \hat{\varepsilon}(\omega)=\int_0^\infty \varepsilon(t)e^{-i\omega t}dt\,.$$

В зависимости от частоты ω в явном виде получены выражения для скорости волн и коэффициента затухания, и установлены связи

с соответствующими величинами для случая классического уравнения теплопроводности.

Доказано, что при $\lambda_0 \neq 0$ для низких частот $(\omega \to 0)$ волны (II) ее скорость $V(\omega)$ и коэффициент затухания $\nu(\omega)$ могут быть идентифицированы со значениями, даваемыми классической теорией. Однако для высоких частот $(\omega \to \infty)$ $V(\omega)$ и $\nu(\omega)$, являясь вещественными функциями от ω, неограниченно растут с ростом ω, причем скорость волны при прочих равных условиях является либо большей (при $\lambda_0/\varepsilon_0 > k/c_v$), либо меньшей (при $\lambda_0/\varepsilon_0 < k/c_v$), чем значения скорости, следующие из классической теории.

При $\lambda_0 = 0$ для $\omega \to 0$ получается результат, аналогичный предыдущему случаю, однако для $\omega \to \infty$ скорость и коэффициент затухания волны (II) вещественны и не зависят от ω (остаются конечными при сколь угодно больших ω), а амплитуда монотонно убывает к нулю при $t \to \infty$:

$$A(t) \sim \Theta_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right)t\right\} .$$

Глава 2 посвящена операторной формулировке неоднородных и нелинейных задач для интегро-дифференциального уравнения (6) при $f_0 = f_0(x,t,u)$ с граничными условиями специального вида:

$$\mathcal{R}_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{\nu}\cdot\nabla u) + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{\lambda} * (\vec{\nu}\cdot\nabla u) = f_1(s,t,u) \quad , s \in \Gamma_1 ; \qquad (I3)$$
$$(\vec{\nu}\cdot\nabla u) = 0 \quad , s \in \Gamma_2$$

и

$$\mathcal{R}_2 u \equiv -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nu}\cdot\nabla u) + u - \dot{\varepsilon} * \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nu}\cdot\nabla u) + \dot{\lambda} * u = f_1(s,t,u), \; s \in \Gamma_1 ;$$
$$u = 0 \quad , s \in \Gamma_2 , \qquad (I4)$$

где $\Omega \in E^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, $\vec{\nu}$ – внешняя нормаль к Γ, а

функции f_κ $(\kappa = 0,1)$, определены и измеримы при любых u.

В § 5 вводится вещественное гильбертово пространство $L^2(\bar{\Omega})$, являющееся ортогональной суммой пространств $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, т.е. $L^2(\bar{\Omega}) = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma)$, со скалярным произведением $(\!(\bar{u}, \bar{v})\!) = (u_0, v_0)_\Omega + \langle u_1, v_1 \rangle_\Gamma$ и нормой $\|\bar{u}\| = (\!(\bar{u}, \bar{u})\!)^{1/2}$. Элементами этого пространства являются упорядоченные пары $\bar{u} = [u_0(x), u_1(s)]$, где $u_0 \in L_2(\Omega)$, $u_1 \in L_2(\Gamma)$. Затем вводятся самосопряженные расширения A_1 и A_2 операторов, порожденных вспомогательными регулярными эллиптическими задачами

$$\mathcal{E}u = f_0 \quad , \quad x \in \Omega \, ;$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_1(s) \quad , \; s \in \Gamma_1 \, ; \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad , \; s \in \Gamma_2 \, , \tag{I5}$$

и

$$\mathcal{E}u = f_0 \quad , \quad x \in \Omega \, ;$$
$$u = f_1(s) \quad , \; s \in \Gamma_1 \, ; \qquad u = 0 \quad , \; s \in \Gamma_2 \tag{I6}$$

где $f_0 \in L_2(\Omega)$, $f_1 \in L_2(\Gamma)$. Действие оператора A_1 задается формулой

$$A_1 \bar{u} = \left[\mathcal{E}u(x) \, , \; \partial u(s)/\partial \nu \right] \, . \tag{I7}$$

Определенный таким образом оператор является симметрическим и положительно определенным (в смысле скалярного произведения в $L^2(\bar{\Omega})$), а его область определения $D(A_1) = \left\{ \varphi(x) : \varphi(x) \in C^2(\Omega), \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_2} = 0 \right\}$ плотна в $L^2(\bar{\Omega})$. Поэтому задача (I5) в $L^2(\bar{\Omega})$ соответствует операторному уравнению

$$A_1 \bar{u} = \bar{f} \quad , \tag{I8}$$

где $\bar{f} = [f_0(x), f_1(s)]$, а нестационарная нелинейная задача (6), (I3) при $a_{i\kappa} = \delta_{i\kappa}$ – операторной задаче Коши

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A_1 \bar{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}}{dt} + \dot{\lambda} * A_1 \bar{u} = \bar{f} \quad , \; \bar{u}(0) = \bar{u}_0 \, , \tag{I9}$$

где $\bar{f} = \bar{f}(t,\bar{u}) = [f_0(x,t,u), f_1(x,t,u)]$, $\bar{u}_0 = [u_0(x), u_0(s)]$.

Необходимо отметить, что аналогичный прием сведения краевой задачи для обычного уравнения теплопроводности с нестационарными граничными условиями к операторному уравнению в $L^2(\bar{\Omega})$ использовался в работе [38] и докторской диссертации В.В.Барковского [35] .

С эллиптической задачей (I6) связывается линейный оператор A_2 , действующий по закону

$$\left[u(x), -\frac{\partial u(s)}{\partial \nu}\right] \to \left[\mathcal{E}u(x), \quad u(s)\right] \quad . \tag{20}$$

Он вводится так, чтобы симметризовать формулу Грина, и, следовательно, является симметричным оператором в смысле скалярного произведения в $L^2(\bar{\Omega})$. Новым по сравнению с предыдущим случаем является то, что он оказывается полуограниченным снизу с отрицательной нижней гранью.

С помощью этого оператора задача (I6) сводится к операторному уравнению в $L^2(\bar{\Omega})$

$$A_2\bar{u} = \bar{f} \quad , \tag{2I}$$

а нелинейная задача (6), (I4) - к операторной задаче Коши

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A_2\bar{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}}{dt} + \dot{a} * A_2\bar{u} = \bar{f} \quad , \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0 \quad , \tag{22}$$

где $\bar{f} = [f_0(x,t,u), f_1(s,t,u)]$, $\bar{u}_0 = [u_0(x), u_0(s)]$.

В § 6 исследуются некоторые спектральные свойства введенных операторов и аппроксимационные свойства их собственных функций.

Существенной особенностью краевых задач на собственные значения, отвечающих операторным уравнениям $A_\kappa\bar{\varphi} = \beta\bar{\varphi}$ в $L^2(\bar{\Omega})$ является вхождение спектрального параметра как в уравнение, так и в граничные условия. Они относятся к классу общих эллиптических задач с параметром вида

$$\mathcal{E}\varphi = \beta\varphi \quad , \quad x \in \bar{\Omega} \; ;$$
$$Q_j\varphi = 0 \; , \; s \in \Gamma \; , \; j = \overline{1, \ell-1} \; ; \; C_j\varphi = \beta B_j\varphi \; , \; s \in \Gamma \; , \; j = \overline{\ell, p} \; . \tag{23}$$

Случай оператора A_1 отвечает задаче (23), если порядки C_j больше порядков B_j . Он обстоятельно теоретически исследован в работах Д.Уднова [31] , С.Агмона [32] , Д.Эрколано и М.Шехтера [33] ,М.С.Аграновича и М.И.Вишика [39] , А.Н.Комаренко, И.А.Луковского и С.Ф. Фещенко [46,48] , Н.К.Аскерова, С.Г.Крейна и Г.М. Лаптева [47] и другими математиками. Обзор работ на эту тему содержится в [55] .

Если же порядка B_j больше порядков C_j (случай оператора A_2), то здесь имеется значительно меньшее число результатов (Л.А.Котко и С.Г.Крейн [44] , А.Н.Кожевников [42,43] , М.С.Агранович [49] и др.).

Спектр оператора A_1 состоит из счетной последовательности $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственных значений конечной кратности с точкой сгущения на бесконечности, а соответствующие им собственные функции $\{\bar{\varphi}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\bar{\varphi}_n = [\varphi_n(x), \varphi_n(s)]$, образуют ортонормированный базис $\{\bar{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\bar{e}_n = \bar{\varphi}_n / \|\bar{\varphi}_n\|$, пространства $L^2(\bar{\Omega})$. Поэтому имеет место представление произвольной функции $\bar{f} \in L^2(\bar{\Omega})$ обобщенным рядом Фурье

$$\bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \bar{e}_n(x) \quad , \qquad f_n = \frac{(\!(\bar{f}, \bar{\varphi}_n)\!)}{\omega_n^2} \quad , \tag{24}$$

сходящимся в норме этого пространства. Здесь же дается спектральное представление оператора A_1 и его дробных степеней A_1^{γ} , которые в дальнейшем используются для доказательства разрешимости нелинейных уравнений. Показано, что если $f(x) \in W_2^{(p)}(\Omega)$ при определенной гладкости границы, то ее ряд Фурье сходится в норме $W_2^{(p)}(\Omega)$, и для его коэффициентов имеет место оценка

$$|f_n| < c\,\frac{\beta^{-p+1/2}}{\omega_n^2} \qquad (25)$$

где β_n – собственное значение оператора A_1, $\omega_n = \|\bar{\varphi}_n\|$. При $p \geqslant [m/2]+1$ этот ряд сходится в $C^{p-[m/2]-1}$.

В случае оператора A_2 задача определения собственных значений сведена к исследованию операторного пучка с вполне непрерывными операторами. Как и в [42,43] показано, что спектр здесь вещественный, дискретный и состоит, в отличие от предыдущего случая, из двух счетных серий собственных значений: положительных $\{\beta_m^\infty\}_{m=1}^\infty$ с точкой сгущения на бесконечности, и отрицательных $\{\beta_\kappa^0\}_{\kappa=1}^\infty$ с точкой сгущения в нуле. Показано, что для минимальных положительного и отрицательного собственных значений имеют место неравенства

$$\beta_1^\infty \geqslant \frac{\langle\varphi,\varphi\rangle}{\langle P_1\varphi,\varphi\rangle}\,, \qquad \beta_1^0 \geqslant -\frac{\langle Q\varphi,\varphi\rangle}{\langle\varphi,\varphi\rangle}\,, \qquad (26)$$

где P_1 и Q –некоторые вполне непрерывные операторы на Γ_1. Из этих неравенств, в частности, следует, что асимптотика β_m^∞ определяется оператором P_1, а асимптотика β_κ^0 – оператором Q. Раздельная асимптотика этих серий в явном виде для $\mathcal{E}=-\nabla^2$ получена А.Н.Кожевниковым с помощью аппарата псевдодифференциальных уравнений [43].

В § 7 показано, что в одномерном случае число отрицательных собственных значений оператора A_2 не превышает двух. В этом случае обратный оператор A_2^{-1} – ограниченный, и для произвольной функции $\bar{f} \in L^2[0,1]$ имеет место разложение вида

$$\bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \bar{e}_n\,, \qquad f_n = \frac{\langle\!\langle \bar{f}, \bar{\varphi}_n\rangle\!\rangle}{\omega_n^2}\,, \qquad (27)$$

сходящееся в метрике этого пространства. Для большего числа измерений области Ω этот вопрос остается открытым.

В этом же параграфе до конца (с указанием формул разложения, трансцедентных уравнений для вычисления собственных значений и явного вида одномерных собственных функций оператора A_2) разобран вопрос о разложении; эти результаты представлены в табл. I–3. Получена асимптотика положительных собственных значений двухточечных задач с параметрами при производных в точках $x=0$ и $x=1$, определяемых как решения трансцендентного уравнения

$$2\gamma^3\cos\gamma = (\gamma^6-1)\sin\gamma \quad . \tag{28}$$

Асимптотическая формула имеет вид

$$\gamma_n^* \sim (n-1)\pi - \frac{(n-1)\pi}{6} + \left(\frac{(n-1)^2\pi^2}{36} + \frac{2}{3(n-1)^2\pi^2}\right)^{1/2} + \dots \quad . \tag{29}$$

Результаты прямого решения уравнения (28) и вычислений по (29) практически совпадают не только для больших n , но и для начальных номеров (табл. 5). Установлено, что γ_n уже при $n \geq 4$ располагаются почти через π ($\gamma_4 - \gamma_3 \approx 3{,}135\ 947\ 842$, $|\pi - |\gamma_8 - \gamma_7|| \approx 1{,}1 \cdot 10^{-5}$).

В § 8 представлены собственные функции операторов A_1 и A_2 для $\mathcal{E} = -\nabla^2$ и областей в цилиндрической и сферической системах координат. Они могут быть непосредственно использованы не только при решении уравнений теплопроводности сред с памятью, но и для приближенного решения упомянутых выше задач проекционными методами в качестве ортонормированных базисов пространств H_1 или H_2.

В главе 3 исследуются решения операторных уравнений теплопроводности сред с памятью, условия существования и единственности решений при малых значениях времени и на всем интервале, приводятся конструктивные приближенные алгоритмы решения, исполь-

зующие собственные функции операторов A_1 и A_2 .

В § построены решения линейных операторных уравнений (I8) и (2I) в виде рядов Фурье типа

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{-1} f_n \bar{e}_n \quad , \qquad f_n = (\!(\bar{f}, \bar{e}_n)\!) \quad , \tag{30}$$

где β_n и e_n – собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора A_1 (или оператора A_2). Эти ряды для функции $u(x)$ сходятся в метрике $L_2(\Omega)$ внутри Ω , а $u(s)$ – в метрике $L_2(\Gamma)$. Применительно к эволюционным задачам (I9) и (22) с линейными функционалами $\bar{f}(t)$ получено, что их решения можно найти в виде рядов

$$\bar{u}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\, \bar{e}_n(x) \quad , \tag{3I}$$

где функции $u_n(t)$ определяются из задачи Коши для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{du_n}{dt} + \beta_n u_n + \dot{\varepsilon} * \frac{du_n}{dt} + \beta_n (\dot{\lambda} * u_n) = f_n \quad , \quad u_n(0) = \overset{\circ}{u}_n \quad , \tag{32}$$

где $f_n(t) = (\!(\bar{f}, \bar{e}_n)\!)$, $\overset{\circ}{u}_n = (\!(\bar{u}_0, \bar{e}_n)\!)$. Тогда, если ядра релаксации $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$ удовлетворяют условиям изображаемости по Лапласу, для трансформант

$$\hat{u}_n(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u_n(t)\, dt$$

из (32) получается, что

$$\hat{u}_n(p) = \frac{\hat{f}_n + \varepsilon_\infty \overset{\circ}{u}_n}{p[1 + \hat{\varepsilon}'(p)] + \beta_n [1 + \hat{\lambda}'(p)]} \quad , \tag{33}$$

где $\hat{f}_n = \mathcal{L}[f_n(t)]$, $\hat{\varepsilon}' = \mathcal{L}[\dot{\varepsilon}(t)]$, $\hat{\lambda}' = \mathcal{L}[\dot{\lambda}(t)]$, и, таким образом, исходная задача сведена в линейном случае к определению оригинала выражения (33).

На примерах двух одномерных тестовых задач (стационарной и нестационарной), которые имеют точные аналитические решения, показано, что примененный подход оказывается весьма эффективным, так как позволяет получать практическую сходимость при удержании

небольшого числа первых членов в рядах (30) и (31) во всех точках интервала $[0,1]$ (табл. 6 и 7).

В § 10 с использованием некоторых результатов работ [38,61, 62] получены теоремы о разрешимости нелинейной операторной задачи Коши (19), отвечающей краевой задаче (6), (13) со слабо нелинейными правыми частями. Достаточные условия разрешимости в терминах исходной задачи сформулированы следующим образом.

Теорема 1 (о локальной разрешимости). Пусть ядра релаксации $\varepsilon(t)$ и $\lambda(t)$ аналитичны и

$$\varepsilon(0)>0,\ \dot{\varepsilon}(0)\geq 0,\ \varepsilon(\infty)\geq\varepsilon(0),\ \lambda(0)>0,\ \dot{\lambda}(0)\geq 0.$$

Тогда, если

1). $u_0(x)\in C^2(\Omega)$ и $(\vec{\nu}\cdot\nabla u_0)=0$ на Γ_2;

2). $f_j(x,t,u)$ $(j=0,1)$ имеют непрерывные первые производные по u и t;

3). $|f_j(x,t,u)|^2\leq|f_j(x,t,0)|^2+c_1(1+|u|^{n+2})$, где

$c_1=\mathrm{const}>0$ и $n\geq 1$,

то задача (6), (13) однозначно разрешима при $t\in[0,t_0]$, причем $u\in W_2^{3/2}(\Omega)$.

Теорема 2 (о глобальной разрешимости). Если ядра релаксации удовлетворяют условиям теоремы 1 и, кроме того,

1). $u_0(x)\in C^3(\Omega)$, $(\vec{\nu}\cdot\nabla u_0)=0$ при $s\in\Gamma_2$;

2). $f_j(x,t,u)$ имеют непрерывные первые производные по x,t и u, а $\partial f_j/\partial u$ равномерно ограничены по x и t;

3). $|f_j(x,t,u)|^2\leq|f_j(x,t,0)|^2+c_2(1+|u|^{2+n})$,

то решение задачи (6), (13) существует и единственно на произвольном интервале времени, причем $u\in W_2^{3/2+\nu}(\Omega)$.

§ II содержит описание методов приближенного интегрирования нелинейных задач типа (I9), использующих собственные функции спектральных задач с параметром в уравнении и в граничных условиях. Предполагается, что они каким-либо методом найдены. Первый метод состоит в том, что решение уравнения (I9) ищется в виде (3I), где коэффициенты $u_n(t)$ определяются из обыкновенного интегро-дифференциального уравнения с нелинейной правой частью

$$\frac{du_n}{dt}+\beta_n u_n+\dot{\varepsilon}*\frac{du_n}{dt}+\beta_n(\dot{\lambda}*u_n)=f_n(t,u_n)\,,\quad u_n(0)=\mathring{u}_n\,, \tag{34}$$

где $\mathring{u}_n=(\!(\bar{u}_0,\bar{e}_n)\!)$, $f_n=(\!(\bar{f}(t,\bar{u}),\bar{e}_n)\!)$; $\beta_n,\bar{e}_n$ – собственные значения и собственные функции оператора A_1 . Уравнение (34) эффективно решается итерационным методом по следующей схеме

$$u_n^0(t)=\mathring{u}_n e^{-\beta_n t}+\int_0^t e^{-\beta_n(t-t')}f_n(t',0)\,dt'\,, \tag{35}$$

$$\frac{du_n^s}{dt}+\beta_n u_n^s+\dot{\varepsilon}*\frac{du_n^{s-1}}{dt}+\beta_n(\dot{\lambda}*u_n^{s-1})=f_n(t,u_n^{s-1})\,,$$

где $n=1,2,\ldots$, $s=1,2,\ldots$.

Далее, если B – некоторый линейный оператор в $L^2(\bar{\Omega})$, причем $D(B)\supseteq D(A_1)$, а $\bar{\varphi}_n$, $n=\overline{1,N}$ – первые N собственных функций оператора A_1 и $\bar{\varphi}_n\in D(B)$, то общий проекционно-итерационный алгоритм решения уравнения (I9) строится следующим образом. Решение ищется в виде линейной оболочки

$$\bar{u}_N(t)=\sum_{n=1}^{N}a_n(t)\,\bar{\varphi}_n(x)\,, \tag{36}$$

неизвестные компоненты $a_n(t)$ которой определяются из системы уравнений

$$(\!(\frac{d\bar{u}_N}{dt}+A_1\bar{u}_N+\dot{\varepsilon}*\frac{d\bar{u}_N}{dt}+\dot{\lambda}*A_1\bar{u}_N\,,B\varphi_m)\!)=(\!(\bar{f},B\varphi_m)\!)\,,\ m=\overline{1,N}\,, \tag{37}$$

представимой в виде

$$\frac{dA}{dt}+KA+\dot{\varepsilon}*\frac{dA}{dt}+K(\dot{\lambda}*A)=H^{-1}F(t,A)\ ,\ A(0)=H^{-1}A_0\ . \qquad (38)$$

Здесь A – вектор-столбец искомых коэффициентов a_n, $n=\overline{1,N}$, K – вектор-столбец собственных значений, F – вектор-столбец нелинейных членов, H – известная матрица размерности $N\times N$. Уравнение (38) решается методом последовательных приближений по схеме

$$\frac{dA^0}{dt}+KA^0=H^{-1}F(t,0)\ ,\ A^0(0)=H^{-1}A_0\ ;$$
$$\frac{dA^s}{dt}+KA^s+\dot{\varepsilon}*\frac{dA^{s-1}}{dt}+K(\dot{\lambda}*A^{s-1})=H^{-1}F(t,A^{s-1})\ . \qquad (39)$$

Алгоритм (37) сведения задачи (I9) к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве частных случаев включает обобщенные методы Бубнова–Галеркина (при $B=I$), моментов (когда оператор A_1 является B-положительно определенным [63,64]) и наименьших квадратов (при $B=A_1$).

В линейном случае система (38) решается методом преобразования Лапласа, что позволяет не только определить коэффициенты в (36), но и получить их асимптотику при $t\to\infty$.

Если в исходной нелинейной краевой задаче (6), (I3) удается выделить малый параметр ε и свести ее в $L^2(\bar{\Omega})$ к виду

$$\frac{d\bar{u}}{dt}+A_1\bar{u}+\dot{\varepsilon}*\frac{d\bar{u}}{dt}+\dot{\lambda}*A_1\bar{u}=\bar{g}(t)+\varepsilon\bar{f}(t,\bar{u},\varepsilon)\ ,\ \bar{u}(0)=\bar{\theta}\ , \qquad (40)$$

то, представляя решение в виде ряда по степеням ε

$$\bar{u}(t)=\bar{u}_0(t)+\varepsilon\bar{u}_1(t)+\varepsilon^2\bar{u}_2(t)+\dots\ ,$$

из (40) получается рекуррентная последовательность линейных краевых задач

$$\frac{d\bar{u}_0}{dt}+A_1\bar{u}_0+\dot{\varepsilon}*\frac{d\bar{u}_0}{dt}+\dot{\lambda}*A_1\bar{u}_0=\bar{g}(t)\ ,\ \bar{u}_0(0)=\bar{\theta}\ ;$$
$$\frac{d\bar{u}_m}{dt}+A_1\bar{u}_m+\dot{\varepsilon}*\frac{d\bar{u}_m}{dt}+\dot{\lambda}*A_1\bar{u}_m=m\Gamma(m+1)\left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial\varepsilon^{m-1}}\bar{f}\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\bar{u}_j,\varepsilon\right)\right]_{\varepsilon=0}\ , \qquad (4I)$$
$$\bar{u}_m(0)=0\ .$$

Она легко разрешается проекционными методами в сочетании с преобразованием Лапласа при использовании в качестве координатных собственных функций оператора A_1 .

Основные результаты работы опубликованы в [68-71] .

Глава I. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В СРЕДАХ С ПАМЯТЬЮ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЕГО РЕШЕНИЙ

§ I. Интегро-дифференциальное уравнение переноса в средах с тепловой памятью

В основе классического уравнения теплопроводности параболического типа

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + \rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = f_0(x,t) , \qquad (I.I)$$

где k, ρ, c_p – известные материальные параметры среды, f_0 – заданная функция, лежит закон Фурье, согласно которому вектор теплового потока $\vec{q}$ является линейной функцией температурного градиента

$$\vec{q} = -k \operatorname{grad} u , \qquad (I.2)$$

а внутренняя энергия e линейно зависит от разности температур

$$e = e_0 + c_v(u - u_0) \qquad (c_v = \rho c_p) , \qquad (I.3)$$

где u_0 – равновесная температура. В то же время известно, что законы (I.2) и (I.3), а с ними и уравнение (I.I), могут служить лишь ограниченной аппроксимацией (для достаточно устойчивых полей) в более общих ситуациях, когда либо условия теплообмена характеризуются экстремальными условиями, либо когда тепловой поток функционально связан с тепловой историей материала. Оказывается, что соотношения (I.2) и (I.3) не адекватно описывают, например, эволюцию тепловых возмущений в жидком гелии II, в некоторых диэлектриках и полимерных материалах при низких температурах [I] .

Вывести в общем случае уравнение теплопроводности, с достаточной точностью описывающее процессы теплопроводности в средах со специальным поведением их физических свойств, можно из уравнения сохранения энергии

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = f_0(x,t) \qquad (I.4)$$

при конкретном задании определяющих уравнений $\vec{q} = \vec{q}(\nabla u)$ и $e = e(u)$. При этом их выбор должен контролироваться фундаментальным неравенством Клаузиса-Дюгема

$$\dot{s} \geqslant \frac{f_0}{u} - \operatorname{div}\left(\frac{1}{u}\vec{q}\right) , \qquad (I.5)$$

где s - энтропия; это неравенство определяет классы "допустимых" теплофизических процессов.

Термодинамически обоснованы уравнения переноса тепла в средах, обладающих тепловой памятью, можно получить строго математически с привлечением методов и фактов нелинейной термодинамики [3-10] . Тепловой памятью в дальнейшем будем называть влияние всей предыстории изменения тепловых величин на состояние материальной среды в текущий момент времени. Следуя [3,4,6], получим линеаризированное уравнение переноса тепла в веществе, обладающем тепловой памятью.

Пусть однородное и изотропное вещество занимает регулярную область Ω пространства E^3 , $x = (x_1, x_2, x_3)$, с неизменяющейся во времени границей Γ , $-\infty < t < +\infty$. Пусть при $\tau \in [0, \infty)$ введена история до момента $t = t$ абсолютной температуры

$$u^t(\tau) = u(x, t-\tau) \qquad (I.6)$$

и история градиента температуры

$$\vec{g}^t(\tau) = \vec{g}(x, t-\tau) = \operatorname{grad} u(x, t-\tau) \qquad (I.7)$$

для произвольного $x \in \Omega$. Упорядоченная пара $\Lambda^t(\tau) \equiv \{u^t(\tau), \vec{g}^t(\tau)\}$ называется термической историей материальной точки x до текущего момента времени $t = t$. Тогда суммарной тепловой историей до текущего момента времени назовем функцию

$$\tilde{\Lambda}^t(\tau) = \int_0^\tau \Lambda^t(\vartheta)\, d\vartheta \,. \tag{I.8}$$

Замечание I.I. Для каждой истории $\Lambda^t(\tau) = \{u^t(\tau), \vec{g}^t(\tau)\}$ можно ввести модифицированную историю $\Lambda^t_\alpha(\tau) = \{u^t(\alpha\tau), \vec{g}^t(\alpha\tau)\}$; при этом для $0 < \alpha < 1$ получается затухающая история, а для $\alpha > 1$ - ускоренная история. Предельные переходы при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \infty$ соответствуют медленным и быстрым процессам соответственно [9,IO] .

Пусть $h(\tau)$ - заданная скалярная функция положительная, непрерывная и монотонно убывающая на интервале $(0, \infty)$, причем $h \to 0$ при $\tau \to \infty$. Норму измеримой функциональной пары $\Lambda^t(\tau) = \{u^t(\tau), \vec{g}^t(\tau)\}$ определим как

$$\| \Lambda^t \| = \left(|\Lambda^t(0)|^2 + \| \Lambda^t_p \|^2 \right)^{1/2} , \tag{I.9}$$

где

$$\| \Lambda^t_p \|^2 = \int_0^\infty h^2(\tau) |\Lambda^t(\tau)|^2 d\tau \,, \quad |\Lambda^t(\tau)|^2 = \Lambda^t(\tau)\Lambda^t(\tau) \,. \tag{I.IO}$$

Таким образом, множество всех пар Λ^t образует гильбертово пространство H , а множество пар Λ^t_p (обозначим его через H_p) является подпространством пространства H . Элементами H_p являются $\Lambda^t_p = \{u^t_p, \vec{g}^t\}$ - прошедшие истории, задающие ограничения на Λ^t в открытом интервале $(0, \infty)$.

Следуя [4] , тепловое поле в Ω можно описать с помощью некоторых нелинейных характеристических функционалов $\mathcal{E}$, S и Q от истории Λ^t , так что внутренняя энергия, энтропия и тепловой поток будут определяться с помощью уравнений

$$e = \mathcal{E}(\Lambda^t) \;,\quad s = \mathcal{S}(\Lambda^t) \;,\quad \vec{q} = \mathcal{Q}(\Lambda^t) \qquad (I.II)$$

соответственно.

Тогда, предполагая непрерывность и достаточную гладкость введенных функционалов, можно взять за их общую область определения подмножество K из H и ввести дифференциальные операторы первого порядка $D_\Lambda = \{D_u, D_g\}$ и $\delta_\Lambda = \{\delta_u, \delta_g\}$, где

$$D_u \mathcal{E}(\Lambda^t) = \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{E}(u_p^t, \vec{g}_p^t; u, \vec{g}) \;,$$

$$D_g \mathcal{E}(\Lambda^t)\cdot\vec{v} = \frac{d}{d\nu} \mathcal{E}(u_p^t, \vec{g}_p^t; u, \vec{g} + \nu\vec{v})\Big|_{\nu=0} \;,$$

$$\delta_u \mathcal{E}(\Lambda^t | \mu_p) = \frac{d}{d\nu} \mathcal{E}(u_p^t + \nu\mu_p, \vec{g}_p^t; u, \vec{g})\Big|_{\nu=0} \;, \qquad (I.I2)$$

$$\delta_g \mathcal{E}(\Lambda^t | \vec{v}_p) = \frac{d}{d\nu} \mathcal{E}(u_p^t, \vec{g}_p^t + \nu\vec{v}_p; u, \vec{g})\Big|_{\nu=0} \;,$$

$$\dot{e} = \frac{d}{dt} \mathcal{E}(\Lambda^t) = D_\Lambda \mathcal{E}(\Lambda^t)\cdot\dot{\Lambda} + \delta_\Lambda \mathcal{E}(\Lambda^t | \dot{\Lambda}_p^t),$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{d}{dt}\Lambda(t), \quad \dot{\Lambda}^t = \frac{d}{dt}\Lambda(t-\tau) = -\frac{d}{d\tau}\Lambda^t(\tau) \;.$$

Далее, поскольку уравнения (I.II) слишком общи для конструктивного получения информации об эволюции поля в среде с памятью, введенные функционалы, учитывая их гладкость, можно аппроксимировать более простыми. С этой целью можно использовать, например, "малость" отклонения процесса от равновесного состояния и предположение об изотропности материала, который, как известно [6], обладает центром симметрии.

Следуя этой идее, аппроксимируем тепловой поток и внутреннюю энергию в (I.II) обобщенным рядом Тейлора в окрестности равновесной термической истории $\Lambda_o = \{u_o, \vec{0}\}$, соответствующей некоторой истории $\Lambda^t \in K$ в момент времени $t = t_o$.

Тогда, принимая, что неравенство

$$\sup_{-\infty < t < t_0} \{ |u - u_0|, |\vec{g}| \} < \varepsilon$$

выполняется для достаточно малого ε, используя гладкость функционалов $\mathcal{E}$ и $\mathcal{Q}$ и дифференциальные операторы (I.I2), можно записать:

$$e = \mathcal{E}(\Lambda^t) = \mathcal{E}(\Lambda_0) + D_u \mathcal{E}(\Lambda_0)(u - u_0) + \delta_u \mathcal{E}(\Lambda_0 | u_P^t - u_0 I_P) + \delta_g \mathcal{E}(\Lambda_0 | \vec{g}_P^t) + O(\varepsilon), \tag{I.I3}$$

$$\vec{q} = \mathcal{Q}(\Lambda^t) = \mathcal{Q}(\Lambda_0) + D_u \mathcal{Q}(\Lambda_0)(u - u_0) + D_g \mathcal{Q}(\Lambda_0)\vec{g} + \delta_u \mathcal{Q}(\Lambda_0 | u_P^t - u_0 I_P) + \delta_g \mathcal{Q}(\Lambda_0 | \vec{g}_P^t) + O(\varepsilon), \tag{I.I4}$$

где I_P – постоянная прошлая история со значением, равным единице. Если пренебречь членами $O(\varepsilon)$, (I.I3) и (I.I4) дают линеаризированное описание процесса.

Из предположения об изотропности среды следует, что [6]

$$\mathcal{Q}(u^t, \vec{0}) = 0, \quad \mathcal{E}(u^t, \vec{g}^t) = \mathcal{E}(u^t, -\vec{g}^t),$$

$$D_u \mathcal{Q}(\Lambda_0) = 0, \quad \delta_u \mathcal{Q}(\Lambda_0 | u_P^t - u_0 I_P) = 0, \quad \delta_g \mathcal{E}(\Lambda_0 | \vec{g}_P^t) = 0,$$

и, кроме того, из уравнений классической термостатики для равновесного характеристического функционала $\mathcal{Q}$ вытекает, что

$$\vec{q}^{\,\infty} = \mathcal{Q}(\Lambda_0) = G(u) \equiv 0 .$$

Следовательно, из выражений (I.I3), (I.I4) вытекает, что в первом приближении

$$e = e_0 + D_u \mathcal{E}(\Lambda_0) u + \delta_u \mathcal{E}(\Lambda_0 | u_P^t), \tag{I.I5}$$

$$\vec{q} = D_g \mathcal{Q}(\Lambda_0)\vec{g} + \delta_g \mathcal{Q}(\Lambda_0 | \vec{g}_P^t), \tag{I.I6}$$

где

$$e_0 = \mathcal{E}(\Lambda_0) - D_u \mathcal{E}(\Lambda_0) u_0 - \delta_u \mathcal{E}(\Lambda_0 | u_0 I_P). \tag{I.I7}$$

Далее, поскольку оператор, осуществляющий отображение $\vec{g}^{\,t}_{P} \to \delta_g Q(\Lambda_0 | \vec{g}^{\,t}_{P})$ является линейным и ограниченным, то по теореме представления Рисса [I4] , он может быть представлен как скалярное произведение в гильбертовом пространстве для любого $\vec{g}^{\,t}_{P} \in H_P$:

$$\delta_g Q(\Lambda_0 | \vec{g}^{\,t}_{P}) = \int_0^\infty h^2(\tau)\, \mathbb{R}(\tau)\, \vec{g}^{\,t}_{P}(\tau)\, d\tau \quad , \qquad (I.I8)$$

где $\mathbb{R}$ – однозначно определенная тензорозначная функция от $\tau \in (0,\infty)$ с компонентами в H_P . Пусть $\mathbb{K}(\tau)$ – единственное решение задачи

$$\frac{d}{d\tau}\mathbb{K}(\tau) = -\mathbb{R}(\tau) h^2(\tau) \quad , \quad \mathbb{K}(0) = -D_g Q(\Lambda_0) \quad , \qquad (I.I9)$$

причем, ввиду изотропности материала, $\mathbb{K}(\tau)$ должна быть изотропным тензором

$$\mathbb{K}(\tau) = \lambda(\tau)\, \dot{\mathbb{I}} \quad . \qquad (I.20)$$

Тогда, последовательно используя (I.20), (I.I9) и (I.I8) в (I.I6), приходим к линеаризированному определяющему уравнению для теплового потока

$$\vec{q}(x,t) = -\lambda(0)\vec{g}(x,t) - \int_0^\infty \dot{\lambda}(\tau)\vec{g}(x,t-\tau)\, d\tau \quad . \qquad (I.2I)$$

Аналогичным образом из (I.I5) получается и определяющее уравнение для внутренней энергии изотропного материала

$$e(x,t) = e_0 + \varepsilon(0)u + \int_0^\infty \dot{\varepsilon}(\tau)\, u(x,t-\tau)\, d\tau \quad , \qquad (I.22)$$

где

$$\varepsilon(0) = D_u \mathcal{E}(\Lambda_0) \quad , \qquad \varepsilon(\infty) = D_u \mathcal{E}(\Lambda_0) + \delta_u \mathcal{E}(\Lambda_0 | I_P) \quad .$$

Скалярные функции $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$ называются соответственно релаксационной функцией теплопроводности и энерготемпературно-релаксационной функцией [3–7] . Их предельные значения $\lambda_0 = \lim\limits_{t\to 0} \lambda$ и $\varepsilon_0 = \lim\limits_{t\to 0} \varepsilon$ являются мгновенными коэффициентами теплопроводности и объемной теплоемкости, а $\lambda_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \lambda$

и $\varepsilon_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \varepsilon$ - равновесными коэффициентами теплопроводности и объемной теплоемкости, причем $\lambda_\infty = k$ и $\varepsilon_\infty = c_v$.

Замечание I.2. Функции $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$ в отечественной литературе называются также ядрами интегральных операторов наследственности или ядрами релоксации [I2,I3]. Относительно их из физических соображений в дальнейшем предполагается, что они являются монотонно возрастающими, неотрицательными, бесконечнодифференцируемыми на луче $[0,\infty)$ со всеми производными ограниченными и абсолютно интегрируемыми на $[0,\infty)$

$$\int_0^\infty |\lambda^{(k)}(t)|\,dt < \infty\,, \qquad \int_0^\infty |\varepsilon^{(k)}(t)|\,dt < \infty \qquad (k=1,2,\dots)\,,$$

и, кроме того, $\varepsilon_0 = const > 0$, $\lambda_0 = const \geqslant 0$ (здесь равенство может иметь место для температур, близких к абсолютному нулю [3,6]), $\varepsilon_\infty \geqslant \varepsilon_0$.

Интегро-дифференциальное уравнение теплопроводности изотропных сред с затухающей тепловой памятью следует из уравнения сохранения энергии (I.4) после внесения туда (I.2I) и (I.22), что дает

$$\mathcal{M}u \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda_0 \nabla^2 u + \int_0^\infty \left[\dot\varepsilon(\tau)\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial t} - \dot\lambda(\tau)\nabla^2 u(x,t-\tau)\right] d\tau = f_0, \quad (I.23)$$

где ∇^2 - оператор Лапласа. При $\dot\varepsilon = \dot\lambda = 0$ отсюда, как простейший частный случай, следует классическое уравнение теплопроводности

$$Tu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \varkappa \nabla^2 u = f_0 \qquad (\varkappa = k/c_v)\,. \quad (I.24)$$

Остановимся на некоторых постановках начально-граничных задач для уравнения (I.23). В простейшем случае, когда из физических соображений можно считать, что на поверхности Γ области Ω тепловая память среды аннулируется и $\dot\varepsilon = \dot\lambda = 0$ на Γ, для уравнения (I.23) можно ставить основные типы

граничных условий, принятых в математической теории теплопроводности (Дирихле, Неймана, смешанных) или их комбинации на различных частях Γ_j границы $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N} \Gamma_j$. Больший интерес представляют граничные условия, которые естественным образом связаны с интегро-дифференциальным оператором уравнения (I.23) и используют определяющее соотношение для теплового потока в форме (I.2I). В этом случае можно говорить о модифицированном граничном условии Неймана

$$\lambda_0(\vec{\nu}\cdot\nabla u) + \int_0^\infty \dot{\lambda}(\tau)(\vec{\nu}\cdot\nabla u(s,t-\tau))\,d\tau = f_\Gamma(s,t)\ ,\ s\in\Gamma, \qquad (I.25)$$

или модифицированном смешанном условии

$$\alpha u + \lambda_0(\vec{\nu}\cdot\nabla u) + \int_0^\infty \dot{\lambda}(\tau)(\vec{\nu}\cdot\nabla u(s,t-\tau))\,d\tau = f_\Gamma(s,t)\ ,\ s\in\Gamma, \qquad (I.26)$$

где $\vec{\nu}$ – орт внешней конормали к Γ, $\alpha=\alpha(s)\geq 0$, $\nabla \equiv grad$, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение векторов.

Однако наибольший теоретический и практический интерес представляют нестационарные граничные условия для (I.23), содержащие одновременно и дифференциальные, и интегральные операторы по времени. Такие специальные случаи возникают, например, при математических исследованиях температурных полей в телах, контактирующих по Γ с идеальными проводниками тепла, хорошо перемешиваемой жидкостью и др. Нестационарные условия такого типа имеют вид

$$\varepsilon_0\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_0(\vec{\nu}\cdot\nabla u) + \int_0^\infty\left[\dot{\varepsilon}\cdot\frac{\partial u(s,t-\tau)}{\partial t} + \dot{\lambda}(\vec{\nu}\cdot\nabla u(s,t-\tau))\right]d\tau = f_\Gamma(s,t)\ , \qquad (I.27)$$

$$\lambda_0 u - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nu}\cdot\nabla u) + \int_0^\infty\left[\dot{\lambda}u(s,t-\tau) - \dot{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nu}\cdot\nabla u(s,t-\tau))\right]d\tau = f_\Gamma(s,t) \qquad (I.28)$$

и легко интерпретируются физически. В частных предположениях относительно ядер релаксации λ и ε на Γ из них можно получить ряд других, более простых, граничных условий, а также комбинировать их на различных частях Γ_j границы Γ.

Именно начально-граничные неоднородные и нелинейные задачи для уравнения (I.23) с граничными условиями, включающими (I.27), (I.28), составляют предмет исследования в настоящей работе.

Замечание I.3. В дальнейшем без нарушения общности иногда будем считать $\varepsilon_0 = 1$ и $\lambda_0 = 1$, так как этого можно добиться линейными преобразованиями независимых переменных (сведением задачи к безразмерному виду). Кроме того, для упрощения записи будем использовать следующее обозначение для интегральных операторов в (I.23), (I.25)-(I.28):

$$\varphi(t) * \psi(t) = \int_0^\infty \varphi(\tau)\,\psi(t-\tau)\,d\tau \qquad (t>0) \quad . \qquad (I.29)$$

§ 2. Преобразование Лапласа и сведение задач к эллиптическим

Принимая во внимание замечание I.3, рассмотрим в цилиндре $\Omega_\infty = \Omega \times (0,\infty)$ интегро-дифференциальное уравнение

$$\mathcal{M}u \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda_0 \nabla^2 u + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 u = f_0(x,t) \qquad (x,t) \in \Omega_\infty \qquad (2.I)$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad (x \in \Omega) \qquad (2.2)$$

и нестационарными граничными условиями на $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_0 (\vec{\nu} \cdot \nabla u) + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{\lambda} * (\vec{\nu} \cdot \nabla u) = f_1(s,t) \quad , (s,t) \in \Gamma_1 \times (0,\infty); \qquad (2.3_I)$$

$$(\vec{\nu} \cdot \nabla u) = 0 \quad , (s,t) \in \Gamma_2 \times (0,\infty),$$

или

$$\lambda_0 u - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nu} \cdot \nabla u) + \dot{\lambda} * u - \dot{\varepsilon} * \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nu} \cdot \nabla u) = f_1(s,t) \quad , (s,t) \in \Gamma_1 \times (0,\infty); \qquad (2.3_2)$$

$$u = 0 \quad , (s,t) \in \Gamma_2 \times (0,\infty) \quad .$$

Классическим решением задачи (2.I)-(2.3) при выполнении условий из замечания I.2 назовем функцию $u(x,t)$ класса $C^2(\Omega_\infty) \cap C(\bar{\Omega}_\infty)$, удовлетворяющую уравнению (2.I), начальному условию (2.2) и граничным условиям (2.3_1). Необходимыми условиями существования классического решения здесь, очевидно, являются

$$f_0 \in C(\Omega_\infty), \quad u_0 \in C(\bar{\Omega}), \quad f_1 \in C(\Gamma_1 \times (0,\infty)).$$

Аналогично вводится классическое решение задачи (2.I)-(2.3_2).

В дополнение к указанной гладкости данных задачи предполагаем, что f_0 и f_1 по t удовлетворяют условиям изображаемости по Лапласу $|f_0| < c_0 \exp(\sigma_0 t)$ и $|f_1| < c_1 \exp(\sigma_1 t)$, где $c_j = \text{const}$, $\sigma_j = \text{const}$ [I5,I6].

Преобразования Лапласа введем формулами

$$\mathcal{L}[u(t)] = \hat{u}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} u(t)\, dt, \qquad (2.4_I)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\hat{u}(p)] = u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} \hat{u}(p)\, dp, \qquad (2.4_2)$$

где p – комплексный параметр преобразования, $\hat{u}(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\mathrm{Re}\, p \geq \gamma$.

Специфика временной зависимости в задачах (2.I)-(2.3) не позволяет, очевидно, произвести в них разделение переменных в классическом смысле, однако применение преобразования Лапласа предоставляет возможность понизить размерность за счет исключения временной переменной t и свести их к эллиптическим.

Проведем преобразования отдельных элементов задач. Очевидно, что первые два слагаемые в них преобразуются элементарно:

$$\mathcal{L}[\nabla^2 u] = \nabla^2 [\mathcal{L} u] = \nabla^2 \hat{u}(x;p),$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = p\hat{u}(x;p) - u(x,+0) = p\hat{u}(x;p) - u_0(x), \qquad (2.5)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nu}\cdot\nabla u)\right] = p(\vec{\nu}\cdot\nabla\mathcal{L}[u]) - (\vec{\nu}\cdot\nabla u)\Big|_{t=0} =$$

$$= p(\vec{\nu}\cdot\nabla\hat{u}) - (\vec{\nu}\cdot\nabla u_0) \qquad (s\in\Gamma) \quad .$$

Члены, содержащие интегральные операторы наследственности, преобразуются следующим образом:

$$\mathcal{L}\left[\dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t}\right] = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^\infty \dot{\varepsilon}\,\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial t}\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \dot{\varepsilon}\,d\tau \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial u(x,t-\tau)}{\partial t}dt = \int_0^\infty \dot{\varepsilon}\left[e^{-pt}u(x,t-\tau)\right]_{t=0}^{t=\infty} dt +$$

$$+ p\int_0^\infty \dot{\varepsilon}\int_0^\infty e^{-pt}u(x,t-\tau)\,dt\,d\tau = p\hat{\varepsilon}'(p)\hat{u}(x;p) - (\varepsilon_\infty-\varepsilon_0)u_0(x)$$

$$= p(p\hat{\varepsilon}(p)-\varepsilon_0)\hat{u}(x;p) - (\varepsilon_\infty-\varepsilon_0)u_0(x),$$

$$\mathcal{L}\left[\dot{\lambda} * u\right] = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^\infty \dot{\lambda}\,u(x,t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_0^\infty \dot{\lambda}\int_0^\infty e^{-pt}u(x,t-\tau)\,dt\,d\tau = \int_0^\infty \dot{\lambda}\left[e^{-p\tau}\hat{u}(x;p)\right]d\tau =$$

$$= \hat{\lambda}'(p)\hat{u}(x;p) = (p\hat{\lambda}(p)-\lambda_0)\hat{u}(x;p).$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{L}\left[\dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t}\right] = p(p\hat{\varepsilon}(p)-\varepsilon_0)\hat{u}(x;p) - (\varepsilon_\infty-\varepsilon_0)u_0(x), \quad x\in\Omega;$$

$$\mathcal{L}\left[\dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t}\right] = p(p\hat{\varepsilon}(p)-\varepsilon_0)\hat{u}(s;p) - (\varepsilon_\infty-\varepsilon_0)u_0(s), \quad s\in\Gamma;$$

$$\mathcal{L}\left[\dot{\varepsilon} * \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nu}\cdot\nabla u)\right] = p(p\hat{\varepsilon}(p)-\varepsilon_0)(\vec{\nu}\cdot\nabla\hat{u}(s;p)) -$$

$$- (\varepsilon_\infty-\varepsilon_0)(\vec{\nu}\cdot\nabla u_0(s)) \quad , \quad s\in\Gamma; \qquad (2.6)$$

$$\mathcal{L}\left[\dot{\lambda} * \nabla^2 u\right] = (p\hat{\lambda}(p) - \lambda_0)\nabla^2 \hat{u}(x;p) \quad , \quad x \in \Omega ;$$

$$\mathcal{L}\left[\dot{\lambda} * u\right] = (p\hat{\lambda}(p) - \lambda_0)\,\hat{u}(s;p) \quad ,$$

$$\mathcal{L}\left[\dot{\lambda} * (\vec{\nu}\cdot\nabla u)\right] = (p\hat{\lambda}(p) - \lambda_0)(\vec{\nu}\cdot\nabla\hat{u}(s;p)) \quad , s \in \Gamma . \tag{2.7}$$

Обращаясь теперь к начально-граничной задаче (2.I)-(2.3_I), находим, что после преобразования Лапласа она принимает вид

$$-\nabla^2\hat{u} + p\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\lambda}}\hat{u} = \frac{1}{p\hat{\lambda}}\left(\hat{f}_0(x;p) + \varepsilon_\infty u_0(x)\right) \quad , x \in \Omega ;$$

$$(\vec{\nu}\cdot\nabla\hat{u}) + p\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\lambda}}\hat{u} = \frac{1}{p\hat{\lambda}}\left(\hat{f}_1(s;p) + \varepsilon_\infty u_0(s)\right) \quad , s \in \Gamma_1 ; \tag{2.8}$$

$$(\vec{\nu}\cdot\nabla\hat{u}) = 0 \quad , s \in \Gamma_2 .$$

Аналогичные преобразования в задаче (2.I)-(2.3_2) приводят к краевой задаче в изображениях

$$-\nabla^2\hat{u} + p\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\lambda}}\hat{u} = \frac{1}{p\hat{\lambda}}\left(\hat{f}_0(x;p) + \varepsilon_\infty u_0(x)\right) \quad , x \in \Omega ;$$

$$\hat{u} - p\frac{\hat{\varepsilon}}{\hat{\lambda}}(\vec{\nu}\cdot\nabla\hat{u}) = \frac{1}{p\hat{\lambda}}\left(\hat{f}_1(s;p) - \varepsilon_\infty(\vec{\nu}\cdot\nabla u_0)\right) \quad , s \in \Gamma_1 ; \tag{2.9}$$

$$\hat{u} = 0 \quad , s \in \Gamma_2 .$$

В ряде случаев оказывается удобным при нахождении оригиналов решений задач иметь дело не с задачами (2.8) и (2.9), в которых используются трансформанты непосредственно ядер релаксации, а с аналогичными задачами, в которых использованы трансформанты производных ядер релаксации. Для таких ситуаций имеем задачу

$$-\nabla^2\hat{u} + p\frac{\hat{\varepsilon}' + \varepsilon_0}{\hat{\lambda}' + \lambda_0}\hat{u} = \frac{1}{\hat{\lambda}' + \lambda_0}\left(\hat{f}_0(x;p) + \varepsilon_\infty u_0(x)\right) , x \in \Omega ;$$

$$(\vec{\nu}\cdot\nabla\hat{u}) + p\frac{\hat{\varepsilon}' + \varepsilon_0}{\hat{\lambda}' + \lambda_0}\hat{u} = \frac{1}{\hat{\lambda}' + \lambda_0}\left(f_1(s;p) + \varepsilon_\infty u_0(s)\right), s \in \Gamma_1 ; \tag{2.8_I}$$

$$(\vec{\nu}\cdot\nabla\hat{u}) = 0 \quad , s \in \Gamma_2$$

для (2.I)–(2.3_I), и

$$-\nabla^2\hat{u} + \rho\frac{\hat{\varepsilon}'+\varepsilon_0}{\hat{\lambda}'+\lambda_0}\hat{u} = \frac{1}{\hat{\lambda}'+\lambda_0}\left(f_0(x;\rho)+\varepsilon_\infty u_0(x)\right), \quad x\in\Omega;$$

$$\hat{u} - \rho\frac{\hat{\varepsilon}'+\varepsilon_0}{\hat{\lambda}'+\lambda_0}(\vec{\nu}\cdot\nabla u) = \frac{1}{\hat{\lambda}'+\lambda_0}\left(f_1(s;\rho)+\varepsilon_\infty(\vec{\nu}\cdot\nabla u_0)\right), \quad s\in\Gamma_1; \qquad (2.9_I)$$

$$\hat{u} = 0, \quad s\in\Gamma_2,$$

для (2.I)–(2.3_2), где

$$\hat{\lambda}'(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\dot{\lambda}(t)\,dt, \qquad \hat{\varepsilon}'(\rho) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\dot{\varepsilon}(t)\,dt.$$

Таким образом, применение преобразования Лапласа к интегро-дифференциальному эволюционному уравнению приводит к эллиптическим неоднородным краевым задачам (2.8) и (2.9), существенной особенностью которых является вхождение для рассмотренных типов граничных условий параметра преобразования как в уравнение, так и в граничные условия. Для канонических областей эти задачи можно разрешить в специальных функциях, однако обращение изображения по формуле (2.4_2) обычно встречает большие трудности. В связи с этим в дальнейшем будет использован специальный метод решения задач этого типа, основанный на разложении решения по собственным элементам специально построенного симметричного оператора.

Остановимся теперь на применении преобразования Лапласа и одной его модификации при изучении вопроса о связи между решениями классического уравнения теплопроводности

$$Tu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u = f_0(x,t), \quad u(x,0) = 0, \qquad (2.10)$$

и решениями уравнения (2.I). После применения к (2.I0) преобразования (2.4_I) получим

$$-\nabla^2\hat{u} + \rho\hat{u} = \hat{f}_0(x;\rho), \quad x\in\Omega. \qquad (2.11)$$

Положив в (2.2) $u_0(x)=0$, применив к (2.I) преобразование Лапласа и введя обозначения

$$\hat{v}(x;p)=\hat{u}(x;p),\quad \sigma(p)=p\,\frac{\hat{\varepsilon}(p)}{\hat{\lambda}(p)},\quad \mu(p)=\frac{1}{p\hat{\mathcal{K}}(p)}, \tag{2.I2}$$

получим уравнение

$$-\nabla^2\hat{v}+\sigma(p)\hat{v}=\mu(p)\hat{f}_0(x;p). \tag{2.I3}$$

Прямое и обратное модифицированные преобразования, являющиеся обобщением (2.4), введем формулами

$$\mathcal{L}_\sigma[v(t)]=\hat{V}(\sigma(p))=\int_0^\infty e^{-\sigma(p)t}v(t)\,dt, \tag{2.I4$_1$}$$

$$\mathcal{L}_\sigma^{-1}[\hat{V}(\sigma)]=v(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{\sigma(p)t}\hat{V}(\sigma(p))\,d\sigma(p), \tag{2.I4$_2$}$$

где $\sigma=\sigma(p)$ – аналитическая функция комплексного переменного p, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re}\sigma(p)>\nu$ при $\operatorname{Re}p>\nu$ (ν – показатель роста функции $v(t)$).

Теорема 2.I. Если ядра интегральных операторов наследственности $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$ таковы, что функция $\sigma(p)$ в (2.I2) удовлетворяет указанному выше условию, то между оригиналами решений уравнений (2.II) и (2.I3) выполняются интегральные соотношения

$$v(x,t)=\int_0^\infty u(x;\tau)\,\mathcal{L}^{-1}_{\sigma(t)}\left[e^{-p(\sigma)\tau}\right]d\tau, \tag{2.I5}$$

$$u(x,t)=\int_0^\infty v(x,\tau)\,\mathcal{L}^{-1}_{p(t)}\left[e^{-\sigma(p)\tau}\right]d\tau, \tag{2.I6}$$

где обратный оператор берется по аргументу t. Доказательство формул (2.I5) и (2.I6) легко проводится путем применения преобразования (2.4$_1$) с дальнейшим изменением порядка интегрирования.

Замечание 2.I. Преобразования (2.I4) в принципе можно трактовать как формальную замену параметра p на аналитическую функцию $\sigma(p)$ в преобразованиях (2.1). Поэтому для (2.I4) выполняются все основные свойства, характерные для обычных преобразований Лапласа [I5] .

Пусть $\sigma_1(p)$ и $\sigma_2(p)$ - две аналитические функции, удовлетворяющие условиям $\operatorname{Re}\sigma_1(p) > \nu_1$ и $\operatorname{Re}\sigma_2(p) > \nu_2$ при $\operatorname{Re} p > \nu_1$ и $\operatorname{Re} p > \nu_2$ соответственно, где ν_1 и ν_2 - показатели роста функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$. Пусть $\hat{V}_1(\sigma)$ и $\hat{V}_2(\sigma)$ - изображения функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$ в смысле $(2.I4_I)$. Тогда имеют место следующие формулы обращения модифицированных трансформант Лапласа:

$$\mathcal{L}_p^{-1}\left[\hat{V}_1(\sigma_1(p))\hat{V}_2(\sigma_2(p))\right] =$$

$$= \int_0^t d\tau \int_0^\infty v_1(\eta)\mathcal{L}_{p(\tau)}^{-1}\left[e^{-\sigma_1(p)\eta}\right]d\eta \int_0^\infty v_2(\vartheta)\mathcal{L}_{p(t-\tau)}^{-1}\left[e^{-\sigma_2(p)\vartheta}\right]d\vartheta, \quad (2.I7)$$

$$\mathcal{L}_p^{-1}\left[\hat{V}(\sigma_1(p)+\sigma_2(p))\right] =$$

$$= \int_0^t \int_0^\infty v(\tau)\mathcal{L}_{p(\vartheta)}^{-1}\left[e^{-\sigma_1(p)\tau}\right]\mathcal{L}_{p(t-\vartheta)}^{-1}\left[e^{-\sigma_2(p)\tau}\right]d\tau\, d\vartheta. \quad (2.I8)$$

Формулы (2.I7), (2.I8) являются обобщениями соответствующих формул операционного исчисления [I5] . В частности, (2.I7) является обобщением теоремы Эфроса. Доказательство этих формул осуществляется с привлечением теоремы Бореля [I5] и теоремы 2.I.

Замечание 2.2. Применение формул (2.I5)-(2.I8) при решении конкретных начально-граничных задач лимитируется возможностью замены в них комплексного переменного p на обратную функцию $p(\sigma)$. Так как в рассматриваемом классе задач с произвольно заданными ядрами релаксации функция $\sigma(p)$ =

$\rho\hat{\varepsilon}(\rho)/\hat{\lambda}(\rho)$, т.е. выражается через трансформанты Лапласа от ядер, то получение обратной функции для столь общих условий весьма проблематично. Однако тот факт, что с течением времени ядра релаксации асимптотически стремятся к своим постоянным значениям, и, следовательно, при $t \to \infty$ решения классического уравнения и интегро-дифференциального уравнений теплопроводности асимптотически сближаются, стремясь к общему стационарному решению, позволяет считать, что наибольшие качественные и количественные различия должны наблюдаться при малых временах t . В пространстве изображений им соответствуют большие значения ρ . Поэтому, используя асимптотические разложения изображений $\hat{\lambda}(\rho)$ и $\hat{\varepsilon}(\rho)$, функцию $\sigma(\rho)$ можно аппроксимировать некоторой дробно-рациональной функцией, позволяющей найти обратную $\rho(\sigma)$ и применить (2.I5)-(2.I8). Этот путь использован также в работах [I7,I8] .

§ 3. Фундаментальное решение оператора $\mathfrak{M}$ и некоторые его свойства

По определению [2I,27] , фундаментальное решение $G(x,t)$, где $x=(x_1, x_2, \dots x_n)$, $t>0$, удовлетворяет в $E^n \times [0,\infty)$ уравнению с импульсным единичным точечным источником

$$\mathfrak{M}G \equiv \frac{\partial G}{\partial t} - \nabla^2 G + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial G}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 G = \delta(x,t) , \qquad (3.I)$$

где $\delta(x,t) = \delta(x)\cdot\delta(t)$ – дельта-функция, и трактуется как температура среды в точке x в момент времени t , являющаяся откликом на мгновенный точечный источник, помещенный в $x=0$, в момент $t=0$. Эта функция удовлетворяет условию причинности ($G(x,t)=0$, если $t<0$) и, очевидно, является обобщенной функцией [20,2I,27] .

Для построения фундаментального решения оператора $\mathfrak{M}$ воспользуемся методом интегральных преобразований [I6, 26,27] .

Задав обычным образом в E^n скалярное произведение

$$(\xi, x) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n$$

и норму

$$|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2)^{1/2}$$

введем, кроме преобразования Лапласа (2.4), преобразование Фурье основных функций из S [27] формулами

$$\mathcal{F}[V(x)] = v(\xi) = \int_{E^n} V(x) e^{i(\xi,x)} dx \,, \qquad (3.2_I)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[v(\xi)] = V(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{E^n} v(\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi \,, \qquad (3.2_2)$$

где $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$, а $V(x)$ суммируема на E^n и убывает при $x \to \infty$ быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Если, следуя [27, с.I02] , ввести преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста, то оно является линейной и непрерывной операцией.

Лемма 3.I. Для того, чтобы обобщенная функция $G(x,t)$ была фундаментальным решением оператора $\mathfrak{M}$, необходимо и достаточно, чтобы ее изображение по Фурье-Лапласу являлось решением алгебраического уравнения

$$\mathfrak{M}(-i\xi, p)\, \mathcal{F}\mathcal{L}[G(x,t)] = 1$$

Доказательство этого утверждения, за исключением небольших деталей, аналогично приведенному в [2I] .

Применив вначале к (3.I) преобразование (2.4_I), получаем уравнение

$$-p\hat{\lambda}(p)\nabla^2\hat{G} + \rho^2\hat{\varepsilon}(p)\hat{G} = \delta(x)\cdot 1(p) \,, \qquad (3.3)$$

где учтено, что $\lambda(0)=\varepsilon(0)=1$ и $\mathcal{L}[\delta_+(t)=1(p)$. Используя затем к (3.3) преобразование (3.2_I), приходим к искомому алгебраическому уравнению

$$\mathcal{M}(-i\xi,p)\hat{g}(\xi;p)\equiv p(|\xi|^2\hat{\lambda}(p)+p\hat{\varepsilon}(p))\hat{g}(\xi;p)=1\,, \qquad (3.4)$$

где $\hat{g}(\xi;p)=\mathcal{F}[\hat{G}(x;p)]$. При получении (3.4) учтено, что для обобщенных функций медленного роста

$$\mathcal{F}[\nabla^2\hat{G}]=-|\xi|^2\mathcal{F}[\hat{G}] \qquad (3.5)$$

и, кроме того, $\mathcal{F}[\delta(x)]=1(\xi)$.

Поскольку фундаментальное решение оператора $\mathcal{M}$ не единственно и определяется с точностью до слагаемого, являющегося произвольным решением однородного уравнения $\mathcal{M}G_0=0$, для определенности возьмем решение уравнения (3.4) в виде

$$\hat{g}(\xi;p)=\frac{1}{p\hat{\lambda}(p)|\xi|^2+p^2\hat{\varepsilon}(p)}\,, \qquad (3.6)$$

где $\mathrm{Re}[p\hat{\lambda}(p)]$ и $\mathrm{Re}[p^2\hat{\varepsilon}(p)]$, в силу изображаемости ядер релаксации по Лапласу, являются величинами строго положительными. Подставив (3.6) в (3.2_2), получаем, что трансформанта Лапласа от фундаментального решения имеет вид

$$\hat{G}(x;p)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{E^n}\frac{e^{-i(\xi,x)}\,d\xi}{\mu(|\xi|^2+\sigma)}\,, \qquad (3.7)$$

где

$$\mu(p)=p\hat{\lambda}(p)\,, \qquad \sigma(p)=p\hat{\varepsilon}(p)/\hat{\lambda}(p)\,. \qquad (3.8)$$

Нетрудно доказать, что при произвольных $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$, удовлетворяющих лишь условиям изображаемости, в зависимости от размерности пространства будут иметь место следующие представления:

$$\hat{G}(x;p)=\frac{e^{-|x|\sqrt{\sigma}}}{2\mu\sqrt{\sigma}}\,, \qquad (3.9)$$

если $n=1$;

$$\hat{G}(x;p) = \frac{1}{2\pi\mu}\int_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho|x|)}{\rho^2+\sigma}\,d\rho = \frac{K_0(|x|\sqrt{\sigma})}{2\pi\mu}, \qquad (3.10)$$

если $n=2$, $|x|=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}$;

$$\hat{G}(x;p) = \frac{e^{-|x|\sqrt{\sigma}}}{4\pi\mu|x|}, \qquad (3.11)$$

если $n=3$, $|x|=(x_1^2+x_2^2+x_3)^{1/2}$. Здесь $J_0(z)$ – функция Бесселя, $K_0(z)$ – функция Бесселя мнимого аргумента [22].

Поскольку пока мы считаем, что явный вид функций $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$ не задан, а определены лишь их гладкость и предельные (при $t\to 0$ и $t\to\infty$) значения, будем считать, что при $t<1$ они могут быть разложены в сходящиеся ряды

$$\lambda(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{t^k}{k!}, \quad \varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \frac{t^k}{k!}, \qquad (3.12)$$

где

$$\lambda_k = \left.\frac{d^k\lambda}{dt^k}\right|_{t=0} = \lambda^{(k)}(0), \quad \varepsilon_k = \left.\frac{d^k\varepsilon}{dt^k}\right|_{t=0} = \varepsilon^{(k)}(0) \quad (\lambda_0,\varepsilon_0>0). \qquad (3.13)$$

Тогда изображения этих функций в силу того, что $\mathcal{L}[t^k/\Gamma(k+1)] = p^{-k-1}$, представимы рядами [15]

$$\hat{\lambda}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k p^{-k-1}, \quad \hat{\varepsilon}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k p^{-k-1}, \qquad (3.14)$$

равномерно сходящимися вне некоторого круга $|p|=R$ (при $p\to\infty$). Следовательно, для больших p (малых t), согласно (3.8), будем иметь, что

$$\sigma(p) = \frac{1}{\lambda_0}\left(\sigma_0 p + \sigma_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{k+1}p^{-k}\right), \quad \mu(p) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k p^{-k}, \qquad (3.15)$$

где

$$\sigma_n = \frac{(-1)^n}{\lambda_0^2}\begin{vmatrix} \lambda_1\varepsilon_0 - \lambda_0\varepsilon_1 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2\varepsilon_0 - \lambda_0\varepsilon_2 & \lambda_1 & \lambda_0 & \cdots & 0 \\ \lambda_3\varepsilon_0 - \lambda_0\varepsilon_3 & \lambda_2 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{n-1}\varepsilon_0 - \lambda_0\varepsilon_{n-1} & \lambda_{n-2} & \lambda_{n-3} & \cdots & \lambda_0 \\ \lambda_n\varepsilon_0 - \lambda_0\varepsilon_n & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-2} & \cdots & \lambda_1 \end{vmatrix}, \quad (3.16)$$

а первые их значения вычисляются по формулам

$$\sigma_0 = \varepsilon_0\,, \quad \sigma_1 = \frac{1}{\lambda_0}(\lambda_0\varepsilon_1 - \lambda_1\varepsilon_0), \quad \sigma_2 = \frac{1}{\lambda_0^2}\left[\lambda_0^2\varepsilon_2 - (\lambda_0\varepsilon_1 - \varepsilon_0\lambda_1) - \varepsilon_0\lambda_0\lambda_2\right] \quad (3.17)$$

Обращаясь к (3.6), видим, что при $\varepsilon_0 = \lambda_0 = 1$

$$\hat{g}(\xi;\rho) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k|\xi|^2 + \rho\varepsilon_k)\rho^{-k}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\xi;\rho)\rho^{-k}} \quad (3.18)$$

$$= \frac{1}{a_0}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(\xi;\rho)\rho^{-k}\,,$$

где

$$a_0 = \rho + |\xi|^2\,, \quad a_k = \rho\varepsilon_k + \lambda_k|\xi|^2\,,$$

$$b_0 = 1\,, \quad b_k = -\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{k} b_{k-j}\,a_j\,. \quad (3.19)$$

Ограничившись в (3.18) трехчленным приближением по ρ, получаем, что

$$\hat{g}(\xi;p)=\frac{1}{p+|\xi|^2}\left\{1-\frac{\varepsilon_1}{p}\cdot\frac{p+\varkappa_1|\xi|^2}{p+|\xi|^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_1^2}{p^2}\left[\left(\frac{p+\varkappa_1|\xi|^2}{p+|\xi|^2}\right)^2-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2}\cdot\frac{p+\varkappa_2|\xi|^2}{p+|\xi|^2}\right]+O\left(\frac{1}{p^3}\right)\right\}\quad,\qquad(3.20)$$

где $\varkappa_k=\lambda_k/\varepsilon_k$, $k=1,2$.

Замечание 3.I. Поскольку фундаментальному решению классического оператора теплопроводности T

$$Q(x,t)=\frac{\Theta(t)}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\quad,\qquad(3.2I)$$

где $\Theta(t)$ – единичная функция Хевисайда, в изображении Фурье–Лапласа соответствует функция

$$\hat{q}(\xi;p)=\frac{1}{p+|\xi|^2}\quad,\qquad(3.22)$$

то из сравнения (3.20) и (3.22) следует, что

$$\hat{g}(\xi;p)=\hat{q}(\xi;p)+O\left(\frac{1}{p}\right)\ .\qquad(3.23)$$

Используя формулы обращения дробно-рациональных изображений [24–26], представим (3.20) как функцию времени при малых t :

$$g(\xi;t)=\Theta(t)\left\{e^{-|\xi|^2t}-\varepsilon_1\left[\varkappa_1\frac{1-e^{-|\xi|^2t}}{|\xi|^2}+(1-\varkappa_1)te^{-|\xi|^2t}\right]+\right.$$

$$+\varepsilon_1^2\left[\frac{\varkappa_1^2}{|\xi|^2}t+\varkappa_1(2-3\varkappa_1)\frac{1-e^{-|\xi|^2t}}{|\xi|^4}+\frac{1}{2}(1-\varkappa_1)^2t^2e^{-|\xi|^2t}\right]-$$

$$\left.-\varepsilon_2\left[\frac{\varkappa_2}{|\xi|^2}t+(1-2\varkappa_2)\frac{1-e^{-|\xi|^2t}}{|\xi|^4}-\frac{1-\varkappa_2}{|\xi|^2}te^{-|\xi|^2t}\right]+\ldots\right\}\ .$$

Это выражение с использованием формул

$$\int_0^t \tau e^{-|\xi|^2\tau}\,d\tau = -t\,\frac{e^{-|\xi|^2 t}}{|\xi|^2} + \frac{1-e^{-|\xi|^2 t}}{|\xi|^4},$$

$$\int_0^t d\tau \int_0^\tau e^{-|\xi|^2\vartheta}\,d\vartheta = \frac{t}{|\xi|^2} - \frac{1-e^{-|\xi|^2 t}}{|\xi|^4}$$

приводится к удобному для анализа виду

$$\begin{aligned} g(\xi;t) = \Theta(t)\Big\{ & e^{-|\xi|^2 t} - \varepsilon\Big[\varkappa_1 \int_0^t e^{-|\xi|^2\tau}\,d\tau + (1-\varkappa_1)\,t\,e^{-|\xi|^2 t}\Big] + \\ & + \varepsilon_1^2\Big[\varkappa_1(3\varkappa_1-2)\int_0^t d\tau\int_0^\tau e^{-|\xi|^2\vartheta}\,d\vartheta + \frac{1}{2}(1-\varkappa_1)^2 t^2 e^{-|\xi|^2 t}\Big] - \\ & - \varepsilon_2\Big[\varkappa_2\int_0^t d\tau\int_0^\tau e^{-|\xi|^2\vartheta}\,d\vartheta + (1-\varkappa_2)\int_0^t \tau e^{-|\xi|^2\tau}\,d\tau\Big] + \ldots\Big\}\,. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Поскольку

$$\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-|\xi|^2 t}\Big] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{E^n} e^{-|\xi|^2 t - i(\xi,x)}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = Q(x,t),$$

то получаем, что

$$G(x,t) = \frac{\Theta(t)\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi t})^n}\Big[1 - \varepsilon_1(1-\varkappa_1)t + \frac{1}{2}(1-\varkappa_1)^2 t^2 + \ldots\Big],$$

или, более подробно,

$$G(x,t)=\Theta(t)\left\{Q(x,t)-\varepsilon_1\left[\varkappa_1\int_0^t Q(x,\tau)\,d\tau+(1-\varkappa_1)\,t\,Q(x,t)\right]+\right.$$

$$+\varepsilon_1^2\left[\varkappa_1(3\varkappa_1-2)\int_0^t d\tau\int_0^\tau Q(x,\vartheta)\,d\vartheta+\frac{(1-\varkappa_1)^2}{2}t^2Q(x,t)\right]-$$

$$\left.-\varepsilon_2\left[\varkappa_2\int_0^t d\tau\int_0^\tau Q(x,\vartheta)\,d\vartheta+(1-\varkappa_2)\int_0^t\tau\,Q(x,\tau)\,d\tau\right]+\dots\right\} \qquad (3.25)$$

При $n=1$, в частности, имеем для интегралов в (3.25)

$$\int_0^t Q(x,\tau)\,d\tau=\sqrt{t}\;i^1\operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}}\right),$$

$$\int_0^t d\tau\int_0^\tau Q(x,\vartheta)\,d\vartheta=\frac{(\sqrt{4t})^3}{2}\,i^3\operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}}\right),$$

$$\int_0^t\tau\,Q(x,\tau)\,d\tau=t\left[\sqrt{4t}\;i^3\operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}}\right)+|x|\,i^2\operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}}\right)\right.,$$

где $i^n\operatorname{erfc}(z)=\int_z^\infty i^{n-1}\operatorname{erfc}(\xi)\,d\xi=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty\frac{(\xi-z)^n}{n!}e^{-\xi^2}d\xi$ – интегральная функция ошибок [22].

С другой стороны, обращаясь при $n=3$ к (3.II) при больших p, будем иметь

$$\hat G(x;p)=\frac{1}{4\pi|x|}\left(1-\frac{\lambda_1}{p}+\frac{\lambda_1^2-\lambda_2}{p^2}+\dots\right)\times$$

$$\times e^{-|x|\sqrt{p+(\varepsilon_1-\lambda_1)+\frac{1}{p}[(\lambda_1-\lambda_2)-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]+\dots}}.$$

Отсюда, после перехода к оригиналам,

$$G(x,t)=\frac{\Theta(t)}{4\pi|x|}\left\{\frac{|x|}{2t\sqrt{\pi t}}\,e^{-(\varepsilon_1-\lambda_1)t-\frac{|x|^2}{4t}}-\right.$$

$$-\frac{\lambda_1}{2}\left[e^{-|x|\sqrt{\varepsilon_1-\lambda_1}}\operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}}-\sqrt{(\varepsilon_1-\lambda_1)t}\right)+\right. \qquad (3.26)$$

$$\left.\left.+\,e^{|x|\sqrt{\varepsilon_1-\lambda_1}}\operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}}+\sqrt{(\varepsilon_1-\lambda_1)t}\right)\right]+\dots\right\},$$

где $erfc(z)=1-erf(z)$, $erf(z)$ – интеграл вероятности [22] .

Таким образом, показано, что, поскольку $\lim\limits_{p\to\infty} p\hat{u}(p) = \lim\limits_{t\to 0} u(t)$, при $t\to 0$ фундаментальное решение оператора $\mathcal{M}$ стремится к фундаментальному решению оператора T , причем при $t=0$ $G(x,0)=Q(x,0)=\delta(x)$

Замечание 3.2. В общем случае (при произвольных t и конкретно заданных $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$) иногда, кроме (2.16), (2.17), для вычисления оригиналов выражений (3.9)–(3.11) можно использовать следующее утверждение [13] : если $\sigma(p)$ – мероморфная функция с нулями $s=-a_k$ и простыми полюсами $s=-b_k$, причем $0<a_1<b_1<a_2<b_2<\ldots<a_N<b_N<\infty$, то

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}e^{-|x|\sqrt{\sigma(p)}}\right] = e^{-x^2\sigma(0)} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}{}'\int_{a_n}^{b_n}\frac{1}{\xi}e^{-\xi t}\sin\left(|x|\sqrt{\sigma(-\xi)}\right)d\xi \ . \qquad (3.27)$$

Установленная выше связь между фундаментальными решениями операторов $\mathcal{M}$ и T позволяет, используя формулу обращения (2.16) и соответствующие теоремы [15] , записать $G(x,t)$ в виде

$$G(x,t)=\int_0^\infty \frac{\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\tau\sigma(p)}\right]}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{|x|^2}{4\tau}}d\tau \ , \qquad (3.28)$$

где n – размерность пространства.

В частности, ограничившись в (3.15) тремя первыми членами,

что, очевидно, справедливо для больших p, будем иметь:

$$G(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t} - \sigma_1 t} -$$

$$- \frac{|\sigma_2| \operatorname{sgn} \sigma_2}{(2\sqrt{\pi})^n} \begin{cases} \int_0^t \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4\tau} - \sigma_1 \tau}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} J_1\left(2\sqrt{\sigma_2 \tau (t-\tau)}\right) d\tau, & \sigma_2 > 0; \\ \int_0^t \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4\tau} - \sigma_1 \tau}}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} I_1\left(2\sqrt{|\sigma_2| \tau (t-\tau)}\right) d\tau, & \sigma_2 < 0, \end{cases} \quad (3.29)$$

где $J_1(z)$ – бесселева функция, $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого ряда [22]; $\operatorname{sgn} \sigma_2 = 0$, если $\sigma_2 = 0$ и $\operatorname{sgn} \sigma_2 = \sigma_2 / |\sigma_2|$, если $\sigma_2 \neq 0$.

Из (3.29) следует, что при $\lambda_0 > 0$ характер распространения тепла в среде с памятью в целом соответствует классическому уравнению теплопроводности, но существенно отличается количественно для "умеренных" значений времени. При этом сохраняется бесконечная скорость распространения тепла и бесконечно большой тепловой поток при термическом ударе на поверхности тела.

Принципиально отличается характер распространения тепла с учетом тепловой памяти среды от классического случая при специальной зависимости $\lambda(t)$, когда в разложении $\sigma(p)$ (3.15) имеют место условия $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$. Другими словами, этот случай отвечает уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial G}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 G = \delta(x,t).$$

Здесь, аналогично (3.I5), имеем, что

$$\sigma(\rho) = \sigma_0\rho^2 + \sigma_1\rho + \sigma_2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{k+2}\rho^{-k}, \quad \mu(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\rho^{-k}. \tag{3.30}$$

Тогда, удержав в (3.30) три первых члена, что обосновано для больших ρ, найдем

$$\mathcal{L}^{-1}\left[e^{-\tau\sigma(\rho)}\right] = e^{-\frac{\sigma_1}{\sigma_0}t}\left[\delta(t-\tau\sqrt{\sigma_0}) + \right.$$
$$\left. + \tau K\,\Theta(t-\tau\sqrt{\sigma_0})\,\frac{I_1(K\sqrt{t^2-\tau^2\sigma_0})}{\sqrt{t^2-\tau^2\sigma_0}}\right], \tag{3.3I}$$

где

$$K = \frac{\sigma_1}{2\sigma_0}\left(1 - \frac{4\sigma_0\sigma_2}{\sigma_1^2}\right)^{1/2}. \tag{3.32}$$

В этом случае для малых времен из (3.9) и (3.II) будем иметь соответственно

$$G(x,t) = \frac{e^{-\frac{\sigma_1}{2\sigma_0}t}}{2\sqrt{\sigma_0}}\left[\Theta\left(\frac{t}{\sqrt{\sigma_0}}-|x|\right) + A\int_0^t \Theta\left(\frac{\tau}{\sqrt{\sigma_0}}-|x|\right)\frac{\tau\, I_1(A\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}\,d\tau\right] =$$
$$= \frac{V}{2}e^{-\frac{1}{2}\sigma_1 V^2 t}\,\Theta\left(t-\frac{|x|}{V}\right)I_0\left(A\sqrt{t^2-\frac{|x|^2}{V^2}}\right) \tag{3.33}$$

для $n = 1$,

$$G(x,t) = \frac{1}{4\pi}e^{-\frac{1}{2}\sigma_1 V^2 t}\left[\frac{1}{|x|}\delta\left(t-\frac{|x|}{V}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{A}{V}\,\Theta\left(t-\frac{|x|}{V}\right)\frac{I_1\left(A\sqrt{t^2-\frac{|x|^2}{V^2}}\right)}{\sqrt{t^2-\frac{|x|^2}{V^2}}}\right] \tag{3.34}$$

для $n = 3$, где $V = 1/\sqrt{\sigma_0}$ – скорость движения фронта тепловой волны,

$$A = \frac{\sigma_1 V^2}{2}\sqrt{1-\frac{4\sigma_2}{V^2\sigma_1^2}}. \tag{3.35}$$

Таким образом, для рассмотренных условий фундаментальное решение $\mathcal{M}$ -оператора описывает распространение тепла с конечной скоростью, и, следовательно, является финитной функцией. Для учета данного обстоятельства обычно используется либо гиперболическое уравнение [2] , либо нелинейное уравнение теплопроводности, в котором коэффициент теплопроводности является степенной функцией от температуры [28] .

В заключение отметим, что введенное в настоящем параграфе фундаментальное решение интегро-дифференциального уравнения переноса тепла обладает в общем случае всеми основными аналитическими свойствами, характерными для фундаментального решения уравнения классической теории теплопроводности [29] . В частности, при $t>0$

$$\int_{E^n} G(x,t)\,dx = 1 ,$$

а решение задачи Коши

$$\mathcal{M}u = f_0(x,t) , \qquad u(x,0) = u_0(x) \tag{3.36}$$

имеет интегральное представление

$$u(x,t) = \int_{E^n} u_0(x') G(x-x',0)\,dx' + \int_0^t dt' \int_{E^n} f_0(x',t') G(x-x',t-t')\,dx' . \tag{3.37}$$

§ 4. Распространение температурных волн в средах с тепловой памятью

Отмеченное в предыдущем параграфе принципиальное различие в характере распространения тепла при $\lambda_0>0$ и $\lambda_0=0$ требует уточнения на случай волновых процессов. С этой целью рассмотрим однородное уравнение

$$\mathcal{M}u \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda_0 \nabla^2 u + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 u = 0 \tag{4.1}$$

и функцию

$$u(x,t) = A e^{-\nu(\vec{x},\vec{m}) + i\omega\left(t - \frac{(\vec{x},\vec{m})}{V}\right)}, \tag{4.2}$$

где $V>0$, $A>0$, $\nu\geq 0$ и $\omega\in[0,\infty)$ – вещественные константы. Функция (4.2) описывает затухающую при $|\vec{x}|\to\infty$ плоскую бегущую в направлении вектора $\vec{m}$, $|\vec{m}|=1$, волну с частотой ω, затуханием ν, скоростью V и амплитудой A [6].

Лемма 4.I. Функция (4.2) является решением уравнения (4.I) тогда и только тогда, когда ядра релаксации удовлетворяют соотношению

$$i\left(\nu + i\frac{\omega}{V}\right)^2 \bar{\lambda}(\omega) = \omega\,\bar{\varepsilon}(\omega), \tag{4.3}$$

где

$$\bar{\lambda}(\omega) = \int_0^\infty \lambda(\tau) e^{-i\omega\tau}\,d\tau, \quad \bar{\varepsilon}(\omega) = \int_0^\infty \varepsilon(\tau) e^{-i\omega\tau}\,d\tau. \tag{4.4}$$

Доказательство. Внеся (4.2) в (4.I), получаем после соответствующих вычислений цепочку равенств

$$\mathcal{M}u = \left[i\omega\varepsilon_0 - \left(\nu + i\frac{\omega}{V}\right)^2\lambda_0\right]u + i\omega(\dot{\varepsilon} * u) - \left(\nu + i\frac{\omega}{V}\right)^2(\dot{\lambda} * u) =$$

$$= \left[i\omega\varepsilon_0 - \left(\nu + i\frac{\omega}{V}\right)^2\lambda_0\right]u + i\omega\, e^{-\nu(\vec{x},\vec{m})} A \int_0^\infty e^{i\omega\left[(t-\tau) - \frac{(\vec{x},\vec{m})}{V}\right]} \dot{\varepsilon}(\tau)\,d\tau -$$

$$- \left(\nu + i\frac{\omega}{V}\right)^2 e^{-\nu(\vec{x},\vec{m})} A \int_0^\infty e^{i\omega\left[(t-\tau) - \frac{(\vec{x},\vec{m})}{V}\right]} \dot{\lambda}(\tau)\,d\tau =$$

$$= \left[i\omega\varepsilon_0 - \left(\nu + i\frac{\omega}{V}\right)^2\lambda_0\right]u + \left[i\omega\int_0^\infty e^{-i\omega\tau}\dot{\varepsilon}(\tau)\,d\tau - \left(\nu + i\frac{\omega}{V}\right)^2\int_0^\infty e^{-i\omega\tau}\dot{\lambda}(\tau)\,d\tau\right]u,$$

где учтено, что

$$\nabla^2\left(e^{-\nu(\vec{x},\vec{m})}\right)=\nu^2 e^{-\nu(\vec{x},\vec{m})},\quad \nabla^2\left(e^{i\omega\frac{(\vec{x},\vec{m})}{V}}\right)=\left(\frac{i\omega}{V}\right)^2 e^{i\omega\frac{(\vec{x},\vec{m})}{V}}.$$

Но по определению одностороннего преобразования Фурье на полуоси $[0,\infty)$

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}'(\omega)&=\int_0^\infty \dot{\varepsilon}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = i\omega\bar{\varepsilon}(\omega)-\varepsilon(0),\\ \bar{\lambda}'(\omega)&=\int_0^\infty \dot{\lambda}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = i\omega\bar{\lambda}(\omega)-\lambda(0).\end{aligned}\qquad(4.5)$$

Следовательно,

$$\mathcal{M}u=-\omega^2\bar{\varepsilon}(\omega)+i\omega\left(\nu+i\frac{\omega}{V}\right)^2\bar{\lambda}(\omega)=0,$$

и условие (4.3) доказано.

Для каждой фиксированной частоты ω из (4.3) следует, что существует единственная пара $V=V(\omega)\geq 0$, $\nu=\nu(\omega)\geq 0$, причем

$$V^2(\omega)=2\omega\frac{\bar{\lambda}(\omega)}{\bar{\varepsilon}(\omega)},\quad \nu=\left[\frac{\omega}{2}\frac{\bar{\varepsilon}(\omega)}{\bar{\lambda}(\omega)}\right]^{1/2}=\frac{\omega}{V(\omega)},\qquad(4.6)$$

поскольку $1/\sqrt{i}=(1-i)/\sqrt{2}$.

Но из (4.4) и (4.5) следует, что

$$\bar{\varepsilon}(\omega)=E_c(\omega)-iE_s(\omega),\quad \bar{\lambda}(\omega)=L_c(\omega)-iL_s(\omega),\qquad(4.7)$$

где

$$\begin{matrix}E_c\\ L_c\end{matrix}=\int_0^\infty \begin{matrix}\varepsilon(\tau)\\ \lambda(\tau)\end{matrix}\cos\omega\tau\,d\tau,\quad \begin{matrix}E_s\\ L_s\end{matrix}=\int_0^\infty \begin{matrix}\varepsilon(\tau)\\ \lambda(\tau)\end{matrix}\sin\omega\tau\,d\tau\qquad(4.8)$$

– соответственно косинус и синус преобразования Фурье ядер релаксации. Тогда

$$V^2(\omega)=2\omega\,\mathrm{Re}\frac{L_c-iL_s}{E_c-iL_s}=2\omega\left(\frac{L_c^2+L_s^2}{E_c^2+E_s^2}\right)\cos(\varphi_\lambda-\varphi_\varepsilon),\qquad(4.9)$$

где $tg\,\varphi_\lambda = -L_s/L_c$, $tg\,\varphi_\varepsilon = -E_s/E_c$. После соответствующих преобразований (4.6) представляются в виде

$$V^2(\omega) = \frac{2\omega\,(L_c E_c + L_s E_s)}{\sqrt{L_c E_c}\,(E_c^2 + E_s^2)}, \quad \nu(\omega) = \left(\frac{\omega(E_c^2+E_s^2)\sqrt{L_c E_c}}{2(L_c E_c + L_s E_s)}\right)^{1/2}. \tag{4.10}$$

Эти формулы дают представления скорости распространения волны (4.2) и коэффициента ее затухания через трансформанты Фурье ядер релаксации, существование которых предполагается. Формулы (4.6) и (4.10) понадобятся нам для анализа низкочастотных и высокочастотных колебательных тепловых процессов в средах с памятью при отсутствии аналитической информации о ядрах релаксации, но в отмеченном предположении о существовании их трансформант Фурье. Для этой цели нам потребуется

Лемма 4.2. Пусть $f(t)$ – заданная на $[0,\infty)$ достаточно гладкая функция, такая, что

$$f(0) = f_0 = const > 0\,, \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = f_\infty = const \geq 0\,, \tag{4.11}$$
$$f_\infty > f_0\,, \quad a = \int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty\,.$$

Тогда для правостороннего преобразования Фурье $f(t)$ и ее производной

$$\bar{f}'(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} f(t)\,dt \tag{4.12}$$

имеют место следующие асимптотические значения:

$$\lim_{\omega\to\infty} \bar{f}'(\omega) = 0\,, \quad \lim_{\omega\to\infty} \omega\bar{f}'(\omega) = -i f^{(1)}(0) = -i f_1\,,$$
$$\lim_{\omega\to\infty} \bar{f}(\omega) = 0\,, \quad \lim_{\omega\to\infty} \omega\bar{f}(\omega) = -i f(0) = -i f_0\,; \tag{4.13}$$
$$\lim_{\omega\to 0} \bar{f}'(\omega) = f_\infty - f_0\,, \quad \lim_{\omega\to 0} \omega\bar{f}'(\omega) = 0\,,$$

$$\lim_{\omega \to 0} \bar{f}(\omega) = a \,, \qquad \lim_{\omega \to 0} \omega \bar{f}(\omega) = 0 \,. \tag{4.I4}$$

Доказательство. Интегрируя последовательно в (4.I2) по частям, получим

$$\bar{f}'(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(i\omega)^k} \,, \tag{4.I5}$$

где ряд равномерно сходится при достаточно больших ω .
С другой стороны, по определению преобразования Фурье производной имеем, что

$$\bar{f}'(\omega) = i\omega \bar{f}(\omega) - f(0) \,.$$

Следовательно,

$$\bar{f}(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{(i\omega)^{k+1}} \,. \tag{4.I6}$$

Но по формуле обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}'(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega)^k} d\omega \,. \tag{4.I7}$$

Рассмотрим интеграл

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt \,. \tag{4.I8}$$

Известно [2I, 27] , что $J_0(t) = \delta(t)$. Последовательно интегрируя по t правую и левую часть (4.I8), находим, что

$$J_0(t) = \Theta(t) = \begin{cases} 0 \,, & t < 0 \\ 1 \,, & t > 0 \end{cases} \quad \cdots \quad J_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega)^k} d\omega = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \,.$$

Следовательно, для достаточно малых $t < 1$ получаем равномерно сходящийся ряд

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \,.$$

Соотношения (4.I3) получаются сразу же из (4.I5) и (4.I6), а

(4.I4) – непосредственно из (4.I2).

Рассмотрим теперь классическое уравнение

$$Tu \equiv c_v \frac{\partial u}{\partial t} - k \nabla^2 u = 0 \quad , \tag{4.I9}$$

где, в соответствии с замечанием I.2 , $c_v = \varepsilon(\infty) \geq 0$ и $k = \lambda(\infty) > 0$. Это уравнение будет иметь решение вида (4.2) со скоростью v и коэффициентом затухания ℓ при выполнении условия

$$i\omega\, \varepsilon(\infty) - \left(\ell + i\frac{\omega}{v}\right)^2 \lambda(\infty) = 0 \ ,$$

откуда

$$v(\omega) = \left[\frac{2\omega\,\lambda(\infty)}{\varepsilon(\infty)}\right]^{1/2} = \left(\frac{2\omega k}{c_v}\right)^{1/2}, \quad \ell(\omega) = \left(\frac{\omega\,\varepsilon(\infty)}{2\lambda(\infty)}\right)^{1/2} = \left(\frac{\omega c_v}{2k}\right)^{1/2}. \tag{4.20}$$

Переходя в (4.I0) к пределу при $\omega \to 0$ с учетом (4.I4), получаем, что

$$V(\omega) \sim v(\omega) \quad , \qquad \nu(\omega) \sim \ell(\omega). \tag{4.2I}$$

Аналогично, устремляя $\omega \to \infty$, получаем, что

$$V(\omega) \sim \left(\frac{2\omega\lambda_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} \neq v(\omega) \quad , \quad \nu(\omega) \sim \left(\frac{\omega\varepsilon_0}{2\lambda_0}\right)^{1/2} \neq \ell(\omega). \tag{4.22}$$

Таким образом, при $\lambda_0 \neq 0$ доказаны следующие утверждения:

I. Для низких частот $(\omega \to 0)$ колебаний температурной волны (4.2) ее скорость и коэффициент затухания при $\lambda_0 > 0$ могут быть идентифицированы с соответствующими значениями, даваемыми классической теорией.

2. Для высоких частот $(\omega \to \infty)$ скорость и коэффициент затухания при $\lambda_0 > 0$ являются вещественными функциями от ω и неограниченно растут с ростом ω . При этом скорость волны при прочих равных условиях является либо большей (при

$\lambda_0/\varepsilon_0 > k/c_v$), либо меньшей (при $\lambda_0/\varepsilon_0 < k/c_v$) , чем значения скорости волны, следующие из классической теории.

При $\lambda_0 = 0$ уравнение (4.I) вырождается в уравнение

$$\mathcal{H}u \equiv \varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 u = 0 \quad , \tag{4.23}$$

для которого, как установлено в § 3, имеет место конечная скорость распространения возмущений. Здесь аналогом условия (4.3) является

$$i\omega \left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}'(\omega)\right) = \left(\nu + i\frac{\omega}{v}\right)^2 \bar{\lambda}'(\omega)$$

и, таким образом, для скорости и коэффициента затухания волны (4.2) имеем:

$$v^2(\omega) = \frac{2\omega\,\bar{\lambda}'(\omega)}{\bar{\varepsilon}'(\omega) + \varepsilon_0} \quad , \qquad \nu(\omega) = \left(\frac{\bar{\varepsilon}'(\omega) + \varepsilon_0}{2\,\bar{\lambda}'(\omega)}\right)^{1/2} \tag{4.24}$$

Тогда, согласно (4.I5), для $\omega \to \infty$ получается, что

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}'(\omega) &= \frac{\lambda^{(1)}(0)}{i\omega} - \frac{\lambda^{(2)}(0)}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right), \\ \bar{\varepsilon}'(\omega) &= \frac{\varepsilon^{(1)}(0)}{i\omega} - \frac{\varepsilon^{(2)}(0)}{\omega^2} + O\left(\frac{1}{\omega^3}\right) . \end{aligned} \tag{4.25}$$

Амплитуда температурной волны здесь определяется как

$$A(t) \sim \zeta_0\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda^{(2)}(0)}{\lambda^{(1)}(0)} - \frac{\varepsilon^{(1)}(0)}{\varepsilon_0}\right] t} \tag{4.26}$$

где $\zeta_0 = \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t=0}$ – скачек поля на фронте волны.

При $\omega \to 0$ получаем результат, аналогичный случаю $\lambda_0 > 0$, а именно

$$V(\omega) \sim v(\omega) \quad , \qquad \nu(\omega) \sim l(\omega), \tag{4.27}$$

где V и ν определены в (4.20). Поэтому остается верным утверждение I и для случая $\lambda_0 = 0$.

Таким образом, здесь доказано следующее утверждение:

3. При $\lambda_0 = 0$ и $\omega \to \infty$ скорость и коэффициент затухания температурной волны (4.2) вещественны и не зависят от ω, т.е. остаются конечными при произвольных больших ω, а амплитуда монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$ (ибо $\lambda^{(2)}(0) < 0$).

Этот результат принципиально отличен от утверждения 2 для случая $\lambda_0 > 0$.

Глава 2. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ОТВЕЧАЮЩИЕ НЕОДНОРОДНЫМ И НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

§ 5. Операторная формулировка неоднородных начально-граничных задач

Обратимся к задачам (2.I)-(2.3), приняв $\lambda_0 = 1$, $\varepsilon_0 = 1$, и запишем их в виде

$$\mathcal{M}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 u = f_0(x,t,u) \quad , (x,t) \in \Omega_\infty ; \tag{5.I}$$

$$u = u_0(x) \quad , \quad x \in \overline{\Omega} \quad ; \tag{5.2}$$

$$\mathcal{R}_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{\nu} \cdot \nabla u) + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{\lambda} * (\vec{\nu} \cdot \nabla u) = f_1(s,t,u), \; s \in \Gamma_1, t > 0; \tag{5.3}$$

$$(\vec{\nu} \cdot \nabla u) = 0 \quad , \quad s \in \Gamma_2, t > 0 \tag{5.4}$$

в случае задачи (2.I)-(2.3_I), и

$$\mathcal{M}u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla^2 u + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} - \dot{\lambda} * \nabla^2 u = f_0(x,t,u) \quad , (x,t) \in \Omega_\infty ; \tag{5.5}$$

$$u = u_0(x) \quad , \quad x \in \overline{\Omega} \; ; \tag{5.6}$$

$$\mathcal{R}_2 u \equiv u - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nu} \cdot \nabla u) + \dot{\lambda} * u - \dot{\varepsilon} * \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nu} \cdot \nabla u) = f_1(s,t,u), \; s \in \Gamma_1, t > 0; \tag{5.7}$$

$$u = 0 \quad , \; s \in \Gamma_2, t > 0 \tag{5.8}$$

в случае задачи (2.I)-(2.3_2). Здесь, по-прежнему, $\Omega \in E^3$ - ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, $\vec{\nu}$ - внешняя нормаль к Γ, $x = (x_1, x_2, x_3)$, а функции f_k, дающие нелинейность задачам, определены и измеримы при любых значениях u. В дальнейшем (§ I0) они будут уточнены

Относительно ядер релаксации остаются предположения § I.

Сформулируем поставленные задачи в операторной форме.

Пусть $u_0(x) \in L_2(\Omega)$, $u_1(s) \in L_2(\Gamma)$. Образуем из них пару $[u_0(x), u_1(s)] = \bar{u}(x)$ и введем вещественное гильбертово пространство $L^2(\bar{\Omega})$, являющееся ортогональной суммой пространств $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, т.е.

$$L^2(\bar{\Omega}) = L_2(\Omega) \oplus L_2(\Gamma). \tag{5.9}$$

Скалярное произведение и норму в $L^2(\bar{\Omega})$ зададим формулами [30,3I,36]

$$(\!(\bar{u}, \bar{v})\!) = (u_0, v_0)_\Omega + \langle u_1, v_1 \rangle_\Gamma, \qquad \|\bar{u}\| = \left(\|u_0\|^2_\Omega + \|u_1\|^2_\Gamma \right)^{1/2}, \tag{5.10}$$

где $\bar{v} \in L^2(\bar{\Omega})$.

Рассмотрим две вспомогательные линейные невозрождающиеся эллиптические задачи:

$$\mathcal{E}u \equiv -\sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + a(x)u = f_0(x), \quad x \in \Omega; \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_1(s), \quad s \in \Gamma_1; \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad s \in \Gamma_2;$$

и

$$\mathcal{E}u = f_0(x), \quad x \in \Omega; \tag{5.12}$$

$$u = f_1(s), \quad s \in \Gamma_1; \qquad u = 0, \quad s \in \Gamma_2,$$

где $f_0 \in L_2(\Omega)$, $f_1 \in L_2(\Gamma_1)$,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}(s) \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\vec{\nu}, x_i),$$

а коэффициенты уравнений удовлетворяют условиям

$$a(x) \geq a_0 = \text{const} > 0,$$

$$a_{ik}(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \quad , \quad \{a_{ik}\} = \{a_{ki}\} ,$$

$$\alpha_0 \le a_{ik}(x) \le \alpha_1 \qquad (\alpha_0 = \min_{x \in \bar{\Omega}} a_{ik}(x) ,$$

$$\alpha_1 = \max_{x \in \bar{\Omega}} a_{ik}(x) \quad) ,$$

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \xi_i \xi_k \ge c \sum_{i=1}^{3} |\xi_i|^2 \qquad (c = const > 0)$$

для любого $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $|\xi| \neq 0$.

С задачей (5.II) свяжем оператор $\mathcal{A}_1$ в пространстве $L^2(\bar{\Omega})$, областью определения которого являются пары функций $[\varphi(x), \varphi(s)] = \bar{\varphi}$, где $\varphi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция в $\bar{\Omega}$, удовлетворяющая второму граничному условию, а $\varphi(s)$ – сужение $\varphi(x)$ на Γ , т.е. $D(\mathcal{A}_1) = \{ \varphi(x) : \varphi(x) \in C^2(\bar{\Omega}), \partial\varphi(s)/\partial\nu|_{\Gamma_2} = 0 \}$. Этот оператор можно задать формулой

$$\mathcal{A}\bar{\varphi} = \left[\mathcal{E}\varphi(x), \ \partial\varphi(s)/\partial\nu \right] . \qquad (5.I3)$$

Лемма 5.I. Оператор $\mathcal{A}_1$, определенный в (5.I3)

I°. Симметричный в смысле скалярного произведения (5.I0)

$$(\!(\mathcal{A}_1 \bar{u}, \bar{v})\!) = (\!(\bar{u}, \mathcal{A}_1 \bar{v})\!) \ ; \qquad (5.I4)$$

2°. Положительно определенный

$$(\!(\mathcal{A}_1 \bar{u}, \bar{u})\!) \ge \mu_0 (\!(\bar{u}, \bar{u})\!) \qquad (\mu_0 = const > 0) ; \qquad (5.I5)$$

3°. Область определения $D(\mathcal{A}_1)$ плотна в пространстве $L^2(\bar{\Omega})$;

4°. Расширение A_1 оператора $\mathcal{A}_1$ в пространстве $L^2(\bar{\Omega})$ есть самосопряженный положительно определенный оператор.

Доказательство. Свойство (5.I4) непосредственно проверяется с помощью второй формулы Грина. Свойство (5.I5) следует из цепочки равенств и неравенств

$$(\!(\mathcal{A}_1\bar{u},\bar{u})\!) = \int_{\Omega} u\,\mathcal{E}u\,dx + \int_{\Gamma_1} u\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds =$$

$$= \int_{\Omega}\Big(\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} + a(x)u^2\Big)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\Omega}\Big[a_1\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)^2 + a_0 u^2\Big]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant c_0\,\|u\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} \geqslant \mu_0^2\,\|\bar{u}\|^2 \qquad (5.16)$$

(a_0, a_1, c_0 – положительные константы). В (5.16) использована первая формула Грина и теоремы С.Л.Соболева об ограниченности оператора вложения пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ [29,30,36] .

Для доказательства утверждения 3° достаточно показать, что не существует такой функции $\bar{v}\in L^2(\Omega)$, $\|v\|\neq 0$, что для всех $\bar{u}\in D(\mathcal{A}_1)$ имеет место равенство $(\!(\bar{u},\bar{v})\!) = 0$. Предполагая противное, т.е., что это равенство имеет место, а $u(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, в силу плотности $\mathring{C}^\infty(\Omega)$ в пространстве $L_2(\Omega)$ получается, что $\bar{v}\equiv 0$ в Ω . Следовательно, нужный элемент $\bar{v}$ имеет вид $[0, v(s)]$, а по условию $\langle u, v\rangle_{\Gamma_1} = 0$ для всех $\bar{u}\in D(\mathcal{A}_1)$. В свою очередь, это равенство, в силу плотности в $L_2(\Gamma)$ граничных значений функций из $D(\mathcal{A}_1)$, показывает, что $u=0$ на Γ . Таким образом, единственным элементом, удовлетворяющим равенству $(\!(\bar{u},\bar{v})\!) = 0$ является такая функция, что $\|\bar{v}\| = 0$. Полученное противоречие и доказывает утверждение 3°.

Свойство 4° по существу есть следствием теоремы [34] , утверждающей, что положительно определенный оператор можно расширить до самосопряженного с сохранением нижней грани.

Замечание 5.1. Область определения $D(\mathcal{A}_1)$ принадлежит

также энергетическому пространству H_1 [37], получающемуся пополнением $D(\mathcal{A}_1)$ по норме энергии

$$\|\bar{u}\|_{\mathcal{A}_1} = [\bar{u},\bar{u}]^{1/2}_{\mathcal{A}_1} = (\!(\mathcal{A}_1\bar{u},\bar{u})\!)^{1/2}. \qquad (5.17)$$

Таким образом, из 5.13 и леммы 5.1 при $a_{ik} = \delta_{ik}$ и $a = 0$ (δ_{ik} – символ Кронекера) следует

Теорема 5.1. В пространстве $L^2(\bar{\Omega})$ эллиптической задаче (5.11) соответствует операторное уравнение

$$A_1\bar{u} = \bar{f}, \qquad (5.18)$$

где A_1 – замыкание $\mathcal{A}_1$ в $L^2(\bar{\Omega})$, $\bar{f} = [f_0(x), f_1(s)]$, а нестационарной нелинейной задаче (5.1)–(5.4) для уравнения с памятью соответствует операторная задача Коши в $L^2(\bar{\Omega})$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A_1\bar{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}}{dt} + \dot{\lambda} * A_1\bar{u} = \bar{f}, \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0, \qquad (5.19)$$

где $\bar{f} = [f_0(x,t,u), f_1(s,t,u)]$, $\bar{u}_0 = [u_0(x), u_0(s)]$, $a_{ik} = \delta_{ik}$.

Пару $\bar{u}(t) = [u(x,t), u(s,t)]$ со значениями в пространстве $L^2(\bar{\Omega})$ назовем решением задачи (5.19), если она непрерывна по t, удовлетворяет начальному условию, а функции $d\bar{u}/dt$, $A_1\bar{u}$ и $\bar{f}$ непрерывны по t и операторное уравнение удовлетворяется тождественно. Тогда решением начально-граничной задачи (5.1)–(5.4) будем называть функцию $u(x,t)$, такую, что $\bar{u}(t) = [u(x,t), u(s,t)]$ является решением в $L^2(\bar{\Omega})$ операторного уравнения (5.19).

Непрерывную при $t \geq 0$ и непрерывно дифференцируемую при $t > 0$ функцию $\bar{u}(t)$ со значениями в $L^2(\bar{\Omega})$ назовем слабым (обобщенным) решением задачи (5.19), если любой функцией $\bar{v}(t) \in H_1$ (или $\bar{v}(t) \in L^2(\bar{\Omega})$)) удовлетворяется интегральное тождество

$$(\!(\frac{d\bar{u}}{dt} + A_1\bar{u} - \bar{f}, \bar{v})\!) + (\!(\dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}}{dt} + \dot{\lambda} * A_1\bar{u}, \bar{v})\!) = 0 \qquad (5.20)$$

Доказательство. Свойство I° следует из построения оператора $\mathcal{A}_2$. Утверждение 3° доказывается, за исключением несущественных деталей, аналогично приведенному для оператора $\mathcal{A}_1$. Утверждение 4° непосредственно следует из теорем М.Г.Крейна общего характера [34] (теоремы 7 и I0), поэтому на его доказательстве останавливаться не будем. Покажем, что для $\mathcal{A}_2$ имеет место неравенство (5.25).

Известно [37], что если в пространстве H для ограниченного снизу симметрического оператора A функционал

$$F(x) = \frac{(Ax, x)_H}{(x, x)_H}$$

имеет точную нижнюю границу k , и если существует элемент $x' \in D(A)$, такой, что

$$\frac{(Ax', x')_H}{(x', x')_H} = k ,$$

то k есть наименьшее собственное число оператора A , а x' - соответствующий собственный элемент. Поэтому нам достаточно показать, что наименьшее собственное число оператора отрицательно.

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{A}_2 \bar{\varphi} = \beta \bar{\varphi} \qquad (5.26)$$

которому, как следует из (5.23), отвечает краевая задача на собственные значения вида

$$\mathcal{E}\varphi = \beta\varphi \quad , \quad x \in \Omega ; \qquad (5.27)$$

$$\varphi = 0 \quad , \quad x \in \Gamma_2 ; \qquad \varphi = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \quad , \quad x \in \Gamma_1 . \qquad (5.28)$$

Пусть $\beta = \beta_1$ -минимальное (первое) число из спектра оператора $\mathcal{A}_2$, а $\bar{\varphi} = [\varphi(x), -\partial\varphi/\partial\nu]$ - отвечающее ему ненулевое решение этого уравнения. Умножая (5.26) скалярно на $\bar{\varphi}$, получим, что

или

$$\langle\!\langle \frac{d\bar{u}}{dt} - \bar{f}, \bar{v} \rangle\!\rangle + [\bar{u}, \bar{v}] + \langle\!\langle \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}}{dt}, \bar{v} \rangle\!\rangle + \dot{\lambda} * [\bar{u}, \bar{v}] = 0 \qquad (5.21)$$

и начальное условие в смысле

$$\lim_{t \to 0} \|u\| = 0 \,, \qquad (5.22)$$

где $[\cdot,\cdot]$ – скалярное произведение в энергетическом пространстве H_1 .

С задачей (5.12) ясвяжем оператор(линейный) $\mathcal{A}_2$, действующий по закону

$$[\varphi(x), B\varphi(s)] \to [\varepsilon\varphi(x), \varphi(s)] \,, \qquad (5.23)$$

где B – граничный оператор на Γ_1 , который выберем из условия симметрийности $\mathcal{A}_2$ в $L^2(\bar{\Omega})$. Используя формулу Грина находим, что

$$B = -\frac{\partial}{\partial \nu} \qquad (s \in \Gamma_1) \,.$$

Таким образом, областью определения оператора $\mathcal{A}_2$ являются пары функций $[\varphi(x), -\partial\varphi(s)/\partial\nu] = \bar{\varphi}$, где $\varphi(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая в $\bar{\Omega}$ функция, удовлетворяющая второму граничному условию в (5.12) , а $\partial\varphi(s)/\partial\nu$ – значение ее нормальной производной на Γ_1 , т.е. $D(\mathcal{A}_2) = \{ \varphi(x) : \varphi(x) \in C^2(\bar{\Omega}),\ \varphi(s)|_{\Gamma_2} = 0 \}$.

Лемма 5.2. Оператор $\mathcal{A}_2$, определенный в (5.20),

1°. Симметричный в смысле скалярного произведения (5.10)

$$\langle\!\langle \mathcal{A}_2 \bar{u}, \bar{v} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \bar{u}, \mathcal{A}_2 \bar{v} \rangle\!\rangle \,; \qquad (5.24)$$

2°. Полуограниченный снизу

$$\inf_{\bar{u} \in L^2(\bar{\Omega})} \frac{\langle\!\langle \mathcal{A}_2 \bar{u}, \bar{u} \rangle\!\rangle}{\langle\!\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle\!\rangle} = k(\mathcal{A}_2) > -\infty \,; \qquad (5.25)$$

3°. Область определения $D(\mathcal{A}_2)$ плотна в пространстве $L^2(\bar{\Omega})$;

4°. Оператор $\mathcal{A}_2$ единственным образом может быть расширен до полуограниченного снизу самосопряженного оператора A_2.

$$\langle\!\langle \mathcal{A}_2\bar{\varphi},\bar{\varphi}\rangle\!\rangle - \beta_1\langle\!\langle\bar{\varphi},\bar{\varphi}\rangle\!\rangle =$$

$$= \int_{\Omega}\varphi\,\mathcal{E}\varphi\,dx - \int_{\Gamma_1}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}ds - \beta_1\Big[\int_{\Omega}\varphi^2dx + \int_{\Gamma_1}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\Big)^2ds\Big] =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{3}\int_{\Omega}\Big(a_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + a\varphi^2\Big)dx -$$

$$- \beta_1\int_{\Omega}\varphi^2dx + \frac{1}{\beta_1}\int_{\Gamma_1}\varphi^2ds = 0 .$$

Обозначив здесь

$$F(\varphi,\varphi) = \int_{\Omega}\Big(\sum_{i,k=1}^{3}a_{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + a\varphi^2\Big)dx , \qquad (5.29)$$

прийдем к квадратному уравнению

$$\beta_1^2\|\varphi\|^2_{\Omega} - \beta_1 F(\varphi,\varphi) - \|\varphi\|^2_{\Gamma_1} = 0 . \qquad (5.30)$$

Отсюда, в силу принятых ограничений на коэффициенты $a_{ik}(x)$ и $a(x)$, получаем, что функционал $F(\varphi,\varphi)$ неотрицателен и минимальное собственное значение равно

$$\beta_1 = \frac{F(\varphi,\varphi) - \sqrt{F^2(\varphi,\varphi) + 4\|\varphi\|^2_{\Omega}\|\varphi\|^2_{\Gamma_1}}}{2\|\varphi\|^2_{\Omega}} < 0 . \qquad (5.31)$$

Неравенство (5.25) доказано.

Таким образом, из (5.23) и леммы 5.2 при $a_{ik} = \delta_{ik}$ и $a = 0$ следует

Теорема 5.2. В пространстве $L^2(\bar{\Omega})$ эллиптическая задача (5.12) эквивалентна операторному уравнению

$$A_2\bar{u} = \bar{f} , \qquad (5.32)$$

где A_2 – замыкание $\mathcal{A}_2$ в $L^2(\bar{\Omega})$, $\bar{f} = [f_0(x), f_1(s)]$, а нелинейная нестационарная задача (5.5)–(5.8) для уравнения с памятью – операторной задаче Коши в $L^2(\bar{\Omega})$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A_2\bar{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}}{dt} + \dot{\lambda} * A_2\bar{u} = \bar{f} \quad , \quad \bar{u}(0) = \bar{u}_0 , \tag{5.33}$$

где $\bar{f} = [f_0(x,t,u), f_1(s,t,u)]$, $\bar{u}_0 = [u_0(x), u_0(s)]$.

Понятия решения и слабого решения задачи (5.33), а вместе с тем – и начально граничной задачи (5.5)–(5.8) вводятся аналогично предыдущему случаю.

Операторы A_1 и A_2 , порожденные соответствующими эллиптическими задачами, позволяют исследовать разрешимость сформулированных нелинейных задач и предложить некоторые конструктивные методы решения, использующие собственные значения и собственные функции этих операторов.

§ 6. Спектральные свойства операторов A_1 и A_2 и аппроксимационные свойства их собственных функций

Учитывая определения операторов, порожденных неоднородными эллиптическими задачами, нетрудно установить, что уравнение

$$A_1\bar{\varphi} = \rho\bar{\varphi} \tag{6.1}$$

эквивалентно граничной задаче

$$\mathcal{E}\varphi = \rho\varphi \quad , \quad x \in \Omega ; \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \rho\varphi \quad , \quad s \in \Gamma_1 ; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \quad , \quad s \in \Gamma_2 , \tag{6.3}$$

а уравнение

$$A_2\bar{\varphi} = \rho\bar{\varphi} \tag{6.4}$$

– задаче

$$\mathcal{E}\varphi = \rho\varphi \quad , \quad x \in \Omega ; \tag{6.5}$$

$$\varphi = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \; s \in \Gamma_1; \qquad \varphi = 0, \; s \in \Gamma_2. \tag{6.6}$$

Эти задачи относятся к классу общих эллиптических задач вида

$$\mathcal{E}\varphi = \beta\varphi, \quad x \in \Omega;$$

$$Q_j\varphi = 0, \; s \in \Gamma_j, \; j = \overline{1, l-1}; \; C_j\varphi = \beta B_j\varphi, \; s \in \Gamma_j, \; j = \overline{l, p},$$

ряд из которых теоретически исследованы весьма обстоятельно (см., например, [31-33,35,39-45,50,51] и приведенную там библиографию). Если граничные операторы C_j и B_j дифференциальные, то наиболее законченные результаты получены в тех случаях, когда порядки C_j больше порядков B_j. В противном случае задача становится очень сложной, и к настоящему времени имеется весьма ограниченное число работ.

Существенной особенностью этих задач является вхождение спектрального параметра как в уравнение, так и в граничные условия, что приводит к ряду интересных и полезных в теоретическом и прикладном планах выводов относительно характера спектра собственных значений и аппроксимационных свойств собственных элементов. Впервые эллиптическая задача для уравнения Лапласа с параметром только в граничном условии при младшем члене рассматривалась В.А.Стекловым (1895 г.).

Имея в виду прикладную сторону спектральных задач этого типа, отметим, что они естественным образом появляются в некоторых краевых задачах теории упругости [45], динамики тел с полостями, частично заполненными жидкостью [46-48], дифракции электромагнитных и акустических волн [49], теплопроводности твердого тела, контактирующего с идеальным проводником или хорошо перемешиваемой жидкостью [38]. В работе [52] на основе таких задач дано обобщение метода конечных интеграль-

ных преобразований на случай неоднородных граничных условий. Кроме того, в [53] предложено использовать собственные элементы задач с параметром в уравнении и граничных условиях, отвечающие требованиям минимальности и ортонормированности (или почти ортонормированности) в энергетическом пространстве некоторого сходного оператора, в качестве координатных для нахождения приближенных решений эволюционных неоднородных начально-граничных задач путем модификации алгоритма Галеркина в пространстве $L^2(\bar{\Omega})$. В книге [46] и в дополнении М.С.Аграновича к книге [49] содержатся строгие теоретические обоснования применяемых для решения задач этого класса методы, проведенные на основании общей теории линейных операторов в гильбертовом пространстве. Приведенные здесь ссылки ни в коей мере не претендуют на полноту; обзор и довольно подробная библиография исследований по качественной теории таких задач приведены в работе [55].

Обратимся вначале к уравнению (6.I) с самосопряженным и положительно определенным оператором A_1.

Лемма 6.I. Спектр оператора A_1 является вещественным и дискретным. При этом

I°. Существует счетная последовательность $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ собственных значений конечной кратности с единственной точкой сгущения на бесконечности;

2°. Соответствующая им система собственных элементов $\{\bar{\varphi}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\bar{\varphi}_n = [\varphi_n(x), \varphi_n(s)]$, образует ортонормированную систему $\{\bar{e}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $\bar{e}_n = \bar{\varphi}_n / \|\bar{\varphi}_n\|$, полную как в гильбертовом пространстве $L^2(\bar{\Omega})$, так и в энергетическом пространстве H_1.

Доказательство. Спектр самосопряженного расширения A_1 оператора $\mathcal{A}_1$, обладающего свойствами из леммы 5.I, дискретен, если множество элементов энергетического пространства H_1,

ограниченное по норме энергии оператора A_1 компактно в $L^2(\bar{\Omega})$ [37]. В рассматриваемом случае H_1 состоит из элементов $\bar{\varphi} = [\varphi(x), \varphi(s)]$, $\varphi(x) \in W_2^{(1)}(\Omega)$, и, согласно (5.17),

$$\|\bar{\varphi}\|_1^2 = [\bar{\varphi}, \bar{\varphi}]_{A_1} = (\!(A_1\bar{\varphi}, \bar{\varphi})\!) =$$

$$= \int_\Omega \Big(\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a\varphi^2 \Big) dx \geq c_0 \|\varphi\|^2_{W_2^{(1)}(\Omega)} .$$

Тогда по теореме С.Л.Соболева о полной непрерывности оператора вложения пространства $W_2^{(1)}(\Omega)$ в гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ заключаем о компактности в $L^2(\bar{\Omega})$ множества элементов из H_1. Вещественность спектра, очевидно, следует из симметричности оператора A_1.

Отметим, что собственные функции $\bar{\varphi}_n$ оператора A_1 являются слабыми решениями граничной задачи (6.2), (6.3) в смысле

$$\int_\Omega \Big(\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + a\varphi\psi \Big) dx + \int_{\Gamma_1} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds = \beta \Big[\int_\Omega \varphi\psi dx + \int_{\Gamma_1} \varphi\psi\, ds \Big] \qquad (6.8)$$

для любой функции $\psi \in W_2^{(1)}(\Omega)$.

Из леммы 6.1 следует, что обратный к A_1 оператор A_1^{-1} вполне непрерывен и ограничен [37].

Таким образом, согласно лемме 6.1 (2°), произвольный элемент $\bar{f} \in L^2(\bar{\Omega})$, $\bar{f} = [f_0(x), f_1(s)]$, может быть аппроксимирован обобщенным рядом Фурье

$$\bar{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \bar{\varphi}_n(x) \qquad (6.9)$$

по ортонормированной в $L^2(\bar{\Omega})$ системе собственных функций оператора A_1, где

$$f_n = \frac{(\!(\bar{f}, \bar{\varphi}_n)\!)}{\omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n^2} \big[(f_0, \varphi_n)_\Omega + \langle f_1, \varphi_n \rangle_{\Gamma_1} \big] , \qquad (6.10)$$

$\varphi_n(s)$ – след $\varphi_n(x)$ на Γ_1, $\omega_n = \|\bar{\varphi}_n\|$.

Нетрудно показать, что для (6.9) выполняется аналог равенства Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \|\bar{f}\|^2 = \|f\|_{\Omega}^2 + \|f\|_{\Gamma_1}^2$$

Кроме того, если $\bar{u} \in D(A_1)$, то имеем спектральное представление оператора

$$A_1 \bar{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n \bar{e}_n(x) \qquad (6.II)$$

где $u_n = (\!(\bar{u}, \bar{e}_n)\!)$. Отсюда следует, что

$$(\!(A_1 \bar{u}, \bar{u})\!) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n^2 \geq \beta_1 \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 = \beta_1 \|\bar{u}\|^2, \qquad (6.II_1)$$

$$(\!(A_1 \bar{\varphi}_n, \bar{\varphi}_n)\!) = [\bar{\varphi}_n, \bar{\varphi}_n]_{A_1} = \beta_1 \|\bar{e}\|^2 = \beta_n . \qquad (6.II_2)$$

Следовательно, ортонормированными по энергии собственными функциями будут $\bar{e}_n(x)/\beta_n^{1/2}$, и разложение $\bar{u}(x)$ по ним дается формулами

$$\bar{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{-1} u_n \bar{e}_n(x), \quad u_n = (\!(\bar{u}, \bar{e}_n)\!) .$$

Замечание 6.I. Используя (6.II), можно ввести дробные степени оператора A_1 следующим образом. Пусть $\nu > 0$ – произвольное дробное число; тогда

$$A_1^{\nu} \bar{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{\nu} u_n \bar{e}_n(x) . \qquad (6.I2)$$

Так как A_1 – самосопряжен и для него имеет место неравенство (5.I5), то A_1^{ν} – также самосопряжен и

$$(\!(A_1^{\nu} \bar{u}, \bar{u})\!) \geq (\!(\bar{u}, \bar{u})\!) .$$

При этом $D(A_1^{\nu})$ есть полное гильбертово пространство относительно энергетической нормы

$$\|\bar{u}\|_{A_1^{\nu}} = \|A_1^{\nu} \bar{u}\| . \qquad (6.I3)$$

Дробные степени оператора A_1 подробно описаны в [38].

Ряд (6.9) сходится в норме $L^2(\bar{\Omega})$. Для установления его сходимости в норме соболевского пространства $W_2^{(\rho)}(\Omega)$, где $\rho \geq 1$ – целое число, докажем вначале следующее утверждение.

Лемма 6.2. Если $\Gamma \in C^\rho$, то найдется константа $\mu > 0$, такая, что для любой функции $u \in W_2^{(\rho)}(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\|u\|_{\Omega;\rho)} \leq \mu \|A_1^{\nu} \bar{u}\| \qquad (6.14)$$

где $\nu = \rho - 1/2$, $\bar{u} = [u(x), u(s)]$, $u(s)$-след $u(x)$ на Γ.

Доказательство. В силу замечания 6.1 имеем, что область определения $D(A_1^{\nu})$ есть полное гильбертово пространство относительно энергетической нормы (6.13).

Положим вначале $\rho = 1$ и для функции $\bar{\varphi} = [\varphi(x), \varphi(s)]$, $\varphi(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, получаем, что

$$\|A_1^{1/2}\bar{\varphi}\|^2 = (\!(A_1^{1/2}\bar{\varphi}, A_1^{1/2}\bar{\varphi})\!) = (\!(A_1\bar{\varphi}, \bar{\varphi})\!) = (\mathcal{L}\varphi, \varphi)_\Omega +$$

$$+ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, \varphi \right\rangle_{\Gamma_1} = \int_\Omega \left(\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a\varphi^2 \right) dx + \langle \varphi, \varphi \rangle_{\Gamma_1}.$$

Используя здесь принятые при постановке задачи (5.11) оценки для коэффициентов $a_{ik}(x)$, $a(x)$ и скалярное произведение в $W_2^{(1)}(\Omega)$, можно получить неравенство

$$\alpha_0 \|\nabla\varphi\|_\Omega^2 + a_0 \|\varphi\|_\Omega^2 + \|\varphi\|_{\Gamma_1}^2 \leq \|A_1^{1/2}\bar{\varphi}\| \leq \alpha_1 \|\nabla\varphi\|_\Omega^2 + a_1 \|\varphi\|_\Omega^2 + \|\varphi\|_{\Gamma_1}^2,$$

где

$$\alpha_0 = \min_{x\in\bar{\Omega}} a_{ik}(x), \quad \alpha_1 = \max_{x\in\bar{\Omega}} a_{ik}(x), \quad a_0 = \min_{x\in\bar{\Omega}} a(x), \quad a_1 = \max_{x\in\bar{\Omega}} a(x),$$

откуда следует эквивалентность норм $\|\varphi(x)\|_{1,1/2}$ и $\|\cdot\|_{\Omega,(1)}$ на функциях из $C^2(\bar{\Omega})$. Поскольку $C^2(\bar{\Omega})$ плотно в $D(A_1^{1/2})$, то эти нормы эквивалентны и на функциях из $D(A_1^{1/2})$ и, в силу теорем вложения для пространств Соболева [30,37], $u \in W_2^{(1)}$

Применяя индукцию, примем, что (6.I4) доказано для $\rho=\ell-1$, и возьмем $\bar{u} \in D(A_1^{\ell-1/2})$. Тогда $A_1^{\ell-1/2}\bar{u}=\bar{v}\in L^2(\bar{\Omega})$, а $A_1\bar{u}=\bar{w} \in D(A_1^{\ell-3/2})$. Следовательно, $w_0(x)\in W_2^{(\ell-1)}(\Omega)$, $w_1(s)\in W_2^{(\ell-3/2)}(\Gamma_1)$ и имеет место неравенство

$$\|w_0\|_{\Omega,(\ell-1)}+\|w_1\|_{\Gamma_1,(\ell-3/2)}\le c\|A_1^{\ell-3/2}\bar{w}\| = c\|A_1^{\ell-1/2}\bar{u}\| . \qquad (6.I5)$$

Но $\bar{u}=[u(x),u(s)]$, в силу (5.I3) и теоремы (5.I) является решением граничной задачи

$$\mathcal{E}u=w_0,\ x\in\Omega;\ \frac{\partial u}{\partial \nu}=w_1,\ s\in\Gamma_1;\ \frac{\partial u}{\partial \nu}=0,\ s\in\Gamma_2 . \qquad (6.I6)$$

Ее единственное решение, согласно [30], принадлежит $W_2^{(\ell)}(\Omega)$, и для него имеет место неравенство

$$\|u\|_{\Omega,\ell}\le c_1(\|w_0\|_{\Omega,(\ell-2)}+\|w_1\|_{\Gamma_1,(\ell-3/2)})\le c_2(\|w_0\|_{\Omega,(\ell-1)}+ \qquad (6.I7)$$

$$+\|w_1\|_{\Gamma_1,(\ell-3/2)})\le c\|A_1^{\ell-1/2}\bar{u}\| ,$$

доказывающее (6.I4).

Установленная оценка позволяет доказать следующее утверждение.

Теорема 6.I. При выполнении условий леммы 6.2 обобщенный ряд Фурье функции $f(x)\in W_2^{(\rho)}(\Omega)$ со следом $f(s)$ на Γ_1 по собственным функциям оператора A_1 сходится в норме $W_2^{(\rho)}(\Omega)$, и для его коэффициентов имеет место оценка

$$|f_n|<c\frac{\beta_n^{-\rho+1/2}}{\omega_n^2} , \qquad (6.I8)$$

где β_n – собственное значение оператора A_1, $\omega_n=\|\varphi_n\|$. При $\rho\ge[m/2]+1$ ($m\ge1$ – целое положительное, $[\cdot]$ – целая часть) ряд сходится в $C^{\rho-[m/2]-1}\subset C(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Поскольку собственные функции оператора A_1 являются слабыми решениями задачи (6.2), (6.3) и для них выполняется тождество (6.8) при любой $\psi\in W_2^{(1)}(\Omega)$, то

$\varphi_n(x) \in L_2(\Omega)$, $\varphi_n(s) \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$. Из леммы 6.2 и теорем вложения следует, что $\varphi_n(x) \in W_2^{(2)}(\Omega)$ и $\varphi_n(s) \in W_2^{3/2}(\Gamma_1)$ при $\Gamma \in C^2$. Продолжая их применение, получаем, что для $\Gamma \in C^p$ $\varphi_n(x) \in W_2^{(p)}(\Omega)$. Далее, если $p \geq [m/2]+1$, то, согласно теоремам вложения [30], $\varphi_n(x) \in C^{p-[m/2]-1}$ и, как следствие, $\varphi_n(x) \in C(\bar{\Omega})$. Так как для $\Gamma \in C^p$ собственные функции $\varphi_n(x)$ задачи (6.2), (6.3) - суть элементы $W_2^{(p)}(\Omega)$, а ряд (6.9) сходится в норме $W_2^{(p)}(\Omega)$, то и $f(x) \in W_2^{(p)}(\Omega)$.

В частности, если $p=1$, то сходимость ряда (6.9) в $W_2^{(1)}(\Omega)$ следует из леммы 6.I (2°), т.к. H_1 совпадает с $D(A_1^{1/2})$ [37]. При $p \geq 2$, учитывая, что $a \neq 0$, и, следовательно, $\beta_n > 0$, для коэффициентов (6.I0), используя (6.I2), лемму 6.2 и симметричность дробных степеней оператора A_1, можно получить цепочку равенств

$$f_n = \frac{(\!(\bar{f}, \bar{\varphi}_n)\!)}{\omega_n^2} = \frac{\beta^{-p+1/2}}{\omega_n^2} (\!(\bar{f}, A_1^{p-1/2} \bar{\varphi}_n)\!) = \frac{\beta_n^{-p+1/2}}{\omega_n^2} (\!(A_1^{p-1/2} \bar{f}, \varphi_n)\!). \tag{6.I9}$$

Здесь $A_1^{p-1/2} \bar{f} \in L^2(\bar{\Omega})$, ибо по лемме 6.2 $f \in W_2^{(p)}(\Omega)$. Поэтому дальше имеем, что

$$f_n = \frac{\beta^{-p+1/2}}{\omega_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{p-1/2} f_n (\!(\bar{\varphi}_n, \bar{\varphi}_n)\!) = \frac{\beta^{-p+1/2}}{\omega_n^2} \| A_1^{p-1/2} \bar{f} \|^2. \tag{6.20}$$

Но, согласно (6.I4)

$$\| A_1^{p-1/2} \bar{f} \| > c_0 \| f \|_{\Omega,(p)}. \tag{6.2I}$$

Внеся это неравенство в (6.20), получаем оценку (6.I8).

Далее, пусть $\bar{f}_N$ - частная сумма ряда (6.9),

$$\bar{f}_N = \sum_{n=1}^{N} f_n \bar{\varphi}_n ,$$

и пусть $N > K$. Тогда из (6.20) и (6.2I) получаем

$$\| f_N - f_K \|^2_{\mathfrak{R},(\rho)} \le c \| A_1^{\rho-1/2} (f_N - f_K) \|^2 =$$

$$= c \Big\| \sum_{k=K+1}^{N} \beta^{\rho-1/2} f_k \bar{\varphi}_k \Big\|^2 \to 0$$

при $N, K \to \infty$, т.к. ряд в (6.20) сходится. Сходимость в $W_2^{(\rho)}(\mathfrak{R})$ ряда (6.9) к $f(x) \in W_2^{(\rho)}(\mathfrak{R})$ доказана.

Следствие. Если $\rho \ge [m/2] - 2$ собственные функции $\varphi_n(x) \in C^1(\bar{\mathfrak{R}})$, поэтому при $\rho \ge [m/2] + 2$ они удовлетворяют граничному условию на Γ_1 в классическом смысле.

Обратимся теперь к уравнению (6.4) с оператором A_2.

Особенностью задачи (6.5)–(6.6) является то, что спектральный параметр β входит в уравнение при младшем члене, а в граничное условие на Γ_1 – при нормальной производной. В результате применяемого подхода в спектральной задаче имеем естественное граничное условие импедансного типа [37] , которое отвечает главному условию в исходной эллиптической задаче (5.I2). Следовательно, при решении задачи на собственные значения с условием Дирихле в исходной задаче на всей границе координатные функции можно не подчинять весьма обременительному требованию удовлетворять главному условию.

Сведем исследование задачи (6.5)–(6.6) к исследованию спектра квадратичного пучка с операторными коэффициентами [47,50,5I] . Пусть $g(x|x')$ – функция Грина, вводимая как решение задачи

$$\begin{aligned} &\varepsilon g = \delta(x,x') \quad , (x,x' \in \mathfrak{R}); \\ &\frac{\partial g}{\partial \nu'} = 0 \, , (s,s' \in \Gamma_1); \quad g = 0 \, , (s,s' \in \Gamma_2); \end{aligned} \tag{6.22}$$

известно, что ее решение вида $\bar{g} = [g(x|x'), g(s|s')]$, где $g(s|s')$ – сужение $g(x|x')$ на Γ_1 и $g(x|x') \in L_2(\Omega)$, существует и единственно. С использованием функции $g(x|x')$ задача (6.5)–(6.6) сводится к эквивалентному уравнению

$$\varphi(x) = \beta P\varphi - \frac{1}{\beta} Q\varphi \quad , \tag{6.23}$$

где операторы P и Q действуют по формулам

$$P\varphi = \int_{\Omega} \varphi(x') g(x|x')\, dx',$$

$$Q\varphi = \int_{\Gamma_1} \varphi(s') g(s|s')\, ds' \quad . \tag{6.24}$$

Поскольку функция $g(x|x')$ симметрична и имеет слабую особенность при $x = x'$, то операторы P и Q определены и ограниченны в $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma_1)$ соответственно и являются самосопряженными и непрерывными в этих пространствах, причем при $\varphi \neq 0$

$$(P\varphi, \varphi)_{\Omega} > 0 \quad , \quad \langle Q\varphi, \varphi \rangle_{\Gamma_1} \geqslant 0 \quad . \tag{6.25}$$

Обозначив через P_1 оператор сужения на Γ_1 результата действия оператора P, т.е.

$$P_1\varphi = \left[\int_{\Omega} \varphi(x') g(x|x')\, dx' \right]_{x = s \in \Gamma_1} , \tag{6.26}$$

окончательно получим операторное уравнение

$$\varphi(s) = G(\beta)\varphi(s), \tag{6.27}$$

где

$$G(\beta) = \beta P_1 - \frac{1}{\beta} Q \quad . \tag{6.28}$$

Под спектром оператора $G(\beta)$ (а вместе с ним – и оператора A_2) будем понимать те значения параметра β, при которых оператор $I - G(\beta)$ не имеет ограниченного обратного.

При этом число $\beta_0 \neq 0$ будем называть характеристическим числом оператора $G(\beta)$ и идентифицировать его с собственным значением оператора A_2, если уравнение (6.27) имеет нетривиальное решение. Нетривиальные решения уравнения (6.4), отвечающие данному β_0, будем называть собственными функциями оператора A_2.

Операторное уравнение, отличающееся от (6.27) лишь знаком члена с $1/\beta$, в тех же частных предложениях самосопряженности и полной непрерывности операторов P_1 и Q, изучалось в статье [47]. Полное исследование квадратичного пучка с несамосопряженными операторными коэффициентами дано в работе [44]. Приводимое ниже утверждение может быть выведено из результатов этих работ.

Лемма 6.3. Спектр оператора A_2 является вещественным и дискретным. При этом

I°. Он состоит из двух счетных серий собственных значений: положительных $\{\beta_m^\infty\}_{m=1}^\infty$ с точкой сгущения на бесконечности и отрицательных $\{\beta_k^\circ\}_{k=1}^\infty$.

2°. Совокупность всех собственных элементов образует ортонормированную систему $\{\bar{e}_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\bar{e}_n = \bar{\varphi}_n / \|\bar{\varphi}_n\|$, полную в гильбертовом пространстве $L^2(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Вещественность спектра следует из симметричности оператора, а дискретность – из теоремы I.5.I книги [54].

Пусть $\varphi(s)$ – собственная функция уравнения (6.27), отвечающая характеристикескому числу β_1. Тогда

$$\varphi = \beta_1 P_1 \varphi - \frac{1}{\beta} Q \varphi .$$

Умножив это тождество скалярно в $L_2(\Gamma_1)$ на φ, получим квадратное уравнение

$$\beta_1^2 \langle P_1\varphi,\varphi\rangle - \beta_1\langle\varphi,\varphi\rangle - \langle Q\varphi,\varphi\rangle = 0 \quad .$$

Из него следует, что каждой собственной функции $\varphi(s)$ соответствуют два различные по величине и знаку характеристические числа

$$\beta_1^{\infty} = \frac{\langle\varphi,\varphi\rangle + \sqrt{\langle\varphi,\varphi\rangle^2 + 4\langle P_1\varphi,\varphi\rangle\langle Q\varphi,\varphi\rangle}}{2\langle P_1\varphi,\varphi\rangle} > 0 \qquad (6.29)$$

$$\beta_1^{0} = \frac{\langle\varphi,\varphi\rangle - \sqrt{\langle\varphi,\varphi\rangle^2 + 4\langle P_1\varphi,\varphi\rangle\langle Q\varphi,\varphi\rangle}}{2\langle P_1\varphi,\varphi\rangle} < 0 \qquad (6.30)$$

Из (6.29) сразу же следует, что

$$\beta_1^{\infty} > \frac{\langle\varphi,\varphi\rangle}{\langle P_1\varphi,\varphi\rangle} \qquad (6.31)$$

Кроме того, так как

$$\beta_1^{0} + \beta_1^{\infty} = \frac{\langle\varphi,\varphi\rangle}{\langle P_1\varphi,\varphi\rangle} \quad , \qquad (6.32)$$

то, очевидно,

$$\beta_1^{\infty} > |\beta_1^{0}| \quad . \qquad (6.33)$$

С другой стороны, так как

$$\beta_1^{0}\beta_1^{\infty} = -\frac{\langle Q\varphi,\varphi\rangle}{\langle P_1\varphi,\varphi\rangle} = -\frac{\langle\varphi,\varphi\rangle}{\langle P_1\varphi,\varphi\rangle}\cdot\frac{\langle Q\varphi,\varphi\rangle}{\langle\varphi,\varphi\rangle} \quad ,$$

то с учетом здесь неравенства (6.30), заключаем, что

$$|\beta_1^{0}| \le \frac{\langle Q\varphi,\varphi\rangle}{\langle\varphi,\varphi\rangle}$$

или

$$\beta_1^{0} \ge -\frac{\langle Q\varphi,\varphi\rangle}{\langle\varphi,\varphi\rangle} \quad . \qquad (6.34)$$

Неравенства (6.31), (6.34) с учетом (6.25) доказывают утверждение 1°. Из этих же неравенств можно сделать вывод, что асимптотика положительных характеристических чисел определяется характеристическими числами оператора P_1, а асимптотика отрицательных – характеристическими числами оператора Q (см. также [54], стр.366). Раздельная асимптотика этих серий собственных значений для случая $\mathcal{E} = -\nabla^2$ в явном виде получена А.Н.Кожевниковым на основе аппарата эллиптических псевдодифференциальных операторов [43].

Обращаясь к утверждению 2°, отметим, что оно по существу является следствием из 1°, так как задача на собственные значения самосопряженного расширения полуограниченного снизу оператора A_2 сводится к такой же задаче для положительно определенного оператора. Действительно, если $\alpha > 0$ – любое вещественное число, большее, чем $|k|$ в неравенстве (5.25), то уравнение (6.4) можно переписать в виде

$$A_2^* \bar{\varphi} = \beta^* \bar{\varphi} ,$$

где $A_2^* = A_2 + \alpha I$, $\beta^* = \alpha + \beta$. Здесь оператор A_2^* – положительно определен, ибо

$$(\!(A_2^* \bar{\varphi}, \bar{\varphi})\!) = (\!(A_2 \bar{\varphi}, \bar{\varphi})\!) + \alpha (\!(\bar{\varphi}, \bar{\varphi})\!) \geq (\alpha + \beta) \|\bar{\varphi}\|^2 ;$$

Таким образом, если β_n^* – собственные значения оператора A_2^*, то $\beta_n = \beta_n^* - \alpha$ – собственные значения оператора A_2 (и наоборот). Элементарно устанавливаются и соотношения между собственными функциями операторов A_2 и A_2^*, причем для собственных функций последнего утверждение 2° доказано [34,37].

Замечание 6.2. Особый интерес для приложений представляет одномерный случай, когда $\mathcal{E}u \equiv -d^2u/dx^2$. Здесь представляется возможность в явном виде выписать собственные функции оператора A_2 и уравнения для определения собственных значе-

ний. Этот случай и примеры рассмотрены в § 7; характерно, что здесь число отрицательных собственных значений не более двух.

Из полноты собственных функций оператора A_2 в $L^2(\bar{\Omega})$ следует, что если ввести сквозную нумерацию его собственных функций и собственных значений, то произвольная функция $\bar{f} = [f_0(x), f_1(s)] \in L^2(\bar{\Omega})$ может быть формально аппроксимирована обобщенным рядом Фурье вида

$$\bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \bar{\varphi}_n \quad , \tag{6.35}$$

где

$$\bar{\varphi}_n = \left[\varphi_n(x), -\frac{\partial \varphi_n(s)}{\partial \nu} \right] \quad , \qquad \omega_n = \| \bar{\varphi}_n \| \quad ,$$

$$f_n = \frac{(\!(\bar{f}, \bar{\varphi}_n)\!)}{\omega_n^2} = \frac{1}{\omega_n^2} \left[\int_{\Omega} f_0(x) \varphi_n(x)\, dx - \int_{\Gamma_1} f_1(s) \frac{\partial \varphi_n(s)}{\partial \nu} ds \right] = \tag{6.36}$$

$$= \frac{1}{\omega_n^2} \left[\int_{\Omega} f_0(x) \varphi_n(x)\, dx + \frac{1}{\beta_n} \int_{\Gamma_1} f_1(s) \varphi_n(s)\, ds \right] \quad ,$$

сходящимся в $L^2(\bar{\Omega})$.

Принципиальное различие рядов (6.9) и (6.35) очевидно. Спектральное представление оператора A_2 имеет вид

$$A_2 \bar{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n u_n \bar{\varphi}_n(x), \quad f_n = \frac{(\!(\bar{u}, \bar{\varphi}_n)\!)}{\omega_n^2} \quad , \tag{6.37}$$

если $\bar{u} \in D(A_2)$.

Замечание 6.3. Наличие у оператора A_2 серии отрицательных собственных значений с точкой сгущения в нуле означает, что, во-первых, обратный оператор A_2^{-1} -неограниченный, и, во-вторых, для доказательства сходимости ряда (6.35) в $W_2^{(P)}(\Omega)$ для $f \in W_2^{(P)}(\Omega)$ применение дробных степеней A_2 не предоставляется возможным ввиду неоднозначности такого определения. Поэтому разложение $\bar{f}$ в ряд (6.35) носит формальный характер.

Исследование этого вопроса представляет самостоятельный интерес и выходит далеко за рамки этой работы. В следующем параграфе рассмотрены некоторые одномерные варианты задачи (6.5), (6.6), и экспериментально установлена сходимость разложений решений некоторых неоднородных задач по собственным функциям оператора A_2 .

§ 7. Одномерные собственные функции оператора A_2 и формулы разложения

Примем, что оператор A_2 действует по закону

$$[u(x),\ u'(0),\ -u'(1)] \to [-u''(x)+qu(x),\ u(0),\ u(1)], \quad (7.1)$$

так, что уравнению в $L^2[0,1]$ $A_2\bar{\varphi}=\beta\bar{\varphi}$ соответствует двухточечная краевая задача на собственные значения

$$-\varphi''+q(x)\varphi=\beta\varphi\ ,\quad x\in(0,1)\ ; \qquad (7.2)$$

$$\varphi(0)-\beta\varphi'(0)=0\ ,\qquad \varphi(1)+\beta\varphi'(1)=0\ , \qquad (7.3)$$

где $q(x)$ – непрерывная функция.

Лемма 7.1. Для произвольного β существуют линейно независимые решения $S(x,\beta)$ и $C(x,\beta)$ уравнения (7.2), удовлетворяющие условиям

$$S(0,\beta)=\beta\ ,\quad S'(0,\beta)=1\ ; \qquad (7.4)$$

$$C(1,\beta)=\beta\ ,\quad C'(1,\beta)=-1\ . \qquad (7.5)$$

Доказательство. Действительно, представляя (7.2) в виде

$$\varphi''+\beta\varphi=q(x)\varphi$$

и используя фундаментальную систему решений уравнения $\varphi''+\beta\varphi=0$ получим эквивалентное интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = c_1 \sin x\sqrt{\beta} + c_2 \cos x\sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^x q(t)\, \varphi(t,\beta) \sin (x-t)\sqrt{\beta}\, dt \ .$$

Поскольку

$$\varphi'(x) = \sqrt{\beta}\,(c_1 \cos x\sqrt{\beta} - c_2 \sin x\sqrt{\beta}) + \int_0^x q(t)\, \varphi(t,\beta) \cos (x-t)\sqrt{\beta}\, dt \ ,$$

то граничные условия (7.4) будут выполняться при

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ , \quad c_2 = \beta$$

и, следовательно,

$$s(x,\beta) = \frac{\sin x\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} + \beta \cos x\sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^x q(t)\, s(t,\beta) \sin (x-t)\sqrt{\beta}\, dt \ . \qquad (7.6)$$

Очевидно, что функция $s(x,\beta)$ удовлетворяет также граничному условию

$$s(0,\beta) - \beta\, s'(0,\beta) = 0 \qquad (7.7)$$

при произвольном конечном β .

Аналогично находится, что второе решение уравнения (7.2), удовлетворяющее условиям (7.5), находится из интегрального уравнения

$$c(x,\beta) = \frac{\sin (1-x)\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}} + \beta \cos (1-x)\sqrt{\beta} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_x^1 q(t)\, c(t,\beta) \sin (t-x)\sqrt{\beta}\, dt \ , \qquad (7.8)$$

причем выполняется соотношение

$$c(1,\beta) + \beta\, c'(1,\beta) = 0 \ . \qquad (7.9)$$

Замечание 7.I. Следуя [52,56] , можно легко доказать, что $c(x,\beta)$ и $s(x,\beta)$ являются целыми функциями β для каждого $x \in [0,1]$, а их вронскиан $W(\beta) = \{c(x,\beta),\, s(x,\beta)\}$ имеет только простые вещественные нули.

Общий метод получения формулы разложения, следующий из [56] , некоторой функции $\bar{f} = [f(x), f'(0), f'(1)]$ состоит в следующем. Рассмотрим уравнение $A_2 \bar{\varphi} - \beta \bar{\varphi} = -\bar{f}$, в

котором параметр β считаем комплексным. Нетрудно видеть, что решение этого уравнения можно представить через введенные выше функции $c(x,\beta)$ и $s(x,\beta)$ в виде

$$\varphi(x,\beta)=\frac{s(x,\beta)}{w(\beta)}\left[\int_0^x c(\xi,\beta)f(\xi)\,d\xi + c'(0,\beta)f'(0)\right] + \tag{7.10}$$

$$+\frac{c(x,\beta)}{w(\beta)}\left[\int_x^1 s(\xi,\beta)f(\xi)\,d\xi + s'(0,\beta)f'(1)\right] .$$

Непосредственно проверяется, что эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\varphi'' + [\beta - q(x)]\varphi = f(x) , \quad x\in(0,1)$$

и предельным условиям

$$\varphi(0)-\beta\varphi'(0)=f'(0) , \quad \varphi(1)+\beta\varphi'(1)=f'(1) .$$

Далее рассматривается интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{G_m}\varphi(x,\beta)\,d\beta \tag{7.11}$$

по замкнутому контуру в плоскости комплексного переменного $\beta=\lambda^2$, $\lambda=\sigma+i\tau$, где верхняя половина G_m^+ контура G_m совпадает с четвертью границы квадрата в плоскости λ, образованной отрезками прямых

$$\sigma=(m+\tfrac{1}{2})\pi,\ 0\le\tau\le(m+\tfrac{1}{2})\pi\ ;\ \tau=(m+\tfrac{1}{2})\pi,\ 0\le\sigma\le(m+\tfrac{1}{2})\pi ,$$

где m – целое положительное, а нижняя половина G_m^- строится симметрично относительно вещественной оси.

Согласно лемме Жордано [56], интеграл $J(x)$ равен сумме вычетов функции $\varphi(x,\beta)$ в нулях знаменателя $w(\beta)$. Но в силу замечания 7.I вронскиан $w(\beta)=\{c(x,\beta),s(x,\beta)\}$ имеет только вещественные нули $\beta=\beta_n$ и, следовательно,

$c(x,\beta_n)$ и $s(x,\beta_n)$ линейно зависимы в этих точках и отличаются друг от друга лишь постоянным множителем: $s(x,\beta_n) = k_n\, c(x,\beta_n)$. Тогда $\varphi(x,\beta)$ имеет при $\beta=\beta_n$ вычет

$$\frac{k_n c(x,\beta_n)}{W'(\beta_n)}\left[\int_0^1 c(x,\beta_n) f(x)\,dx + c'(0,\beta_n) f'(0) + f'(1) c'(1,\beta_n)\right] \qquad (7.12)$$

и, следовательно [56], при $m \to \infty$

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{G_m} \varphi(x,\beta)\,d\beta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c(x,\beta_n)\,, \qquad (7.13)$$

где

$$a_n = \frac{k_n}{W'(\beta_n)}\left[\int_0^1 f(x) c(x,\beta_n)\,dx + c'(0,\beta_n) f'(0) + c'(1,\beta_n) f'(1)\right]. \qquad (7.14)$$

Используя в (7.10) асимптотические оценки для $c(x,\beta)$ и $W(\beta)$ по параметру β, легко выводятся предельные значения разложения (7.13):

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n c(x,\beta_n) = f(+0)\,, \qquad \lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n c(x,\beta_n) = f(1-0)\,.$$

Таким образом доказана следующая теорема о разложении.

Теорема 7.1. Если функция $\bar f = [f(x), f'(0), f'(1)] \in L^2[0,$ имеет в окрестности точки $x \in (0,1)$ ограниченную вариацию, то ее ряд Фурье (7.13) по собственным функциям оператора A_2 сходится к $\bar f$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n c(x,\beta_n) = \begin{cases} f(+0), & x = 0 \\ \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], & x \in (0,1) \\ f(1-0), & x = 1 \end{cases} \qquad (7.15)$$

Отметим, что формулы (7.13), (7.14) имеют конструктивный характер. Аналогичные формулы могут быть получены и для иных комбинаций граничных условий при $x=0$ и $x=1$. Например, если оператор A действует по формуле

$$[u(x), u'(0), u(1)] \to [-u'' + q(x)u,\ u(0),\ u(1)]$$

и задача на собственные функции имеет вид

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = \beta\varphi \quad , \quad x \in (0,1) ;$$

$$\varphi(0) - \beta\varphi'(0) = 0 ; \quad \varphi'(1) - \beta\varphi(1) = 0 ,$$

то разложение $\bar{f}(x) = [f(x), f'(0), f(1)] \in L^2[0,1]$ дается формулой (7.I5), где [52]

$$a_n = \frac{k_n}{W'(\beta_n)} \left[\int_0^1 f(x) c(x,\beta_n)\, dx + c'(0,\beta_n) f'(0) + c(1,\beta_n) f(1) \right] .$$

Собственные функции формулы для вычисления собственных значений некоторых спектральных задач при $q(x) = a^2$ и $q = 0$ даны в табл. I-3.

Проанализируем более обстоятельно случай, представленный в табл. I (задача (7.2), (7.3)). В развернутом виде собственные функции здесь задаются следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \sin x\sqrt{\beta_n - a^2} + \beta_n \sqrt{\beta_n - a^2} \cos x\sqrt{\beta_n - a^2} \quad , \qquad (7.I6)$$

где собственные значения определяются из трансцендентного уравнения

$$\left[1 - (\beta\sqrt{\beta - a^2})^2\right] \sin\sqrt{\beta - a^2} + 2\beta\sqrt{\beta - a^2} \cos\sqrt{\beta - a^2} = 0. \qquad (7.I7)$$

В зависимости от величины и знака β_n возможны следующие случаи: I) $\beta_n = -\alpha_n^2 < 0$; 2) $\beta_n = \gamma_n^2 < a^2$; 3) $\beta_n = \gamma_n^2 > a^2$. Рассмотрим их.

I) В случае $\beta_n = -\alpha_n^2 < 0$ (7.I7) приводится к уравнению

$$\left(\frac{\alpha^2\sqrt{\alpha^2 + a^2} - 1}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2 + a^2} + 1} \right)^2 = e^{-2\sqrt{\alpha^2 + a^2}} \quad , \qquad (7.I8)$$

из которого сразу же следует, что имеются в точности два отрицательные собственные значения (табл. 4).

Таблица I

Собственные значения и собственные функции задачи

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = \beta\varphi \ , \ 0<x<1 \ ; \ \varphi(0) - \beta\varphi'(0) = \varphi(1) + \beta\varphi'(1) = 0 \ .$$

q	β_n	ν		$\varphi_n(x)$	ω_n^2 *)
a^2	$\beta_n = -\alpha_n^2$ $n = 1,2$	$\dfrac{\alpha^2\sqrt{\alpha^2+a^2} - 1}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2+a^2} + 1}$	$\nu^2 = e^{-2\sqrt{\alpha^2+a^2}}$	$\nu_n e^{x\sqrt{\alpha_n^2+a^2}} + e^{-x\sqrt{\alpha_n^2+a^2}}$ +	$2\dfrac{(\alpha_n^4+4)(\alpha_n^2+a^2)+2\alpha_n^2-1}{(\alpha_n^2\sqrt{\alpha_n^2+a^2}+1)^2}$
	$\beta_n = \gamma_n^2$ $n = 3,4,\ldots$	$\gamma^2\sqrt{\gamma^2-a^2}$	$(1-\nu^2)\sin\sqrt{\gamma^2-a^2} + 2\nu\cos\sqrt{\gamma^2-a^2} = 0$	$\sin x\sqrt{\gamma_n^2-a^2} + \nu_n\cos x\sqrt{\gamma_n^2-a^2}$ +	$\dfrac{(\gamma_n^4+4)(\gamma_n^2-a^2)+2\gamma_n^2+1}{2}$
0	$\beta_n = -\alpha_n^2$ $n = 1,2$	$\dfrac{\alpha^3-1}{\alpha^3+1}$	$\nu^2 = e^{-2\alpha}$	$\nu_n e^{\alpha_n x} + e^{-\alpha_n x}$	$2\dfrac{(\alpha_n^4+6)\alpha_n^2-1}{(\alpha_n^3+1)^2}$
	$\beta_n = \gamma_n^2$ $n = 3,4,\ldots$	γ^3	$(1-\nu^2)\sin\gamma + 2\nu\cos\gamma = 0$	$\sin\gamma_n x + \nu_n\cos\gamma_n x$	$\dfrac{(\gamma_n^4+6)\gamma_n^2+1}{2}$

*) $\bar{\varphi}_n = [\varphi_n(x), \varphi_n'(0), \varphi'(1)]$, $\omega_n^2 = \int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx + [\varphi_n'(0)]^2 + [\varphi_n'(1)]^2$

Таблица 2

Собственные значения и собственные функции задачи

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = \beta\varphi,\ 0<x<1;\ \varphi(0) = \varphi(1) + \beta\varphi'(1) = 0.$$

q	β_n	ν	Дисперсионное уравнение	$\varphi_n(x)$	ω_n^2 *)
a^2	$\beta_1 = -\alpha_1^2$	$\dfrac{1-\alpha^2\sqrt{\alpha^2+a^2}}{1+\alpha^2\sqrt{\alpha^2+a^2}}$	$\nu = e^{-2\sqrt{\alpha^2+a^2}}$	$\operatorname{sh} x\sqrt{\alpha_1^2+a^2}$	$\dfrac{(3\alpha_1^2+2a^2)\operatorname{ch}^2\sqrt{\alpha_1^2+a^2}-1}{2}$
	$\beta_n = \gamma_n^2$ $n=2,3,\ldots$	$\gamma^2\sqrt{\gamma^2-a^2}$	$\sin\sqrt{\gamma^2-a^2} + \nu\cos\sqrt{\gamma^2-a^2} = 0$	$\sin x\sqrt{\gamma_n^2-a^2}$	$\dfrac{(3\gamma_n^2-2a^2)\cos^2\sqrt{\gamma_n^2-a^2}+1}{2}$
0	$\beta_1 = -\alpha_1^2$	$\dfrac{1-\alpha^3}{1+\alpha^3}$	$\nu = e^{-2\alpha}$	$\operatorname{sh}\alpha_1 x$	$\dfrac{3\alpha_1^2\operatorname{ch}^2\alpha_1 - 1}{2}$
	$\beta_n = \gamma_n^2$ $n=2,3,\ldots$	γ^3	$\sin\gamma + \nu\cos\gamma = 0$	$\sin\gamma_n x$	$\dfrac{3\gamma_n^2\cos^2\gamma_n + 1}{2}$

*) $\overline{\varphi} = \left[\varphi_n(x),\ \varphi_n'(1)\right]$, $\omega_n^2 = \int_0^1 \varphi_n^2(x)\,dx + \left[\varphi_n'(1)\right]^2$

Таблица 3

Собственные значения и собственные функции задачи

$$-\varphi'' + q(x)\varphi = \beta\varphi,\ 0<x<1;\ \varphi'(0) = \varphi(1) + \beta\varphi'(1) = 0.$$

q	β_n	ν	Дисперсионное уравнение	$\varphi_n(x)$	ω_n^2 **)
a^2	$\beta_1 = -\alpha_1^2$	$\dfrac{\alpha^2\sqrt{\alpha^2+a^2}-1}{\alpha^2\sqrt{\alpha^2+a^2}+1}$	$\nu = e^{-2\sqrt{\alpha^2+a^2}}$	$\operatorname{ch} x\sqrt{\alpha_1^2+a^2}$	$\dfrac{(3\alpha_1^2+2a^2)\operatorname{sh}^2\sqrt{\alpha_1^2+a^2}+1}{2}$
	$\beta_n = \gamma_n^2$ $n=2,3,\ldots$	$\gamma^2\sqrt{\gamma^2-a^2}$	$\cos\sqrt{\gamma^2+a^2} - \nu\sin\sqrt{\gamma^2-a^2} = 0$	$\cos x\sqrt{\gamma_n^2-a^2}$	$\dfrac{(3\gamma_n^2-2a^2)\sin^2\sqrt{\gamma_n^2-a^2}+1}{2}$
0	$\beta_1 = -\alpha_1^2$	$\dfrac{\alpha^3-1}{\alpha^3+1}$	$\nu = e^{-2\alpha}$	$\operatorname{ch}\alpha_1 x$	$\dfrac{3\alpha_1^2\operatorname{sh}^2\alpha_1 + 1}{2}$
	$\beta_n = \gamma_n^2$ $n=2,3,\ldots$	γ^3	$\cos\gamma - \nu\sin\gamma = 0$	$\cos\gamma_n x$	$\dfrac{3\gamma_n^2\sin^2\gamma_n + 1}{2}$

**) $\overline{\varphi} = \left[\varphi_n(x),\ \varphi_n'(1)\right]$, $\omega_n^2 = \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx + \left[\varphi_n'(1)\right]$

Таблица 4.

Отрицательные собственные значения
задачи (7.2), (7.3)

n \ a	0	0,5	I	I,5
1	I,223876758	I,I7699OI3I	I,05322294I	0,90II06707
2	0,694566I04	0,68698099I	0,6688II340	0,642I34290

Интересно то, что с ростом a отрицательные собственные значения α_1 и α_2 сближаются, но движутся к нулю асимптотически очень медленно.

2) В случае $\beta_n = \gamma_n^2 < a^2$ из (7.I7) получаем, что они определяются уравнением

$$\left(\frac{\gamma^2\sqrt{a^2-\gamma^2}-1}{\gamma^2\sqrt{a^2-\gamma^2}+1} \right)^2 = e^{2\sqrt{a^2-\gamma^2}} . \qquad (7.I9)$$

Анализ (7.I9) показывает, что собственных значений $0 < \beta_n < a$ нет.

3). В случае $\beta_n = \gamma_n^2 > a$ из (7.I7) получаем трансцендентное уравнение

$$\left[1-(\gamma^2\sqrt{\gamma^2-a^2})^2\right] \sin\sqrt{\gamma^2-a^2} + 2\gamma^2\sqrt{\gamma^2-a^2} = 0 . \qquad (7.20)$$

Оно дает счетное множество возрастающих по величине положительных собственных значений, причем наименьший из них отличен от нуля.

Замечание 7.2. Дискретность спектра и конечное число отрицательных собственных значений, отличных от нуля при любом конечном a, показывает, что в одномерном случае оператор A_2^{-1}, обратный к полуограниченному снизу оператору A_2, является вполне непрерывным и ограниченным. Для большего числа измерений этот вопрос остается открытым.

Асимптотику положительных собственных значений оператора

A_2 без нарушения общности рассмотрения при $\alpha = 0$. Тогда из (7.20) получаем уравнение

$$2\gamma^3 \cos\gamma = (\gamma^6 - 1)\sin\gamma \ , \qquad (7.21)$$

откуда

$$\operatorname{tg}\gamma = 2\gamma^3/(\gamma^6 - 1) \ . \qquad (7.22)$$

Поскольку при $0 < \gamma < 1$ $\operatorname{tg}\gamma > 0$, а $2\gamma^3/(\gamma^6 - 1) < 0$, то на этом интервале собственных значений нет. Нетрудно установить, что все собственные значения располагаются в пределах

$$(n-1)\pi < \gamma_n < \left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \ ,$$

т.е. в первом приближении имеем

$$\beta_n \underset{n\to\infty}{\sim} (n-1)^2\pi^2 \ . \qquad (7.23)$$

Далее, так как при $n \to \infty$ $\gamma_n \to \infty$, то для достаточно больших n из (7.21) будет следовать, что

$$2\cos\gamma_n = \gamma_n^3 \sin\gamma_n \qquad (7.24)$$

Положим здесь $\gamma_n = (n-1)\pi + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n < 1$, учтем, что при малых ε_n $\sin\varepsilon_n \approx \varepsilon_n$, $\cos\varepsilon_n \approx 1$ и пренебрежем членами порядка ε_n^2 и ε_n^3 ; в результате получим уравнение

$$3(n-1)^2\pi^2\varepsilon_n^2 + (n-1)^3\pi^3\varepsilon_n - 2 = 0 \ ,$$

положительный корень которого

$$\varepsilon_n = -\frac{(n-1)\pi}{6} + \sqrt{\frac{(n-1)^2\pi^2}{6^2} + \frac{2}{3(n-1)^2\pi^2}} \ .$$

Следовательно, асимптотика положительных собственных значений задается формулой

$$\gamma_n^* \sim (n-1)\pi - \frac{(n-1)\pi}{6} + \left[\frac{(n-1)^2\pi^2}{36} + \frac{2}{3(n-1)^2\pi^2}\right]^{1/2} + \ldots \ . \qquad (7.25)$$

Результаты прямого решения трансцендентного уравнения (7.2I) и вычислений по (7.25) для первых десяти собственных значений сопоставляются в табл. 5. Оказывается, что эти результаты практически совпадают не только для больших n, но и для начальных номеров.

Таблица 5.

Сравнение результатов вычислений по (7.2I) и (7.25)

n	γ_n	γ_n^*	$\lvert\gamma_n - \gamma_n^*\rvert$
I	I,I539223655		
2	3,2024680005	3,2025479	$7{,}99 \cdot 10^{-5}$
3	6,29I2I73053	6,29I2I7386	$3{,}33 \cdot 10^{-7}$
4	9,427I65I47	9,427I65I49	$2{,}1 \cdot 10^{-9}$
5	I2, 567378232	I2,56737823	-
6	I5,70847924I	I5,70847924	-
7	I8,849854533	I8,84985453	-
8	2I,99I336626	2I,99I33662	-
9	25,I32867209	25,I3286720	-
I0	28,274422379	28,27442235	-

Видно, что γ_n уже при $n \geq 4$ располагаются почти через π ($|\gamma_4 - \gamma_3| \approx 3{,}I35947842$, $|\pi - (\gamma_8 - \gamma_7)| \approx I{,}I06 \cdot 10^{-4}$).

§ 8. Собственные функции операторов для некоторых типов областей

Приведем здесь собственные функции, ортонормированные в $L^2(\bar{\Omega})$ и уравнения для вычисления собственных значений для некоторых типичных в приложениях областей в круговых цилиндрических и сферических координатах для простейшего случая, когда $a_{ik} = \delta_{ik}$ и $q = 0$, т.е. $\mathcal{E}u = -\nabla^2 u$. При этом опера-

торному уравнению $A_1\bar{\varphi} = \beta\bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi} = [\varphi(x), \varphi(s)]$, $\varphi(s)$ – след $\varphi(x)$ на Γ_1 , соответствует краевая задача

$$-\nabla^2\varphi = \beta\varphi \ , \quad x \in \Omega \ ;$$
$$(\vec{\nu}\cdot\nabla\varphi) = \beta\varphi \ , \ s \in \Gamma_1 ; \quad (\vec{\nu}\cdot\nabla\varphi) = 0 \ , \ s \in \Gamma_2 \ , \tag{8.1}$$

а операторному уравнению $A_2\bar{\varphi} = \beta\bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi} = [\varphi(x), -(\vec{\nu}\cdot\nabla\varphi(s))], (\vec{\nu}\cdot\nabla\varphi)$ – нормальная производная $\varphi(x)$ на Γ_1 , соответствует задача

$$-\nabla^2\varphi = \beta\varphi \ , \quad x \in \Omega \ ;$$
$$\varphi = -\beta(\vec{\nu}\cdot\nabla\varphi) \ , \ s \in \Gamma_1 ; \quad \varphi = 0 \ , \ s \in \Gamma_2 \ . \tag{8.2}$$

Используются следующие обозначения оператора Лапласа в (8.I) и (8.2):

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$\left(0 \le r < \infty \ , \quad 0 \le \theta \le 2\pi \ , \quad -\infty < z < \infty\right)$$

в круговых цилиндрических координатах (r, θ, z) и

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{r^2(1-\mu^2)}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$
$$\left(0 \le r < \infty \ , \quad 0 \le \theta \le 2\pi \ , \quad -1 \le \mu \le +1\right)$$

в сферических координатах (r, θ, μ) . При этом полагаем, что $\gamma_n^2 = \beta_n + \nu_k^2$, $\nu_k = k\pi/h$; индекс n понимается как набор из трех индексов (m, k, l) , где $m, k = \overline{1, \infty}$, а l – номер собственного значения β при фиксированных m и k .

I. Пусть Ω – конечный круговой цилиндр единичного радиуса с высотой h , Γ_2 – его верхнее плюс нижнее основания, Γ_1 – боковая цилиндрическая поверхность, $x = (r, \theta, z)$. Ортонормированные в $L^2(\bar{\Omega})$ собственные функции задачи (8.I) имеют вид

$$e_n(x) = A_n J_m(r\gamma_n) \begin{matrix}\cos m\theta \\ \sin m\theta\end{matrix} \cos\nu_k z \ ; \tag{8.3}$$

$$A_n=\left[\frac{\varepsilon_{om}\varepsilon_{ok}\pi h}{8\gamma_n^2}\left(3\gamma_n^2+\beta_n^2-m^2\right)J_m^2(\gamma_n)\right]^{-1/2}, \qquad (8.4)$$

а собственные значения определяются как корни трансцендентного уравнения

$$\sqrt{\beta-\nu_k^2}\,J_m'(\sqrt{\beta-\nu_k^2})-\beta\,J_m(\sqrt{\beta-\nu_k^2})=0, \qquad (8.5)$$

где здесь и далее $J_m(z)$ – бесселевы функции первого рода, $\varepsilon_{om}=2$ при $m=0$ и $\varepsilon_{om}=1$ при $m=1,2,\dots$.

Аналогично для задачи (8.2) имеем, что

$$e_n(x)=B_n J_m(r\gamma_n)\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix}\sin\nu_k z, \qquad (8.6)$$

$$B_n=\left\{\frac{\varepsilon_{om}\pi h}{\beta_n^2\gamma_n^2}\left[2\gamma_n^2+\beta_n^2(\gamma_n^2-m^2)+1\right]J_m^2(\gamma_n)\right\}^{-1/2}, \qquad (8.7)$$

$$\beta\sqrt{\beta-\nu_k^2}\,J_m'(\sqrt{\beta-\nu_k^2})+J_m(\sqrt{\beta-\nu_k^2})=0. \qquad (8.8)$$

2. Пусть Ω – конечный полый круговой цилиндр высоты h с внешним единичным радиусом и внутренним радиусом $a<1$, Γ_2 – его внутренняя боковая поверхность плюс верхнее и нижнее основания, Γ_1 – его внешняя боковая поверхность.

Тогда для задачи (8.I)

$$e_n(x)=A_n U_m(r\gamma_n)\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix}\cos\nu_k z \qquad (8.9)$$

где

$$U_m(r\gamma_n)=J_m(r\gamma_n)Y_m'(a\gamma_n)-Y_m(r\gamma_n)J_m'(a\gamma_n),$$

$$A_n=\left\{\frac{\varepsilon_{om}\varepsilon_{ok}\pi h}{8\gamma_n^2}\left[(3\gamma_n^2+\beta_n^2-m^2)U_m^2(\gamma_n)\right]-\frac{4(a^2\gamma_n^2-m^2)}{a^2\pi^2}\right\}^{-1/2}, \qquad (8.10)$$

а β_n – корни уравнения

$$\sqrt{\beta-\nu_k^2}\,U_m'\left(\sqrt{\beta-\nu_k^2}\right)-\beta\,U_m\left(\sqrt{\beta-\nu_k^2}\right)=0\ . \qquad (8.11)$$

Соответствующие соотношения для задачи (8.2) имеют вид

$$e_n(x)=B_n V(r\gamma_n)\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix}\sin\nu_k z\ ; \qquad (8.12)$$

$$V_m(r\gamma_n)=J_m(r\gamma_n)Y_m(a\gamma_n)-Y_m(r\gamma_n)J_m(a\gamma_n),$$

$$B_n=\left\{\frac{\varepsilon_{om}\pi h}{8\gamma_n^2}\left[\left(\frac{1+2\gamma_n^2}{\beta_n^2}+\gamma_n^2-m^2\right)V_m^2(\gamma_n)-\frac{4}{\pi^2}\right]\right\}^{-1/2}; \qquad (8.13)$$

$$\beta\sqrt{\beta-\nu_k^2}\,V_m'\left(\sqrt{\beta-\nu_k^2}\right)+V_m\left(\sqrt{\beta-\nu_k^2}\right)=0\ . \qquad (8.14)$$

3. Пусть Ω – полый шар с внутренним радиусом a (поверхность Γ_2) и внешним единичным радиусом (поверхность Γ_1), $x=(r,\theta,\mu)$.

Тогда для задачи (8.1) имеем, что

$$e_n(x)=A_n r^{-1/2}G_k(r\sqrt{\beta_n})\begin{matrix}\cos m\theta\\ \sin m\theta\end{matrix}P_k^m(\mu)\ , \qquad (8.15)$$

где $P_k^m(\mu)$ – обобщенные полиномы Лежандра первого рода,

$$G_k(r\sqrt{\beta_n})=J_{k+1/2}(r\sqrt{\beta_n})\,J'_{-k-1/2}(a\sqrt{\beta_n})-$$

$$-J_{-k-1/2}(r\sqrt{\beta_n})\,J_{k+1/2}(a\sqrt{\beta_n})\ ; \qquad (8.16)$$

$$A_n=\left\{\frac{\pi\varepsilon_{om}(k+m)!}{2(2k+1)(k-m)!\,\beta_n}\left[3\beta_n+\frac{1}{4}(1+2\beta_n)^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4}(2k+1)^2\right)G_k^2(\sqrt{\beta_n})-\frac{4a^2\beta_n-(2k+1)^2}{\pi^2a^2\beta_n}\right]\right\}^{-1/2},$$

а β_n – корни уравнения

$$\sqrt{\beta}\, G_k'(\sqrt{\beta}) - \left(\beta + \frac{1}{2}\right) G_k(\sqrt{\beta}) = 0 . \qquad (8.17)$$

Соответствующие формулы для задачи (8.2) имеют вид

$$e_n(x) = B_n r^{-1/2} H_k(r\sqrt{\beta_n}) \begin{matrix}\cos m\theta \\ \sin m\theta\end{matrix} P_k^m(\mu) \; ; \qquad (8.18)$$

$$H_k(r\sqrt{\beta_n}) = J_{k+1/2}(r\sqrt{\beta_n})\, J_{-k-1/2}(a\sqrt{\beta_n}) -$$

$$- J_{-k-1/2}(r\sqrt{\beta_n})\, J_{k+1/2}(a\sqrt{\beta_n}) ,$$

$$B_n = \left\{ \frac{\varepsilon_{om}\pi (k+m)!}{2(2k+1)(k-m)!\,\beta_n} \left[\left(\frac{2}{\beta_n} - \frac{(\beta_n - 2)^2}{4\beta_n^2} + \beta_n - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{(2k+1)^2}{4} \right) H_k^2(\beta_n^{1/2}) - \frac{4}{\pi^2} \right] \right\}^{-1/2} ; \qquad (8.19)$$

$$2\beta\sqrt{\beta}\, H_k'(\sqrt{\beta}) - (\beta - 2) H_k(\sqrt{\beta}) = 0 . \qquad (8.20)$$

4. Пусть область Ω представляет собой часть единичного шара, вырезаемого конусом $\mu = \mu_0$, Γ_2 – коническая поверхность, Γ_1 – шаровая поверхность.

Ортонормированными собственными функциями задачи (8.1) будут

$$e_n(x) = A_n J_{k+1/2}(r\sqrt{\beta_n}) \begin{matrix}\cos m\theta \\ \sin m\theta\end{matrix} P_k^{-m}(\mu) , \qquad (8.21)$$

где

$$A_n = \left\{ \frac{\varepsilon_{om}\pi (1-\mu_0^2)}{4(1+2k)\,\beta_n} \left[3\beta_n + \frac{1}{4}(1+2\beta_n)^2 - \frac{1}{4}(2k+1)^2 \right] \times \right.$$

$$\left. \times J_{k+1/2}^2(\sqrt{\beta_n}) P_k^{-m}(\mu_0) \frac{\partial^2}{\partial\mu\,\partial k} P_k^{-m}(\mu_0) \right\}^{-1/2} , \qquad (8.22)$$

β_n – корни уравнения

$$\sqrt{\beta}\, J'_{\kappa+1/2}(\sqrt{\beta}) + \left(\beta+\tfrac{1}{2}\right) J_{\kappa+1/2}(\sqrt{\beta}) = 0 \ ; \qquad (8.23)$$

значения κ здесь, в отличие от рассмотренных выше случаев, не равны целым числам, а определяются как корни уравнения [I6]

$$\frac{\partial}{\partial\mu} P_{\kappa}^{-m}(\mu_0) = 0 \qquad \left(\kappa \neq -\tfrac{1}{2}\right). \qquad (8.24)$$

Аналогичные соотношения для задачи (8.2) имеют вид

$$e_n(x) = B_n J_{\kappa+1/2}(r\sqrt{\beta_n}) \begin{matrix}\cos m\theta \\ \sin m\theta\end{matrix} P_{\kappa}^{-m}(\mu) \ ; \qquad (8.25)$$

$$B_n = \left\{ \frac{-\varepsilon_{om}\pi(1-\mu_0)^2}{4(2\kappa+1)\beta_n} \left[\frac{(\beta_n-2)^2}{4\beta_n^2} + \frac{4\beta_n-(2\kappa+1)^2}{4} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{\beta_n} \right] J^2_{\kappa+1/2}(\sqrt{\beta_n}) \frac{\partial}{\partial\kappa} P_{\kappa}^{-m}(\mu_0) \frac{\partial}{\partial\mu} P_{\kappa}^{-m}(\mu_0) \right\}^{-1/2}, \qquad (8.26)$$

где β_n – корни уравнения

$$2\beta\sqrt{\beta}\, J'_{\kappa+1/2}(\sqrt{\beta}) - (\beta-2) J_{\kappa+1/2}(\sqrt{\beta}) = 0 \ , \qquad (8.27)$$

а κ определяются как корни уравнения [I6]

$$P_{\kappa}^{-m}(\mu_0) = 0 . \qquad (8.28)$$

При вычислении нормирующих множителей A_n и B_n для приведенных в этом пункте собственных функций использованы следующие значения квадратур от обобщенных функций Лежандра [57,58]:

$$\int_{\mu_0}^{1} \left[P_{\kappa}^{-m}(\mu)\right]^2 d\mu = \frac{(1-\mu_0)^2}{2\kappa+1} P_{\kappa}^{-m}(\mu_0) \frac{\partial^2}{\partial\kappa\partial\mu} P_{\kappa}^{-m}(\mu_0) ,$$

если κ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\mu} P_{\kappa}^{-m}(\mu_0) = 0 \ ;$$

$$\int_{\mu_0}^{1} \left[P_{\kappa}^{-m}(\mu)\right]^2 d\mu = -\frac{(1-\mu_0)^2}{2\kappa+1} \frac{\partial}{\partial\kappa} P_{\kappa}^{-m}(\mu_0) \frac{\partial}{\partial\mu} P_{\kappa}^{-m}(\mu_0) ,$$

если κ удовлетворяет уравнению $P_{\kappa}^{-m}(\mu_0) = 0$.

Глава 3. РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СРЕД С ПАМЯТЬЮ

§ 9. Линейные неоднородные задачи

Обратимся вначале к уравнению

$$A_1 \bar{u} = \bar{f} \,, \tag{9.1}$$

где оператор A_1 порожден эллиптической краевой задачей (5.II):

$$\begin{gathered} \mathcal{E} u = f_0(x), \quad x \in \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_1(s), \; s \in \Gamma_1; \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \; s \in \Gamma_2. \end{gathered} \tag{9.2}$$

Поскольку собственные функции оператора A_1 образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\bar{\Omega})$, решение уравнения (9.1) ищем в виде

$$\bar{u}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \bar{e}_n(x). \tag{9.3}$$

Разлагая $\bar{f} = [\, f_0(x), f_1(s) \,] \in L^2(\bar{\Omega})$, имеем, что

$$\bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \bar{e}_n(x) \,, \quad f_n = (\!(\bar{f}, \bar{e}_n)\!), \tag{9.4}$$

и сразу же получаем $u_n = f_n / \beta_n$. Окончательно, с учетом того, что $(\!(\bar{e}_n, \bar{e}_m)\!) = \delta_{nm}$, получаем

$$\bar{u}(x) = A_1^{-1} \bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{-1} f_n \bar{e}_n(x). \tag{9.5}$$

Следовательно, сразу же получено решение задачи (9.2) в виде ряда, сходящегося как внутри области Ω, так и на границе $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, т.е. в метрике пространства $L^2(\bar{\Omega})$. С повышением гладкости данных задачи $f_0(x)$, $f_1(s)$, согласно теореме 6.I, сходимость (9.5) улучшается.

Применим теперь указанный выше метод аппроксимации решения задачи рядами по собственным функциям оператора A_1 к

операторному линейному уравнению теплопроводности сред с памятью (5.I5)

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A_1\bar{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}}{dt} + \dot{\lambda} * A_1\bar{u} = \bar{f} \ , \ \bar{u}(0) = \bar{u}_0 \ , \qquad (9.6)$$

где $\bar{f} = [f_0(x,t), f_1(s,t)]$, $\bar{u}_0 = [u_0(x), u_0(s)]$. Напомним, что задача (9.6) является аналогом в $L^2(\bar{\Omega})$ начально-граничной задачи (5.I)-(5.4) при $a_{ik} = \delta_{ik}$, $a = 0$, линейных данных и нестационарном граничном условии на Γ_1 .

Будем искать решение задачи (9.6) в виде ряда

$$\bar{u}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\bar{e}_n(x), \qquad (9.7)$$

где коэффициенты $u_n(t)$ подлежат определению. Разлагая $\bar{f}$ и $\bar{u}_0$,

$$\bar{f} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\bar{e}_n(x) \ , \ f_n = (\!(\bar{f}, \bar{e}_n)\!); \ \bar{u}_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathring{u}_n\,\bar{e}_n(x) \ , \ \mathring{u}_n = (\!(\bar{u}_0, \bar{e}_n)\!), \qquad (9.8)$$

из (9.6) находим, что функции $u_n(t)$ должны определяться как решение задачи Коши для обыкновенного интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{du_n}{dt} + \beta_n u_n + \dot{\varepsilon} * \frac{du_n}{dt} + \beta_n(\dot{\lambda} * u_n) = f_n \ , \ u_n(0) = \mathring{u}_n \ , \qquad (9.9)$$

где β_n - собственные значения оператора A_1 . При заданных ядрах релаксации $\lambda(t)$ и $\varepsilon(t)$, удовлетворяющих отмеченным в § I условиям эта задача решается методом преобразования Лапласа (§ 2). Полагая

$$\hat{u}_n(p) = \mathcal{L}[u_n(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} u_n(t)\,dt \qquad (9.I0)$$

и используя операционные соответствия (2.6) и (2.7), вместо (9.9) получаем алгебраическое уравнение

$$(p + \beta_n)\hat{u}_n + [p\hat{\varepsilon}'(p) + \beta_n \hat{\lambda}'(p)]\hat{u}_n = \hat{f}_n + \varepsilon_\infty \mathring{u}_n \ , \qquad (9.II)$$

где $\hat{f}_n = \mathcal{L}[f_n]$, $\hat{\varepsilon}' = \mathcal{L}[\dot{\varepsilon}]$, $\hat{\lambda}' = \mathcal{L}[\dot{\lambda}]$. Отметим, что $\varepsilon_\infty = c_v$, $p\hat{\varepsilon}' = \mathcal{L}[\ddot{\varepsilon}]$.

Из (9.II) следует, что трансформанты Лапласа коэффициентов разложения (9.7) вычисляются по формуле

$$u_n(p) = \frac{\hat{f}_n + \varepsilon_\infty \mathring{u}_n}{p[1+\hat{\varepsilon}'(p)] + \beta_n[1+\hat{\lambda}'(p)]}. \qquad (9.I2)$$

В силу принятых при постановке задач предположений об изображаемости функций $\lambda, \varepsilon, f_0$ и f_1 имеем, что оригинал изображения (9.I2) существует и

$$u_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\hat{f}_n + \varepsilon_\infty \mathring{u}_n}{p[1+\hat{\varepsilon}'(p)] + \beta_n[1+\hat{\lambda}'(p)]}\right] \qquad (9.I3)$$

Таким образом, линейная неоднородная задача для диффузионного уравнения теплопроводности сред с тепловой памятью при граничном условии, содержащем дифференциальные и интегральные операторы по времени, конструктивно решается до конца, если получены собственные функции и собственные значения оператора и заданы аналитические функции – ядра релаксации $\varepsilon(t)$ и $\lambda(t)$.

В одномерном случае, когда оператор A_2 обратим (замечание 6.2 и § 7), решение эллиптической задачи (5.I2) и линейной задачи для диффузионного уравнения (5.5)-(5.8), за исключением мелких деталей, производится аналогично.

Для нелинейных задач рассматриваемого типа возникает вопрос об условиях, налагаемых на данные задачи и обеспечивающих существование и единственность их решений. В случае линейных однородных уравнений теплопроводности сред с памятью, аннулирующейся на поверхности тела, теоремы единственности доказаны в [6].

В заключение рассмотрим два одномерных примера использования собственных функций оператора, действующего в $L^2[0,1]$, при решении стационарной и нестационарной задач [52].

Пример I. Двухточечная задача

$$u'' = 2, \quad x \in [0,1]; \quad u(0) = u(1) = 0 \qquad (9.I4)$$

имеет точное решение

$$u(x) = x(x-1)\,, \tag{9.I5}$$

а ее решение, полученное разложением в классический ряд Фурье по синусам, имеет вид

$$u(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{(\pi n)^3} \sin n\pi x\,. \tag{9.I6}$$

Если ввести в $L^2[0,1]$ оператор A_2:

$$[u(x), u'(0), -u'(1)] \to [-u''(x), u(0), u(1)]\,,$$

то, в соответствии с табл. I (§ 7), его собственными функциями будут

$$\bar{\varphi}_n(x) = \left[\sin x\gamma_n + \gamma_n^3 \cos x\gamma_n,\ \gamma_n,\ \gamma_n \cos\gamma_n - \gamma_n^4 \sin\gamma_n\right],$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2}\left[(\gamma_n^4 + 6)\gamma_n^2 + 1\right],$$

где $\gamma_n = \sqrt{\beta_n}$ – корни уравнения (табл. 4 и 5)

$$(1 - \gamma^6)\sin\gamma + 2\gamma^3 \cos\gamma = 0\,.$$

Решение задачи (9.I4) здесь представляется в виде

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)\,, \quad 0 < x < 1\,, \tag{9.I7}$$

где

$$a_n = \frac{4[(-1)^n - 1]}{(\gamma_n^4 + 6)\gamma_n^2 + 1}\,.$$

В табл. 6 результаты вычислений по формулам (9.I6) и (9.I7) с удержанием первых II членов ряда сравниваются с точным решением (9.I5).

Таблица 6.

Сравнение решений задачи (9.I4)
различными методами

x	$u(x)$		
	(9.I5)	(9.I6)	(9.I7)
0,00	0	0	$2{,}5 \cdot 10^{-8}$
0,0I	-0,0099	-0,009655	-0,009899976
0,I0	-0,0900	-0,090I83	-0,0900000
0,25	-0,I875	-0,I87595	-0,I87500005
0,50	-0,2500	-0,249928	-0,25000003
0,75	-0,I875	-0,I87595	-0,I87500053
0,9	-0,0900	-0,090I83	-0,09000007
0,99	-0,0099	-0,009655	-0,00990006
I,00	0	0	$6{,}6 \cdot 10^{-9}$

Отсюда следует, что (9.I7) во всех точках интервала $[0,I]$ дает значения, мало отдичающиеся от точных (максимальная относительная поточечная погрешность составляет $3 \cdot 10^{-6}$). Та же величина для ряда Фурье (9.I6) составляет уже $3 \cdot 10^{-2}$. Можно показать, что скорость сходимости ряда (9.I7) есть $O(n^{-6})$, в то время, как ряда (9.I6) - $O(n^{-3})$. Оценивая относительные погрешности решений, даваемые (9.I6) и (9.I7) по норме $L_2(0,1)$ получаем $0{,}28 \cdot 10^{-5}$ в первом случае и $0{,}53 \cdot 10^{-8}$ во втором.

Пример 2. Нестационарная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-t}(1+t+x^2), \quad x \in [0,1), \; t>0;$$

$$u(x,0) = x^2; \qquad (9.I8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u = te^{-t}, \; x=0; \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = (2-t)e^{-t}, \; x=1$$

в пространстве $L^2[0,1]$ приводится к уравнению

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A\bar{u} = \bar{f}, \qquad (9.I9)$$

где $\bar{u} = [u(x), u'(0), u(1)]$,

$\bar{f} = [-e^{-t}(1+t+x^2), te^{-t}, (2-t)e^{-t}]$,

а оператор A определен соотношением

$$[u(x), u'(0), u(1)] \to [-u''(x), u(0), u'(1)] . \qquad (9.20)$$

Его собственными функциями являются

$$\bar{\varphi}_n = [\sin x\gamma_n + \gamma_n^3 \cos x\gamma_n , \gamma_n, \sin\gamma_n + \gamma_n^3 \cos\gamma_n] , \qquad (9.21)$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{2}(1 + 3\gamma_n^2 + \gamma_n^6 - \gamma_n^2 \cos\gamma_n) + \qquad (9.22)$$

$$+ \frac{1}{4}(\gamma_n^5 - \frac{1}{\gamma_n}) \sin 2\gamma_n + (\sin\gamma_n + \gamma_n^3 \cos\gamma_n)^3 ,$$

где $\gamma_n = \sqrt{\beta_n}$, а β_n вычисляются из уравнения

$$(1-\beta^2)\cos\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta}(1+\beta)\sin\sqrt{\beta} = 0 , \qquad (9.23)$$

причем

$\gamma_1 = i$, $\gamma_2 = 0{,}676253$, $\gamma_3 = 2{,}117079$,

$\gamma_4 = 4{,}921251$, $\gamma_5 = 7{,}980603$, $\gamma_6 = 11{,}086266$.

Здесь среди собственных значений содержится одно отрицательное $\beta = -1$, которому соответствует собственная функция $\varphi_1(x) = e^{-x}$.

Таким образом, после соответствующих вычислений решение задачи (9.18) принимает окончательный вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \qquad (9.24)$$

где

$$u_n(t) = \frac{1}{\omega_n^2}\left[\theta_n e^{-\gamma_n^2 t} + \frac{e^{-t} - e^{-\gamma_n^2 t}}{\gamma_n^2 - 1}(a_n - \frac{1}{\gamma_n}) + \frac{e^{-t}}{\gamma_n}\right] ,$$

$$a_n = \frac{2(2\gamma_n^2 - \gamma_n^4 - 1)}{\gamma_n^2}\sin\gamma_n + \frac{2(\gamma_n^2 - \gamma_n^4 + \gamma_n^6 - 1)}{\gamma_n^3}\cos\gamma_n + \frac{2-\gamma_n^2}{\gamma_n^3} ,$$

$$\theta_n = \frac{2 + \gamma_n^4 - \gamma_n^2}{\gamma_n^2}\sin\gamma_n + \frac{2 - \gamma_n^2 + 2\gamma_n^4 + \gamma_n^6}{\gamma_n^3}\cos\gamma_n - \frac{2}{\gamma_n^3} .$$

Таблица 7.

Сравнение решения задачи (9.I8)с точным
при N=6

t	x	u	u_N
0,I	0,00	0,0904830	0,092I350
	0,05	0,0927450	0,0940700
	0,I0	0,0995310	0,0999710
	0,50	0,3I6690	0,3I8756
	0,95	0,907090	0,9I2063
	I,00	0,995310	0,994998
0,2	0,00	0,I63746	0,I65232
	0,05	0,I65793	0,I66987
	0,I0	0,I7I933	0,I72339
	0,50	0,368428	0,370295
	0,95	0,902640	0,907I50
	I,00	0,982470	0,982I90

t	x	u	u_N
0,5	0,00	0,303265	0,304348
	0,05	0,30478I	0,305656
	0,I0	0,309330	0,309635
	0,50	0,454897	0,456282
	I,00	0,909790	0,909577
I,0	0,00	0,367870	0,3685I0
	0,05	0,368790	0,3693I0
	0,I0	0,37I540	0,37I730
	0,50	0,459830	0,460670
	0,95	0,699870	0,70I89I
	I,00	0.735740	0,7356II

Решение (9.24) быстро сходится к точному. В табл. 7 представлены численные значения функции $u_N(x,t)$ при удержании в (9.24) $N=6$ членов и их сравнение с точным решением $u(x,t)$. Из нее следует, что относительная погрешность $|u-u_N|/u$, допускаемая при обрыве ряда уже на шестом члене, не привышает 2,2 % для всех рассмотренных x и t.

§ IO. Локальная и глобальная по времени разрешимость нелинейных неоднородных задач

Ввиду того, что нелинейная задача

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}u = f_0(x,t,u),\ (x,t)\in\Omega_\infty;\ u(x,0)=u_0(x); \\ &\mathcal{R}_1 u = f_1(s,t,u),\ s\in\Gamma_1;\ (\vec{\nu}\cdot\nabla u)=0,\ s\in\Gamma_2 \end{aligned} \qquad (IO.1)$$

в § 5 приводится с помощью оператора A_1 к задаче Коши в $L^2(\bar{\Omega})$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A_1\bar{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}}{dt} + \lambda * A_1\bar{u} = \bar{f},\ \bar{u}(0)=\bar{u}_0, \qquad (IO.2)$$

где $\bar{f} = \bar{f}(t,\bar{u}) = [f_0(x,t,u), f_1(s,t,u)]$, $\bar{u}_0 = [u_0(x), u_0(s)]$, для исследования ее можно использовать некоторые известные результаты для абстрактных параболических уравнений [6I,62]. В частности, для классического уравнения теплопроводности с нестационарными граничными условиями [38], приведенного к виду $d\bar{u}/dt + A_1\bar{u} = \bar{f}$, разрешимость на ограниченном интервале времени обеспечивается при выполнении следующих требований:

I°. Функция $\bar{f}(t,\bar{u})$ определена в $L^2(\bar{\Omega})$ при каждом $\bar{u}\in D(A_1^\nu)$, $\nu\in[0,1]$;

2°. Для любых $\bar{u}$ и $\bar{w}$, таких, что $\|A_1^\nu\bar{u}\|\le C=\text{const}>0$ $\|A_1^\nu\|\le C$, имеет место неравенство

$$\|\bar f(t_1,\bar u)-\bar f(t_2,\bar w)\|\le \mu(C)\left[|t_1-t_2|+\|A_1^{\nu}\bar u-A_1^{\nu}\bar w\|\right];$$

3°. $\bar u_0\in D(A_1^{\nu})$.

Достаточные условия, при которых выполняются эти требования, установлены в [38].

Для исследования разрешимости задачи (I3.2) используются дробные степени оператора A_1 (см. § 6), в связи с чем нам потребуется следующее утверждение.

Теорема I0.I [38]. Область определения $D(A_1^{\nu})$ оператора A_1^{ν} связана с пространствами Соболева $W_2^{(k)}(\Omega)$ следующими топологическими включениями:

I). При $0\le\nu\le 1/4$ $\quad D(A_1^{\nu})=W_2^{2\nu}(\Omega)\oplus W_2^{\nu}(\Gamma)$;

2). При $0\le\nu\le 1/2$ $\quad D(A_1^{\nu})=W_2^{2\nu}(\Omega)\oplus W_2^{\nu}(\Gamma)$;

3). При $1/2\le\nu\le 3/2$ $\quad D(A_1^{\nu})=W_2^{\nu+1/2}(\Omega)\oplus W_2^{\nu}(\Gamma)$.

Достаточные условия разрешимости на ограниченном интервале времени сформулируем в терминах исходной задачи (5.I)-(5.4).

Теорема I0.2. Пусть ядра релаксации $\varepsilon(t)$ и $\lambda(t)$ аналитичны и

$$\varepsilon(0)>0,\ \dot\varepsilon(0)\ge 0,\ \varepsilon(\infty)\ge\varepsilon(0),\ \lambda(0)>0,\ \dot\lambda(0)\ge 0. \qquad (I0.3)$$

Тогда, если

I). $u_0(x)\in C^2(\Omega)$ и $(\vec\nu\cdot\nabla u)=0$ на Γ_2; $\qquad (I0.4)$

2). $f_j(x,t,u)$, $j=0,1$, имеют непрерывные первые производные по u и t;

3). $|f_j(x,t,u)|^2\le|f_j(x,t,0)|^2+c_1(1+|u|^{n+2})$, $\qquad (I0.5)$

где $c_1=\text{const}>0$, $n\ge 1$,

то задача однозначно разрешима при $t\in[0,t_0]$, причем $u(x)\in W_2^{3/2}(\Omega)$, $\bar u(t)\in W_2^{3\nu/2}(\Omega)\oplus W_2^{\nu}(\Gamma)$, $0\le\nu\le 1$.

Доказательство. Так как при выполнении (I0.3) и достаточно малом t_0 поведение решения задачи (I0.I) определяется в основном внеинтегральными членами уравнения (см. § 3), то здесь достаточно определить условия, при которых выполняются требования I° - 3°.

Из (I0.4) следует, что $u_0 \in D(A_1)$ и 3° выполняется. Далее, из 2) и (I0.5) следует, что, поскольку число измерений области меньше трех, то по теоремам вложения [30] и согласно теореме I0.I, при некотором $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ имеют место включения

$$D(A_1^\nu) \subset W_2^{3\nu/2}(\Omega) \oplus W_2^\nu(\Gamma) \subset L^{n+2}(\bar{\Omega}) \qquad (I0.6)$$

В силу (I0.6) нелинейный функционал $\bar{f}$, определяемый как $\bar{f} = \bar{f}(t,\bar{u}) = [f_0(x,t,u(x,t)), f_1(s,t,u(s,t))] \in L^2(\bar{\Omega})$, определен на $D(A_1^\nu)$. Тогда, принимая во внимание (I0.5) и (I0.6), получаем требуемое неравенство

$$\| \bar{f}(t_1,\bar{u}) - \bar{f}(t_2,\bar{w}) \|^2 \leqslant$$

$$\leqslant c_2 (1 + \| A_1^\nu \bar{u} \|^n + \| A_1^\nu \bar{w} \|^n)(|t_1 - t_2|^2 + \| A_1^\nu \bar{u} - A_1^\nu \bar{w} \|^2),$$

откуда следует неравенство в 2°.

Теорема I0.2 гарантирует существование и единственность решения $u \in W_2^{3/2}(\Omega)$ нелинейной задачи (I0.I) на ограниченном малом интервале времени $[0,t_0]$, если входные данные задачи имеют степенные оценки роста по u равномерно по t и x. Однако для представления решения рядами вида (9.7) или применения к (9.6) приближенных методов [62] требуется выяснить условия, при выполнении которых задача однозначно разрешима на произвольном интервале времени.

Будем считать, что нелинейность задачи (I0.2) слабая и выполняется условие

$$\| \bar{f}(t,\bar{u}) - \bar{f}(t,\bar{w}) \| \le c_0 \| A_1^{\nu} \bar{u} - A_1^{\nu} \bar{w} \| . \qquad (10.7)$$

Известно, что с повышением гладкости функций u_0 и $f_j(x, t, u(x,t))$, $j=0,1$, повышается и гладкость решения параболического уравнения [38,61] .

Теорема 10.3. Если ядра релаксации удовлетворяют условиям теоремы 10.2, и, кроме того,

1). $u_0(x) \in C^3(\Omega)$, $(\vec{\nu} \cdot \nabla u_0) = 0$ при $s \in \Gamma_2$;

2). $f_j(x,t,u)$ имеют непрерывные первые производные по x, t и u;

3). $\partial f_j / \partial u$ равномерно ограничены по x и t;

4). $|f_j(x,t,u)|^2 \le |f_j(x,t,0)|^2 + c_2(1+|u|^{2+n})$ $(c_2 = const)$,

то решение задачи (10.1) существует и единственно на произвольном интервале времени $[0,T]$, причем $u \in W_2^{3/2+\nu}(\Omega)$, $\nu < 1/4$.

Доказательство следует из неравенства (10.7) в предположении, что константа c_0 не зависит от $\bar{u}$ и $\bar{w}$, теоремы (10.1), теорем о повышении гладкости [61] и теорем вложения [30] .

Замечание 10.1. Из теоремы 10.3 следует, что, если $f_j(x,t,u) = \mu_j(x,t) + \chi_j(x,t)\,u$ с непрерывно дифференцируемыми по t функциями μ_j и χ_j, при тех же предположениях относительно функции $u_0(x)$ задача однозначно разрешима на произвольном интервале времени.

Замечание 10.2. Идентичные результаты получаются и в случае более общего граничного условия в (10.1) вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{\nu} \cdot \nabla u) + hu + \dot{\varepsilon} * \frac{\partial u}{\partial t} + \dot{\lambda} * (\vec{\nu} \cdot \nabla u) = f_1(s,t,u), \; s \in \Gamma_1, \qquad (10.8)$$

где $h = h(s) \ge 0$. В этом случае в $L^2(\Omega)$ вводятся два опера-

тора

$$A\bar{\varphi} = \left[-\sigma\nabla^2\varphi(x),\ \sigma(\vec{\nu}\cdot\nabla\varphi(s))\right],$$
$$K\bar{\varphi} = \left[-(1-\sigma)\nabla^2\varphi(x),\ (1-\sigma)(\vec{\nu}\cdot\nabla\varphi(s)) + h(s)\varphi(s)\right], \qquad (10.9)$$

где $0 < \sigma < 1$, с помощью которых операторная формулировка задачи принимает вид

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A\bar{u} + K\bar{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{1}{\sigma}(\dot{\lambda} * A\bar{u}) = \bar{f},\ \bar{u}(0) = \bar{u}_0, \qquad (10.10)$$

где, очевидно, $A = (1/\sigma)A_1$. Такая форма удобна при асимптотическом интегрировании задачи.

В одномерном случае, когда спектр оператора A_2 содержит один или два отрицательные собственные значения, нетрудно доказать теоремы существования решений задачи (5.5)-(5.8), аналогичные приведенным выше.

§ II. Приближенные методы интегрирования нелинейных операторных уравнений теплопроводности сред с памятью

Если ортонормированные собственные функции $\bar{e}_n(x)$ оператора A_1 для области Ω найдены каким-либо методом (см.§8), то при выполнении условий теоремы 10.3, операторную задачу Коши (10.2) можно свести к значительно более простой задаче определения коэффициентов $u_n(t)$ разложения решения вида

$$\bar{u}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\,\bar{e}_n(x) \qquad (11.1)$$

из обыкновенного интегро-дифференциального уравнения с нелинейной правой частью

$$\frac{du_n}{dt} + \beta_n u_n + \dot{\varepsilon} * \frac{du_n}{dt} + \beta_n(\dot{\lambda} * u_n) = f_n(t, u_n),\ u_n(0) = \mathring{u}_n \qquad (11.2)$$

где $\mathring{u}_n = (\!(\bar{u}_0, \bar{e}_n)\!)$, β_n – собственные функции оператора A_1,

а нелинейный оператор f_n определяется равенством

$$f_n(t,u_n) = (\!(\bar{f}(t,\bar{u}),\bar{e}_n)\!) = \tag{II.3}$$

$$= (f_0(t,x,u(x,t)),e_n(x))_{\Omega} + \langle f_1(s,t,u(s,t)),e_n(s)\rangle_{\Gamma_1}$$

Уравнение (II.2) эффективно решается итерационным методом [62] по схеме

$$\frac{du_n^s}{dt} + \beta_n u_n^s + \dot{\varepsilon} * \frac{du_n^{s-1}}{dt} + \beta_n (\dot{a} * u_n^{s-1}) = f_n(t,u_n^{s-1}) \quad , s=1,2,\dots, \tag{II.4}$$

где начальное приближение определяется как решение линейного уравнения

$$\frac{du_n^0}{dt} + \beta_n u_n^0 = f_n(t,0) \quad , \quad u_n^0(0) = \mathring{u}_n . \tag{II.5}$$

Разрешив его, имеем, что

$$u_n^0(t) = \mathring{u}_n e^{\beta_n t} + \int_0^t e^{-\beta_n (t-t')} f_n(t',0)\,dt', \qquad n=1,2,\dots . \tag{II.6}$$

Применение собственных функций оператора A_1 в качестве базисных функций в проекционных методах позволяет свести операторную задачу (I0.2) к конечной системе интегродифференциальных уравнений.

Пусть S^N - подпространство H_1, порожденное первыми собственными функциями $\bar{\varphi}_n(x)$ оператора A_1, B - некоторый линейный оператор в $L^2(\bar{\Omega})$ с областью определения $D(B) \supseteq D(A_1)$, причем $\bar{\varphi}_n \in D(B)$. Поскольку последовательность $\{S^N\}$ предельно плотна [63] в $L^2(\bar{\Omega})$, то приближенное решение задачи (I0.2) можно искать в виде линейной оболочки

$$\bar{u}_N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\bar{\varphi}_n(x) \tag{II.7}$$

с неизвестными компонентами $a_n(t)$, которые определим из системы уравнений

$$\left\langle\!\left\langle \frac{d\bar{u}_N}{dt} + A_1\bar{u}_N + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}_N}{dt} + \dot{\lambda} * A_1\bar{u}_N,\ B\bar{\varphi}_m \right\rangle\!\right\rangle = \left\langle\!\left\langle \bar{f},\ B\bar{\varphi}_m \right\rangle\!\right\rangle , \qquad (II.8)$$

$$\left\langle\!\left\langle \bar{u}_N(0) - \bar{u}_0 ,\ B\bar{\varphi}_m \right\rangle\!\right\rangle = 0 \quad , \quad m = \overline{1,N} ,$$

где $\langle\!\langle \cdot , \cdot \rangle\!\rangle$ – скалярное произведение в $L^2(\bar{\Omega})$. В развернутом виде это можно записать так:

$$\frac{dA}{dt} + KA + \dot{\varepsilon} * \frac{dA}{dt} + K(\dot{\lambda} * A) = H^{-1}F(t,A), \quad A(0) = H^{-1}A_0 , \qquad (II.9)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix} , \quad K = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} , \quad F(t,A) = \begin{bmatrix} \left\langle\!\left\langle \bar{f}(t, \sum_{n=1}^{N} a_n\bar{\varphi}_n),\ B\bar{\varphi}_1 \right\rangle\!\right\rangle \\ \left\langle\!\left\langle \bar{f}(t, \sum_{n=1}^{N} a_n\bar{\varphi}_n),\ B\bar{\varphi}_2 \right\rangle\!\right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle\!\left\langle \bar{f}(t, \sum_{n=1}^{N} a_n\bar{\varphi}_n),\ B\bar{\varphi}_N \right\rangle\!\right\rangle \end{bmatrix} ,$$

$$A_0 = \begin{bmatrix} \left\langle\!\left\langle \bar{u}_0,\ B\bar{\varphi}_1 \right\rangle\!\right\rangle \\ \left\langle\!\left\langle \bar{u}_0,\ B\bar{\varphi}_2 \right\rangle\!\right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle\!\left\langle \bar{u}_0,\ B\bar{\varphi}_N \right\rangle\!\right\rangle \end{bmatrix} , \quad H = \begin{bmatrix} \left\langle\!\left\langle \bar{\varphi}_1, B\bar{\varphi}_1 \right\rangle\!\right\rangle & \left\langle\!\left\langle \bar{\varphi}_1, B\bar{\varphi}_2 \right\rangle\!\right\rangle & \dots & \left\langle\!\left\langle \bar{\varphi}_1, B\bar{\varphi}_N \right\rangle\!\right\rangle \\ \left\langle\!\left\langle \bar{\varphi}_2, B\bar{\varphi}_1 \right\rangle\!\right\rangle & \left\langle\!\left\langle \bar{\varphi}_2, B\bar{\varphi}_2 \right\rangle\!\right\rangle & \dots & \left\langle\!\left\langle \bar{\varphi}_2, B\bar{\varphi}_N \right\rangle\!\right\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left\langle\!\left\langle \bar{\varphi}_N, B\bar{\varphi}_1 \right\rangle\!\right\rangle & \left\langle\!\left\langle \bar{\varphi}_N, B\bar{\varphi}_2 \right\rangle\!\right\rangle & & \left\langle\!\left\langle \bar{\varphi}_N, B\bar{\varphi}_N \right\rangle\!\right\rangle \end{bmatrix} .$$

Проекционный алгоритм (II.8) приведения задачи (I0,2) к конечной системе обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений в качестве частных случаев содержит обобщенные методы Бубнова-Галеркина (при $B = I$), моментов (когда оператор A_1 является B -положительно определенным, т.е. $\langle\!\langle A_1\bar{v}, B\bar{v} \rangle\!\rangle \geq c_1 \|\bar{v}\|^2$, $\langle\!\langle A_1\bar{v}, B\bar{v} \rangle\!\rangle \geq c_2 \|B\|^2$ при $\bar{v} \in D(A_1)$, где c_1 и c_2 – положительные константы) и наименьших квадратов (при $B = A_1$).

Уравнение (II.9) решается методом последовательных приближений по схеме

$$\frac{dA^s}{dt} + KA^s + \dot{\varepsilon} * \frac{dA^{s-1}}{dt} + K(\dot{\lambda} * A^{s-1}) = H^{-1}F(t, A^{s-1}) , \quad s = 1,2,\ldots, \qquad (II.10)$$

где начальное приближение берется в виде решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dA^0}{dt} + KA^0 = H^{-1}F(t,0) , \quad A^0(0) = H^{-1}A_0 . \qquad (II.11)$$

Оно выражается формулой

$$A^0(t) = H^{-1}A_0 e^{-Kt} + \int_0^t H^{-1}F(t',0)\, e^{-K(t-t')}\, dt' , \qquad (II.12)$$

где матричная экспонента определяется соотношением

$$e^{Kt} = I + \frac{1}{1!}Kt + \frac{1}{2!}K^2t^2 + \ldots .$$

В линейном случае, когда $F = F(t)$, система легко решается методом преобразования Лапласа:

$$A(p) = \frac{H^{-1}(\hat{F} + \varepsilon_\infty A_0)}{p[1+\hat{\varepsilon}'(p)] + K[1+\hat{\lambda}'(p)]} , \qquad (II.13)$$

где $\hat{F}, \hat{\varepsilon}'$ и $\hat{\lambda}'$ – трансформанты F, $\dot{\varepsilon}$ и $\dot{\lambda}$ соответственно. Тогда, если $A(p)$ можно представить отношением двух полиномов $\hat{A}(p) = \Pi_1(p)/\Pi(p)$ с матричными коэффициентами, где степень $\Pi(p)$ выше степени $\Pi_1(p)$, то по лемме Жордано

$$A(t) = \mathcal{L}^{-1}[\hat{A}(p)] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} G_{jk}\, t^{m_k - j} e^{p_k t} \qquad (II.14)$$

где

$$G_{jk} = \frac{1}{(j-1)!(m_k - j)!} \frac{d^{j-1}}{dp^{j-1}} \left[\frac{(p-p_k)^{m_k}\, \Pi_1(p)}{\Pi(p)} \right]_{p=p_k} , \qquad (II.15)$$

а p_k определяются как корни уравнения $\Pi(p) = 0$, т.е. $\det\{p[1+\hat{\varepsilon}'(p)] + K[1+\hat{\lambda}'(p)]\} = c\prod_{j=1}^{n}(p-p_j)^{m_j}$ (m_j – кратность корня p_j).

Из (II.I3) можно относительно легко при известных трансформантах ядер релаксации получить асимптотические (при $t\to\infty$) представления коэффициентов линейной оболочки (II.7). Действительно, поскольку в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>0$ $\hat{A}(p)\to 0$ при $|p|\to\infty$, а $\hat{A}(p)$ может иметь (ввиду конечности Ω) лишь изолированные особые точки p_k – полюса и точки ветвления, то разложение $\hat{A}(p)$ в окрестности каждой из них можно представить в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(k)}(p-p_k)^{\nu_j^{(k)}}, \quad -N_k<\nu_0^{(k)}<\nu_1^{(k)}<\ldots<\nu_i^{(k)}\to\infty$$

Тогда при $t\to\infty$ получаем, что

$$A(t)\simeq\sum_{k=1}^{K_1} e^{p_k t}\sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(k)}\frac{t^{-(\nu_j^{(k)}+1)}}{\Gamma(-\nu_j^{(k)})}, \qquad (II.I6)$$

где $1/\Gamma(-\nu_j^{(k)})=0$ при $\nu_j^{(k)}=0,1,2,\ldots$. Если же $\hat{A}(p)$ в окрестности точки $p=0$ удается разложить в сходящийся ряд вида

$$A(p)=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{\infty} C_j p^{j/2},$$

причем все имеющиеся особые точки $\hat{A}(p)$ расположены в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p<0$, то при $t\to\infty$ получаем, что

$$A(t)\sim C_0+\frac{1}{\pi\sqrt{t}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j C_{2j+1}\frac{\Gamma(j+1/2)}{t^j} \qquad (II.I7)$$

В (II.I6) и (II.I7) $\Gamma(z)$ – гамма-функция [22].

Если в исходной нелинейной краевой задаче можно выделить малый параметр при нелинейности в правой части уравнения (например, за счет сведения задачи к безразмерному виду), то ее можно свести к рекуррентной последовательности линейных задач, к которым применимы изложенные выше методы.

Полагая $0<\varepsilon\ll 1$, перепишем задачу (I0.I) в виде

$$\mathcal{M}u=g_0(x,t)+\varepsilon f_0(x,t,u,\varepsilon),\ (t,x)\in\Omega_\infty; \qquad (II.I8)$$

$$\mathcal{R}_1 u = g_1(s,t) + \varepsilon f_1(s,t,u,\varepsilon)\ ,\quad s\in\Gamma_1\ ;$$

$$(\vec{\nu}\cdot\nabla u) = 0,\quad s\in\Gamma_2\ ;\qquad u(x,0) = \theta(x)\ ,\quad x\in\bar{\Omega}\ ,$$

где g_k, f_k – достаточно гладкие функции своих аргументов. Эту задачу можно с помощью оператора A_1 в $L^2(\bar{\Omega})$ переписать так:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + A_1\bar{u} + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}}{dt} + \dot{\lambda} * A_1\bar{u} = \bar{g}(t) + \varepsilon\bar{f}(t,\bar{u},\varepsilon)\ ,\ \bar{u}(0) = \bar{\theta}\ , \qquad \text{(II.19)}$$

где

$$\bar{g} = [g_0(x,t), g_1(s,t)]\ ,\ \bar{f} = [f_0(x,t,u,\varepsilon), f_1(s,t,u,\varepsilon)]\ ,\ \bar{\theta} = [\theta(x), \theta(s)]$$

Будем искать решение операторной задачи Коши (II.19) в виде разложения по степеням малого параметра [66,67] .

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_0(t) + \varepsilon\bar{u}_1(t) + \varepsilon^2\bar{u}_2(t) + \ldots \qquad \text{(II.20)}$$

В результате прийдем к рекуррентной последовательности линейных задач

$$\frac{d\bar{u}_0}{dt} + A_1\bar{u}_0 + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}_0}{dt} + \dot{\lambda} * A_1\bar{u}_0 = \bar{g}(t)\ ,\quad \bar{u}_0(0) = \bar{\theta}\ ;$$

$$\frac{d\bar{u}_1}{dt} + A_1\bar{u}_1 + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}_1}{dt} + \dot{\lambda} * A_1\bar{u}_1 = \left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\bar{f}\left(t, \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\bar{u}_j(t), \varepsilon\right)\right]_{\varepsilon=0},\ \bar{u}_1(0) = 0\ ; \qquad \text{(II.21)}$$

. . . . . .

$$\frac{d\bar{u}_m}{dt} + A_1\bar{u}_m + \dot{\varepsilon} * \frac{d\bar{u}_m}{dt} + \dot{\lambda} * A_1\bar{u}_m = m\Gamma(m+1)\left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial\varepsilon^{m-1}}\bar{f}\left(t, \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\bar{u}_j(t), \varepsilon\right)\right]_{\varepsilon=0},\ \bar{u}_m(0) = 0\ .$$

Зная ортонормированные собственные функции $\bar{e}_n(x)$ оператора A_1 , решение каждой из этих задач можно легко построить в виде разложения

$$\bar{u}_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(t)\,\bar{e}_n(x)\ ,$$

где для определения $a_{mn}(t)$ используется преобразование Лапласа. В более сложных ситуациях (II.21) можно решить проекционными методами с использованием $\bar{e}_n(x)$ в качестве ортонормированного базиса [63–65] .

Следует отметить, что исследование скорости сходимости и оценка допускаемой погрешности в сформулированных выше приближенных методах решения нелинейных операторных уравнений теплопроводности сред с памятью выходит далеко за рамки данной работы и представляет самостоятельный интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brown J.B., Chung D.Y., Matthews P.W. Heat pulses at low temperatures // Phys. Letters. - 1966.- 21 . - P.241-243.
2. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. - Киев: Наук.думка, 1976. - 311 с.
3. Gurtin M.E., Pipkin,A.C. A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. Rational Mech. Anal. - 1968. - 31. - P. 113-126.
4. Coleman B.D., Gurtin M.E. Eguipresence and constitutive equations for rigid heat conductors // Z.Angew. Math. Phys. - 1967. - 18. - P. 199-208.
5. Gurtin M.E. On the thermodynamics of materials with memory // Arch. Rational Mech. Anal. - 1968. - 28. - P. 40-50.
6. Nunziato I.W. On heat conduction in materials with memory // Quart. Appl. Math. - 1971. - 6. - P. 187-204.
7. Coleman B.D. Thermodynamics of materials with memory // Arch. Radional Mech. Anal. - 1964. - 17.- P. 1-46.
8. Mizel V.J., Wang C.-C. A fading menaory hypothsis which suffices for chain rules // Arch. Rational Mech. Anal. - 1966. - 23. - P. 124-134.
9. Coleman B.D., Noll W. An approximation theorem for functionals, with applications in continunm mechanics // Arch. Rational Mech. Anal. - 1960. - 6. - P. 355-370.
10. Gurtin M.E., Herrera I. On dissipation inequalities and linear viscoelasticity // Quart. Appl. Math. - 1965. - 23. - P.235-245.

II. Дэй У. Термодинамика простых сред с памятью. – М.: Мир, 1974. – 190 с.

12. Колесников П.М. Методы теории переноса в нелинейных средах. – Минск, Наука и техника, 1981. – 336 с.

13. Колесников П.М. Исследование одного класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, описывающего процессы переноса со стирающейся памятью // Вопросы энергопереноса в неоднородных средах. – Минск, 1975. – С.17–30.

14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1972. – 347 с.

15. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, – М.: Наука, 1965. – 287 с.

16. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1976. 282 с.

17. Новиков И.А. Трехмерные потенциалы для телеграфного уравнения и их применение к краевым задачам теплопроводности // ИФЖ. – – 1979. – 36, № 1. С.139–146.

18. Новиков И.А. Два типа переноса тепла в средах с тепловой памятью // ИФЖ. – 1983. – 44, № 4. – С.664–672.

19. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр.лит., 1958. – Т.1. 930 с.

20. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики: В 2-х т. – – М.: Изд-во иностр.лит., 1960. – Т.2. 886 с.

21. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1967. – 436 с.

22. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1964. – 344 с.

23. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа: В 2-х т. - М.: Физматгиз, 1963. - Т.2. 315 с.

24. Макаров И.М., Менский Б.М. Таблицы обратных преобразований Лапласа и обратных $\mathcal{Z}$ -преобразований (дробно-рациональные изображения). - М.: Высш.школа, 1978. - 247 с.

25. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. - М.: Высш. школа, 1965. - 465 с.

26. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. - М.: Наука, 1977. - 287 с.

27. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - - М.: Наука, 1976. - 298 с.

28. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. - М.: Наука, 1987. - 480 с.

29. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. - М.: ГТТЛ, 1954. - 444 с.

30. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. - Киев: Наук.думка, 1965. - 798 с.

31. **Oddnoff J. Operators generated by differantial problems with eigenvalue parameter in equation and boundary condition // Medd. Lunds. univ. math. Semin. - 1959. - 14. - P.3-88.**

32. **Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalue of general elliptic boundary yalue problems // Comm. Pure and Appl. Math. - 1962. -v. 15.- P.119-147.**

33. **Ercolano J., Schechter M. Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems with eigenvalue parameter in boundary conditions // Comm. Pure and Appl. Math.- 1965. v. 18. N 1-2. - P.83-105.**

34. Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения // Мат.сборник. - 1947. - 20, № 3. - С.431-495.

35. Барковский В.В. Исследование стационарных и нестационарных задач В.А.Стеклова: Дис. ... докт.физ.-мат. наук. - Киев, 1984. - 260 с. Машинопись.

36. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. - М.: Мир, 1971. - 371 с.

37. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. - М.: Высш. школа, 1977. - 431 с.

38. Митропольский Ю.А., Нижник Л.П., Кульчицкий В.Л. Нелинейные задачи теплопроводности с производной по времени в граничном условии. - Киев, 1974. - 31 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 74.15).

39. Агранович М.С., Вишик М.И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат.наук. - 1964. - 19, вып. 3.-6. 53-161.

40. Барковский В.В., Ройтберг Я.А. О минимальном и максимальном операторах, соответствующих общей эллиптической задаче с неоднородными граничными условиями // Укр.мат.журн., - 1966. - 18, № 2. - 6.91-97.

41. Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition //Math.Z.-2973.-v.133,P.301-3

42. Кожевников А.Н. Об асимптотике собственных значений общих эллиптических краевых задач с λ в уравнении и граничном условии // Успехи мат.наук. - 1976. - 31, вып. 4. - С. 265-266.

43. Кожевников А.Н. Раздельная асимптотика двух серий собственных значений одной эллиптической краевой задачи // Мат.заметки. - 1977. - 22, № 5. - С.699-710.

44. Котко Л.А., Крейн С.Г. О полноте системы собственных и присоединенных функций краевых задач с параметром в граничных условиях // Сб. ст. по прилож.функц. анализа. - Воронеж, 1975. - С.71-89.

45. Барняк М.Я. Собственные колебания вязкой несжимаемой жидкости в сосуде при учете поверхностной вязкости // Аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С.37-50.

46. Фещенко С.Ф., Луковский И.А., Рабинович Б.И., Докучаев Л.В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. – Киев: Наук.думка, 1969. – 250 с.

47. Аскеров Н.К., Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения // Функц. анализ и его прилож. – 1968. – 2 , вып.2. – С.40-50.

48. Комаренко А.Н., Луковский И.А., Фещенко С.Ф. К задаче о собственных колебаниях с параметром в граничных условиях // Укр.мат.журн. – 1965. – 17, № 6. С.22-30.

49. Войтович Н.Н., Каценелебаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. – М.: Наука, 1977. – 419 с.

50. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. – 1951. – 77, № 1. – С.11-14.

51. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. 1971. – 26, № 4. – С.15-41.

52. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные $\Omega\Gamma$ -преобразования и их приложения. – Киев, 1978. – 49 с. – (Препринт/ / АН УССР. Ин-т математики; 78.39)

53. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Об одном проекционном алгоритме решения существенно неоднородных краевых задач для уравнений параболического типа // Матем.вопросы механ. сплошных сред и теплофизики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С.3-13.

54. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
55. Александрян Р.А., Березанский Ю.М., Ильин В.А., Костюченко А.Г. Некоторые вопросы спектральной теории для уравнений с частными производными // Дифференциальные уравнения с частными производными (Труды симпозиума посв. 60 летию академика С.Л.Соболева). – М.: Наука, 1970. – С.3–35.
56. Титчмарш Э.И. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка: В 2-х т. – – М.: Изд-во иностр.лит., 1960. – 276 с.
57. Галицын А.С. Краевые задачи теплофизики подземных сооружений. – К.: Наук.думка, 1983. – 286 с.
58. Гобсон Е.В. Теория сферических и элипсоидальных функций. – – М.: Изд-во иностр.лит., 1952. – 476 с.
59. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
60. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976. – 391 с.
61. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – М.: Наука, 1966. – 427 с.
62. Красносельский М.А., Вайникко Г.П., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б. Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1969. – 456 с.
63. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
64. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 511 с.
65. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. – М.: Наука, 1966. – 432 с.

66. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Физматгиз, 1955. -267 с.
67. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. - М.: Мир, 1972. - 274 с.
68. Слюсарева Л.В. Неоднородная начально-граничная задача для интегро-дифференциального уравнения теплопроводности // Численно-аналитические методы исследования динамики и устойчивости сложных систем. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. - С.153-157.
69. Слюсарева Л.В. Неоднородные граничные задачи для уравнения теплопроводности сред с памятью // П Всесоюз.конф. "Лаврентьевские чтения по матем., механ. и физике", Киев, 9-11 сент. 1985г.: Тез.докл.: Киев: Ин-т математики, 1985. - С. 192.
70. Слюсарева Л.В., Галицын А.С. Прямой метод решения неоднородных задач теплопроводности в средах с затухающей тепловой памятью // Процессы переноса теплоты и вещества. - Киев: Наук.думка, 1985. - С.108-118.
71. Галицын А.С., Слюсарева Л.В. Нелинейная задача для эволюционного уравнения, учитывающая тепловую память среды // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1987. - № 10. - С.11-15.
72. Колпащиков В.Л., Яновский С.Ю. Уравнения динамической термоупругости для сред с тепловой памятью // ИФЖ. - 1984. - 47, № 4. - С.670-675.
73. Кудинов В.М., Даниленко В.А., Макаренко А.С. Влияние эффектов памяти на диссипативные структуры, образующиеся в распределенных кинетических системах // ИФЖ. - 1984. - 47, № 5, - С.843-848.
74. Даниленко В.А., Кудинов В.М., Макаренко А.С. Влияние эффектов памяти на диссипативные структуры, образующиеся при горении // Докл. АН УССР, сер. А. - 1983. - №4. - С.59-63.

75. Лыков А.В. Некоторые проблемные вопросы теории тепломассопереноса // ИФЖ. - 1974. - 26, № 5. - С.781-793.
76. Кудинов В.М., Макаренко А.С. Граничные режимы с обострением в задачах теплопроводности с учетом памяти // Докл. АН УССР, сер. А. - 1984. - № 11. - С.57-60.
77. Галицын А.С. Построение решений некоторых неоднородных задач для диффузионного уравнения с затухающей памятью. - Киев, 1983. - 43 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.51).