

ЗАПИТ
на проведення наукової (науково-технічної) роботи

1. Назва роботи

Групова класифікація та розв'язки моделей математичної фізики (шифр: ПІ-03-25)

2. Вид тематики

ПІ. Відомча тематика

3. Назва цільової програми або цільового проєкту

н е м а є

4. Назва розділу програми або напрям цільового проєкту

н е м а є

5. Строки виконання роботи

01 січня 2025 р. - 31 грудня 2029 р.

6. Код програмної класифікації видатків

6541030 (фундаментальні дослідження)

7. Пріоритетний напрям розвитку науки і техніки

Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави

8. Пріоритетний тематичний напрям наукових досліджень і науково-технічних розробок

Розвиток новітніх галузей математики та математичної статистики, математичного моделювання актуальних проблем природничих та соціо-гуманітарних наук

9. Код та назва наукового напрямку (проблеми) з Основних наукових напрямів та найважливіших проблем фундаментальних досліджень у галузі природничих, технічних і гуманітарних наук

1.1.5.1. Застосування групових, диференціально-геометричних й алгебраїчних методів до задач теорії диференціальних рівнянь, математичної та теоретичної фізики

10. Науковий керівник роботи

Бойко Вячеслав Миколайович, д.ф.-м.н., с.н.с., завідувач відділу, Інститут математики НАН України

телефон: +38044 234 5150; факс: +380442352010; e-mail: boyko@imath.kiev.ua

11. Відповідальні виконавці

Прізвище, ім'я та по батькові	Науковий ступінь, посада, місце роботи, телефон, електронна адреса	Підпис
Ванєєва Олена Олександрівна	член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., с.д., провідний науковий співробітник, ІМ НАН України, тел.: +38044 234 5316, e-mail: vaneeva@imath.kiev.ua	
Нікітін Анатолій Глібович	член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., головний науковий співробітник, ІМ НАН України, тел.: +38044 234 5150, e-mail: nikitin@imath.kiev.ua	
Попович Роман Омелянович	д.ф.-м.н., проф., провідний науковий співробітник, ІМ НАН України, тел.: +38044 234 5150, e-mail: rop@imath.kiev.ua	
Ребенко Олексій Лукич	д.ф.-м.н., проф., головний науковий співробітник, ІМ НАН України, тел.: +38044 234 5150, e-mail: rebenko@imath.kiev.ua	
Кошманенко Володимир Дмитрович	д.ф.-м.н., проф., провідний науковий співробітник, ІМ НАН України, тел.: +38044 234 5150, e-mail: koshman63@gmail.com	
Нестеренко Марина Олександрівна	д.ф.-м.н., с.д., провідний науковий співробітник, ІМ НАН України, тел.: +38044 234 5150, e-mail: maryna@imath.kiev.ua	
Самойленко Валерій Григорович	член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., головний науковий співробітник, ІМ НАН України, тел.: +38044 234 5150, e-mail: v.samoilenko@imath.kiev.ua	

12. Установи - співвиконавці

н е м а є

13. Ключові слова

симетрія, інтегровність, розв'язки, нелінійні моделі, алгебри Лі, групи Лі

14. Резюме

Метою роботи є подальший розвиток, створення й обґрунтування принципово нових методів дослідження рівнянь сучасної математичної фізики, а також застосування розроблених методів та теорій для побудови та аналізу нових математичних моделей, а також знаходження розв'язків деяких актуальних моделей математичної фізики, з використанням алгебраїчних технік

передбачається розробка нових методів й алгоритмів пошуку та класифікації різних типів симетрій, розробка нових алгебраїчних та аналітичних підходів для аналізу і побудови розв'язків актуальних математичних моделей сучасної математичної фізики та використання розроблених теорій у прикладних задачах.

Дослідження в основному будуть зосереджені на таких взаємопов'язаних напрямках:

1) дослідження та класифікація систем квантової, статистичної та класичної механіки, побудова загальних розв'язків таких систем;

2) розробка нових алгебраїчних методів симетрійного аналізу класів диференціальних рівнянь, розширений груповий аналіз та знаходження точних розв'язків актуальних математичних моделей сучасної математичної фізики;

3) розробка нових методів класифікації та побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Лі та суміжні питання теорії груп Лі;

4) дослідження та аналіз моделей сучасної математичної фізики, математичної біології та соціології.

Очікуваними результатами роботи стане створення нових теорій важливих для фундаментальної математики, а також буде отримано низку результатів прикладного характеру.

Дослідження будуть виконуватись з застосуванням різноманітних методів сучасної теорії диференціальних рівнянь й математичної фізики, теорії груп та алгебр Лі, теорії зображень та комп'ютерної алгебри.

15. Обґрунтування доцільності виконання роботи

15.1. Цілі та завдання роботи, її актуальність, соціальна та економічна значимість.

Цілями та завданнями роботи є подальший і суттєвий розвиток, створення й обґрунтування принципово нових методів дослідження рівнянь сучасної математичної фізики, а також застосування розроблених методів та теорій для побудови та аналізу нових математичних моделей, а також знаходження розв'язків деяких актуальних моделей математичної фізики. З використанням різноманітних алгебраїчних технік передбачається розробка нових методів й алгоритмів пошуку та класифікації різних типів симетрій, розробка нових алгебраїчних та аналітичних підходів для аналізу і побудови розв'язків актуальних математичних моделей сучасної математичної фізики та використання розроблених теорій у прикладних задачах.

Дослідження в основному будуть зосереджені на таких взаємопов'язаних напрямках:

1) дослідження та класифікація систем квантової, статистичної та класичної механіки, побудова загальних розв'язків таких систем;

2) розробка нових алгебраїчних методів симетрійного аналізу класів диференціальних рівнянь, розширений груповий аналіз та знаходження точних розв'язків актуальних математичних моделей сучасної математичної фізики;

3) розробка нових методів класифікації та побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Лі та суміжні питання теорії груп Лі;

4) дослідження та аналіз моделей сучасної математичної фізики, математичної біології та соціології.

Очікуваними результатами роботи стане створення нових теорій важливих для фундаментальної математики, а також буде отримано низку результатів прикладного характеру. Очікувані результати будуть значним внеском у розвиток фундаментальних досліджень в Україні, закріплення міжнародної пріоритетності досліджень української наукової школи, у підготовку наукових кадрів вищої кваліфікації через залучення молодих науковців до участі у виконанні дослідження, та у розвиток міжнародного співробітництва.

15.2. Стан розроблення проблеми.

Дослідження пов'язані із симетріями, інтегрованістю й геометричними методами в математичній фізиці сьогодні знаходяться у центрі уваги багатьох наукових груп у всьому світі. Висока активність досліджень у цих напрямках призводить до виникнення нових перспективних задач, розробки нових методів із широким залученням алгебраїчних та геометричних інструментів, особливо щодо дослідження актуальних математичних моделей, що мають важливі прикладні

застосування.

Аналогічні дослідження активно виконуються в багатьох провідних наукових центрах світу, наприклад, таких як Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова, Київ (О.М. Гаврилик, М.З. Іоргов), Центр математичних досліджень університету Монреаль, Канада (М. Грундланд, Н. Камран), університет м. Міннеаполіс, США (П. Олвер), Університет Британської Колумбії, Канада (Г. Блуман), Університет Кіпру (К. Софоклеус), Віденський університет (М. Кунзінгер) та багатьох інших. Причому інтенсивність досліджень за цими напрямками з кожним роком значно зростає з огляду на міждисциплінарні зв'язки з алгеброю та геометрією, а також з огляду на ефективні застосування розроблених методів у прикладних задачах теоретичної та математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь, математичної біології, метеорології, соціології тощо.

15.3. Досвід і доробок авторів.

На сьогодні у складі відділу математичної фізики Інституту математики НАН України працює 23 наукових співробітника, з них 3 член-кореспонденти НАН України, 7 докторів наук та 6 молодих науковців до 35 років. Співробітниками здійснюється керівництво 6 аспірантами, більшість науковці відділу залучені до наукових консультацій низки магістерських/бакалаврських проектів студентів провідних університетів України. Лише протягом 2024 року на базі відділу пройшли виробничу практику 27 студентів математичних спеціальностей університетів України. За публікаційною активністю та показниками цитовності відділ математичної фізики один з найкращих в Інституті математики НАН України. Так, протягом 2020–2023 співробітники відділу опублікували 88 статі, що проіндексовані в наукометричних базах Web of Sciences та Scopus. Протягом 2020–2023 років у відділі підготовлено 2 доктори та 2 кандидати фіз.-мат. наук та 3 доктори філософії. Низка виконавців роботи — науковці зі світовим ім'ям, роботи яких добре відомі спеціалістам в математичній фізиці. Зокрема, київська наукова школа групового аналізу займає провідні позиції в світі щодо досліджень симетрій диференціальних рівнянь. Завдяки методам, розробленим у роботах А.Г. Нікітіна, Р.О. Поповича, В.М. Бойка, О.О. Ванєєвої, М.О. Нестеренко, Р.М. Черніги та їх учнів та співавторів, вдалося розв'язати низку класифікаційних задач, які вважалися нерозв'язними або дуже громіздкими у рамках наявних класичних підходів. Нові методи розроблені у відділі математичної фізики дозволили не лише виконати класифікацію складних класів диференціальних рівнянь, істотно спростити відповідні доведення й перевірку достовірності, але у деяких випадках значно покращити й уточнити наявні у літературі результати.

Слід також відмітити видання співробітниками відділу журналу “Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications” (SIGMA), який на сьогодні є провідним міжнародним математичним часописом в математичній фізиці та уже протягом багатьох років є найуспішніший науковим журналом України.

Протягом останніх років виконавці отримали низку вагомих результатів світового рівня в математичній фізиці, що є добрим підґрунтям для успішної реалізації окреслених завдань і задач. Відзначимо деякі з результатів останнього часу:

Отримано повну класифікацію симетрій відносно неперервних груп перетворень для рівняння Шрьодінгера, що описує взаємодію зарядженої частинки зі суперпозицією електричного та магнітного полів. Отримані результати створюють важливу частину теоретико-групового підґрунтя квантової механіки і можуть бути корисними елементами моделей сучасної теоретичної фізики, оскільки надають апіорну інформацію щодо можливих симетрій фундаментальних рівнянь квантової механіки відносно неперервних груп перетворень. (Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Theor.* **53** (2020), no. 45, 455202)

Явно сформульовано й систематично вивчено новий тип задач групового аналізу диференціальних рівнянь — обернені задачі щодо законів збереження. Розв'язано декілька частинних задач цього типу: обернену задачу щодо перших інтегралів звичайних диференціальних рівнянь, обернену задачу щодо законів збереження еволюційних рівнянь, а також обернену задачу щодо законів збереження диференціальних рівнянь, що допускають нескінченний розмірний простір характеристик закону збереження нульового порядку спеціальної структури. (Porovych R.O., Bihlo A., *Phys. D* **401** (2020), 132175)

Для одночасного пошуку груп еквівалентності ненормалізованого класу диференціальних рівнянь та набору його підкласів запропоновано оптимізовану версію прямого методу. Під час

застосування запропонованої техніки до підкласів класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь реакції–дифузії з коефіцієнтом дифузії, залежним від градієнта, вперше побудовано нетривіальний приклад скінченновимірної ефективної узагальненої групи еквівалентності та приклад класу диференціальних рівнянь, звичайна група еквівалентності якого не міститься у будь-якій його ефективній узагальненій групі еквівалентності. (Orpanasenko S., Boyko V. and Popovych R.O., *J. Math. Anal. Appl.* **484** (2020), 123739)

Введено поняття регулярних і сингулярних випадків групової класифікації. Завдяки цьому розширено область застосовності алгебраїчного методу групової класифікації на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь, що проілюстровано груповою класифікацією певних $(1+1)$ -вимірних хвильових й еліптичних рівнянь. (Vaneeva O.O., Bihlo A. and Popovych R.O., *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **91** (2020), 105419)

За допомогою поширення оптимізованої версії методу розгалуженого розщеплення на закони збереження прокласифіковано закони збереження нульового порядку систем із класу двовимірних рівнянь мілководдя зі змінною топографією дна відносно еквівалентності, породженої групою еквівалентності цього класу. Знайдено додаткові точкові еквівалентності між деякими з перерахованих випадків розширення простору законів збереження нульового порядку, які є нееквівалентними відносно перетворень із групи еквівалентності. Гамільтонові структури систем рівнянь мілководдя використано для встановлення зв'язку класифікації законів збереження нульового порядку цих систем з класифікацією їх ліівських симетрій. Також побудовано породжуючі набори таких законів збереження під дією ліівських симетрій. (Orpanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O., Sergiyev A., *Phys. D* **411** (2020), 132546)

Проведено групову класифікацію класу двовимірних рівнянь мілководдя із змінною топографією дна з використанням оптимізованої версії методу розгалуженого розщеплення. Групу еквівалентності цього класу знайдено за допомогою алгебраїчного методу. Застосування інших алгебраїчних технік дозволило побудувати додаткові точкові еквівалентності між деякими з перерахованих випадків розширень симетрії Лі, які є нееквівалентними відносно перетворень із групи еквівалентності. (Bihlo A., Poltavets N., Popovych R.O., *Chaos* **30** (2020), 073132)

Поєднуючи вдосконалений метод розбиття на нормалізовані підкласи та техніку відображень між класами, які породжено сім'ями точкових перетворень, параметризованих довільними елементами початкових класів, вивчено допустимі перетворення та ліівські симетрії для класу рівнянь Бюргерса зі змінними коефіцієнтами. Нетривіальний диференціальний зв'язок на довільні елементи цього класу призводить до його розбиття на два підкласи, які можна відобразити на нормалізовані класи за допомогою сімей точкових перетворень, параметризованих довільними елементами підкласів. Доведено, що один із відображених класів нормалізований у розширеному узагальненому сенсі, і знайдено його ефективну розширену узагальнену групу еквівалентності. Групову класифікацію іншого відображеного класу, що є нормалізованим у звичайному сенсі, виконано за допомогою алгебраїчного методу і поєднано з відомими результатами у групову класифікацію вихідного класу відносно загальної точкової еквівалентності. (Orpanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O., *J. Math. Anal. Appl.* **491** (2020), 124215)

Досліджувалась поведінка кореляційних функцій нескінченних неперервних систем точкових взаємодіючих частинок. Описані кореляції кластерів та оцінки їх спадання. Виведені нові рівняння для частково зв'язних кореляційних функцій, які описують взаємодію між кластерами. Розв'язки цих рівнянь записуються у вигляді розкладів, доданки яких представляються аналітичними внесками від діаграм-лісів. Отримана формула для кількості діаграм-лісів при заданій кількості кластеріві часинок у кожному кластері. Ця формула узагальнює відому формулу Келічисла діаграм-дерев з заданим числом вершин. Цей результат є дуже важливим з точки зору застосувань при дослідженні фазових переходів в таких системах. (Dorlas T. C., Rebenko A.L., Savoie B., *J. Math. Phys.* **61** (2020), no. 3, 033303)

У теорії потенціалів Ньютона та Рісса дано застосування нещодавно введеної альтернативної концепції енергії міри Радона: показано, що така концепція розширює клас знакозмінних мір зі скінченною енергією та, як наслідок, дозволяє розв'язати цілу низку задач теорії конденсаторів, які в рамках стандартного визначення енергії були принципово нерозв'язними. Зокрема, в рамках нової концепції розв'язано відому варіаційну задачу Гаусса як в класичній, так і в мажорантній постановках над (узагальненими) конденсаторами, протилежно заряджені пластини яких мають

непорожній перетин. (Fuglede B., Zorii N., *Potential Anal.* 53 (2020), 1191–1223)

Досліджено симетрійні властивості $(1+2)$ -вимірної нелінійної крайової задачі. Отримані оператори симетрії Лі використано для проведення редукції досліджуваної моделі до систем нижчої розмірності, а також для побудови розв'язків крайової задачі із рухомою границею. (Cherniha R., Davydovych V., *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **80** (2020), 104980)

Розглянуто задачу про існування розв'язків для неоднорідного лінійного диференціального рівняння вищого парного порядку. Доведено теорему про необхідні та достатні умови існування розв'язків згаданого рівняння у просторі Шварца швидко спадних функцій доведено з використанням методів теорії псевдодиференціальних операторів. (Samoilenko V.H., Samoilenko Yu.I. *J. Math. Phys. Anal. Geom.* **16** (2020), 454–459)

Отримано повну групову класифікацію рівнянь Шредінгера–Паулі, що описують взаємодію нейтральних частинок із зовнішнім полем. Доведено, що існує 33 нееквівалентних рівнянь такого типу і знайдено відповідні симетрії та перетворення еквівалентності. Отримані результати складають певне теоретико-групове підґрунтя квантової механіки і можуть застосовуватись для побудови фізичних моделей з а пріорі фіксованою симетрією, побудови їх точних розв'язків, а також фіксувати математично нееквівалентні версії подібних моделей (Nikitin A.G., *J. Math. Phys.* **62** (2021), 083509).

Показано, що добре відома теорія лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь зазнає істотних змін при введенні додаткового дійсного параметра. Певні важливі властивості, як то існування фундаментальних множин розв'язків або їх характеристика за допомогою ненульових вронськіанів, виявилися чутливими до топологічних властивостей області, яку пробігає набір з незалежної змінної та параметра. Вичерпно охарактеризовано розв'язність таких систем із параметром залежно від топологічних властивостей області. Цю проблему також вивчено в межах теорії узагальнених функцій (Boyko V.M., Kunzinger M. and Porovych R.O., *J. Differential Equations* **284** (2021), 546–575).

Встановлена нова комбінаторна тотожність, яка може бути корисною в теорії графів, терії симетрій та в комбінаторній теорії множин. Наведено приклади її використання для підрахунку кількості графів-лісів. Подібні графи використовуються, зокрема, у теоретичній фізиці, наприклад, у статистичній механіці дозволяють описати розширення на функції кореляцій кластерів для класичного газу. (Dorlas T., Rebenko A., Savoie B., *Discrete Math.* **344** (2021), 112270)

Як суттєве узагальнення результатів Лі доведено, що групоїд контактної еквівалентності класу $(1+1)$ -вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Гордона є продовженням першого порядку групоїда точкової еквівалентності цього класу. Оскільки цей клас виявився нормалізованим, а його група еквівалентності має специфічну структуру, для його повної групової класифікації використано алгебраїчний метод, скомбінований з ефективним залученням класичної теореми Лі про реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на прямій (Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Porovych R.O., *Anal. Math. Phys.* **11** (2021), 127).

Виконано симетрійний аналіз двовимірного виродженого рівняння Бюргерса. За допомогою алгебраїчного методу знайдено його повну групу точкових симетрій, і доведено, що всі його узагальнені симетрії еквівалентні ліівським симетріям цього рівняння. Виконано ліівські редукції двовимірного виродженого рівняння Бюргерса та побудовано нові точні розв'язки цього рівняння. Додатково знайдено розв'язки, що задовольняють відповідне невиврожене рівняння Бюргерса. Зокрема, побудовано чотири сімейства розв'язків двовимірного виродженого рівняння Бюргерса, які виражаються через довільні точні розв'язки $(1+1)$ -вимірного лінійного рівняння теплопровідності. (Vaneeva O.O., Porovych R.O., Sophocleous C., *J. Geom. Phys.* **169** (2021), 104336)

Описано групоїди точкової та контактної еквівалентності важливого класу двовимірних квазілінійних гіперболічних рівнянь. Зокрема, доведено, що цей клас нормалізований у звичайному сенсі відносно точкових перетворень, а його групоїд контактної еквівалентності породжується продовженням першого порядку його групоїда точкової еквівалентності, контактної вершинної групи хвильового рівняння та сім'ї допустимих контактних перетворень між тривіально інтегрованими за Дарбу рівняннями. (Porovych R.O., *Appl. Math. Lett.* **116** (2021), 107068)

Обчислено максимальні алгебри ліівської інваріантності нелінійних систем так званих основних рівнянь метеорології, на яких ґрунтуються сучасні моделі прогнозування погоди та клімату, у випадку нульової швидкості зовнішнього нагріву. Через дослідження структури

зазначених алгебр отримано перетворення, яке зводить систему основних рівнянь у системі відліку, що обертається зі сталою швидкістю, до системи основних рівнянь у нерухомій системі відліку. Це перетворення використано для побудови точних розв'язків першої системи з розв'язків другої. Також за допомогою алгебраїчного методу знайдено повну групу точкової симетрії системи основних рівнянь у нерухомій системі відліку. (Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Popovych R.O., *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **101** (2021), 105885).

Проведено вичерпний опис симетрій Лі для класу нелінійних рівнянь типу реакції-дифузії-конвекції з двома просторовими змінними. Встановлено що існує рівно 22 суттєво різних рівнянь з нетривіальними симетріями Лі, які не зводяться одне до іншого. Побудовано додаткові перетворення еквівалентності (формозберігаючі перетворення), які суттєво зменшують кількість суттєво різних рівнянь такого типу. Знайдено 4 нелінійні рівняння з нетривіальними симетріями Лі, для яких не існує аналогів серед рівнянь з однією просторовою змінною (Cherniha R., Serov M., Prystavka Yu., *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **92** (2021), 105466).

Описано оператори Q -умовної симетрії класу трикомпонентних систем еволюційних рівнянь типу реакції-дифузії, що моделює процес взаємодії первісних фермерів з мисливцями-збирачами. Отримані оператори застосовано для побудови нових точних розв'язків. Досліджено властивості отриманих розв'язків та наведено їх біологічну інтерпретацію (Cherniha R.M., Davydovych V.V., *European J. Appl. Math.* **32** (2021), 280–300).

Прокласифіковано ліівські симетрії рівнянь Паулі–Шредінгера для заряджених частинок та квазірелятивістських рівнянь Шредінгера. Зокрема, отримано нову суперінтегровну систему зі спин-орбітальною взаємодією. (Nikitin A.G., *J. Phys. A* **55** (2022), 115202)

Ревізовано основи теорії групової класифікації диференціальних рівнянь включно з її фундаментальними поняттями і постановками задач. Після введення нового поняття слабкоподібних класів диференціальних рівнянь для таких класів розроблено метод групової класифікації через відображення між класами, який узагальнює всі версії цього методу, представлені в літературі. Метод відображення застосовано до групової класифікації різних класів рівнянь Колмогорова та рівнянь Фоккера–Планка у випадку просторової розмірності один. Обчислено групоїди еквівалентності та групи еквівалентності цих класів, а задачі групової класифікації для них щодо відповідних груп еквівалентності зведено до знаходження повного набору нееквівалентних розв'язків рівнянь теплопровідності з нееквівалентними потенціалами, що допускають розширення ліівської симетрії. Це зведення дозволяє вичерпно розв'язати задачі групової класифікації для класів рівнянь Колмогорова та Фоккера–Планка з незалежними від часу коефіцієнтами. (Ornasanenko S., Popovych R.O., *J. Math. Anal. Appl.* **513** (2022), 126209)

Фізично-інформовані нейронні мережі вперше використано для розв'язання рівнянь мілкої води на сфері в метеорологічному контексті. Ці мережі навчено задовольняти диференціальні рівняння разом із заданими початковими та граничними умовами, а тому їх можна розглядати як альтернативний підхід до чисельного інтегрування диференціальних рівнянь порівняно з традиційними обчислювальними методами (різницевиими, скінченних об'ємів або спектральними). Запропоновано простий мультимодельний підхід у випадку порівняно довгих інтервалів часу, в рамках якого замість однієї нейронної мережі для всього інтервалу інтегрування розглянуто послідовність нейронних мереж, а кодування граничних умов на спеціальному рівні нейронної мережі дозволило суттєво оптимізувати обчислення і покращити їх точність. Можливості методу проілюстровано через розв'язання найвідоміших тестових прикладів з метеорології. (Bihlo A. and Popovych R.O., *J. Comp. Phys.* **456** (2022), 111024)

Досліджена гармонічна міра довільної відкритої підмножини евклідового простору, що є ефективним інструментом для вивчення узагальненої фракційної задачі Діріхле, асоційованої з фракційним лапласіаном. Отримано формулу для знаходження її повної маси, дано повний опис носія, встановлено необхідні та достатні умови, при яких фракційна гармонічна міра має скінченну енергію (або, більш загально, є абсолютно неперервною функцією відносно ємності). Ці результати узагальнено на довільну міру Радона та її вимітання з допомогою доведеної в статті формули інтегрального зображення. (Zorii N., *Potential Anal.* **57** (2022), 447–472)

Виконано огляд робіт, присвячених методам розв'язання дифузійних систем Лотки–Вольтера (зокрема методами симетрійного аналізу) та побудові точних розв'язків у випадку дво- та трикомпонентних систем. Зроблено порівняння методів та отриманих розв'язків на основі робіт

різних авторів. Вперше наведено приклади точних розв'язків типу біжучих фронтів для опису взаємодії видів типу “хижак-жертва”. Огляд присвячено пам'яті видатного українського математика В.І. Фушича. (Cherniha R., Davydovych V., *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **113** (2022), 106579)

Систематизовано означення та властивості спеціальних орбіт-функцій простих алгебр Лі. Запропоновано моделі модифікацій карбону, що пов'язані з простими алгебрами Лі та групами Кокстера. (Нестеренко М.О., Укр. мат. журн. **74** (2022), 351–359).

Проведено повну класифікацію інтегровних та суперінтегровних системи квантової механіки зі змінним параметром маси, а саме систем, які допускають хоча б один інтеграл руху другого порядку та є інваріантними відносно трипараметричних або двопараметричних груп Лі. Також знайдено широкий клас систем, які допускають інтеграли руху другого порядку та інваріантні відносно однопараметричних груп чи взагалі не допускають ліівських симетрій. Отримані результати є нетривіальним узагальненням відомої класифікації двовимірних систем зі змінною масою на тривимірний випадок, який є більш важливим для фізичних застосувань у фізиці твердого тіла, теорії напівпровідників і багатьох сучасних квантових теоріях. (Nikitin A.G., *J. Phys. A: Math. Theor.* **56** (2023) 395203; Nikitin A.G., *J. Math. Phys.* **64** (2023), 113505)

Отримано належне представлення для точкових перетворень симетрії $(1+1)$ -вимірного лінійного рівняння теплопровідності та коректно їх проінтерпретовано. Це дозволило довести, що псевдогрупа цих перетворень має рівно дві компоненти зв'язності. Введено поняття псевдодискретних елементів групи Лі та показано, що заміна знаку просторової змінної, яку тривалий час неправильно інтерпретували як дискретну симетрію рівняння теплопровідності, насправді є псевдодискретним елементом його суттєвої групи точкових симетрій. Покращено класифікацію підалгебр суттєвої алгебри інваріантності цього рівняння, а також уточнено опис його узагальнених симетрій. (Koval S.D., Porovych R.O., *J. Math. Anal. Appl.* **527** (2023), 127430)

Рівняння типу Кірквуда–Зальцбурга розглянуто як нелінійні рівняння для кореляційних функцій канонічного ансамблю. З використанням нових методів нескінченновимірного аналізу побудовано їх розв'язки у вигляді розкладів за степенями густини. (Rebenko A.L. *Lett. Math. Phys.* **113** (2023) 85)

У теорії потенціалів на локально компактному просторі відносно вельми загальних функціональних ядер, знайдено ряд характеристичних властивостей внутрішніх та зовнішніх ємностей вельми загальних множин та відповідних ємнісних розподілів, кожна з яких може слугувати альтернативним еквівалентним означенням та мати різну сферу застосувань. Розроблений при цьому метод дослідження істотно ґрунтується на встановленому у роботі глибинному зв'язку між теорією вимітання та теорією рівноваги. Як супутній результат, дано повне обґрунтування відомої теорії В. Fuglede вимірності по ємності. (Zorii N., *Potential Anal.* **59** (2023), 1345–1379)

Вперше описано оператори Q -умовної симетрії спрощеної моделі Шігесади–Кавасакі–Терамото, яка базується на нелінійних рівняннях реакції-дифузії з поперечною дифузією. Використавши отримані симетрії, побудовано нові точні розв'язки досліджуваної моделі та наведено їх можливу біологічну інтерпретацію. Крім того, запропоновано альтернативне застосування цієї моделі для опису процесів полімеризації (Cherniha R., Davydovych V., King J.R., *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **124** (2023), 106579)

Проведено розширений симетрійний аналіз ультрапараболічного рівняння Фокера–Планка з трьома незалежними змінними, яке також називають рівнянням Колмогорова. Прямим методом обчислено псевдогрупу точкових симетрій цього рівняння, проаналізовано її структуру та виокремлено її суттєву підгрупу. Вичерпно прокласифіковано нееквівалентні одно- і двовимірні підалгебри суттєвої та максимальної алгебр ліівської інваріантності цього рівняння і його ліівські редукції, а також побудовано особливі узагальнені редукції, які пов'язано з породженням узагальнених симетрій ітеративною дією операторів ліівської симетрії. У результаті отримано широкі сім'ї точних розв'язків рівняння Фокера–Планка, зокрема, параметризовані довільною скінченною кількістю довільних розв'язків $(1+1)$ -вимірного лінійного рівняння теплопровідності. (Koval S.D., Bihlo A., Porovych R.O., *European J. Appl. Math.* **34** (2023), 1067–1098)

Розглянуто задачу асимптотичних ступінчастих розв'язків рівняння Бюргерса зі змінними коефіцієнтами та малим параметром. За допомогою нелінійного методу Вентцеля–Крамерса–

Бріллюена запропоновано алгоритм побудови цих асимптотичних розв'язків та доведено твердження щодо обґрунтованості алгоритму. Отримані результати проілюстровано прикладом, для якого явно знайдено перше асимптотичне ступінчасте наближення. (Samoilenko V., Samoilenko Yu., Zappale E., *Phys. Fluids*. **36** (2023), 067106)

Розвинуто математичну постановку задачі про опис конфліктних процесів в термінах функціонального аналізу. Конфліктна взаємодія між опонентами зображена операторними перетвореннями у гільбертових просторах та ймовірнісними розподілами на просторі життєвих ресурсів. (Кошманенко В.Д., *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **20** (2023), no. 1, 843–872)

Застосовуючи оригінальну версію алгебраїчного методу на основі мегаідеалів, обчислено псевдогрупу точкової симетрії бездисперсійного (симетричного потенціального) рівняння Нижника. Це перший приклад такого роду в літературі, де немає необхідності використовувати прямий метод для завершення обчислення. Аналогічні дослідження також проведено для відповідного нелінійного представлення Лакса та бездисперсійного аналога симетричної системи Нижника. Також алгебраїчний метод на основі мегаідеалів вперше застосовано для знаходження (псевдо)групи контактної симетрії диференціального рівняння з частинними похідними. Показано, що псевдогрупа контактної симетрії бездисперсійного рівняння Нижника збігається з першим продовженням його псевдогрупи точкової симетрії. Крім того, описано всі диференціальні рівняння третього порядку з трьома незалежними змінними, які допускають ту саму алгебру лівської інваріантності. Також знайдено набір геометричних властивостей бездисперсійного рівняння Нижника, який вичерпно його визначає. (Boyko V.M., Popovych R.O. and Vinnichenko O.O., *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **132** (2024), 107915)

Виконано розширений симетрійний аналіз $(1+2)$ -вимірної системи Бойті–Леона–Пемпінеллі, який виправляє, покращує та узагальнює багато результатів, наявних у літературі. Псевдогрупа точкової симетрії цієї системи обчислюється за допомогою оригінальної версії алгебраїчного методу на основі мегаідеалів. Ряд ретельно підібраних диференціальних обмежень дозволяє побудувати сім'ю точних розв'язків цієї системи, які значно перевищують усі відомі. Після класифікації одно- та двовимірних підалгебр усієї (нескінченновимірної) максимальної алгебри лівської інваріантності цієї системи вивчаються лише її суттєві лівські редукції, які дають нові невідомі раніше сім'ї розв'язків. Серед редукцій системи Бойті–Леона–Пемпінеллі з використанням диференціальних обмежень або лівських симетрій ідентифіковано ряд відомих диференціальних рівнянь з частинними похідними і звичайних диференціальних рівнянь. Також показано, як усі побудовані сім'ї розв'язків можуть бути значно розширені з використанням перетворень Лапласа та Дарбу. (Maltseva D.S. and Popovych R.O., *Phys. D* **460** (2024), 134081)

Подальший розвиток наведених результатів виконавців є однією із складових частин нашої подальшої роботи.

15.4. Структура досліджень.

Дослідження включатимуть такі напрямки:

Буде досліджено і повністю описано важливий клас рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси, а саме рівнянь, що допускають інтеграли руху другого порядку (на сьогодні відомі лише окремі розв'язки цієї задачі у тривимірному випадку).

Планується описати алгебри узагальнених та контактних симетрій $(1+2)$ -вимірних ультрапараболічних рівнянь Фоккера–Планка, зокрема рівняння Колмогорова. Узагальнені симетрії також вивчатимуться для $(1+2)$ -вимірного потенційного бездисперсійного рівняння Нижника та системи гідродинамічного типу, яка є бездисперсійним аналогом системи Нижника, а також деяких інших важливих класів рівнянь математичної фізики. Буде побудовано простори законів збереження рівняння завихреності, баротропного рівняння завихреності та рівнянь Ейлера та вичерпно опишемо закони збереження $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь парного порядку.

Застосовуючи розроблену нами теорію модулів редукції диференціальних рівнянь, планується вичерпно описати модулі редукції низки диференціальних рівнянь з частинними похідними, які мають важливі прикладні застосування. Для кожного з диференціальних рівнянь або класів диференціальних рівнянь, що розглядаються, основним інструментом для попереднього аналізу відповідних наборів систем визначальних рівнянь для його модулів редукції буде оригінальна теорія сингулярних модулів редукції. Для класифікації модулів редукції в рамках класу

диференціальних рівнянь буде використано метод розгалуженого розщеплення та групи еквівалентності досліджуваних класу. Планується узагальнити теорію модулів редукції з рівнянь з частинними похідними на загальні системи таких рівнянь або принаймні на системи в розширеній формі Ковалевської.

Планується провести вичерпну класифікації ліївських симетрій класів $(1+1)$ -вимірних нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема нелінійних рівнянь реакції-дифузії та їх систем, рівнянь Кортвега-де Фріза та їхніх узагальнень. Буде прокласифіковано допустимі перетворень у розглядуваних класах, описано теореми про групоїди еквівалентності, побудовано широкі сім'ї точних розв'язків, описано закони збереження.

Для низки багатокомпонентних нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними буде побудовано нові симетрії Лі та умовні симетрії різного типу, буде застосовано отримані симетрії для редукції відповідних систем до систем звичайних диференціальних рівнянь, отримано широкі класи нових точних розв'язків вихідних систем та надано відповідну фізичну (біологічну, екологічну) інтерпретацію отриманих результатів.

Для забезпечення рівномірного відновлення пошкоджених (втрачених) даних планується застосувати перетворення даних, що відповідає взаємнооднозначному але розривному відображенню між внутрішнім та фізичним простором квазікристалів. При дослідженні квазікристалів та майжеперіодичних функцій будуть використовуватись скінчені групи та дуальні до них і новий метод проєкції.

Для класифікації й побудови підалгебр, інваріантів, контракцій, реалізацій алгебр Лі будуть розроблені нові методи із застосуванням теоретико-групових методів та методів лінійної алгебри і диференціальної геометрії. Зокрема, планується описати зображення непростих алгебр на основі синтезу класичної теорії зображень та методу побудови параметризованих зображень з подальшим граничним переходом.

Буде розроблено нові методи побудови асимптотичних розв'язків рівнянь інтегровного типу зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням та виконано апробацію цих методів на узагальненнях класичних рівнянь математичної фізики.

Виведення рівнянь для зв'язних кореляційних функцій між частинками системи статистичної механіки, знаходження розв'язків отриманих рівнянь, обчислення різних фізичних характеристик й пошук відповідних моделей взаємодій.

Буде проведено опис та дослідження існування й стійкості рівноважних (інваріантних) станів в моделях заданих системами різницевих рівнянь, які описують конфліктну взаємодію між опонентами із залученням стратегій зовнішнього впливу.

Планується побудувати теорію внутрішнього (зовнішнього) псевдо-вимітання при належних, досить загальних умовах на знакозмінні міри Радона та ядра на локально компактних просторах, та знайти еквівалентні альтернативні підходи до визначення цієї концепції, дослідити зміну повної маси міри при її псевдо-вимітанні, довести теореми збіжності при апроксимації множини монотонними узагальненими послідовностями множин. Планується розвинути теорію вимітання додатних мір на локально компактних просторах, знявши/послабивши вимогу скінченності енергій. Для цього будуть розроблені нові методи та підходи, що, як очікується, будуть ґрунтуватися на апроксимації потенціалу початкової міри потенціалами мір зі скінченною енергією.

15.5. Наявність матеріально-технічної бази для виконання роботи.

Відділ математичної фізики, на базі якого планується виконувати дослідження, має в своєму розпорядженні сім персональних комп'ютерів, чотири лазерних принтери та вільний доступ до мережі інтернет, що є достатнім для виконання роботи.

16. Техніко-економічне обґрунтування

н е м а є

17. Власна оцінка науково-технічного рівня розробки, що пропонується, яка очікується за результатами наукової, науково-технічної роботи

- [X] немає аналогів у світі або краща за існуючі у світі аналоги
 [] немає аналогів в Україні
 [] краща за існуючі в Україні аналоги за всіма основними показниками
 [] перевищує існуючі в Україні аналогічні розробки за окремими показниками

18. Використання результатів роботи

18.1. Очікувані наукові та науково-практичні результати, об'єкти права інтелектуальної власності (ОІВ), які плануються до впровадження після завершення роботи

Найменування результатів, ОІВ	Назва підприємства, організації, де передбачається використовувати результати, ОІВ	Заплановані обсяги впровадження
Нові алгебраїчні та аналітичні методи аналізу та побудови розв'язків рівнянь математичної фізики; класифікація рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси; опис узагальнених симетрій класів диференціальних рівнянь; класифікація підалгебр алгебри $sl(3, R)$; розширений груповий аналіз класів диференціальних рівнянь; алгебраїчний метод побудови реалізацій алгебр Лі; нові алгебраїчні методи симетрійного аналізу диференціальних рівнянь; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Лі	Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Universite de Montreal (Canada), Institute of Physics (Prague, Czech Republic), University of Vienna (Austria), University of Cyprus (Nicosia, Cyprus), Memorial University of Newfoundland (Canada), Silesian University in Opava (Czech Republic) та інші	Не визначилися

18.2. Шляхи та способи подальшого використання в суспільній практиці результатів виконання роботи

Результати роботи є принциповими для подальших досліджень у відділі математичної фізики Інституту математики НАН України, а також знайдуть використання у наукових розробках науковців багатьох провідних наукових центрів як України так і світу. Розроблені методи можуть бути використані для аналізу та побудови розв'язків актуальних математичних моделей теоретичної фізики, прикладної математики й математичної біології. Крім того, результати роботи будуть використані для підготовки нових лекційних курсів та науково-освітніх програм для магістрів та аспірантів закладів вищої освіти та наукових установ.

18.3. Потенційні споживачі наукових та науково-технічних результатів, об'єктів права інтелектуальної власності (ОІВ)

Країна	Назва підприємства, організації	Найменування результатів, ОІВ	Можливі обсяги споживання
Україна	Інститут теоретичної фізики ім. М.М. Боголюбова НАН України, м. Київ	Нові алгебраїчні та аналітичні методи аналізу та побудови розв'язків рівнянь математичної фізики; класифікація рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси; класифікація підалгебр алгебри $sl(3, R)$; алгебраїчний метод побудови реалізацій алгебр Лі; нові алгебраїчні методи симетрійного аналізу диференціальних рівнянь; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Лі	Не визначилися
		Нові алгебраїчні та аналітичні методи	

Україна	Київський національний університет ім. Тараса Шевченка	аналізу та побудови розв'язків рівнянь математичної фізики; класифікація підалгебр алгебри $sl(3,R)$; розширений груповий аналіз класів диференціальних рівнянь; алгебраїчний метод побудови реалізацій алгебр Li ; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Li	Не визначилися
Україна	Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України	Нові алгебраїчні та аналітичні методи аналізу та побудови розв'язків рівнянь математичної фізики; класифікація рівнянь класифікація підалгебр алгебри $sl(3,R)$; алгебраїчний метод побудови реалізацій алгебр Li ; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Li	Не визначилися
Канада	Universite de Montreal	Нові алгебраїчні та аналітичні методи аналізу та побудови розв'язків рівнянь математичної фізики; класифікація рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси; класифікація підалгебр алгебри $sl(3,R)$; алгебраїчний метод побудови реалізацій алгебр Li ; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Li	Не визначилися
Чехія	Institute of Physics, Prague	Нові алгебраїчні та аналітичні методи аналізу та побудови розв'язків рівнянь математичної фізики; класифікація рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси; класифікація підалгебр алгебри $sl(3,R)$; алгебраїчний метод побудови реалізацій алгебр Li ; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Li	Не визначилися
Австрія	University of Vienna	Опис узагальнених симетрій класів диференціальних рівнянь; нові алгебраїчні методи симетрійного аналізу диференціальних рівнянь; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Li	Не визначилися
Кіпр	University of Cyprus, Nicosia	Розширений груповий аналіз класів диференціальних рівнянь; алгебраїчний метод побудови реалізацій алгебр Li ; нові алгебраїчні методи симетрійного аналізу диференціальних рівнянь; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Li	Не визначилися
Канада	Memorial University of Newfoundland	Нові алгебраїчні та аналітичні методи аналізу та побудови розв'язків рівнянь математичної фізики; опис узагальнених симетрій класів диференціальних рівнянь; класифікація підалгебр алгебри $sl(3,R)$; алгебраїчний метод побудови реалізацій алгебр Li ; нові алгебраїчні методи симетрійного аналізу диференціальних рівнянь; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Li	Не визначилися
		Опис узагальнених симетрій класів диференціальних рівнянь; класифікація підалгебр алгебри $sl(3,R)$; розширений	

Чехія	Silesian University in Opava	груповий аналіз класів диференціальних рівнянь; алгебраїчний метод побудови реалізацій алгебр Лі; нові алгебраїчні методи симетричного аналізу диференціальних рівнянь; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Лі	Не визначилися
-------	------------------------------	--	----------------

19. Об’єкти права інтелектуальної власності (ОІВ), використання яких передбачається під час проведення досліджень (для прикладних досліджень та фундаментальних, де використовуються ОІВ)
н е м а є

20. Фінансові аспекти роботи
20.1. Загальна вартість роботи 59455,291 тис. грн.
словами: п’ятдесят дев’ять мільйонів чотириста п’ятдесят п’ять тисяч двісті дев’яносто одна грн.

20.2. Вартість роботи:

Роки виконання роботи	2025 р.	2026 р.	2027 р.	2028 р.	2029 р.
Вартість виконання робіт (тис. грн.)	7903,169	9603,600	11524,320	13829,181	16595,021

21. Наукові ради (комітети, комісії) НАН України, ради регіональних наукових центрів НАН і МОН України, яких доцільно залучити до експертної оцінки запиту
н е м а є

22. Кандидатури можливих експертів у галузі, до якої відноситься робота, що пропонується

Прізвище, ім'я, по батькові	Науковий ступінь, посада	Місце роботи
Гаврилик Олександр Михайлович	д.ф.-м.н., проф., завідувач відділу	ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України
Федорчук Василь Максимович	д.ф.-м.н., с.н.с., провідний науковий співробітник	Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України
Шепельський Дмитро Георгійович	член-кореспондент НАН України, д.ф.-м.н., с.н.с., завідувач відділу	Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Веркіна НАН України
Єгорова Ірина Євгенівна	д.ф.-м.н., с.н.с., провідний науковий співробітник	Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І.Веркіна НАН України
Іоргов Микола Зіновійович	д.ф.-м.н., с.н.с., завідувач лабораторії	ІТФ ім. М.М. Боголюбова НАН України
Петравчук Анатолій Петрович	д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри	Київський національний університет ім. Тараса Шевченка
Станжицький Олександр Миколайович	д.ф.-м.н., проф., завідувач кафедри	Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Парасюк Ігор Остапович	д.ф.-м.н., проф.,	Київський національний університет імені Тараса Шевченка

23. Додатки, що є невід'ємною частиною запиту:

1. Технічне завдання на виконання роботи за відомчим замовленням (Додаток А).
2. Планова калькуляція кошторисної вартості роботи за відомчим замовленням (Додаток Б) та розрахунки витрат за статтями.
3. Перелік статей накладних витрат (Додаток В).

дата

Заступник директора з наукової роботи
Інституту математики НАН України
д.ф.-м.н., с.н.с.

_____ Віталій ВАСИЛИК
(підпис)

М.П.

Науковий керівник роботи

Завідувач відділу
Інституту математики НАН України
д.ф.-м.н., с.н.с.

_____ Вячеслав БОЙКО
(підпис)

ПОГОДЖЕНО

Заступник директора з наукової роботи
Інституту математики НАН України
д.ф.-м.н., с.н.с.

_____ Віталій ВАСИЛИК
(підпис)
« _____ » _____ 20__ р.
М.П.

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. академіка-секретаря Відділення математики
НАН України
академік НАН України

_____ Олександр ТИМОХА
(підпис)
« _____ » _____ 20__ р.
М.П.

ТЕХНІЧНЕ ЗАВДАННЯ

на виконання наукової (науково-технічної) роботи

«Групова класифікація та розв'язки моделей математичної фізики»

Інститут математики НАН України

1. Рішення про затвердження роботи

2. Пріоритетний напрям розвитку науки і техніки

Фундаментальні наукові дослідження з найбільш важливих проблем розвитку науково-технічного, соціально-економічного, суспільно-політичного, людського потенціалу для забезпечення конкурентоспроможності України у світі та сталого розвитку суспільства і держави

3. Пріоритетний тематичний напрям наукових досліджень і науково-технічних розробок

Розвиток новітніх галузей математики та математичної статистики, математичного моделювання актуальних проблем природничих та соціо-гуманітарних наук

4. Код та назва наукового напрямку або проблеми з Основних наукових напрямів та найважливіших проблем фундаментальних досліджень у галузі природничих, технічних і гуманітарних наук (для фундаментальних досліджень)

1.1.5.1. Застосування групових, диференціально-геометричних й алгебраїчних методів до задач теорії диференціальних рівнянь, математичної та теоретичної фізики

5. Основний напрям наукової діяльності установи, за яким проводяться роботи

Математична фізика, методи функціонального та нелінійного аналізу

6. Мета роботи

Метою роботи є подальший розвиток, створення й обґрунтування принципово нових методів дослідження рівнянь сучасної математичної фізики, а також застосування розроблених методів та теорій для побудови та аналізу нових математичних моделей, а також знаходження розв'язків деяких актуальних моделей математичної фізики, з використанням алгебраїчних технік передбачається розробка нових методів й алгоритмів пошуку та класифікації різних типів симетрій, розробка нових алгебраїчних та аналітичних підходів для аналізу і побудови розв'язків актуальних математичних моделей сучасної математичної фізики та використання розроблених теорій у прикладних задачах.

7. Термін проведення роботи:

початок — 01 січня 2025 р. ; закінчення — 31 грудня 2029 р.

Орієнтовний обсяг коштів на виконання роботи в цілому **59455,291** тис. грн.
та по роках

2025 р. — 7903,169 тис. грн.

2026 р. — 9603,600 тис. грн.

2027 р. — 11524,320 тис. грн.

2028 р. — 13829,181 тис. грн.

2029 р. — 16595,021 тис. грн.

8. Календарний план роботи

№ з/п	Найменування основного етапу роботи	Термін виконання	Відповідальний виконавець
1	Класифікація систем квантової, статистичної та класичної механіки, груповий аналіз нелінійних диференціальних рівнянь та моделей сучасної математичної фізики, теорія алгебр Лі	01 січня 2025 р. - 31 грудня 2025 р.	д.ф.-м.н., с.н.с., В.М. Бойко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., с.д., О.О. Ванєєва; д.ф.-м.н., проф., В.Д. Кошманенко; д.ф.-м.н., с.д., М.О. Нестеренко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., А.Г. Нікітін; д.ф.-м.н., проф., Р.О. Попович; д.ф.-м.н., проф., О.Л. Ребенко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., В.Г. Самойленко.
2	Теоретико-груповий та якісний аналіз моделей сучасної математичної фізики	01 січня 2026 р. - 31 грудня 2026 р.	д.ф.-м.н., с.н.с., В.М. Бойко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., с.д., О.О. Ванєєва; д.ф.-м.н., проф., В.Д. Кошманенко; д.ф.-м.н., с.д., М.О. Нестеренко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., А.Г. Нікітін; д.ф.-м.н., проф., Р.О. Попович; д.ф.-м.н., проф., О.Л. Ребенко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., В.Г. Самойленко.

3	Розробка нових алгебраїчних та аналітичних методів аналізу класів диференціальних рівнянь	01 січня 2027 р. - 31 грудня 2027 р.	д.ф.-м.н., с.н.с., В.М. Бойко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., с.д., О.О. Ванєєва; д.ф.-м.н., проф., В.Д. Кошманенко; д.ф.-м.н., с.д., М.О. Нестеренко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., А.Г. Нікітін; д.ф.-м.н., проф., Р.О. Попович; д.ф.-м.н., проф., О.Л. Ребенко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., В.Г. Самойленко.
4	Розв'язки моделей математичної фізики, суміжні питання теорії груп і алгебр Лі	01 січня 2028 р. - 31 грудня 2028 р.	д.ф.-м.н., с.н.с., В.М. Бойко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., с.д., О.О. Ванєєва; д.ф.-м.н., проф., В.Д. Кошманенко; д.ф.-м.н., с.д., М.О. Нестеренко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., А.Г. Нікітін; д.ф.-м.н., проф., Р.О. Попович; д.ф.-м.н., проф., О.Л. Ребенко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., В.Г. Самойленко.

5	Алгебраїчні та аналітичні методи побудови та аналізу математичних моделей	01 січня 2029 р. - 31 грудня 2029 р.	д.ф.-м.н., с.н.с., В.М. Бойко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., с.д., О.О. Ванєєва; д.ф.-м.н., проф., В.Д. Кошманенко; д.ф.-м.н., с.д., М.О. Нестеренко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., А.Г. Нікітін; д.ф.-м.н., проф., Р.О. Попович; д.ф.-м.н., проф., О.Л. Ребенко; член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф., В.Г. Самойленко.
---	---	---	---

9. Зміст, основні вимоги до виконання роботи, рівня і способів її виконання

У рамках виконання роботи буде розв'язано низку проблем як теоретичного так і прикладного характеру. Зокрема, дослідження включатимуть такі напрямки:

Буде досліджено і повністю описано важливий клас рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси, а саме рівнянь, що допускають інтеграли руху другого порядку (на сьогодні відомі лише окремі розв'язки цієї задачі у тривимірному випадку).

Буде описано алгебри узагальнених та контактних симетрій $(1+2)$ -вимірних ультрапараболічних рівнянь Фоккера–Планка, зокрема рівняння Колмогорова, для $(1+2)$ -вимірного потенційного бездисперсійного рівняння Нижника та системи гідродинамічного типу, яка є бездисперсійним аналогом системи Нижника, а також деяких інших важливих класів рівнянь математичної фізики. Буде побудовано простори законів збереження рівняння завихреності, баротропного рівняння завихреності та рівнянь Ейлера та вичерпно опишемо закони збереження $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь парного порядку.

Застосовуючи розроблену нами теорію модулів редукції диференціальних рівнянь, буде вичерпно описано модулі редукції низки диференціальних рівнянь з частинними похідними, які мають важливі прикладні застосування. Для кожного з диференціальних рівнянь або класів диференціальних рівнянь, що розглядаються, основним інструментом для попереднього аналізу відповідних наборів систем визначальних рівнянь для його модулів редукції буде оригінальна теорія сингулярних модулів редукції. Для класифікації модулів редукції в рамках класу диференціальних рівнянь буде використано метод розгалуженого розщеплення та групи еквівалентності досліджуваних класу. Буде узагальнено теорію модулів редукції з рівнянь з частинними похідними на загальні системи таких рівнянь або принаймні на системи в розширеній формі Ковалевської.

Буде проведено вичерпну класифікації лінійних симетрій класів $(1+1)$ -вимірних нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема нелінійних рівнянь реакції-дифузії та їх систем, рівнянь Кортевега–де Фріза та їхніх узагальнень. Буде прокласифіковано допустимі перетворень у розглядуваних класах, описано теореми про групоїди еквівалентності, побудовіно широкі сім'ї точних розв'язків, описано закони збереження.

Для низки багатокomпонентних нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними буде побудовано нові симетрії Лі та умовні симетрії різного типу, буде застосовано отримані симетрії для редукції відповідних систем до систем звичайних диференціальних рівнянь,

отримано широкі класи нових точних розв'язків вихідних систем та надано відповідну фізичну (біологічну, екологічну) інтерпретацію отриманих результатів.

Для забезпечення рівномірного відновлення пошкоджених (втрачених) даних планується застосувати перетворення даних, що відповідає взаємнооднозначному але розривному відображенню між внутрішнім та фізичним простором квазікристалів. При дослідженні квазікристалів та майжеперіодичних функцій будуть використовуватись скінчені групи та дуальні до них і новий метод проєкції.

Для класифікації й побудови підалгебр, інваріантів, контракцій, реалізацій алгебр Лі будуть розроблені нові методи із застосуванням теоретико-групових методів та методів лінійної алгебри і диференціальної геометрії. Зокрема, буде описано зображення непротих алгебр на основі синтезу класичної теорії зображень та методу побудови параметризованих зображень з подальшим граничним переходом.

Буде розроблено нові методи побудови асимптотичних розв'язків рівнянь інтегровного типу зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням та виконано апробацію цих методів на узагальненнях класичних рівнянь математичної фізики.

Буде отримано рівняння для зв'язних кореляційних функцій між частинками системи статистичної механіки, знайдено розв'язки отриманих рівнянь, обчислено різні фізичні характеристики й запропоновано відповідні моделі взаємодій.

Буде проведено опис та дослідження існування й стійкості рівноважних (інваріантних) станів в моделях заданих системами різницевого рівнянь, які описують конфліктну взаємодію між опонентами із залученням стратегій зовнішнього впливу.

Буде побудовано теорію внутрішнього (зовнішнього) псевдо-вимітання при належних, досить загальних умовах на знакомі міри Радона та ядра на локально компактних просторах, та знайдено еквівалентні альтернативні підходи до визначення цієї концепції, дослідити зміну повної маси міри при її псевдо-вимітання, довести теореми збіжності при апроксимації множини монотонними узагальненими послідовностями множин. Буде розвинуто теорію вимітання додатних мір на локально компактних просторах, знявши/послабивши вимогу скінченності енергій. Для цього будуть розроблені нові методи та підходи, що, як очікується, будуть ґрунтуватися на апроксимації потенціалу початкової міри потенціалами мір зі скінченною енергією.

Успішне виконання роботи передбачає реалізацію у повному обсязі завдань за всіма основними етапами досліджень календарного плану, зокрема, щодо розробки нових ефективних алгебраїчних та аналітичних методів дослідження та класифікації актуальних моделей сучасної математичної фізики. Невід'ємною складовою дослідження є практичні застосування теоретичних результатів (нових теорій і методів) у задачах математичного моделювання, задачах шифрування інформації, при дослідженні динамічних систем конфлікту тощо. Основні результати будуть опубліковані у провідних високореєтингових наукових журналах та пройдуть апробацію на міжнародних наукових конференціях та наукових семінарах у провідних наукових центрах України та світу. Важливими результатами роботи також буде підготовка висококваліфікованих науково-педагогічних кадрів, робота з молоддю, популяризації наукових досліджень та отриманих результатів на всеукраїнському та міжнародному рівнях, розвиток міжнародного співробітництва.

За рівнем та новизною заплановані дослідження та очікувані результати будуть значним внеском у розвиток фундаментальних досліджень і матимуть пріоритетний характер у світі.

10. Наукові (науково-технічні) результати, що очікуються за основними етапами та роботою в цілому

За роботою в цілому будуть створенні нові ефективні алгебраїчні та аналітичні методи дослідження та класифікації актуальних моделей сучасної математичної фізики. У рамках роботи, відповідно до календарного плану, буде досліджено і повністю прокласифіковано важливий клас рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси у тривимірному просторі, що допускають інтеграли руху другого порядку. Буде описано алгебри узагальнених та контактних симетрій деяких важливих класів рівнянь математичної фізики та побудувати простори їх законів збереження. Буде побудовано модулі редукції низки диференціальних рівнянь з частинними похідними, які мають важливі прикладні застосування. Буде проведено вичерпну класифікацію лінійних симетрій класів нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Для забезпечення рівномірного відновлення пошкоджених (втрачених) даних буде використано перетворення даних, що відповідає взаємнооднозначному але розривному відображенню між внутрішнім та фізичним простором квазікристалів. Будуть розроблені нові методи для класифікації й побудови підалгебр, інваріантів, контракцій, реалізацій алгебр Лі. Буде розроблено нові методи побудови асимптотичних розв'язків рівнянь інтегровного типу зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням та виконати апробацію цих методів на узагальненнях класичних рівнянь математичної фізики. Буде виведено рівняння для зв'язних кореляційних функцій між частинками системи статистичної механіки, знайдено розв'язки отриманих рівнянь, обчислено різні фізичні характеристики й побудовано відповідні моделі взаємодій. Буде проведено опис та дослідження існування й стійкості рівноважних (інваріантних) станів в моделях заданих системами різницевого рівнянь, які описують конфліктну взаємодію між опонентами із залученням стратегій зовнішнього впливу. Буде побудовано теорію внутрішнього (зовнішнього) псевдо-вимітання при належних, досить загальних умовах на знаковмірні міри Радона та ядра на локально компактних просторах, та знайти еквівалентні альтернативні підходи до визначення цієї концепції, дослідити зміну повної маси міри при її псевдо-вимітаннях, довести теореми збіжності при апроксимації множини монотонними узагальненими послідовностями множин.

Зокрема, будуть отримані такі результати за основними етапами:

1 етап (2025): класифікація рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси у тривимірному просторі; опис узагальнених симетрій бездисперсійного рівняння Нижника; класифікація підалгебр алгебри $sl(3, \mathbb{R})$.

2 етап (2026): розширений груповий аналіз класів диференціальних рівнянь; алгебраїчний метод побудови реалізацій алгебр Лі; розв'язки актуальних моделей математичної фізики.

3 етап (2027): побудова розв'язків математичних моделей: створення нових алгебраїчних методів симетрійного аналізу диференціальних рівнянь.

4 етап (2028): розв'язки нелінійних моделей математичної фізики; нові методи побудови реалізацій, контракцій та інваріантів алгебр Лі.

5 етап (2029): нові алгебраїчні та аналітичні методи аналізу та побудови розв'язків рівнянь математичної фізики

11. Перелік науково-технічної та іншої документації, що надається по завершенню роботи

Остаточний звіт за темою та комплект документів відповідно до вимог, встановлених у НАН України.

Науковий керівник роботи

Завідувач відділу
Інституту математики НАН України
д.ф.-м.н., с.н.с.

(підпис) Вячеслав БОЙКО

Планова калькуляція кошторисної вартості наукової (науково-технічної) роботи

**«Групова класифікація та розв'язки моделей математичної фізики»
на 2025 рік**

Термін виконання роботи: початок — 01.01.2025 р., закінчення — 31.12.2029 р.

№ з/п	Найменування статей витрат	КЕКВ	Сума, тис. грн.
1	Заробітна плата	2111	6454,051
2	Нарахування на оплату праці	2120	1419,892
3	Предмети, матеріали, обладнання та інвентар	2210	19,554
4	Медикаменти та перев'язувальні матеріали	2220	0,000
5	Оплата послуг (крім комунальних)	2240	15,553
6	Видатки на відрядження	2250	0,000
7	Оплата теплопостачання	2271	61,258
8	Оплата водопостачання та водовідведення	2272	3,182
9	Оплата електроенергії	2273	27,290
10	Оплата природного газу	2274	0,000
11	Оплата інших енергоносіїв та інших комунальних послуг	2275	2,220
12	Дослідження і розробки, окремі заходи розвитку по реалізації державних (регіональних) програм	2281	0,000
13	Інші поточні видатки	2800	0,000
14	Придбання обладнання і предметів довгострокового користування	3110	0,000
15	Капітальний ремонт інших об'єктів	3132	0,000
16	Реконструкція та реставрація інших об'єктів	3142	0,000
17	Реставрація пам'яток культури, історії та архітектури	3143	0,000
Разом:			8003,000
в т.ч. накладні витрати			752,974
% їх до основної заробітної плати			12,67%

УСТАНОВА-ВИКОНАВЕЦЬ:

Заступник директора з наукової роботи
Інституту математики НАН України
д.ф.-м.н., с.н.с.

_____Віталій ВАСИЛИК
(підпис)

М.П.

Науковий керівник роботи
Завідувач відділу
Інституту математики НАН України
д.ф.-м.н., с.н.с.

_____Вячеслав БОЙКО
(підпис)

Головний бухгалтер

_____Зінаїда ТАРНАВСЬКА
(підпис)