АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

УДК 517.9:519.46

ЧОПИК Владимир Иванович

Условная инвариантность некоторых нелинейных волновых уравнений

01.01.02 – дифференциальные уравнения и математическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
член-корреспондент АН УССР
В.И.Фущич

Киев – 1989

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА I. Условная галилей-инвариантность скалярных волновых уравнений I2

§I. Принцип относительности Галилея и ДУЧП I2

§2. Условная инвариантность уравнения теплопроводности I3

§3. Условная галилей-инвариантность уравнения четвертого порядка I8

§4. Инвариантность уравнения гиперболического типа относительно алгебры Галилея I9

ГЛАВА 2. Симметрийные свойства нелинейных уравнений типа Шредингера 22

§I. Уравнение непрерывности 22

§2. Классический предел линейного уравнения Шредингера 26

§3. Классификация одной системы уравнений квантовой механики 29

§4. Условная инвариантность уравнения Шредингера с действительной нелинейностью 35

§5. Условная инвариантность уравнения Шредингера с потенциалом, имеющим нулевую действительную часть 5I

§6. Симметрийный анализ переопределенных систем уравнений Шредингера с комплекснозначной нелинейностью 59

§7. Редукция и точные решения нелинейных уравнений Шредингера 64

ГЛАВА 3. Условная инвариантность нелинейных пуанкаре-инвариантных систем 78

§1. Симметрийный анализ уравнения Клейна-Гордона 78

§2. Условная инвариантность нелинейных систем уравнений гиперболического типа 84

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 88

ЛИТЕРАТУРА 90

ВВЕДЕНИЕ.

Для нахождения точных решений дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), описывающих реальные физические процессы, создано ряд эффективных методов: метод специальных подстановок, метод разделения переменных, метод интегралов энергии, метод спуска Адамара и другие. Все эти методы основаны на идеях симметрии и с успехом используются для решения тех задач, уравнения которых обладают явной или скрытой симметрией.

Математические основы теории симметрии ДУЧП заложил в конце прошлого века выдающийся норвежский ученый Софус Ли (см.[69]). Первоначальной целью Ли было создание теории интегрирования дифференциальных уравнений, аналогичной теории Абеля для алгебраических уравнений. Он первым применил эту теорию к конкретным уравнениям и нашел их точные решения. С.Ли впервые установил максимальную локальную группу инвариантности одномерного линейного уравнения теплопроводности. Этот результат был переоткрыт лишь в 70-х годах XX века.

А.Пуанкаре (1905 г.) первым применил идеи Ли к системе уравнений Максвелла (об этом более подробно см.[32,33]).

Алгебраические методы Ли применительно к дифференциальным уравнениям развивались и русскими учеными В.П.Ермаковым, Г.В.Пфейфером, М.К.Куренским и др.

В послевоенные годы первые работы по применению теории Ли к конкретным уравнениям опубликовали Л.В.Овсянников в 1958 г. [63], В.Г.Костенко в 1959 г.[51,52]. Современное изложение теории Ли дано в монографиях [64,65,45,46,61], где подробно описан лиевский метод исследования групповых свойств ДУЧП.

Метод Ли позволяет находить алгебру инвариантности (АИ) уравнения в классе дифференциальных операторов первого порядка. В работе [16] обращено внимание на ограниченность подхода Ли, связанную с тем, что симметрия заданного ДУЧП не исчерпывается локальными преобразованиями, порождаемыми этими операторами. С помощью нелиевского метода [16 - 20] В.И.Фущичу удалось обнаружить новые АИ уравнений Максвелла, Дирака и других уравнений квантовой механики. Базисные операторы этих алгебр - операторы более высоких порядков, а также интегро-дифференциальные операторы. Основные результаты, связанные с нелиевским методом, изложены в монографиях [32, 33] .

Еще в работах Пуанкаре был предложен теоретико-групповой подход для построения и анализа физической теории. Это обусловлено тем, что симметрийный принцип позволяет выделять из множества допустимых математических моделей только такие, которые подчинялись бы некоторым законам. Так, среди множества линейных систем ДУЧП для двух вектор-функций $\vec{E}(x)=\{E_1, E_2, E_3\}$, $\vec{H}(x)=\{H_1, H_2, H_3\}$ существует единственная система ДУЧП, инвариантная относительно группы Пуанкаре $P(1,3)$. Этой системой является система уравнений Максвелла для электромагнитного поля в вакууме [32] . Аналогичными свойствами обладают и нелинейные ДУЧП (см. [24]).

Очень полезным является определение максимальной (в некотором смысле) группы симметрии данного ДУЧП. Знание преобразований независимых и зависимых переменных, относительно которых инвариантно ДУЧП, позволяет по заданному одному решению данного уравнения находить целые семейства точных решений нелинейных уравнений [38, 23] .

Для исследования симметрии ДУЧП мы будем использовать

алгоритм Ли [64].

Рассмотрим произвольную систему нелинейных ДУЧП

$$L(x, \psi(x)) = 0, \tag{I}$$

где $\psi(x)$ – m –компонентная дифференцируемая функция, $x \in R^n$.

Базисные операторы ищутся в виде:

$$X = \xi^{\mu}(x, \psi) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \eta^{\kappa}(x, \psi) \frac{\partial}{\partial \psi^{\kappa}}; \tag{2}$$

$$\mu = \overline{1, n} \quad ; \quad \kappa = \overline{1, m}.$$

Условие инвариантности имеет вид:

$$\overset{s}{X} L \Big|_{L=0} \equiv 0; \tag{3}$$

где $\overset{s}{X}$ – s –ое продолжение оператора X, s – порядок ДУЧП (I).

$\overset{s}{X}$ строится по формуле

$$\overset{s}{X} = X + \tilde{\tau}^{\kappa}_{\nu_1} \frac{\partial}{\partial \psi^{\kappa}_{\nu_1}} + \ldots + \tilde{\tau}^{\kappa}_{\nu_1 \ldots \nu_s} \frac{\partial}{\partial \psi^{\kappa}_{\nu_1 \ldots \nu_s}};$$

$$\tilde{\tau}^{\kappa}_{\nu_1} = D_{\nu_1} \eta^{\kappa} - \psi^{\kappa}_{\nu} D_{\nu_1} \xi^{\nu};$$

$$\tilde{\tau}^{\kappa}_{\nu_1 \nu_2} = D_{\nu_2} \tilde{\tau}^{\kappa}_{\nu_1} - \psi^{\kappa}_{\nu \nu_1} D_{\nu_2} \xi^{\nu}; \tag{4}$$

. . . . . .

$$\tilde{\tau}^{\kappa}_{\nu_1 \ldots \nu_s} = D_{\nu_s} \tilde{\tau}^{\kappa}_{\nu_1 \ldots \nu_{s-1}} - \psi^{\kappa}_{\nu \nu_1 \ldots \nu_{s-1}} D_{\nu_s} \xi^{\nu};$$

$$\nu, \nu_1, \ldots, \nu_s = \overline{0, n-1};$$

$$\varphi^\kappa_{\nu_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu_1}}, \quad \varphi^\kappa_{\nu_1\nu_2} = \frac{\partial^2 \varphi^\kappa}{\partial x^{\nu_1} \partial x^{\nu_2}} \quad \text{и т.д.},$$

$$D_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \varphi^\kappa_\nu \frac{\partial}{\partial \varphi^\kappa} + \varphi^\kappa_{\nu\nu_1} \frac{\partial}{\partial \varphi^\kappa_{\nu_1}} + \ldots \qquad (5)$$

- оператор полного дифференцирования. Здесь и дальше, если это специально не оговорено, по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Из условия инвариантности (3) получаем систему определяющих уравнений для нахождения координат $\xi^\mu(x, \varphi), \eta^\kappa(x, \varphi)$ операторов (2).

С помощью алгоритма С.Ли можно найди все дифференциальные операторы первого порядка, которые являются операторами симметрии как линейных, так и нелинейных ДУЧП.

Сравнительно недавно в работах В.И.Фущича и его учеников введено понятие условной инвариантности дифференциального уравнения.

Пусть система ДУЧП (I) допускает некоторую АИ дифференциальных операторов первого порядка. Условие инвариантности L относительно АИ можно записать в виде (см., например, 22):

$$\overset{s}{X} L = \lambda(x, \varphi, \partial) L, \qquad (6)$$

где $\lambda(x, \psi, \partial)$ - некоторые дифференциальные операторы.

Рассмотрим некоторый дифференциальный оператор Q, который не принадлежит АИ системы нелинейных ДУЧП (I). Понятно, что для этого оператора Q условие (6)' не выполняется. Для Q имеет место

$$\overset{s}{Q} L = \lambda_0 L + \lambda_1 L_1, \quad \lambda_1 \neq 0 \tag{7}$$

где $L_1 = L_1(x, \psi)$ - некоторое дифференциальное выражение относительно переменных x и функций ψ. В общем случае порядок дифференциального выражения L_1 не больше s.

Определение I. Систему уравнений (I) назовем условно инвариантной относительно оператора Q, не принадлежащего АИ системы (I), если кроме условия (7) выполняется еще условие

$$\overset{s}{Q} L_1 = \lambda_2 L + \lambda_3 L_1. \tag{8}$$

Другими словами, система (I) условно инвариантна относительно оператора Q, если она инвариантна относительно этого оператора совместно с дополнительным условием

$$L_1(x, \psi) = 0. \tag{9}$$

Дополнительное условие (9) выделяет из множества решений системы уравнений (I) некоторое его подмножество, для которого оператор Q является оператором симметрии. Естественно, что понятие условной симметрии имеет смысл лишь в том случае, когда система ДУЧП (I), (9) совместна.

Для нахождения условно инвариантных решений необходимо решать переопределенную систему уравнений (I), (9) и уравнение

$$Q\Psi = 0 \qquad (10)$$

В общем случае решить задачу нахождения условно инвариантных операторов симметрии очень сложно. Но для случая, когда дополнительное условие (9) совпадает с (10), удалось построить алгоритм для нахождения так называемых Q - условно инвариантных операторов симметрии.

Определение 2. Систему (I) назовем Q - условно инвариантной, если

$$QL = \lambda_0 L + \lambda_1 (Q\Psi). \qquad (11)$$

Случай Q - условной инвариантности более подробно рассмотрен в работах [36,37,38,40] . Используя условную инвариантность, для многих конкретных ДУЧП удалось построить новые точные решения. В данной работе Q - условная инвариантность дифференциальных уравнений не рассматривается.

В работе [7I] за счет наложения дополнительного условия удалось значительно расширить симметрию уравнения д'Аламбера и получить новые его точные решения. В диссертационной работе аналогичные результаты получены для случая комплексного уравнения д'Аламбера.

Другие примеры расширения симметрии ДУЧП за счет дополнительно налагаемых условий можно найти в [9,10,15,25] .

При помощи операторов условной симметрии можно находить новые решения уравнений по уже известным решениям. Например, пусть $\psi_I(x)$ решение уравнения (I) такое, что удовлетворяет дополнительному условию (9). Оператор условной симметрии Q порождает следующие конечные преобразования

$$x_\mu \to x'_\mu = f_\mu(x, \theta), \qquad (12)$$
$$\psi(x) \to \psi'(x') = R(x, \theta)\psi(x),$$

($R(x, \theta)$ - некоторая несингулярная матрица, $R(x, 0) = 1$, θ - параметры). Тогда функция

$$\psi_{II}(x) = R^{-1}(x, \theta)\psi_I(x') \qquad (13)$$

будет также решением исходного уравнения (I).

Заметим также, что интенсивно развивающийся метод разделения переменных ([43,59]), метод специальных подстановок, наиболее естественно описывать при помощи условной симметрии (см. [38,42]).

В заключение приведем алгоритм симметрийной редукции систем уравнений, следуя [21,34] . Пусть система (I) инвариантна относительно АИ с базисными операторами вида (2), которую мы будем обозначать $\{X_i\}$. Тогда анзац

$$\psi^k = G^k(\varphi^1(\omega), \ldots, \varphi^m(\omega), x), \quad \omega = \omega(x) \qquad (14)$$

редуцирует эту систему к системе с $n-1$ независимыми переменными $\omega(x)$, если новые переменные и функции определяются

из уравнений Лагранжа

$$\frac{dx_1}{\xi^1} = \frac{dx_2}{\xi^2} = \ldots = \frac{dx_n}{\xi^n} = \frac{d\varphi^1}{\eta^1} = \ldots = \frac{d\varphi^m}{\eta^m} \quad (15)$$

Уравнения (15) имеют $n+m-1$ функционально независимых интегралов. Из m инвариантов выражаем φ^κ и получаем анзац (14). Специальная подстановка (14) обеспечивает редукцию (I) к системе с меньшим числом независимых переменных. Такие уравнения мы будем называть редуцированными уравнениями. Для операторов условной инвариантности редукцию необходимо проводить как для системы уравнений (I), так и для дополнительного условия (9).

Многочисленные результаты в этом направлении получены в работах [5,26,29,44,61,64,4].

ГЛАВА I. Условная галилей-инвариантность скалярных волновых уравнений.

В первой главе рассмотрена условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности, параболического уравнения четвертого порядка, а также одного уравнения гиперболического типа. При наложении на решения уравнений дополнительного условия, полученная переопределенная система оказывается инвариантной относительно преобразований типа Галилея.

§ I. Принцип относительности Галилея и ДУЧП.

Принцип относительности Галилея в математическом плане сводится к требованию инвариантности уравнения движения относительно линейных преобразований

$$t \to t' = t\,, \quad x_a \to x_a' = x_a + v_a t\,, \quad a = \overline{1,n} \qquad (I.I.I)$$

v_a - параметры (компоненты скорости $\vec{v}$ инерциальной системы отсчета) преобразований. Совокупность этих преобразований образует группу Ли.

Для описания линейных и нелинейных ДУЧП, инвариантных относительно преобразований (I.I.I), необходимо, следуя [28], дополнительно задать закон преобразования зависимой функции u. В [28,38] рассматриваются два принципиально разных закона преобразования функции $u(x)$. Например, для линейного уравнения теплопроводности $u(x)$ инвариантно относительно проективных преобразований вида

$$u(x) \to u'(x') = \exp\left\{-\frac{\lambda}{2} v_a\left(x_a + \frac{1}{2} v_a t\right)\right\} u. \quad \text{(I.I.2)}$$

Галилееву закону преобразований $u(x)$ соответствует случай, когда

$$u(x) \to u'(x') = u(x). \quad \text{(I.I.3)}$$

В зависимости от закона преобразования $u(x)$, существуют различные классы ДУЧП, инвариантные относительно преобразований (I.I.I), (I.I.2), (I.I.3).

§ 2. Условная инвариантность уравнения теплопроводности.

Общепризнано считать, что нелинейные процессы тепломассопереноса описываются уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_a}\left(c(u)\frac{\partial u}{\partial x_a}\right) = 0, \quad \text{(I.2.I)}$$

$$x_0 \equiv t, \quad c(u) \neq const.$$

Групповые свойства этого уравнения для линейного случая изучал еще С.Ли. Групповой анализ нелинейного уравнения (I.2.I) осуществлен в работах [63, II] и др.

Для нас важно подчеркнуть тот факт, что для всех нелинейных уравнений вида (I.2.I), за исключением случая, когда $c(u) \equiv const$, не выполнялся принцип относительности Гали-

лея (см. [37]). А это значит, что с теоретико-групповой точки зрения уравнение (I.2.I) не вполне пригодно для описания нелинейных процессов диффузии. В связи с этим естественно исследовать такой вопрос: существует ли во всем множестве решений уравнения (I.2.I) подмножество, которое было бы инвариантно относительно группы Галилея? В данном параграфе дается утвердительный ответ на поставленный вопрос. Данное подмножество решений можно выделить путем наложения на уравнение (I.2.I) дополнительного условия в виде уравнения Гамильтона-Якоби

$$u_0 + \frac{1}{2m} u_a u_a = 0, \qquad (I.2.2)$$

$$u_0 = \frac{\partial u}{\partial x_0}, \quad u_a = \frac{\partial u}{\partial x_a}, \quad a = \overline{1,n},$$

m – постоянная (масса частицы).

Исследуем симметрию уравнения (I.2.2).

Теорема I.2.I. Максимальной (в смысле Ли) алгеброй инвариантности уравнения Гамильтона-Якоби (I.2.2) является АИ, базисные элементы которой имеют вид ([6]):

$$P_0 = \partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad a = \overline{1,n},$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad P_u = \partial_u \equiv \frac{\partial}{\partial u},$$

$$G_a^1 = x_0 p_a + m x_a P_u, \quad D^1 = x_0 p_0 + \frac{1}{2} x_a p_a, \qquad (I.2.3)$$

$$\Pi^1 = x_0^2 p_0 + x_0 x_a p_a + \frac{m}{2} x^2 P_u,$$

$$G_a^2 = u p_a + m x_a p_0, \quad D^2 = u P_u + \frac{1}{2} x_a p_a,$$

$$\Pi^2 = u^2 p_u + u x_a p_a + \frac{m}{2} x^2 p_0,$$

$$K_a = 2 x_a (D^1 + D^2) + S^2 p_a,$$

$$S^2 = \frac{2}{m} x_0 u - x^2, \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = x^2.$$

Заметим, что набор операторов (I.2.3) инвариантен относительно замены $t \leftrightarrow u$ (см. [38]).

Известно, что при произвольной функции $c(u)$ уравнение (I.2.I) инвариантно относительно группы Евклида $E(n)$, базисные элементы алгебры Ли которой имеют вид

$$P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a, \tag{I.2.4}$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad a, b = \overline{1, n}.$$

Теорема I.2.2. Система уравнений

$$\begin{cases} u_0 + \partial_a (c(u) u_a) = 0, \\ u_0 + \frac{1}{2m} u_a u_a = 0. \end{cases} \tag{I.2.5}$$

при произвольной гладкой функции $c(u)$ инвариантна относительно преобразований, порождаемых (I.2.4), а также операторами

$$G_a = u p_a + m x_a p_0. \tag{I.2.6}$$

Для доказательства теоремы достаточно установить инвари-

антность первого уравнения системы (I.2.5) относительно G_a. Для этого нам нужно найти $\tilde{G}_a$ – второе продолжение оператора G_a и подействовать им на уравнение теплопроводности. В результате получим:

$$\tilde{G}_a\{u_0 + \partial_a(c(u)u_a)\} = -u_a\{u_0 + \partial_a(c(u)u_a)\} -$$

$$- \frac{2c'(u)}{m}u_a\{u_0 + \frac{u_a u_a}{2m}\} - 2mc(u)\partial_a\{u_0 + \frac{u_a u_a}{2m}\} \quad (I.2.7)$$

Из теоремы I.2.I и (I.2.7) следует справедливость нашей основной теоремы.

Утверждение I.2.I. Операторы G_a вида (I.2.6) порождают следующие конечные преобразования:

$$x_0' = \frac{m}{2}\tilde{\tau}^2 u + m\tilde{\tau}_a x_a + x_0,$$

$$x_a' = \tilde{\tau}_a \cdot u + x_a, \quad (I.2.8)$$

$$u' = u, \qquad \tau^2 = \tilde{\tau}_a\tilde{\tau}_a,$$

$\tilde{\tau}_a$ – групповой параметр.

Теорема I.2.3. Система уравнений (I.2.5) при

$$c(u) = \{(2+n)m\}^{-1} \cdot u \quad (I.2.9)$$

инвариантна относительно алгебры Ли с базисными операторами

$$P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a.$$

$$D^1 = 2x_0 p_0 + x_a p_a,$$

$$D^2 = 2u\partial_u + x_a p_a,$$

$$G_a = u p_a + m x_a p_0,$$

$$A = u^2 \partial_u + u x_a p_a + \frac{m}{2} x^2 p_0,$$

$$K_a = x_a x_0 p_0 + x_a x_b p_b + \left(\frac{x_0 u}{m} - \frac{1}{2} x^2\right) p_a + x_a u \partial_u,$$

$$a, b = \overline{1, n}, \quad x^2 = x_a x_a. \qquad (I.2.10)$$

Доказательство теоремы проводится по методу Ли.

Замечание. Система уравнений Лапласа и Гамильтона–Якоби

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u_0 + \frac{1}{2m} u_a u_a = 0 \end{cases} \qquad (I.2.11)$$

инвариантна относительно преобразований (I.2.8). Максимальная (в смысле Ли) АИ переопределенной системы уравнений (I.2.II) исследована в [38].

Для нахождения точных решений нелинейного уравнения теплопроводности (I.2.I) по операторам условной инвариантности G_a следует использовать следующий анзац, заданный в неявном виде

$$\Phi\left(u, \; u x_0 + \frac{m}{2} x^2\right) = 0. \qquad (I.2.12)$$

§ 3. Условная галилей-инвариантность уравнения четвертого порядка.

Рассмотрим уравнение

$$(\partial_0 + \Delta)(\partial_0 - \Delta)\, u = 0 \qquad (I.3.I)$$

Теорема I.3.I. Уравнение четвертого порядка (I.3.I) инвариантно относительно группы вращений, сдвигов и масштабных преобразований. Базисные элементы алгебры Ли этой группы имеют вид

$$P_0 = \partial_0 \,, \quad P_a = \partial_a \,, \quad P_u = \partial_u \,,$$

$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a \,, \qquad (I.3.2)$$

$$D = 2x_0 P_0 + x_a P_a \,, \quad a, b = \overline{1, n} \,.$$

Теорема доказывается методом Ли.

Мы видим, что (I.3.I) неинвариантно относительно алгебры Галилея $AG(1,n)$. Уравнение (I.3.I) является дифференциальным следствием линейного уравнения теплопроводности (см. [15]), которое инвариантно относительно преобразований Галилея (I.I.I). Причина сужения симметрии уравнения (I.3.I) по сравнению с симметрией уравнения теплопроводности заключается в том, что множество решений уравнения (I.3.I) значительно шире, чем у уравнения теплопроводности.

Теорема I.3.2. Уравнение (I.3.I) с нелинейной связью

$$u_0 + u_a u_a = 0 \,, \quad a = \overline{1, n} \qquad (I.3.3)$$

инвариантно относительно алгебры Галилея $AG_1(1,n)$. Базисные элементы этой алгебры имеют вид (I.3.2), а галилеевский оператор G_a задается выражением

$$G_a = u p_a - \frac{x_a}{2} p_0. \qquad (I:3.4)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что дифференциальные операторы (I.3.2), (I.3.4) удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры $AG_1(1,n)$.

§ 4. Инвариантность уравнения гиперболического типа относительно алгебры Галилея.

Рассмотрим уравнение

$$(\lambda \partial_0 + \lambda_1 \partial_{00}^2 + \lambda_2 \Delta)u = 0; \qquad (I.4.I)$$

$$\{\lambda, \lambda_1, \lambda_2\} = const, \quad \partial_{00}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}.$$

Симметрийные свойства этого уравнения были детально изучены в [8].

Мы рассмотрим уравнение (I.4.I) совместно с нелинейным дополнительным условием

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial x_0} + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_0}\right)^2 + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_a} \frac{\partial u}{\partial x_a} = 0; \qquad (I.4.2)$$

$$\lambda, \lambda_1 \neq 0, \; a = \overline{1,n}.$$

Сначала исследуем симметрию нелинейного уравнения (I.4.2). Имеет место следующая теорема

Теорема I.4.I. Максимальной локальной группой инвариантности уравнения (I.4.2) является алгебра Ли, базисные элементы которой имеют вид:

$$X_1 = P_0 = \partial_0 ;$$

$$X_2^a = P_a = \partial_a ;$$

$$X_3 = P_u = \partial_u ;$$

$$J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a ;$$

$$X_4^a = x_0 P_a + \frac{2\lambda_1}{\lambda} u P_a + \frac{\lambda}{2\lambda_2} x_a P_u ;$$

$$X_5^a = x_a P_0 + \frac{2\lambda_2}{\lambda} u P_a ;$$

$$X_6 = x_0 P_0 + \frac{2\lambda_1}{\lambda} u P_0 - u P_u ; \qquad (I.4.3)$$

$$X_7 = x_a P_a - \frac{2\lambda_1}{\lambda} u P_0 + 2 u P_u ;$$

$$X_8^a = x_0 x_a P_0 + x_a u P_u + \frac{2\lambda_2}{\lambda} x_0 u P_a +$$

$$+ \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda^2} u^2 P_a + x_a x_b P_b - \frac{1}{2} x^2 P_a ;$$

$$X^9 = \frac{\lambda_1}{\lambda} u^2 P_0 - \frac{\lambda}{4\lambda_2} x^2 P_0 - x_a u P_a - u^2 P_u ;$$

$$X^{10} = x_0^2 P_0 + \frac{2\lambda_1}{\lambda} x_0 u P_0 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^2 u^2 P_0 - \frac{\lambda_1}{4\lambda_2} x^2 P_0 + x_0 x_a P_a +$$

$$+ \frac{\lambda_1}{\lambda} x_a u P_a + \frac{\lambda}{4\lambda_2} x^2 P_u , \quad \lambda \neq 0.$$

Замечание I.4.I. Уравнение (I.4.2) при $\lambda_1 = 0$ совпадает с уравнением Гамильтона-Якоби.

Теорема I.4.2. Уравнение (I.4.I), совместно с нелинейным дополнительным условием (I.4.2), инвариантно относительно группы Галилея, генераторы которой имеют вид

$$P_0 = \partial_0 , \quad P_a = \partial_a , \quad P_u = \partial_u ,$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a ,$$

$$G_a = u p_a + \frac{\lambda}{2\lambda_2} x_a p_0 , \qquad (I.4.4)$$

$$\lambda_2 \neq 0 , \quad a, b = \overline{1, n} .$$

Замечание I.4.2. Уравнение (I.4.I) без дополнительного условия (I.4.2) неинвариантно относительно $AG(1,n)$.

Замечание I.4.3. Для доказательства теоремы I.4.2, при переходе на многообразие, необходимо учитывать дифференциальные следствия уравнения (I.4.2).

ГЛАВА 2. Симметрийные свойства нелинейных уравнений типа Шредингера.

Данная глава посвящена исследованию симметрийных свойств, а также построению точных решений нелинейных уравнений шредингеровского типа

$$(P_0 - \frac{1}{2m} P_a^2)\psi + F \cdot \psi = 0, \qquad (*)$$

где

$$F = F(\vec{x}, x_0 = t, \psi, \psi^*), \quad P_0 = i\partial_0, \quad P_a = -i\partial_a.$$

В данной главе проведена классификация системы уравнений типа Шредингера по подалгебрам алгебры Гамильтона-Якоби в зависимости от вида нелинейности $F(x_0, \vec{x}, \psi, \psi^*)$. Построены нелинейные уравнения типа Шредингера, симметрия которых оказывается значительно шире симметрии линейного уравнения Шредингера. В главе рассматривается также условная инвариантность нелинейных уравнений шредингеровского типа. За счет наложения на эти уравнения дополнительных условий, получены новые операторы условной симметрии. Проведена редукция многомерных уравнений типа Шредингера к набору дифференциальных уравнений с меньшим числом переменных с использованием операторов условной симметрии. Построены семейства частных решений нелинейного уравнения Шредингера.

§ I. Уравнение непрерывности.

Пусть нелинейную функцию F можно представить в виде

$$F = F_1 + i F_2 , \quad i^2 = -1 . \qquad (2.I.I)$$

В уравнении (*) сделаем замену

$$\psi = \exp\left\{ \frac{u}{2} + i\varphi \right\}, \quad u = u(\vec{x}), \quad \varphi = \varphi(\vec{x}) \qquad (2.I.2)$$

Используя замену (2.I.2) и учитывая (2.I.I), уравнение Шредингера перепишем в виде системы

$$u_0 + 2\lambda u_a \varphi_a + 2\lambda \Delta\varphi + 2F_2 = 0 ; \qquad (2.I.3)$$

$$\lambda \Delta u + \frac{\lambda}{2} u_a u_a - 2\varphi_0 - 2\lambda \varphi_a \varphi_a + 2F_1 = 0 , \qquad (2.I.4)$$

где $\lambda = \frac{1}{2m}$, $a = \overline{1,n}$.

Рассмотрим случай, когда $F_2 = 0$. Тогда уравнение (2.I.3) примет вид

$$S_1 = u_0 + 2\lambda u_a \varphi_a + 2\lambda \Delta\varphi = 0 . \qquad (2.I.5)$$

Уравнение (2.I.5) есть не что иное, как уравнение непрерывности. В терминах ψ, ψ^* оно имеет вид

$$\partial_0 (\psi\psi^*) + \operatorname{div} \vec{j} = 0 , \qquad (2.I.6)$$

где $j_a = \operatorname{Re}\{-2i\lambda \psi^* \psi_a\}$, $a = \overline{1,n}$ (см. [58]).

Изучим симметрию уравнения непрерывности.

Инфинитезимальный оператор X будем искать в виде

$$X = \xi^\mu \partial_\mu + \eta^u \partial_u + \eta^\varphi \partial_\varphi \qquad (2.I.7)$$

Условие инвариантности уравнения непрерывности относительно преобразований, порождаемых оператором X имеет вид:

$$\overset{2}{X}(S_1)\Big|_{u_0 = -2\lambda u_a \varphi_a - 2\lambda \Delta\varphi} = 0 \qquad (2.1.8)$$

Из (2.1.8) получим следующую систему определяющих уравнений:

$$\xi^{\alpha}_{u} = \xi^{\mu}_{\varphi} = 0 \,, \quad \mu = \overline{0,n};$$

$$\xi^{0}_{a} = 0 \,; \quad \eta^{u}_{u} = \eta^{u}_{\varphi} = \eta^{\varphi}_{u} = \eta^{\varphi}_{\varphi\varphi} = 0 \,;$$

$$\xi^{a}_{b} + \xi^{b}_{a} = 0 \,, \quad a \neq b;$$

$$\xi^{a}_{0} = 2\lambda \eta^{\varphi}_{a} \,; \qquad (2.1.9)$$

$$\xi^{0}_{0} - 2\xi^{a}_{a} + \eta^{\varphi}_{\varphi} = 0 \,;$$

$$\eta^{u}_{0} + 2\lambda\Delta\eta^{\varphi} = 0 \,;$$

$$\eta^{u}_{a} + 2\eta^{\varphi}_{\varphi a} - \Delta\xi^{a} = 0 \,.$$

Решая систему определяющих уравнений (2.1.9), находим явный вид инфинитезимального оператора

$$X = 2f_1 \partial_0 + f_1' x_a \partial_a + f_2 \{x_a \partial_a + 2\varphi \partial_\varphi\} +$$

$$+ (f_1'' + f_2') \left\{ \frac{1}{4\lambda} x^2 \partial_\varphi - n x_0 \partial_u \right\} + f_3 \partial_\varphi + \qquad (2.1.10)$$

$$+g_a\partial_a + g_a'\frac{1}{2\lambda}x_a\partial_\varphi + c_{ab}J_{ab} + d\,\partial_u,$$

f_1, f_2, f_3, g_a – произвольные достаточно гладкие функции от x_0, $c_{ab} = -c_{ba} = const$, $d = const$.

Теорема 2.I.I. Уравнение непрерывности (2.I.5) инвариантно относительно бесконечномерной алгебры Ли, инфинитезимальный оператор которой имеет вид (2.I.IO). В терминах ψ, ψ^* оператор (2.I.IO) запишется в виде:

$$X = 2f_1\partial_0 + f_1' x_a\partial_a + f_2\Big(x_a\partial_a + ln\frac{\psi}{\psi^*}(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*})\Big) + (f_1'' + f_2')\Big(\frac{i}{4\lambda}x^2(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) -$$

$$-\frac{n}{2}x_0(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}) + g_a\partial_a + \qquad (2.I.II)$$

$$+g_a'\frac{i}{2\lambda}x_a\{\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}\} + if_3(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) +$$

$$+c_{ab}J_{ab} + \frac{d}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}),$$

где n – количество пространственных переменных.

Замечание 2.I.I. Как известно (см., например, [60]), линейное уравнение Шредингера инвариантно относительно расширенной алгебры Галилея $AG_2(1,n)$, базисные операторы которой имеют вид

$$P_0 = \partial_0, \quad P_a = \partial_a,$$
$$Q = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}), \qquad (2.I.I2)$$

$$G_a = x_0 p_a + \frac{1}{2\lambda} x_a Q,$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a,$$

$$D = 2 x_0 p_0 + x_a p_a - \frac{n}{2} I,$$

$$A = x_0^2 p_0 + x_0 x_a p_a + \frac{x^2}{4\lambda} Q - \frac{n}{2} x_0 I,$$

а также оператора

$$I = \psi \partial_\psi + \psi^* \partial_{\psi^*}. \qquad (2.I.I3)$$

Это значит, что в качестве подалгебры уравнение непрерывности (2.I.5) содержит $AG_2(1,n)$ с базисными операторами вида (2.I.I2), (2.I.I3).

Замечание 2.I.2. Для уравнения (2.I.5) оператор заряда Q имеет вид

$$Q = \partial_\varphi, \qquad (2.I.I4)$$

а оператор I, заданный (2.I.I3) имеет вид

$$I = 2 \partial_u. \qquad (2.I.I5)$$

§ 2. Классический предел линейного уравнения Шредингера.

Рассмотрим теперь уравнение (2.I.5) совместно с уравнением Гамильтона–Якоби

$$\varphi_0 + \lambda \varphi_a \varphi_a = 0. \qquad (2.2.I)$$

Как известно, уравнение (2.2.I) инвариантно относитеьно алгебры Гамильтона-Якоби ([38]).

Теорема 2.2.I. Система уравнений.

$$\begin{cases} S_1 = u_0 + 2\lambda u_a \varphi_a + 2\lambda \Delta \varphi = 0, \\ S_2 = \varphi_0 + \lambda \varphi_a \varphi_a = 0 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

инвариантна относительно алгебры Гамильтона-Якоби. Базисные элементы этой алгебры имеют вид

$$\begin{aligned} &p_0, \ p_a, \ Q, \ I, \ J_{ab}, \\ &D^1 = 2x_0 p_0 + x_a p_a - \frac{n}{2} I, \\ &D^2 = 2\varphi Q + x_a p_a - \frac{n}{2} I, \\ &G_a^1 = x_0 p_a + \frac{1}{2\lambda} x_a Q, \\ &G_a^2 = \varphi p_a + \frac{1}{2\lambda} x_a p_0, \\ &A = x_0^2 p_0 + x_0 x_a p_a + \frac{1}{4\lambda} x^2 Q - \frac{n}{2} x_0 I, \\ &S = \varphi^2 Q + \varphi x_a p_a + \frac{1}{4\lambda} x^2 p_0 - \frac{n}{2} \varphi I, \\ &K_a = x_a x_0 p_0 + x_a x_b p_b + (2\lambda x_0 \varphi - \tfrac{1}{2} x^2) p_a + \\ &\quad + x_a \varphi Q - \frac{n}{2} x_a I, \qquad b = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать инвариантность уравнения непрерывности относительно преобразований, порождаемых (2.2.3).

$$X^2(S_1)\Big|_{\substack{S_1=0;\\ S_2=0;}} \equiv 0 \qquad (2.2.4)$$

Из условия инвариантности (2.2.4) получим следующую систему определяющих уравнений

$$\begin{aligned}
&\eta^u_u = \eta^\varphi_u = \xi^0_\varphi = 0;\\
&\eta^u_0 + 2\lambda\Delta\eta^\varphi = 0;\\
&\xi^a_0 = 2\lambda\eta^\varphi_a;\\
&\xi^0_0 - 2\xi^a_a + \eta^\varphi_\varphi = 0; \qquad (2.2.5)\\
&\xi^a_\varphi + 2\lambda\xi^0_a\Big| = 0;\\
&\eta^u_a + 2\eta^\varphi_{\varphi a}\Big| + \Delta\xi^a = 0;\\
&\eta^u_\varphi + 2\lambda\Delta\xi^0 = 0.
\end{aligned}$$

Из уравнения $S_2 = 0$ следует требование

$$\eta^\varphi_0 = 0; \qquad (2.2.6)$$

Решив систему определяющих уравнений (СОУ) (2.2.4),(2.2.5) мы получим (2.2.3). Теорема доказана.

Замечание 2.2.I. В (2.2.4), при переходе на многообразие, необходимо учитывать дифференциальные следствия уравнения (2.2.I).

Замечание 2.2.2. Уравнение непрерывности неинвариантно относительно операторов G_a^2, S, K_a (2.2.3).

§ 3. Классификация одной системы уравнений квантовой механики.

Рассмотрим систему (2.2.2) для случая нелинейного уравнения Шредингера. Потребуем инвариантность данной системы относительно $AE(n)$ с операторами вида

$$P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a, \quad a, b = \overline{1, n}. \tag{2.3.I}$$

Соответствующая система будет иметь вид

$$\begin{cases} S_1 = 0; \\ S_2 = F(x_0, u, \varphi). \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Опишем все уравнения из множества (2.3.2), которые инвариантны относительно других подалгебр алгебры Гамильтона-Якоби.

Теорема 2.3.I. Система (2.3.2) инвариантна относительно алгебры Евклида $AE(n)$ (2.3.I'), а также следующих операторов:

I. $\langle P_0 \rangle$, если $F = F(u, \varphi)$;

2. $\langle P_0, I \rangle$, если $F = F(\varphi)$;

3. $\langle P_0, I, D^2 \rangle$, если $F = \alpha\varphi$, $\alpha = const$.

4. $< P_0, Q, G_a^1 >$, если $F = F(u)$;

5. $< P_0, Q, G_a^1, D^1, A >$, если $F = \alpha \cdot exp\{\frac{2}{n} u\}$;

6. $< P_0, Q, G_a^1, D^2 >$, если $F = \alpha \cdot exp\{-\frac{2}{n} u\}$;

7. $< P_0, D^2 >$, если $F = \varphi \cdot f(\varphi \cdot e^{\frac{2}{n} u})$, где f - произвольная гладкая функция,

8. $< Q, G_a^1 >$, если $F = F(x_0, u)$;

9. $< Q, G_a^1, D^1 >$, если $F = x_0^{-1} \cdot f(x_0 \cdot e^{\frac{2}{n} u})$;

10. $< Q, G_a^1, A >$, если $F = x_0^{-2} f(x_0 \cdot e^{\frac{1}{n} u})$;

11. $< I, G_a^1, Q >$, если $F = F(x_0)$;

12. $< I, G_a^1, Q, D^1 >$, если $F = \alpha \cdot x_0^{-1}$;

13. $< I, Q, G_a^1, A >$, если $F = \alpha \cdot x_0^{-2}$.

Для доказательства теоремы необходимо взять вторые продолжения всех базисных операторов алгебры Гамильтона-Якоби и подействовать ими на систему уравнений (2.3.2).

Замечание 2.3.1. Для случая 10 приведенной теоремы система уравнений (2.3.2) инвариантна относительно $AG(1,n)$. Это следует из коммутационных соотношений для базисных операторов.

Исследуем симметрию системы уравнений (2.3.2) для случая,

когда

$$F = F(x_0, x^2, u, \varphi). \qquad (2.3.3)$$

Теорема 2.3.2. Система уравнений (2.3.2), (2.3.3) инвариантна относительно преобразований, порождаемых операторами J_{ab}, а также

1. $\langle D^1, Q \rangle$, если $F = x_0^{-1} f\left(\frac{x_0}{x^2}, x_0 \exp\left(\frac{2}{n} u\right)\right)$;

2. $\langle D^2, P_0 \rangle$, если $F = \varphi f\left(\frac{\varphi}{x^2}, \varphi \exp\left(\frac{2}{n} u\right)\right)$,

где операторы J_{ab}, D^1, D^2, Q имеют вид (2.2.3).

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} S_1 = 0; \\ S_2 = F(u, \varphi, u_a u_a, \Delta u). \end{cases} \qquad (2.3.4)$$

Теорема 2.3.3. Система уравнений (2.3.4) инвариантна относительно операторов:

1. $\langle P_0, P_a, J_{ab} \rangle$, если $F = F(\varphi, u, u_a u_a, \Delta u)$;

2. $\langle P_0, P_a, J_{ab}, D^2 \rangle$, если $F = (\Delta u)^{-1} f(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$;

3. $\langle P_0, P_a, J_{ab}, D^2, D^1 \rangle$, если $F = \varphi^2 \Delta u f(\omega_1, \omega_2)$;

4. $\langle P_0, P_a, J_{ab}, Q, G_a^1 \rangle$, если $F = F(u, u_a u_a, \Delta u)$;

5. $\langle P_0, P_a, J_{ab}, Q, G_a^1, D^2 \rangle$, если $F = (\Delta u)^{-1} f(\omega_1, \omega_2)$.

6. $< \rho_0, \rho_a, \gamma_{ab}, Q, G_a^1, \mathcal{D}^1, A >$, если

$F = \Delta u f(\omega_1, \omega_2)$, где

$\omega_1 = \frac{\Delta u}{u_a u_a}$, $\omega_2 = \Delta u \exp\{\frac{2}{n} u\}$, $\omega_3 = \Delta u \cdot \varphi$.

Доказательство теоремы проводится аналогично доказательству предыдущих теорем.

Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} S_1 = 0; \\ S_2 - \Delta u f(\omega_1, \omega_2) = 0 \end{cases} \qquad (2.3.5)$$

инвариантна относительно $A G_2(1,n)$.

Потребуем инвариантность системы (2.3.5) относительно

$$R \equiv \mathcal{D}^2 = 2\gamma Q + x_a \rho_a - \frac{\alpha}{2} I, \ \alpha = const. \qquad (2.3.6)$$

Имеем:

$$\tilde{\tilde{R}}\{S_1\} \equiv 0;$$

$$\tilde{\tilde{R}}\{S_2 - \Delta u \cdot f(\omega_1, \omega_2)\} = 2\gamma_0 + 2\lambda\gamma_a \varphi_a + \qquad (2.3.7)$$

$$+ 2\Delta u f - \Delta u f_{\omega_1} \cdot 0 - \Delta u f_{\omega_2}\{2\omega_2 - \frac{2\alpha}{n}\omega_2\} =$$

$$= 2\{S_2 - \Delta u \cdot f\} + 4\Delta u f + 2\omega_2 \Delta u f_{\omega_2}(1 - \frac{\alpha}{n}).$$

Для инвариантности (2.3.5) относительно (2.3.6) необходимо, чтобы выполнялось требование

$$\nabla_{\Delta} u \cdot f + 2\omega_2 \Delta u \cdot f\omega_2 \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) f = 0. \tag{2.3.8}$$

Из (2.3.8) следует, что

$$f = \gamma(\omega_1)\, \omega_2^{\frac{2}{1-\frac{\alpha}{n}}}, \quad \alpha \neq n. \tag{2.3.9}$$

Алгебру $AG_2(1,n)$, дополненную оператором R, обозначим $AG_3(1,n)$.

Замечание 2.3.2. Алгебра $AG_3(1,n)$ носит название оптической алгебры ([12]).

Теорема 2.3.4. Система уравнений

$$\begin{cases} S_1 = 0; \\ S_2 - \exp\left(2\frac{\alpha u}{n-\alpha}\right)(\Delta u)^{\kappa} \gamma(\omega_1) = 0; \ \kappa = \frac{n+\alpha}{n-\alpha}, \end{cases} \tag{2.3.10}$$

$\alpha \neq n$,

где γ - произвольная гладкая функция от ω_1, $\omega_1 = \frac{\Delta u}{u_a u_a}$ инвариантна относительно $AG_3(1,n) > AG_2(1,n)$.

Замечание 2.3.3. В случае $\alpha = n$ следует

$$\gamma(\omega_1) \equiv 0 \tag{2.3.11}$$

и мы получим систему (2.2.2).

Частным случаем (2.3.10) является система уравнений, соответствующая $\beta \in R^1$, κ - натуральное число.

В терминах ψ, ψ^* этому частному случаю соответствует система уравнений

$$i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + A(|\psi|)\{\beta|\psi|^{\frac{8}{n-\alpha}}[A(|\psi|)]^{-\frac{2n}{n-\alpha}} - 1\}\psi = 0, \quad (2.3.12)$$

где $$A(|\psi|) = \frac{\lambda\Delta|\psi|}{|\psi|}.$$

Утверждение. Система уравнений (2.3.12) инвариантна относительно $AG_3(1,n)$.

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 2.3.4.

Для случая $\alpha = -n$ система (2.3.12) примет вид

$$i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + \{\beta|\psi|^{\frac{4}{n}} - A(|\psi|)\}\psi = 0. \quad (2.3.13)$$

Теорема 2.3.5. Система уравнений (2.3.13) при $\beta = 0$ инвариантна относительно алгебры Гамильтона-Якоби. Базисные элементы этой алгебры Ли имеют вид (2.2.3).

Действительно, система уравнений

$$i\psi_0 + \lambda\Delta\psi - A(|\psi|)\psi = 0, \quad (2.3.14)$$

где $A(|\psi|)$ определено в (2.3.12), эквивалентна системе уравнений (2.2.2). Отсюда следует справедливость нашей теоремы.

Замечание 2.3.4. Для записи алгебры Гамильтона-Якоби (2.2.3) в терминах ψ, ψ^* небходимо учесть (2.1.14), а также (2.1.15).

Вывод. Симметрия нелинейных уравнений (2.3.12)-(2.3.14) оказывается значительно шире симметрии линейного уравнения Шредингера.

§ 4. Условная инвариантность уравнения Шредингера с действительной нелинейностью.

Для начала ограничимся рассмотрением условной инвариантности уравнения Шредингера с нелинейностью, которая задается действительной функцией F. Если потребовать инвариантность уравнения относительно $AE(n)$, то система уравнений Шредингера эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases} S_1 = 0 ; \\ S_3 - 2 \cdot S_2 + 2F(x_0, u, \varphi) = 0 ; \end{cases} \qquad (2.4.I)$$

где $S_3 = \lambda \Delta u + \frac{\lambda}{2} u_a u_a$, а S_1, S_2 определены в (2.2.2)

Теорема 2.4.I. Система уравнений (2.4.I) инвариантна относительно $AE(n)$ при произвольной гладкой функции $F(x_0, u, \varphi)$, а также

I. $< P_0 >$, если $F = F(u, \varphi)$;

2. $< P_0, D >$, если $F = \gamma(\varphi) \exp\{\frac{2}{n} u\}$,
где γ - произвольная функция от φ,

3. $< P_0, D, G_a, Q, A >$, если $F = \alpha \cdot \exp\{\frac{2}{n} u\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$;

4. $< G_a, Q >$, если $F = F(x_0, u)$;

5. $< G_a, Q, D, A >$, если $F = \exp\{\frac{2}{n} u\} \cdot f(x_0 \cdot \exp\{\frac{2}{n} u\})$.

6. $\langle p_0, G_a, Q \rangle$, если $F = F(u)$.

7. $\langle p_0, I \rangle$, если $F = F(\varphi)$.

Теорема 2.4.I дает исчерпывающий ответ на вопрос о классификации системы (2.4.I) относительно (2.2.3).

Как нам уже известно (см. теорему 2.2.I), уравнение $S_1 = 0$ инвариантно относительно оператора

$$R = 2\varphi Q + x_a p_a - \frac{\alpha}{2} I, \quad \alpha = const. \tag{2.4.2}$$

Потребуем инвариантность второго уравнения системы (2.4.I) относительно R вида (2.4.2). Для этого подействуем вторым продолжением оператора R на это уравнение. В результате получим

$$\begin{aligned} &\tilde{R}\{S_3 - 2S_2 + 2F(x_0, u, \varphi)\} = \\ &= -2\lambda \Delta u - \lambda u_a u_a - 4\varphi_0 - 4\lambda \varphi_a \varphi_a - 2\alpha F_u + 4\varphi F_\varphi = \\ &= 2(S_3 - 2S_2 + 2F) - \\ &- 4\lambda \Delta u - 2\lambda u_a u_a - 4F - 2\alpha F_u + 4\varphi F_\varphi \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Из (2.4.3) следует, что (2.4.I) инвариантна относительно оператора R при выполнении условия

$$2\lambda \Delta u + \lambda u_a u_a + 2F + \alpha F_u - 2\varphi F_\varphi = 0. \tag{2.4.4}$$

Теперь потребуем инвариантность дополнительного условия (2.4.4) относительно того же оператора R .

$$\widetilde{R}\{2S_3 + 2F + 2F_u - 2\varphi F_\varphi\} =$$

$$= -4\lambda\Delta u - 2\lambda u_a u_a - 2\alpha F_u + 4\varphi F_\varphi - \alpha^2 F_{uu} +$$

$$+ 4\alpha\varphi F_{u\varphi} - 4\varphi^2 F_{\varphi\varphi} = -2(2S_3 + 2F - \alpha F_u - 2\varphi F_\varphi) +$$

$$+ 4F - \alpha^2 F_{uu} + 4\alpha\varphi F_{u\varphi} - 4\varphi^2 F_{\varphi\varphi} \qquad (2.4.5)$$

Из (2.4.5) заключаем, что (2.4.4) инвариантно относительно R, если F удовлетворяет уравнению

$$4F = \alpha^2 F_{uu} - 4\alpha\varphi F_{u\varphi} + 4\varphi^2 F_{\varphi\varphi}, \qquad (2.4.6)$$

где $$F_{uu} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\ ;\ F_{u\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial \varphi};\ F_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$4F = (\alpha \partial_u - 2\varphi \partial_\varphi)^2 F. \qquad (2.4.7)$$

Уравнение второго порядка (2.4.7) равносильно системе уравнений первого порядка (см. [53]):

$$\begin{cases} \alpha \dfrac{\partial F}{\partial u} - 2\varphi \dfrac{\partial F}{\partial \varphi} = H(F); \\ \alpha \dfrac{\partial H}{\partial u} - 2\varphi \dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 4F, \end{cases} \qquad (2.4.8)$$

где $H(F)$ - произвольная функция от F.

Систем (2.4.8) эквивалентна системе

$$\begin{cases} (\alpha \partial_u - 2\varphi \partial_\varphi) F = H(F); \\ H'(F)(\alpha \partial_u - 2\varphi \partial_\varphi) F = 4F \end{cases} \tag{2.4.9}$$

Из (2.4.9) следует

$$\begin{cases} H'(F) \cdot H(F) = 4F; \\ (\alpha \partial_u - 2\varphi \partial_\varphi) F = H(F), \end{cases} \tag{2.4.10}$$

откуда получим:

$$\begin{cases} H = \pm \sqrt{4F^2 + c}, \quad c = const; \\ (\alpha \partial_u - 2\varphi \partial_\varphi) F = \pm \sqrt{4F^2 + c} \end{cases} \tag{2.4.11}$$

Общее решение системы (2.4.II) имеет вид

$$F = \omega \cdot f_1(x_0, \varphi^{1/2} \omega^{1/2}) + \omega^{-1} f_2(x_0, \varphi^{1/2} \cdot \omega^{1/2}), \tag{2.4.13}$$

где $\omega = exp\{\frac{2u}{\alpha}\}$.

Тогда дополнительное к (2.4.I) условие (2.4.4) будет иметь вид:

$$S_3 + 2\omega \cdot f_1(x_0, \varphi^{1/2} \cdot \omega^{1/2}) = 0. \tag{2.4.14}$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему

Теорема 2.4.2. Система уравнений

$$\begin{cases} S_1 = 0 ; \\ S_2 - \exp\{-\frac{2u}{\alpha}\} \cdot f_2(\varphi^{1/2} \exp\{\frac{u}{\alpha}\}, x_0) = 0 ; \\ S_3 + 2\exp\{\frac{2u}{\alpha}\} \cdot f_1(\varphi^{1/2} \exp\{\frac{u}{\alpha}\}, x_0) = 0 \end{cases} \quad (2.4.15)$$

инвариантна относительно R, где $\alpha = const$, $\alpha \neq 0$; f_1, f_2 – произвольные действительные функции.

Замечание 2.4.1. Система (2.4.15) получается из (2.4.1) с использованием дополнительного условия (2.4.14), а также того, что $F(x_0, u, \varphi)$ имеет вид (2.4.13).

Теорема 2.4.3. Переопределенная система

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda \Delta \psi + V \cdot \psi = 0 ; \\ \lambda \Delta |\psi| + |\psi|^{\frac{\alpha+4}{\alpha}} \cdot f_1(x_0, \varphi^{1/2} \cdot |\psi|^{2/\alpha}) = 0, \end{cases} \quad (2.4.16)$$

где

$$V = |\psi|^{\frac{4}{\alpha}} f_1(x_0, \varphi^{1/2} |\psi|^{2/\alpha}) + |\psi|^{-\frac{4}{\alpha}} f_2(x_0, \varphi^{1/2} |\psi|^{2/\alpha}),$$

f_1, f_2 – произвольные действительные функции, $\varphi = \ln\{\frac{\psi}{\psi^*}\}^{-\frac{i}{2}}$ инвариантна относительно преобразований порождаемых оператором

$$R = \ln\{\frac{\psi}{\psi^*}\}(\psi \partial_\psi - \psi^* \partial_{\psi^*}) + x_a \partial_a - \frac{\alpha}{2}(\psi \partial_\psi + \psi^* \partial_{\psi^*}) \quad (2.4.17)$$

Справедливость последнего утверждения следует из равносильности систем (2.4.15) и (2.4.16).

Потребуем инвариантность системы (2.4.I) относительно R при $\alpha = 0$, т.е. относительно оператора

$$R^0 = 2\varphi Q + x_a P_a \qquad (2.4.I8)$$

Пусть $\tilde{\tilde{R}}^0$ – второе продолжение оператора R^0 . Тогда

$$\tilde{\tilde{R}}^0 \{ S_3 - 2S_2 + 2F(x_0, u, \varphi) \} =$$

$$= -2\lambda \Delta u - \lambda u_a u_a - 4\varphi_0 - 4\lambda \varphi_a \varphi_a + 4\varphi F_\varphi =$$

$$= 2\{ S_3 - 2S_2 + 2F(x_0, u, \varphi) \} +$$

$$+ 4F_\varphi \cdot \varphi - 4F - 4\lambda \Delta u - 2\lambda u_a u_a . \qquad (2.4.I9)$$

Из (2.4.I9) следует, что (2.4.I) инвариантно относительно оператора (2.4.I8) при условии

$$S_3 + F - \varphi F_\varphi = 0. \qquad (2.4.20)$$

Найдем $F(x_0, u, \varphi)$, при котором (2.4.20) инвариантно относительно R^0 .

$$\tilde{\tilde{R}}^0 \{ S_3 + F - \varphi F_\varphi \} =$$

$$= -2\lambda \Delta u - \lambda u_a u_a + 2\varphi F_\varphi - 2\varphi^2 F_{\varphi\varphi} =$$

$$= -2\{ S_3 + F - \varphi F_\varphi \} + 2F - 2\varphi^2 F_{\varphi\varphi} \qquad (2.4.2I)$$

Из последнего равенства следует условие на

$$F = \varphi^2 F_{\varphi\varphi} . \qquad (2.4.22)$$

(2.4.22) - уравнение Эйлера. Его решение

$$F = \varphi^{\chi_1} \cdot g_1 + \varphi^{\chi_2} \cdot g_2 , \qquad (2.4.23)$$

где g_1, g_2 - произвольные функции от x_0 , u ,
χ_1 , χ_2 - корни квадратного уравнения

$$\chi^2 - \chi - 1 = 0 . \qquad (2.4.24)$$

Из (2.4.24) получаем

$$\chi_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} ; \quad \chi_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} . \qquad (2.4.25)$$

Учитывая (2.4.23), (2.4.25), дополнительное условие (2.4.20) будет иметь вид:

$$\lambda \Delta u + \frac{\lambda}{2} u_a u_a + (1-\chi_1)\cdot\varphi^{\chi_1} \cdot g_1 + (1-\chi_2)\cdot\varphi^{\chi_2} \cdot g_2 =$$

$$= S_3 + \chi_2 \varphi^{\chi_1} g_1 + \chi_1 \varphi^{\chi_2} g_2 = 0 . \qquad (2.4.26)$$

Теорема 2.4.4. Система уравнений

$$\begin{cases} S_1 = 0 ; \\ S_2 + \chi_3 \varphi^{\chi_1} g_1 + \chi_4 \varphi^{\chi_2} g_2 = 0 ; \\ S_3 + \chi_2 \varphi^{\chi_1} g_1 + \chi_1 \varphi^{\chi_2} g_2 = 0 , \end{cases} \qquad (2.4.27)$$

где $\chi_3 = -\frac{1}{2}(1+\chi_1)$; $\chi_4 = -\frac{1}{2}(1+\chi_2)$
инвариантна относительно преобразований, порождаемых (2.4.18).

Замечание 2.4.2. Любое решение системы (2.4.27) удовлетворяет (2.4.I) при $F(x_0, u, \psi)$ из класса (2.4.23).

В терминах ψ , ψ^* последнюю систему можно переписать в виде:

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + V\cdot\psi = 0, \\ \Delta|\psi| + \frac{|\psi|}{2\lambda}\{\chi_2\varphi^{\chi_1}g_1 + \chi_1\varphi^{\chi_2}g_2\} = 0, \end{cases} \qquad (2.4.28)$$

где $V = \varphi^{\chi_1}g_1 + \varphi^{\chi_2}g_2$,

g_1 , g_2 – произвольные действительные функции от x_0 и u ,

$\chi_{1;2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\varphi = -\frac{i}{2}\ln\{\frac{\psi}{\psi^*}\}$, $u = \ln\{\psi\cdot\psi^*\}$.

инвариантна относительно преобразований, порождаемых (2.4.I7) при $\alpha = 0$.

Рассмотрим более подробно переопределенную систему (2.4.I5). Потребуем инвариантность системы (2.4.I5) относительно стандартных преобразований Галилея, порождаемых оператором (см. [3I])

$$G_a = x_0 p_a + \frac{1}{2\lambda} x_a Q \qquad (2.4.29)$$

Пусть $\tilde{\tilde{G}}_a$ – второе продолжение оператора (2.4.29). Подействовав $\tilde{\tilde{G}}_a$ на систему (2.4.I5), мы получим условия на функции f_1, f_2 . Результат сформулируем в виде

Теорема 2.4.5. Система

$$\begin{cases} S_1 = 0; \\ S_2 - \exp\{-\frac{2u}{\alpha}\} f_2(x_0) = 0; \\ S_3 + 2\exp\{\frac{2u}{\alpha}\} f_1(x_0) = 0, \end{cases} \qquad (2.4.30)$$

инвариантна относительно алгебры Ли, порождаемой операторами

$$\langle P_a, J_{ab}, Q, R, G_a \rangle \qquad (2.4.31)$$

когда f_1, f_2 – произвольные действительные функции от x_0.

Теорема 2.4.6. Система уравнений (2.4.30) при $\{f_1, f_2\} \in R^1$ инвариантна относительно $AG(1,n)$, дополненной оператором R.

В терминах ψ, ψ^* система (2.4.30) будет иметь вид:

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + F(x_0, |\psi|)\psi = 0; \\ \lambda\Delta|\psi| + |\psi|^{\frac{\alpha+4}{\alpha}} \cdot f_1(x_0) = 0, \end{cases} \qquad (2.4.32)$$

где

$$F(x_0, |\psi|) = |\psi|^{\frac{4}{\alpha}} f_1(x_0) + |\psi|^{-\frac{4}{\alpha}} f_2(x_0).$$

Теорема 2.4.7. Система (2.4.32) инвариантна относительно алгебры Галилея $AG(1,n)$, дополненной оператором R вида (2.4.17) при условии, что f_1, f_2 – действительные постоянные.

Справедливость последних теорем легко доказывается.

Теперь потребуем инвариантность системы (2.4.30) относительно оператора масштабных преобразований D

$$\mathcal{D} = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - \frac{\kappa}{2}\,\bar{I}, \quad \kappa = const. \tag{2.4.33}$$

Первое уравнение системы (2.4.30) инвариантно относительно (2.4.33) (см. §2 настоящей главы).

Далее

$$\tilde{\mathcal{D}}\{S_2 - \exp\{-\tfrac{2u}{\alpha}\}f_2(x_0)\} =$$

$$= -2S_2 - \exp\{-\tfrac{2u}{\alpha}\}\left[\left(2f_2 + \tfrac{2\kappa}{\alpha}f_2 + 2x_0 f_2'\right) - 2f_2\right] \tag{2.4.34}$$

Из (2.4.34) следует, что второе уравнение системы (2.4.30) инвариантно относительно (2.4.33), если f_2 удовлетворяет

$$f_2\left(1 + \frac{\kappa}{\alpha}\right) + x_0 f_2' = 0. \tag{2.4.35}$$

Из (2.4.35) получаем, что

$$f_2 = c_1 x_0^{-\frac{\alpha+\kappa}{\alpha}}, \quad c_1 \in \mathbb{R}^1. \tag{2.4.36}$$

Аналогично

$$\tilde{\mathcal{D}}\{S_3 + 2\exp\{\tfrac{2u}{\alpha}\}f_1(x_0)\} =$$

$$= -2S_3 + \exp\{\tfrac{2u}{\alpha}\}\left[\left(4f_1 - \tfrac{4\kappa}{\alpha}f_1 + 4x_0 f_1'\right) - 4f_1\right] \tag{2.4.37}$$

Согласно (2.4.37) необходимо выполнение условия

$$f_1\left(1 - \frac{\kappa}{\alpha}\right) + x_0 f_1' = 0. \tag{2.4.38}$$

Из последнего условия следует, что

$$f_1 = c_2 x_0^{\frac{\kappa-\alpha}{\alpha}}, \quad c_2 \in \mathbb{R}^1. \tag{2.4.39}$$

Таким образом, выполнение условий (2.4.36), (2.4.39) дает инвариантность системы (2.4.30) относительно оператора масштабных преобразований (2.4.33).

Если, кроме этого, потребовать инвариантность системы (2.4.30) относительно трансляций по времени, порождаемых оператором p_0, то получим, что кроме выполнения условий (2.4.36), (2.4.39), должно выполнятся одно из следующих требований:

$$c_1 = 0, \quad \kappa = \alpha; \tag{2.4.40}$$

$$c_2 = 0, \quad \kappa = -\alpha; \tag{2.4.41}$$

$$c_1 = c_2 = 0. \tag{2.4.42}$$

При выполнении (2.4.40) система (2.4.30) будет иметь вид:

$$\begin{cases} S_1 = 0; \\ S_2 = 0; \\ S_3 + 2 c_2 \exp\left\{\frac{2u}{\alpha}\right\} = 0. \end{cases} \tag{2.4.43}$$

Для случая (2.4.41) соответсвующая система имеет вид:

$$\begin{cases} S_1 = 0 ; \\ S_2 - c_1 \exp\left\{ - \frac{2u}{\alpha} \right\} = 0 ; \\ S_3 = 0 . \end{cases} \qquad (2.4.44)$$

И, наконец, случаю (2.4.42) соответствует система

$$\begin{cases} S_1 = 0 ; \\ S_2 = 0 ; \\ S_3 = 0 . \end{cases} \qquad (2.4.45)$$

Потребуем инвариантность системы (2.4.30) относительно оператора проективных преобразований

$$A = x_0^2 p_0 + x_0 x_a p_a + \frac{1}{4n} x^2 Q - \frac{n}{2} x_0 I , \qquad (2.4.46)$$

где $x^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, n – количество пространственных переменных. Будем предполагать, что выполняются (2.4.36), (2.4.39), т.е. система (2.4.30) инвариантна относительно масштабных преобразований, порождаемых (2.4.33).

Пусть $\tilde{A}$ – второе продолжение оператора A. Тогда

$$\tilde{A}\left\{ S_2 - \exp\left\{ - \frac{2u}{\alpha} \right\} c_1 x_0^{-\frac{\alpha+\kappa}{\alpha}} \right\} = -2 x_0 S_2 + \qquad (2.4.47)$$

$$+ c_1 \exp\left\{ - \frac{2u}{\alpha} \right\} x_0^{1 - \frac{\kappa+\alpha}{\alpha}} \left[\frac{\alpha+\kappa}{\alpha} - \frac{2}{n} \right] .$$

$$\tilde{\tilde{A}}\{S_3 + 2c_2 x_0^{\frac{\kappa-\alpha}{\alpha}} \exp\{\frac{2u}{\alpha}\}\} = -2x_0 \cdot S_3 +$$

$$+ 2c_2 \exp\{\frac{2u}{\alpha}\} x_0^{1+\frac{\kappa-\alpha}{\alpha}} [(2 + \frac{2n}{\alpha} + \frac{\kappa-\alpha}{\alpha}) - 2] \quad (2.4.48)$$

Из (2.4.47), (2.4.48) следует, что для инвариантности системы (2.4.30) относительно операторов (2.4.33), (2.4.46) необходимо, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

$$c_1 = 0 , \quad c_2 = 0; \quad (2.4.49)$$

$$c_1 = 0 , \quad \kappa = -(2n+\alpha); \quad (2.4.50)$$

$$c_2 = 0 , \quad \kappa = 2n + \alpha; \quad (2.4.51)$$

$$\kappa = 2n + \alpha = -(2n+\alpha). \quad (2.4.52)$$

Последнее равенство тождественно условию

$$\kappa = 0 ; \qquad \alpha = -2n. \quad (2.4.53)$$

Для случая, когда выполняется (2.4.53), система (2.4.30) будет иметь вид:

$$\begin{cases} S_1 = 0 , \\ S_2 - c_1 x_0^{-1} \exp\{\frac{u}{n}\} = 0; \\ S_3 + 2c_2 x_0^{-1} \exp\{-\frac{u}{n}\} = 0. \end{cases} \quad (2.4.54)$$

Если потребовать еще и инвариантность относительно оператора P_0, то случаи (2.4.49) и (2.4.53) совпадут, а из (2.4.50), (2.4.5I) получим, соответственно:

$$c_1 = 0, \qquad \kappa = n = \alpha; \tag{2.4.55}$$

$$c_2 = 0, \qquad \kappa = n = -\alpha. \tag{2.4.56}$$

Результаты наших рассуждений можно обобщить классификационной теоремой.

Теорема 2.4.7. Система уравнений (2.4.30) инвариантна относительно алгебры Ли, порождаемой операторами (2.4.3I), а также относительно следующих операторов:

I. $< D >$ вида (2.4.33), если выполняется (2.4.36),(2.4.39),

2. $< P_0, D >$, если выполняется одно из условий (2.4.40) - (2.4.42) (здесь и дальше подразумевается выполнение (2.4.36), а также (2.4.39)),

3. $< D, A >$, если выполняется одно из условий (2.4.49) - (2.4.53),

4. $< P_0, D, A >$, если выполняется (2.4.55) или (2.4.56).

Замечание 2.4.3. Выполнение условия (2.4.55) соответствует системе уравнений (2.4.44) при $\alpha = n$, а (2.4.56) соответствует системе (2.4.45) при $\alpha = -n$.

Замечание 2.4.4. Система уравнений (2.4.30) в случае 2. теоремы инвариантна относительно алгебры $AG_2(1,n)$, дополненной R.

Замечание 2.4.5. При выполнении (2.4.55) или (2.4.56), система (2.4.30) оказывается инвариантной относительно введенной нами ранее алгебры $AG_3(1,n)$, включающей в себя расширенную алгебру Галилея $AG_2(1,n)$.

Проведем сводку полученных результатов в обозначениях ψ, ψ^*.

Система (2.4.30), при выполнении (2.4.36), (2.4.39), будет иметь вид:

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + F(x_0, |\psi|)\psi = 0; \\ \lambda\Delta|\psi| + c_2 x_0^{\frac{\kappa-\alpha}{\alpha}} |\psi|^{\frac{4+\alpha}{\alpha}} = 0, \end{cases} \tag{2.4.57}$$

где

$$F(x_0, |\psi|) = c_2 x_0^{\frac{\kappa-\alpha}{\alpha}} |\psi|^{\frac{4}{\alpha}} + c_1 x_0^{-\frac{\alpha+\kappa}{\alpha}} |\psi|^{-\frac{4}{\alpha}}$$

Теорема 2.4.8. Переопределенная система уравнений

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + F\psi = 0; \\ \lambda\Delta|\psi| + c_2|\psi|^{\frac{\alpha+4}{\alpha}} = 0, \end{cases} \qquad c_2 \in R^1, \tag{2.4.58}$$

где

$$F = c_2|\psi|^{\frac{4}{\alpha}}$$

инвариантна относительно $AG_3(1,n)$ при $\alpha = n$.

Теорема 2.4.9. Система уравнений

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + c_1|\psi|^{-\frac{4}{\alpha}}\psi = 0; \\ \Delta|\psi| = 0, \end{cases} \qquad c_1 \in R^1. \tag{2.4.59}$$

при $\alpha = -n$ инвариантна относительно $A\,G_3(1,n)$.

Система (2.4.58) получается из (2.4.57) при выполнении условия (2.4.55). (2.4.59) следует из (2.4.57) при условии, что выполняется (2.4.56). Из этого следует справедливость приведенных теорем.

Случаю (2.4.53) (т.е. системе уравнений (2.4.54)) соответствует система

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + F(x_0, |\psi|)\psi = 0; \\ \lambda\Delta|\psi| + c_2 x_0^{-1}|\psi|^{\frac{n-2}{n}} = 0, \end{cases} \qquad (2.4.60)$$

где

$$F(x_0, |\psi|) = [c_1|\psi|^{\frac{2}{n}} + c_2|\psi|^{-\frac{2}{n}}]\cdot x_0^{-1}.$$

Теорема 2.4.10. Система уравнений (2.4.60) инвариантна относительно алгебры Ли, порождаемой операторами (2.4.31), а также $\mathcal{D}$, A .

Справедливость последней теоремы следует из классификационной теоремы 2.4.7.

§ 5. Условная инвариантность уравнения Шредингера с потенциалом, имеющим нулевую действительную часть.

В четвертом параграфе данной главы мы рассмотрели условную инвариантность нелинейного уравнения Шредингера с действительным потенциалом. Перейдем к рассмотрению условной инвариантности уравнения Шредингера для случая, когда в (2.1.1)

$$Re\,F = F_1 = 0. \qquad (2.5.1)$$

Тогда, используя замену (2.I.2), уравнение Шредингера можно переписать в виде:

$$\begin{cases} S_1 + 2F_2 = 0, \\ S_3 - 2S_2 = 0. \end{cases} \tag{2.5.2}$$

где $V_2 = Im\, V$ (см. (2.I.I) .

Теорема 2.5.I. Система уравнений (2.5.2) инвариантна относительно $AE(n)$, если $V_2 = \varphi(x_0, u, \varphi)$, а также:

I. $\langle \mathcal{D} \rangle$, если

$$\varphi(x_0, u, \varphi) = \exp\{\tfrac{2u}{n}\} f_1(\varphi, x_0 \exp\{\tfrac{2u}{n}\}), \tag{2.5.3}$$

где $$\mathcal{D} = 2x_0 p_0 + x_a p_a - \frac{n}{2} I. \tag{2.5.4}$$

2. $\langle P_0, \mathcal{D} \rangle$, если

$$\varphi = f_2(\varphi) \exp\{\tfrac{2u}{n}\}, \tag{2.5.5}$$

3. $\langle G_a \rangle$, если

$$\varphi = f_3(x_0, u), \tag{2.5.6}$$

4. $\langle \mathcal{D}, Q, G_a \rangle$, если

$$\varphi = f_4(x_0 \cdot \exp\{\tfrac{2u}{n}\}) \exp\{\tfrac{2u}{n}\}. \tag{2.5.7}$$

5. $\langle Q, G_a, A \rangle$, если

$$\varphi = \exp\left\{\frac{2u}{n}\right\} f_5\left(x_0^2 \exp\left\{\frac{2u}{n}\right\}\right), \qquad (2.5.8)$$

6. $\langle \rho_0, Q, G_a, \mathcal{D}, A \rangle$, если

$$\varphi = \gamma_1 \exp\left\{\frac{2u}{n}\right\}, \quad \gamma \in R^1, \qquad (2.5.9)$$

где f_i – произвольные действительные функции, $i = \overline{1,5}$.

Легко убедиться в справедливости приведенной теоремы. Так, например, для инвариантности (2.5.2) относительно оператора $\mathcal{D}$ вида (2.5.4) необходимо взять второе продолжение $\mathcal{D}$ и подействовать им на нашу систему. В результате получим, что функция $\varphi(x_0, u, \varphi)$ должна удовлетворять соотношению

$$\varphi = \frac{n}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \qquad (2.5.10)$$

Решив (2.5.10), получим (2.5.3).

Потребуем инвариантность системы (2.5.2) относительно преобразований, порождаемых оператором

$$R = 2\varphi Q + x_a \rho_a - \frac{\alpha}{2} I, \quad \alpha = const. \qquad (2.5.11)$$

Легко показать (см. §5 данной главы), что не все множество решений второго уравнения системы (2.5.2) является инвариантным относительно (2.5.11), а только то его подмножество, которое является решением системы.

$$\begin{cases} S_2 = 0 ; \\ S_3 = 0 . \end{cases} \qquad (2.5.12)$$

Очевидно, что каждое решение (2.5.12) удовлетворяет второму уравнению системы (2.5.2).

Теперь осталось потребовать инвариантность первого уравнения системы (2.5.2) относительно (2.5.11).

$$\widetilde{\widetilde{R}}\{S_1 + 2\Phi(x_0, u, \varphi)\} = -2\lambda u_a \varphi_a + 2\lambda u_a \varphi_a +$$

$$+ 2(2\lambda)\Phi_u + 4\varphi\Phi_\varphi = 2(2\varphi\Phi_\varphi - \alpha\Phi_u) . \qquad (2.5.13)$$

Из (2.5.13) следует:

$$\Phi = \Phi(x_0, \varphi \exp\{\frac{2u}{\alpha}\}), \quad \alpha \neq 0. \qquad (2.5.14)$$

В результате мы приходим к выводу, что система уравнений

$$\begin{cases} S_1 + \Phi(x_0, \varphi \exp\{\frac{2u}{\alpha}\}) = 0; \\ S_2 = 0 ; \\ S_3 = 0 ; \end{cases} \qquad (2.5.15)$$

инвариантна относительно преобразований, порождаемых оператором

(2.5.II) при условии, что $\alpha \neq 0$.

Определим функцию φ , при которой (2.5.I5) инвариантна относительно масштабных преобразований, порождаемых (2.5.4).

$$\tilde{\mathcal{D}}\{S_1 + \varphi(x_0, \psi \exp(\tfrac{2u}{\alpha}\xi)) = -2(S_1 + \varphi) +$$

$$+ 2\varphi - \frac{2n}{\alpha}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} - x_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}, \quad \omega = \psi\exp(\tfrac{2u}{\alpha}\xi). \qquad (2.5.I6)$$

Из (2.5.I6) получим условие на $\varphi(x_0, \omega)$

$$\varphi = x_0\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} + \frac{n}{\alpha}\omega\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}. \qquad (2.5.I7)$$

Из (2.5.I7) следует, что

$$\varphi(x_0, \omega) = x_0 f(x_0^{-1}\omega^{\frac{\alpha}{n}}), \quad \omega = \psi\exp(\tfrac{2u}{\alpha}\xi). \qquad (2.5.I8)$$

Теорема 2.5.2. Система уравнений (2.5.I5) инвариантна относительно преобразований, порождаемых (2.5.II) при $\alpha \neq 0$, а также $\mathcal{D}$ вида (2.5.4) при $\varphi(x_0, \omega)$, удовлетворяющей (2.5.I8).

При

$$\varphi(x_0, \omega) = \gamma_2 \psi^{\frac{\alpha}{n}}\exp(\tfrac{2u}{n}\xi), \quad \gamma_2 \in \mathbb{R}^1 \qquad (2.5.I9)$$

система (2.5.I5) инвариантна относительно (2.5.II), (2.5.4), а также оператора P_0 .

Замечание 2.5.I. В обозначениях ψ, ψ^* переопределенная система (2.5.I5) будет иметь вид:

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + i\varphi(x_0, \psi|\psi|^{\frac{4}{\alpha}})\psi = 0, \\ \Delta|\psi| = 0. \end{cases} \qquad (2.5.20)$$

где φ – произвольная действительная функция, $\varphi = -\frac{1}{2} \ln \frac{v}{v_*}$, а оператор R задается (2.4.17).

Замечание 2.5.2. В условиях последних двух теорем существенным является требование $\alpha \neq 0$.

Потребуем инвариантность (2.5.2) относительно оператора R вида (2.5.11) при $\alpha = 0$, что соответствует инвариантности относительно ранее введенного нами (см.(2.4.18)) оператора R^0.

$$\tilde{R}^0 \{S_1 + \Phi\} = -2\lambda u_a \varphi_a + 2\lambda u_a \varphi_a + 2\varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \qquad (2.5.21)$$

Из (2.5.21) следует, что для инвариантности первого уравнения системы (2.5.2) относительно R^0 необходимо, чтобы

$$\Phi(x_0, u, \varphi) \equiv \Phi(x_0, u). \qquad (2.5.22)$$

Потребовав инвариантность второго уравнения системы (2.5.2) относительно R^0, мы снова придем к системе (2.5.12).

Найдем условие на $\Phi(x_0, u)$, чтобы (2.5.2) допускала $\mathcal{D}$ вида (2.5.4).

$$\mathcal{D}\{S_1 + \Phi(x_0, u)\} = -2(S_1 + \Phi) + 2\Phi + 2x_0 \Phi_{x_0} - n\Phi_u \qquad (2.5.23)$$

Из (2.5.23) следует:

$$\Phi = \frac{n}{2} \Phi_u - x_0 \Phi_{x_0}, \quad \Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \Phi_{x_0} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_0}. \qquad (2.5.24)$$

Откуда получаем:

$$\Phi(x_0, u) = x_0^{-1} h(x_0 \exp(\frac{2u}{n})). \qquad (2.5.25)$$

где h – произвольная гладкая действительная функция.

Для инвариантности системы (2.5.2) относительно оператора проективных преобразований A необходимо, чтобы в (2.5.25)

$$h(x_0 \exp\{\tfrac{2u}{n}\}) = \gamma_3 x_0 \exp\{\tfrac{2u}{n}\}, \quad \gamma_3 \in R^1. \qquad (2.5.26)$$

Полученные результаты мы можем сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 2.5.3. Система уравнений (2.5.2) инвариантна относительно $AE(n)$, а также:

$$1. \quad \langle Q, R, G_a \rangle, \qquad (2.5.27)$$

если выполняется (2.5.22);

$$2. \quad \langle Q, R, G_a, \mathcal{D} \rangle, \qquad (2.5.28)$$

если имеет место (2.5.25),

$$3. \quad \langle P_0, Q, R, G_a, \mathcal{D}, R^0 \rangle, \qquad (2.5.29)$$

если

$$\Phi(x_0, u, \varphi) = \gamma_3 \exp\{\tfrac{2u}{n}\}, \qquad (2.5.30)$$

где оператор R^0 имеет вид

$$R^0 = 2\varphi Q + x_a P_a. \qquad (2.5.31)$$

Выражение (2.5.30) следует из (2.5.25) и (2.5.26).

В обозначениях ψ , ψ^* последнюю теорему можно сформулировать в следующем виде

Теорема 2.5.4. Система уравнений

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + i\Phi(x_0, |\psi|)\psi = 0, \\ \Delta|\psi| = 0, \end{cases} \tag{2.5.32}$$

инвариантна относительно $AE(n)$, а также (2.5.27).

В случае, когда

$$\Phi(x_0, |\psi|) = x_0^{-1} h(x_0 |\psi|^{\frac{4}{n}}) \tag{2.5.33}$$

система (2.5.32) инвариантна кроме этого относительно оператора масштабных преобразований вида (2.5.4).

Для случая, когда

$$\Phi(x_0, |\psi|) = \gamma_3 |\psi|^{\frac{4}{n}} , \tag{2.5.34}$$

система инвариантна относительно оптической алгебры $AG_3(1,n)$, где оператор R^0 имеет вид (2.5.31), $\Phi(x_0, |\psi|)$ – произвольная действительная функция, $\varphi = -\frac{i}{2} \ln \frac{\psi}{\psi^*}$.

Теорема 2.5.5. Система (2.5.32) при

$$\Phi(x_0, |\psi|) = \Phi(|\psi|) \tag{2.5.35}$$

инвариантна относительно $AG(1,n)$, дополненной оператором R^0 вида (2.5.11) при $\alpha = 0$.

§ 6. Симметрийный анализ переопределенных систем уравнений Шредингера с комплекснозначной нелинейностью.

Сравнение результатов, полученных в четвертом и пятом параграфах данной главы приводит к выводу, что симметрийные свойства переопределенных систем уравнений шредингеровского типа с действительной и мнимой нелинейностью существенно различны. Различие заключается в самом виде нелинейностей, а также в представлении нового оператора R , полученного за счет наложения дополнительного условия.

Рассмотрим уравнение Шредингера с нелинейностью, которая задается комплекснозначной функцией. Его можно записать в виде сиотемы уравнений (2.I.3), (2.I.4).

Рассмотрим случай, когда

$$F_1 = F(u,\varphi) \ , \quad F_2 = \Phi(u,\varphi) \qquad (2.6.I)$$

Потребуем инвариантность системы (2.I.3), (2.I.4) относительно оператора R вида (2.5.II).

Из теоремы 2.5.2 следует, что

$$\Phi(u,\varphi) = \Phi\left(\varphi \exp\left(\frac{2iu}{\alpha}\right)\right), \ \alpha \neq 0. \qquad (2.6.2)$$

где $\Phi\left(\varphi \exp\left(\frac{2iu}{\alpha}\right)\right)$ - произвольная действительная функция.

Для инвариантности данной системы относительно оператора R из теоремы 2.5.9 вытекает, что $F(u,\varphi)$ должна иметь следующий вид:

$$F(u,\varphi)=\exp\left\{\frac{2u}{\alpha}\right\}f_1(\varphi^{1/2}\exp\left\{\frac{u}{\alpha}\right\})+\exp\left\{-\frac{2u}{\alpha}\right\}f_2(\varphi^{1/2}\exp\left\{\frac{u}{\alpha}\right\}) \qquad (2.6.3)$$

а само уравнение (2.I.4) распадается на систему двух уравнений

$$S_2-\exp\left\{-\frac{2u}{\alpha}\right\}f_2(\varphi^{1/2}\exp\left\{\frac{u}{\alpha}\right\})=0; \qquad (2.6.4)$$

$$S_3+2\exp\left\{\frac{2u}{\alpha}\right\}f_1(\varphi^{1/2}\exp\left\{\frac{u}{\alpha}\right\})=0, \qquad (2.6.5)$$

где $S_2=\varphi_0+\lambda\varphi_a\varphi_a$, $S_3=\lambda\Delta u+\frac{\lambda}{2}u_a u_a$.

Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} S_1+2\Phi(\omega_1)=0; \\ S_2-\exp\left\{-\frac{2u}{\alpha}\right\}f_2(\omega_2)=0; \\ S_3+2\exp\left\{\frac{2u}{\alpha}\right\}f_1(\omega_2)=0 \end{cases} \qquad (2.6.6)$$

где $\omega_1=\varphi\exp\left\{\frac{2u}{\alpha}\right\}$, $\omega_2=\omega_1^{1/2}$, $\alpha\neq 0$

инвариантна относительно преобразований, порождаемых (2.5.II).

Используя ψ и ψ^*, систему (2.6.6) можно записать в виде

$$\begin{cases} i\psi_0+\lambda\Delta\psi+\left\{|\psi|^{\frac{4}{\alpha}}f_1(\omega_2)+|\psi|^{-\frac{4}{\alpha}}f_2(\omega_2)+i\Phi(\omega_1)\right\}\psi=0 \\ \lambda\Delta|\psi|+|\psi|^{\frac{4+\alpha}{\alpha}}f_1(\omega_1)=0, \end{cases} \qquad (2.6.7)$$

где

$$\omega_1 = \varphi\,|\psi|^{\frac{\gamma}{\alpha}}\,, \quad \omega_2 = \omega_1^{1/2}\,,$$

$$\varphi = -\frac{i}{2}\ln\frac{\psi}{\psi^*}\,, \quad \alpha \neq 0\,, \quad i^2 = -1\,.$$

Теорема 2.6.I. Система уравнений (2.6.7) инвариантна относительно преобразований, порождаемых (2.4.I7).

Потребуем инвариантность системы (2.6.6) относительно оператора масштабных преобразований, имеющего вид (2.5.4).

Из теоремы 2.5.2 заключаем, что

$$\Phi(\omega_1) = c\,\omega_1^{\alpha/n}\,, \quad c \in \mathbb{R}^1\,, \tag{2.6.8}$$

Пусть $\tilde{\tilde{D}}$ - второе продолжение оператора (2.5.4), тогда

$$\tilde{\tilde{D}}\{S_2 - \exp\{-\tfrac{2u}{\alpha}\}f_2(\omega_2)\} = -2(S_2 - \exp\{-\tfrac{2u}{\alpha}\}f_2(\omega_2)) -$$

$$-2\exp\{-\tfrac{2u}{\alpha}\}f_2(\omega_2) - \tfrac{2n}{\alpha}\exp\{-\tfrac{2u}{\alpha}\}f_2(\omega_2) + \tfrac{n}{\alpha}\varphi^{1/2}\exp\{-\tfrac{u}{\alpha}\}f_2'(\omega_2) \tag{2.6.9}$$

Из (2.6.9) получаем, что f_2 должна удовлетворять

$$f_2\left(-1 + \frac{n}{\alpha}\right) = \frac{n}{2\alpha}\,\omega_2 f_2'\,. \tag{2.6.I0}$$

Из (2.6.I0) следует

$$f_2 = c_1\,\omega_2^{2\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)}\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}^1\,. \tag{2.6.II}$$

Аналогично

$$\tilde{\tilde{D}}\{S_3 + 2\exp\{\tfrac{2u}{\alpha}\}f_1(\omega_2)\} = -2(S_3 + 2\exp\{\tfrac{2u}{\alpha}\}f_1(\omega_2)) +$$

$$+4\exp\left\{\frac{2u}{\alpha}\right\}f_1(\omega_2)-\frac{2n}{\alpha}2\exp\left\{\frac{2u}{\alpha}\right\}f_1(\omega_2)-\frac{n}{\alpha}2e^{\frac{3u}{\alpha}}\varphi^{1/2}f_1(\omega_2)\Big\}. \quad (2.6.12)$$

Отсюда получим условие на $f_1(\omega_2)$:

$$f_1\left(1-\frac{n}{\alpha}\right)=\frac{n}{2\alpha}\omega_2 f_1'(\omega_2), \quad (2.6.13)$$

и в результате

$$f_1(\omega_2)=c_2\,\omega_2^{-2\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)}, \quad c_2\in R^1. \quad (2.6.14)$$

Таким образом, учитывая (2.6.8), (2.6.11), (2.6.14), система (2.6.6) будет иметь вид:

$$\begin{cases} S_1+c\,\varphi^{\frac{\alpha}{n}}\exp\left\{\frac{2u}{n}\right\}=0; \\ S_2-c_1\varphi^{1+\frac{\alpha}{n}}\exp\left\{\frac{2u}{n}\right\}=0; \\ S_3+2c_2\varphi^{\frac{\alpha}{n}-1}\exp\left\{\frac{2u}{n}\right\}=0, \quad \{c,c_1,c_2\}\in R^1. \end{cases} \quad (2.6.15)$$

Система (2.6.15) в терминах ψ, ψ^* будет иметь вид:

$$\begin{cases} i\,\psi_0+\lambda\Delta\psi+\varphi^{\frac{\alpha}{n}}|\psi|^{\frac{4}{n}}\{c_1\varphi+c_2\varphi^{-1}+ic\}\psi=0; \\ \lambda\Delta|\psi|+c_2|\psi|^{\frac{4}{n}+1}\varphi^{\frac{\alpha}{n}-1}=0, \end{cases} \quad (2.6.16)$$

где $\varphi=-\frac{i}{2}\ln\frac{\psi}{\psi^*}$, $\{c_1,c_2,c\}\in R^1$.

Теорема 2.6.2. Система (2.6.I5) инвариантна соносительно операторов (2.4.I7), (2.5.4).

Потребуем инвариантность системы уравнений (2.I.3), (2.I.4) относительно оператора (2.5.3I).

Из теоремы 2.5.3 следует, что

$$P(u, \varphi) = P(u). \tag{2.6.I7}$$

Для инвариантности (2.I.4) относительно (2.5.3I) необходимо, чтобы это уравнение распадалось на систему двух уравнений

$$\begin{cases} S_2 - \varphi f_1(u) = 0; \\ S_3 + 2\varphi^{-1} f_2(u) = 0, \end{cases} \tag{2.6.I8}$$

где f_1, f_2 – произвольные действительные функции.

Теорема 2.6.3. Система уравнений

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + \{f_1(|\psi|)\varphi + f_2(|\psi|)\varphi^{-1} + iP(|\psi|)\}\psi = 0; \\ \lambda\Delta|\psi| + f_3(|\psi|)\varphi^{-1} = 0, \end{cases} \tag{2.6.I9}$$

где $f_3(|\psi|) = f_2(|\psi|)\cdot|\psi|$; $\varphi = -\frac{i}{2}\ln\frac{\psi}{\psi^*}$.

инвариантна относительно (2.5.3I).

Теорема следует из (2.6.I6), (2.6.I7).

Замечание. Если потребовать инвариантность (2.6.I8) относительно (2.5.4), то придем снова к системе (2.6.I5), где $\alpha = 0$.

§ 7. Редукция и точные решения нелинейных уравнений Шредингера.

Рассмотрим нелинейное уравнение Шредингера вида

$$i\psi_0 + \lambda \Delta \psi + F(|\psi|)\psi = 0 \qquad (2.7.1)$$

Известно (см., например, [35]), что уравнение (2.7.I) инвариантно относительно алгебры Галилея $AG(1,n)$ при произвольной гладкой функции $F(|\psi|)$. Базисные операторы этой алгебры имеют вид:

$$P_0 = \partial_0 , \quad P_a = \partial_a ,$$

$$Q = i(\psi \partial_\psi - \psi^* \partial_{\psi^*}),$$

$$J_{ab} = x_a p_b - x_b p_a , \qquad (2.7.2)$$

$$G_a = x_0 p_a + \frac{x_a}{2\lambda} Q , \quad a,b = \overline{1,n} .$$

Используя инвариантность относительно $AG(1,n)$ с операторами (2.7.2), решения уравнения (2.7.I) мы можем искать при помощи анзаца

$$\psi = f(x_0, \vec{x})\, \varphi(\omega_i), \qquad (2.7.3)$$

где $f(x_0, \vec{x})$ – некоторая конкретная функция, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$
$\varphi(\omega_i)$ – функция от новых инвариантных переменных ω_i,

которая подлежит определению. Анзац (2.7.3) редуцирует уравнение (2.7.I) к системе уравнений для функции $\varphi(\omega_i)$ от новых переменных ω_i, количество которых меньше числа независимых переменных исходного уравнения.

В том частном случае, когда

$$F(|\psi|) = \gamma |\psi|^{\frac{4}{n}}, \quad \gamma = const \qquad (2.7.4)$$

уравнение (2.7.I) допускает расширенную алгебру Галилея $AG_2(1,n)$. При помощи анзаца (2.7.3) в работах [27,35] найдены классы точных решений нелинейного уравнения (2.7.I) с нелинейностью (2.7.4) для случая трех пространственных переменных.

В данной диссертационной работе доказано, что переопределенные системы

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + \gamma_1|\psi|^{\frac{4}{n}}\psi = 0; \\ \Delta|\psi| = 0, \end{cases} \qquad (2.7.5)$$

а также

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + \gamma_2|\psi|^{\frac{4}{n}}\psi = 0; \\ \Delta|\psi| + \gamma_3|\psi|^{\frac{4+n}{n}} = 0, \end{cases} \qquad (2.7.6)$$

где $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \in R^1$, $\gamma_3 = \frac{\gamma_2}{\lambda}$.
инвариантны относительно алгебры $AG_3(1,n)$, полученной путем

присоединения к $AG_2(1,n)$ дополнительного оператора R . При этом оператор R для системы (2.7.5) имеет вид:

$$R = \ln\left(\frac{\psi}{\psi_*}\right)Q + x_a p_a + \frac{n}{2} I , \qquad (2.7.7)$$

а для системы (2.7.6)

$$R = \ln\left(\frac{\psi}{\psi_*}\right)Q + x_a p_a - \frac{n}{2} I . \qquad (2.7.8)$$

Доказательство этих фактов содержится во втором параграфе данной главы.

Структура алгебры $AG_3(1,n)$ подробно изучена в работе [2]. Мы рассмотрим следующие подалгебры алгебры $AG_3(1,n)$:

$$\begin{gathered} \langle R \rangle , \quad \langle D + R \rangle , \quad \langle P_0 + R \rangle , \\ \langle D, R \rangle , \quad \langle K + P_0 + \alpha R \rangle , \ \alpha = const. \end{gathered} \qquad (2.7.9)$$

Перепишем систему (2.7.5) в виде

$$\begin{cases} S_1 = 0 ; \\ S_2 - \delta_1 \exp\left\{\frac{2u}{n}\right\} = 0 , \\ S_3 = 0 , \end{cases} \qquad (2.7.10)$$

а систему уравнений (2.7.6), соответственно, в виде системы уравнений

$$\begin{cases} S_1 = 0, \\ S_2 = 0, \\ S_3 = -2\gamma_2 \exp\left(\frac{2u}{n}\right), \end{cases} \qquad (2.7.11)$$

где

$$u = \ln(\psi\psi^*), \qquad (2.7.12)$$

$$\varphi = -\frac{i}{2}\ln\left(\frac{\psi}{\psi^*}\right).$$

I. Для подалгебры $< R >$ инвариантные переменные являются первыми интегралами системы Эйлера–Лагранжа

$$\frac{dx_0}{0} = \frac{dx_a}{x_a} = \frac{d\varphi}{2\varphi} = \frac{du}{\alpha}, \qquad (2.7.13)$$

где $\alpha = n$ для случая (2.7.7),

$\alpha = -n$ для случая (2.7.8).

Когда $\alpha = -n$, из (2.7.13) вытекает:

$$u = V(\omega_1, \ldots, \omega_n) - n\ln x_1, \qquad (2.7.14)$$

$$\varphi = x_1^2 W(\omega_1, \ldots, \omega_n),$$

где функции V, W подлежат определению, а

$$\omega_1 = x_0 , \quad \omega_a = \frac{x_a}{x_1} , \quad a = 2, \ldots, n. \qquad (2.7.15)$$

Анзац (2.7.14) редуцирует систему (2.7.11) к следующему набору ДУЧП

$$V_1 + 2\lambda\{(n + \omega_a V_a)(\omega_a W_a - 2W) + V_a W_a +$$

$$+ 2(W - \omega_a W_a) + \omega_a \omega_b W_{ab} + W_{aa}\} = 0;$$

$$W_1 + \lambda(2\omega_a W_a - 2W)^2 + \lambda W_a W_a = 0; \qquad (2.7.16)$$

$$\omega_a \omega_b V_{ab} + 2\omega_a V_a + n + V_{aa} +$$

$$+ \frac{1}{2}\{(n + \omega_a V_a)^2 + V_a V_a\} + \frac{2\delta^2}{\lambda} \exp\{\frac{2V}{n}\} = 0,$$

где

$$V_i = \frac{\partial V}{\partial \omega_i} , \quad W_i = \frac{\partial W}{\partial \omega_i} , \quad i = 1, \ldots, n;$$

по повторяющимся индексам a и b подразумевается суммирование, $a, b = \overline{2, n}$.

Используя замену (2.7.12), анзац (2.7.14) примет вид:

$$\Psi = f(x)\, \Phi_1(\omega_i)\, [\Phi_2(\omega_i)]^{i g(x)}, \qquad (2.7.17)$$

где

$$f(x) = x_1^{-\frac{n}{2}} , \quad g(x) = x_1^2 ,$$

$$\varphi_1(\omega_i) = \exp\left\{\frac{V}{2}\right\}, \quad \varphi_2(\omega_i) = \exp\{W\}, \tag{2.7.18}$$

а ω_i определены (2.7.15).

Замечание 2.7.1. Для системы уравнений (2.7.5) будем иметь

$$f(x) = x_1^{\frac{n}{2}}, \quad g(x) = x_1^2, \tag{2.7.19}$$

ω_i определены (2.7.15), а редуцированная система имеет вид:

$$\begin{aligned}
&V_1 + 2R\{(n+\omega_a V_a)(\omega_a W_a - 2W) + V_a W_a + \\
&+ 2(W - \omega_a W_a) + \omega_a\omega_b W_{ab} + W_{aa}\} = 0; \\
&W_1 + R\{(\omega_a W_a)^2 + W_a W_a - \gamma_1 \exp\left\{\frac{2V}{n}\right\} = 0; \\
&\omega_a\omega_b V_{ab} + 2\omega_a W_a + n + V_{aa} + \frac{1}{2}\{(n+\omega_a V_a)^2 + V_a V_a\} = 0
\end{aligned} \tag{2.7.20}$$

2. $\langle D+R\rangle$, где R имеет вид (2.7.8).

Для этого случая анзац, редуцирующий систему (2.7.6) имеет вид (2.7.17), где

$$\begin{aligned}
&f(x) = x_1^{-\frac{n}{2}}, \quad g(x) = x_1, \\
&\varphi_1(\omega_i) = \exp\left\{\frac{V}{2}\right\}, \quad \varphi_2(\omega_i) = \exp\{W\} \\
&\omega_1 = \frac{x_0}{x_1}, \quad \omega_a = \frac{x_a}{x_1}, \quad a = 2, \ldots, n.
\end{aligned} \tag{2.7.21}$$

Соответствующая редуцированная система имеет вид:

$$V_1 - 2\lambda\{(n+\omega_a V_a)(W-\omega_a W_a) - V_a W_a + \omega_a\omega_b W_{ab}\} = 0;$$

$$W_1 + \lambda\{(W-\omega_a W_a)^2 + W_a W_a = 0; \qquad (2.7.22)$$

$$\frac{1}{2}(n+\omega_a V_a)^2 + V_a V_a + 2\omega_a V_a + n +$$

$$+ \omega_a\omega_b V_{ab} + V_{aa} + \frac{2\delta_2}{\lambda}\exp\left\{\frac{2V}{n}\right\} = 0.$$

3. Редукция по подалгебре $\langle P_0 + R\rangle$ для случая (2.7.8)

Соответствующий анзац имеет вид (2.7.17), где

$$f(x) = x_1^{-\frac{n}{2}}, \quad g(x) = x_1^2,$$

$$\omega_1 = x_0 - \ln x_1, \quad \omega_a = \frac{x_a}{x_1}, \quad a = \overline{2,n}, \qquad (2.7.23)$$

а функции $P_1(\omega_i)$, $P_2(\omega_i)$ определяются аналогично (по формуле (2.7.21)).

Редуцированная система уравнений имеет вид:

$$V_1 + 2\lambda\{(n+V_1+\omega_a V_a)(W_1 - 2W + \omega_a W_a) + V_a W_a +$$

$$+ W_{11} + W_{aa} + 2(W-\omega_a W_a) - 3W_1 + \omega_a\omega_b W_{ab}\} = 0;$$

$$W_1 + \lambda\{(2W - W_1 - \omega_a W_a)^2 + W_a W_a\} = 0; \qquad (2.7.24)$$

$$V_1 + V_{11} + \omega_a^2 V_{aa} + 2\omega_a\omega_b V_{ab} + \qquad a \neq b,$$

$$+ \frac{1}{2}\{(V_1 + n + \omega_a V_a)^2 + V_a V_a\} + n + \frac{2\delta_2}{\lambda}\exp\left\{\frac{2V}{n}\right\} = 0,$$

4. $\langle D, R \rangle$.

Соответствующий анзац имеет вид (2.7.17) и

$$f(x) = x_1^{-\frac{n}{2}}, \quad g(x) = \frac{x_1^2}{x_0}, \qquad (2.7.25)$$

$$\omega_a = \frac{x_a}{x_1}, \quad a = \overline{2, n}.$$

Редуцированная система уравнений:

$$(n + \omega_a V_a)(\omega_a W_a - 2W) + V_a W_a + W_{aa} +$$

$$+2W - 2\omega_a W_a + \omega_a \omega_b W_{ab} = 0;$$

$$W - R\{(2W - \omega_a W_a)^2 + W_a W_a\} = 0; \qquad (2.7.26)$$

$$\omega_a \omega_b V_{ab} + 2\omega_a V_a + n + V_{aa} +$$

$$+\frac{1}{2}\{(\omega_a V_a + n)^2 + V_a V_a\} + \frac{2\gamma_2}{R} \exp\left\{\frac{2V}{n}\right\} = 0;$$

Заметим, что размерность редуцированной системы уравнений (2.7.26) равна $n-1$.

5. $\langle R + \rho_0 + \alpha R \rangle$, $\alpha = const$.

Решения переопределенной системы (2.7.II) будем искать в виде:

$$u = V(\omega_i) - \frac{n}{2} \ln(x_0^2 + 1) - n\alpha \operatorname{arctg} x_0,$$

$$\varphi = \exp\{2\alpha \operatorname{arctg} x_0\} W(\omega_i) + \frac{x^2}{4R} \cdot \frac{x_0}{x_0^2 + 1}, \qquad (2.7.27)$$

где

$$\omega_i = \frac{(x_0^2+1)^{1/2} \exp\{\alpha \operatorname{arctg} x_0\}}{x_i} \qquad (2.7.28)$$

Редуцированная система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} &2\lambda W_{aa}\omega_a^4 + 2\lambda V_a W_a \omega_a^4 + 4 W_a \omega_a^3 + \alpha \omega_a V_a - \alpha_n = 0, \\ &2\alpha W + \alpha \omega_a W_a + \frac{1}{4\lambda\omega_a^2} + \lambda \omega_a^4 W_a^2 = 0, \\ &2V_{aa}\omega_a^4 + V_a^2\omega_a^4 + 4\omega_a^3 V_a + \frac{4\delta_2}{\lambda}\exp\{\frac{2V}{n}\} = 0. \end{aligned} \qquad (2.7.29)$$

Для случая одной пространственной переменной

$$\begin{aligned} W &= \pm \frac{i}{4\lambda\omega^2}, \\ V &= \ln\left(\sqrt{-\frac{3\lambda}{4\delta_2}}\,\omega\right), \end{aligned} \qquad (2.7.30)$$

– решение (частное) системы уравнений (2.7.29).

(2.7.30) дает следующее решение исходной системы (2.7.6):

$$\psi = \left(\sqrt{-\frac{3\lambda}{4\delta_2}}\cdot\frac{1}{x}\right)^{1/2} \exp\left\{\pm\frac{x^2}{4\lambda(x_0^2+1)} + \frac{i x^2}{4\lambda}\frac{x_0}{x_0^2+1}\right\}. \qquad (2.7.31)$$

Набор функций

$$\begin{aligned} W &= \pm\frac{i}{4\lambda}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_n^2}\right), \\ V &= A\ln\omega_1 + \Phi\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}, \ldots, \frac{\omega_n}{\omega_1}\right), \end{aligned} \qquad (2.7.32)$$

где

$$A = \frac{\alpha n \pm i}{\alpha \pm i} \; ; \qquad 2A + A^2 = 0 \tag{2.7.33}$$

удовлетворяет системе уравнений (2.7.29) при $\gamma_2 = 0$. Подстановка набора функций (2.7.32) в (2.7.27) и (2.7.17) дает нам решение линейного уравнения Шредингера для случая n пространственных переменных.

Решение уравнения Шредингера с нелинейностью (2.7.4) при $n = 3$ (см. [35])

$$\psi = (c_0 x_0 - \vec{c}\vec{x})^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{ -\frac{i}{4\lambda} x^2 x_0^{-1} \right\}, \tag{2.7.34}$$

$c^2 = \frac{8}{15} \frac{\gamma_2}{2\lambda}$, c_0, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ – постоянные, удовлетворяет переопределенной системе уравнений (2.7.6) при условии, что $\gamma = \gamma_2 \in R^1$. А это значит, что данное решение можно размножить при помощи преобразований, порождаемых оператором R

$$R = 2\psi Q + x_a p_a - \frac{\alpha}{2} I, \quad \alpha = const \tag{2.7.35}$$

Оператор R порождает следующие конечные преобразования:

$$x_0' = x_0,$$

$$x_a' = e^{\tilde{\tau}} x_a,$$

$$\psi' = \exp\left\{ -\frac{\alpha \tilde{\tau}}{2} \right\} \cdot |\psi| \left(\frac{\psi}{\psi^*} \right)^{\frac{\exp\{2\tilde{\tau}\}}{2}}, \tag{2.7.36}$$

где $\tilde{\tau}$ – групповой параметр.

Приведем еще несколько решений, удовлетворяющих нашим переопределенным системам уравнений. Так

$$\psi = x_0^{-\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{i}{4\lambda}(\vec{x}^2 - \vec{\tau}\vec{x})x_0^{-1}\right\}, \qquad (2.7.37)$$

$$\tau^2 = -64\lambda\gamma, \quad \vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathbb{R}^1$$

удовлетворяет системе (2.7.5) при $n = 3$, $\gamma_1 = \gamma \in \mathbb{R}^1$. Решение (см. [35])

$$\psi = (1 - x_0^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\left\{-\frac{i}{4\lambda} x^2 (1 - x_0)^{-1}\right\} \qquad (2.7.38)$$

удовлетворяет системе (2.5.32), (2.5.34) при $\gamma_3 = \frac{3}{2} i$. Данная система уравнений инвариантна относительно оператора

$$R^0 = 2\psi Q + x_a P_a$$

Оператор R^0 порождает конечные преобразования вида(2.7.36) при условии, что $\alpha = 0$.

Рассмотрим переопределенную систему уравнений

$$\begin{cases} S_1 + F(x_0, u) = 0; \\ S_2 = 0; \\ S_3 = 0 \end{cases} \qquad (2.7.39)$$

Данная система уравнений инвариантна относительно оператора R^0 (см. теорему 2.5.3).

Из инвариантности системы(2.7.39) относительно R^0 следет, что решения данной системы мы можем искать в виде:

$$u = V(\omega_1, \omega_a), \qquad (2.7.40)$$
$$\varphi = x_1^2 \Phi(\omega_1, \omega_a), \quad a = \overline{2,n},$$

где

$$\omega_1 = x_0, \quad \omega_a = \frac{x_a}{x_1} \qquad (2.7.41)$$

Редуцированная система уравнений будет иметь вид:

$$V_1 + 2\lambda(-2\omega_a V_a \Phi + \omega_a \omega_\beta V_a \Phi_\beta + V_a \Phi_a +$$
$$+2\Phi - 2\omega_a \Phi_a + \omega_a^2 \Phi_{aa} + \Phi_{aa}) - F(V) = 0, \qquad (2.7.42)$$
$$\Phi_1 + \lambda(4\Phi^2 - 4\Phi\Phi_a\omega_a + \omega_a^2 \Phi_a\Phi_a + \Phi_a\Phi_a) = 0;$$
$$\omega_a^2 V_{aa} + 2\omega_a V_a + V_{aa} + \frac{1}{2}\omega_a^2 V_a V_a + \frac{1}{2} V_a V_a = 0,$$

где $V_i = \frac{\partial V}{\partial \omega_i}$, $\Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_i}$, $i = \overline{1,n}$.

Для случая, когда $n = 2$ общее решение последнего уравнения системы редуцированных уравнений (2.7.42) имеет вид:

$$V = 2\ln(\operatorname{arctg}\omega_2 + a) + b, \qquad (2.7.43)$$

где $a = a(x_0)$, $b = b(x_0)$ – произвольные функции от x_0.

Для второго уравнения системы (2.7.42) найдено частное решение.

$$\Phi = A(\omega \pm i)^2 , \quad A \neq 0 \tag{2.7.44}$$

После подстановки (2.7.43), (2.7.44) в первое уравнение системы (2.7.42) получим:

$$\frac{-8\lambda A i(\omega+i)}{\omega-i} = (\operatorname{arc\,ctg}\omega + a)(F - b') - 2a' \tag{2.7.45}$$

Из последнего соотношения следует, что набор функций (2.7.43), (2.7.44) является решением переопределенной системы (2.7.39), если

$$F(V) = \frac{-8\lambda A i \exp\left\{\frac{2}{i}\left(\frac{\exp(\frac{V}{2})}{\exp(b/2)} - a\right)\right\} e^{\frac{b}{2}}}{\exp(\frac{V}{2})} + b' \tag{2.7.46}$$

В терминах ψ , ψ^* система уравнений (2.7.39) с нелинейностью (2.7.46) имеет вид

$$\begin{cases} i\psi_0 + \lambda\Delta\psi + \psi\dfrac{8\lambda A \exp\left\{-2i\dfrac{|\psi|}{\exp(b/2)} - a\right\}\exp\frac{b}{2}}{|\psi|} = 0, \\ \Delta|\psi| = 0 \quad , \quad \text{если} \quad a, b = const \end{cases} \tag{2.7.47}$$

Выражения (2.7.43), (2.7.44) дают нам решения системы (2.7.47)

$$\psi = \exp(2b)(\operatorname{arc\,ctg}\omega_2 + a)\exp\{i x_i^2 A(\omega+i)^2\} \tag{2.7.48}$$

В том частном случае, когда $a = 0$, $b = 0$

$$F = F(|\psi|) = \frac{-8i\lambda A \exp\{-2i|\psi|\}}{|\psi|} \qquad (2.7.49)$$

Соответствующее решение системы уравнений (2.7.39), (2.7.49) имеет вид

$$\psi = \frac{i}{2} \ln \frac{\omega+i}{\omega-i} \exp\{i x_1^2 A(\omega+i)^2\}, \qquad (2.7.50)$$

$$\omega = \frac{x_2}{x_1} .$$

ГЛАВА 3. Условная симметрия нелинейных пуанкаре-инвариантных систем.

Данная глава посвящена рассмотрению условной инвариантности систем релятивистских уравнений квантовой механики. В частности, детально исследована условная инвариантность уравнения непрерывности, уравнения д'Аламбера для случая комплекснозначной функции, а также некоторых систем нелинейных уравнений.

§ I. Симметрийный анализ уравнения Клейна-Гордона.

Рассмотрим аналог уравнения д'Аламбера для случая, когда ψ – комплекснозначная функция. В литературе оно носит название уравнения Клейна-Гордона. Для упрощения выкладок примем, что оно имеет вид:

$$\square \psi = \lambda \psi , \quad \lambda \in R^1 \qquad (3.I.I)$$

Уравнение (3.I.I) инвариантно относительно алгебры Пуанкаре $A P(1,n)$. Базис этой алгебры составляют операторы

$$P_\mu , \quad J_{\mu\nu} , \quad \mu,\nu = \overline{0,n} . \qquad (3.I.2)$$

Произведем замену

$$\psi = \exp\left\{\frac{u}{2} + i\varphi\right\} \qquad (3.I.3)$$

Тогда система комплексно-сопряженных уравнений (3.I.I) примет вид:

$$u_\mu \varphi_\mu + \Box \varphi = 0, \qquad (3.1.4)$$

$$\frac{u_\mu u_\mu}{2} + \Box u - 2\varphi_\mu \varphi^\mu - 2\lambda = 0. \qquad (3.1.5)$$

Уравнение (3.1.4) – аналог уравнения непрерывности (см. главу 2). Исследуем симметрию этого уравнения.

Из условия инвариантности

$$\overset{2}{X}\left(u_\mu \varphi^\mu + \Box \varphi \right)\Big|_{u_\mu \varphi^\mu = -\Box \varphi} \equiv 0 \qquad (3.1.6)$$

получим следующую систему определяющих уравнений:

$$\begin{aligned}
&\xi_u^\alpha = \xi_\varphi^\alpha = 0 \;, \quad \alpha = \overline{0,n}; \\
&\xi_0^0 = \xi_a^a \;, \quad a = \overline{1,n}; \\
&\xi_a^0 = \xi_0^a \;; \\
&\xi_b^a + \xi_a^b = 0, \quad a \neq b; \\
&\eta_\alpha^\varphi = \eta_u^\varphi = \eta_u^u = 0; \\
&\eta_\mu^u = \Box \xi^\mu \;; \qquad \eta_\varphi^u + \eta_{\varphi\varphi}^\varphi = 0.
\end{aligned} \qquad (3.1.7)$$

Для нахождения максимальной локальной алгебры инвариантности нашего уравнения необходимо решить систему уравнений (3.I.7).

Теорема 3.I.I. Уравнение непрерывности (3.I.4) инвариантно относительно алгебры Ли, порождаемой инфинитезимальным оператором

$$X = c_{\mu\nu} J_{\mu\nu} + p_\mu P_\mu + k_\mu K_\mu + d\,D + f'(\varphi)\,\partial_\rho - f(\varphi)\,\partial_\varphi + n\,\partial_\rho + l\,\varphi\,\partial_\varphi, \qquad (3.I.8)$$

где P_μ, $J_{\mu\nu}$, D, K_μ – базисные операторы конформной алгебры $AC(1,n)$, $f(\varphi)$ – произвольная функция от φ, $c_{\mu\nu} = -c_{\nu\mu}$.

Замечание 3.I.I. В терминах ψ, ψ^* базисные элементы $AC(1,n)$ будут иметь вид

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,$$

$$D = x_\mu p_\mu - \kappa \bar{I}, \quad \bar{I} = \psi\,\partial_\psi + \psi^*\,\partial_{\psi^*}, \qquad (3.I.9)$$

$$K_\mu = 2x_\mu D - x_\nu x^\nu p_\mu, \quad \kappa = const, \ \mu,\nu = \overline{0,n}$$

Таким образом мы видим, что уравнение непрерывности допускает более широкую алгебру инвариантности, чем исходное уравнение (3.I.I).

Замечание 3.I.2. Уравнение (3.I.I) при $\mathcal{R} = 0$ инвариантно относительно конформной алгебры $AC(1,n)$ с базисными операторами (3.I.9).

Рассмотрим систему уравнений: уравнение непрерывности, а также уравнение релятивистского эйконала для функции φ, т.е.

$$\begin{cases} u_\mu \varphi^\mu + \Box \varphi = 0, \\ \varphi_\mu \varphi^\mu + \lambda = 0 \end{cases} \qquad (3.I.10)$$

Замечание 3.I.3. Не умаляя общности можем считать, что $\lambda = -1$.

Теорема 3.I.2. Система уравнений (3.I.10) инвариантна относительно $AC(1, n+1)$, операторы которой имеют вид :

$$P_\mu, \quad J_{\mu\nu}, \quad P_u = \partial_u, \quad P_\varphi = \partial_\varphi,$$

$$J_{\mu\varphi} = x_\mu P_\varphi - \varphi P_\mu,$$

$$D = x_\mu P_\mu + \varphi P_\varphi - u P_u, \qquad (3.I.11)$$

$$K_\mu = 2 x_\mu D - (x_\nu x^\nu - \varphi^2) P_\mu,$$

$$K_\varphi = 2\varphi D - (x_\nu x^\nu - \varphi^2) P_\varphi.$$

Доказательство теоремы проводится методом Ли.

Замечание 3.I.4. В доказательстве теоремы при переходе на многообразие необходимо учитывать дифференциальные следствия уравнения эйконала.

Замечание 3.I.5. Симметрийные свосства уравнения эйконала более подробно исследованы в [38], а также других работах.

Замечание 3.I.6. Следует выделить тот факт, что уравнение непрерывности (3.I.4) не допускает операторов вида $J_{\mu\varphi}$, K_φ. Тоесть уравнение эйконала расширяет симметрию уравнения (3.I.4).

Рассмотрим переопределенную систему уравнений

$$\begin{cases} u_\mu \varphi^\mu + \Box \varphi = 0, \\ \varphi_\mu \varphi^\mu + \lambda = 0, \\ \dfrac{u_\mu u^\mu}{2} + \Box u = 0 \end{cases} \qquad (3.I.I2)$$

Следует заметить, что любое решение системы уравнений (3.I.I2) удовлетворяет системе (3.I.4), (3.I.5).

Теорема 3.I.3. Система уравнений (3.I.I2) инвариантна относительно $AP(1,n)$ с базисными операторами (3.I.2), дополненной оператором

$$R = x_\mu p_\mu + \varphi p_\varphi + \kappa p_u, \quad \kappa = const. \qquad (3.I.I3)$$

Теорема доказывается стандартным лиевским методом.

Замечание 3.I.7. В переменных ψ, ψ^* система (3.I.I2) будет иметь вид

$$\begin{cases} \Box \psi = \lambda \psi, \\ \Box |\psi| = 0, \quad |\psi| = (\psi \psi^*)^{1/2} \end{cases} \qquad (3.I.I4)$$

Соответственно оператор R будет иметь вид

$$R = x_\mu p_\mu + \ln\left(\frac{\psi}{\psi^*}\right)^{1/2}(\psi \partial_\psi - \psi^* \partial_{\psi^*}) + \frac{\kappa}{2} I. \qquad (3.I.I5)$$

Вывод. За счет наложения на уравнения (3.I.I) дополнительного условия удается расширить симметрию исходного уравнения.

Наряду с системой (3.I.I2), представляет интерес рассмотрение симметрийных свойств переопределенной системы уравнений

$$\begin{cases} u_\mu \varphi^\mu + \Box \varphi = 0, \\ \varphi_\mu \varphi^\mu = 0, \\ \frac{u_\mu u^\mu}{2} + \Box u - 2R = 0. \end{cases} \qquad (3.I.I6)$$

Сначала исследуем симметрию системы уравнений

$$\begin{cases} u_\mu \varphi^\mu + \Box \varphi = 0, \\ \varphi_\mu \varphi^\mu = 0. \end{cases} \qquad (3.I.I7)$$

Теорема 3.I.4. Система уравнений (3.I.I7) инвариантна относительно

$$X = \rho_\mu P_\mu + c_{\mu\nu} J_{\mu\nu} + d D + k_\mu K_\mu, \qquad (3.I.I8)$$

где ρ_μ, $c_{\mu\nu}$, d, k_μ - произвольные функции от φ, а $P_\mu, J_{\mu\nu}, D, K_\mu$ - базисные элементы алгебры $AC(4,1)$ имеют вид (3.I.9).

Замечание 3.I.8. Аналогичный результат для случая, когда φ - действительная функция, получен в работе [7I].

Доказательство теоремы проводится по стандартному методу С.Ли. Для доказательства теоремы необходимо учитывать дифференциальные следствия уравнения первого порядка.

Теорема 3.I.5. Система уравнений (3.I.I6) допускает группу Пуанкаре $P(1,n)$, дополненную преобразованиями, порождаемыми операторами вида

$$X = f(\varphi)\,\partial_{\varphi}, \tag{3.I.I9}$$

где $f(\varphi)$ - произвольная функция от φ.

Теорема 3.I.5 доказывается на основании теоремы 3.I.4.

Замечание 3.I.9. В терминах ψ, ψ^* система уравнений (3.I.I6) имеет вид:

$$\begin{cases} \Box\psi = \lambda\psi, & \lambda \in \mathbb{R}^1, \\ \Box|\psi| = \lambda|\psi|. \end{cases} \tag{3.I.20}$$

Вывод. Сравнение результатов, полученных для систем уравнений (3.I.I2), (3.I.I6), приводит к выводу, что наложение на решения уравнения (3.I.I) разных дополнительных условий дает существенно разные расширения симметрии исходного уравнения.

§ 2. Условная инвариантность нелинейных систем уравнений гиперболического типа.

Рассмотрим систему сопряженных уравнений для комплекснозначной функции вида

$$\Box\psi = F(|\psi|)\psi, \tag{3.2.I}$$

где $F(|\psi|)$ – произвольная функция от действительной величины $|\psi|$, $|\psi| = (\psi\psi^*)^{1/2}$.

Симметрийные свойства данной системы уравнений детально рассмотрены в [13].

Рассмотрим случай, когда $F(|\psi|)$ – действительная функция от $|\psi|$. В этом случае уравнение (3.2.1) можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} u_\mu \psi^\mu + \Box\psi = 0; \\ \dfrac{u_\mu u^\mu}{2} + \Box u - 2\psi_\mu \psi^\mu - 2F = 0 \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Проведем симметрийный анализ следующей подсистемы системы уравнений (3.2.2):

$$\begin{cases} u_\mu \psi^\mu + \Box\psi = 0; \\ \psi_\mu \psi^\mu = 0; \\ \dfrac{u_\mu u^\mu}{2} + \Box u - 2F = 0 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Теорема 3.2.1. Система уравнений (3.2.3) инвариантна относительно группы Пуанкаре $P(1,n)$, а также преобразований, порождаемых операторами вида (3.1.19).

Замечание 3.2.1. При определенной нелинейности $F(|\psi|)$, система уравнений (3.2.3) инвариантна кроме того относительно операторов масштабных преобразований, а также специальных конформных преобразований вида (3.1.9) (см. [13]).

Для доказательства теоремы используем теорему 3.1.4.

Из этой теоремы следует, что первые два уравнения системы (3.2.3) инвариантны относительно (3.I.9), (3.I.I9). Поэтому рассмотрим условие инвариантности для последнего уравнения этой системы. Оно имеет вид:

$$\overset{2}{X}\left(\frac{u_\mu u^\mu}{2}+\sigma u-2F\right)\Big|_{\substack{\sigma\varphi=-u_\mu\varphi^\mu;\\ \varphi_\mu\varphi^\mu=0;\\ \sigma u=2F-\frac{u_\mu u^\mu}{2}}}=0. \qquad (3.2.4)$$

Из этого условия получим следующую СОУ:

$$\xi^\alpha_u=\xi^\alpha_\varphi=0,\quad \alpha=\overline{0,n};$$

$$\eta^\varphi_\mu=\eta^\varphi_u=\eta^u_u=0;$$

$$\xi^0_a=\xi^a_0;\quad \xi^a_b+\xi^b_a=0,\quad a\neq b; \qquad (3.2.5)$$

$$\eta^u_\mu=\sigma\xi^\mu;\quad \xi^0_0=\xi^a_a;$$

$$2F\xi^0_0+F_u\eta^u=0,\qquad F_u=\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Решив СОУ (3.2.5), придем к теореме 3.2.I, а также найдем явный вид функции F, при которой система (3.2.3) инвариантна относительно операторов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{K}_\mu$ вида (3.I.9).

В терминах φ, φ^* система уравнений (3.2.3) будет иметь вид:

$$\begin{cases} \Box\psi = F(|\psi|)\psi ; \\ \Box|\psi| = F(|\psi|)\cdot|\psi| . \end{cases} \qquad (3.2.6)$$

Таким образом мы доказали теорему:

Теорема 3.2.2. Переопределенная система нелинейных уравнений (3.2.6) инвариантна относительно $AP(1,n)$, а также (3.1.19), где $\varphi = -\frac{i}{2}\ln\frac{\psi}{\psi^*}$, $\partial_\varphi = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*})$.

Аналогичным образом можно исследовать симметрию переопределенной системы уравнений

$$\begin{cases} u_\mu\varphi^\mu + \Box\varphi = 0 ; \\ \varphi_\mu\varphi^\mu + F = 0 ; \\ \frac{u_\mu u^\mu}{2} + \Box u = 0 . \end{cases} \qquad (3.2.7)$$

Система уравнений (3.2.7) является частным случаем системы уравнений (3.2.1). Поэтому любое решение системы (3.2.7) является решением и системы (3.2.1).

Замечание 3.2.2. Система (3.2.7) имеет смысл только для таких $F=F(u)$, при которых существуют нетривиальные решения данной переопределенной системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В заключение приведем основные результаты, полученные в диссертационной работе.

В первой главе исследована условная инвариантность нелинейного уравнения тепломассопереноса. Описаны дополнительные условия на решения этого уравнения, при которых уравнение теплопроводности инвариантно относительно преобразований галилеевского типа. Описаны нелинейности, при которых система уравнений теплопроводности и Гамильтона-Якоби инвариантна относительно конформной алгебры. Найдены дополнительные условия, при которых уравнение четвертого порядка, а также уравнение гиперболического типа оказывается инвариантным относительно алгебры Галилея $AG(1,n)$.

Во второй главе рассматривается условная инвариантность системы нелинейных уравнений типа Шредингера. В данной главе описаны дополнительные условия на решения уравнений шредингеровского типа, при которых расширяется симметрия уравнений Шредингера. Рассмотрены случаи, когда нелинейности задаются действительной и мнимой функциями. Проведена редукция многомерных уравнений типа Шредингера к набору уравнений с меньшим числом переменных. Редукция проводится при помощи анзацев, полученных за счет условной инвариантности уравнения Шредингера.

В третьей главе рассматривается условная инвариантность системы комплекснозначных уравнений гиперболического типа, инвариантных относительно алгебры Пуанкаре $AP(1,n)$. Путем наложения разных дополнительных условий удается существенно расширить симметрию исходной системы уравнений.

Основные результаты, полученные в диссертации, являются но-

вили и могут быть использованы при решении задач математической физики, квантовой механики, биофизики и других областей естествознания.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту АН УССР, профессору В.И. Фущичу за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Литература.

1. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М. и др. Точные решения релятивистских волновых уравнений. – Новосибирск: Наука, 1982. – 142 с.
2. Баранник Л.Ф., Фущич В.И. О непрерывных подгруппах конформной группы пространства Минковского $R_{1,n}$.– Киев.– 1988. – 48 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики,№ 88.34).
3. Barannik L.F., Fushchich W.I. On continuouns subgroups of the generalized Schrôdinger group // J.Math.Phys.– 1989.– 30, N 1. – P.31-40.
4. Barannik L.F., Fushchich W.I. On subalgebras of the Lie algebra of the extended Poincare group $\tilde{P}(1,n)$ // J.Math.Phys.– 1987. – 28, N 7. – P. 1445-1458.
5. Биркгоф Г. Гидродинамика. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.– 244 с.
6. Boyer C.P., Penafiel M.N. Conformal symmetry of the Hamilton-Jacobi equation and quantization // Nuovo cim. B. – 1976.– 31, N 2. – P. 195-210.
7. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. – М.: Гостехиздат, 1949. – 396 с.
8. Чернига Р.М. О максимальной алгебре инвариантности гиперболического уравнения теплопроводности // Теоретико-алгебраические методы в задачах мат. физики. Сб. науч. тр. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С.83-84.
9. Чопик В.И. О групповых свойствах линейных уравнений параболического типа с нелинейными дополнительными условиями // Симметрия и решения нелинейных уравнений мат. физики. Сб.

науч. тр. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С.63-66.

10. Чопик В.И. Симметрия одной системы уравнений квантовой механики // Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики. Сб. науч. тр. - Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. - С.79-81.

11. Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Диф. уравнения. - 1983. - 19, №7. - С. 1215-1224.

12. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: Методы и приложения. - М.: Наука, 1986. - 759 с.

13. Егорченко И.А. Пуанкаре-инвариантные квазилинейные волновые уравнения для комплекснозначных функций. - Киев. - 28 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, № 87.3).

14. Федорчук В.М. О некоторых точных решениях релятивистского уравнения Гамильтона // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. Сб. науч. тр.-Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. - С.76-79.

15. Фущич В.И. Как расширить симметрию дифференциальных уравнений? Там же. - С.4-16.

16. Фущич В.И. О дополнительной инвариантности релятивистских уравнений движения // Теорет. и мат. физика. - 1971. - 7, №1.- С.3-12.

17. Fushchich W.I. On additional invariance of the Dirac and Maxwell equations // Lett.nuovo cim. - 1974. - 11,N10.-P.508-512.

18. Фущич В.И. О дополнительной инвариантности уравнения Клейна-Гордона-Фока // Докл. АН СССР. - 230, №3. - С.570-572.

19. Фущич В.И. Групповые свойства дифференциальных уравнений квантовой механики // Проблемы ассимптотической теории нелинейных колебаний. - Киев: Наук. думка, 1977. - С.75-87.

20. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств уравнений математической физики // Докл. АН СССР. - 1979.- 246 ,№ 4. - С. 846-850.

21. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в мат. физике. -Киев: Ин-т математики, 1981.- С.6.

22. Фущич В.И. О новом методе исследования групповых свойств систем дифференциальных уравнений в частных производных // Теоретико-групповые методы в математической физике.- Киев: Ин-т математики, 1978.-С.5-44.

23. Фущич В.И. О пуанкаре-,галилеево-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решений // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.- Киев:Ин-т математики, 1985.- С.4-19.

24. Фущич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики // Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики.- Киев: Ин-т математики, 1983. - С.4-23.

25. Фущич В.И. О симметрии и точных решениях многомерных нелинейных волновых уравнений // Укр. мат. журн.- 1987. - 39, № 1. - С.116-123.

26. Фущич В.И., Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф. Непрерывные подгруппы обобщенной группы Галилея.I.- Киев. - 1985. - 47 с.- (Препринт / АН УССР. Ин-т математики,№ 85.19).

27. Фущич В.И., Чернига Р.М. О точных решениях двух нелинейных уравнений шредингеровского типа. - Киев. - 1986. - 44 с.- (Препринт / АН УССР, № 86.85).

28. Fushchich W.I., Cherniha R.M. The Galilean relativistik principle and nonlinear partial differential equations // J.Phys.A. - 1985. 18. - P.3491-3503.

29. Фущич В.И., Федорчук В.М., Федорчук И.М. Подгрупповая структура обобщенной группы Пуанкаре и точные решения некоторых нелинейных волновых уравнений. - Киев, 1986. - 36 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, № 86.27).

30. Фущич В.И., Егорченко И.А. О симметрийных свойствах комплекснозначных нелинейных волновых уравнений // Докл. АН УССР. - 1988. - 298, № 2. - С. 347-351.

31. Fushchich W.I., Moskaliuk S.S. On some exact solutions of the nonlinear Schrödinger equation in three spatial dimensions // Lett. nuovo cim. - 1981. -31, N 16. - P.371-376.

32. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. - Киев: Наук. думка, 1983. - 199 с.

33. Fushchich W.I., Nikitin A.G. Symmetries of Maxwell's equations. - Dordrecht, Holland: D. Reidel, 1987. - 214 p.

34. Fushchich W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations //J.Phys.A.-1983.-16.-P.3645-3658.

35. Fushchich W.I., Serov N.I. On some exact solutions of the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation // J.Phys. A. - 1987. - 20, N 16. - L929-L933.

36. Фущич В.И., Серов Н.И. Условная инвариантность и точные

решения нелинейного уравнения акустики // Теоретическая и математическая физика. – 1988. – № 10. – С. 28–33.

37. Фущич В.И., Серов Н.И., Чопик В.И. Условная инвариантность и нелинейные уравнения теплопроводности // Докл. АН УССР.– Сер. А. № 9. – С. 17–20.

38. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.– Киев: Наук. думка, 1989.– 334 с.

39. Fushchich W.I., Shtelen W.M.The symmetry and some exact solutions of the relativistic eikonal equation // Lett.nuovo cim.– 1982. – 34, N 16. – P. 498.

40. Fushchich W.I., Tsifra I.M. On reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmtry // J.Phys.A.– 1987.– 20, N 2. – P.L45-47.

41. Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. On some exact solutions of nonlinear d'Alembert and Hamilton equations. – Minneapolis, 1988. – 5 p. – (Prepr. / Inst. for Mathematics and Applications, University of Minnesota).

42. Fushchich W.I., Zhdanov R.Z. Symmetry and exact solutions of nonlinear spinor equations // Phys. Reports. – 1989. – 46, N 2.– P. 325-365.

43. Фущич В.И., Жданов Р.З. Об одном обобщении метода разделения переменных для линейных систем дифференциальных уравнений // Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики, 1987. – С. 17–22.

44. Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalized nonlinear equation. 1.The symmetry group and its subgroups // J.Phys.A. – 1988.–21, N 7. – P.1493-1511.

45. Ибрагимов Н.Х. Группы Ли в некоторых вопросах математической физики. – Новосибирск, Изд-во Новосибир. ун-та, 1972.-200 с.

46. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. – 280 с.

47. Джарджадзе Г.П., Погребков А.К., Поливанов М.К. Сингулярные решения уравнения $\Box u + \frac{m^2}{2} exp(u)=0$ и динамика особенностей // Теорет. и мат. физика. – 1979. – 40, № 3. – С.221-234.

48. Кадышевский В.Г. Новый подход к теории электомагнитных взаимодействий // Физика элементар. частиц и атомн. ядра.- 1980. – II, № 1. – С. 5-36.

49. Kersten P.H.M., Gragert P.K.H. Lie algebras of infinitesimal symmetries of nonlinear diffusion equations // J.Phys.A.: Math. Gen.-1983.-16, N 18.- L685-L688.

50. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям – М.: Наука, 1976. – 576 с.

51. Костенко В.Г. Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом. – Львів: Вид-во Льв. ун-ту, 1959. – 22 с.

52. Костенко Е.С. О групповых свойствах обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Диф. ур-ия.- 1972 – 4, № 1. – С. 727-731.

53. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.- 830 с.

54. Лезнов А.Н., Савельев М.В. Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. – М.: Наука, 1985. – 280 с.

55. Lie S. Über Differentialinvarianten // Math. Ann. – 1884.- 24, 1. – S.52-89.

56. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen. 1-3.- Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893.

57. Малкин И.А., Манько В.И. Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем.- М.:Наука, 1979.- 280 с.

58. Мессиа А. Квантовая механика: в 2-х т.- М.: Наука, 1979.- Т. I.- 478 с., т.2.- 583 с.

59. Миллер У. мл. Симметрия и разделение переменных. - М.: Мир, 1981. - 342 с.

60. Niederer U. The maximal kinematical invariance group of Schrödinger equation // Helv.phys.acta.-1972.-45,N5.-P.802

61. Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. - New York: Springer, 1986. - 497 p.

62. Olver P., Rosenau Ph. The construction of special solutions to partial differntial equations // Phys. Lett. A.- 1986. - 114, N 3. - P. 107-112.

63. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности // Докл. АН СССР. - 1959. - 125, № 3. - С. 492-495.

64. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400 с.

65. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. - М.: Наука, 1981. - 368 с.

66. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. - М.: Наука, 1968. - 592 с.

67. Серова М.М. О нелинейных уравнениях теплопроводности, инвариантных относительно группы Галилея // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. - Киев: Ин-т математики, 1985. - С. 119-123.

68. Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики/ Сб.науч.тр. Киев: Ин-т математики, 1988. - 104 с.

69. Полищук Е.М. Софус Ли. - Л.: Наука, 1983. - 215 с.

70. Штелень З.М. Об одной системе нелинейных дифференциальных уравнений, инвариантной относительно группы Дредингера // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. - Киев: Ин-т математики, 1981. - С. 104-107.

71. Шульга М.З. Симметрия и некоторые частные решения уравнения д'Аламбера с нелинейным условием // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики.- Киев: Ин-т математики, 1985. - С. 36_38.

72. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М: Наука, 1981. - 512 с.