

УДК 517.95:517.958:517.928:512.81

УКПП

№ держреєстрації 0120U100173

Інв. №

Національна академія наук України

Інститут математики (ІМ)

01024, м. Київ, вул. Терещенківська, 3;

тел. (044) 234 51 50, факс (044) 235 20 10

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор Інституту математики

НАН України

академік НАН України

_____ Олександр ТИМОХА

3 грудня 2024 р.

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

СИМЕТРІЯ ТА ІНТЕГРОВНІСТЬ РІВНЯНЬ СУЧАСНОЇ

МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

(остаточний)

Науковий керівник НДР

член-кореспондент НАН України,

доктор фіз.-мат. наук, професор

_____ Анатолій НІКІТІН

3 грудня 2024 р.

2024

Рукопис закінчено 3 грудня 2024 р.

Результати роботи розглянуто Вченою радою Інституту математики НАН України,

протокол від 3 грудня 2024 р. № 13

Список авторів

Керівник НДР,
чл.-кор. НАН України,
д-р фіз.-мат. наук,
гол. наук. співроб.

А.Г. Нікітін
3 грудня 2024 р. (реферат; розділ [1](#); висновки)

Відповідальні виконавці:
д-р фіз.-мат. наук,
зав. відділу

В.М. Бойко
3 грудня 2024 р. (вступ; розділи [2](#), [4](#); висновки)

чл.-кор. НАН України,
д-р фіз.-мат. наук,
пров. наук. співроб.

О.О. Ванєєва
3 грудня 2024 р. (розділи [5](#), [6](#))

д-р фіз.-мат. наук,
пров. наук. співроб.

В.Д. Кошманенко
3 грудня 2024 р. (розділ [20](#))

д-р фіз.-мат. наук,
пров. наук. співроб.

Р.О. Попович
3 грудня 2024 р. (розділи [2](#), [3](#), [4](#), [6](#))

д-р фіз.-мат. наук,
гол. наук. співроб.

О.Л. Ребенко
3 грудня 2024 р. (розділ [16](#))

д-р фіз.-мат. наук,
пров. наук. співроб.

Р.М. Черніга
3 грудня 2024 р. (розділи [7](#), [8](#), [9](#))

Виконавці:

д-р фіз.-мат. наук,
пров. наук. співроб.

Н.В. Зорій
3 грудня 2024 р. (розділ [18](#))

д-р фіз.-мат. наук, пров. наук. співроб.	_____	М.О. Нестеренко
	3 грудня 2024 р.	(розділи 12 , 13)
чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, гол. наук. співроб.	_____	В.Г. Самойленко
	3 грудня 2024 р.	(розділ 17)
д-р фіз.-мат. наук, пров. наук. співроб.	_____	В.І. Скрипник
	3 грудня 2024 р.	(розділ 19)
д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.	_____	І.А. Єгорченко
	3 грудня 2024 р.	(розділ 10)
канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.	_____	О.Ю. Жалій
	3 грудня 2024 р.	(розділ 5)
канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.	_____	С.В. Спічак
	3 грудня 2024 р.	(розділ 11)
канд. фіз.-мат. наук, наук. співроб.	_____	В.В. Давидович
	3 грудня 2024 р.	(розділи 7 , 8 , 9)
канд. фіз.-мат. наук, мол. наук. співроб.	_____	Д.Р. Попович
	3 грудня 2024 р.	(розділ 14)
д-р філософії, мол. наук. співроб.	_____	О.В. Локазюк
	3 грудня 2024 р.	(розділ 4)
д-р філософії, мол. наук. співроб.	_____	О.Р. Сатур
	3 грудня 2024 р.	(розділ 21)

д-р філософії,
мол. наук. співроб.

3 грудня 2024 р.

Є.Ю. Чаповський
(розділ 15)

аспірант

3 грудня 2024 р.

К.О. Антошина

аспірант

3 грудня 2024 р.

О.О. Вінніченко
(розділ 2)

аспірант

3 грудня 2024 р.

О.А. Волошин

аспірант

3 грудня 2024 р.

С.Д. Коваль
(розділ 3)

аспірант

3 грудня 2024 р.

М.С. Старий

гол. інженер

3 грудня 2024 р.

Т.В. Каратаєва
(розділ 20)

інженер-програміст

3 грудня 2024 р.

О.В. Мочук

пров. інженер

3 грудня 2024 р.

Г.Б. Посенко

гол. інженер-програміст

3 грудня 2024 р.

Е.Є. фон Діхтер

РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 322 с., 21 розділ, 13 табл., 15 рис., 106 джерел.

СИМЕТРИЯ, ИНТЕГРОВАННОСТЬ, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ, НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ, АЛГЕБРЫ И ГРУППЫ ЛИ.

Объект исследования — нелинейные модели математической физики.

Мета роботи — створення й обґрунтування нових методів дослідження різних типів симетрій рівнянь сучасної математичної фізики, їх застосування для побудови та аналізу моделей з фізично мотивованими групами симетрії, а також знаходження точних розв'язків деяких актуальних моделей математичної фізики.

Методи дослідження — сучасні методи математичної фізики та групового аналізу диференціальних рівнянь, теорії алгебр та груп Лі.

Звіт містить основні результати НДР та список наукових робіт опублікованих в рамках цієї НДР.

У результаті виконання НДР створено й обґрунтовано нові методи дослідження різних типів симетрій рівнянь сучасної математичної фізики, досліджено їх застосування для побудови та аналізу моделей з фізично мотивованими групами симетрії, виконано групову класифікацію та побудовано точні розв'язки деяких актуальних моделей математичної та теоретичної фізики, математичної біології. Отримані теоретичні результати використано у задачах математичного моделювання, метеорології, задачах шифрування інформації, розповсюдження та прогнозування інфекційних захворювань, задачах розпізнавання образів, при дослідженні динамічних систем конфлікту тощо.

Зміст

Вступ	11
1 Групова класифікація рівнянь Шредінгера зі скалярним і векторним потенціалом	13
1.1 Групова класифікація рівнянь Шредінгера–Паулі	13
1.2 Класифікація інтегровних та суперінтегровних гамільтонових моделей зі змінною масою	14
2 Симетрійний аналіз бездисперсійного рівняння Нижника	23
2.1 Псевдогрупи точкових і контактних симетрій бездисперсійного рівняння Нижника	24
2.2 Ліївські редукції та точні розв’язки бездисперсійного рівняння Нижника	30
3 Розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь	35
3.1 Розширений симетрійний аналіз чудового рівняння Фокера–Планка	35
3.2 Новий погляд на точкові симетрії рівняння теплопровідності	48
4 Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація диференціальних рівнянь	59
4.1 Групова класифікація $(1+1)$ -вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Гордона	59
4.2 Пониження порядку та інтегрування нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку	66
5 Точні розв’язки узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами	70

6	Алгебраїчний метод групової класифікації для ненормалізованих класів: нелінійні хвильові й еліптичні рівняння	74
6.1	Попереднє дослідження допустимих перетворень	77
6.2	Група еквівалентності й алгебра еквівалентності	79
6.3	Визначальні рівняння для пошуку ліївських симетрій	81
6.4	Результати класифікації	82
6.5	Групоїд еквівалентності і сингулярні розширення ліївської симетрії	87
6.6	Класифікація підходящих підалгебр	99
6.7	Регулярні розширення ліївської симетрії	104
6.8	Висновки	107
7	Симетрії Лі та точні розв'язки системи рівнянь реакції-дифузії з поперечною дифузією	109
7.1	Аналіз та вибір математичної моделі	109
7.2	Симетрії Лі системи (7.1)	110
7.3	Точні розв'язки системи (7.1)	114
8	Q-умовні симетрії та точні розв'язки нелінійної трикомпонентної системи еволюційних рівнянь	118
8.1	Опис моделі	118
8.2	Оператори Q -умовної симетрії	119
8.3	Побудова точних розв'язків та їх властивості	123
9	Q-умовні симетрії та точні розв'язки системи Шігесади–Кавасакі–Терамото	129
9.1	Математична модель взаємодії двох видів	129
9.2	Q -умовні симетрії системи Шігесади–Кавасакі–Терамото .	130
9.3	Побудова точних розв'язків та їх інтерпретація	131
10	Умовна та прихована симетрія диференціальних рівнянь та класифікація відносних диференціальних інваріантів	142

11 Групова класифікація та точні розв'язки диференціальних рівнянь. Реалізації алгебр Лі	159
11.1 Групова класифікація $(2+1)$ -вимірних лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів та деякі фундаментальні розв'язки	159
11.2 Класифікація реалізацій алгебр Лі векторних полів на колі. Комбінаторні формули	167
12 Контракції реалізацій алгебр Лі	178
13 Застосування квазікристалів до обробки даних	182
13.1 Математичні компоненти	183
13.2 Процедура обробки даних	187
13.3 Побудова одновимірних квазікристалів	188
13.4 Застосування до растрових зображень	190
14 Ліівські ортогональні оператори	196
14.1 Елементарні властивості ліівські ортогональних операторів	197
14.2 Ліівські ортогональні автоморфізми	201
14.3 Ліівські ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі і алгебрах Лі з ненульовим фактором Леві	203
15 Централізатори лінійних і локально нільпотентних диференціювань	207
15.1 Лінійні диференціювання	208
15.2 Централізатор базисного диференціювання Вейтценбека	212
15.3 Централізатори локально нільпотентних диференціювань	219
16 Кореляційні функції нескінченних систем	222
16.1 Рівняння для кореляційних функцій кластерів	222
16.2 Формула для кількості діаграм-лісів	224
16.3 Комбінаторна тотожність	224
16.4 Операторний та аналітичний методи розв'язків рівнянь Кірквуда–Зальцбурга	225

16.5 Віріальні розклади кореляційних функцій канонічного ансамблю	227
17 Асимптотичні солітоноподібні розв’язки модифікованого рівняння Камасси–Холма зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням	230
18 Теорія вимітання мір Радона на локально компактному просторі та її застосування	237
18.1 Основні означення, позначення та постулати	237
18.2 Внутрішнє вимітання: існування та єдиність, альтернативні означення, теореми збіжності, елементарні властивості	239
18.3 Зовнішнє вимітання і його властивості	243
18.4 Застосування теорії вимітання до варіаційної задачі Гаусса	244
19 Періодична кулонівська динаміка трьох рівних негативних зарядів у полі шістьох рівних позитивних зарядів, зафіксованих у вершинах октаедра	251
19.1 Лінійна динаміка Кулона	253
19.2 Площинна динаміка Кулона	258
20 Динамічні системи конфлікту (ДСК) із зовнішньою допомогою	261
20.1 Постановка задачі	264
20.2 Введення зовнішнього впливу	265
20.3 Ефекти постійного зовнішнього впливу	269
20.4 Проблема існування компромісних станів	277
21 Аналіз поведінки траєкторій в моделях багатокомпонентних динамічних систем конфлікту	281
21.1 Залежність поведінки траєкторій динамічних систем конфлікту від вектора взаємодії	281

21.2 Збіжність до рівноважного атрактора у моделях динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією	287
Висновки	293
Перелік джерел посилання	309

Вступ

Групова класифікація диференціальних рівнянь, основи якої створив Софус Лі ще у позаминулому сторіччі, переживає зараз другу молодість. Кількість і географія публікацій з цієї тематики дає всі підстави говорити саме ці слова. Групова класифікація — це опис нееквівалентних класів рівнянь, що володіють лієвськими (узагальненими, умовними і т.п.) симетріями. І якщо знаходження симетрій фіксованого (нехай і дуже складного) рівняння є досить рутинною працею, то для то для досить широкого класу рівнянь доводиться робити дуже нетривіальні викладки, а часом по суті створювати нові методи. Цікавими і важливими задачами симетрійного аналізу є дослідження різних видів узагальненої симетрії. Сюди відносяться вищі симетрії, суперсиметрія, проблеми знаходження систем координат, в яких існують розв'язки з відокремленими змінними, тощо. Наприклад, при дослідженні систем, інтегровних за Ліувілем, дуже ефективними є саме методи вищих симетрій. Саме класифікація важливих для застосувань рівнянь математичної фізики є основною складовою частиною задач представлених у цьому звіті. За звітний період запропоновано ряд нових алгоритмів для дослідження симетрійних властивостей складних нелінійних диференціальних рівнянь і ефективних методів побудови їх точних розв'язків.

За звітний період дослідження в рамках НДР були зосереджені у основному на таких взаємопов'язаних напрямках:

- 1) класифікація інтегровних та суперінтегровних систем;
- 2) розвиток алгебраїчних методів групового аналізу, розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь, некласичні симетрії, групова класифікація диференціальних рівнянь, закони збереження;
- 3) контракції, реалізації та інваріанти алгебр Лі;
- 4) розвиток теорії потенціалу відносно загальних ядер;
- 5) дослідження складних динамічних систем конфліктів;

6) сучасна статистична механіка.

Дослідження, що виконувалися в рамках даної НДР були пов'язані з різноманітними методами дослідження модельних нелінійних систем сучасної математичної фізики, біології, соціології та економіки.

Протягом звітнього періоду в рамках даного проєкту виконавцями в вітчизняних та закордонних виданнях опубліковано 1 монографію та 95 наукових робіт, захищені 2 докторські дисертаційні роботи, 2 кандидатські дисертаційні роботи та 4 дисертації доктора філософії та 2 магістерські роботи.

Основні результати, що отримані в рамках даного проєкту, відображено нижче.

Ряд з одержаних результатів мають пріоритетний характер у світі. Результати НДР доповідались на багатьох міжнародних конференціях та семінарах.

1 Групова класифікація рівнянь Шредінгера зі скалярним і векторним потенціалом

1.1 Групова класифікація рівнянь Шредінгера–Паулі

Рівняння Шредінгера–Паулі для нейтральних частинок має наступний вигляд

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \Psi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.1)$$

де гамільтоніан H є диференціальним оператором другого порядку з матричним потенціалом:

$$H = \frac{1}{2} \pi_a \pi_a + A_0 + g \sigma_a H_a, \quad (1.2)$$

де $\pi_a = p_a - e A_a$, $p_a = -i \frac{\partial}{\partial x_a}$, A_0 та A_a є компонентами вектор-потенціалу зовнішнього електромагнітного поля, які є функціями від просторових координат, e та g є константами взаємодії,

$$H_a = \varepsilon_{abc} \frac{\partial A^c}{\partial x_b} \quad (1.3)$$

є компонентами вектора магнітного поля, σ_a — матриці Паулі.

У калібровці Кулона A_0 та A_a набувають вигляд

$$A_3 = 0, \quad A_1 = F_2(\mathbf{x}) + G_1(\mathbf{x}), \quad A_2 = -F_1(\mathbf{x}) + G_2(\mathbf{x}), \quad (1.4)$$

де $F_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\dots$, F є довільною функцією від $\mathbf{x}$, G є функцією від $\mathbf{x}$, яка задовольняє двовимірне рівняння Лапласа по змінним x_1 та x_2 .

Рівняння (1.1), (1.2) включає три довільних елемента, тобто функції V_0 , F і G , тому групова класифікація таких рівнянь є досить складною проблемою.

Генератор групи симетрії рівняння (1.1) шукаємо у вигляді

$$Q = \xi^0 \partial_t + \xi^a \partial_a + \tilde{\eta} \equiv \xi^0 \partial_t + \frac{1}{2} (\xi^a \partial_a + \partial_a \xi^a) + i \eta, \quad (1.5)$$

а відповідні визначальні рівняння набувають вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}^0 &= -a, & \xi_a^0 &= 0, & \xi_a^b + \xi_b^a - \frac{2}{3}\delta_{ab}\xi_i^i &= 0, \\ \xi_i^i &= -\frac{3}{2}\alpha, & \dot{\xi}^a + \eta_a &= 0, & \xi^a V_a &= \alpha V + \dot{\eta} + i[\eta, V],\end{aligned}\quad (1.6)$$

де $\dot{\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ та $\eta_a = \frac{\partial \eta}{\partial x_a}$.

Наведені визначальні рівняння є дуже і дуже складними. Нижче не будемо демонструвати процедуру знаходження їх загальних розв'язків, але наведемо отримані результати у вигляді таблиць 1.1 та 1.2, де $J_a = L_a + \frac{1}{2}\sigma_a$, $a = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}L_a &= \varepsilon_{abc}x_b p_c, & P_a &= p_a, & G_a &= tP_a - x_a, \\ D &= 2tP_0 - x_a p_a + 3i/2, & A &= tD - t^2 P_0 + r^2/2\end{aligned}$$

є генераторами групи симетрії вільного рівняння Шредінгера,

$$\begin{aligned}A^+(\omega) &= \exp(2\omega t)(P_0 + \omega^2 r^2 - \frac{\omega}{2}(x_a P_a + P_a x_a)), \\ B_a^\pm(\omega) &= \exp(\pm\omega t)(P_a \mp \omega x_a), & a &= 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Інші результати можна знайти у [36].

1.2 Класифікація інтегровних та суперінтегровних гамільтонових моделей зі змінною масою

Важливим узагальненням згаданих вище рівнянь є рівняння Шредінгера зі змінним параметром маси. Воно є необхідним елементом багатьох моделей теорії твердого тіла, напівпровідників, квантових точок, квантових дрітків та поверхонь і багатьох інших квантових об'єктів, тому аналіз таких рівнянь по визначенню має важливе прикладне значення. Таке дослідження є цікавим і з точки зору загальної теорії диференціальних рівнянь у викривленому просторі.

Досліджено і повністю описано важливий клас рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси, а саме, рівнянь що допускають інтеграли

Табл. 1.1: Генеруючі функції та симетрії, лінійні за часом t .

№	Функції F	Функції G	Потенціал A^0	Симетрії
1.	$F(x_1, x_2)$	$G(x_1, x_2)$	$R_0(x_1, x_2)$	P_3
2.	$F(\tilde{r}, x_3)$	$G(\tilde{r}, x_3)$	$R(\tilde{r}, x_3) + \kappa\varphi$	$J_3 + \kappa t$
3.	$F(\tilde{r}, \varphi - x_3)$	$G(\tilde{r}, \varphi - x_3)$	$R(\tilde{r}, \varphi - x_3) + \kappa\varphi$	$J_3 + \kappa t + P_3$
4.	$\tilde{F}(\tilde{r})$	$G(\tilde{r})$	$R(\tilde{r}) + \kappa\varphi$	$P_3, J_3 + \kappa t$
5.	0	$G(\tilde{r})$	$R(\tilde{r}) + \kappa\varphi$	$P_3, J_3 + \kappa t, G_3$
6.	0	$G(x_1, x_2)$	$R(x_1, x_2)$	P_3, G_3
7.	$x_1 F(x_3)$	$x_1 G(x_3)$	$R(x_3)$	P_1, P_2
8.	0	$G(\tilde{r})$	$R(\tilde{r})$	J_3, P_3, G_3
9.	0	$x_2 \Phi(x_3)$	$R(x_3)$	P_1, P_2, G_2
10.	0	$x_3 \varphi / r$	$R(r)$	$J_1 + \lambda(x_3^2 \partial_2 \varphi - x_1) / r,$ $J_2 - \lambda(x_3^2 \partial_1 \varphi - x_2) / r$
11.	$x_1 F(x_3) + \alpha x_1 x_2$	$x_1 G(x_3) + \alpha x_1^2$	$R(x_3)$	$P_1 + \alpha x_2, P_2 - \alpha x_1$
12.	$\nu x_1 \cos(x_3)$ $+ \alpha x_1 x_2$	αx_1^2 $-\nu x_1 \sin(x_3)$	$R(x_3)$	$P_1 + \alpha x_2,$ $P_2 - \alpha x_1, J_3 + P_3$
13.	$\alpha x_1 x_2$	αx_1^2	$R(x_3)$	$P_1 + \alpha x_2, Q, \tilde{Q}$ $P_2 - \alpha x_1, J_3$
14.	$\alpha x_1 x_2$	αx_1^2	0	$P_1 + \alpha x_2, P_2 - \alpha x_1,$ $P_3, G_3, J_3, Q, \tilde{Q}$

руху другого порядку (клас S_2). Для стандартного рівняння Шредінгера таку програму було реалізовано досить давно у класичних роботах канадського математика Вінтерніца та його співавторів та послідовників, які провели повну класифікацію таких рівнянь у двовимірному та тривимірному Евклідовому просторі. Класифікацію рівнянь Шредінгера зі змінним параметром маси класу S_2 вдалося провести тільки у двовимірному Евклідовому просторі. Щодо рівнянь класу S_2 у тривимірному просторі (які набагато більш цікаві з точки зору застосувань) відомі

Табл. 1.2: Генеруючі функції та симетрії, що включають дилатацію.

№	Функції F	Функції G	Потенціал A^0	Симетрії
1.	$F(r^{2\alpha}, r^\alpha e^{-\varphi})$ $+\tilde{F}(\theta, r^\alpha e^{-\varphi})$	$G(\theta, r^\alpha e^{-\varphi})$	$\frac{1}{r^2}R(\theta, r^\alpha e^{-\varphi})$	$D + \alpha J_3$
2.	$\frac{1}{\tilde{r}}\tilde{F}(\varphi)$	$G(\varphi)$	$\frac{1}{\tilde{r}^2}R(\varphi)$	D, P_3
3.	$F(\varphi, \theta)$	$G(\varphi, \theta)$	$\frac{1}{r^2}R(\varphi, \theta)$	A, D
4.	0	$\frac{\lambda}{r}x_3\varphi$	$\frac{\mu}{r^2}$	$\frac{\lambda}{r}(x_3^2\partial_2\varphi - x_1) + J_1,$ $\frac{\lambda}{r}(x_2 + x_3^2\partial_1\varphi) - J_2,$ D, A, J_3
5.	$F(\theta)$	$G(\theta)$	$\frac{1}{r^2}R(\theta)$	A, D, J_3
6.	0	$G(\tilde{r}^\alpha e^{-\varphi})$	$\frac{1}{r^2}R(\tilde{r}^\alpha e^{-\varphi})$	$D + \alpha L_3,$ P_3, G_3
7.	$F(\varphi)$	$G(\varphi)$	$\frac{1}{r^2}R(\varphi)$	$A, D,$ P_3, G_3
8.	0	$\lambda \frac{x_2}{x_3}$	$\frac{\mu}{x_3^2}$	$P_1, P_2, G_2,$ D, A

тільки окремі результати. Зокрема, відома класифікація так званих максимально суперінтегровних систем, які допускають чотири незалежних інтеграли руху.

Об'єктом наших досліджень був спеціальний клас рівнянь класу S_2 у тривимірному просторі, а саме, рівнянь, що володіють нетривіальною симетрією відносно неперервних груп перетворень. Як було показано у нашій тепер вже досить старій роботі [A.G. Nikitin T.M. Zasadko, *J. Math. Phys.* **56** (2015), 042101], існує шість класів таких рівнянь, що відповідають шести-, п'яти-, чотири-, три-, дво- та однопараметричним групам симетрії.

За звітний період було отримано повну класифікацію рівнянь Шредингера класу S_2 , у тривимірному просторі, які допускають трипараметричні чи двопараметричні групи симетрії [73, 74]. Знайдено широкий

клас рівнянь Шредінгера класу S_2 , у тривимірному просторі, які допускають однопараметричні групи симетрії, а саме, рівнянь, інваріантних відносно перетворень дилатації [51] та обертань відносно фіксованої осі [99]. Взагалі прокваліфіковано усі рівняння з таким типом симетрії, але частину отриманих результатів опубліковано тільки в препринтах, тому у цьому звіті про них не звітується. Результати, опубліковані у журнальних статтях, коротко викладено нижче.

Постановка задачі. Рівняння мають вигляд (1.1), де гамільтоніан має наступний узагальнений вигляд:

$$\hat{H} = \partial_a f(\mathbf{x}) p_a + V(\mathbf{x}). \quad (1.7)$$

У рівнянні (1.1) $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, $p_a = -i\partial_a$, а $V(\mathbf{x})$ та $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2m(\mathbf{x})}$ — невідомі функції від $\mathbf{x}$, які асоціюються з потенціалом та оберненою масою відповідно. По індексам, що повторюються (у нашому випадку це індекс a) вимагається сумування по значенням 1, 2, 3.

Заміни залежних та незалежних змінних називаються перетвореннями еквівалентності, якщо вони зберігають загальну форму рівняння (у нашому випадку рівняння (1.1)), але, можливо, міняють конкретні вирази довільних елементів (у нашому випадку функцій f та V). Сукупність перетворень еквівалентності має структуру групоїду, який може включати групи Лі.

У роботі [Nikitin A.G., Zasadko T.M., *J. Math. Phys.* **56** (2015), 042101] показано, що максимальною неперервною групою еквівалентності рівняння (1.1) є група $C(3)$, тобто група конформних перетворень тривимірного евклідова простору. Генератори цієї групи мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} P^a &= p^a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}, & L^a &= \varepsilon^{abc} x^b p^c, \\ D &= x_n p^n - \frac{3i}{2}, & K^a &= r^2 p^a - 2x^a D, \end{aligned} \quad (1.8)$$

де $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, $p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$. Відповідні групові перетворення зберігають загальну форму рівнянь (1.1), (1.7) з точністю до явних виразів

для f і V . Важливим випадком цих перетворень є інверсія:

$$x_a \rightarrow \tilde{x}_a = \frac{x_a}{x^2}, \quad \psi(\mathbf{x}) \rightarrow \tilde{x}^3 \psi(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (1.9)$$

під дією якої генератори (1.8) перетворюються наступним чином:

$$P_a \rightarrow K_a, \quad K_a \rightarrow P_a, \quad L_a \rightarrow L_a, \quad D \rightarrow D. \quad (1.10)$$

Визначені перетворення еквівалентності систематично використовувались як для спрощення розрахунків, так і для селекції саме нееквівалентних рівнянь та їх симетрій. Шукані інтеграли руху можна представити у наступній формі:

$$Q = \mu^{ab} \partial_a \partial_b + \xi^a \partial_a + \eta, \quad (1.11)$$

де $\mu^{ab} = \mu^{ba}$, ξ^a та η — невідомі функції від $\mathbf{x}$.

По визначенню, оператори Q повинні комутувати з $\hat{H}$:

$$[\hat{H}, Q] \equiv \hat{H}Q - Q\hat{H} = 0. \quad (1.12)$$

Умова (1.7) є операторним рівнянням, яке повинно виконуватись при дії операторів у правій та лівій частинах на довільну двічі інтегровну функцію. Обраховуючи комутатор і прирівнюючи коефіцієнти при однакових диференціалах, приходимо до наступної системи визначальних рівнянь:

$$5(\mu_c^{ab} + \mu_b^{ac} + \mu_a^{bc}) = \delta^{ab}(\mu_c^{nn} + 2\mu_n^{cn}) \quad (1.13)$$

$$+ \delta^{bc}(\mu_a^{nn} + 2\mu_n^{an}) + \delta^{ac}(\mu_b^{nn} + 2\mu_n^{bn}),$$

$$(\mu_a^{nn} + 2\mu_n^{na})f - 5\mu^{an}f_n = 0, \quad (1.14)$$

$$2f\eta_a + \xi_n^a f_n - \xi_n^a f_n + f\xi_{nn}^a + 2\mu^{an}V_n + \mu^{mn}f_{mnc} = 0, \quad (1.15)$$

$$(\mu_{nn}^{ab} + \xi_b^a + \xi_a^b)f + \mu_n^{ab}f_n - \mu^{na}f_{nb} - \mu^{nb}f_{na} - \delta^{ab}(\mu^{mn}f_{mn} + \xi^n f_n) = 0, \quad (1.16)$$

$$f(\mu_{nn}^{mm} + 2\xi_n^m) + (\mu_m^{nn} - 3\xi^m)f_m - 5\mu^{mn}f_{mn} = 0, \quad (1.17)$$

$$(f\eta_n)_n + \xi^n V_n + \mu^{mn}V_{mn} = 0, \quad (1.18)$$

де $f_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$, $\xi_n^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x_n}$, і так далі.

Щоб знайти усі гамільтоніани (1.7), що допускають інтеграли руху (1.11), необхідно знайти усі нееквівалентні розв'язки дуже складної системи рівнянь (1.13)–(1.18) для дванадцяти невідомих функцій μ^{ab} , ξ^a , η , f та V . На щастя, рівняння (1.16), (1.17) і (1.15) можна опустити, оскільки вони є диференціальними наслідками інших рівнянь, змінні ξ^a можна виключити, а функції μ^{ab} , що задовольняють автономну підсистему рівнянь (1.13), відомі — це компоненти конформного тензора Кіллінга, який є лінійною комбінацією наступних тензорів:

$$\begin{aligned}\mu_1^{ab} &= \lambda_1^{ab} + \delta^{ab} \frac{\lambda_1^{cd} x^c x^d}{x^2} \varphi_1(x), \\ \mu_2^{ab} &= \lambda_2^a x^b + \lambda_2^b x^a + \delta^{ab} \lambda_3^c x^c \varphi_2(x), \\ \mu_3^{ab} &= (\varepsilon^{acd} \lambda_3^{cb} + \varepsilon^{bcd} \lambda_3^{ca}) x^d, \\ \mu_4^{ab} &= (x^a \varepsilon^{bcd} + x^b \varepsilon^{acd}) x^c \lambda_4^d, \\ \mu_5^{ab} &= \delta^{ab} \varphi_5(x) + k(x^a x^b - \delta^{ab} x^2), \\ \mu_6^{ab} &= \lambda_6^{ab} x^2 - (x^2 \lambda^{bc} + x^b \lambda^{ac}) x^c + \delta^{ab} \lambda_7^{cd} x^c x^d \varphi_6(x), \\ \mu_7^{ab} &= (x^a \lambda_7^b + x^b \lambda_7^a) x^2 - 4x^a x^b \lambda_7^c x^c + \delta^{ab} \lambda_8^c x^c \varphi_7(x), \\ \mu_8^{ab} &= 2(x^a \varepsilon^{bcd} + x^b \varepsilon^{acd}) \lambda_8^{dn} x^c x^n - (\varepsilon^{ack} \lambda_8^{bk} + \varepsilon^{bck} \lambda_8^{ak}) x^c x^2, \\ \mu_9^{ab} &= \lambda_9^{ab} x^4 - 2(x^a \lambda_9^{bc} + x^b \lambda_9^{ac}) x^c x^2 \\ &\quad + (4x^a x^b + k \delta^{ab} x^2) \lambda_9^{cd} x^c x^d + \delta^{ab} \lambda_{10}^{cd} x^c x^d \varphi_9(x)\end{aligned}\tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}\mu_6^{ab} &= \lambda_6^{ab} x^2 - (x^2 \lambda^{bc} + x^b \lambda^{ac}) x^c + \delta^{ab} \lambda_7^{cd} x^c x^d \varphi_6(x), \\ \mu_7^{ab} &= (x^a \lambda_7^b + x^b \lambda_7^a) x^2 - 4x^a x^b \lambda_7^c x^c + \delta^{ab} \lambda_8^c x^c \varphi_7(x), \\ \mu_8^{ab} &= 2(x^a \varepsilon^{bcd} + x^b \varepsilon^{acd}) \lambda_8^{dn} x^c x^n - (\varepsilon^{ack} \lambda_8^{bk} + \varepsilon^{bck} \lambda_8^{ak}) x^c x^2, \\ \mu_9^{ab} &= \lambda_9^{ab} x^4 - 2(x^a \lambda_9^{bc} + x^b \lambda_9^{ac}) x^c x^2 \\ &\quad + (4x^a x^b + k \delta^{ab} x^2) \lambda_9^{cd} x^c x^d + \delta^{ab} \lambda_{10}^{cd} x^c x^d \varphi_9(x)\end{aligned}\tag{1.20}$$

де $\lambda_n^{ab} = \lambda_n^{ba}$ та λ_n^a — це довільні параметри, а $\varphi_1, \dots, \varphi_9$ — довільні функції від $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Таким чином, наша класифікаційна проблема зводиться до знаходження розв'язків рівнянь (1.14) та (1.18) для функцій f і V , де μ^{ab} є лінійною комбінацією функцій (1.19) та (1.20). Викликом є велика кількість довільних параметрів, яку необхідно редукувати з використанням перетворень еквівалентності.

Класифікація рівнянь класу S_2 , що допускають трипараметричні групи симетрії. У роботі [Nikitin A.G., Zasadko T.M., *J. Math. Phys.* **56** (2015), 042101] було показано, що, з точністю до еквівалентно-

сті, існує три трипараметричні групи симетрії, які можуть допускатися рівняннями (1.1), (1.7) для певних класів довільних елементів f та V . Такими групами є група обертань у тривимірному просторі $O(3)$, група Лоренца у $(1+2)$ -вимірному просторі $O(1, 2)$ та група Евкліда у двовимірному просторі $E(2)$. Відповідні довільні елементи f і V мають наступний вигляд:

$$f = F(r), \quad V = V(\tilde{r}), \quad (1.21)$$

$$f = r^2 F(\theta), \quad V = G(\theta) \quad (1.22)$$

та

$$f = F(x_3), \quad V = G(x_3), \quad (1.23)$$

відповідно, де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, φ та θ — кути Ейлера. Таким чином, проблема класифікації рівнянь класу S_2 зводиться до знаходження загальних розв'язків рівнянь (1.14) та (1.18) для функцій f і V , заданих формулами (1.21)–(1.23).

Згадану проблему було повністю розв'язано у роботі [74]. Відповідні розв'язки для довільних елементів (1.21) наведено у таблиці 1.3. Класифікаційні таблиці для довільних елементів, що мають форми (1.22) чи (1.23), можуть бути знайдені у роботі [74].

Класифікація рівнянь класу S_2 , що допускають двопараметричні групи симетрії. У роботі [Nikitin A.G., Zasadko T.M., *J. Math. Phys.* **56** (2015), 042101] було показано, що, з точністю до еквівалентності, існує шість трипараметричних груп симетрії, які можуть допускатися рівняннями (1.1), (1.7) для певних класів довільних елементів f та V . Такі групи включають наступні перетворення:

- дилатація та зсув;
- обертання навколо фіксованої осі та зсув вздовж цієї осі;
- обертання навколо фіксованої осі та дилатація;

Табл. 1.3: Обернені маси та потенціали для рівнянь класу S_2 , що допускають алгебру $\mathfrak{so}(3)$.

№	f	V	Інтеграли руху
1.	$(\mu r^2 - \nu)^2$	$\frac{\alpha(\mu r^2 + \nu)}{r}$	$Q_a = \varepsilon_{abc} \{(\nu P_b + \mu K_b), L_c\} + \frac{x_a(\alpha - 6r)}{r}$
2.	$\frac{r(\mu r^2 - \nu)^2}{\kappa r - 2(\mu r^2 + \nu)}$	$\frac{\alpha r}{\kappa r - 2(\mu r^2 + \nu)}$	$Q_a = \varepsilon_{abc} \{(\nu P_b + \mu K_b), L_c\} - \left(\frac{x_a}{r} \cdot H\right) - \frac{\alpha x_a}{2(\mu r^2 + \nu) - \kappa r} - 6x_a$
3.	$(\mu \tilde{\mu} x^4 - \nu \tilde{\nu})^2$	$\frac{\alpha r^2}{(\mu \tilde{\mu} r^2 + \nu \tilde{\nu})^2}$	$Q_{ab} = \{\mu K_a + \nu P_a, \tilde{\mu} K_b + \tilde{\nu} P_b\} + 6\mu \tilde{\mu} (5x_a x_b - \delta^{ab} r^2) + \frac{2\alpha x^a x^b}{(\mu \tilde{\mu} x^2 + \nu \tilde{\nu})}$
4.	$\frac{(\mu r^4 - \nu)^2}{r^2}$	$\frac{\alpha(\mu r^4 + \nu)}{r^2}$	$Q_{ab} = \frac{\mu}{2} \{K_a, K_b\} + \nu P_a P_b - \left(\frac{x_a x_b \mu (r^4 + \nu)}{(\mu r^4 - \nu)^2} \cdot H\right) + 3\mu (5x_a x_b - \delta^{ab} r^2) - \frac{4\alpha r^2 x_a x_b}{(\mu r^4 - \nu)^2}$
5.	$\frac{(\mu r^4 - \nu)^2}{\mu r^4 + \kappa r^2 + \nu}$	$\frac{\alpha r^2}{\mu r^4 + \kappa r^2 + \nu}$	$Q_{ab} = \frac{\mu}{2} \{K_a, K_b\} + \nu P_a P_b - \left(\frac{x_a x_b r^2 \mu (\kappa r^2 + 4\nu)}{(\mu r^4 - \nu)^2} \cdot H\right) + 3\mu (5x_a x_b - \delta^{ab} r^2) - \frac{\alpha x_a x_b (\mu r^4 + \nu)}{(\mu r^4 - \nu)^2}$
6.	$(\mu x^4 - \nu)^2$	α	$\mu K_a + \nu P_a$

- обертання навколо фіксованої осі та суперпозиція зсуву й конформного перетворення на цій осі;
- зсув і суперпозиція зсуву та конформного перетворення на цій самій осі;
- два ортогональних зсуви.

Відповідні довільні елементи f і V мають наступний вигляд:

$$f = F(\tilde{r}), \quad V = V(\tilde{r}), \quad (1.24)$$

$$f = \tilde{r}^2 F(\theta), \quad V = G(\theta), \quad (1.25)$$

$$f = \tilde{r}^2 F\left(\frac{r^2 + 1}{\tilde{r}}\right), \quad V = G\left(\frac{r^2 + 1}{\tilde{r}}\right), \quad (1.26)$$

$$f = \tilde{r}^2 F(a \ln(\tilde{r}) + \varphi), \quad V = G(a \ln(\tilde{r}) + \varphi), \quad (1.27)$$

$$f = \tilde{r}^2 F(\varphi), \quad V = G(\varphi), \quad (1.28)$$

Табл. 1.4: Обернені маси та потенціали для рівнянь класу S_2 .

№	f	V	Інтеграли руху
1	$\frac{x_3^2 r^2}{\mu r^2 + \lambda x_3^2}$	$\frac{\alpha x_3^2 + \nu r^2}{\mu r^2 + \lambda x_3^2}$	$\{L_1, L_2\} + \left(\frac{2\mu x_1 x_2}{x_3^2} \cdot H\right) - \frac{2\nu x_1 x_2}{x_3^2},$ $\{P_1, K_2\} + \left(\frac{2\lambda x_1 x_2}{r^2} \cdot H\right) - \frac{2\alpha x_1 x_2}{r^2}$ $\{P_3, D\} + \left(\frac{\nu}{r} \cdot H\right) + \frac{\omega}{r},$
2	$\frac{r\tilde{r}^2}{\mu r + \nu x_3}$	$\frac{\alpha r + \omega x_3}{\mu r + \nu x_3}$	$\{D, (K_3 \pm P_3)\}$ $- \left(\frac{\nu(r^2 \mp 1)}{r} \cdot H\right) + \frac{\omega(r^2 \mp 1)}{r}$
3	$\frac{x_3^2 \tilde{r}^2}{\mu \tilde{r}^2 + \lambda x_3^2}$	$\frac{\alpha x_3^2 + \nu \tilde{r}^2}{\mu \tilde{r}^2 + \lambda x_3^2}$	$P_3^2 - \left(\frac{\mu}{x_3^2} \cdot H\right) + \frac{\nu}{x_3^2}$
4	$(r^2 \pm 1)^2 \mp 4x_3^2$	α	$\{(K_3 \pm P_3), (K_1 \mp P_1)\} + 30x_3 x_1$
5	r^2	α	$\{K_3, P_1\} + \left(\frac{x_3 x_1}{r^2} \cdot H\right)$
6	$\tilde{r}^2 F(\varphi)$	$F(\varphi)G(\varphi)$	$L_3^2 - \left(\frac{1}{F(\varphi)} \cdot H\right) + G(\varphi)$
7	$\frac{x_1^2 \tilde{r}}{\mu \tilde{r} + \nu x_2}$	$\frac{\alpha \tilde{r} + \kappa x_2}{\mu \tilde{r} + \nu x_2}$	$\{P_2, D\} + \{P_3, L_1\} + 2\left(\frac{\nu}{\tilde{r}} \cdot H\right) - 2\frac{\kappa}{\tilde{r}},$ $L_3^2 - \left(\frac{\tilde{r}(\mu \tilde{r} + \nu x_2)}{x_1^2} \cdot H\right) + \frac{\tilde{r}(\alpha \tilde{r} + \kappa x_2)}{x_1^2}$
8	$\tilde{r}^2 + \varepsilon x_1 \tilde{r},$ $\varepsilon = \pm 1$	$\frac{\mu x_1 + \nu \tilde{r}}{\tilde{r} - \varepsilon x_1}$	$\{P_2, D\} + \{P_3, L_1\} - 2\left(\frac{1}{\tilde{r}} \cdot H\right) - 2\frac{\mu}{\tilde{r}},$ $L_3^2 - \left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{r} + \varepsilon x_1} \cdot H\right) + \frac{(\mu x_1 + \nu \tilde{r})\tilde{r}}{x_2^2}$

$$f = F(x_3), \quad V = G(x_3), \quad (1.29)$$

де $\tilde{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, φ та θ — кути Ейлера.

Таким чином, проблема класифікації рівнянь класу S_2 зводиться до знаходження загальних розв'язків рівнянь (1.14) та (1.18) для функцій f і V , заданих формулами (1.24)–(1.29). Проблему було повністю розв'язано у роботі [73]. Відповідні розв'язки для довільних елементів (1.24) наведено у таблиці 1.4. Класифікаційні таблиці для довільних елементів, що мають форми (1.25)–(1.23) можуть бути знайдені у роботі [73].

2 Симетрійний аналіз бездисперсійного рівняння Нижника

Повні (псевдо)групи G точкових чи контактних симетрій системи $\mathcal{L}$ диференціальних рівнянь неможливо побудувати в рамках інфінітезимального підходу. Оскільки знаходження максимальної алгебри лівської інваріантності $\mathfrak{g}$ системи $\mathcal{L}$, а потім тотожній компонент G_{id} (псевдо)групи точкових симетрій G системи $\mathcal{L}$ є простішою проблемою, ніж знайти усю (псевдо)групу G , то останню задачу можна вважати еквівалентною побудові повного набору дискретних перетворень точкових симетрій системи $\mathcal{L}$, які є незалежними до композиції один з одним і з неперервними перетвореннями точкових симетрій системи $\mathcal{L}$.

Єдиним універсальним інструментом для вищевказаних процедур є прямий метод на основі визначення перетворення точкових симетрій і правила ланцюга. При цьому застосування прямого методу до системи $\mathcal{L}$ призводить до нелінійної перевизначеної системи рівнянь із частинними похідними для компонентів перетворення точкових симетрій, яку набагато складніше розв'язати, ніж її відповідник лівської симетрії. Складнішими та систематичнішими є методи на основі автоморфізмів чи мегаідеалів. Використовуючи останній метод у роботах [89, 103] здійснено симетрійний аналіз бездисперсійного відповідника

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y \quad (2.1)$$

(дійсного симетричного потенціального) рівняння Нижника для (дійсної) системи Нижника¹, який називають бездисперсійним рівнянням Нижника. Розглянуто його нелінійне представлення Лакса

$$v_t = \frac{1}{3} \left(v_x^3 - \frac{u_{xy}^3}{v_x^3} \right) + u_{xx}v_x - \frac{u_{xy}u_{yy}}{v_x}, \quad v_y = -\frac{u_{xy}}{v_x}, \quad (2.2)$$

¹Nizhnik L.P., Integration of multidimensional nonlinear equations by the inverse problem method, *Soviet Phys. Dokl.* **25** (1980), 706–708, Eq. (4)

та бездисперсійний відповідник

$$p_t = (h^1 p)_x + (h^2 p)_y, \quad h_y^1 = p_x, \quad h_x^2 = p_y \quad (2.3)$$

оригінальної симетричної системи Нижника.

У літературі рівняння (2.1) можна зустріти під такими назвами як бездисперсійне рівняння Нижника–Новікова–Веселова та бездисперсійне рівняння Новікова–Веселова. Також, були спроби дослідження цього рівняння, але вони безуспішні, тому було актуальним зробити симетрійний аналіз рівняння (2.1) правильно, з використанням широкого набору методів сучасного симетрійного аналізу диференціальних рівнянь математичної фізики.

2.1 Псевдогрупи точкових і контактних симетрій бездисперсійного рівняння Нижника

Максимальна (псевдо)алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ бездисперсійного рівняння Нижника (2.1) нескінченновимірною і є лінійною оболонкою векторних полів

$$\begin{aligned} D^t(\tau) &= \tau \partial_t + \frac{1}{3} \tau_t x \partial_x + \frac{1}{3} \tau_t y \partial_y - \frac{1}{18} \tau_{tt} (x^3 + y^3) \partial_u, \\ D^s &= x \partial_x + y \partial_y + 3u \partial_u, \\ P^x(\chi) &= \chi \partial_x - \frac{1}{2} \chi_t x^2 \partial_u, \quad P^y(\rho) = \rho \partial_y - \frac{1}{2} \rho_t y^2 \partial_u, \\ R^x(\alpha) &= \alpha x \partial_u, \quad R^y(\beta) = \beta y \partial_u, \quad Z(\sigma) = \sigma \partial_u, \end{aligned} \quad (2.4)$$

де τ , χ , ρ , α , β і σ пробігають множину гладких функцій від t . Також, (псевдо)алгебра контактної інваріантності $\mathfrak{g}_c$ рівняння (2.1) збігається з першим продовженням $\mathfrak{g}_{(1)}$ алгебри $\mathfrak{g}$. Перераховано алгебру $\mathfrak{g}$ і вперше обчислено максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_L$ нелінійного представлення Лакса (2.2) рівняння (2.1) і максимальну алгебру ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_{dN}$ бездисперсійної системи Нижника (2.3) за допомогою команди `Infinitesimals` вбудованого пакета `PDEtools` в `Maple` і пакетів `DESOLV` та `Jets` для `Maple`; останній пакет також використано для

обчислення (псевдо)алгебри $\mathfrak{g}_c$ і узагальнених симетрій рівняння (2.1) до п'ятого порядку.

Знайдено мегаідеали алгебри $\mathfrak{g}$, які використано для обчислення псевдогрупи точкових симетрій G рівняння (2.1). Єдиний мегаідеал, який є очевидним з огляду на комутаційні співвідношення між векторними полями (2.4), $\mathfrak{m}_1 := \mathfrak{g}' = \langle D^t(\tau), P^x(\chi), P^y(\rho), R^x(\alpha), R^y(\beta), Z(\sigma) \rangle$. Обчислення інших мегаідеалів здійснюється через радикал $\mathfrak{r}$ алгебри $\mathfrak{g}$ та з огляду на властивості мегаідеалів ²:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}_2 &:= \mathfrak{r} = \langle D^s, P^x(\chi), P^y(\rho), R^x(\alpha), R^y(\beta), Z(\sigma) \rangle \\ \mathfrak{m}_3 &:= \mathfrak{m}'_2 = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 = \langle P^x(\chi), P^y(\rho), R^x(\alpha), R^y(\beta), Z(\sigma) \rangle, \\ \mathfrak{m}_4 &:= \mathfrak{m}''_2 = \langle R^x(\alpha), R^y(\beta), Z(\sigma) \rangle, \quad \mathfrak{m}_5 := (\mathfrak{m}_3)^3 = \mathfrak{z}(\mathfrak{m}_3) = \{Z(\sigma)\}, \\ \mathfrak{m}_6 &:= \mathfrak{z}(\mathfrak{m}_1) = \langle Z(1) \rangle.\end{aligned}$$

Застосовуючи оригінальну версію алгебраїчного методу на основі мегаідеалів, представлено правильне та повне обчислення псевдогруп точкових та контактних симетрій бездисперсійного рівняння Нижника.

Теорема 2.1. *(i) Псевдогрупа точкових симетрій G бездисперсійного рівняння Нижника (2.1) породжена перетвореннями вигляду*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = CT_t^{1/3}x + X^0(t), \quad \tilde{y} = CT_t^{1/3}y + Y^0(t), \\ \tilde{u} &= C^3u - \frac{C^3T_{tt}}{18T_t}(x^3 + y^3) - \frac{C^2}{2T_t^{1/3}}(X_t^0x^2 + Y_t^0y^2) \\ &\quad + W^1(t)x + W^2(t)y + W^0(t)\end{aligned}\tag{2.5}$$

разом з перетворенням $\mathcal{J}: \tilde{t} = t, \tilde{x} = y, \tilde{y} = x, \tilde{u} = u$. Усі параметр-функції T, X^0, Y^0, W^0, W^1 і W^2 є довільними гладкими функціями від змінної t з $T_t \neq 0$, а C — довільна ненульова стала.

²Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E.M. and Popovych R.O., Algebraic method for finding equivalence groups, *J. Phys. Conf. Ser.* **621** (2015), 012001, arXiv:1503.06487.

Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O. and Lutfullin M.W., Realizations of real low-dimensional Lie algebras, *J. Phys. A* **36** (2003), 7337–7360, arXiv:math-ph/0301029.

(ii) Псевдогрупа G_c контактних симетрій бездисперсійного рівняння Нижника (2.1) збігається з першим продовженням $G_{(1)}$ псевдогрупи G .

Показано, що необхідна алгебраїчна умова $\Phi_*\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{g}$ повністю визначає точкову псевдогрупу симетрій бездисперсійного рівняння Нижника. Це дало перший приклад системи диференціальних рівнянь із такою властивістю в літературі. Кожне перетворення Φ із псевдогрупи точкових симетрій G бездисперсійного рівняння Нижника (2.1) можна представити у вигляді композиції перетворень із підгруп, кожна з яких параметризована одним функціональним або дискретним параметром.

Наслідок 2.1. *Тотожна компонента G_{id} псевдогрупи точкових симетрій G бездисперсійного рівняння Нижника (2.1) складається з перетворень виду (2.5) з $T_t > 0$ і $C > 0$. Повний список дискретних перетворень точкових симетрій рівняння (2.1), що є незалежними з точністю до композиції один з одним і перетвореннями з G_{id} , вичерпується трьома комутуючими інволюціями, які можна вибрати перестановкою $\mathcal{J}$ змінних x і y , $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) = (t, y, x, u)$, та двома перетвореннями $\mathcal{J}^i$ і $\mathcal{J}^s$, що чергують знаки (t, x, y) і (x, y, u) , відповідно, $\mathcal{J}^i: (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) = (-t, -x, -y, u)$, $\mathcal{J}^s: (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}) = (t, -x, -y, -u)$.*

Схожим шляхом псевдогрупи точкових симетрій побудовано і для нелінійного представлення Лакса (2.2) рівняння (2.1), і для бездисперсійної системи Нижника (2.3), чому відповідають наступні теореми та наслідки з них.

Теорема 2.2. *Псевдогрупа точкових симетрій G_L нелінійного представлення Лакса (2.2) породжена перетвореннями вигляду*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = A^{2/3}T_t^{1/3}x + X^0(t), \quad \tilde{y} = A^{2/3}T_t^{1/3}y + Y^0(t), \\ \tilde{u} &= A^2u - \frac{A^2T_{tt}}{18T_t}(x^3 + y^3) - \frac{A^{4/3}}{2T_t^{1/3}}(X_t^0x^2 + Y_t^0y^2)\end{aligned}$$

$$+ W^1(t)x + W^2(t)y + W^0(t),$$

$$\tilde{v} = Av + B$$

разом з перетворенням $\bar{\mathcal{J}}: \tilde{t} = t, \tilde{x} = y, \tilde{y} = x, \tilde{u} = u, \tilde{v} = v$. Усі параметр-функції T, X^0, Y^0, W^0, W^1 і W^2 є довільними гладкими функціями від змінної t з $T_t \neq 0$, а A і B — довільні сталі з $A \neq 0$.

Наслідок 2.2. Повний список дискретних перетворень точкових симетрій системи (2.2), що є незалежними з точністю до композиції один з одним і з неперервними перетвореннями точкових симетрій цієї системи, вичерпується трьома комутуючими інволюціями, які можна вибрати перестановкою $\bar{\mathcal{J}}$ змінних x і y , $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}) = (t, y, x, u, v)$, і двома перетвореннями $\bar{\mathcal{J}}^i$ і $\bar{\mathcal{J}}^v$, що чергують знаки (t, x, y) та v , відповідно, $\bar{\mathcal{J}}^i: (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}) = (-t, -x, -y, u, v)$, $\bar{\mathcal{J}}^v: (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u}, \tilde{v}) = (t, x, y, u, -v)$.

Теорема 2.3. Псевдогрупа точкових симетрій G_{dN} бездисперсійної системи Нижника (2.3) породжена перетвореннями вигляду

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = CT_t^{1/3}x + X^0(t), \quad \tilde{y} = CT_t^{1/3}y + Y^0(t), \quad \tilde{p} = \frac{C}{T_t^{2/3}}p, \\ \tilde{h}^1 &= \frac{C}{T_t^{2/3}}h^1 - \frac{CT_{tt}}{3T_t^{5/3}}x - \frac{X_t^0}{T_t}, \quad \tilde{h}^2 = \frac{C}{T_t^{2/3}}h^2 - \frac{CT_{tt}}{3T_t^{5/3}}y - \frac{Y_t^0}{T_t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

і перетворенням $\hat{\mathcal{J}}: \tilde{t} = t, \tilde{x} = y, \tilde{y} = x, \tilde{p} = p, \tilde{h}^1 = h^2, \tilde{h}^2 = h^1$. Параметр-функції T, X^0 і Y^0 — це довільні гладкі функції від t з $T_t \neq 0$, а C — довільна ненульова стала.

Наслідок 2.3. Повний список дискретних перетворень точкових симетрій системи (2.3), що є незалежними з точністю до композиції один з одним і з неперервними перетвореннями точкових симетрій цієї системи, вичерпується трьома комутуючими інволюціями, які можна вибрати перестановкою $\hat{\mathcal{J}}$ змінних x і y , і двома перетвореннями $\hat{\mathcal{J}}^i$ і $\hat{\mathcal{J}}^s$, що чергують знаки, відповідно,

$$\hat{\mathcal{J}}: (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{h}^1, \tilde{h}^2) = (t, y, x, p, h^2, h^1),$$

$$\hat{J}^i: (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{h}^1, \tilde{h}^2) = (-t, -x, -y, p, h^1, h^2),$$

$$\hat{J}^s: (\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{p}, \tilde{h}^1, \tilde{h}^2) = (t, -x, -y, -p, -h^1, -h^2).$$

Досліджено, чи підалгебри максимальної алгебри ліївської інваріантності бездисперсійного рівняння Нижника, які природним чином виникають у ході наведених обчислень, визначають дифеоморфізми, що стабілізують цю алгебру чи її перше продовження.

Означення 2.1. Власну підалгебру $\mathfrak{s}$ ліївської алгебри $\mathfrak{a}$ векторних полів названо *підалгеброю, що визначає дифеоморфізми, які стабілізують алгебру $\mathfrak{a}$* , якщо умови $\Phi_*\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ і $\Phi_*\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{a}$ для локальних дифеоморфізмів Φ у базовому просторі еквівалентні.

Теорема 2.4. Підалгебра $\mathfrak{s}_2 = \langle Z(1), Z(t), R^x(1), R^y(1), P^x(1), P^y(1), P^x(t), P^y(t), D^t(1), D^t(t) \rangle$ алгебри $\mathfrak{g}$ визначає дифеоморфізми, що стабілізують алгебру $\mathfrak{g}$, тоді як підалгебра $\mathfrak{s}_1 = \langle Z(1), Z(t), R^x(1), R^y(1), P^x(1), P^y(1), P^x(t), P^y(t), D^s \rangle$ і навіть підалгебра $\bar{\mathfrak{s}}_1 := \mathfrak{s}_1 + \langle D^t(1) \rangle$ не мають цієї властивості.

Теорема 2.5. Контактне перетворення Ψ з базовим простором $\mathbb{R}_{t,x,y}^3 \times \mathbb{R}_u$ задовольняє умову $\Psi_*\mathfrak{s}_{3(1)} \subseteq \mathfrak{g}_{(1)}$ для підалгебри $\mathfrak{s}_3 = \langle Z(1), Z(t), Z(t^2), R^x(1), R^y(1), R^x(t), R^y(t) \rangle$ алгебри $\mathfrak{g}$ тоді, якщо це перше продовження точкового перетворення у вищезгаданому просторі.

Наслідок 2.4. Перше продовження підалгебри $\mathfrak{s}_2 + \mathfrak{s}_3$, що є підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}_{(1)}$, визначає дифеоморфізми відповідного джетового простору першого порядку, що стабілізує алгебру $\mathfrak{g}_c$.

Знайдено набір геометричних властивостей бездисперсійного рівняння Нижника (2.1), який однозначно його визначає. Хоча максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ рівняння (2.1) повністю визначає псевдогрупу точкових симетрій G цього рівняння, вона не повністю визначає саме рівняння. Тим не менш, щоб виділити рівняння (2.1) з усієї системи диференціальних рівнянь третього порядку з трьома незалежними

змінними, достатньо доповнити $\mathfrak{g}$ -інваріантність декількома хорошими умовами.

Лема 2.1. *Диференціальне рівняння із частинними похідними порядку менше або дорівнює три з трьома незалежними змінними інваріантне відносно алгебри $\mathfrak{g}$ тоді і тільки тоді, коли воно має форму*

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y + u_{xy}u_{xyy}H\left(\frac{u_{xxx} - u_{yyy}}{u_{xyy}}, \frac{u_{xxy}}{u_{xyy}}\right), \quad (2.7)$$

де H — довільна гладка функція від своїх аргументів.

Простір локальних законів збереження бездисперсійного рівняння Нижника (2.1) є нескінченновимірним і найпростіші характеристики закону збереження цього рівняння 1 , u_{xx} та u_{yy} . Розглянуто коли рівняння вигляду (2.7) допускають ці характеристики закону збереження.

Лема 2.2. *(i) Рівняння вигляду (2.7) допускає характеристику закону збереження 1 і, таким чином, воно знаходить у збереженому вигляді тоді і тільки тоді, коли H — це афінна функція від (ω_1, ω_2) , тобто, $H = a\omega_1 + b\omega_2 + c$ для деяких сталих a, b, c і рівняння набуває вигляду*

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y + u_{xy}(a(u_{xxx} - u_{yyy}) + bu_{xxy} + cu_{xyy}). \quad (2.8)$$

(ii) Рівняння вигляду (2.8) допускає характеристику закону збереження u_{xx} або u_{yy} тоді і тільки тоді, коли $a = b = 0$ або $a = c = 0$, відповідно.

Лема 2.1 та 2.2 разом означають наступну теорему.

Теорема 2.6. *r -тий порядок ($r \in \{1, 2, 3\}$) диференціального рівняння із частинними похідними з трьома незалежними змінними допускає алгебру $\mathfrak{g}$ як свою алгебру лівської інваріантності і характеристики закону збереження 1 , u_{xx} і u_{yy} тоді і тільки тоді, коли воно збігається з бездисперсійним рівнянням Нижника (2.1).*

Наведені властивості рівняння (2.1) використано для побудови його точних розв'язків.

2.2 Ліівські редукції та точні розв'язки бездисперсійного рівняння Нижника

Для оптимального виконання повної ліівської редукції корозмірностей один та два бездисперсійного рівняння Нижника (2.1) вичерпно прокласифіковано одно- та двовимірні підалгебри максимальної алгебри ліівської інваріантності $\mathfrak{g}$ рівняння (2.1) та одновимірні підалгебри максимальної алгебри ліівської інваріантності $\mathfrak{g}_L$ системи (2.2) з точністю до G - та G_L -еквівалентності, відповідно. Класифікації одно- та двовимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_L$ до G_L -еквівалентності можуть бути легко виведені з відповідних класифікацій для алгебри $\mathfrak{g}$ до G -еквівалентності для випадку розмірності один.

Відповідні класифікації наведено у лемах нижче.

Лема 2.3. *Повний список G -нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ вичерпується такими сім'ями підалгебр:*

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{1.1}^\delta &= \langle D^t(1) + \delta D^s \rangle, & \mathfrak{s}_{1.2} &= \langle D^s \rangle, \\ \mathfrak{s}_{1.3}^\rho &= \langle P^x(1) + P^y(\rho) \rangle, & \mathfrak{s}_{1.4}^\beta &= \langle P^x(1) + R^y(\beta) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{1.5}^\beta &= \langle R^x(1) + R^y(\beta) \rangle, & \mathfrak{s}_{1.6} &= \langle Z(t) \rangle, & \mathfrak{s}_{1.7} &= \langle Z(1) \rangle,\end{aligned}$$

де $\delta \in \{0, 1\} \pmod{G}$, а ρ і β — множина гладких функцій від t з $\rho \neq 0$.

Лема 2.4. *Повний список G -нееквівалентних двовимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ вичерпується неабелевими алгебрами*

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{2.1}^\lambda &= \langle D^t(1), D^t(t) + \lambda D^s \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.2}^\nu &= \langle D^t(1), D^t(t) - \frac{1}{3}D^s + P^x(1) + P^y(\nu) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.3}^\nu &= \langle D^t(1), D^t(t) + \frac{1}{6}D^s + R^x(1) + R^y(\nu) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.4} &= \langle D^t(1), D^t(t) + Z(1) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.5}^{\lambda\mu} &= \langle D^t(1) + \lambda D^s, P^x(e^{(\lambda-1)t}) + \mu P^y(e^{(\lambda-1)t}) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.6}^{\lambda\delta} &= \langle D^t(1) + \lambda D^s, P^x(e^{(\lambda-1)t}) + \delta R^y(e^{(2\lambda-1)t}) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.7}^{\lambda\nu} &= \langle D^t(1) + \lambda D^s, R^x(e^{(2\lambda-1)t}) + \nu R^y(e^{(2\lambda-1)t}) \rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{2.8}^\lambda &= \langle D^t(1) + \lambda D^s, Z(e^{(3\lambda-1)t}) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.9}^{\tilde{\rho}} &= \langle D^s, P^x(1) + P^y(\tilde{\rho}) \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.10}^\beta = \langle D^s, R^x(1) + R^y(\beta) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.11} &= \langle D^s, Z(t) \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.12} = \langle D^s, Z(1) \rangle,\end{aligned}$$

і абелевими алгебрами

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{2.13} &= \langle D^t(1), D^s \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.14}^{\delta\nu\delta'} &= \langle D^t(1) + \delta D^s, P^x(e^{\delta t}) + \nu P^y(e^{\delta t}) + \delta' R^y(e^{2\delta t}) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.15}^{\delta\nu} &= \langle D^t(1) + \delta D^s, R^x(e^{2\delta t}) + \nu R^y(e^{2\delta t}) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.16}^\delta &= \langle D^t(1) + \delta D^s, Z(e^{3\delta t}) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.17}^{\rho\alpha\beta} &= \langle P^x(1) + R^y(\beta), P^y(\rho) + R^x(\rho\beta) \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.18}^{\rho\beta\sigma} &= \langle P^x(1) + P^y(\rho), -R^x(\rho\beta) + R^y(\beta) + Z(\sigma) \rangle_{(\beta,\sigma) \neq (0,0)}, \\ \mathfrak{s}_{2.19}^{\beta^1\beta^2} &= \langle P^x(1) + R^y(\beta^1), R^y(\beta^2) \rangle_{\beta^2 \neq 0}, \\ \mathfrak{s}_{2.20}^{\beta\sigma} &= \langle P^x(1) + R^y(\beta), Z(\sigma) \rangle_{\sigma \neq 0}, \\ \mathfrak{s}_{2.21}^{\alpha\beta^1\beta^2} &= \langle R^x(1) + R^y(\beta^1), R^x(\alpha) + R^y(\beta^2) \rangle_{\beta^2 \neq \alpha\beta^1}, \\ \mathfrak{s}_{2.22}^{\alpha\beta\sigma} &= \langle R^x(1) + R^y(\beta), R^x(\alpha) + R^y(\alpha\beta) + Z(\sigma) \rangle_{\alpha_t \neq 0}, \\ \mathfrak{s}_{2.23}^{\beta\sigma} &= \langle R^x(1) + R^y(\beta), Z(\sigma) \rangle_{\sigma \neq 0}, \quad \mathfrak{s}_{2.24}^\sigma = \langle Z(t), Z(\sigma) \rangle_{\sigma_{tt} \neq 0}, \\ \mathfrak{s}_{2.25}^\sigma &= \langle Z(1), Z(\sigma) \rangle_{\sigma_t \neq 0},\end{aligned}$$

де $\rho, \tilde{\rho}, \alpha, \beta, \beta^1, \beta^2$ і σ — множина гладких функцій від t з $\rho \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ і $\nu \in [-1, 1] \pmod{G}, \delta, \delta' \in \{0, 1\} \pmod{G}$, а також повинні виконуватися умови, зазначені після відповідних підалгебр.

Лема 2.5. Повний список G_L -нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_L$ вичерпується такими алгебрами:

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{s}}_{1.1}^{\delta\delta'} &= \langle \bar{D}^t(1) + \delta \bar{D}^s + \delta' \bar{P}^v \rangle_{\delta\delta'=0}, \quad \bar{\mathfrak{s}}_{1.2} = \langle \bar{D}^s \rangle, \\ \bar{\mathfrak{s}}_{1.3}^{\rho\delta} &= \langle \bar{P}^x(1) + \bar{P}^y(\rho) + \delta \bar{P}^v \rangle, \quad \bar{\mathfrak{s}}_{1.4}^{\beta\delta} = \langle \bar{P}^x(1) + \bar{R}^y(\beta) + \delta \bar{P}^v \rangle, \\ \bar{\mathfrak{s}}_{1.5}^{\beta\delta} &= \langle \bar{R}^x(1) + \bar{R}^y(\beta) + \delta \bar{P}^v \rangle, \\ \bar{\mathfrak{s}}_{1.6}^\delta &= \langle \bar{Z}(t) + \delta \bar{P}^v \rangle, \quad \bar{\mathfrak{s}}_{1.7}^\delta = \langle \bar{Z}(1) + \delta \bar{P}^v \rangle, \quad \bar{\mathfrak{s}}_{1.8} = \langle \bar{P}^v \rangle,\end{aligned}$$

де $\delta, \delta' \in \{0, 1\}$, а ρ і β — множина гладких функцій від t з $\rho \neq 0$.

Детально досліджено ліівські та точкові симетрії редукованих рівнянь, у тому числі проаналізовано, які з них відповідають прихованим симетріям вихідного рівняння. Вперше обчислено точкові групи симетрій редукованих рівнянь, зокрема тих, що не мають максимального рангу, включно з їх дискретними точковими симетріями.

Окремо виділено тривіальні розв'язки рівняння (2.1). Очевидно, що рівняння (2.1) тотожно виконується на множині розв'язків диференціального обмеження $u_{xy} = 0$, тобто на множині функцій (t, x, y) з адитивним розділенням змінних x і y . Іншими словами, рівняння (2.1) має розв'язки виду

$$\bullet \quad u = w(t, x) + \tilde{w}(t, y), \quad (2.9)$$

де w і $\tilde{w}$ є достатньо гладкими функціями своїх аргументів.

У сім'ї розв'язків (2.9), існує підсім'я розв'язків, що задовольняють диференціальні обмеження $u_{xy} = u_{xxxx} = u_{yyyy} = 0$ і $u_{xxx} = u_{yyy}$ а тому має форму

$$\begin{aligned} u = & W^5(t)(x^3 + y^3) + W^3(t)x^2 + W^4(t)y^2 \\ & + W^1(t)x + W^2(t)y + W^0(t), \end{aligned} \quad (2.10)$$

де коефіцієнти $W^0, \dots, W^5$ є довільними досить гладкими функціями від t . Розв'язки з підсім'ї (2.10) навіть тривіальніші, ніж загальні елементи сім'ї (2.9), оскільки кожен розв'язок вигляду (2.10) є G -еквівалентним постійному нульовому розв'язку $u = 0$.

Основним інструментом для знаходження розв'язків рівняння (2.1) була оптимізована процедура ліівської редукції, яку строго описано та належно обґрунтовано. Також, для знаходження точних розв'язків редукованих звичайних диференціальних рівнянь, за умови складної чи неможливої побудови навіть частинних розв'язків, використано відповідні редуковані системи для нелінійного представлення Лакса. Широка сім'я нових точних інваріантних розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника (2.1) побудовано в замкненій формі в термінах елементарних функцій,

функцій Ламберта та гіпергеометричних функцій, а також у параметричній або неявній формі. Нижче наведено деякі приклади розв'язків у цікавих формах.

$\mathfrak{s}_{2.5}^{\lambda\mu} = \langle D^t(1) + \lambda D^s, P^x(e^{(\lambda-1)t}) + \mu P^y(e^{(\lambda-1)t}) \rangle, \mu \neq 0, 1, |\mu| \leq 1$
(mod G):

- $$u = e^t \frac{\omega^3 + \varepsilon \sqrt{(\omega^2 + c_1)^3}}{12(\mu^3 - 1)} + \frac{x^3 + y^3}{9} + \frac{e^t \varepsilon c_1}{4(\mu^3 - 1)} \left(\omega \ln |\omega + \sqrt{\omega^2 + c_1}| - \sqrt{\omega^2 + c_1} \right),$$

де $\omega = e^{-t/3}(y - \mu x)$, $\varepsilon = \pm 1$, μ — довільні сталі з $\mu \neq 0, 1$, і $c_1 \in \{-1, 0, 1\}$ (mod $G_{2.5}$).

$\mathfrak{s}_{2.14}^{\delta\nu\delta'} = \langle D^t(1) + \delta D^s, P^x(e^{\delta t}) + \nu P^y(e^{\delta t}) + \delta' R^y(e^{2\delta t}) \rangle, \delta, \delta' \in \{0, 1\}, \nu \neq 0, 1, |\nu| \leq 1$ (mod G):

- $$u = \frac{(\nu^3 - 1)^2}{36} e^{3t} \left(\frac{z^3}{3} + \frac{3}{2} z^2 + 2z \right) - \frac{1}{6} (x^3 + y^3) - \frac{\nu^3 - 1}{2} e^t y^2,$$

де $z \in \{W_0(e^{\kappa\omega}), W_0(-e^{\kappa\omega}), W_{-1}(-e^{\kappa\omega})\}$ разом з $\omega := e^{-t}(y - \nu x)$ та W_0 і W_{-1} — головна і побічна дійсні гілки W -функції Ламберта, відповідно, а $\kappa := -3(\nu^3 - 1)^{-1}$.

$\mathfrak{s}_{2.1}^\lambda = \langle D^t(1), D^t(t) + \lambda D^s \rangle, \lambda \neq -1/3$:

- $$u = c_1(|x|^{3/2} + |y|^{3/2})^{4/3} + c_2(|y|^{3/2} - |x|^{3/2})^{4/3} \quad \text{для } xy \geq 0,$$
- $$u = c_1(x^3 - y^3)^{2/3} \cos \left(\frac{4}{3} \arctan \left| \frac{y}{x} \right|^{3/2} \right) + c_2(x^3 - y^3)^{2/3} \sin \left(\frac{4}{3} \arctan \left| \frac{y}{x} \right|^{3/2} \right) \quad \text{для } xy \leq 0,$$

де c_1 і c_2 — довільні сталі, а одна з них, якщо відмінна від нуля, може дорівнювати одиниці з точністю до G -еквівалентності.

- $$u = \sqrt{\left| \frac{y^3}{x} \right|} {}_3F_2 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{7}{6}, \frac{3}{2}; \frac{y^3}{x^3} \right),$$

де ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ — узагальнена гіпергеометрична функція.

Можливість побудови сімей розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника (2.1), що містять як інваріантні, так і неінваріантні розв'язки, продемонстровано через використання мультиплікативного розділення змінних x і y . Розв'язки представлені у вигляді $u = \varphi(t, x)\psi(t, y)$, де $\varphi_x \neq 0$ і $\psi_y \neq 0$. Після деяких алгебраїчних обрахунків отримано розв'язки:

- $u = \varphi(x)\psi(y),$

$$\int \frac{d\varphi}{(\varphi^3 + c_1\varphi + c_2)^{1/3}} = x, \quad \int \frac{d\psi}{(\psi^3 + c_3\psi + c_4)^{1/3}} = -y,$$
- $u = (|x|^{3/2} + \zeta(t))(|y|^{3/2} + \theta(t)),$
- $u = (x + \zeta(t))|y|^{3/2},$

де $c_i, i = 1, \dots, 4$ — довільні сталі, а ζ і θ — довільні достатньо гладкі функції від t .

Інші точні розв'язки бездисперсійного рівняння Нижника (2.1) та їх детальний опис наведено у роботі [103].

3 Розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь

3.1 Розширений симетрійний аналіз чудового рівняння Фокера–Планка

Серед $(1+2)$ -вимірних лінійних ультрапараболічних рівнянь другого порядку значну роль відіграють рівняння Фокера–Планка. Вони є потужними інструментами для адекватного моделювання широкого діапазону природних процесів, які передбачають розгляд флуктуацій величини під дією випадкового збурення. Оскільки наявність випадкового шуму є загальною характеристикою багатьох фізичних полів, рівняння Фокера–Планка набули великої популярності в прикладних науках. Проте теоретичні дослідження цих рівнянь також викликали жвавий інтерес, зокрема, в області групового аналізу диференціальних рівнянь.

Для рівнянь Фокера–Планка ліівські симетрії й інші пов'язані об'єкти, звичайно, найбільш вивчені у розмірності $1+1$. Ці дослідження розпочав сам Софус Лі в основоположній статті [Lie S., *Arch. for Math.* **6** (1881), 328–368] з групового аналізу більш широкого класу лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними з двома незалежними змінними, який включає $(1+1)$ -вимірні лінійні еволюційні рівняння другого порядку. Протягом останніх десятиліть було опубліковано низку робіт, які повторюють, уточнюють або розвивають наведений вище результат С. Лі, (див., наприклад, [Porovych R.O., Kunzinger M. and Ivanova N.M., *Acta Appl. Math.* **2** (2008), 113–185] для огляду цих статей і сучасного трактування проблеми).

Найбільш загальним виглядом $(1+2)$ -вимірних ультрапараболічних рівнянь Фокера–Планка є

$$\begin{aligned} u_t + B(t, x, y)u_y \\ = A^2(t, x, y)u_{xx} + A^1(t, x, y)u_x + A^0(t, x, y)u + C(t, x, y) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{з } A^2 \neq 0, \quad B_x \neq 0.$$

Клас цих рівнянь позначимо через $\bar{\mathcal{F}}$, де набір $\bar{\theta} := (B, A^2, A^1, A^0, C)$ довільних елементів класу $\bar{\mathcal{F}}$ пробігає множину розв'язків системи нерівностей $A^2 \neq 0$ та $B_x \neq 0$ без обмежень на A^0 , A^1 та C .

У роботі [70] проведено розширений симетрійний аналіз рівняння

$$u_t + xu_y = u_{xx}, \quad (3.2)$$

яке має найпростішу форму в класі $\bar{\mathcal{F}}$ і відповідає значенням довільних елементів $B = x$, $A^2 = 1$ і $A^1 = A^0 = C = 0$. Це рівняння виокремлюється в класі $\bar{\mathcal{F}}$ своїми чудовими симетрійними властивостями. Зокрема, його суттєва алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ є восьмивимірною, що є максимальною розмірністю для рівнянь із класу $\bar{\mathcal{F}}$. Крім того, це, з точністю до точкової еквівалентності, єдине рівняння в $\bar{\mathcal{F}}$, суттєва алгебра інваріантності Лі якого має цю розмірність. З цих причин рівняння (3.2) називається *чудовим рівнянням Фокера–Планка*. Дослідження рівняння (3.2) було розпочато Колмогоровим у 1934 році [Kolmogoroff A., *Ann. of Math. (2)* **35** (1934), 116–117.], тому його також часто називають рівнянням Колмогорова. Зокрема, він побудував фундаментальний розв'язок цього рівняння,

$$F(t, x, y, t', x', y') = \frac{\sqrt{3}H(t - t')}{2\pi(t - t')^2} \times \exp \left(-\frac{(x - x')^2}{4(t - t')} - \frac{3(y - y' - \frac{1}{2}(x + x')(t - t'))^2}{(t - t')^3} \right), \quad (3.3)$$

де H позначає ступінчасту функцію Гевісайда. З оглядом літератури щодо попередніх досліджень симетрійних властивостей рівняння (3.2) можна ознайомитись в [70].

3.1.1 Алгебра ліївської інваріантності

Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ рівняння (3.2) є лінійною оболонкою векторних полів

$$\mathcal{P}^t = \partial_t, \quad \mathcal{D} = 2t\partial_t + x\partial_x + 3y\partial_y - 2u\partial_u,$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &= t^2 \partial_t + (tx + 3y) \partial_x + 3ty \partial_y - (x^2 + 2t)u \partial_u, \\
\mathcal{P}^3 &= 3t^2 \partial_x + t^3 \partial_y + 3(y - tx)u \partial_u, \quad \mathcal{P}^2 = 2t \partial_x + t^2 \partial_y - xu \partial_u, \\
\mathcal{P}^1 &= \partial_x + t \partial_y, \quad \mathcal{P}^0 = \partial_y, \quad \mathcal{I} = u \partial_u, \quad \mathcal{Z}(f) = f(t, x, y) \partial_u,
\end{aligned}$$

де параметр-функція f від (t, x, y) пробігає множмеу розв'язків рівняння (3.2).

Векторні поля $\mathcal{Z}(f)$ утворюють нескінченновимірний абелевий ідеал $\mathfrak{g}^{\text{lin}}$ алгебри $\mathfrak{g}$, асоційований із лінійною суперпозицією розв'язків (3.2) $\mathfrak{g}^{\text{lin}} := \{\mathcal{Z}(f)\}$. Таким чином, алгебру $\mathfrak{g}$ можна представити у вигляді напівпрямої суми $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\text{ess}} \ltimes \mathfrak{g}^{\text{lin}}$, де

$$\mathfrak{g}^{\text{ess}} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{P}^3, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^0, \mathcal{I} \rangle \quad (3.4)$$

є (восьмимірною) підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}$, яка називається суттєвою алгеброю інваріантності Лі рівняння (3.2).

З точністю до антисиметричності дужки Лі, ненульові комутаційні співвідношення між базисними векторними полями $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ наступні:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{P}^t, \mathcal{D}] &= 2\mathcal{P}^t, \quad [\mathcal{P}^t, \mathcal{K}] = \mathcal{D}, \quad [\mathcal{D}, \mathcal{K}] = 2\mathcal{K}, \\
[\mathcal{P}^t, \mathcal{P}^3] &= 3\mathcal{P}^2, \quad [\mathcal{P}^t, \mathcal{P}^2] = 2\mathcal{P}^1, \quad [\mathcal{P}^t, \mathcal{P}^1] = \mathcal{P}^0, \\
[\mathcal{D}, \mathcal{P}^3] &= 3\mathcal{P}^3, \quad [\mathcal{D}, \mathcal{P}^2] = \mathcal{P}^2, \quad [\mathcal{D}, \mathcal{P}^1] = -\mathcal{P}^1, \quad [\mathcal{D}, \mathcal{P}^0] = -3\mathcal{P}^0, \\
[\mathcal{K}, \mathcal{P}^2] &= -\mathcal{P}^3, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{P}^1] = -2\mathcal{P}^2, \quad [\mathcal{K}, \mathcal{P}^0] = -3\mathcal{P}^1, \\
[\mathcal{P}^1, \mathcal{P}^2] &= -\mathcal{I}, \quad [\mathcal{P}^0, \mathcal{P}^3] = 3\mathcal{I}.
\end{aligned}$$

Алгебра $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ є нерозв'язною. Її розклад Леві визначається як $\mathfrak{g}^{\text{ess}} = \mathfrak{f} \ltimes \mathfrak{r}$, де радикал $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ збігається з нільрадикалом в алгебрі $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ і є лінійною оболонкою векторних полів $\mathcal{P}^3, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^0$ та $\mathcal{I}$. Фактор Леві $\mathfrak{f} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D}, \mathcal{K} \rangle$ алгебри $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ ізоморфний алгебрі $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, радикал $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ є ізоморфним алгебрі Гейзенберга рангу два $\mathfrak{h}(2, \mathbb{R})$, і дійсне зображення фактора Леві $\mathfrak{f}$ на радикалі $\mathfrak{r}$ збігається, в базисі $(\mathcal{P}^3, \mathcal{P}^2, \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^0, \mathcal{I})$, з дійсним зображенням $\rho_3 \oplus \rho_0$ алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Тут ρ_n — це стандартне

дійсне незвідне зображення $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ старшої ваги n у $(n + 1)$ -вимірному векторному просторі. Точніше,

$$\rho_n(\mathcal{P}^t)_{ij} = (n - j)\delta_{i,j+1}, \quad \rho_n(\mathcal{D})_{ij} = (n - 2j)\delta_{ij}, \quad \rho_n(-\mathcal{K})_{ij} = j\delta_{i+1,j},$$

де $i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а δ_{kl} — дельта Кронекера, тобто $\delta_{kl} = 1$, якщо $k = l$ і $\delta_{kl} = 0$ інакше, $k, l \in \mathbb{Z}$. Таким чином, уся алгебра $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ ізоморфна алгебрі $L_{8,19}$ з класифікації нерозкладних алгебр Лі до розмірності вісім з нетривіальними розкладами Леві, яка була проведена в [Turkowski P., *J. Math. Phys.* **29** (1988), 2139–2144].

3.1.2 Псевдогрупа точкових симетрій

Обчислення повної псевдогрупи точкових симетрій G рівняння (3.2) починаються з представлення вичерпного опису групоїда еквівалентності класу $\bar{\mathcal{F}}$. Потім спеціальні властивості цього групоїда використовуються для отримання явного представлення для елементів G .

Теорема 3.1. *Клас рівнянь $\bar{\mathcal{F}}$ є нормалізованим. Його звичайну псевдогрупу еквівалентності $G_{\bar{\mathcal{F}}}^{\sim}$ складають точкові перетворення з компонентами*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t, y), \quad \tilde{x} = X(t, x, y), \quad \tilde{y} = Y(t, y), \\ \tilde{u} &= U^1(t, x, y)u + U^0(t, x, y), \end{aligned} \tag{3.5a}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}^0 &= \frac{A^0}{T_t + BT_y} - \frac{A^1}{T_t + BT_y} \frac{U_x^1}{U^1} + \frac{A^2}{T_t + BT_y} \left(\left(\frac{U_x^1}{U^1} \right)^2 - \left(\frac{U_x^1}{U^1} \right)_x \right) \\ &\quad + \frac{1}{U^1} \frac{U_t^1 + BU_y^1}{T_t + BT_y}, \end{aligned} \tag{3.5б}$$

$$\tilde{A}^1 = A^1 \frac{X_x}{T_t + BT_y} - \frac{X_t + BX_y}{T_t + BT_y} + A^2 \frac{X_{xx} - 2X_x U_x^1 / U^1}{T_t + BT_y}, \tag{3.5в}$$

$$\tilde{A}^2 = A^2 \frac{X_x^2}{T_t + BT_y}, \quad \tilde{B} = \frac{Y_t + BY_y}{T_t + BT_y}, \tag{3.5г}$$

$$\tilde{C} = \frac{U^1}{T_t + BT_y} \left(C - E \frac{U^0}{U^1} \right), \tag{3.5д}$$

де T, X, Y, U^1 та U^0 є довільними гладкими функціями своїх аргументів з $(T_t Y_y - T_y Y_t) X_x U^1 \neq 0$, та $E := \partial_t + B \partial_y - A^2 \partial_{xx} - A^1 \partial_x - A^0$.

Нормалізація класу $\bar{\mathcal{F}}$ означає, що його групоїд еквівалентності збігається з групоїдом дії псевдогрупи $G_{\bar{\mathcal{F}}}$, і, таким чином, цей групоїд обов'язково містить вертексну групу кожного свого об'єкту. Цей факт є суттєвим для застосування прямого методу в обчисленні псевдогруп точкових симетрій диференціальних рівнянь з класу $\bar{\mathcal{F}}$.

Теорема 3.2. *Повна точкова псевдогрупа симетрії G чудового рівняння Фокера–Планка (3.2) складається з перетворень виду*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{\hat{x}}{\gamma t + \delta} - \frac{3\gamma \hat{y}}{(\gamma t + \delta)^2}, \quad \tilde{y} = \frac{\hat{y}}{(\gamma t + \delta)^3}, \\ \tilde{u} &= \sigma(\gamma t + \delta)^2 \exp \left(\frac{\gamma \hat{x}^2}{\gamma t + \delta} - \frac{3\gamma^2 \hat{x} \hat{y}}{(\gamma t + \delta)^2} + \frac{3\gamma^3 \hat{y}^2}{(\gamma t + \delta)^3} \right) \\ &\quad \times \exp \left(3\lambda_3(y - tx) - \lambda_2 x - (3\lambda_3^2 t^3 + 3\lambda_3 \lambda_2 t^2 + \lambda_2^2 t) \right) \\ &\quad \times (u + f(t, x, y)), \end{aligned} \quad (3.6)$$

де $\hat{x} := x + 3\lambda_3 t^2 + 2\lambda_2 t + \lambda_1$, $\hat{y} := y + \lambda_3 t^3 + \lambda_2 t^2 + \lambda_1 t + \lambda_0$; α, β, γ та δ — довільні константи, які задовольняють умові $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; $\lambda_0, \dots, \lambda_3$ та σ — довільні константи з $\sigma \neq 0$, і f є довільним розв'язком рівняння (3.2).

Модифікувавши композицію в псевдогрупі G шляхом продовження за неперервністю звичайної композиції перетворень до природної області визначення (див. деталі в [70]), можемо перейти до аналізу структури псевдогрупи G . Точкові перетворення форми

$$\mathcal{Z}(f): \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{u} = u + f(t, x, y),$$

де параметр-функція $f = f(t, x, y)$ є довільним розв'язком для рівняння (3.2), пов'язані з лінійної суперпозицією розв'язків цього рівняння і тому може вважатися тривіальним. Ці перетворення утворюють нормальну псевдопідгрупу G^{lin} псевдогрупи G . Псевдогрупа G розщеплюється на жд G^{lin} , $G = G^{\text{ess}} \ltimes G^{\text{lin}}$, де G^{ess} є підгрупою в G , що складається

з перетворень форми (3.6) з $f = 0$ і з їхніми природними областями визначення, отже, це восьмивимірна група Лі. Структура групи Лі G^{ess} є головною перевагою перевизначення композиції перетворення вище. Ми називаємо підгрупу G^{ess} *суттєвою групою точкових симетрій* рівняння (3.2).

В свою чергу, підгрупа G^{ess} розщеплюється над R , $G^{\text{ess}} = F \ltimes R$. Тут R і F — це відповідно нормальна підгрупа і підгрупа в G^{ess} , які виокремлюються обмеженнями $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$ та $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$, $\sigma = 1$. Вони ізоморфні групам $H(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$ і $SL(2, \mathbb{R})$, а їхні алгебри Лі збігаються з $\mathfrak{r} \simeq \mathfrak{h}(2, \mathbb{R})$ і $\mathfrak{f} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Тут $H(2, \mathbb{R})$ позначає дійсну групу Гейзенберга рангу два. Нормальні підгрупи R_c та R_d у R , ізоморфні $H(2, \mathbb{R})$ та $\mathbb{Z}_2$ складаються з елементів підгрупи R зі значеннями параметрів, що задовольняють обмеження $\sigma > 0$ і $\lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$, $\sigma \in \{-1, 1\}$ відповідно. Ізоморфізми F до $SL(2, \mathbb{R})$ та R_c до $H(2, \mathbb{R})$ встановлюються відповідностями:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{\alpha\delta-\beta\gamma=1} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

$$(\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_0, \sigma)_{\sigma>0} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3\lambda_3 & -\lambda_2 & \ln \sigma \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, F і R_c є зв'язними підгрупами в G^{ess} , але R_d — ні. Природня дія групи F на нормальній підгрупі R спряженнями визначається як $(\tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_0, \tilde{\sigma}) = (\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_0, \sigma) A$ в параметризації (3.6) для G , де $A = \varrho_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \oplus (1)$, а ϱ_3 — стандартне дійсне незвідне чотиривимірне представлення $SL(2, \mathbb{R})$, яке можна ототожнити з дією $SL(2, \mathbb{R})$ на

бінарних кубиках,

$$\varrho_3: (\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{\alpha\delta - \beta\gamma = 1} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^3 & 3\alpha^2\beta & 3\alpha\beta^2 & \beta^3 \\ \alpha^2\gamma & 2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta & 2\alpha\beta\delta + \beta^2\gamma & \beta^2\delta \\ \alpha\gamma^2 & 2\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2 & 2\beta\gamma\delta + \alpha\delta^2 & \beta\delta^2 \\ \gamma^3 & 3\gamma^2\delta & 3\gamma\delta^2 & \delta^3 \end{pmatrix}.$$

Підсумовуючи, група G^{ess} ізоморфна $(\text{SL}(2, \mathbb{R}) \ltimes_{\varphi} \text{H}(2, \mathbb{R})) \times \mathbb{Z}_2$, де антигомоморфізм $\varphi: \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\text{H}(2, \mathbb{R}))$ визначається, в обраних локальних координатах,

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_0, \sigma) \mapsto (\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1, \lambda_0, \sigma)A.$$

Наслідок 3.1. *Повний список дискретних точкових перетворень симетрії чудового рівняння Фокера–Планка (3.2), незалежних відносно композиції одне з одним і з неперервними точковими перетвореннями симетрії цього рівняння, вичерпується однією інволюцією $\mathcal{I}'$ заміни знака u ,*

$$\mathcal{I}': (t, x, y, u) \mapsto (t, x, y, -u).$$

Таким чином, факторгрупа повної псевдогрупи точкових симетрій G відносно її тотожньої компоненти ізоморфний $\mathbb{Z}_2$.

3.1.3 Класифікація підалгебр

Щоб оптимально провести редукції Лі корозмірності один і два для рівняння (3.2), необхідно класифікувати одно- та двовимірні підалгебри алгебри $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ з точністю до G^{ess} -еквівалентності. Під час цієї класифікації використано розклад Леві $\mathfrak{g}^{\text{ess}} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{t}$ і той факт що фактор Леві $\mathfrak{f}$ ізоморфний алгебрі $\text{sl}(2, \mathbb{R})$. Це дозволяє нам застосувати техніку класифікації підалгебр алгебри з власним ідеалом, запропоновану в [Patera J., Winternitz P. and Zassenhaus H., *J. Math. Phys.* **16** (1975), 1597–1614.]. Ця техніка стає простішою, якщо алгебру, що розглядається, можна представити як напівпрямую суму підалгебри та ідеалу, якими є $\mathfrak{f}$ і $\mathfrak{t}$ для алге-

бри $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ відповідно. Додаткове спрощення полягає в тому, що оптимальний список підалгебр алгебри Лі $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ добре відомий.

Лема 3.1. *Повний список G^{ess} -нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ вичерпується підалгебрами*

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{1.1} &= \langle \mathcal{P}^t + \mathcal{P}^3 \rangle, \quad \mathfrak{s}_{1.2}^\delta = \langle \mathcal{P}^t + \delta \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{1.3}^\nu = \langle \mathcal{D} + \nu \mathcal{I} \rangle, \\ \mathfrak{s}_{1.4}^\mu &= \langle \mathcal{P}^t + \mathcal{K} + \mu \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{1.5}^\varepsilon = \langle \mathcal{P}^2 + \varepsilon \mathcal{P}^0 \rangle, \\ \mathfrak{s}_{1.6} &= \langle \mathcal{P}^1 \rangle, \quad \mathfrak{s}_{1.7} = \langle \mathcal{P}^0 \rangle, \quad \mathfrak{s}_{1.8} = \langle \mathcal{I} \rangle,\end{aligned}$$

де $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\delta \in \{-1, 0, 1\}$, μ і ν є довільними дійсними константами з $\nu \geq 0$.

Лема 3.2. *Повний список G^{ess} -нееквівалентних двовимірних підалгебр $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ задається підалгебрами*

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}_{2.1}^\mu &= \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D} + \mu \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.2}^\delta = \langle \mathcal{P}^t + \delta \mathcal{I}, \mathcal{P}^0 \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.3} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^0 + \mathcal{I} \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.4}^\mu &= \langle \mathcal{D} + \mu \mathcal{I}, \mathcal{P}^1 \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.5}^\mu = \langle \mathcal{D} + \mu \mathcal{I}, \mathcal{P}^0 \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.6} &= \langle \mathcal{P}^0, \mathcal{P}^1 \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.7} = \langle \mathcal{P}^0, \mathcal{P}^2 \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.8}^\varepsilon = \langle \mathcal{P}^1, \mathcal{P}^3 + \varepsilon \mathcal{P}^0 \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.9} &= \langle \mathcal{P}^t + \mathcal{P}^3, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.10}^\delta = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.11} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.12} &= \langle \mathcal{P}^t + \mathcal{K}, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.13}^\varepsilon = \langle \mathcal{P}^2 + \varepsilon \mathcal{P}^0, \mathcal{I} \rangle, \\ \mathfrak{s}_{2.14} &= \langle \mathcal{P}^1, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.15} = \langle \mathcal{P}^0, \mathcal{I} \rangle,\end{aligned}$$

де $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\delta \in \{-1, 0, 1\}$, а μ — довільна дійсна константа.

3.1.4 Лівські редукції та точні розв'язки

Класифікація лівських редукцій рівняння (3.2) до диференціальних рівнянь із частинними похідними з двома незалежними змінними ґрунтується на класифікації одновимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$, яка наведена в лемі 3.1. У таблиці 3.1 для кожної з підалгебр, перелічених у лемі, представлено відповідний анзац для u та відповідне редуковане рівняння. У цьому розділі індекси 1 і 2 функцій, що залежать від (z_1, z_2) ,

позначають похідні відносно z_1 і z_2 відповідно. У цьому розділі ми позначаємо редукції Лі та всі пов'язані з ними об'єкти комплексними мітками $d.i^*$, де d , i та $*$ — розмірність відповідної підалгебри, її номер у списку d -вимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$, яка наведена в лемі 3.1 для $d = 1$ або в лемі 3.2 для $d = 2$, і список параметрів підалгебри для сімейства підалгебр відповідно. Верхній індекс у мітці пропущено, якщо він не є суттєвим.

Табл. 3.1: G -нееквівалентні ліівські редукції корозмірності один

но.	u	z_1	z_2	Reduced equation
1.1	$e^{\frac{3}{10}t(t^4-5tx+10y)}w$	$y - \frac{1}{4}t^4$	$x - t^3$	$z_2w_1 = w_{22} - 3z_1w$
1.2 $^\delta$	$e^{\delta t}w$	y	x	$z_2w_1 = w_{22} - \delta w$
1.3 $^\nu$	$ t ^{\frac{1}{2}\nu-1}w$	$ t ^{-\frac{3}{2}}y$	$ t ^{-\frac{1}{2}}x$	$(2z_2 - 3\varepsilon'z_1)w_1 = 2w_{22}$ $+ \varepsilon'z_2w_2 - \varepsilon'(\nu-2)w$
1.4 $^\mu$	$\frac{e^{-\psi(t,x,y,\mu)}}{t^2+1}w$	$\frac{y}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{(t^2+1)x-3ty}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$	$z_2w_1 = 3z_1w_2 + w_{22} + (z_2^2 + \mu)w$
1.5 $^\varepsilon$	$ t ^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\varepsilon^2}{4t}}w$	$\frac{1}{3}t^3 + 2\varepsilon t - t^{-1}$	$2y - (t + \varepsilon t^{-1})x$	$w_1 = w_{22}$
1.6	w	$\frac{1}{3}t^3$	$y - tx$	$w_1 = w_{22}$
1.7	w	t	x	$w_1 = w_{22}$

Тут $\varepsilon' := \text{sgn } t$, $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $\delta \in \{-1, 0, 1\}$, $w = w(z_1, z_2)$ — нова невідома функція від нових незалежних змінних (z_1, z_2) , і

$$\psi(t, x, y, \mu) = \frac{3t^3y^2 + t(2x(t^2+1) - 3ty)^2}{4(t^2+1)^3} + \mu \arctan t.$$

Використовуючи точкові перетворення, ми можемо далі відображати редуковані рівняння 1.1–1.4 до $(1+1)$ -вимірних лінійних рівнянь теплопровідності з потенціалами, які мають загальну форму $w_1 = w_{22} + Vw$, де V є довільною функцією (z_1, z_2) . Ці перетворення і відображені рівняння записано нижче.

$$1.1. \quad \tilde{z}_1 = \frac{9}{4}\tilde{\varepsilon}z_1, \quad \tilde{z}_2 = |z_2|^{\frac{3}{2}}, \quad \tilde{w} = |z_2|^{\frac{1}{4}}w \quad \text{з} \quad \tilde{\varepsilon} := \text{sgn } z_2: \quad \tilde{w}_1 = \tilde{w}_{22} + \left(\frac{5}{36}\tilde{z}_2^{-2} - \frac{16}{27}\tilde{\varepsilon}\tilde{z}_1\tilde{z}_2^{-\frac{2}{3}}\right)\tilde{w};$$

$$1.2^\delta. \tilde{z}_1 = \frac{9}{4}\tilde{\varepsilon}z_1, \quad \tilde{z}_2 = |z_2|^{\frac{3}{2}}, \quad \tilde{w} = |z_2|^{\frac{1}{4}}w \quad \text{з} \quad \tilde{\varepsilon} := \operatorname{sgn} z_2: \quad \tilde{w}_1 = \tilde{w}_{22} + \left(\frac{5}{36}\tilde{z}_2^{-2} - \frac{4}{9}\delta\tilde{z}_2^{-\frac{2}{3}}\right)\tilde{w};$$

$$1.3^\nu. \tilde{z}_1 = \frac{9}{4}\tilde{\varepsilon}z_1, \quad \tilde{z}_2 = |z_2 - \frac{3}{2}\varepsilon'z_1|^{\frac{3}{2}}, \quad \tilde{w} = |2z_2 - 3\varepsilon'z_1|^{\frac{1}{4}}e^{\frac{1}{8}z_2(4\varepsilon'z_2-9z_1)}w \quad \text{з} \quad \tilde{\varepsilon} := \operatorname{sgn}(z_2 - \frac{3}{2}\varepsilon'z_1):$$

$$\tilde{w}_1 = \tilde{w}_{22} + \left(\frac{5}{36}\tilde{z}_2^{-2} - \left(\frac{1}{81}\tilde{z}_1^2 + \frac{2}{9}\varepsilon'\nu\right)\tilde{z}_2^{-\frac{2}{3}} - \frac{5}{18}\tilde{z}_2^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{27}\varepsilon'\tilde{z}_1\right)\tilde{w};$$

$$1.4^\mu. \tilde{z}_1 = \frac{9}{4}\tilde{\varepsilon}z_1, \quad \tilde{z}_2 = |z_2|^{\frac{3}{2}}, \quad \tilde{w} = |z_2|^{\frac{1}{4}}e^{\frac{3}{2}z_1z_2}w \quad \text{з} \quad \tilde{\varepsilon} := \operatorname{sgn} z_2:$$

$$\tilde{w}_1 = \tilde{w}_{22} + \left(\frac{5}{36}\tilde{z}_2^{-2} - (\tilde{z}_1^2 - \frac{4}{9}\mu)\tilde{z}_2^{-\frac{2}{3}} + \frac{10}{9}\tilde{z}_2^{\frac{2}{3}}\right)\tilde{w}.$$

Суттєві алгебри лієвської інваріантності редукованих рівнянь 1.1, 1.3 і 1.4 є тривіальними, а, отже, подальший розгляд цих рівнянь у класичному підході не дасть результатів.

Відображене редуковане рівняння 1.2⁰ збігається з лінійним рівнянням теплопровідності з потенціалом $V = \mu z_2^{-2}$, де $\mu = \frac{5}{36}$. Отже, побудовано наступну сім'ю розв'язків рівняння (3.2):

$$u = |x|^{-\frac{1}{4}}\theta^\mu\left(\frac{9}{4}\tilde{\varepsilon}y, |x|^{\frac{3}{2}}\right) \quad \text{with} \quad \mu = \frac{5}{36}, \quad (3.7)$$

де $\theta^\mu = \theta^\mu(z_1, z_2)$ — довільний розв'язок рівняння $\theta_1^\mu = \theta_{22}^\mu + \mu z_2^{-2}\theta^\mu$ і $\tilde{\varepsilon} := \operatorname{sgn} x$. Повний набір нееквівалентних інваріантних розв'язків рівнянь такого виду із загальним $\mu \neq 0$ представлений в [70, Розділ А].

Кожне з редукованих рівнянь 1.5–1.7 збігається з класичним (1+1)-вимірним лінійним рівнянням теплопровідності, що призводить до наступних сімей розв'язків рівняння (3.2):

$$u = |t|^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\theta(z_1, z_2),$$

$$\text{де } z_1 = \frac{1}{3}t^3 + 2\varepsilon t - t^{-1}, \quad z_2 = 2y - (t + \varepsilon t^{-1})x,$$

$$u = \theta(z_1, z_2), \quad \text{де } z_1 = \frac{1}{3}t^3, \quad z_2 = y - tx,$$

$$u = \theta(z_1, z_2), \quad \text{де } z_1 = t, \quad z_2 = x.$$

Тут $\theta = \theta(z_1, z_2)$ — це довільний розв'язок (1+1)-вимірного лінійного рівняння теплопровідності, $\theta_1 = \theta_{22}$. Розширений набір нееквівалентних інваріантних розв'язків цього рівняння була представлена в [Vaneeva O.O.,

Popovych R.O. and Sophocleous C., *J. Geom. Phys.* **169** (2021), 104336], слідуючи прикладам 3.3 і 3.17 в [Olver P.J., Springer, New York, 1993.]. Ці розв'язки вичерпують, з точністю до комбінування G^{ess} -еквівалентності та лінійної суперпозиції один з одним, набір відомих точних розв'язків цього рівняння, які виражаються в замкнутому вигляді через елементарні та спеціальні функції.

Ґрунтуючись на списку G^{ess} -нееквівалентних двовимірних підалгебр із леми 3.2, проведено вичерпну класифікацію ліївських редукцій корозмірності два рівняння (3.2) У таблиці 3.2 для кожної з цих підалгебр ми представляємо відповідний анзац для u та відповідне редуковане звичайне диференціальне рівняння.

Табл. 3.2: G -нееквівалентні редукції Лі корозмірності два

no.	u	ω	Reduced equation
2.1 $^\mu$	$ y ^{\frac{1}{3}(\mu-2)}\varphi$	$y^{-1}x^3$	$9\omega\varphi_{\omega\omega} + (\omega + 6)\varphi_\omega = \frac{1}{3}(\mu - 2)\varphi$
2.2 $^\delta$	$e^{\delta t}\varphi$	x	$\varphi_{\omega\omega} = \delta\varphi$
2.3	$e^y\varphi$	x	$\varphi_{\omega\omega} = \omega\varphi$
2.4 $^\mu$	$ t ^{\frac{1}{2}\mu-1}\varphi$	$ t ^{-\frac{3}{2}}(y - tx)$	$2\varphi_{\omega\omega} = \varepsilon'(\mu - 2)\varphi - 3\varepsilon'\omega\varphi_\omega$
2.5 $^\mu$	$ t ^{\frac{1}{2}\mu-1}\varphi$	$ t ^{-\frac{1}{2}}x$	$2\varphi_{\omega\omega} = \varepsilon'(\mu - 2)\varphi - \varepsilon'\omega\varphi_\omega$
2.6	φ	t	$\varphi_\omega = 0$
2.7	$e^{-\frac{x^2}{4t}}\varphi$	t	$2\omega\varphi_\omega + \varphi = 0$
2.8 $^\varepsilon$	$e^{-\frac{3}{2}\frac{(y-tx)^2}{2t^3-\varepsilon}}\varphi$	t	$(2\omega^3 - \varepsilon)\varphi_\omega + 3\omega^2\varphi = 0$

Тут $\varepsilon' := \text{sgn } t$, $\varphi = \varphi(\omega)$ — нова невідома функція від інваріантної незалежної змінної ω .

Насправді, побуова ліївських редукцій корозмірності два є зайвою. Більш точно, оскільки $\mathfrak{s}_{1,2}^0 \subset \mathfrak{s}_{2,1}^\mu$ для будь-якого μ , усі $\mathfrak{s}_{2,1}^\mu$ -інваріантні розв'язки рівняння (3.2) є $\mathfrak{s}_{1,2}^0$ -інваріантним і, отже, мають форму (3.7). Решта редукцій призводять лише до розв'язків (3.2), кожне з яких є G^{ess} -еквівалентним розв'язку редукованих рівнянь 1.6 або 1.7, наведеному вище. Дійсно, кожна з відповідних підалгебр $\mathfrak{s}_{2,2}$, $\dots$, $\mathfrak{s}_{2,8}$ містить

з точністю до G^{ess} -еквівалентність для підалгебри $\mathfrak{s}_{2,3}$, принаймні одне з векторних полів $\mathcal{P}_0$ та $\mathcal{P}_1$. Тим не менш, нижче обговорено нееквівалентні ліівські редукції корозмірності два, з метою явно представити розв'язки рівняння (3.2), які є інваріантними відносно двовимірних алгебр векторних полів ліівської симетрії цього рівняння.

Знайдено (ненульові) точні розв'язки побудованих скорочених рівнянь і представляємо відповідні точні розв'язки рівняння (3.2). Далі C_0 , C_1 і C_2 є довільними константами.

2.1. Підстановка $\varphi = |\omega|^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{\omega}{9}} \tilde{\varphi}(\omega)$ відображає редукзоване рівняння 2.1 до рівняння Куммера

$$9\omega\tilde{\varphi}_{\omega\omega} + (12 - \omega)\tilde{\varphi}_{\omega} = \frac{1}{3}(\mu + 1)\tilde{\varphi},$$

загальним розв'язком якого є

$$\tilde{\varphi} = C_1 M\left(\frac{1}{3}(\mu + 1), \frac{4}{3}, \frac{1}{9}\omega\right) + C_2 U\left(\frac{1}{3}(\mu + 1), \frac{4}{3}, \frac{1}{9}\omega\right),$$

де $M(a, b, z)$ та $U(a, b, z)$ позначають стандартні розв'язки загального рівняння Куммера $z\varphi_{zz} + (b - z)\varphi_z - a\varphi = 0$. Взявши $\kappa := \frac{1}{3}(\mu + 1)$ замість μ як довільний постійний параметр, відповідну сім'ю частинних розв'язків рівняння (3.2) можна представити у формі

$$u = x|y|^{\kappa - \frac{4}{3}} e^{-\tilde{\omega}} \left(C_1 M\left(\kappa, \frac{4}{3}, \tilde{\omega}\right) + C_2 U\left(\kappa, \frac{4}{3}, \tilde{\omega}\right) \right), \quad \tilde{\omega} := \frac{1}{9}y^{-1}x^3.$$

Воно також допускає еквівалентне представлення

$$u = x^{-1}|y|^{\kappa - \frac{2}{3}} e^{-\frac{\tilde{\omega}}{2}} \left(C_1 M_{\frac{2}{3} - \kappa, \frac{1}{6}}(\tilde{\omega}) + C_2 W_{\frac{2}{3} - \kappa, \frac{1}{6}}(\tilde{\omega}) \right), \quad \tilde{\omega} := \frac{1}{9}y^{-1}x^3$$

в термінах функцій Віттекера $M_{a,b}(z)$ і $W_{a,b}(z)$, які складають фундаментальний набір розв'язків рівняння Віттекера, через відношення цих функцій до функцій Куммера,

$$M_{a,b}(z) := e^{-\frac{z}{2}} z^{b + \frac{1}{2}} M\left(b - a + \frac{1}{2}, 1 + 2b, z\right),$$

$$W_{a,b}(z) := e^{-\frac{z}{2}} z^{b + \frac{1}{2}} U\left(b - a + \frac{1}{2}, 1 + 2b, z\right).$$

2.2^δ. Редуковане рівняння 2.2^δ тривіально інтегрується до

$$\varphi = \begin{cases} C_1 e^\omega + C_2 e^{-\omega} & \text{якщо } \delta = 1, \\ C_1 \omega + C_2 & \text{якщо } \delta = 0, \\ C_1 \sin \omega + C_2 \cos \omega & \text{якщо } \delta = -1. \end{cases}$$

2.3. Редуковане рівняння 2.3 є рівнянням Айрі, загальним розв'язком якого є $\varphi = C_1 \text{Ai}(\omega) + C_2 \text{Bi}(\omega)$.

2.4, 2.5. Підставляючи $\varphi = \omega e^{-\frac{3}{4}\varepsilon'\omega^2} \tilde{\varphi}(\omega)$ і $\varphi = \omega e^{-\frac{1}{4}\varepsilon'\omega^2} \tilde{\varphi}(\omega)$ у редуковані рівняння 2.4 і 2.5, відповідно, отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} 2\omega \tilde{\varphi}_{\omega\omega} + (4 - 3\varepsilon'\omega^2) \tilde{\varphi}_\omega &= \varepsilon'(\mu + 4)\omega \tilde{\varphi}, \\ 2\omega \tilde{\varphi}_{\omega\omega} + (4 - \varepsilon'\omega^2) \tilde{\varphi}_\omega &= \varepsilon'\mu\omega \tilde{\varphi}, \end{aligned}$$

загальними розв'язками яких є

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= C_1 M\left(\frac{\mu}{6} + \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\varepsilon'\omega^2\right) + C_2 U\left(\frac{\mu}{6} + \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}\varepsilon'\omega^2\right), \\ \tilde{\varphi} &= C_1 M\left(\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\varepsilon'\omega^2\right) + C_2 U\left(\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\varepsilon'\omega^2\right). \end{aligned}$$

2.6–2.8. В цих випадкаї редуковані рівняння є звичайними диференціальними рівняннями першого порядку, які тривіально інтегруються:

$$2.6. \varphi = C_0, \quad 2.7. \varphi = \frac{C_0}{\sqrt{|\omega|}}, \quad 2.8. \varphi = \frac{C_0}{\sqrt{|2\omega^3 - \varepsilon|}}.$$

Підставляючи наведені вище загальні розв'язки редукованих рівнянь 2.2–2.8 у відповідні анзаци, ми будуємо наступні сімейства окремих розв'язків рівняння (3.2), які містяться (як згадувалося раніше, до G^{ess} -еквівалентність для четвертої сім'ї) у сім'ях розв'язків, вже отриманих на початку цього розділу з використанням лівських редукцій 1.6 та 1.7:

$$\begin{aligned} u &= C_1 e^{t+x} + C_2 e^{t-x}, \quad u = C_1 x + C_2, \quad u = C_1 e^{-t} \sin x + C_2 e^{-t} \cos x, \\ u &= C_1 e^y \text{Ai}(x) + C_2 e^y \text{Bi}(x), \\ u &= |t|^{\frac{\mu-5}{2}} (y - tx) e^{-\tilde{\omega}} \left(C_1 M\left(\frac{\mu}{6} + \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \tilde{\omega}\right) + C_2 U\left(\frac{\mu}{6} + \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \tilde{\omega}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{з } \tilde{\omega} := \frac{3}{4}t^{-3}(y - tx)^2, \\
& u = |t|^{\frac{\mu-3}{2}}xe^{-\tilde{\omega}}\left(C_1M\left(\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}, \tilde{\omega}\right) + C_2U\left(\frac{\mu}{2}, \frac{3}{2}, \tilde{\omega}\right)\right) \\
& \text{з } \tilde{\omega} := \frac{1}{4}t^{-1}x^2, \\
& u = C_0, \quad u = \frac{C_0}{\sqrt{|t|}}e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad u = \frac{C_0}{\sqrt{|2t^3 - \varepsilon|}}e^{-\frac{3}{2}\frac{(y-tx)^2}{2t^3 - \varepsilon}}.
\end{aligned}$$

3.2 Новий погляд на точкові симетрії рівняння теплопровідності

Лінійне $(1+1)$ -вимірне рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{xx} \tag{3.8}$$

є одним із найпростіших, але найбільш фундаментальних рівнянь математичної фізики. Це рівняння стало тестовим прикладом у ряді розділів теорії диференціальних рівнянь, включаючи симетрійний аналіз таких рівнянь. Вивчення симетрій та пов'язаних з ними об'єктів рівняння (3.8) було започатковано самим Софусом Лі [Lie S., *Arch. for Math.* **6** (1881), 328–368] в ході групової класифікації лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку за двома незалежними змінними. Зокрема, він обчислив алгебру інваріантності рівняння теплопровідності та показав, що вона дає єдине (за модулем точкової еквівалентності) максимальне розширення лівської симетрії в класі лінійних $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь другого порядку. На даний момент рівняння теплопровідності є першим стандартним рівнянням для тестування пакетів символьних обчислень симетрій різного типу та пов'язаних об'єктів для диференціальних рівнянь. Для детального опису історії дослідження рівняння (3.8) та сучасних напрямів досліджень пов'язаних з його симетрійними властивостями див. [71].

Незважаючи на багату та різноманітну історію вивчення рівняння (3.8), низка основних проблем, пов'язаних із ним, навіть у рамках класичного групового аналізу все ще потребують уточнення. Таким чином,

чіткий опис псевдогрупи точкової симетрії G цього рівняння та точна класифікація підалгебр його суттєвої алгебри інваріантності Лі $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ не був представлений в літературі до роботи [71]. Некоректна інтерпретація неперервних та дискретних симетрій рівняння (3.8) призвела до неузгодженості між дією суттєвої точкової групи симетрії G^{ess} на $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ і групи внутрішніх автоморфізмів $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$. У роботі [71] успішно розв’язано зазначені вище проблеми, використовуючи підхід із [70] для покращення представлення точкових симетрій рівняння (3.8), поданий у доведенні теореми 8 у [Orpanasenko S. and Popovych R.O., *J. Math. Anal. Appl.* **513** (2022), 126209]. Після досягнення узгодженості між дією G^{ess} на $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ і внутрішньою групою автоморфізмів $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$, побудовано коректний оптимальний список підалгебр $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ і оптимальний список одновимірних підалгебри $\mathfrak{g}$. Також вводиться поняття псевдодискретних елементів групи Лі. Виявляється, що точкове перетворення, яке лише змінює знак просторової змінної x , яке неправильно вважалось дискретним точковим перетворенням симетрії рівняння (3.8), насправді є псевдодискретним елементом G^{ess} .

3.2.1 Алгебра ліївської інваріантності

Максимальна алгебра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}$ рівняння (3.8) є лінійною оболонкою векторних полів

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^t &= \partial_t, & \mathcal{D} &= 2t\partial_t + x\partial_x - \frac{1}{2}u\partial_u, \\ \mathcal{K} &= t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4}(x^2 + 2t)u\partial_u, & \mathcal{G}^x &= t\partial_x - \frac{1}{2}xu\partial_u, \\ \mathcal{P}^x &= \partial_x, & \mathcal{I} &= u\partial_u, & \mathcal{Z}(f) &= f(t, x)\partial_u,\end{aligned}$$

де параметр-функція f залежить від (t, x) і пробігає множину розв’язків рівняння (3.8). Алгебра контактної інваріантності $\mathfrak{g}_c$ рівняння (3.8) є першим продовженням алгебри $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{g}_{(1)}$.

Векторні поля $\mathcal{Z}(f)$ утворюють нескінченновимірний абелевий ідеал $\mathfrak{g}^{\text{lin}}$ в $\mathfrak{g}$, асоційований із лінійною суперпозицією розв’язків рівняння (3.8), $\mathfrak{g}^{\text{lin}} := \{\mathcal{Z}(f)\}$. Таким чином, алгебру $\mathfrak{g}$ можна представити у вигляді

напівпрямї суми $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\text{ess}} \in \mathfrak{g}^{\text{lin}}$, де

$$\mathfrak{g}^{\text{ess}} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{G}^x, \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle \quad (3.9)$$

є (шестивимірною) підалгеброю $\mathfrak{g}$, яка називається *суттєвою алгеброю лівської інваріантності* (3.8).

З точністю до антисиметрії дужки Лі векторних полів, ненульові комутаційні співвідношення між базисними елементами $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ вичерпуються наступними:

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}, \mathcal{P}^t] &= -2\mathcal{P}^t, & [\mathcal{D}, \mathcal{K}] &= 2\mathcal{K}, & [\mathcal{P}^t, \mathcal{K}] &= \mathcal{D}, \\ [\mathcal{P}^t, \mathcal{G}^x] &= \mathcal{P}^x, & [\mathcal{D}, \mathcal{G}^x] &= \mathcal{G}^x, & [\mathcal{D}, \mathcal{P}^x] &= -\mathcal{P}^x, & [\mathcal{K}, \mathcal{P}^x] &= -\mathcal{G}^x, \\ [\mathcal{G}^x, \mathcal{P}^x] &= \frac{1}{2}\mathcal{I}. \end{aligned}$$

Алгебра $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ є нерозв'язною. Її розклад Леві визначається як $\mathfrak{g}^{\text{ess}} = \mathfrak{f} \in \mathfrak{r}$, де радикал $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ збігається з нільрадикалом $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ і є лінійною оболонкою векторних полів $\mathcal{G}^x$, $\mathcal{P}^x$ і $\mathcal{I}$. Фактор Леві $\mathfrak{f} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D}, \mathcal{K} \rangle$ of $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ ізоморфний $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, радикал $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ ізоморфний (дійсній) алгебрі Гайзенберга рангу один $\mathfrak{h}(1, \mathbb{R})$, а дійсне зображення фактора Леві $\mathfrak{f}$ на радикалі $\mathfrak{r}$ збігається, в базисі $(\mathcal{G}^x, \mathcal{P}^x, \mathcal{I})$, із зображенням $\rho_1 \oplus \rho_0$ з $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Тут ρ_n — це стандартне дійсне незвідне зображення $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ старшої ваги n у $(n+1)$ -вимірному векторному просторі. Точніше,

$$\rho_n(\mathcal{P}^t)_{ij} = (n-j)\delta_{i,j+1}, \quad \rho_n(\mathcal{D})_{ij} = (n-2j)\delta_{ij}, \quad \rho_n(-\mathcal{K})_{ij} = j\delta_{i+1,j},$$

де $i, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а δ_{kl} — дельта Кронекера, тобто $\delta_{kl} = 1$, якщо $k = l$ і $\delta_{kl} = 0$ інакше, $k, l \in \mathbb{Z}$. Таким чином, уся алгебра $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ ізоморфна так званій спеціальній алгебрі Галілея $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \in_{\rho_1 \oplus \rho_0} \mathfrak{h}(1, \mathbb{R})$, що позначається $L_{6,2}$ в класифікації нерозкладних алгебр Лі до розмірності вісім з нетривіальними розкладами Леві, яка була проведена в [Turkowski P., *J. Math. Phys.* **29** (1988), 2139–2144].

Інший базис алгебри $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$, який випливає з розкладу Івасави $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ і тому є більш зручним у багатьох аспектах, є $(\mathcal{Q}^+, \mathcal{D}, \mathcal{P}^t, \mathcal{G}^x, \mathcal{P}^x, \mathcal{I})$, де $\mathcal{Q}^\pm := \mathcal{P}^t \pm \mathcal{K}$.

3.2.2 Псевдогрупа точкових симетрій

Рівняння (3.8) належить до класу $\mathcal{E}$ лінійних $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь другого порядку загального вигляду

$$u_t = A(t, x)u_{xx} + B(t, x)u_x + C(t, x)u + D(t, x) \quad \text{з} \quad A \neq 0. \quad (3.10)$$

Тут набір довільних елементів класу $\mathcal{E}$ $\theta := (A, B, C, D) \in \mathcal{S}_{\mathcal{E}}$, де $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ — множина розв’язків системи, що складається з єдиної нерівності $A \neq 0$ і рівнянь, які визначають, що довільні елементи є функціями від (t, x) , $A_u = A_{u_x} = A_{u_t} = A_{u_{tt}} = A_{u_{tx}} = A_{u_{xx}} = 0$ і подібні рівняння для B , C і D .

Щоб знайти псевдогрупу точкових симетрій G для рівняння (3.8), ми починаємо з розгляду групоїда еквівалентності класу $\mathcal{E}$, який є природним вибором для нормалізованого суперкласу рівняння (3.8). Ми використовуємо статтю [Popovych R.O., Kunzinger M. and Ivanova N.M., *Acta Appl. Math.* **2** (2008), 113–185] як опорну точки для відомих результатів про допустимі перетворення класу $\mathcal{E}$.

Твердження 3.1 (Popovych R.O., Kunzinger M. and Ivanova N.M., *Acta Appl. Math.* **2** (2008), 113–185). *Клас $\mathcal{E}$ нормалізований у звичайному сенсі. Його звичайна псевдогрупа еквівалентності $G_{\mathcal{E}}^{\sim}$ складається з перетворень у формі*

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U^1(t, x)u + U^0(t, x), \quad (3.11a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{X_x^2}{T_t}A, \quad \tilde{B} = \frac{X_x}{T_t} \left(B - 2\frac{U_x^1}{U^1}A \right) - \frac{X_t - X_{xx}A}{T_t}, \\ \tilde{C} &= -\frac{U^1}{T_t}E\frac{1}{U^1}, \quad \tilde{D} = \frac{U^1}{T_t} \left(D + E\frac{U^0}{U^1} \right), \end{aligned} \quad (3.11b)$$

де T , X , U^0 і U^1 — довільні гладкі функції своїх аргументів з $T_t X_x U^1 \neq 0$, і $E := \partial_t - A\partial_{xx} - B\partial_x - C$.

Теорема 3.3. *Псевдогрупа точкових симетрій G $(1+1)$ -вимірного лінійного рівняння теплопровідності (3.8) складається з точкових пере-*

творень форми

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{x + \lambda_1 t + \lambda_0}{\gamma t + \delta}, \\ \tilde{u} &= \sigma \sqrt{|\gamma t + \delta|} \exp\left(\frac{\gamma(x + \lambda_1 t + \lambda_0)^2}{4(\gamma t + \delta)} - \frac{\lambda_1}{2}x - \frac{\lambda_1^2}{4}t\right) (u + h(t, x)),\end{aligned}\tag{3.12}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda_1, \lambda_0$ і σ — довільні константи з $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ і $\sigma \neq 0$, а h — довільний розв'язок (3.8).

Точкові перетворення форми

$$\mathcal{Z}(f): \quad \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u + f(t, x),$$

де параметр-функція $f = f(t, x)$ є довільним розв'язком рівняння (3.8), пов'язані з лінійною суперпозицією розв'язків цього рівняння і, таким чином, їх можна вважати тривіальними. Вони утворюють нормальну псевдопідгрупу G^{lin} псевдогрупи G . Псевдогрупа G розщеплюється над G^{lin} , $G = G^{\text{ess}} \ltimes G^{\text{lin}}$, де підгрупа G^{ess} of G складається з перетворень форми (3.12) з $f = 0$ і, отже, вона є шестивимірною групою Лі. Підгрупу G^{ess} називається *суттєвою групою точкових симетрій* рівняння (3.8). У свою чергу, ця підгрупа розщеплюється над R , $G^{\text{ess}} = F \ltimes R$. Тут R і F — нормальна підгрупа і підгрупа в G^{ess} , які виокремлюються обмеженнями $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 0$ і $\lambda_1 = \lambda_0 = 0, \sigma = 1$ відповідно. Вони ізоморфні групам $\text{H}(1, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$ і $\text{SL}(2, \mathbb{R})$, а їхні алгебри Лі збігаються з $\mathfrak{r} \simeq \mathfrak{h}(1, \mathbb{R})$ і $\mathfrak{f} \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Тут $\text{H}(1, \mathbb{R})$ позначає дійсну групу Гейзенберга рангу один. Нормальні підгрупи R_c та R_d у R , ізоморфні $\text{H}(1, \mathbb{R})$ та $\mathbb{Z}_2$ складаються з елементів R зі значеннями параметрів, що задовольняють обмеження $\sigma > 0$ і $\lambda_0 = \lambda_1 = 0, \sigma \in \{-1, 1\}$ відповідно. Ізоморфізми з F до $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ та з R_c до $\text{H}(1, \mathbb{R})$ встановлюються наступними відповідностями:

$$\begin{aligned}\varrho_1 &= (\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{\alpha\delta - \beta\gamma = 1} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \\ (\lambda_1, \lambda_0, \sigma), \sigma > 0 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}\lambda_1 & \ln \sigma \\ 0 & 1 & \lambda_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ізоморфізм ϱ_1 насправді є стандартним двовимірним представленням $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Таким чином, F і R_c є зв'язними підгрупами в G^{ess} , але R_d не є зв'язним. Природна дія підгрупи F на нормальній підгрупі R спряженнями задана в параметризації (3.12) G як $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_0, \tilde{\sigma}) = (\lambda_1, \lambda_0, \sigma)A$ з матрицею $A = \varrho_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \oplus (1)$. Підсумовуючи, ми маємо, що

$$G^{\mathrm{ess}} \simeq (\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \ltimes_{\varphi} \mathrm{H}(1, \mathbb{R})) \times \mathbb{Z}_2,$$

де антигомоморфізм $\varphi: \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{H}(1, \mathbb{R}))$ визначається в обраних локальних координатах $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\lambda_1, \lambda_0, \sigma) \mapsto (\alpha\lambda_1 + \gamma\lambda_0, \beta\lambda_1 + \delta\lambda_0, \sigma) = (\lambda_1, \lambda_0, \sigma)A$.

Хоча підняття псевдогрупи G за природною проекцією $\mathbb{R}_{t,x,u}^3$ на $\mathbb{R}_t$ збігається з групою дробово-лінійних перетворень за t і, отже, ізоморфна групі $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, підгрупа F у G є ізоморфна групі $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, а її розклад Івасави задається однопараметричними підгрупами G відповідно породженими векторними полями $\mathcal{Q}^+ := \mathcal{P}^t + \mathcal{K}$, $\mathcal{D}$ і $\mathcal{P}^t$. Перша підгрупа, асоційована з $\mathcal{Q}^+$, складається з точкових перетворень у формі

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^+(\epsilon): \quad \tilde{t} &= \frac{\sin \epsilon + t \cos \epsilon}{\cos \epsilon - t \sin \epsilon}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\cos \epsilon - t \sin \epsilon}, \\ \tilde{u} &= \sqrt{|\cos \epsilon - t \sin \epsilon|} e^{\frac{-x^2 \sin \epsilon}{4(\cos \epsilon - t \sin \epsilon)}} u, \end{aligned}$$

де ϵ — довільний сталий параметр, який визначається відповідним перетворенням з точністю до доданка $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Рівняння (3.8) є інваріантним відносно інволюції $\mathcal{J}$ заміни знаку x , і перетворення $\mathcal{K}'$, що обертає t ,

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &:= (t, x, u) \mapsto (t, -x, u), \\ \mathcal{K}': \quad \tilde{t} &= -\frac{1}{t}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{t}, \quad \tilde{u} = \sqrt{|t|} e^{\frac{x^2}{4t}} u. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Зауважимо, що $(\mathcal{K}')^2 = \mathcal{J}$. У контексті однопараметричних підгруп G^{ess} (відповідно G), які генеровані базисними елементами $\mathfrak{g}^{\mathrm{ess}}$ перераховані в (3.9), обидва перетворення $\mathcal{J}$ і $\mathcal{K}'$ виглядають як дискретні точкові перетворення симетрії рівняння (3.8), але насправді це не так у наведених

в [70, 71] інтерпретації групового множення в G . Незважаючи на те, що якобіан інволюції $\mathcal{J}$ дорівнює -1 для всіх значень (t, x, u) , ця інволюція належить до однопараметричної підгрупи $\{\mathcal{Q}^+(\epsilon)\}$ of G , $\mathcal{J} = \mathcal{Q}^+(\pi)$, і, таким чином, він належить до тотожньої компоненти псевдогрупа G . Подібне твердження справедливо для перетворення $\mathcal{K}' = \mathcal{Q}^+(-\frac{1}{2}\pi)$, знак якобіана якого збігається з $\text{sgn } t$.

Наслідок 3.2. *Повний перелік дискретних точкових перетворень симетрії лінійного $(1+1)$ -вимірною рівняння теплопровідності (3.8), які є незалежними відносно композиції один з одним і з неперервними точковими перетвореннями симетрії цього рівняння, вичерпується однією інволюцією $\mathcal{J}'$ заміни знака u ,*

$$\mathcal{J}' := (t, x, u) \mapsto (t, x, -u).$$

Таким чином, фактор-група псевдогрупи точкових симетрій G відносно її тотожньої компоненти G_{id} ізоморфний $\mathbb{Z}_2$.

3.2.3 Класифікація підалгебр

Незважаючи на незвичайність наслідку 3.2 і твердження в абзаці перед ним, вони добре узгоджуються зі структурою абстрактної групи Лі, яка ізоморфна G^{ess} , і з внутрішньою групою автоморфізмів $\text{Inn}(\mathfrak{g}^{\text{ess}})$ алгебри $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$. Точніше, алгебра $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ є алгеброю Лі групи G^{ess} і приєднана дія G^{ess} на $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ збігається з приєднаною дією $\text{Inn}(\mathfrak{g}^{\text{ess}})$. Зокрема, за запропонованою в [71] інтерпретацією маємо $\text{Ad}(\exp(\epsilon \mathcal{Q}^+)) = \mathcal{Q}^+(\epsilon)_*$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^+(\epsilon)_* \mathcal{Q}^- &= \cos(2\epsilon) \mathcal{Q}^- + \sin(2\epsilon) \mathcal{D}, \\ \mathcal{Q}^+(\epsilon)_* \mathcal{D} &= -\sin(2\epsilon) \mathcal{Q}^- + \cos(2\epsilon) \mathcal{D}, \\ \mathcal{Q}^+(\epsilon)_* \mathcal{P}^x &= \cos(\epsilon) \mathcal{P}^x + \sin(\epsilon) \mathcal{G}^x, \\ \mathcal{Q}^+(\epsilon)_* \mathcal{G}^x &= -\sin(\epsilon) \mathcal{P}^x + \cos(\epsilon) \mathcal{G}^x, \end{aligned}$$

і внутрішні автоморфізми, пов'язані з $\mathcal{J} = \mathcal{Q}^+(\pi)$ та $\mathcal{K}' = \mathcal{Q}^+(-\frac{1}{2}\pi)$ дозволяють відобразити $\mathcal{P}^t - \mathcal{G}^x$ і $\mathcal{D} - \mu \mathcal{I}$ у векторні поля $\mathcal{P}^t + \mathcal{G}^x$ та

$D + \mu \mathcal{I}$ відповідно. Пов'язуючи ці факти ми уточнюємо класифікацію підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ або, еквівалентно, спеціальної алгебра Галілея $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \in_{\rho_1 \oplus \rho_0} \mathfrak{h}(1, \mathbb{R})$.

Лема 3.3. *Повний список нееквівалентних власних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^{\text{ess}}$ вичерпується такими підалгебрами, де $\delta \in \{-1, 0, 1\}$, $\mu \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ і $\nu \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
1\text{D}: \quad & \mathfrak{s}_{1.1} = \langle \mathcal{P}^t + \mathcal{G}^x \rangle, \quad \mathfrak{s}_{1.2}^\delta = \langle \mathcal{P}^t + \delta \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{1.3}^\mu = \langle \mathcal{D} + \mu \mathcal{I} \rangle, \\
& \mathfrak{s}_{1.4}^\nu = \langle \mathcal{P}^t + \mathcal{K} + \nu \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{1.5} = \langle \mathcal{P}^x \rangle, \quad \mathfrak{s}_{1.6} = \langle \mathcal{I} \rangle, \\
2\text{D}: \quad & \mathfrak{s}_{2.1}^\nu = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D} + \nu \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.2} = \langle \mathcal{P}^t + \mathcal{G}^x, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.3}^\delta = \langle \mathcal{P}^t + \delta \mathcal{I}, \mathcal{P}^x \rangle, \\
& \mathfrak{s}_{2.4} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.5}^\nu = \langle \mathcal{D} + \nu \mathcal{I}, \mathcal{P}^x \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.6} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle, \\
& \mathfrak{s}_{2.7} = \langle \mathcal{P}^t + \mathcal{K}, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{2.8} = \langle \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle, \\
3\text{D}: \quad & \mathfrak{s}_{3.1} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D}, \mathcal{K} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{3.2}^\nu = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D} + \nu \mathcal{I}, \mathcal{P}^x \rangle, \quad \mathfrak{s}_{3.3} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle, \\
& \mathfrak{s}_{3.4} = \langle \mathcal{P}^t + \mathcal{G}^x, \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{3.5} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle, \\
& \mathfrak{s}_{3.6} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{3.7} = \langle \mathcal{G}^x, \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle, \\
4\text{D}: \quad & \mathfrak{s}_{4.1} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D}, \mathcal{K}, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{4.2} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D}, \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle, \\
& \mathfrak{s}_{4.3} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{G}^x, \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle, \quad \mathfrak{s}_{4.4} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{G}^x, \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle, \\
& \mathfrak{s}_{4.5} = \langle \mathcal{P}^t + \mathcal{K}, \mathcal{G}^x, \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle, \\
5\text{D}: \quad & \mathfrak{s}_{5.1} = \langle \mathcal{P}^t, \mathcal{D}, \mathcal{G}^x, \mathcal{P}^x, \mathcal{I} \rangle.
\end{aligned}$$

3.2.4 Псевдо-дискретні симетрії

Підкреслимо, що хибні “дискретні перетворення” $\mathcal{J}$ і $\mathcal{K}'$ не тільки належать до тотожньої компоненти $G_{\text{id}}^{\text{ess}}$ груам G^{ess} , але є, крім того, елементами однопараметричної підгрупи, породженої векторним полем $\mathcal{Q}^+$, $\mathcal{J} = \mathcal{Q}^+(\pi)$ і $\mathcal{K}' = \mathcal{Q}^+(-\frac{1}{2}\pi)$. Водночас багато перетворень з $G_{\text{id}}^{\text{ess}}$ не належать жодним з однопараметричних підгруп G^{ess} або, іншими словами, $G^{\text{ess}} \setminus \exp(\mathfrak{g}^{\text{ess}})$ становить значну частину групи G^{ess} . Щоб вичерпно описати $\exp(\mathfrak{g}^{\text{ess}})$ і $G^{\text{ess}} \setminus \exp(\mathfrak{g}^{\text{ess}})$, ми використовуємо наступні твердження.

Лема 3.4. Нехай група $Li\ G$ є напівпрямим добутком своєї підгрупи $Li\ H$, що діє на свою нормальну підгрупу $Li\ N$, $H < G$, $N \triangleleft G$ і $G = H \ltimes N$. Якщо елемент g_0 з G належить до однопараметричної підгрупи з G , то множник $h_0 \in H$ у розкладі $g_0 = h_0 n_0$ з $n_0 \in N$ належить до однопараметричної підгрупи H .

Лема 3.5. З точністю до спряження підгруп в $F \simeq SL(2, \mathbb{R})$ і перемасштабування параметра групи $\epsilon \in \mathbb{R}$, однопараметричні підгрупи в $F \simeq SL(2, \mathbb{R})$ вичерпуються трьома групами, елементами яких відносно ϵ

$$\mathcal{P}^t(\epsilon) \sim \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\epsilon) \sim \begin{pmatrix} e^\epsilon & 0 \\ 0 & e^{-\epsilon} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}^+(\epsilon) \sim \begin{pmatrix} \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{pmatrix}.$$

Далі позначатимемо $E := \text{diag}(1, 1)$.

Наслідок 3.3. Матриця $A \in SL(2, \mathbb{R})$ належить однопараметричній підгрупі $SL(2, \mathbb{R})$ тоді і тільки тоді, коли $\text{tr } A > -2$ або $A = -E$. Еквівалентно, точкове перетворення $\Phi \in F$ належить до однопараметричної підгрупи F тоді і тільки тоді, коли $\alpha + \delta > -2$ або $\alpha = \delta = -1$ і $\beta = \gamma = 0$.

Нагадаємо, що класифікація елементів групи $SL(2, \mathbb{R})$ ґрунтується на значеннях їх слідів. Матриця $A \in SL(2, \mathbb{R})$ з $A \neq \pm E$ називається еліптичною, якщо $|\text{tr } A| < 2$, параболічною, якщо $|\text{tr } A| = 2$ та гіперболічною, якщо $|\text{tr } A| > 2$. Отже, наслідок 3.3 означає, що еліптичні елементи, гіперболічні та параболічні елементи з додатними слідами, E та $-E$ утворюють $\exp(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$. Крім того, множення на $-E$ змінює знаки слідів матриці і таким чином відображає гіперболічну та параболічну частини $\exp(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ на доповнення до $\exp(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$ в групі $SL(2, \mathbb{R})$ і навпаки. Грубо кажучи, дія $-E$ змінює відношення “належить до (жодної) однопараметричної підгрупи” на її заперечення для гіперболічних і параболічних елементів $SL(2, \mathbb{R})$. У цьому сенсі роль $-E$ на рівні однопараметричних підгруп аналогічна ролі дискретного елемента на рівні

зв'язних компонент, оскільки такий елемент переставляє одиничну компоненту з іншими компонентами відповідної Лі група. Ось чому елемент $-E$ називаємо *псевдодискретним* елементом групи $SL(2, \mathbb{R})$. Загалом, задана група Лі G з алгеброю Лі $\mathfrak{g}$ і $\exp(\mathfrak{g}) \neq G_{\text{id}}$, елемент $g \in G$ називаємо *псевдодискретним* якщо

$$g(G_{\text{id}} \setminus \exp(\mathfrak{g})) \subseteq \exp(\mathfrak{g}).$$

Зауважимо, що будь-яка однопараметрична підгрупа в $SL(2, \mathbb{R})$, яка містить еліптичний елемент, складається з еліптичних елементів і матриці $\pm E$, і, таким чином, множення на $-E$ зберігає кожну з таких підгруп.

Наведені аргументи дозволяють сформулювати та довести характеристику елементів G^{ess} , які належать образу $\exp(\mathfrak{g}^{\text{ess}})$ експоненціального відображення.

Теорема 3.4. *Перетворення Φ з G^{ess} належить до однопараметричної підгрупи в G^{ess} тоді і тільки тоді, коли його F -компонента Φ_F у розкладі $\Phi = \Phi_F \circ \Phi_R$ відповідно до розщеплення $G^{\text{ess}} = F \ltimes R$ of G^{ess} належить до однопараметричної підгрупи F . Іншими словами, $\Phi \in \exp(\mathfrak{g}^{\text{ess}})$ тоді і тільки тоді, коли $\Phi_F \in \exp(\mathfrak{f})$.*

Згадавши, що $\varrho_1(\mathcal{J}) = -E$, де ϱ_1 є ізоморфізмом між $F < G^{\text{ess}}$ і $SL(2, \mathbb{R})$, отримаємо таке твердження.

Наслідок 3.4. *Перетворення $\mathcal{J} = (t, x, u) \mapsto (t, -x, u)$ є псевдо-дискретним елементом G^{ess} .*

Дано систему диференціальних рівнянь, природно назвати псевдодискретні елементи її (псевдо)групи точкових симетрій *псевдодискретними точковими симетріями* цієї системи. У запропонованій термінології перетворення $\mathcal{J} = (t, x, u) \mapsto (t, -x, u)$ можна назвати псевдодискретною точковою симетрією рівняння (3.8) тільки якщо має місце наступне припущення.

Гіпотеза 3.1. *Перетворення Φ з псевдогрупи G належить однопараметричній підгрупі в G тоді і тільки тоді, коли його G^{ess} -компонента Φ^{ess} у розкладі $\Phi = \Phi^{\text{ess}} \circ \Phi^{\text{lin}}$ відповідно до розщеплення $G = G^{\text{ess}} \ltimes G^{\text{lin}}$ належить однопараметричній підгрупі G^{ess} . Іншими словами, $\Phi \in \exp(\mathfrak{g})$ тоді і тільки тоді, коли $\Phi^{\text{ess}} \in \exp(\mathfrak{g}^{\text{ess}})$.*

4 Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація диференціальних рівнянь

У даному розділі розглянуто дві задачі: груповий аналіз $(1+1)$ -вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Гордона та груповий аналіз нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з довільною кількістю залежних змінних. Вдалося розв’язати групову класифікацію за допомогою алгебраїчного методу після детального вивчення трансформаційних властивостей розглядуваних класів та їх підкласів. Інструментом в обох цих задачах слугувало ефективне використання класичної теореми Лі про реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на прямій. Вказані нижче методи та підходи дали змогу не лише значно покращити попередні результати щодо ліївських симетрій рівнянь із цих класів, а й істотно спростити доведення класифікаційних результатів і перевірку їх достовірності.

Теорема 4.1 (теорема Лі). *Нееквівалентні (з точністю до локальних дифеоморфізмів прямої) реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на t -прямій вичерпують наступні алгебри:*

$$\{0\}, \quad \langle \partial_t \rangle, \quad \langle \partial_t, t\partial_t \rangle, \quad \langle \partial_t, t\partial_t, t^2\partial_t \rangle.$$

4.1 Групова класифікація $(1+1)$ -вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Гордона

Проведено вичерпну групову класифікацію класу $(1+1)$ -вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Гордона у конусних (характеристичних) координатах вигляду

$$u_{tx} = f(t, x, u) \quad \text{з} \quad f_{uu} \neq 0, \quad (4.1)$$

який позначаємо $\mathcal{K}$ й одночасно називаємо як клас (4.1) і як клас $\mathcal{K}$. Тут $u = u(t, x)$ — невідома функція незалежних змінних (t, x) , а індекси у функцій — похідні за відповідними змінними, наприклад, $u_{tx} :=$

$\partial^2 u / \partial t \partial x$ та $f_{uu} := \partial^2 f / \partial u^2$. Довільний елемент f класу $\mathcal{K}$ пробігає множину гладких функцій змінних (t, x, u) , які не є лінійними відносно u . Останнє обмеження накладаємо на функцію f для виключення лінійних рівнянь із класу $\mathcal{K}$, що є природним із різних причин. Варто зазначити, що задача дослідження класу $\mathcal{K}$ у рамках групового аналізу диференціальних рівнянь була сформульована іще Софусом Лі.

Основний результат групової класифікації нелінійних узагальнених рівнянь Клейна–Гордона представлено у вигляді наступної теореми.

Теорема 4.2. *Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних (максимальних) розширень лівських симетрій у даному класі вичерпують такі випадки:*

0. Загальний випадок $f = f(t, x, u)$: $\{0\}$;
1. $f = \hat{f}(x, u)$: $\langle \partial_t \rangle$;
2. $f = \hat{f}(x - t, u)$: $\langle \partial_t + \partial_x \rangle$;
3. $f = e^t \hat{f}(x, e^{-t}u)$: $\langle \partial_t + u\partial_u \rangle$;
4. $f = e^{x+t} \hat{f}(x - t, e^{-x-t}u)$: $\langle \partial_t + \partial_x + 2u\partial_u \rangle$;
5. $f = e^t \hat{f}(e^{-t}u)$: $\langle \partial_t + u\partial_u, \partial_x \rangle$;
6. $f = e^{x+t} \hat{f}(e^{-x-t}u)$: $\langle \partial_t + u\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle$;
7. $f = |x - t|^{-q-2} \hat{f}(|x - t|^q u)$, $q \neq 0$: $\langle \partial_t + \partial_x, t\partial_t + x\partial_x - qu\partial_u \rangle$;
8. $f = |x|^{-q-2} \hat{f}(|x|^q u)$, $q \neq 0$: $\langle \partial_t, t\partial_t + x\partial_x - qu\partial_u \rangle$;
9. $f = \hat{f}(u)$: $\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t - x\partial_x \rangle$;
10. $f = (x - t)^{-2} \hat{f}(u)$: $\langle \partial_t + \partial_x, t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + x^2\partial_x \rangle$;
11. $f = e^{u/x}$: $\langle \partial_t, t\partial_t - x\partial_u, x\partial_x + u\partial_u \rangle$;
12. $f = |u|^p u$, $p \neq -1, 0$: $\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t - x\partial_x, -pt\partial_t + u\partial_u \rangle$;
13. $f = e^u$: $\langle \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x - (\tau_t(t) + \xi_x(x))\partial_u \rangle$.

Тут $\hat{f}$ — довільна гладка функція своїх аргументів, $\hat{f}_{uu} \neq 0$, q та p — довільні сталі, які задовольняють умовам, що зазначені у відповідних

випадках. У випадку 13 компоненти τ та ξ пробігають відповідно множину гладких функцій змінних t або x .

Зауваження 4.1. За допомогою точкового перетворення $\check{t} = x + t$, $\check{x} = x - t$, $\check{u} = u$, $\check{f} = f$ групову класифікацію класу 4.1 можна звести до групової класифікації нелінійних рівнянь Клейна–Гордона у стандартних просторово-часових змінних: $\check{u}_{\check{t}\check{t}} - \check{u}_{\check{x}\check{x}} = \check{f}(\check{t}, \check{x}, \check{u})$.

Нижче розглянемо детальніше процедуру проведення групової класифікації підкласів класу (1+1)-вимірних узагальнених нелінійних рівнянь Клейна–Гордона.

Нами вичерпно розв'язано задачу групової класифікації для класу $\mathcal{K}$, який утворюють рівняння вигляду (4.1), але це безпосередньо не приводить до розв'язання задачі групової класифікації для кожного з підкласів класу $\mathcal{K}$. Для заданого підкласу $\hat{\mathcal{K}}$ класу $\mathcal{K}$ теорему 4.2 використовуємо для групової класифікації підкласу $\hat{\mathcal{K}}$ відносно її групи еквівалентності $G_{\hat{\mathcal{K}}}^{\sim}$ таким чином:

- Враховуючи нормалізацію класу $\mathcal{K}$, будуємо групу еквівалентності $G_{\hat{\mathcal{K}}}^{\sim}$ як підгрупу групи $G^{\sim}$, яка утворена елементами групи $G^{\sim}$, що зберігають підклас $\hat{\mathcal{K}}$.
- Для кожного $N \in \Gamma$ знаходимо перетин підкласу $\hat{\mathcal{K}}$ з $G^{\sim}$ -орбітою $G_{*}^{\sim}\mathcal{K}'_N$ підкласу $\mathcal{K}'_N$ (відповідно з $G^{\sim}$ -орбітою $G_{*}^{\sim}\mathcal{K}_N$ підкласу $\mathcal{K}_N$). Це можна реалізувати за допомогою вибору тих значень довільного елемента f для рівнянь із орбіти, які задовольняють додаткову допоміжну обмежувальну умову, що виділяє підклас $\hat{\mathcal{K}}$ із класу $\mathcal{K}$. Набір перетинів визначає повний список розширень лівських симетрій підкласу $\hat{\mathcal{K}}$.
- Для вибраних значень функції f калібруємо параметри за допомогою перетворень із групи $G_{\hat{\mathcal{K}}}^{\sim}$.

Оскільки підклас $\hat{\mathcal{K}}$ у загальному випадку не є нормалізованим, то запропонована процедура виглядає простіше, ніж пряме розв'язання задачі

групової класифікації для підкласу $\hat{\mathcal{K}}$, хоча обчислювальна складність задачі є досить високою.

Підкласи $\mathcal{K}_N$, $N \in \Gamma$, класу $\mathcal{K}$, які відповідають слабким розширенням у випадках 1–9 є особливими відносно цієї процедури. Групову класифікацію кожного з цих підкласів із точністю до еквівалентності, породженої відповідним групоїдом еквівалентності, можна легко отримати, аналізуючи діаграму Хассе, яка описує структуру частково впорядкованої множини для цих випадків. Проте це не так для групової класифікації з точністю до еквівалентності, яка породжена відповідною групою еквівалентності, оскільки більшість із підкласів $\mathcal{K}_N$, $N \in \Gamma$, не є нормалізованими. Варто зазначити, що обидва підходи до групової класифікації підкласів $\mathcal{K}_{10}$, $\mathcal{K}_{11}$, $\mathcal{K}_{12,p}$ та $\mathcal{K}_{13}$ є тривіальними, оскільки ядро алгебри ліївської інваріантності рівнянь із кожного з цих класів — це максимальна алгебра ліївської інваріантності для кожного такого рівняння.

Розглянемо детально підклас $\mathcal{K}_2$ класу (4.1), який пов'язаний із випадком 2 теореми 4.2 у слабкому сенсі, тобто клас рівнянь вигляду

$$u_{tx} = f(\omega, u), \quad \text{де } \omega := x - t, \quad f_{uu} \neq 0$$

або, у змінних $(\check{t}, \check{x}, \check{u}) = (x + t, x - t, u)$ з $\check{f}(\check{x}, \check{u}) = f(\omega, u)$, рівнянь вигляду

$$\check{u}_{\check{t}\check{t}} - \check{u}_{\check{x}\check{x}} = \check{f}(\check{x}, \check{u}), \quad \check{f}_{\check{u}\check{u}} \neq 0.$$

Лема 4.1. *Групу еквівалентності $G_2^\sim$ класу $\mathcal{K}_2$ утворюють перетворення вигляду*

$$\tilde{t} = c_1 t + c_2, \quad \tilde{x} = c_1 x + c_3, \quad \tilde{u} = c_4 u + U^0(\omega), \quad (4.2)$$

$$\tilde{f} = c_1^{-2}(c_4 f - U_{\omega\omega}^0) \quad (4.3)$$

та дискретне перетворення еквівалентності $\mathcal{J}^0$: $\tilde{t} = x$, $\tilde{x} = t$, $\tilde{u} = u$, $\tilde{f} = f$. Тут $c_1, \dots, c_4$ — довільні сталі, $c_1 c_4 \neq 0$, U^0 — довільна гладка функція змінної $\omega := x - t$.

Придатна підалгебра $\mathfrak{s} = \langle \partial_t + \partial_x \rangle$ алгебри $\mathfrak{g}_{(\cdot)}$ є ядром алгебри лівської інваріантності рівнянь із класу $\mathcal{K}_2$. Іншими словами, випадок 2 — загальний випадок без розширень лівських симетрій у цьому класі. Він ненормалізований, оскільки групоїд дії групи $G_2^\sim$ є власною підмножиною групоїда еквівалентності $\mathcal{G}_2^\sim$. Дійсно, багато рівнянь класу $\mathcal{K}_2$, наприклад, рівняння Ліувілля, допускають точкові симетрії, які не пов’язані з перетвореннями еквівалентності класу $\mathcal{K}_2$. Більш того, з теореми 4.4 нижче випливає, що клас $\mathcal{K}_2$ також не є напівнормалізованим. Таким чином, природно, що групові класифікації класу $\mathcal{K}_2$ з точністю до $\mathcal{G}_2^\sim$ -та $G_2^\sim$ -еквівалентностей є різними. Легко побачити з діаграми Хассе, що $\mathcal{G}_2^\sim$ -нееквівалентні випадки розширень лівських симетрій у класі $\mathcal{K}_2$ вичерпують випадки 6, 7, 9, 10, 12 та 13, і це приводить до повної групової класифікації цього класу з точністю до $\mathcal{G}_2^\sim$ -еквівалентності. (У випадку 6 необхідно додатково змінити знак змінної x .)

Повна групові класифікація класу $\mathcal{K}_2$ із точністю до $G_2^\sim$ -еквівалентності є більш складною задачею. Її можна отримати з групової класифікації надкласу $\mathcal{W}$ класу $\mathcal{K}_2$, який складають рівняння у змінних $(\check{t}, \check{x}, \check{u})$ вигляду

$$\check{u}_{\check{t}\check{t}} - \check{g}(\check{x}, \check{u})\check{u}_{\check{x}\check{x}} = \check{f}(\check{x}, \check{u}), \quad (\check{g}_{\check{u}}, \check{f}_{\check{u}\check{u}}) \neq (0, 0).$$

Очевидно, що клас $\mathcal{K}_2$ виділено із надкласу $\mathcal{W}$ за допомогою умови $\check{g} = 1$.

Групоїд дії групи еквівалентності $G_{\mathcal{W}}^\sim$ є власним підгрупоїдом групоїда $\mathcal{G}_{\mathcal{W}}^\sim$, тобто надклас $\mathcal{W}$ не є нормалізованим. Обмеження групоїда дії групи еквівалентності $G_{\mathcal{W}}^\sim$ на підклас $\mathcal{K}_2$ класу $\mathcal{W}$ співпадає з групоїдом дії групи еквівалентності $G_2^\sim$. Таким чином, повну групову класифікацію класу $\mathcal{K}_2$ з точністю до $G_2^\sim$ -еквівалентності, можна виокремити із повної групової класифікації надкласу $\mathcal{W}$ з точністю до $G_{\mathcal{W}}^\sim$ -еквівалентності.

Теорема 4.3. *Повний список $G_2^\sim$ -нееквівалентних розширень лівських симетрій ядра алгебри лівської інваріантності $\mathfrak{g}^\cap = \langle \partial_t + \partial_x \rangle$ у класі $\mathcal{K}_2$*

вичерпують наступні випадки:

$$2. \text{ Загальний випадок } f = \hat{f}(x - t, u): \mathfrak{g}_f = \langle \partial_t + \partial_x \rangle;$$

$$6. f = e^{-x+t} \hat{f}(e^{x-t} u): \mathfrak{g}_f = \langle \partial_t + u \partial_u, \partial_x - u \partial_u \rangle;$$

$$7. f = |x - t|^{-q-2} \hat{f}(|x - t|^q u), \quad q \neq 0:$$

$$\mathfrak{g}_f = \langle \partial_t + \partial_x, t \partial_t + x \partial_x - qu \partial_u \rangle;$$

$$9a. f = \hat{f}(u): \mathfrak{g}_f = \langle \partial_t, \partial_x, t \partial_t - x \partial_x \rangle;$$

$$9b. f = \hat{f}(u) e^{x-t}: \mathfrak{g}_f = \langle e^t \partial_t, e^{-x} \partial_x, \partial_t + \partial_x \rangle;$$

$$10a. f = \hat{f}(u)(x - t)^{-2}: \mathfrak{g}_f = \langle \partial_t + \partial_x, t \partial_t + x \partial_x, t^2 \partial_t + x^2 \partial_x \rangle;$$

$$10b. f = \hat{f}(u) \cos^{-2}(x - t):$$

$$\mathfrak{g}_f = \langle \partial_t + \partial_x, \cos 2t \partial_t - \cos 2x \partial_x, \sin 2t \partial_t - \sin 2x \partial_x \rangle;$$

$$10c. f = \hat{f}(u) \cosh^{-2}(x - t):$$

$$\mathfrak{g}_f = \langle \partial_t + \partial_x, e^{2t} \partial_t - e^{2x} \partial_x, e^{-2t} \partial_t - e^{-2x} \partial_x \rangle;$$

$$10d. f = \hat{f}(u) \sinh^{-2}(x - t):$$

$$\mathfrak{g}_f = \langle \partial_t + \partial_x, e^{2t} \partial_t + e^{2x} \partial_x, e^{-2t} \partial_t + e^{-2x} \partial_x \rangle;$$

$$12a. f = |u|^p u, \quad p \neq -1, 0: \mathfrak{g}_f = \langle \partial_t, \partial_x, t \partial_t - x \partial_x, -pt \partial_t + u \partial_u \rangle;$$

$$12b. f = |u|^p u e^{x-t}, \quad p \neq -1, 0: \mathfrak{g}_f = \langle e^t \partial_t, e^{-x} \partial_x, \partial_t + \partial_x, p \partial_t + u \partial_u \rangle;$$

$$13. f = e^u: \mathfrak{g}_f = \langle \tau(t) \partial_t + \xi(x) \partial_x - (\tau_t(t) + \xi_x(x)) \partial_u \rangle.$$

Тут $\hat{f}$ — довільна гладка функція своїх аргументів із ненульовою другою похідною відносно аргументу, що включає змінну u , q та p — довільні сталі, які задовольняють умовам зазначеним у відповідних випадках. У випадку 13 компоненти τ та ξ пробігають множини гладких функцій відповідно змінних t або x .

Використовуємо дворівневу нумерацію для випадків класифікації у теоремі 4.3 для зазначення наявності додаткових еквівалентностей між цими випадками. Наприклад, номери з однаковими арабськими цифрами та різними римськими літерами відповідають випадкам, які є $G_2^\sim$ -

нееквівалентні, але є $\mathcal{G}_2^\sim$ -еквівалентними, а тому є $G^\sim$ -еквівалентними як розширення ліівських симетрій у класі $\mathcal{K}$. Відповідні випадки в теоремах 4.2 та 4.3 мають номери з однаковими арабськими цифрами.

Для знаходження всіх додаткових перетворень еквівалентності серед $G_2^\sim$ -нееквівалентних класифікаційних випадків для класу $\mathcal{K}_2$, а отже, і для відповідної групової класифікації класу $\mathcal{K}_2$ з точністю до $G_2^\sim$ -еквівалентності з точністю до $\mathcal{G}_2^\sim$ -еквівалентності, потрібно класифікувати допустимі перетворення в класі $\mathcal{K}_2$ з точністю до $G_2^\sim$ -еквівалентності.

Теорема 4.4. *Породжуюча (з точністю до $G_2^\sim$ -еквівалентності) множина допустимих перетворень для класу $\mathcal{K}_2$, яка є мінімальною і не-суперечливою відносно $G_2^\sim$ -еквівалентності, є об'єднанням сімей допустимих перетворень $(f, \Phi, \tilde{f})$:*

- T1. $f = \hat{f}(u)$, $\tilde{f} = -f$, $\Phi: \tilde{t} = -t, \tilde{x} = x, \tilde{u} = u$;
- T2. $f = \hat{f}(u)$, $\tilde{f} = f$, $\Phi: \tilde{t} = te^\gamma, \tilde{x} = xe^{-\gamma}, \tilde{u} = u, \gamma \in \mathbb{R}_{\neq 0}$;
- T3. $f = \hat{f}(u)e^{x-t}$, $\tilde{f} = \hat{f}(\tilde{u})$, $\Phi: \tilde{t} = -e^{-t}, \tilde{x} = e^x, \tilde{u} = u$;
- T4a. $f = \hat{f}(u)(x-t)^{-2}$, $\tilde{f} = \hat{f}(\tilde{u})(\tilde{x}-\tilde{t})^{-2}$,
 $\Phi: \tilde{t} = t^{-1}, \tilde{x} = x^{-1}, \tilde{u} = u$;
- T4b. $f = -\hat{f}(u) \cos^{-2}(x-t)$, $\tilde{f} = \hat{f}(\tilde{u})(\tilde{x}-\tilde{t})^{-2}$,
 $\Phi: \tilde{t} = \tan t, \tilde{x} = \cot x, \tilde{u} = u$;
- T4c. $f = -\hat{f}(u) \cosh^{-2}(x-t)$, $\tilde{f} = \hat{f}(\tilde{u})(\tilde{x}-\tilde{t})^{-2}$,
 $\Phi: \tilde{t} = -\frac{1}{2}e^{2t}, \tilde{x} = \frac{1}{2}e^{2x}, \tilde{u} = u$;
- T4d. $f = \hat{f}(u) \sinh^{-2}(x-t)$, $\tilde{f} = \hat{f}(\tilde{u})(\tilde{x}-\tilde{t})^{-2}$,
 $\Phi: \tilde{t} = \frac{1}{2}e^{2t}, \tilde{x} = \frac{1}{2}e^{2x}, \tilde{u} = u$;
- T5. $f = e^u$, $\tilde{f} = e^{\tilde{u}}$,
 $\Phi: \tilde{t} = T(t), \tilde{x} = X(x), \tilde{u} = u - \ln(T_t X_x)$,

де (T, X) пробігає повний набір представників класів суміжності множини (T, X) , $T_t X_x > 0$ та $(T_{tt}, X_{xx}) \neq (0, 0)$, відносно дії групи, утво-

реної перетвореннями вигляду $\hat{t} = c_1 t + c_2$, $\hat{x} = c_1 x + c_3$, $\hat{T} = \tilde{c}_1 T + \tilde{c}_2$, $\hat{X} = \tilde{c}_1 X + \tilde{c}_3$, $c_1, c_2, c_3, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ та $\tilde{c}_3$ — довільні сталі, $c_1 \tilde{c}_1 \neq 0$.

На основі класифікації допустимих перетворень у класі $\mathcal{K}_2$ з точністю до $G_2^\sim$ -еквівалентності можна прямо знайти всі незалежні додаткові перетворення еквівалентності серед класифікаційних випадків теореми 4.3. Цими перетвореннями є

T1: випадок 9a $_{\hat{f}}$ $\rightarrow$ випадок 9a $_{-\hat{f}}$,

T3: випадок 9b $\rightarrow$ випадок 9a, випадок 12b $\rightarrow$ випадок 12a,

T4b: випадок 10b $\rightarrow$ випадок 10a,

T4c: випадок 10c $\rightarrow$ випадок 10a,

T4d: випадок 10d $\rightarrow$ випадок 10a.

4.2 Пониження порядку та інтегрування нормальних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

Розглянемо клас $\bar{\mathcal{L}}$ нормальних лінійних систем із n звичайних диференціальних рівнянь другого порядку вигляду

$$\mathbf{x}_{tt} = A(t)\mathbf{x}_t + B(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \quad (4.4)$$

з n невідомими функціями $x^1, \dots, x^n$, $\mathbf{x}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))^T$, де $n \geq 2$. Набір $\theta = (A, B, \mathbf{f})$ довільних елементів класу $\bar{\mathcal{L}}$ утворюють довільні гладкі $n \times n$ матричнозначні функції A та B змінної t і довільна гладка векторнозначна функція $\mathbf{f}$ змінної t .

Досліджено трансформаційні властивості та ліївські симетрії систем L_θ із класу $\bar{\mathcal{L}}$ та його підкласів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ та $\mathcal{L}''$, що виокремлюються відповідно умовами $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ у випадку класу $\mathcal{L}$, $A = 0$ і $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ у випадку класу $\mathcal{L}'$, та $A = 0$, $\text{tr } B = 0$, $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ у випадку класу $\mathcal{L}''$, а також для відповідних сингулярних та регулярних підкласів вказаних класів. Також продемонстровано як ліївські симетрії та перетворення еквівалентності

можна ефективно використовувати для пониження порядку та інтегрування систем із цих класів.

Наведемо твердження, що ілюструє використання ліївських симетрій для пониження порядку систем із регулярного підкласу $\mathcal{L}_1$ класу $\mathcal{L}$, тобто для систем, що нееквівалентні елементарній системі $\mathbf{x}_t = \mathbf{0}$.

Твердження 4.1. *Якщо система L_ϑ із класу $\mathcal{L}_1$ допускає відоме векторне поле ліївської симетрії з ненульовою t -компонентою, тоді її інтегрування зводиться за допомогою однієї квадратури та алгебраїчних операцій до побудови фундаментальної матриці лінійної системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, тобто загальний порядок системи, що інтегрується, можна ефективно понизити на n .*

Це твердження дає можливість записати покрокову процедуру інтегрування системи L_ϑ із класу $\mathcal{L}_1$, що використовує відоме векторне поле ліївської симетрії $Q = \tau \partial_t + (\eta^{ab} x^b + \chi^a) \partial_{x^a}$ цієї системи з $\tau(t) \neq 0$:

1. Замінімо векторне поле Q його відповідником $Q' = \tau \partial_t + \eta^{ab} x^b \partial_{x^a}$ з нульовими значеннями компонент χ^a .
2. Знаходимо матрицю H у результаті транспонування фундаментальної матриці розв'язків системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку $\tau \mathbf{y}_t + \eta \mathbf{y} = \mathbf{0}$.
3. Знаходимо матриці $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ трансформованої системи, які обов'язково є сталими.
4. Розв'язуємо систему $L_{\tilde{\vartheta}}$ зі сталими матричними коефіцієнтами $\tilde{\vartheta} = (\tilde{A}, \tilde{B})$.
5. Знаходимо функцію T , проінтегрувавши рівняння $T_t = 1/\tau$.
6. Відображаємо знайдений загальний розв'язок системи $L_{\tilde{\vartheta}}$ у загальний розв'язок системи L_ϑ за допомогою перетворення Φ^{-1} , а саме $\mathbf{x}(t) = H^{-1}(t) \tilde{\mathbf{x}}(T(t))$.

Наслідок 4.1. *Якщо система $\bar{L}_\theta$ з класу $\bar{\mathcal{L}}_1$ допускає відоме векторне поле ліївської симетрії з ненульовою t -компонентою, то її інтегрування можна звести до знаходження фундаментальної матриці лінійної системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, $n + 1$ квадратури та алгебраїчних операцій, тобто загальний порядок інтегрованої системи, можна ефективно понизити на n .*

Теорема 4.5. *Нехай система L_θ з класу $\mathcal{L}_1$ допускає алгебру ліївської інваріантності, що породжена двома відомими векторними полями ліївської симетрії з лінійно незалежними t -компонентами. Тоді інтегрування цієї системи можна звести за допомогою алгебраїчних операцій до побудови фундаментальної матриці лінійної системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яку можна розщепити на незачеплені між собою підсистеми, і кожна з цих підсистем є частково зачепленою (див. кінець доведення для більш специфічного опису блочної структури системи).*

Можна сформулювати наступну покрокову процедуру інтегрування системи L_θ з класу $\mathcal{L}_1$, що одночасно використовує специфічну пару її відомих векторних полів ліївської симетрії, $Q_\iota = \tau^\iota \partial_t + (\eta^{\iota ab} x^b + \chi^{\iota a}) \partial_{x^a}$, $\iota = 1, 2$, де t -компоненти τ^1 та τ^2 є лінійно незалежними:

1. Замінюємо векторні поля Q_ι на їх відповідники $Q'_\iota = \tau^\iota \partial_t + \eta^{\iota ab} x^b \partial_{x^a}$ з нульовими значеннями для $\chi^{\iota a}$.
2. Лінійно перекомбінуємо векторні поля Q'_1 та Q'_2 , щоб звести комутаційне співвідношення до вигляду $[Q'_1, Q'_2] = Q'_1$.
3. Покладемо $T := \tau^2 / \tau^1$ та $\zeta := \eta^2 - T\eta^1$.
4. Будуємо нормальну жорданову форму Λ матриці ζ та узагальнену модальну матрицю M для матриці ζ , яка пов'язана з матрицею Λ . Виберемо $\hat{H} := M^{-1}$. Отже, $\hat{H}\zeta\hat{H}^{-1} = \Lambda$.
5. Обчислюємо матрицю $\check{\eta}^1 := (\tau^1 \hat{H}_t + \hat{H}\eta^1)\hat{H}^{-1}$, яка є блочнодіагональною.

6. Знаходимо $\check{H}$ як результат транспонування (блочнодіагональної) фундаментальної матриці розв'язків розщепленої системи n звичайних диференціальних рівнянь першого порядку $\tau^1 \mathbf{y}_t + \check{\eta}^1 \mathbf{y} = \mathbf{0}$.
7. Покладемо $H = \check{H} \hat{H}$ та обчислюємо матриці $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$, які обов'язково є сталими.
8. Розв'язуємо систему $L_{\tilde{\vartheta}}$ зі сталими матричними коефіцієнтами $\tilde{\vartheta} = (\tilde{A}, \tilde{B})$.
9. Записуємо загальний розв'язок системи L_{ϑ} з отриманого загального розв'язку системи $L_{\tilde{\vartheta}}$ за допомогою перетворення Φ^{-1} : $\mathbf{x}(t) = H^{-1}(t) \tilde{\mathbf{x}}(T(t))$.

Єдиний крок, де потрібно інтегрувати лінійні системи звичайних диференціальних рівнянь — це крок 6. На кроці 9 зручно обчислити обернену матрицю H^{-1} до матриці H як $H^{-1} = M \check{H}^{-1}$.

Якщо всі елементарні дільники матриці Λ різні, то структура матриці $\check{\eta}^1$ особливо проста.

Наслідок 4.2. *Нехай система L_{ϑ} з класу $\mathcal{L}_1$ допускає алгебру лівської інваріантності, що породжена двома відомими векторними полями лівської симетрії $Q_{\iota} = \tau^{\iota} \partial_t + \eta^{ab} x^b \partial_{x^a}$, $\iota = 1, 2$, з лінійно незалежними τ^1 та τ^2 , де $[Q_1, Q_2] = Q_1$, та нехай матриця $\zeta := \eta^2 - (\tau^2/\tau^1) \eta^1$ не має елементарних дільників, що співпадають. Тоді цю систему можна повністю проінтегрувати за допомогою алгебраїчних операцій і щонайбільше $n + p - r$ квадратур, де p — кількість елементарних дільників матриці ζ та r — кількість різних власних значень матриці ζ .*

5 Точні розв'язки узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами

Багато модельних рівнянь для різноманітних хвильових процесів можуть бути зведені до класичного рівняння Кортевега–де Фріза (рівняння КдФ), модифікованого рівняння КдФ (рівняння мКдФ) або їхніх узагальнень [A. Jeffrey and T. Kakutani, Weak nonlinear dispersive waves: A discussion centered around the Korteweg-de Vries equation, SIAM Rev. **14** (1972), 582–643]. Це пояснює великий інтерес дослідників до пошуку нових і застосуванню вже відомих методів побудови точних розв'язків таких рівнянь. На жаль, більшість запропонованих методів призводять до еквівалентних форм вже відомих розв'язків. Це пояснюється тим, що еквівалентність моделей і відповідних розв'язків не досліджуються систематично. Головним інструментом для дослідження трансформаційних властивостей в класах диференціальних рівнянь є групоїди еквівалентності, строгу теорію яких розроблено в роботі [21].

У роботах [R.O. Popovych and O.O. Vaneeva, More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations: Part I, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **15** (2010), 3887–3899; O. Kuriksha, S. Pošta and O. Vaneeva, Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations, J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014), 045201] показано, що застосування перетворень еквівалентності є ефективним інструментом для знаходження точних розв'язків, розв'язання задач групової класифікації, а також дослідження інтегровності диференціальних рівнянь із частинними похідними [O.O. Vaneeva, R.O. Popovych and C. Sophocleous, Equivalence transformations in the study of integrability, Phys. Scr. **89** (2014), 038003].

Нижче об'єктом дослідження є клас узагальнених рівнянь мКдФ з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної, для побудови точних розв'язків яких буде застосовано метод еквівалентності. Цей метод по-

лягає у застосуванні перетворень з групи еквівалентності класу до відомих розв'язків та відповідних рівнянь з класу (зазвичай зі сталими коефіцієнтами) для побудови нових розв'язків подібних рівнянь з класу зі змінними коефіцієнтами. Цей клас містить узагальнені рівняння мКдФ зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + f(t)u^2u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u + p(t)u_x + k(t)uu_x + l(t) = 0, \quad (5.1)$$

де f, g, h, p, k, l – довільні гладкі функції змінної t з умовою $fg \neq 0$. Точні розв'язки деяких рівнянь з такого класу нещодавно було побудовано в роботі [R.M. El-Shiekh and M. Gaballah, New analytical solitary and periodic wave solutions for generalized variable-coefficients modified KdV equation with external-force term presenting atmospheric blocking in oceans, Journal of Ocean Engineering and Science, 7 (2022) 372–376], використовуючи такі методи, як прямий метод редукції Кларксона–Крускала та “анзац”-метод, що базується на сумісності з рівнянням Ріккаті.

Для цього класу знайдено групоїд еквівалентності, критерій звідності рівнянь зі змінними коефіцієнтами до рівнянь зі сталими коефіцієнтами з того самого класу та продемонстровано ефективність методу еквівалентності для побудови точних розв'язків.

Спочатку дослідимо групоїд еквівалентності класу (5.1), використовуючи прямий метод [J.G. Kingston and C. Sophocleous, On form-preserving point transformations of partial differential equations, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 1597–1619]. Справедлива

Теорема 5.1. *Клас (5.1) є нормалізованим у звичайному сенсі. Група еквівалентності цього класу складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \alpha(t), \quad \tilde{x} = \beta x + \gamma(t), \quad \tilde{u} = \theta(t)u + \psi(t), \quad (5.2)$$

де $\alpha, \gamma, \theta, \psi$ – гладкі функції змінної t , причому $\alpha_t \theta \neq 0$; β – ненульова стала. Перетворення довільних елементів класу (5.1) мають вигляд:

$$\tilde{f} = \frac{\beta}{\alpha_t \theta^2} f, \quad \tilde{g} = \frac{\beta^3}{\alpha_t} g, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\alpha_t} \left(h - \frac{\theta_t}{\theta} \right),$$

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \frac{1}{\alpha_t} \left(\beta p + \beta \frac{\psi^2}{\theta^2} f - \beta \frac{\psi}{\theta} k + \gamma_t \right), \quad \tilde{k} = \frac{\beta}{\alpha_t \theta} \left(k - 2 \frac{\psi}{\theta} f \right), \\ \tilde{l} &= \frac{1}{\alpha_t} \left(\theta l - \psi h - \psi_t + \psi \frac{\theta_t}{\theta} \right).\end{aligned}$$

Знайдений групоїд еквівалентності дозволяє сформулювати критерій звідності рівнянь з класу (5.1) до класичного рівняння мКдФ

$$\tilde{u}_{\tilde{t}} + 6\tilde{u}^2\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0. \quad (5.3)$$

Рівняння з класу (5.1) є подібним до класичного рівняння мКдФ (5.3) тоді і тільки тоді, коли його коефіцієнти задовольняють умовам:

$$h = \frac{1}{2} \frac{f_t}{f} - \frac{1}{2} \frac{g_t}{g}, \quad l = \frac{k}{2f} \left(\frac{k_t}{k} - \frac{1}{2} \frac{f_t}{f} - \frac{1}{2} \frac{g_t}{g} \right). \quad (5.4)$$

Відповідне перетворення з групи $G^\sim$ має вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= c_1^3 \int g(t) dt + c_0, \quad \tilde{x} = c_1 \left(x + \int \left(\frac{k(t)^2}{4f(t)} - p(t) \right) dt \right) + c_2, \\ \tilde{u} &= \sqrt{\frac{f(t)}{6c_1^2 g(t)}} \left(u + \frac{k(t)}{2f(t)} \right).\end{aligned} \quad (5.5)$$

N -солітонний розв'язок рівняння (5.3) було побудовано методом Хірої в роботі [Ablowitz M.J. and Segur H., *Solitons and the inverse scattering transform*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1981]. Одно- та двосолітонний розв'язки рівняння (5.3) мають вигляд

$$\tilde{u} = a + \frac{k_0^2}{\sqrt{4a^2 + k_0^2} \cosh z + 2a}, \quad z = k_0 \tilde{x} - k_0(6a^2 + k_0^2)\tilde{t} + b, \quad (5.6)$$

$$\tilde{u} = \frac{e^{\theta_1} \left(1 + \frac{A}{4a_2^2} e^{2\theta_2} \right) + e^{\theta_2} \left(1 + \frac{A}{4a_1^2} e^{2\theta_1} \right)}{\left(\frac{1}{2a_1} e^{\theta_1} + \frac{1}{2a_2} e^{\theta_2} \right)^2 + \left(1 - \frac{A}{4a_1 a_2} e^{\theta_1 + \theta_2} \right)^2}, \quad (5.7)$$

де k_0, a, b, a_i, b_i – довільні сталі, $\theta_i = a_i \tilde{x} - a_i^3 \tilde{t} + b_i$, $i = 1, 2$; $A = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\right)^2$. Раціональні розв’язки, що є граничними випадками одно- та двосолітонного розв’язків, такі:

$$\tilde{u} = a - \frac{4a}{4a^2 z^2 + 1}, \quad (5.8)$$

$$\tilde{u} = a - \frac{12a \left(z^4 + \frac{3}{2a^2} z^2 - \frac{3}{16a^4} - 24\tilde{t}z \right)}{4a^2 \left(z^3 + 12\tilde{t} - \frac{3}{4a^2} z \right)^2 + 9 \left(z^2 + \frac{1}{4a^2} \right)^2}, \quad (5.9)$$

де $z = \tilde{x} - 6a^2 \tilde{t}$; a – довільна дійсна стала. Ці розв’язки, зокрема, можна знайти у довіднику [A.D. Polyanin and V.F. Zaitsev, *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2004]. Зауважимо, що розв’язок (5.7) та розв’язок (5.9) наведено там з одруківками.

Використовуючи формули перетворень (5.5) та розв’язки (5.6)–(5.9), методом еквівалентності можна побудувати точні розв’язки рівнянь з класу

$$u_t + f u^2 u_x + g u_{xxx} + \frac{1}{2} \left(\frac{f_t}{f} - \frac{g_t}{g} \right) u + p u_x + k u u_x + \frac{k}{2f} \left(\frac{k_t}{k} - \frac{1}{2} \frac{f_t}{f} - \frac{1}{2} \frac{g_t}{g} \right) = 0, \quad (5.10)$$

де f, h, k, p – довільні гладкі функції змінної t , $f \neq 0$.

Наприклад, розв’язок рівняння (5.10), отриманий з односолітонного розв’язку (5.6) має вигляд

$$u = \sqrt{\frac{6c_1 g(t)}{f(t)}} \left(a + \frac{k_0^2}{\sqrt{4a^2 + k_0^2} \cosh z + 2a} \right) - \frac{k}{2f}.$$

Тут $z = k_0 \left(c_1 \left(x + \int \left(\frac{k(t)^2}{4f(t)} - p(t) \right) dt \right) + c_2 \right) - k_0(6a^2 + k_0^2)(c_1^3 \int g(t) dt + c_0) + b$, де k_0, a, b – довільні сталі. Аналогічно будуються двосолітонний та раціональні розв’язки рівняння (5.10).

6 Алгебраїчний метод групової класифікації для ненормалізованих класів: нелінійні хвильові й еліптичні рівняння

Хвильові й еліптичні рівняння відіграють важливу роль у фізиці, оскільки хвильові рівняння моделюють, зокрема, коливні процеси у суцільних середовищах, а еліптичні рівняння описують низку стаціонарних процесів. З точки зору групового аналізу такі рівняння є складними, оскільки всі незалежні змінні в них входять на рівних умовах. Симетрії хвильових й еліптичних рівнянь Лі з двома незалежними змінними досліджувались у багатьох роботах. Зауважимо, що у рамках групового аналізу диференціальних рівнянь хвильові й еліптичні рівняння вперше розглянуто в роботах Софуса Лі при класифікації лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з двома незалежних змінними і вивченні контактних перетворень між нелінійними рівняннями Клейна–Гордона $d^2z/dx dy = F(z)$. Точні розв'язки нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь, знайдені симетрійними методами і методом функціонального розділення змінних, наведено, зокрема, у довіднику [Ibragimov N.H. (ed.), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 1. Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994].

У цьому підрозділі вичерпно розв'язано задачу групової класифікації для класу $\mathcal{W}$ нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь вигляду

$$u_{tt} = f(x, u)u_{xx} + g(x, u). \quad (6.1)$$

Для точного опису класу $\mathcal{W}$, який також називатимемо класом (6.1), необхідно накласти дві додаткові умови на набір довільних елементів $\theta = (f, g)$. Перша природна умова — це $f \neq 0$. Позначимо через $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ надклас рівнянь (6.1) з $f \neq 0$, який містить як лінійні так і нелінійні рівняння. Для того, щоб гарантувати нелінійність рівнянь з класу $\mathcal{W}$, накладемо ще одну умову $(f_u, g_{uu}) \neq (0, 0)$. Підклас $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ лінійних рівнянь $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ —

це доповнення до класу $\mathcal{W}$ у класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$, тобто $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{\text{gen}} \setminus \mathcal{W}_{\text{lin}}$. Зауважимо, що лінійні і нелінійні рівняння з підкласів $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ і $\mathcal{W}$ класу $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ не пов'язані між собою точковими перетвореннями і мають різні симетрійні властивості. Лінійний хвильові й еліптичні рівняння з двома незалежними змінними вичерпно досліджені в рамках класичного групового аналізу. Знак функції f несуттєвий під час групової класифікації класу $\mathcal{W}$, що поєднує класифікацію підкласу гіперболічних рівнянь, для яких $f > 0$, і підкласу еліптичних рівнянь, для яких $f < 0$. Гіперболічні й еліптичні рівняння також не пов'язані між собою точковими перетвореннями. Зауважимо, що тут базове поле дійсне; перехід на комплексний випадок потребує незначної модифікації.

Задачу часткової попередньої групової класифікації для класу $\mathcal{W}$ розглянуто в роботі [Song L. and Zhang H., *Nonlinear Anal.* **70** (2009), 3512–3521]. А саме, було виокремлено шестивимірну підалгебру $\mathfrak{g}_6$ нескінченновимірної алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ класу $\mathcal{W}$, а потім зроблено спробу прокласифікувати лише одновимірні підалгебри $\mathfrak{g}_6$ з точністю до еквівалентності, породженою відповідною шестивимірною підгрупою G_6 нескінченновимірної групи еквівалентності $G^\sim$ класу (6.1). G_6 -еквівалентність є слабшою, ніж $G^\sim$ -еквівалентність, ось чому класифікація в роботі Song та Zhang призвела до великої кількості класифікаційних випадків (двадцять чотири G_6 -нееквівалентний випадки), більшість з яких є $G^\sim$ -еквівалентними один одному. З точністю до $G^\sim$ -еквівалентності всі ці випадки вкладаються в перші чотири випадки з табл. 6.1. Окрім цього, багато випадків було пропущено навіть у рамках поставленої задачі часткової попередньої групової класифікації. У цьому підрозділі, що ґрунтується на результатах роботи [21], суттєво покращено й узагальнено результати роботи Song та Zhang. Важливо зауважити, що клас $\mathcal{W}$ не є ні нормалізованим, ні напівнормалізованим. Його навіть не можна розбити на неперетинні нормалізовані чи напівнормалізовані підкласи. Також не існує такої сім'ї точкових перетворень, щоб відобра-

зити цей клас на клас з кращими трансформаційними властивостями. Ось чому лівські симетрії рівнянь з класу $\mathcal{W}$ не можна вичерпно прокласифікувати існуючими версіями алгебраїчного методу групової класифікації. З іншого боку клас $\mathcal{W}$ непридатний для того, щоб розв'язувати його задачу групової класифікації прямим методом, включно з методом розгалуженого розщеплення як його просуненою версію.

Ось чому для розв'язання повної задачі повної групової класифікації для класу $\mathcal{W}$, нами запропоновано нову версію алгебраїчного методу групової класифікації для ненормалізованих класів (систем) диференціальних рівнянь, що ґрунтується на класифікації допустимих перетворень з точністю до еквівалентності, породженої групою еквівалентності цього класу. Нами також розвинуто теорію допустимих перетворень та методи їх класифікації. Зокрема, модифіковано поняття еквівалентності допустимих перетворень і введено поняття породжувальної множини групоїда еквівалентності, а також запропоновано кілька нових технік класифікації допустимих перетворень для ненормалізованих класів. Показано, що метод розгалуженого розщеплення й алгебраїчний метод Гайдона знаходження повної групи точкових симетрій певної системи диференціальних рівнянь можна поширити на допустимі перетворення. Для поширення алгебраїчного методу групової класифікації на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь, введено поняття регулярних і сингулярних розширень лівської симетрії в класі диференціальних рівнянь $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Регулярні розширення лівської симетрії асоційовані з підалгебрами алгебри еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Ці розширення можна побудувати класичним алгебраїчним методом при виконанні повної попередньої групової класифікації класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Сингулярні розширення лівської симетрії можуть включати тільки ті системи з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ що є джерелами допустимих перетворень у класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, не породжених перетвореннями еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Таким чином, задача групової класифікації класу $\mathcal{W}$ є ілюстративним прикладом для запропонованого методу.

6.1 Попереднє дослідження допустимих перетворень

Щоб побудувати повну точкову групу еквівалентності $G^\sim$ класу (6.1) (яка включає як неперервні, так і дискретні перетворення еквівалентності) і групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ цього класу, застосуємо прямий метод знаходження допустимих перетворень [Kingston J.G. and Sophocleous C., On form-preserving point transformations of partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 1597–1619]. Розгляд розпочнемо з пошуку допустимих перетворень у класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$, які складають групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_{\text{gen}}^\sim$ цього класу. Це також дозволить отримати групу еквівалентності $G^\sim$ і групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу (6.1).

Позначимо через $\mathcal{L}_\theta$ рівняння з класу $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ що відповідає певному фіксованому значенню набору довільних елементів $\theta = (f, g)$. Допустиме перетворення в класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ — це трійка $(\theta, \Phi, \tilde{\theta})$, де $\theta = (f, g)$ і $\tilde{\theta} = (\tilde{f}, \tilde{g})$ — початковий і кінцевий набори довільних елементів в $\mathcal{T}$, а

$$\Phi: \quad \tilde{t} = T(t, x, u), \quad \tilde{x} = X(t, x, u), \quad \tilde{u} = U(t, x, u) \quad (6.2)$$

з ненульовим якобіаном $J := \partial(T, X, U)/\partial(t, x, u)$ — точкове перетворення в просторі з координатами (t, x, u) , що переводить рівняння $\mathcal{L}_\theta$ в рівняння $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$. Отже, шукаємо всі точкові перетворення, які відображають фіксоване рівняння $\mathcal{L}_\theta$ вигляду (6.1) в рівняння $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ такого самого вигляду $\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u})\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{u})$ в змінних з тильдами.

Для виконання перетворення Φ необхідно знайти його продовження на похідні залежної змінної u до другого порядку включно. Для цього подіємо операторами повної похідної D_t і D_x на вираз $\tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}) = U(t, x, u)$, вважаючи $\tilde{t} = T(t, x, u)$ і $\tilde{x} = X(t, x, u)$, і розв'язуємо отримані вирази відносно u_{tt} і u_{xx} . Виведені вирази для других похідних підставляємо в рівняння (6.1):

$$\begin{aligned} & \tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}}(D_t T)^2 + 2\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}}(D_t T)(D_t X) + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(D_t X)^2 + \tilde{u}_{\tilde{t}}V^t T + \tilde{u}_{\tilde{x}}V^t X \\ & - V^t U = f[\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}}(D_x T)^2 + 2\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}}(D_x T)(D_x X) + \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}(D_x X)^2 \\ & + \tilde{u}_{\tilde{t}}V^x T + \tilde{u}_{\tilde{x}}V^x X - V^x U] - g(\tilde{u}_{\tilde{t}}T_u + \tilde{u}_{\tilde{x}}X_u - U_u), \end{aligned} \quad (6.3)$$

де використано позначення $V^t := \partial_{tt} + 2u_t\partial_{tu} + u_t^2\partial_{uu}$ і $V^x := \partial_{xx} + 2u_x\partial_{xu} + u_x^2\partial_{uu}$. Підстановка $\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{t}} = \tilde{f}\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{g}$ в силу $\mathcal{L}_{\tilde{g}}$ в рівняння (6.3) призводить до тотожності, яку можна розщепити за змінними $\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}}$ і $\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}$. Зокрема, коефіцієнт біля $\tilde{u}_{\tilde{t}\tilde{x}}$ в (6.3) дає рівняння

$$(T_t + T_u u_t)(X_t + X_u u_t) = f(T_x + T_u u_x)(X_x + X_u u_x). \quad (6.4)$$

Рівняння (6.4) можна далі розщепити за степенями u_t і u_x :

$$T_u X_u = 0, \quad T_u X_t + T_t X_u = 0, \quad T_u X_x + T_x X_u = 0, \quad (6.5)$$

$$T_t X_t = f T_x X_x. \quad (6.6)$$

З цих рівнянь випливають умови $T_u = X_u = 0$, які означають, що компоненти для незалежних змінних будь-якого допустимого точкового перетворення в класі (6.1) залежать лише від цих змінних. В силу цієї умови рівняння (6.5) стають тотожностями, а розщеплення рівняння (6.3) за $\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}}$ дає рівняння

$$\tilde{f}T_t^2 + X_t^2 = f(\tilde{f}T_x^2 + X_x^2), \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}T_t^2 + \tilde{u}_{\tilde{t}}T_{tt} + \tilde{u}_{\tilde{x}}X_{tt} - (U_{tt} + 2U_{tu}u_t + U_{uu}u_t^2) \\ = f(\tilde{g}T_x^2 + \tilde{u}_{\tilde{t}}T_{xx} + \tilde{u}_{\tilde{x}}X_{xx} - (U_{xx} + 2U_{xu}u_x + U_{uu}u_x^2)) + gU_u. \end{aligned}$$

Розщеплення останнього рівняння за змінними $\tilde{u}_{\tilde{t}}$ і $\tilde{u}_{\tilde{x}}$ призводить до рівнянь $U_{uu} = 0$ і

$$T_{tt} - 2\frac{U_{ut}}{U_u}T_t = f\left(T_{xx} - 2\frac{U_{ux}}{U_u}T_x\right), \quad (6.8)$$

$$X_{tt} - 2\frac{U_{ut}}{U_u}X_t = f\left(X_{xx} - 2\frac{U_{ux}}{U_u}X_x\right), \quad (6.9)$$

$$\tilde{g}T_t^2 - U_{tt} + 2\frac{U_{ut}}{U_u}U_t = f\left(\tilde{g}T_x^2 - U_{xx} + 2\frac{U_{ux}}{U_u}U_x\right) + gU_u. \quad (6.10)$$

З рівняння $U_{uu} = 0$ випливає, що $U = U^1(t, x)u + U^0(t, x)$. Умова невиродженості перетворення Φ $T_u = X_u = 0$ зводиться до нерівності $U_u(T_t X_x - T_x X_t) \neq 0$, а тому $T_t X_x - T_x X_t \neq 0$ і $U^1 := U_u \neq 0$. зауважимо,

що рівняння $T_u = X_u = U_{uu} = 0$ для допустимих точкових перетворень у класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ можна також отримати з пункту (с) теореми 4.4b з роботи [Kingston J.G. and Sophocleous C., On form-preserving point transformations of partial differential equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998), 1597–1619]. Переписавши рівняння (6.7) як $\tilde{f}(T_t^2 - fT_x^2) + X_t^2 - fX_x^2 = 0$, бачимо, що $T_t^2 - fT_x^2 \neq 0$, $X_t^2 - fX_x^2 \neq 0$. Дійсно, інакше $f > 0$, $T_t = \varepsilon_1 f^{1/2} T_x \neq 0$, де $\varepsilon_1 = \pm 1$, а тому з рівняння (6.6) випливало би $X_t = \varepsilon_1 f^{1/2} X_x$, але це суперечить невідодженості перетворення Φ . Тому $\tilde{f}_u = 0$, якщо $f_u = 0$. І навпаки, якщо $\tilde{f}_u = 0$, то можна вивести $f_u = 0$. Отже, $\tilde{f}_u = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f_u = 0$.

Оскільки вираз $T_t^2 - fT_x^2$ ненульовий, з рівняння (6.10) випливає, що $\tilde{f}_u = \tilde{g}_{uu} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f_u = g_{uu} = 0$.

Інваріантність умов $f_u = g_{uu} = 0$ під дією допустимих перетворень у класі $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ означає, що групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_{\text{gen}}^\sim$ класу $\mathcal{W}_{\text{gen}}$ можна зобразити як неперетинне об'єднання групоїдів еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ і $\mathcal{G}_{\text{lin}}^\sim$ підкласів $\mathcal{W}$ і $\mathcal{W}_{\text{lin}}$, а саме $\mathcal{G}_{\text{gen}}^\sim = \mathcal{G}^\sim \sqcup \mathcal{G}_{\text{lin}}^\sim$. Іншими словами, рівняння з класу $\mathcal{W}$ не пов'язані з рівняннями з класу $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ точковими перетвореннями. Це виправдовує виключення класу $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ з розгляду, оскільки ліівські симетрії рівнянь з класу $\mathcal{W}_{\text{lin}}$ відомі.

6.2 Група еквівалентності й алгебра еквівалентності

Знайдемо групу еквівалентності класу (6.1), оскільки вона необхідна для вичерпного опису допустимих перетворень, а також для аналізу визначальних рівнянь на компоненти операторів ліівської симетрії. При обчисленні перетворень еквівалентності довільні елементи f і g варіюються, отже рівняння (6.6)–(6.10) можна розщепити за цими довільними елементами. З рівнянь (6.6) й умови невідодженості $T_t X_x - T_x X_t \neq 0$ випливає, що або $T_t = X_x = 0$ і $T_x X_t \neq 0$, або $T_x = X_t = 0$ і $T_t X_x \neq 0$.

Для $T_t = X_x = 0$, рівняння (6.7) можна спростити до вигляду $X_t^2 = f\tilde{f}T_x^2$, тобто $T_x^2 f = X_t^2/\tilde{f}$. Продиференціюємо останнє рівняння

за змінною t і розщепимо отримане рівняння відносно функції $\tilde{f}$ і її похідних, що призводить до рівняння $X_t = 0$, яке суперечить умові невідродженості.

Отже, $X_t = T_x = 0$ і так $T = T(t)$, $X = X(x)$, де $T_t X_x \neq 0$. Тоді рівняння (6.7) зводиться до вигляду $\tilde{f} T_t^2 = f X_x^2$ і диференціювання його за змінною t дає

$$2T_t T_{tt} \tilde{f} + T_t^2 U_t \tilde{f}_{\tilde{u}} = 0. \quad (6.11)$$

Оскільки рівняння (6.11) має справджуватись для всіх $\tilde{f}$, можна розщепити його відносно $\tilde{f}$ і $\tilde{f}_{\tilde{u}}$. Таким чином знаходимо, що $T_{tt} = 0$ і $U_t = 0$. Рівняння (6.8) стає тотожністю в силу наведених вище рівнянь, а рівняння (6.9) зводиться до $(U_u^2/X_x)_x = 0$. Рівняння (6.10) дає перетворення для довільного елемента g . Отже, доведено теорему.

Теорема 6.1. *Звичайну групу еквівалентності $G^\sim$ класу (6.1) складають перетворення*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= c_1 t + c_0, \quad \tilde{x} = \varphi(x), \quad \tilde{u} = c_2 |\varphi_x|^{1/2} u + \psi(x), \quad \tilde{f} = \frac{\varphi_x^2}{c_1^2} f, \\ \tilde{g} &= \frac{c_2}{c_1^2} |\varphi_x|^{1/2} g - \frac{1}{c_1^2} \left(c_2 \frac{2\varphi_{xxx}\varphi_x - 3\varphi_{xx}^2}{4|\varphi_x|^{3/2}} u + \psi_{xx} - \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x} \psi_x \right) f, \end{aligned}$$

де c_0, c_1, c_2 — довільні сталі, що задовольняють умову $c_1 c_2 \neq 0$; φ, ψ — довільні гладкі функції змінної x з $\varphi_x \neq 0$.

Наслідок 6.1. *Клас (6.1) допускає точно три дискретних перетворення еквівалентності, що є незалежними з точністю до їх композиції між собою і з неперервними перетвореннями еквівалентності в цьому класі: $(t, x, u, f, g) \mapsto (-t, x, u, f, g)$, $(t, x, u, f, g) \mapsto (t, -x, u, f, g)$, $(t, x, u, f, g) \mapsto (t, x, -u, f, -g)$.*

З теореми 6.1 випливає, що будь-яке перетворення $\mathcal{T}$ з групи $G^\sim$ можна зобразити як композицію $\mathcal{T} = \mathcal{P}^t(c_0) \circ \mathcal{D}^t(c_1) \circ \mathcal{Z}(\psi) \circ \mathcal{D}(\varphi) \circ \mathcal{D}^u(c_2)$ елементарних перетворень еквівалентності, кожне з яких належить сім'ї

перетворень еквівалентності, параметризованих або сталим, або функціональним параметром:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^t(c_0): \quad & \tilde{t} = t + c_0, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u, \quad \tilde{f} = f, \quad \tilde{g} = g, \\
\mathcal{D}^t(c_1): \quad & \tilde{t} = c_1 t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u, \quad \tilde{f} = c_1^{-2} f, \quad \tilde{g} = c_1^{-2} g, \\
\mathcal{D}(\varphi): \quad & \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = \varphi, \quad \tilde{u} = |\varphi_x|^{\frac{1}{2}} u, \quad \tilde{f} = \varphi_x^2 f, \quad \tilde{g} = |\varphi_x|^{\frac{1}{2}} g + \alpha^\varphi(x) u f, \\
\mathcal{D}^u(c_2): \quad & \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = c_2 u, \quad \tilde{f} = f, \quad \tilde{g} = c_2 g, \\
\mathcal{Z}(\psi): \quad & \tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = u + \psi, \quad \tilde{f} = f, \quad \tilde{g} = g - \psi_{xx} f,
\end{aligned}$$

де параметри описано в теоремі 6.1, а $\alpha^\varphi(x) := \frac{2\varphi_{xxx}\varphi_x - 3\varphi_{xx}^2}{4|\varphi_x|^{3/2}}$.

Алгебру еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ класу (6.1) породжують оператори

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^t &= \partial_t, \quad \mathcal{D}^t = t\partial_t - 2f\partial_f - 2g\partial_g, \quad \mathcal{D}^u = u\partial_u + g\partial_g, \\
\mathcal{D}(\zeta) &= \zeta\partial_x + \frac{1}{2}\zeta_x u\partial_u + 2\zeta_x f\partial_f + \frac{1}{2}(\zeta_x g - \zeta_{xxx} u f)\partial_g, \\
\mathcal{Z}(\chi) &= \chi\partial_u - \chi_{xx} f\partial_g,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

де $\zeta = \zeta(x)$, $\chi = \chi(x)$ — гладкі функції змінної x . Ненульові комутаційні співвідношення між цими векторними полями вичерпуються такими:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{P}^t, \mathcal{D}^t] &= \mathcal{P}^t, \quad [\mathcal{Z}(\chi), \mathcal{D}^u] = \mathcal{Z}(\chi), \\
[\mathcal{D}(\zeta^1), \mathcal{D}(\zeta^2)] &= \mathcal{D}(\zeta^1 \zeta_x^2 - \zeta_x^1 \zeta^2), \quad [\mathcal{D}(\zeta), \mathcal{Z}(\chi)] = \mathcal{Z}(\zeta \chi_x - \frac{1}{2} \zeta_x \chi).
\end{aligned}$$

6.3 Визначальні рівняння для пошуку лівських симетрій

Припустимо, що векторне поле

$$Q = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u$$

належить максимальній алгебрі лівської інваріантності $\mathfrak{g}^{\max}$ рівняння $\mathcal{L}$: $L = 0$ з класу (6.1), тобто, породжує однопараметричну групу лівських симетрій рівняння $\mathcal{L}$. З критерію лівської інваріантності знаходимо такі визначальні рівняння на компоненти векторного поля Q :

$$\xi_t = \tau_x f, \tag{6.13}$$

$$\tau_{tt} - \tau_{xx}f = 2\eta_{tu}, \quad (6.14)$$

$$\xi_{tt} - \xi_{xx}f = -2\eta_{xu}f, \quad (6.15)$$

$$\xi f_x + \eta f_u = 2(\xi_x - \tau_t)f, \quad (6.16)$$

$$\xi g_x + \eta g_u = (\eta_u - 2\tau_t)g - \eta_{xx}f + \eta_{tt}. \quad (6.17)$$

Для побудови алгебри ядра ліївської інваріантності $\mathfrak{g}^\cap$ класу (6.1), розщепимо визначальні рівняння відносно довільних елементів і їх похідних, З розщеплених рівнянь випливає, що $\mathfrak{g}^\cap = \langle \partial_t \rangle$. Отже, ліївські симетрії, які допускає кожне рівнянням з класу (6.1), вичерпують перетворення вигляду $(t, x, u) \mapsto (t + c_0, x, u)$, де c_0 — довільна стала.

6.4 Результати класифікації

Результати групової класифікації класу (6.1) сформульовано в теоремі.

Теорема 6.2. *Усі $G^\sim$ -нееквівалентні (а також точково-нееквівалентні) випадки розширення ліївської симетрії алгебри ядра основних груп $\mathfrak{g}^\cap = \langle \partial_t \rangle$ у класі (6.1) вичерпують випадки, наведені в табл. 6.1.*

У залежності від розмірності розширення ліївської симетрії (один, два, три, чотири або нескінченність), випадки табл. 6.1 поділено на групи горизонтальними лініями. зауважимо, що всі розширення ліївської симетрії розмірностей нескінченність і чотири для рівнянь з класу (6.1) не асоційовані з підалгебрами алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$, тобто є сингулярними. Використання дворівневої нумерації для класифікація випадків, наведених у табл. 6.1, пов'язано з наявністю додаткових перетворень еквівалентності між випадками. А саме, випадки позначені одними й тими самими арабськими цифрами й різними літерами $G^\sim$ -нееквівалентні, але еквівалентні відносно додаткових перетворень еквівалентності. Щоб побудувати всі додаткові перетворення еквівалентності серед $G^\sim$ -нееквівалентних випадків класифікації, потрібно прокласифікувати допустимі

Табл. 6.1: $G^\sim$ -нееквівалентний розширення лівської симетрії $\mathfrak{g}^\cap = \langle \partial_t \rangle$ в класі (6.1).

№	f	g	Базис розширення
1	$\hat{f}(\omega) u ^p$	$\hat{g}(\omega) u ^p u$	$-pt\partial_t + 2\delta\partial_x + 2u\partial_u$
2	$\hat{f}(u)e^x$	$\hat{g}(u)e^x$	$t\partial_t - 2\partial_x$
3	$\hat{f}(x)e^u$	$\hat{g}(x)e^u$	$t\partial_t - 2\partial_u$
4	$\hat{f}(u)$	$\hat{g}(u)$	∂_x
5a	ε	$\hat{g}(u)$	$\partial_x, x\partial_t + \varepsilon t\partial_x$
5b	1	$\hat{g}(u)e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^{x+t}), \mathcal{R}(e^{x-t})$
5c	-1	$\hat{g}(u)e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^x \cos t), \mathcal{R}(e^x \sin t)$
6a	ε	$\hat{g}(u)x^{-2}$	$t\partial_t + x\partial_x, (t^2 + \varepsilon x^2)\partial_t + 2tx\partial_x$
6b	1	$\hat{g}(u) \cos^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \cos x), \mathcal{R}(\sin t \cos x)$
6c	1	$-\hat{g}(u) \cosh^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \cosh x), \mathcal{R}(e^{-t} \cosh x)$
6d	1	$\hat{g}(u) \sinh^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \sinh x), \mathcal{R}(e^{-t} \sinh x)$
6e	-1	$\hat{g}(u) \cos^{-2} x$	$\mathcal{R}(e^t \cos x), \mathcal{R}(e^{-t} \cos x)$
6f	-1	$\hat{g}(u) \sinh^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \sinh x), \mathcal{R}(\sin t \sinh x)$
7	-1	$\hat{g}(u) \cosh^{-2} x$	$\mathcal{R}(\cos t \cosh x), \mathcal{R}(\sin t \cosh x)$
8a	εu^{-4}	$\mu(x)u^{-3}$	$2t\partial_t + u\partial_u, t^2\partial_t + tu\partial_u$
8b	εu^{-4}	$\mu(x)u^{-3} + u$	$e^{2t}(\partial_t + u\partial_u), e^{-2t}(\partial_t - u\partial_u)$
8c	εu^{-4}	$\mu(x)u^{-3} - u$	$\cos(2t)\partial_t - \sin(2t)u\partial_u, \sin(2t)\partial_t + \cos(2t)u\partial_u$
9	$\varepsilon e^x u ^p$	$\nu e^x u ^p u$	$p\partial_x - u\partial_u, t\partial_t - 2\partial_x$
10	$\varepsilon x^2 e^u$	νe^u	$x\partial_x, t\partial_t - 2\partial_u$
11	$\hat{f}(u)$	0	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x$
12	εe^u	$\varepsilon' e^{qu}$	$\partial_x, qt\partial_t + (q-1)x\partial_x - 2\partial_u$
13	$\varepsilon u ^p$	$\varepsilon' u ^q$	$\partial_x, (1-q)t\partial_t + (1+p-q)x\partial_x + 2u\partial_u$
14a	εu^{-4}	$\varepsilon' u^{-3}$	$2t\partial_t + u\partial_u, t^2\partial_t + tu\partial_u, \partial_x$
14b	εu^{-4}	$\varepsilon' u^{-3} + u$	$e^{2t}(\partial_t + u\partial_u), e^{-2t}(\partial_t - u\partial_u), \partial_x$
14c	εu^{-4}	$\varepsilon' u^{-3} - u$	$\cos(2t)\partial_t - \sin(2t)u\partial_u, \sin(2t)\partial_t + \cos(2t)u\partial_u, \partial_x$
14d	εu^4	$\varepsilon' u$	$\partial_x, 2x\partial_x + u\partial_u, x^2\partial_x + xu\partial_u$

Табл. 6.1: продовження.

15a	εu^{-4}	$\nu x^{-2}u^{-3}$	$2t\partial_t + u\partial_u, t^2\partial_t + tu\partial_u, 2x\partial_x - u\partial_u$
15b	εu^{-4}	$\nu x^{-2}u^{-3} + u$	$e^{2t}(\partial_t + u\partial_u), e^{-2t}(\partial_t - u\partial_u), 2x\partial_x - u\partial_u$
15c	εu^{-4}	$\nu x^{-2}u^{-3} - u$	$\cos(2t)\partial_t - \sin(2t)u\partial_u, \sin(2t)\partial_t + \cos(2t)u\partial_u, 2x\partial_x - u\partial_u$
16	$\varepsilon u ^p$	0	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x, px\partial_x + 2u\partial_u$
17	εe^u	0	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x, x\partial_x + 2\partial_u$
18a	ε	$\varepsilon' u ^q$	$\partial_x, t\partial_x + \varepsilon x\partial_t, (q-1)t\partial_t + (q-1)x\partial_x - 2u\partial_u$
18b	1	$\varepsilon' u ^q e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^{x+t}), \mathcal{R}(e^{x-t}), (q-1)\partial_x + 2u\partial_u$
18c	-1	$\varepsilon' u ^q e^{-2x}$	$\mathcal{R}(e^x \cos t), \mathcal{R}(e^x \sin t), (q-1)\partial_x + 2u\partial_u$
19a	εu^{-4}	0	$2t\partial_t + u\partial_u, t^2\partial_t + tu\partial_u, \partial_x, 2x\partial_x - u\partial_u$
19b	εu^{-4}	u	$e^{2t}(\partial_t + u\partial_u), e^{-2t}(\partial_t - u\partial_u), \partial_x, 2x\partial_x - u\partial_u$
19c	εu^{-4}	$-u$	$\cos(2t)\partial_t - \sin(2t)u\partial_u, \sin(2t)\partial_t + \cos(2t)u\partial_u, \partial_x, 2x\partial_x - u\partial_u$
19d	εu^4	0	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x, 2x\partial_x + u\partial_u, x^2\partial_x + xu\partial_u$
20	ε	$\varepsilon' e^u$	$\tau\partial_t + \xi\partial_x - 2\tau_t\partial_u$

Тут $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1 \bmod G^\sim$, $\delta \in \{0, 1\} \bmod G^\sim$, p, q, ν — довільні сталі з $p \neq 0$ і $\nu \neq 0$. Додатково, $p \neq \pm 4$ у випадку 16, а $q \neq 0, 1$ у випадках 18a–18c. У випадку 1, $\omega := x - \delta \ln |u|$. $\mathcal{R}(\Phi) := \Phi_x \partial_t + \Phi_t \partial_x$. Пара (τ, ξ) гладких функцій від змінних (t, x) пробігає множину розв'язків системи $\tau_t = \xi_x$, $\xi_t = \varepsilon \tau_x$.

перетворення в цьому класі з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. Справедлива теорема.

Теорема 6.3. *Породжувальну множину $\mathcal{B}$ допустимих перетворень класу (6.1), що є мінімальною і внутрішньо сумісною з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, складають такі сім'ї допустимих перетворень, де $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' = \pm 1$:*

$$\text{T1. } f_x = g_x = 0, \quad f_u \neq 0 \quad \text{або} \quad f = 1, \quad \tilde{f} = 1/f, \quad \tilde{g} = -g/f,$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = x, \quad \tilde{x} = t, \quad \tilde{u} = u;$$

$$\text{T2. } f = \varepsilon u^{-4}, \quad g = \mu(x)u^{-3} + \sigma u, \quad \sigma \in \{-1, 0, 1\}, \quad \tilde{f} = \varepsilon \tilde{u}^{-4}, \quad \tilde{g} = \mu(\tilde{x})\tilde{u}^{-3}, \\ \mu = \mu(x) \text{ — довільна гладка функція з } \mu_x \neq 0,$$

- a. $\Phi: \tilde{t} = t^{-1}, \tilde{x} = x, \tilde{u} = t^{-1}u, \quad \text{якщо } \sigma = 0;$
 б. $\Phi: \tilde{t} = \frac{1}{2}e^{2t}, \tilde{x} = x, \tilde{u} = e^t u, \quad \text{якщо } \sigma = 1;$
 в. $\Phi: \tilde{t} = \tan t, \tilde{x} = x, \tilde{u} = u \cos t, \quad \text{якщо } \sigma = -1;$

T3. $f = 1, g = e^{-2x}g^2(u), \tilde{f} = 1, \tilde{g} = g^2(\tilde{u}),$
 $\Phi: \tilde{t} = e^{-x} \sinh t, \tilde{x} = e^{-x} \cosh t, \tilde{u} = u;$

T4. $f = 1, g = g^1(x)g^2(u), \tilde{f} = 1, \tilde{g} = \tilde{x}^{-2}g^2(\tilde{u}),$
 а. $g^1(x) = x^{-2}, \Phi: \tilde{t} = \frac{t}{x^2 - t^2}, \tilde{x} = \frac{x}{x^2 - t^2}, \tilde{u} = u;$
 б. $g^1(x) = \cos^{-2} x, \Phi: \tilde{t} = \frac{\cos t}{\sin t + \sin x}, \tilde{x} = \frac{\cos x}{\sin t + \sin x}, \tilde{u} = u;$
 в. $g^1(x) = -\cosh^{-2} x, \Phi: \tilde{t} = e^t \sinh x, \tilde{x} = e^t \cosh x, \tilde{u} = u;$
 г. $g^1(x) = \sinh^{-2} x, \Phi: \tilde{t} = e^t \cosh x, \tilde{x} = e^t \sinh x, \tilde{u} = u;$

T5. $f = -1, g = e^{-2x}g^2(u), \tilde{f} = -1, \tilde{g} = g^2(\tilde{u}),$
 $\Phi: \tilde{t} = e^{-x} \sin t, \tilde{x} = e^{-x} \cos t, \tilde{u} = u;$

T6. $f = -1, g = g^1(x)g^2(u), \tilde{f} = -1, \tilde{g} = \tilde{x}^{-2}g^2(\tilde{u}),$
 а. $g^1(x) = x^{-2}, \Phi: \tilde{t} = \frac{t}{x^2 + t^2}, \tilde{x} = \frac{x}{x^2 + t^2}, \tilde{u} = u;$
 б. $g^1(x) = \cos^{-2} x, \Phi: \tilde{t} = e^t \sin x, \tilde{x} = e^t \cos x, \tilde{u} = u;$
 в. $g^1(x) = \sinh^{-2} x, \Phi: \tilde{t} = \frac{\sin t}{\cos t + \cosh x}, \tilde{x} = \frac{\sinh x}{\cos t + \cosh x},$
 $\tilde{u} = u;$

T7. $f = -1, g = g^2(u) \cosh^{-2} x, \tilde{f} = -1, \tilde{g} = g^2(\tilde{u}) \cosh^{-2} \tilde{x},$
 $\Phi: \tilde{t} = \arctan \frac{\sin \gamma \sinh x + \cos \gamma \sin t}{\cos t},$
 $\tilde{x} = \operatorname{arcth} \frac{\cos \gamma \sinh x - \sin \gamma \sin t}{\cosh x}, \tilde{u} = u, \gamma \in (0, 2\pi);$

T8. а. $f = \tilde{f} = 1, g_x = 0, \tilde{g} = g,$
 $\Phi: \tilde{t} = t \cosh \gamma + x \sinh \gamma, \tilde{x} = t \sinh \gamma + x \cosh \gamma, \tilde{u} = u, \gamma \in \mathbb{R}_{\neq 0};$

$$\begin{aligned} \text{б. } f = \tilde{f} = -1, \quad g_x = 0, \quad \tilde{g} = g, \quad \Phi: \quad \tilde{t} = t \cos \gamma - x \sin \gamma, \\ \tilde{x} = t \sin \gamma + x \cos \gamma, \quad \tilde{u} = u, \quad \gamma \in (0, 2\pi); \end{aligned}$$

T9. $f = \varepsilon, \quad g = \varepsilon' e^u, \quad \tilde{f} = \varepsilon, \quad \tilde{g} = \varepsilon' e^{\tilde{u}}, \quad \Phi: \quad \tilde{t} = T(t, x), \quad \tilde{x} = X(t, x),$
 $\tilde{u} = u + \ln |T_t^2 - \varepsilon T_x^2|$, де $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$, причому $\varepsilon' = 1$, якщо $\varepsilon = 1$,
 (T, X) пробігають множину представників класів еквівалентності розв'язків системи $T_t = X_x, \quad X_t = \varepsilon T_x$ із $(T_{tt}, T_x) \neq (0, 0)$ за дією групи, яку складають перетворення $\hat{t} = c_1 t + c_0, \quad \hat{x} = c_1 x + c_2,$
 $\hat{T} = \tilde{c}_1 T + \tilde{c}_0, \quad \hat{X} = \tilde{c}_1 X + \tilde{c}_2$, де $c_0, c_1, c_2, \tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ — довільні сталі,
 що задовольняють умову $c_1 \tilde{c}_1 \neq 0$.

Надалі використаємо позначення TN для допустимого перетворення, наведеного у теоремі 6.3, де N — відповідний номер перетворення.

Таким чином, отримаємо список незалежних додаткових перетворень еквівалентності серед випадків класифікації, наведених у табл. 6.1 (нижче параметри, що не змінюються, не вказано).

$$\begin{aligned} \text{T1: (а)} \quad 4_{\hat{f}, \hat{g}} &\rightarrow 4_{1/\hat{f}, -\hat{g}/\hat{f}}, \quad 5a_{\hat{g}} \rightarrow 5a_{-\hat{g}}, \quad \text{якщо } \varepsilon = 1, \quad 11_{\hat{f}} \rightarrow 11_{1/\hat{f}}, \\ 12_{q, \varepsilon, \varepsilon'} \circ (u &\rightarrow -u) \rightarrow 12_{1-q, \varepsilon, -\varepsilon \varepsilon'}, \quad 13_{p, q, \varepsilon, \varepsilon'} \rightarrow 13_{-p, q-p, \varepsilon, -\varepsilon \varepsilon'}, \\ 14d_{\varepsilon, \varepsilon'} &\rightarrow 14a_{\varepsilon, -\varepsilon \varepsilon'}, \quad 16_{p, \varepsilon} \rightarrow 16_{-p, \varepsilon}, \quad 18a_{q, \varepsilon, \varepsilon'} \rightarrow 18a_{q, \varepsilon, -\varepsilon \varepsilon'}, \\ 19d &\rightarrow 19a, \quad 20_{\varepsilon, \varepsilon'} \rightarrow 20_{\varepsilon, -\varepsilon \varepsilon'}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{T2: (б)} \quad 8b &\rightarrow 8a, \quad 14b \rightarrow 14a, \quad 15b \rightarrow 15a, \quad 19b \rightarrow 19a; \\ \text{(в)} \quad 8c &\rightarrow 8a, \quad 14c \rightarrow 14a, \quad 15c \rightarrow 15a, \quad 19c \rightarrow 19a. \end{aligned}$$

$$\text{T3: } 5b \rightarrow 5a_{\varepsilon=1}, \quad 18b \rightarrow 18a_{\varepsilon=1}.$$

$$\text{T4: (б)} \quad 6b \rightarrow 6a_{\varepsilon=1}, \quad \text{(в)} \quad 6c \rightarrow 6a_{\varepsilon=1}, \quad \text{(г)} \quad 6d \rightarrow 6a_{\varepsilon=1}.$$

$$\text{T5: } 5c \rightarrow 5a_{\varepsilon=-1}, \quad 18c \rightarrow 18a_{\varepsilon=-1}.$$

$$\text{T6: (б)} \quad 6e \rightarrow 6a_{\varepsilon=-1}, \quad \text{(в)} \quad 6f \rightarrow 6a_{\varepsilon=-1}.$$

Справедлива

Теорема 6.4. *Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних розширень ліївської симетрії в підкласі $\mathcal{W}_c$ вичерпують випадки 5a, 11, 12, 13, 14a–14c, 16, 17, 18a, 19a–19c і 20 табл. 6.1, де додатково $q > 1/2$ у випадку 12, $p > 0$ у випадках 13 і 16, а $\varepsilon' = 1$ у випадках 18a і 20 з $\varepsilon = 1$.*

6.5 Групоїд еквівалентності і сингулярні розширення ліївської симетрії

Групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{W}$ містить допустимі перетворення, не породжені елементами групи $G^\sim$, тобто цей клас ненормалізований. Однак, групоїд $\mathcal{G}^\sim$ можна описати, прокласифікувавши допустимі перетворення в класі $\mathcal{W}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. Доведемо теорему 6.3, для чого побудуємо породжувальну (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) множину $\mathcal{B}$ групоїда $\mathcal{G}^\sim$, одночасно виконуючи класифікацію сингулярних розширень ліївської симетрії в класі $\mathcal{W}$.

Оскільки клас $\mathcal{W}$ є підкласом класу $\mathcal{W}_{\text{gen}}$, трансформаційна компонента Φ будь-якого допустимого перетворення $\mathcal{T} = (\theta, \Phi, \tilde{\theta})$ в класі $\mathcal{W}$ має вигляд

$$\tilde{t} = T(t, x), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad \tilde{u} = U = U^1(t, x)u + U^0(t, x),$$

де параметр-функції T , X , U^1 , U^0 задовольняють умови невідродженості $T_t X_x - T_x X_t \neq 0$, $U^1 \neq 0$ і систему (6.6)–(6.10). Тут $\theta = (f, g)$ і $\tilde{\theta} = (\tilde{f}, \tilde{g})$ — відповідно початкове й кінцеве значення набору довільних елементів для $\mathcal{T}$, а $\mathcal{L}_\theta, \mathcal{L}_{\tilde{\theta}} \in \mathcal{W}$.

Через $\mathcal{W}_0$ і $\mathcal{W}_1$ відповідно позначимо підкласи класу $\mathcal{W}$, виокремлені умовами $f_u = 0$ і $f_u \neq 0$. Розбиття $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \sqcup \mathcal{W}_1$ класу $\mathcal{W}$ індукує розбиття групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ цього класу, оскільки $\tilde{f}_{\tilde{u}} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f_u = 0$, див. підрозділ 6.1. Іншими словами, рівняння з підкласу $\mathcal{W}_0$ не пов'язані точковими перетвореннями з рівняннями в підкласі $\mathcal{W}_1$. Це твердження можна переформулювати у термінах групоїдів еквівалентності.

Твердження 6.1. Групоїд еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{W}$ є неперетинним об'єднанням групоїдів еквівалентності $\mathcal{G}_0^\sim$ і $\mathcal{G}_1^\sim$ підкласів $\mathcal{W}_0$ і $\mathcal{W}_1$, отже, $\mathcal{G}^\sim = \mathcal{G}_0^\sim \sqcup \mathcal{G}_1^\sim$.

Опишемо окремо групоїди еквівалентності $\mathcal{G}_0^\sim$ і $\mathcal{G}_1^\sim$.

Лема 6.1. Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{W}_0$ співпадає з $G^\sim$. Породжувальна (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) множина $\mathcal{B}_0$ допустимих перетворень у класі $\mathcal{W}_0$, що є мінімальною і внутрішньо сумісною відносно $G^\sim$ -еквівалентності, є об'єднанням обмеження сім'ї [T1](#) на клас $\mathcal{W}_0$ і сімей [T3–T9](#).

Лема 6.2. Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних сингулярних розширень лівської симетрії рівнянь з класу $\mathcal{W}_0$, що не пов'язані з підходящими підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}^\sim$, вичерпують випадки 5a–7, 18a–18c і 20 в підкласі рівнянь з довільними елементами вигляду $f = \varepsilon$ і $g = g^1(x)g^2(u)$.

Водночас доведемо леми [6.1](#) і [6.2](#). Нехай $\mathcal{T} \in \mathcal{G}_0^\sim$, тобто $f_u = 0$, $g_{uu} \neq 0$, $\tilde{f}_{\tilde{u}} = 0$ і $\tilde{g}_{\tilde{u}\tilde{u}} \neq 0$. Виразимо X_t^2 з рівняння [\(6.7\)](#), підставивши цей вираз у рівняння [\(6.6\)](#). Після факторизації отриманого рівняння маємо $(T_t^2 - fT_x^2)(fX_x^2 - \tilde{f}T_t^2) = 0$, з чого в силу $T_t^2 - fT_x^2 \neq 0$ випливає, що $fX_x^2 = \tilde{f}T_t^2$. Тоді рівняння [\(6.7\)](#) дає $X_t^2 = f\tilde{f}T_x^2$. Це означає, що f і $\tilde{f}$ мають однаковий знак і з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності можна вважати, що $f = \tilde{f} = \varepsilon$, де $\varepsilon = \pm 1$, тобто $X_x^2 = T_t^2$ і $X_t^2 = T_x^2$. Більш точно, калібрування функцій f і $\tilde{f}$ можна здійснити через перетворення $\mathcal{D}(\varphi)$ і $\mathcal{D}(\tilde{\varphi})$ змінних x і $\tilde{x}$ відповідно. Враховуючи рівняння [\(6.6\)](#) і перетворення заміни знаку t можна покласти $X_x = T_t$, $X_t = \varepsilon T_x$. Оскільки ці рівняння дають $T_{tt} = \varepsilon T_{xx}$ і $X_{tt} = \varepsilon X_{xx}$, пара рівнянь [\(6.8\)](#) і [\(6.9\)](#) зводиться до системи лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь $T_t U_{ut} - \varepsilon T_x U_{ux} = 0$, $X_t U_{ut} - \varepsilon X_x U_{ux} = 0$ відносно U_{ut} і U_{ux} . Визначник відповідної матриці є ненульовим: $\varepsilon(T_t X_x - T_x X_t) \neq 0$, тому $U_{ut} = U_{ux} = 0$, тобто U_u — ненульова стала, причому за допомогою перетворення $\mathcal{D}^u(c_2)$ можна покласти

$U_u = 1$. З урахуванням цієї умови рівняння (6.10) набуває виду

$$(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)\tilde{g} = g + U_{tt}^0 - \varepsilon U_{xx}^0. \quad (6.18)$$

Послідовно діючи на рівняння (6.18) операторами $(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)^{-1}\partial_t$ і $\partial_{\tilde{t}}$, отримаємо два диференціальні наслідки рівняння (6.18):

$$X_t\tilde{g}_{\tilde{x}} + U_t^0\tilde{g}_{\tilde{u}} + \frac{(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)_t}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2}\tilde{g} = \frac{(U_{tt}^0 - \varepsilon U_{xx}^0)_t}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2}, \quad (6.19)$$

$$(X_t)_{\tilde{t}}\tilde{g}_{\tilde{x}} + (U_t^0)_{\tilde{t}}\tilde{g}_{\tilde{u}} + \left(\frac{(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)_t}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2}\right)_{\tilde{t}}\tilde{g} = \left(\frac{(U_{tt}^0 - \varepsilon U_{xx}^0)_t}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2}\right)_{\tilde{t}}. \quad (6.20)$$

Вивчимо сумісність рівнянь (6.19) і (6.20), що є квазілінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними першого порядку відносно функції $\tilde{g}$. Розглянемо різні випадки, які виникають у залежності від того, чи є матриця коефіцієнтів при похідних $\tilde{g}_{\tilde{x}}$ і $\tilde{g}_{\tilde{u}}$ в цій системі вирождженою або невірождженою. Ця процедура і попереднє розбиття класу $\mathcal{W}$ на $\mathcal{W}_0$ і $\mathcal{W}_1$ є інтерпретацією методу розгалуженого розщеплення для класифікації допустимих перетворень, а подальший розгляд є першим прикладом побудови породжувальної множини допустимих перетворень з використанням цього методу.

1. Припустимо спочатку, що матриця коефіцієнтів є невірождженою, тобто $X_t(U_t^0)_{\tilde{t}} - U_t^0(X_t)_{\tilde{t}} \neq 0$. Розв'яжемо систему (6.19)–(6.20) як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{g}_{\tilde{x}}$ і $\tilde{g}_{\tilde{u}}$:

$$\tilde{g}_{\tilde{x}} = \alpha^1\tilde{g} + \alpha^0, \quad \tilde{g}_{\tilde{u}} = \beta^1\tilde{g} + \beta^0. \quad (6.21)$$

Тут коефіцієнти α^0 , α^1 , β^0 , β^1 є функціями змінних $(\tilde{t}, \tilde{x})$, чиї явні вирази у термінах X і U^0 не є суттєвими для подальшого розгляду. Продиференціювавши рівняння (6.21) за $\tilde{t}$, виведемо наслідки $\alpha_{\tilde{t}}^1\tilde{g} + \alpha_{\tilde{t}}^0 = 0$, $\beta_{\tilde{t}}^1\tilde{g} + \beta_{\tilde{t}}^0 = 0$, з яких урахуванням $g_u \neq 0$ випливає, що $\alpha_{\tilde{t}}^1 = \alpha_{\tilde{t}}^0 = \beta_{\tilde{t}}^1 = \beta_{\tilde{t}}^0 = 0$. Перехресне диференціювання рівнянь (6.21) за змінними $\tilde{x}$ і $\tilde{u}$ призводить до умов сумісності для цих рівнянь: $\beta_{\tilde{x}}^1 = 0$ і

$\beta_x^0 = \alpha^1 \beta^0 - \alpha^0 \beta^1$, звідки β^1 є сталою. Оскільки $\tilde{g}_{\tilde{u}\tilde{u}} \neq 0$, друге рівняння в (6.21) призводить до умови $\beta^1 \neq 0$. Використовуючи перетворення еквівалентності $\mathcal{D}^u(1/\beta^1)$, можна відкалібрувати β^1 в одиницю. Тоді друге рівняння в (6.21) можна проінтегрувати в $\tilde{g} = \tilde{g}^0(\tilde{x})e^{\tilde{u}} + \tilde{g}^1(\tilde{x})$ з $\tilde{g}^1 = -\beta^0$. З рівняння (6.18) випливає, що функція g має подібний вигляд і у початкових змінних, тобто $g = g^0(x)e^u + g^1(x)$, причому $(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)e^{U^0}\tilde{g}^0 = g^0$, $(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)\tilde{g}^1 = g^1 + U_{tt}^0 - \varepsilon U_{xx}^0$. З використанням перетворення еквівалентності $\mathcal{Z}(\psi)$ покладемо $g^0 = \varepsilon'$ і $\tilde{g}^0 = \tilde{\varepsilon}'$ з $\varepsilon', \tilde{\varepsilon}' = \pm 1$. Тоді $(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)e^{U^0}\tilde{\varepsilon}' = \varepsilon'$, тобто $U^0 = -\ln|X_x^2 - \varepsilon X_t^2|$, а тому $U_{tt}^0 - \varepsilon U_{xx}^0 = 0$, оскільки $X_{tt} - \varepsilon X_{xx} = 0$. Рівняння (6.18) набуває вигляду

$$\frac{g^1(x)}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2} = \tilde{g}^1(X). \quad (6.22)$$

Іншими словами, в цьому випадку достатньо прокласифікувати допустимі перетворення в підкласі $\mathcal{W}_{00}$ з рівняння вигляду

$$u_{tt} = \varepsilon u_{xx} + \varepsilon' e^u + g^1(x) \quad (6.23)$$

з точністю до підгрупи $G_{00}^\sim$ групи еквівалентності $G^\sim$, виокремленої умовами $\varphi_x = \pm c_1$, $c_2 = |c_1|^{-1/2}$ і $\psi = 0$. Це зводиться до виведення можливих $G_{00}^\sim$ -нееквівалентних виразів для $X = X(t, x)$, $g^1 = g^1(x)$ і $\tilde{g}^1 = \tilde{g}^1(\tilde{x})$, що задовольняють систему (6.22) і рівняння $X_{tt} = \varepsilon X_{xx}$. Виконаємо заміну незалежних змінних у цій системі: $y = x + \iota t$ і $z = x - \iota t$, де $\iota = 1$ або $\iota = i$, якщо $\varepsilon = 1$ або $\varepsilon = -1$ відповідно. Тут i — уявна одиниця, $i^2 = -1$, звідки $\iota^2 = \varepsilon$. У змінних y і z рівняння $X_{tt} = \varepsilon X_{xx}$ набуває вигляду $X_{yz} = 0$, а тому його загальний розв'язок можна зобразити як $X = Y(y) + Z(z)$, де $Z(z)$ співпадає зі спряженим значенням $Y(y)$, якщо $\varepsilon = -1$. Тоді рівняння (6.22) можна переписати як

$$\frac{1}{4Y_y Z_z} g^1(x) = \tilde{g}^1(X), \quad \text{де} \quad x = \frac{y+z}{2}, \quad X = Y + Z. \quad (6.24)$$

Виключимо функцію $\tilde{g}^1$ за допомогою дії оператора $Y_y \partial_z - Z_z \partial_y$ на рів-

няння (6.24):

$$2g^1(\partial_y + \partial_z)(Y_y^{-1} - Z_z^{-1}) = -g_x^1(Y_y^{-1} - Z_z^{-1}).$$

Інтегрування останнього рівняння дає $Y_y^{-1} - Z_z^{-1} = \iota h^0 h^1$, де h^0 — дійснозначна гладка функція змінної t , а $h^1 := |g^1|^{-1/2} \neq 0$, тобто h^1 — дійснозначна гладка функція змінної x . Подіємо на результат інтегрування оператором $\partial_t^2 - \varepsilon \partial_x^2 = -4\varepsilon \partial_y \partial_z$, звідки $h_{tt}^0 h^1 = \varepsilon h^0 h_{xx}^1$.

Якщо $h^0 = 0$, то $Y_y^{-1} = Z_z^{-1} = \text{const} \in \mathbb{R}$, а тому $Y_y = Z_z = \text{const} \in \mathbb{R}$, з чого випливає умова $X_{xx} = 0$. Отже, також $T_x = T_{tt} = 0$. Це означає, що допустиме перетворення $\mathcal{T}$ індуковано елементом групи $G^\sim$.

Випадок $h^1 = g^1 = 0$ відповідає рівнянню Ліувілля. Знак ε' можна змінити на протилежний відповідним допустимим перетворенням з сім'ї T1, якщо $\varepsilon = 1$, і не можна змінити в силу рівняння $(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)e^{U^0} \tilde{\varepsilon}' = \varepsilon'$, якщо $\varepsilon = -1$. Група еквівалентності $G^\sim$ індукує підгрупу H повної точкової групи симетрії рівняння Ліувілля для кожного фіксованого значення $(\varepsilon, \varepsilon')$, яку складають перетворення вигляду $\tilde{t} = c_1 t + c_0$, $\tilde{x} = c_1 x + c_2$, де c_0 , c_1 і c_2 — довільні сталі з $c_1 \neq 0$. Для мінімальності шуканої множини допустимих перетворень треба обрати представника у кожному наборі $G^\sim$ -еквівалентних елементів відповідної вертексної групи. Це дає сім'ю T9 допустимих перетворень.

Надалі вважаємо, що $h^0 h^1 \neq 0$, а тому також $g^1 \neq 0$. За допомогою розділення змінних у рівнянні $h_{tt}^0 h^1 = \varepsilon h^0 h_{xx}^1$ отримаємо, що вираз $h_{tt}^0/h^0 = \varepsilon h_{xx}^1/h^1$ дорівнює сталій. З точністю до масштабувань з групи $G^\sim$ можна вважати, що ця стала приймає одне зі значень з множини $\{-1, 0, 1\}$. Тоді з точністю до зсувів за x і заміни знаку змінної x , маємо

$$g^1 \in \mathcal{C} := \{ \nu, \nu x^{-2}, \nu \cos^{-2} x, -\nu \cosh^{-2} x, \nu \sinh^{-2} x, \varepsilon'' e^{-2x} \mid \\ \nu \in \mathbb{R}, \nu \neq 0, \varepsilon'' = \pm 1 \}.$$

Використовуючи аналогічні аргументи для оберненого до $\mathcal{T}$ допустимого перетворення, виводимо, що функція $\tilde{g}^1$ також належить множині $\mathcal{C}$ (з точністю до заміни аргументу x на $\tilde{x}$).

Наведемо спочатку повну множину $\mathcal{B}'_0$ незалежних з точністю до обернення і композиції між собою $G^\sim$ -нееквівалентних нетотожних допустимих перетворень для g^1 з множини $\mathcal{C}$. Множину $\mathcal{B}'_0$ складають сім'я [T8](#) $_{|\mathcal{W}_{00}}$ і такі сім'ї:

$$\text{T3}'. \quad f = 1, \quad g = e^u + \varepsilon'' e^{-2x}, \quad \tilde{f} = 1, \quad \tilde{g} = e^u + \varepsilon'',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = e^{-x} \sinh t, \quad \tilde{x} = e^{-x} \cosh t, \quad \tilde{u} = u + 2x;$$

$$\text{T4}'. \quad f = 1, \quad g = \varepsilon' e^u + g^1(x), \quad \tilde{f} = 1, \quad \tilde{g} = \tilde{\varepsilon}' e^u + \nu \tilde{x}^{-2}, \quad \nu \in \mathbb{R}_{\neq 0},$$

$$\text{a.} \quad g^1(x) = \nu x^{-2}, \quad \tilde{\varepsilon}' = \varepsilon',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = \frac{t}{x^2 - t^2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^2 - t^2}, \quad \tilde{u} = u + 2 \ln |x^2 - t^2|;$$

$$\text{б.} \quad g^1(x) = \nu \cos^{-2} x, \quad \tilde{\varepsilon}' = \varepsilon',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = \frac{\cos t}{\sin t + \sin x}, \quad \tilde{x} = \frac{\cos x}{\sin t + \sin x}, \quad \tilde{u} = u + 2 \ln |\sin t + \sin x|;$$

$$\text{в.} \quad g^1(x) = -\nu \cosh^{-2} x, \quad \tilde{\varepsilon}' = -\varepsilon',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = e^t \sinh x, \quad \tilde{x} = e^t \cosh x, \quad \tilde{u} = u - 2t;$$

$$\text{г.} \quad g^1(x) = \nu \sinh^{-2} x, \quad \tilde{\varepsilon}' = \varepsilon',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = e^t \cosh x, \quad \tilde{x} = e^t \sinh x, \quad \tilde{u} = u - 2t;$$

$$\text{T5}'. \quad f = -1, \quad g = \varepsilon' e^u + \varepsilon'' e^{-2x}, \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = \varepsilon' e^u + \varepsilon'',$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = e^{-x} \sin t, \quad \tilde{x} = e^{-x} \cos t, \quad \tilde{u} = u + 2x;$$

$$\text{T6}'. \quad f = -1, \quad g = \varepsilon' e^u + g^1(x), \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = \varepsilon' e^u + \nu \tilde{x}^{-2}, \quad \nu \in \mathbb{R}_{\neq 0},$$

$$\text{a.} \quad g^1(x) = \nu x^{-2}, \quad \Phi: \quad \tilde{t} = \frac{t}{x^2 + t^2}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x^2 + t^2}, \quad \tilde{u} = u + 2 \ln |x^2 + t^2|;$$

$$\text{б.} \quad g^1(x) = \nu \cos^{-2} x, \quad \Phi: \quad \tilde{t} = e^t \sin x, \quad \tilde{x} = e^t \cos x, \quad \tilde{u} = u - 2t;$$

$$\text{в.} \quad g^1(x) = \nu \sinh^{-2} x,$$

$$\Phi: \quad \tilde{t} = \frac{\sin t}{\cos t + \cosh x}, \quad \tilde{x} = \frac{\sinh x}{\cos t + \cosh x}, \quad \tilde{u} = u + 2 \ln |\cos t + \cosh x|;$$

$$\text{T7}'. \quad f = -1, \quad g = \varepsilon' e^u + \nu \cosh^{-2} x, \quad \tilde{f} = -1, \quad \tilde{g} = \varepsilon' e^{\tilde{u}} + \nu \cosh^{-2} \tilde{x}, \\ \nu \in \mathbb{R}_{\neq 0},$$

$$\begin{aligned}\Phi: \tilde{t} &= \arctan \frac{\sin \gamma \sinh x + \cos \gamma \sin t}{\cos t}, \\ \tilde{x} &= \operatorname{arcth} \frac{\cos \gamma \sinh x - \sin \gamma \sin t}{\cosh x}, \\ \tilde{u} &= u + \ln \left| \cosh^2 x - (\cos \gamma \sinh x - \sin \gamma \sin t)^2 \right|, \quad \gamma \in (0, 2\pi).\end{aligned}$$

Безпосередній спосіб перевірки того, які елементи множини $\mathcal{C}$ пов'язані допустимими перетвореннями, полягає у фіксуванні значення параметр-функції g^1 з множини $\mathcal{C}$, що визначає $h^1 := |g^1|^{-1/2} \neq 0$, з наступними розв'язанням рівняння $h_{tt}^0 = \lambda h^0$ з $\lambda := \varepsilon h_{xx}^1 / h^1 = \text{const}$, і знаходженням Y і Z методом розділення змінних y і z у рівнянні $Y_y^{-1} - Z_z^{-1} = \iota h^0 h^1$, його подальшим інтегруванням і визначенням функції $\tilde{g}^1$ з (6.22). Замість цього, використаємо інший, оптимізований спосіб. Перевіримо, які відображення серед елементів множини $\mathcal{C}$ індукують переліченими вище перетвореннями. Так, $\nu e^{-2x} \mapsto \nu$ індукують перетворенням **T3'**, якщо $f = 1$, і перетворенням **T5'**, якщо $f = -1$, $\nu \cos^{-2} x \mapsto \nu x^{-2}$ — перетворенням **T4'6**, якщо $f = 1$, і перетворенням **T6'6**, якщо $f = -1$, $-\nu \cosh^{-2} x \mapsto \nu x^{-2}$ — перетворенням **T4'в**, якщо $f = 1$, $\nu \sinh^{-2} x \mapsto \nu x^{-2}$ — перетворенням **T4'г**, якщо $f = 1$, і перетворенням **T6'в**, якщо $f = -1$. Знак ε' змінює лише перетворення **T4'в**. При $f = -1$, допустиме точкове перетворення відображає значення $g^1 = -\nu \cosh^{-2} x$ в $g^1 = \nu x^{-2}$ тільки над комплексним полем.

Максимальні алгебри ліівської інваріантності рівнянь вигляду (6.23) зі значеннями параметр-функцій (f, g^1) , що не зводяться одне до одного, такі:

$$\begin{aligned}(f, g^1) &= (1, \nu): \quad \mathfrak{g}_\theta = \langle \partial_t, \partial_x, x\partial_t + t\partial_x \rangle, \\ (f, g^1) &= (-1, \nu): \quad \mathfrak{g}_\theta = \langle \partial_t, \partial_x, x\partial_t - t\partial_x \rangle, \\ (f, g^1) &= (\varepsilon, \nu x^{-2}): \\ &\quad \mathfrak{g}_\theta = \langle \partial_t, t\partial_t + x\partial_x - 2\partial_u, (t^2 + \varepsilon x^2)\partial_t + 2tx\partial_x - 4t\partial_u \rangle, \\ (f, g^1) &= (-1, \nu \cosh^{-2} x): \quad \mathfrak{g}_\theta = \langle \partial_t, \mathcal{R}'(\cos t \cosh x), \mathcal{R}'(\sin t \cosh x) \rangle,\end{aligned}$$

де $\mathcal{R}'(\Phi) := \Phi_x \partial_t + \Phi_t \partial_x - 2\Phi_{tx} \partial_u$. Ці алгебри ліівської інваріантності подані у випадках $5a_{\varepsilon=1}$ і $5a_{\varepsilon=-1}$ табл. 6.1 і асоційовані з випадками 6а і 7 тієї самої таблиці відповідно. Вони є реалізаціями алгебри Пуанкаре $p(1, 1)$, алгебри Евкліда $e(2)$, дійсної спеціальної лінійної алгебри $sl(2, \mathbb{R})$ і ортогональної алгебри $o(3)$, які не ізоморфні одна до одної. Водночас, системи диференціальних рівнянь пов'язані точковими перетвореннями, тільки якщо їхні максимальні алгебри ліівської інваріантності ізоморфні.

Отже, потрібно прокласифікувати допустимі перетворення в чотирьох підкласах рівнянь вигляду (6.23), де для кожного з цих підкласів пара (f, g^1) є фіксованою і приймає одне зі значень з множини

$$\{(1, \nu), (-1, \nu), (\varepsilon, \nu x^{-2}) (-1, \nu \cosh^{-2})\},$$

а стала ν пробігає $\mathbb{R}_{\neq 0}$. Для цього вперше розширимо алгебраїчний метод на пошук допустимих перетворень. Версію алгебраїчного метода для відшукування дискретних симетрій окремих систем диференціальних рівнянь запропонував П. Гайдон [Hydon P.E., How to construct the discrete symmetries of partial differential equations, *European J. Appl. Math.* **11** (2000), 515–527], а пізніше його узагальнили для обчислення перетворень еквівалентності у класах систем диференціальних рівнянь в роботі [Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E. and Popovych R.O., Algebraic method for finding equivalence groups, *J. Phys.: Conf. Ser.* **621** (2015), 012001, 17 pp.]. Розглянемо детально тільки перший підклас. Нехай $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ — два фіксовані рівняння вигляду (6.23) з $f = \tilde{f} = 1$, $\tilde{g}^1 = \nu$, $g^1 = \tilde{\nu}$ і $\varepsilon', \tilde{\varepsilon}' = \pm 1$. Ці рівняння мають однакову максимальну алгебру ліівської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_{\tilde{\theta}} = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_x + x\partial_t \rangle$, що наведена у випадку $5a_{f=1}$ табл. 6.1 і є реалізацією алгебри Пуанкаре $p(1, 1)$. Отже, підняття векторних полів перетворенням Φ індукує автоморфізм алгебри $\mathfrak{g}_\theta$, асоційований з автоморфізмом алгебри $p(1, 1)$. Нагадаємо, що перетворення Φ повністю визначене його t - і x -компонентами. Внутрішнім автоморфізмам алгебри $p(1, 1)$ відповідають неперервні точкові перетворення, породжені векторними полями алгебри $\mathfrak{g}_\theta$. Ці перетворення є симетріями рівняння $\mathcal{L}_\theta$, тоб-

то вони не замінюють параметри ν і ε' . З точністю до зсувів за t і x , які породжено елементами групи $G^\sim$, отримаємо сім'ю $\text{T8a}|_{\mathcal{W}_{00}}$ допустимих перетворень. Існують тільки два зовнішні автоморфізми алгебри $\mathfrak{p}(1, 1)$, що є незалежними з точністю до їхніх композицій один з одним і з внутрішніми автоморфізмами. Відповідними перетвореннями є заміна знаку змінної t , що є дискретною симетрією рівняння $\mathcal{L}_\theta$, індукованої $\mathcal{D}^t(-1)$, і перестановка змінних t і x , що належить сім'ї T1 . Не існує ніяких точкових перетворень, що задовольняють обмеження для Φ і індукують тотожний автоморфізм алгебри $\mathfrak{g}_\theta$.

Розгляд трьох інших підкласів аналогічний. Кожна з алгебр $\mathfrak{e}(2)$ і $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ має єдиний незалежний зовнішній автоморфізм, який тут можна пов'язати, наприклад, зі зміною знаку t . Алгебра $\mathfrak{o}(3)$ не має внутрішніх автоморфізмів, але заміна знаку t породжує тотожний автоморфізм відповідної алгебри $\mathfrak{g}_\theta$. Профакторизувавши за зсувами і розтягами, що є симетріями відповідних рівнянь, індукованими елементами групи $G^\sim$, побудуємо сім'ї $\text{T86}|_{\mathcal{W}_{00}}$, T4'a і T7' відповідно. Останню сім'ю складають нетотожні перетворення, породжені операторами ліівської симетрії $\mathcal{R}'(\cos t \cosh x)$ рівняння (6.23) з $(f, g^1) = (-1, \nu \cosh^{-2})$.

Очевидно, що $G_{00}^\sim$ -нееквівалентні сингулярні випадки розширення ліівської симетрії в підкласі $\mathcal{W}_{00}$ вичерпують випадками з $g^1 \in \mathcal{C}$.

2. Тепер припустимо, що матриця коефіцієнтів при похідних $\tilde{g}_{\tilde{x}}$ і $\tilde{g}_{\tilde{u}}$ в системі (6.19), (6.20) вироджена:

$$X_t(U_t^0)_{\tilde{t}} - U_t^0(X_t)_{\tilde{t}} = 0. \quad (6.25)$$

Якщо $X_t = 0$, то $T_x = X_{xx} = T_{tt} = 0$, і з рівняння (6.18) в силу умови $\tilde{g}_{\tilde{u}\tilde{u}} \neq 0$ випливає, що $U_t^0 = 0$, тобто допустиме перетворення $\mathcal{T}$ породжене елементом групи $G^\sim$. Тому надалі вважаємо, що $X_t \neq 0$. Зобразивши рівняння (6.25) у вигляді $(U_t^0/X_t)_{\tilde{t}} = 0$, інтегруємо його за змінною $\tilde{t}$, звідки отримаємо $U_t^0 = V^0(X)X_t$ для деякої гладкої функції $V^0 = V^0(\tilde{x})$. Тоді, інтегруючи за t , знаходимо $U^0 = V^1(X) + V^2(x)$, де V^1 — первісна функції V^0 , $V_{\tilde{x}}^1(\tilde{x}) = V^0(\tilde{x})$, а $V^2 = V^2(x)$ — гладка функція. Отже,

з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності (а саме, з точністю до композиції перетворення $\mathcal{T}$ з перетвореннями з підгрупи $\{\mathcal{Z}(\psi)\}$), можна покласти $U^0 = 0$, звідки $U = u$. Тоді рівняння (6.19) можна представити у вигляді

$$\frac{\tilde{g}_{\tilde{x}}}{\tilde{g}} = -\frac{1}{X_t} \frac{(X_x^2 - \varepsilon X_t^2)_t}{X_x^2 - \varepsilon X_t^2}.$$

Ліва і права частини останнього рівняння не залежать від $\tilde{t}$ і $\tilde{u}$ відповідно, а тому вони дорівнюють функції, що залежить лише від $\tilde{x}$. Розв'язання рівняння відносно $\tilde{g}$ дає форму $\tilde{g}$ у вигляді добутку функцій різних аргументів: $\tilde{g} = \tilde{g}^1(\tilde{x})\tilde{g}^2(\tilde{u})$. Оскільки $\tilde{u} = u$ і $g = (X_x^2 - \varepsilon X_t^2)\tilde{g}$, функція g також допускає подібне зображення $g = g^1(x)g^2(u)$, де $g^2(u) = \tilde{g}^2(u)$. В результаті, знову отримуємо рівняння (6.22). Отже, рівняння вигляду

$$u_{tt} = \varepsilon u_{xx} + g^1(x)g^2(u) \quad \text{з} \quad g_u^2 g_{uu}^2 \neq (g_{uu}^2)^2 \quad (6.26)$$

з однаковими значеннями функції g^2 пов'язані точковим перетворенням тоді і тільки тоді, коли рівняння вигляду (6.23) з такими самими значеннями параметрів ε і g^1 також пов'язані точковим перетворенням. Для того, щоб виключити перетин підкласу (6.26) з підкласом рівнянь $u_{tt} = \varepsilon u_{xx} + g^0(x)e^u + g^1(x)$ з $g^0 \neq 0$, що всі зводяться перетвореннями еквівалентності до рівнянь з підкласу (6.23), вимагаємо виконання нерівності $g_u^2 g_{uu}^2 \neq (g_{uu}^2)^2$, еквівалентної лінійній незалежності функцій g_u^2 , g^2 і 1. Щоб правильно транслювати класифікацію допустимих перетворень у класі (6.23) в класифікацію таких перетворень у його підкласі (6.26), враховуємо умову $g^1 \neq 0$ для підкласу (6.26) і замінимо u -компоненти у всіх перетвореннях на $\tilde{u} = u$. Оскільки коефіцієнти ν і $\tilde{\nu}$ співпадають, можна вважати, що їх поглинає функція g^2 . Таким чином отримаємо обмеження сімей T1, T3–T7 і T8 на підклас (6.26). Сім'ям T3–T7 відповідають сім'ї T3'–T7'.

Для завершення класифікації допустимих перетворень у підкласі $\mathcal{W}_0$, відобразимо кожне рівняння з підкласу (6.23) з $g^1 \in \mathcal{C}$ перетворенням еквівалентності $\mathcal{Z}(\ln \hat{g}^1)$ у рівняння $u_{tt} = \varepsilon u_{xx} + \hat{g}^1(x)g^2(u)$ з $g^2(u) =$

$\varepsilon' e^u + \hat{\nu}$. Тут $\hat{g}^1$ має такий самий вигляд, як g^1 , але з фіксованими $\nu = 1$, $\hat{\nu} = 2\varepsilon\varepsilon''$, $\varepsilon'' = -1$ для $\hat{g}^1 = \cosh^{-2} x$ і $\varepsilon'' = 1$ інакше. У результаті, сім'ї T3'–T7' відображаються в сім'ї T3–T7. Поповнення останніх сімей дозволяє нехтувати для них допоміжну нерівність $g_u^2 g_{uu}^2 \neq (g_{uu}^2)^2$ для підкласу (6.26).

Отримана множина $\mathcal{B}_0$ допустимих перетворень у підкласі $\mathcal{W}_0$ є породжувальною множиною для $\mathcal{G}_0^\sim$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності за побудовою. Жодний елемент групоїда $\mathcal{G}_0^\sim$ не пов'язує різні значення θ з $s(\mathcal{B}_0) \cup t(\mathcal{B}_0)$. Жодний елемент множини $\mathcal{B}_0$ не можна зобразити як композицію скінченної кількості інших елементів породжувальної множини $\mathcal{B}_0$ або обернених до них перетворень. Отже, породжувальна множина $\mathcal{B}_0$ є мінімальною і внутрішньо сумісною відносно $G^\sim$ -еквівалентності для групоїда $\mathcal{G}_0^\sim$.

З точністю до $G^\sim$ -еквівалентності сингулярні розширення ліівської симетрії в підкласі (6.26) можливі тільки для $g^1 \in \mathcal{C}$, що відповідно дає випадки 5a–5c, 6a–6f і 7. Оскільки випадок 7 зводиться до випадку 6a над комплексним полем, для подальших розширень достатньо перевірити тільки рівняння з $g^1 = 1$ (випадок 5a) і з $g^1 = x^{-2}$ (випадок 6a). Для $g^1 = 1$, отримаємо тільки випадок 18a з двома $G^\sim$ -еквівалентними випадками 18b і 18c. Подальших розширень ліівської симетрії для $g^1 = x^{-2}$ не існує.

Залишилось дослідити групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_1^\sim$ підкласу $\mathcal{W}_1$, який виокремлено з класу (6.1) умовою $f_u \neq 0$. Позначимо через $\mathcal{W}_{11}$ і $\mathcal{W}_{12}$ відповідно підкласи класу $\mathcal{W}_1$, що асоційований з додатковою умовою $f_x = g_x = 0 \bmod G^\sim$ і що складений рівняннями, які $G^\sim$ -еквівалентні рівнянням вигляду

$$u_{tt} = \varepsilon u^{-4} u_{xx} + \mu(x) u^{-3} + \sigma u, \quad (6.27)$$

де μ пробігає множину гладких функцій змінної x , а ε, σ — сталі, причому $\varepsilon \neq 0$, а отже $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$ і $\sigma \in \{-1, 0, 1\} \bmod G^\sim$.

Лема 6.3. Звичайна група еквівалентності підкласу $\mathcal{W}_1$ співпадає з групою $G^\sim$. Будь-яке допустиме перетворення в класі $\mathcal{W}_1 \setminus (\mathcal{W}_{11} \cup \mathcal{W}_{12})$ породжене перетворенням з $G^\sim$. Породжувальна (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) множина $\mathcal{B}_1$ допустимих перетворень для класу $\mathcal{W}_1$, яка є мінімальною і внутрішньо сумісною відносно $G^\sim$ -еквівалентності, є об'єднанням обмеження сім'ї **T1** на клас $\mathcal{W}_{11}$ і сім'ї **T2**, що діє в $\mathcal{W}_{12}$.

Групи еквівалентності підкласів $\mathcal{W}_0$ і $\mathcal{W}_1$ співпадають з групою еквівалентності $G^\sim$ всього класу $\mathcal{W}$, причому $\mathcal{G}^\sim = \mathcal{G}_0^\sim \sqcup \mathcal{G}_1^\sim$. Отже, після об'єднання породжувальних (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) множин $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$ групоїдів $\mathcal{G}_0^\sim$ і $\mathcal{G}_1^\sim$, що є мінімальними і внутрішньо сумісними відносно $G^\sim$ -еквівалентності для відповідних групоїдів, отримуємо породжувальну (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) множину $\mathcal{B}$ групоїда $\mathcal{G}^\sim$, що є мінімальною і внутрішньо сумісною відносно $G^\sim$ -еквівалентності для групоїда $\mathcal{G}^\sim$.

Лема 6.4. Повний список $G^\sim$ -нееквівалентних розширень лівської симетрії для рівнянь (6.27) вичерпують такі випадки:

$$1a-1c. \text{ загальний } \mu: \quad \mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_\sigma^\cap,$$

$$2a-2c. \quad \mu = \pm 1: \quad \mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_\sigma^\cap + \langle \partial_x \rangle,$$

$$3a-3c. \quad \mu = \nu x^{-2}, \quad \nu \neq 0: \quad \mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_\sigma^\cap + \langle 2x\partial_x - u\partial_u \rangle,$$

$$4a-4c. \quad \mu = 0: \quad \mathfrak{g}_\theta = \mathfrak{g}_\sigma^\cap + \langle \partial_x, 2x\partial_x - u\partial_u \rangle,$$

де

$$a. \quad \sigma = 0: \quad \mathfrak{g}_0^\cap = \langle \partial_t, 2t\partial_t + u\partial_u, t^2\partial_t + tu\partial_u \rangle,$$

$$b. \quad \sigma = 1: \quad \mathfrak{g}_1^\cap = \langle \partial_t, e^{2t}(\partial_t + u\partial_u), e^{-2t}(\partial_t - u\partial_u) \rangle,$$

$$c. \quad \sigma = -1: \quad \mathfrak{g}_{-1}^\cap = \langle \partial_t, \cos(2t)\partial_t - \sin(2t)u\partial_u, \sin(2t)\partial_t + \cos(2t)u\partial_u \rangle.$$

Випадки $\sigma = 1$ і $\sigma = -1$ зводяться до випадку $\sigma = 0$ з таким же значенням функції $\mu = \mu(x)$ додатковими перетвореннями еквівалентності

$\tilde{t} = \frac{1}{2}e^{2t}$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = e^t u$ та $\tilde{t} = \tan t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u \cos t$ відповідно.

З лем 6.3 і 6.4 випливає, що інших сингулярних розширень ліївської симетрії в класі $\mathcal{W}_1$ немає.

6.6 Класифікація підходящих підалгебр

Група еквівалентності $G^\sim$ і алгебра еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ допускають споріднені зображення у вигляді напівпрямого добутку і напівпрямой суми: $G^\sim = \hat{G}^\cap \rtimes G_{\text{ess}}^\sim$ і $\mathfrak{g}^\sim = \hat{\mathfrak{g}}^\cap \ltimes \mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ відповідно. Тут $\hat{G}^\cap = \{\mathcal{P}^t(c_0) \mid c_0 \in \mathbb{R}\}$ — нормальна підгрупа групи $G^\sim$ асоційована зі спільною групою інваріантності $G^\cap$ рівнянь з класу (6.1), $G_{\text{ess}}^\sim$ — підгрупа групи $G^\sim$, що складається з перетворень вигляду (6.1) з $c_0 = 0$ й ефективно діє на класі (6.1), $\hat{\mathfrak{g}}^\cap = \langle \mathcal{P}^t \rangle$ — ідеал алгебри $\mathfrak{g}^\sim$, що відповідає ядру алгебри $\mathfrak{g}^\cap$, а $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim = \langle \mathcal{D}^u, \mathcal{D}^t, \mathcal{D}(\zeta), \mathcal{Z}(\chi) \rangle$ — підалгебра алгебри $\mathfrak{g}^\sim$, яка є “суттєвою” частиною алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ з точки зору розширення ліївської симетрії в класі (6.1). Позначимо через π проекцію простору з координатами (t, x, u, f, g) на простір з координатами (t, x, u) , а через $\pi_* Q$ — підняття проективного векторного поля Q в просторі з координатами (t, x, u, f, g) за допомогою π . Підалгебру $\mathfrak{a}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ називають підходящою, якщо її проекція $\pi_* \mathfrak{a}$ є максимальною алгеброю ліївської інваріантності $\mathfrak{g}_\theta$ деякого рівняння $\mathcal{L}_\theta$ з класу (6.1). Кожна підходяща підалгебра $\mathfrak{a}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ повинна містити $\hat{\mathfrak{g}}^\cap$ як ідеал. Тому її також можна зобразити у вигляді напівпрямой суми $\mathfrak{a} = \hat{\mathfrak{g}}^\cap \ltimes \mathfrak{s}$, де $\mathfrak{s}$ — підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$. Назвемо підалгебру $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ *підходящою*, якщо $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim \cap \mathfrak{a}$ для деякої підходящої підалгебри $\mathfrak{a}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$. Підходящі підалгебри $\mathfrak{a}_1$ і $\mathfrak{a}_2$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ $G^\sim$ -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні підалгебри $\mathfrak{s}_1$ і $\mathfrak{s}_2$ алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ $G_{\text{ess}}^\sim$ -еквівалентні. Отже, класифікація розширень ліївської симетрії, індукованих підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ з точністю до $G_{\text{ess}}^\sim$ -еквівалентності, зводиться до класифікації підходящих підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ з точністю до $G_{\text{ess}}^\sim$ -еквівалентності. Для отримання такої класифікації потрібно поррахувати приєднану дію групи $G_{\text{ess}}^\sim$ на алгебрі $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$.

Оскільки ця алгебра нескінченновимірною, ці обчислення можна виконати через підняття векторних полів $\mathcal{D}^u$, $\mathcal{D}^t$, $\mathcal{D}(\zeta)$ і $\mathcal{Z}(\chi)$, що утворюють базис $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$, елементарними перетвореннями еквівалентності з групи $G_{\text{ess}}^\sim$, тобто перетвореннями $\mathcal{D}^t(c_1)$, $\mathcal{G}(\psi)$, $\mathcal{D}(\varphi)$ і $\mathcal{D}^u(c_2)$, див. підрозділ 6.2. Іншими словами, використаємо звичайне правило перетворення векторних полів при точкових перетвореннях:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_*(\psi)\mathcal{D}^u &= \mathcal{D}^u - \mathcal{Z}(\psi), & \mathcal{G}_*(\psi)\mathcal{D}(\zeta) &= \mathcal{D}(\zeta) + \mathcal{Z}(\zeta\psi_x - \tfrac{1}{2}\zeta_x\psi), \\ \mathcal{D}_*^u(c_2)\mathcal{Z}(\chi) &= c_2\mathcal{Z}(\chi), & \mathcal{D}_*(\varphi)\mathcal{Z}(\chi) &= \mathcal{Z}(|\hat{\varphi}_x|^{-1/2}\chi(\hat{\varphi})), \\ \mathcal{D}_*(\varphi)\mathcal{D}(\zeta) &= \mathcal{D}(\zeta(\hat{\varphi})/\hat{\varphi}_x),\end{aligned}$$

де $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x)$ — обернена до φ функція.

Усі векторні поля з $\pi_*\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ тотожно задовольняють визначальні рівняння для лівських симетрій рівнянь з класу (6.1), окрім рівнянь (6.16) і (6.17). Останні два рівняння призводять до обмежень на підходящі підалгебри алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$.

Лема 6.5. $\mathfrak{s} \cap \langle \mathcal{D}^u, \mathcal{Z}(\chi) \rangle = \mathfrak{s} \cap \langle \mathcal{D}^t \rangle = \{0\}$ для будь-якої підходящої підалгебри $\mathfrak{s}$.

Припустимо, що підходяща підалгебра $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ містить векторне поле $Q = b\mathcal{D}^u + \mathcal{Z}(\chi)$, причому $b \neq 0$ або $\chi \neq 0$. Тоді π_*Q є оператором лівської симетрії для рівняння $\mathcal{L}_\theta$ з класу (6.1). Підставляючи компоненти векторного поля π_*Q у визначальні рівняння (6.16) і (6.17), отримаємо такі умови на набір довільних елементів $\theta = (f, g)$:

$$(bu + \chi)f_u = 0, \quad (bu + \chi)g_u = bg - \chi_{xx}f.$$

Тоді $f_u = 0$ і $g_{uu} = 0$, якщо $b \neq 0$ або $\chi \neq 0$. Це суперечить означенню класу (6.1).

Аналогічно, з умова $\pi_*\mathcal{D}^t \in \mathfrak{g}_\theta$ випливає рівняння $f = 0$, яке також є несумісним з означенням класу (6.1).

Отже, будь-яка підходяща підалгебра не містить векторного поля розглянутого вигляду.

Лема 6.6. $\dim(\mathfrak{s} \cap \langle \mathcal{D}(\zeta), \mathcal{Z}(\chi) \rangle) \in \{0, 1, 3\}$ для будь-якої підходящої підалгебри $\mathfrak{s}$.

Припустимо, що $\mathfrak{s}$ — підходяща підалгебра алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$, і $\dim(\mathfrak{s} \cap \langle \mathcal{D}(\zeta), \mathcal{Z}(\chi) \rangle) \geq 2$. Це означає, що підалгебра $\mathfrak{s}$ містить щонайменше два векторних поля $Q^i = \mathcal{D}(\zeta^i) + \mathcal{Z}(\chi^i)$, де функції ζ^i , $i = 1, 2$, лінійно незалежні в силу леми 6.5. Іншими словами, проекції $\pi_* Q^i$ векторних полів Q^i разом є операторами ліївської симетрії деякого рівняння з класу (6.1). Через W позначимо вронськіан функцій ζ^1 і ζ^2 , тобто $W = \zeta^1 \zeta_x^2 - \zeta^2 \zeta_x^1$. $W \neq 0$, оскільки функції ζ^1 і ζ^2 лінійно незалежні.

Підстановка компонент векторних полів $\pi_* Q^i$ в рівняння (6.16) дає два рівняння на функцію f :

$$2\zeta^i f_x + (\zeta_x^i u + 2\chi^i) f_u = 4\zeta_x^i f. \quad (6.28)$$

Домножуємо рівняння (6.28) з $i = 1$ на ζ^2 і віднімаємо результат від рівняння (6.28) з $i = 2$, домноженого на ζ^1 . Розділивши отримане рівняння на W , отримаємо звичайне диференціальне рівняння $(u + \beta) f_u = 4f$, де $\beta = \beta(x) := 2(\zeta^1 \chi_x^2 - \zeta^2 \chi_x^1)/W$ і змінна x відіграє роль параметра. За допомогою перетворення еквівалентності $\mathcal{Z}(-\beta)$ можна покласти $\beta = 0$. Дійсно, це перетворення зберігає вигляд векторних полів Q^i , змінюючи тільки значення функціональних параметрів χ^i . Зокрема, воно не впливає на лінійну незалежність функцій ζ^i . Інтегруючи наведене вище рівняння, де $\beta = 0$, отримаємо, що $f = \alpha u^4$, де $\alpha = \alpha(x)$ — ненульова функція змінної x . Зважаючи на виведену форму f , розщеплення рівняння (6.28) за u призводить до умов $\zeta^i \alpha_x = 0$ і $\chi^i \alpha = 0$, тобто $\alpha_x = 0$ і $\chi^i = 0$. Сталу α можна відкалібрувати до $\alpha = \pm 1$ перетвореннями еквівалентності.

Аналогічним чином розглянемо рівняння (6.17), враховуючи накладені обмеження на параметр-функції і вигляд функції f . Для кожного Q^i , рівняння (6.17) дає рівняння на g :

$$2\zeta^i g_x + \zeta_x^i u g_u = \zeta_x^i g - \zeta_{xx}^i \alpha u^5. \quad (6.29)$$

Знову домножуємо рівняння (6.29) з $i = 1$ на ζ^2 , віднімаємо отримане рівняння з рівняння (6.29) з $i = 2$, домноженого на ζ^1 , і ділимо результат на W , що дає $ug_u = g + \mu^0 u^5$, де $\mu^0 = \mu^0(x) := -\alpha(\zeta^1 \zeta_{xxx}^2 - \zeta^2 \zeta_{xxx}^1)/W$, а змінна x знову відіграє роль параметра. Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо $g = \mu^0 u^5/4 + \mu^1 u$, де $\mu^1 = \mu^1(x)$ — гладка функція x . Параметр-функцію μ^1 можна занулити перетворенням еквівалентності $\mathcal{D}(\varphi)$, де функція $\varphi = \varphi(x)$ — розв'язок рівняння $\alpha(2\varphi_{xxx}\varphi_x - \varphi_{xx}^2) + \mu^1 \varphi_x^2 = 0$. Підставляючи знайдену форму g в рівняння (6.29) і розщеплюючи відносно u , знаходимо, що $\mu_x^1 = 0$, $\zeta_{xxx}^i = 0$. Отже, будь-яке рівняння з класу (6.1), яке допускає (щонайменше) два лінійно незалежних векторних поля $\pi_* Q^i$, насправді допускає точно три лінійно незалежних векторних поля такого вигляду і є $G^\sim$ -еквівалентним рівнянню $u_{tt} = \pm u^4 u_{xx} + \mu^1 u$, де μ^1 — це стала, яку можна відкалібрувати в ± 1 , якщо вона ненульова.

Рівняння виду $u_{tt} = \pm u^4 u_{xx}$, для якого $\mu^1 = 0$, допускає додаткове розширення ліївської симетрії.

Наслідок 6.2. *Існують лише два $G^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення ліївської симетрії в класі (6.1), де відповідні алгебри ліївської інваріантності містять щонайменше два лінійно незалежних векторних поля вигляду $\pi_* Q^i$ з $Q^i = \mathcal{D}(\zeta^i) + \mathcal{Z}(\chi^i)$:*

$$14d. u_{tt} = \varepsilon u^4 u_{xx} + \varepsilon' u: \quad \mathfrak{g}^{\max} = \mathfrak{g}^\cap + \pi_* \langle \mathcal{D}(1), \mathcal{D}(x), \mathcal{D}(x^2) \rangle,$$

$$19d. u_{tt} = \varepsilon u^4 u_{xx}: \quad \mathfrak{g}^{\max} = \mathfrak{g}^\cap + \pi_* \langle \mathcal{D}(1), \mathcal{D}(x), \mathcal{D}(x^2), \mathcal{D}^u - 2\mathcal{D}^t \rangle$$

де $\varepsilon, \varepsilon' = \pm 1$.

Наслідок 6.2 дає класифікацію підходящих підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$, розмірність перетину яких з $\langle \mathcal{D}(\zeta), \mathcal{Z}(\chi) \rangle$ не менша двох. Тому продовжимо розгляд обчисленням нееквівалентних підходящих підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$, що містять не більше одного лінійно незалежного векторного поля вигляду $\mathcal{D}(\zeta) + \mathcal{Z}(\chi)$, де $\zeta = \zeta(x)$ — ненульова функція. В силу леми 6.5 очевидно, що розмірність такої підалгебри не може бути більша

за три. Оберемо кандидатів для таких підалгебр, використовуючи тільки обмеження для підходящих підалгебр, наведені у лемі 6.5. Оскільки для дво- і тривимірних підходящих підалгебр є додаткові специфічні обмеження, остаточно відбирати підходящі підалгебри з множини кандидатів будемо прямо під час побудови інваріантних рівнянь.

Лема 6.7. *Повний список $G_{\text{ess}}^{\sim}$ -нееквівалентних підходящих одновимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^{\sim}$ складають підалгебри*

$$\langle 2\mathcal{D}^u - q\mathcal{D}^t + 2\mathcal{D}(\delta) \rangle, \quad \langle \mathcal{D}^t - \mathcal{D}(2) \rangle, \quad \langle \mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2) \rangle, \quad \langle \mathcal{D}(1) \rangle, \quad (6.30)$$

де $\delta \in \{0, 1\}$, а q — довільна стала.

У лемі 6.7 і наступних двох лемах виберемо такі значення параметрів у базисних елементах підходящих підалгебр серед можливих з точністю до $G^{\sim}$ -еквівалентності, щоб відповідні рівняння з класу $\mathcal{W}$ мали прості форми.

Лема 6.8. *З точністю до $G_{\text{ess}}^{\sim}$ -еквівалентності, будь-яка підходяща двовимірна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^{\sim}$, що містить хоча б одне лінійно незалежне векторне поле вигляду $\mathcal{D}(\zeta) + \mathcal{Z}(\chi)$, міститься у переліку:*

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{D}^u - \mathcal{D}(p), \mathcal{D}^t - \mathcal{D}(2) \rangle, \quad \langle \mathcal{D}^u - 2\mathcal{D}(x), \mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2) \rangle, \\ &\langle a_1\mathcal{D}^u + a_2\mathcal{D}^t + a_3\mathcal{D}(x) + \mathcal{Z}(\delta), \mathcal{D}(1) \rangle, \end{aligned} \quad (6.31)$$

де p, a_1, a_2, a_3, δ — сталі, що задовольняють умови $p \neq 0$, $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, $(a_2, a_3) \neq (0, 0)$ і $(a_1, a_3, \delta) \neq (0, 0, 0)$. Завдяки масштабуванню першого базисного елемента і $G_{\text{ess}}^{\sim}$ -еквівалентності можна додатково вважати, що одна зі ненульових сталих a_i дорівнює одиниці, а також $(2a_1 + a_3)\delta = 0$, причому $\delta \in \{0, 1\}$.

Лема 6.9. *З точністю до $G_{\text{ess}}^{\sim}$ -еквівалентності будь-яка підходяща тривимірна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^{\sim}$, що містить хоча б одне лінійно незалежне векторне поле вигляду $\mathcal{D}(\zeta) + \mathcal{Z}(\chi)$, має один з виглядів*

$$\begin{aligned} &\langle \mathcal{D}^u + p_1\mathcal{D}(x), \mathcal{D}^t + p_2\mathcal{D}(x), \mathcal{D}(1) \rangle, \\ &\langle \mathcal{D}^u - 2\mathcal{D}(x) + \mathcal{Z}(d), \mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2), \mathcal{D}(1) \rangle, \end{aligned} \quad (6.32)$$

де p_1, p_2, d — сталі, що задовольняють умову $p_1 p_2 \neq 0$.

6.7 Регулярні розширення ліївської симетрії

Для кожного векторного поля $\mathcal{Q}$ з алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ підстановка компонент його проекції $\pi_* \mathcal{Q}$ у систему (6.16)–(6.17) призводить до умови на набір довільних елементів $\theta = (f, g)$, для якого рівняння $\mathcal{L}_\theta$ інваріанте відносно $\pi_* \mathcal{Q}$. Ось чому рівняння з класу (6.1), інваріантні відносно проекції $\pi_* \mathfrak{s}$ підходящої підалгебри $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ на простір (t, x, u) , можна описати у такий спосіб. Для кожного базисного елемента $\mathcal{Q}$ підалгебри $\mathfrak{s}$, підставимо компоненти $\pi_* \mathcal{Q}$ в рівняння (6.16) і (6.17). Перебираючи усі елементи базису алгебри $\mathfrak{s}$, отримаємо систему (квазі)лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку на довільний елементи f і g , яку треба розв'язати. Одночасно перевіряємо, чи дійсно проекція $\pi_* \mathfrak{s}$ є максимальною алгеброю ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_\theta$ для отриманих значень набору довільних елементів $\theta = (f, g)$.

Кожна алгебра, наведена в лемі 6.7 дійсно підходяща одновимірною підалгеброю алгебри $\mathfrak{g}_{\text{ess}}^\sim$ і призводить до простої незачепленої системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку на f і g . Відповідний список рівнянь з класу (6.1), що допускають одновимірні розширення ліївської симетрії алгебри ядра $\mathfrak{g}^\cap$, пов'язані з алгеброю $\mathfrak{g}^\sim$, є таким:

1. $2\mathcal{D}^u - q\mathcal{D}^t + 2\mathcal{D}(\delta)$: $u_{tt} = |u|^q(\hat{f}(\omega)u_{xx} + \hat{g}(\omega)u),$
2. $\mathcal{D}^t - \mathcal{D}(2)$: $u_{tt} = e^x(\hat{f}(u)u_{xx} + \hat{g}(u)),$
3. $\mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2)$: $u_{tt} = e^u(\hat{f}(x)u_{xx} + \hat{g}(x)),$
4. $\mathcal{D}(1)$: $u_{tt} = \hat{f}(u)u_{xx} + \hat{g}(u),$

де $\omega := x - \delta \ln |u|$, $\delta \in \{0, 1\}$ і q — довільні сталі. Тут і надалі в кожному випадку наводимо лише ті векторні поля, що розширюють базис $(\mathcal{P}^t)$ ідеалу $\mathfrak{g}^\cap$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ до базису відповідної підалгебри алгебри $\mathfrak{g}^\sim$.

Обчислення, пов'язані з двовимірними розширеннями, більш скла-

дні. Наведемо спочатку результат:

9. $\mathcal{D}^u - \mathcal{D}(p)$, $\mathcal{D}^t - \mathcal{D}(2)$, $p \neq 0$: $u_{tt} = \pm e^x |u|^p (u_{xx} + \nu u)$,
10. $\mathcal{D}^u - 2\mathcal{D}(x)$, $\mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2)$: $u_{tt} = \pm x^2 e^u u_{xx} + \nu e^u$,
11. $-\mathcal{D}^u + 2\mathcal{D}^t + 2\mathcal{D}(x)$, $\mathcal{D}(1)$: $u_{tt} = \hat{f}(u) u_{xx}$,
12. $(1 - q)\mathcal{D}^u + 2q\mathcal{D}^t - 2(1 - q)\mathcal{D}(x) - \mathcal{Z}(4)$, $\mathcal{D}(1)$:
 $u_{tt} = \pm e^u u_{xx} + \varepsilon' e^{qu}$,
13. $(3 - p + q)\mathcal{D}^u + 2(1 - q)\mathcal{D}^t + 2(1 + p - q)\mathcal{D}(x)$, $\mathcal{D}(1)$:
 $u_{tt} = \pm |u|^p u_{xx} + \varepsilon' |u|^q$.

Зв'язки на сталі і функціональні параметри, накладені умовою максимальності для відповідних розширень і їх нееквівалентністю, обговорено після теореми 6.2.

Випадки 9 і 10, асоційовані відповідно з першою і другою сім'ями підалгебр, наведено в лемі 6.8. У обох випадках стала ν є довільною. Зауважимо, що довільний ненульовий сталий множник у виразі для довільний елемента f , що виникає в процесі інтегрування рівняння на f , можна завжди відкалібрувати до ± 1 , наприклад, розтягом за t .

Третя підалгебра з лемі 6.8 насправді представляє багатопараметричну сім'ю кандидатів для розширення, яка розбито в процесі побудови інваріантних рівнянь на випадки 11–13. Не всі значення параметрів дають підходяще розширення. Додаткові обмеження на параметри впливають з умови сумісності асоційованої системи

$$\begin{aligned} f_x &= 0, & ((a_1 + \tfrac{1}{2}a_3)u + \delta)f_u &= pf, \\ g_x &= 0, & ((a_1 + \tfrac{1}{2}a_3)u + \delta)g_u &= qg \end{aligned}$$

на довільний елементи з додатковими умовами $f \neq 0$ і $(f_u, g_{uu}) \neq (0, 0)$ та вимогою, щоб розмірність розширення не перевищувала два. Введемо позначення $p = 2(a_3 - a_2)$ і $q = a_1 + \frac{1}{2}a_3 - 2a_2$.

Зазначене вище розбиття виконано в такий спосіб. Якщо $a_3 = -2a_1$ і $\delta = 0$, з нерівності $f \neq 0$ випливає, що $p = 0$, тобто $a_2 = a_3$. Оскільки a_1 , a_2 і a_3 не можуть одночасно дорівнювати нулю, знаходимо, що $q \neq 0$,

а тому $g = 0$. Домножуючи перший базисний елемент на $-a_1^{-1}$, маємо $a_1 = -1$, що відповідає випадку 11. Для $a_3 = -2a_1$ і $\delta = 1$ виводимо $a_2 = -q/2$, $a_3 = (p - q)/2$ і $a_1 = -(p - q)/4$. Параметр p має бути ненульовим, оскільки в іншому випадку отримаємо рівняння Ліувілля, чия максимальна алгебра ліївської інваріантності нескінченновимірна. Додатково домножимо перший базисний елемент на -4 і відкалібруємо p перетворенням $\mathcal{D}^u(c_2)$ для деякого c_2 в 1, що дає випадок 12. Випадок 13 відповідає умові $a_3 \neq -2a_1$. Калібрування першого базисного елемента дозволяє покласти $a_1 + \frac{1}{2}a_3 = 4$, і тоді $a_2 = 2(1 - q)$, $a_3 = 2(1 + p - q)$, $a_3 = (3 - p + q)$. В обох випадках 12 і 13 параметр ε' ненульовий (бо інакше розмірність розширення більша за два) і його можна відкалібрувати в ± 1 розтягами змінних t і x .

Розглянемо кандидатів для тривимірних розширень, наведених у лемі 6.9. З сумісності асоційованих систем на довільні елементи, доповнених нерівністю $f \neq 0$, впливає $p_1 = 2(p_2 - 1)$ і $d = -4$ для першої і другої підалгебри з леми 6.9 відповідно. Загальними розв'язками цих систем з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності є відповідно $(f, g) = (\pm|u|^p, 0)$ і $(f, g) = (\pm e^u, 0)$. Це дає такі випадки розширення ліївської симетрії:

$$16. \quad (p - 4)\mathcal{D}^u - 2p\mathcal{D}(x), \quad (p - 4)\mathcal{D}^t - 4\mathcal{D}(x), \quad \mathcal{D}(1), \quad p \neq 0, 4:$$

$$u_{tt} = \pm|u|^p u_{xx},$$

$$17. \quad \mathcal{D}^u - 2\mathcal{D}(x) - \mathcal{Z}(4), \quad \mathcal{D}^t - \mathcal{Z}(2), \quad \mathcal{D}(1):$$

$$u_{tt} = \pm e^u u_{xx}.$$

Тут $p := 4(p_2 - 1)/p_2 \neq 4$, оскільки для $p = 4$ відповідне рівняння допускає оператори ліївської симетрії $\pi_*\mathcal{D}(x)$ і $\pi_*\mathcal{D}(x^2)$. Рівняння з класу (6.1), що є інваріантним відносно двох лінійно незалежних векторних полів вигляду π_*Q^i , де $Q^i = \mathcal{D}(\zeta^i) + \mathcal{Z}(\chi^i)$, прокласифіковано у наслідку 6.2. Отже, $G^\sim$ -нееквівалентні регулярні розширення ліївської симетрії в класі (6.1) вичерпують випадками 1–4, 9–13, 14d, 16, 17 і 19d.

6.8 Висновки

Повну групову класифікацію класу $\mathcal{W}$ $(1+1)$ -вимірних нелінійних хвильових і еліптичних рівняння вигляду (6.1) виконано з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності й до $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності, використовуючи нову версію алгебраїчного методу групової класифікації для ненормалізованих класів диференціальних рівнянь. Результати класифікації наведено в теоремі 6.2. Ключовим моментом класифікації є побудова породжувальної множини для групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ класу $\mathcal{W}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, див. теорему 6.3.

Більш важливими, ніж розв’язок обговорених вище специфічних класифікаційних задач, є розвиток і модифікація загальний понять і технік, а також їх комбінування, реалізовані в цьому підрозділі.

Розбиття класів диференціальних рівнянь на підкласи, що індукують розбиття відповідних групоїдів еквівалентності, регулярно застосовують у процесі дослідження групоїдів еквівалентності. У цьому підрозділі зроблено два розбиття класів на підкласи — $\mathcal{W}_{\text{gen}} = \mathcal{W} \sqcup \mathcal{W}_{\text{lin}}$ і $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \sqcup \mathcal{W}_1$, що породжують розбиття групоїдів

$$\mathcal{G}_{\text{gen}}^\sim = \mathcal{G}^\sim \sqcup \mathcal{G}_{\text{lin}}^\sim \quad \text{і} \quad \mathcal{G}^\sim = \mathcal{G}_0^\sim \sqcup \mathcal{G}_1^\sim,$$

див. твердження 6.1. Усі наведені вище класи і підкласи мають таку саму групу еквівалентності $G^\sim$. Однак, на відміну від прикладів, наявних у літературі, підкласи з цих двох розбиттів не мають кращих нормалізаційних властивостей, ніж їх надкласи. Ось чому властивість нормалізованості не обґрунтовує ці розбиття, які скоріше виведено через прямий аналіз визначальних рівнянь на допустимі перетворення.

Побудовано породжувальні (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) множини $\mathcal{B}_0$ і $\mathcal{B}_1$ групоїдів еквівалентності $\mathcal{G}_0^\sim$ і $\mathcal{G}_1^\sim$, що складаються відповідно з сімей $\mathbf{T1}|_{\mathcal{W}_0}$ і $\mathbf{T3-T9}$ і сімей $\mathbf{T1}|_{\mathcal{W}_1}$ і $\mathbf{T2}$, наведених у теоремі 6.3.

Важливим моментом є встановлення бієктивного функтора між двома категоріями — групоїдами еквівалентності $\mathcal{G}_{00\varepsilon'}^\sim$ і $\mathcal{G}_{01g_2}^\sim$ підкласів $\mathcal{W}_{00\varepsilon'}$

і $\mathcal{W}_{01g_2}$ рівнянь (6.23) і (6.26) з $g^1 \neq 0$, фіксованим $\varepsilon' \in \{-1, 1\}$ і фіксованою функцією g^2 , що задовольняє рівняння $g_u^2 g_{uu}^2 \neq (g_{uu}^2)^2$, відповідно. Ізоморфізм з $\mathcal{G}_{00\varepsilon'}^{\sim}$ в $\mathcal{G}_{01g_2}^{\sim}$ задано перетвореннями

$$\begin{aligned} \varepsilon &\mapsto \check{\varepsilon} = \varepsilon, & g^1 &\mapsto \check{g}^1 = g^1, \\ \Phi: \tilde{t} = T, \tilde{x} = X, \tilde{u} = u - \ln |X_x^2 - \varepsilon X_t^2| &\mapsto \\ \check{\Phi}: \tilde{t} = T, \tilde{x} = X, \tilde{u} = u. \end{aligned}$$

Фіксування ε' і g^2 є природним, оскільки значення цих параметрів не можна змінити допустимими перетвореннями в класах $\mathcal{W}_{00}$ і $\mathcal{W}_{01}$ з точністю до калібрувального перетворення еквівалентності пересування ненульового сталого множника між довільними елементами g^1 і g^2 в класі $\mathcal{W}_{01}$, яким можна знехтувати. Отже, розбиття класів $\mathcal{W}_{00}$ і $\mathcal{W}_{01}$ на підкласи, асоційовані з фіксованими значеннями ε' і g^2 , $\mathcal{W}_{00} = \sqcup_{\varepsilon'} \mathcal{W}_{00\varepsilon'}$ і $\mathcal{W}_{01} = \sqcup_{g^2} \mathcal{W}_{01g^2}$, індукують розбиття відповідних групоїдів еквівалентності, $\mathcal{G}_{00}^{\sim} = \sqcup_{\varepsilon'} \mathcal{G}_{00\varepsilon'}^{\sim}$ і $\mathcal{G}_{01}^{\sim} = \sqcup_{g^2} \mathcal{G}_{01g^2}^{\sim}$. Жодне рівняння з класу $\mathcal{W}_{00\varepsilon'}$ не пов'язане з рівняннями з класу $\mathcal{W}_{01g_2}$ точковими перетвореннями. Іншими словами, функтор з $\mathcal{G}_{00\varepsilon'}^{\sim}$ в $\mathcal{G}_{01g_2}^{\sim}$ не індуковано сім'єю точкових перетворень, що породжує відображення з $\mathcal{W}_{00\varepsilon'}$ на $\mathcal{W}_{01g_2}$ або навпаки. Однак він дозволяє легко отримати групоїд еквівалентності $\mathcal{G}_{01g_2}^{\sim}$ з групоїда еквівалентності $\mathcal{G}_{00\varepsilon'}^{\sim}$.

Необхідні передумови для класифікації сингулярної розширень ліівської симетрії в підкласі $\mathcal{W}_1$ створено класифікацією допустимих перетворень у цьому підкласі. Класифікацію регулярних розширень ліівської симетрії виконано в рамках алгебраїчного методу, її зведено до попередньої групової класифікації підкласу $\mathcal{W}$. Використано оптимізовану версію цього методу, що включає класифікацію кандидатів на роль підходящих підалгебр алгебри $\mathfrak{g}^{\sim}$, враховуючи основні обмеження на розмірність і структуру таких підалгебр і завершення вибору підходящих підалгебр у процесі побудови відповідних рівнянь, що допускають розширення ліівської симетрії.

7 Симетрії Лі та точні розв'язки системи рівнянь реакції-дифузії з поперечною дифузією

7.1 Аналіз та вибір математичної моделі

Існує багато математичних моделей, що використовуються для опису епідемічних процесів, які представлені у відомих монографіях і підручниках присвячених математичному моделюванню у біології та медицині (див., н-д, монографії [Diekmann O., Heesterbeek J., 2000; Murray J.D., 2003; Keeling M.J., Rohani P., 2008; Brauer F., Castillo-Chavez C., 2012]). Пандемія Ковід-19 дала новий поштовх для розробки таких моделей, зокрема на базі нелінійних систем реакції-дифузії (див. огляд [65] та цитовану там літературу).

В роботі [7] запропоновано та апробовано нову модель для опису пандемія Ковід-19, яка базується на нелінійній системі звичайних диференціальних рівнянь. В [47] модель було узагальнено з метою врахування просторових факторів. У підсумку було отримано таку систему рівнянь реакції-дифузії:

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 \Delta u + u(a - bu^\gamma), \\ v_t &= d_2 \Delta u + k(t)u. \end{aligned} \tag{7.1}$$

У (7.1), функція $u(t, x, y)$ описує щільність інфікованих осіб (кількість випадків Ковід-19) у околі точки (x, y) , тоді як $v(t, x, y)$ відображає щільність померлих від Ковід-19 осіб. Коефіцієнти дифузії d_1 та d_2 визначають випадковий рух інфікованих осіб, що сприяє поширенню пандемії. Проте, ми вважаємо, що $d_1 \gg d_2$, оскільки рух інфікованих осіб спричиняє, передусім, вищу швидкість нових випадків Ковід-19, тоді як лише частина з них призводить до нових смертей. Коефіцієнти a , b та γ є додатними сталими, що відповідають за поширення вірусу та обмеженість (в часі) загальної кількості інфікованих осіб; функція $k(t) > 0$ — коефіцієнт ефективності системи охорони здоров'я під час епідемічного процесу. У

випадку $\gamma = 1$ перше рівняння системи (7.1) є добре відомим рівнянням Фішера [Fisher R.A., *Ann. Eugenics.*, 1937].

7.2 Симетрії Лі системи (7.1)

В статті [47] досліджено симетрійні властивості системи (7.1). Зокрема встановлено, що система (7.1) характеризується широким набором симетрій Лі, які суттєво залежать від параметрів γ , d_1 , d_2 та функції $k(t)$. Зауважимо, що для аналізу симетрійних властивостей системи (7.1) було накладено природні обмеження: $d_1^2 + d_2^2 \neq 0$ (у протилежному випадку отримується система звичайних диференціальних рівнянь і відповідна модель досліджена в [7]); $k \neq 0$ (за відсутності цієї умови система втрачає прикладну цінність); $b\gamma(\gamma + 1) \neq 0$ (у протилежному випадку система стає лінійною).

Використовуючи інфінітезимальний метод побудови перетворень еквівалентності, було доведено таке твердження.

Теорема 7.1. *Група неперервних перетворень еквівалентності, що зберігає структуру системи (7.1), тобто перетворює її у систему вигляду*

$$\begin{aligned}\bar{u}_{\bar{t}} &= \bar{d}_1 \Delta \bar{u} + \bar{u}(\bar{a} - \bar{b}\bar{u}^{\bar{\gamma}}), \\ \bar{v}_{\bar{t}} &= \bar{d}_2 \Delta \bar{u} + \bar{k}(\bar{t})\bar{u},\end{aligned}\tag{7.2}$$

є нескінченно-параметричною групою Лі, що породжується перетвореннями

$$\begin{aligned}\bar{t} &= \beta_1 t + \alpha_0, \\ \bar{x} &= \beta_2 (x \cos \beta_0 + y \sin \beta_0) + \alpha_1, \quad \bar{y} = \beta_2 (y \cos \beta_0 - x \sin \beta_0) + \alpha_2, \\ \bar{u} &= \beta_3 u, \quad \bar{v} = \beta_4 v + f(x, y), \\ \bar{k} &= \frac{\beta_4}{\beta_1 \beta_3}, k, \quad \bar{d}_1 = \frac{\beta_2^2}{\beta_1}, d_1, \quad \bar{d}_2 = \frac{\beta_2^2 \beta_4}{\beta_1 \beta_3}, d_2, \quad \bar{a} = \frac{a}{\beta_1}, \quad \bar{b} = \frac{b}{\beta_1 \beta_3^{\bar{\gamma}}}, \quad \bar{\gamma} = \gamma,\end{aligned}\tag{7.3}$$

де $\alpha_i (i = 0, 1, 2)$ та $\beta_j (j = 0, \dots, 4)$ є дійсними параметрами групи з обмеженнями $\beta_1 \beta_2 \beta_4 \neq 0$, $\beta_3 > 0$, $f(x, y)$ — довільна гладка функція.

Зауваження 7.1. Для того, щоб отримати систему (7.2) з невід’ємними параметрами (що є біологічно обґрунтованою вимогою), мають виконуватися додаткові обмеження $\beta_1 > 0$ та $\beta_4 > 0$.

Застосувавши критерій інваріантності до системи (7.1) (див., н-д, розділ 1.2.5 [Arrigo D.J., *John Wiley & Sons*, 2015]), було доведено такі теореми.

Теорема 7.2. *Основна алгебра симетрій системи (7.1) є нескінченно-вимірною алгеброю $\mathcal{L}_i$, породженою операторами:*

$$\partial_x, \partial_y, y\partial_x - x\partial_y, F(x, y)\partial_v, \quad (7.4)$$

де $F(x, y)$ — довільна гладка функція.

Теорема 7.3. *Система (7.1) з $d_1 \neq 0$ допускає розширення алгебри $\mathcal{L}_i$ (7.4) лише в п’яти випадках:*

$$1) k(t) = 1: \partial_t;$$

$$2) a = 0, k(t) = \frac{1}{t}: 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - \frac{2}{\gamma}(u\partial_u + v\partial_v);$$

$$3) a = 0, d_2 = 0, k(t) = t^p, p(p+1) \neq 0:$$

$$2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - \frac{2}{\gamma}(u\partial_u + (1 - \gamma p - \gamma)v\partial_v);$$

$$4) d_2 = 0, k(t) = e^{pt}, p \neq 0: \partial_t + pv\partial_v;$$

$$5) a = 0, d_2 = 0, k(t) = 1: \partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - \frac{2}{\gamma}(u\partial_u + (1 - \gamma)v\partial_v).$$

Будь-яка інша система вигляду (7.1) з $d_1 \neq 0$, що допускає розширення алгебри (7.4), зводиться за допомогою перетворень еквівалентності (7.3) до однієї з систем, наведених у випадках 1)–5).

Теорема 7.4. *Система (7.1) з $d_1 = 0, d_2 \neq 0$ допускає розширення алгебри $\mathcal{L}_i$ (7.4) лише в чотирьох випадках. У кожному з випадків оператор симетрії $\mathcal{L}_i$ має таку загальну форму:*

$$X = \xi^0(t, u) \partial_t + \xi^1(x, y) \partial_x + \xi^2(x, y) \partial_y + \eta^1(t, u) \partial_u + \\ (G(t, x, y, u) + (\xi_t^0 - 2\xi_x^1 + \eta_u^1)v) \partial_v, \quad (7.5)$$

де функції ξ^1 , ξ^2 є довільним розв'язком системи Коші–Рімана

$$\xi_x^1 = \xi_y^2, \quad \xi_y^1 = -\xi_x^2, \quad (7.6)$$

а функція G є довільним розв'язком такого лінійного рівняння:

$$\begin{aligned} G_t + u(a - bu^\gamma)G_u &= k(t) (\eta^1 + 2u\xi_x^1 - u\eta_u^1) + uk'(t)\xi^0 \\ &+ u^2k(t) (a - bu^\gamma) \xi_u^0. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Значення коефіцієнтів ξ^0 та η^1 оператора (7.5) залежать від параметрів a та γ таким чином:

1) якщо $\gamma \neq 1$ та $a \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \alpha_1 + \frac{\alpha_2 e^{at}}{au} (a - a\gamma + b\gamma u^\gamma) (a - bu^\gamma)^{-1+\frac{1}{\gamma}}, \\ \eta^1 &= \alpha_2 e^{at} (a - bu^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}; \end{aligned}$$

2) якщо $\gamma \neq 1$ та $a = 0$, то

$$\xi^0 = \alpha_1 - \alpha_2 \gamma t, \quad \eta^1 = \alpha_2 u;$$

3) якщо $\gamma = 1$ та $a \neq 0$, то

$$\begin{aligned} \xi^0 &= e^{2at} \int \frac{f_1\left(\frac{a-bu}{u} e^{at}\right)}{u^4} du + g(t), \\ \eta^1 &= \frac{u}{ae^{at}} \left(f_2(\omega) + \omega^2 \int e^{-3at} (\omega + be^{2at}) f_1(\omega e^{-at}) dt \right), \\ \omega &= \frac{a - bu}{u} e^{2at}, \end{aligned}$$

4) якщо $\gamma = 1$ та $a = 0$, то

$$\begin{aligned} \xi^0 &= \int \frac{f_1\left(\frac{1}{u} - bt\right)}{u^4} du + g(t), \\ \eta^1 &= u \left(f_2(\omega) + b^2 \int (\omega + 2bt) f_1(\omega + bt) dt \right), \quad \omega = \frac{1}{u} - 2bt, \end{aligned}$$

де α_1 та α_2 є довільними сталими, а функції f_1 , f_2 та g мають бути такими, щоб виконувалась рівність $\xi_t^0 = -\eta_u^1$.

Наведемо приклади нетривіальних симетрій Лі, які можна отримати у випадках 3) та 4) теореми 7.4. Для початку, поклавши $f_1 = 1$ та використавши рівняння $\xi_t^0 = -\eta_u^1$, знаходимо функції ξ^0 та η^1 :

$$\begin{aligned}\xi^0 &= \left(\frac{b^3}{3a^2} - \frac{1}{3u^3} \right) e^{2at} + \frac{\alpha_1 b}{a^2} e^{at} + \frac{\alpha_2}{a^2} e^{-at} + \alpha_0, \\ \eta^1 &= -\frac{(a+2bu)(a-bu)^2}{3a^2u^2} e^{2at} + \frac{\alpha_1(a-bu)}{a} e^{at} + \frac{\alpha_2 u}{a} e^{-at},\end{aligned}$$

у випадку 3), та

$$\begin{aligned}\xi^0 &= \frac{b^3 t^3}{3} + \alpha_2 b t^2 - \alpha_1 t + \alpha_0 - \frac{1}{3u^3}, \\ \eta^1 &= (\alpha_1 - 2\alpha_2 b t - b^2 t^2) u + b^2 t + \alpha_2,\end{aligned}$$

у випадку 4), де α_0 , α_1 та α_2 — довільні сталі.

Тепер необхідно використати отримані функції ξ^0 та η^1 для знаходження функції G з рівняння (7.7). Для уникнення громіздких формул, додатково кладемо $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$, беремо частковий розв'язок

$$\xi^1 = y, \quad \xi^2 = -x$$

системи Коші–Рімана (7.6), та фіксуємо функцію $k(t)$, а саме: $k(t) = e^{-2at}$ для випадку 3), та $k(t) = t^{-2}$ для випадку 4). В результаті обчислень, отримуємо такі оператори симетрії Лі:

$$\begin{aligned}X &= \left(\frac{b^3}{3a^2} - \frac{1}{3u^3} \right) e^{2at} \partial_t + y \partial_x - x \partial_y - \frac{(a+2bu)(a-bu)^2}{3a^2u^2} e^{2at} \partial_u + \\ &\quad \left(\frac{2b^2}{3a^2} \ln u + \frac{bu-a}{3au^2} + H \left(x, y, \frac{a-bu}{u} e^{at} \right) \right) \partial_v\end{aligned}$$

у випадку 3), та

$$\begin{aligned}X &= \left(\frac{b^3 t^3}{3} - \frac{1}{3u^3} \right) \partial_t + y \partial_x - x \partial_y + b^2 t (1 - tu) \partial_u + \\ &\quad \left(\frac{2b^2}{3} \ln(tu) + \frac{btu-1}{3t^2u^2} + H \left(x, y, bt - \frac{1}{u} \right) \right) \partial_v,\end{aligned}$$

у випадку 4), де H — довільна гладка функція.

7.3 Точні розв'язки системи (7.1)

Використовуючи оператори симетрії Лі (або їх лінійні комбінації), наведені у теоремах 7.3 та 7.4, можна виконати редукцію системи (7.1) до систем рівнянь нижчої розмірності, зокрема й до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Для початку ми зведемо систему (7.1) до простішого вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u + u(1 - u^\gamma), \\ v_t &= D\Delta u + \frac{1}{a} k\left(\frac{t}{a}\right) u, \quad D = \frac{d_2}{d_1}, \end{aligned} \tag{7.8}$$

застосувавши перетворення еквівалентності

$$\begin{aligned} \bar{t} &= at, \quad \bar{x} = \sqrt{\frac{a}{d_1}} x, \quad \bar{y} = \sqrt{\frac{a}{d_1}} y, \\ \bar{u} &= \left(\frac{b}{a}\right)^{1/\gamma} u, \quad \bar{v} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/\gamma} v. \end{aligned}$$

У системі (7.8) та в подальшому ми використовуємо старі позначення для всіх змінних.

Застосуємо оператор ∂_y з алгебри (7.4) для редукції системи (7.8) до $(1 + 1)$ -вимірної системи. Очевидно, що цей оператор породжує тривіальний анзац

$$u = u(t, x), \quad v = v(t, x).$$

В результаті редукції, отримуємо нелінійну $(1 + 1)$ -вимірну систему рівнянь

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(1 - u^\gamma), \\ v_t &= Du_{xx} + \frac{1}{a} k\left(\frac{t}{a}\right) u. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Система (7.9) є нічим іншим, як початковою системою за припущення, що розподіл інфікованих осіб є одновимірним у просторі (тобто дифузія щодо осі y є дуже незначною). У цьому випадку розподіл загальної кількості смертей також буде одновимірним.

Поклавши $D = 0$ (дане припущення є природнім) та $k(t) = k_0 e^{-\alpha t}$ (тут k_0 та α довільні додатні сталі), система (7.9) набуде вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(1 - u^\gamma), \\ v_t &= \frac{k_0}{a} \exp\left(-\frac{\alpha t}{a}\right) u. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Використовуючи результат з теореми 7.3 (див. випадок 4)), можна помітити, що система (7.10) допускає оператор симетрії Лі

$$X = c\partial_x + \partial_t - \frac{\alpha}{a} v\partial_v, \quad c \in \mathbb{R},$$

якому відповідає такий анзац:

$$u = \phi(\omega), \quad v = \exp\left(-\frac{\alpha t}{a}\right) \psi(\omega), \quad \omega = x - ct. \quad (7.11)$$

Підставивши (7.11) у систему (7.10), отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \phi'' + c\phi' + \phi(1 - \phi^\gamma) &= 0, \\ c\psi' + \frac{\alpha}{a}\psi &= -\frac{k_0}{a}\phi. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Перше рівняння системи (7.12) є відомим звичайним диференціальним рівнянням другого порядку, яке виникає у багатьох застосуваннях (н-д, при дослідженні рівняння Фішера та його природних узагальнень [Murray J. D., *Springer*, 1989]). Загальний розв'язок цього рівняння можна подати лише у параметричній формі. Проте, точний розв'язок у явному вигляді можна побудувати для випадку $c = \frac{\gamma+4}{\sqrt{2(\gamma+2)}}$ (див., н-д, [Abdelkader M. A., *J. Math. Anal. Appl.*, 1982]). Таким чином, отримуємо такий плоскохвильовий розв'язок першого рівняння системи (7.10):

$$u = \left(1 + A \exp\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+2)}} \omega\right)\right)^{-2/\gamma}, \quad \omega = x - \frac{\gamma+4}{\sqrt{2(\gamma+2)}} t, \quad (7.13)$$

де A — довільна додатна стала.

Маючи функцію u у явному вигляді (7.13), можна легко знайти функцію v з другого рівняння системи (7.10):

$$v = \frac{k_0}{a} \int \exp\left(-\frac{\alpha t}{a}\right) \left(1 + A \exp\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2(\gamma+2)}} \omega\right)\right)^{-2/\gamma} dt + g(x), \quad (7.14)$$

де $g(x)$ — довільна гладка функція.

Оскільки інтеграл у правій частині виразу (7.14) не можна виразити через елементарні функції для довільних значень параметрів a , α та γ , то для ілюстрації отриманих результатів ми накладемо додаткові обмеження. Поклавши, для прикладу, $\gamma = 1$ та $\alpha = \frac{5}{6}a$, отримуємо такий розв'язок системи (7.10):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \left(1 + A \exp\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \omega\right)\right)^{-2}, \quad \omega = x - \frac{5}{\sqrt{6}} t, \\ v(t, x) &= g(x) - \frac{6k_0}{5a} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{6}}\right) \left(A + \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{6}} \omega\right)\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

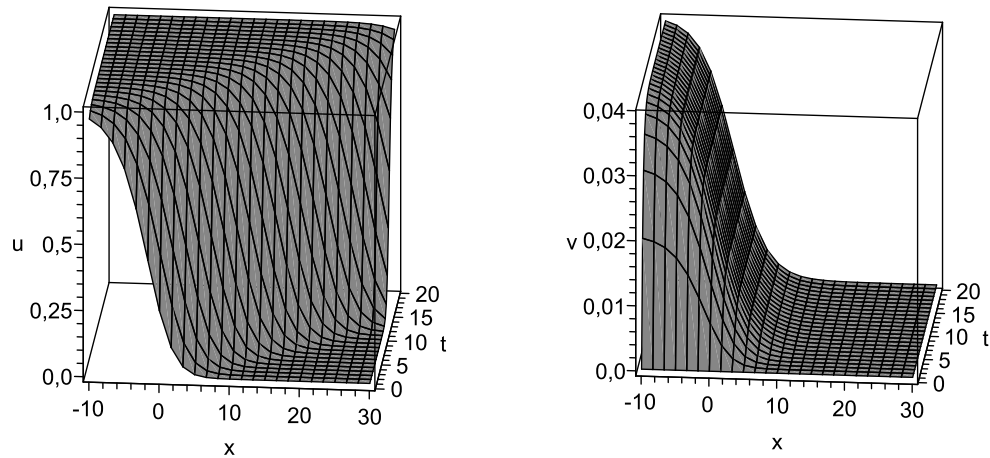


Рис. 7.1: Розв'язок (7.15)–(7.16) системи (7.10) з $k_0 = 0.01$, $a = 0.3$, $\alpha = 0.25$, $\gamma = 1$, $A = 1$.

Розглянемо можливу інтерпретацію розв'язку (7.15). Функції u та v повинні бути невід'ємними для всіх значень $t > 0$ та $x \in \mathbb{I}$ (де $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$).

$\mathbb{R}$). Очевидно, що функція u завжди є додатною. Крім того, будь-яка функція $g(x)$, що задовольняє нерівність

$$g(x) \geq \frac{6k_0}{5a} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{6}}\right) \left(A + \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{6}}\right)\right)^{-1},$$

гарантує невід'ємність функції v . Зокрема, можна взяти функцію

$$g(x) = \frac{6k_0}{5a} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{6}}\right) \left(A + \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{6}}\right)\right)^{-1}, \quad (7.16)$$

яка забезпечує нульову смертність у початковий момент часу $t = 0$, тобто $v(0, x) = 0$.

Графік розв'язку (7.15)–(7.16) з фіксованим набором параметрів представлено на рис. 7.1.

8 Q -умовні симетрії та точні розв'язки нелінійної трикомпонентної системи еволюційних рівнянь

8.1 Опис моделі

В роботі [32] було здійснено вичерпний опис операторів Q -умовної симетрії (окрім так званого по-го випадку) системи рівнянь реакції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned} F_t &= d_f F_{xx} + r_f F (1 - (e_1 F + e_2 C)/K), \\ C_t &= d_c C_{xx} + r_c C (1 - (e_1 F + e_2 C)/K) + e_1 F H + e_2 C H, \\ H_t &= d_h H_{xx} + r_h H (1 - H/L) - e_1 F H - e_2 C H. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Система (8.1) є природнім узагальненням відомої системи еволюційних рівнянь [Aoki K., Shida M., Shigesada N., *Theor. Popul. Biol.*, 1996]

$$\begin{aligned} F_t &= D F_{xx} + r_f F (1 - (F + C)/K), \\ C_t &= D C_{xx} + r_c C (1 - (F + C)/K) + e(F + C)H, \\ H_t &= D H_{xx} + r_h H (1 - H/L) - e(F + C)H, \end{aligned} \quad (8.2)$$

що описує процес взаємодії первісних фермерів з мисливцями-збирачами. Справді, система (8.2) не враховує очевидного факту, що коефіцієнти дифузії насправді різні. У системі (8.2): $F(t, x)$, $C(t, x)$ та $H(t, x)$ — невідомі гладкі функції, всі коефіцієнти системи є додатними числами, інтерпретація яких подана у цитованій вище роботі. Функція $F(t, x)$ — це щільність популяції первісних фермерів, $C(t, x)$ — щільність популяції мисливців-збирачів, які стали фермерами (converted farmers), $H(t, x)$ — щільність популяції мисливців-збирачів.

Застосувавши перетворення змінних

$$F \rightarrow \frac{K}{e_1} u, \quad C \rightarrow \frac{KL}{r_f} v, \quad H \rightarrow Lw, \quad t \rightarrow \frac{1}{r_f} t, \quad x \rightarrow \sqrt{\frac{1}{r_f}} x$$

до системи (8.1) та ввівши нові позначення

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{e_2 L}{r_f}, \quad a_2 = \frac{r_c}{r_f}, \quad a_3 = \frac{r_h}{r_f}, \quad a_4 = \frac{K}{r_f} \neq 0, \quad a_5 = \frac{e_2 K L}{r_f^2}, \\ d_f &= d_1, \quad d_c = d_2, \quad d_h = d_3, \end{aligned}$$

отримуємо еквівалентну систему рівнянь

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + u(1 - u - a_1 v), \\ v_t &= d_2 v_{xx} + a_2 v(1 - u - a_1 v) + uw + a_1 vw, \\ w_t &= d_3 w_{xx} + a_3 w(1 - w) - a_4 uw - a_5 vw, \end{aligned} \quad (8.3)$$

яку детально досліджено методом умовної симетрії в роботі [32].

8.2 Оператори Q -умовної симетрії

Q -умовні симетрії є важливим інструментом у дослідженні *нелінійних* диференціальних рівнянь, оскільки вони дозволяють знаходити розв'язки у випадках, коли не працюють класичні методи інтегрування. Q -умовні симетрії будуються у вигляді диференціальних операторів першого порядку. Зокрема, загальний вигляд такого оператора для системи (8.3) визначається таким чином:

$$Q = \xi^0(t, x, u, v, w) \partial_t + \xi^1(t, x, u, v, w) \partial_x + \eta^1(t, x, u, v, w) \partial_u + \eta^2(t, x, u, v, w) \partial_v + \eta^3(t, x, u, v, w) \partial_w, \quad (\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 \neq 0, \quad (8.4)$$

де коефіцієнти ξ^0 , ξ^1 та η^k ($k = 1, 2, 3$) повинні бути знайдені за відомим критерієм.

Відомо, що будь-який оператор Q -умовної симетрії, помножений на довільну гладку функцію, залишається оператором Q -умовної симетрії. Ця властивість дозволяє спростити оператор (8.4). Зокрема, у випадку $\xi^0 \neq 0$ оператор (8.4) можна записати у вигляді

$$Q = \partial_t + \xi(t, x, u, v, w) \partial_x + \eta^1(t, x, u, v, w) \partial_u + \eta^2(t, x, u, v, w) \partial_v + \eta^3(t, x, u, v, w) \partial_w, \quad (8.5)$$

Випадок $\xi^0 = 0$ приводить до такого оператора:

$$Q = \partial_x + \eta^1(t, x, u, v, w) \partial_u + \eta^2(t, x, u, v, w) \partial_v + \eta^3(t, x, u, v, w) \partial_w. \quad (8.6)$$

Проте, у роботі [Василенко О., Попович Р., *Вісник ПДТУ*, 1999] доведено, що для класу систем еволюційних рівнянь (до яких також на-

лежить система (8.3)) задача пошуку операторів Q -умовної симетрії вигляду (8.6) рівносильна задачі пошуку розв'язків досліджуваної системи. Зазначимо, що випадок $\xi^0 = 0$ досліджено в статті [48], у якій наведено вичерпний опис операторів Q -умовної симетрії першого типу (див. детальніше [Cherniha R., *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2010]). Оператори Q -умовної симетрії першого типу є частинним випадком операторів Q -умовної симетрії. Відтак, у по-го випадку задача їхнього пошуку значно спрощується (див., н-д, роботи [33, 66]). Таким чином, у роботі [32] ми розглядаємо лише випадок $\xi^0 \neq 0$. Основний результат дослідження сформульовано у вигляді теореми.

Теорема 8.1. Система (8.3), з обмеженнями на коефіцієнти

$$d_1 > 0, d_2 > 0, d_3 > 0, a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 \geq 0, a_4 > 0, a_5 \geq 0,$$

допускає оператори Q -умовної симетрії вигляду (8.5) лише у випадках, наведених в таблиці 8.1.

Зауваження 8.1. В таблиці 8.1 використано такі позначення: параметри α_i ($i = 1, 2, 3, 4$) та μ є довільними дійсними числами; $E(\delta_1, \delta_2) = \exp \left[\mu \frac{\delta_2 - \delta_1}{2\delta_1\delta_2} \left(x + \mu \frac{\delta_2 - \delta_1}{2\delta_1} t \right) \right]$, а функція $P(t, x)$ є довільним розв'язком рівняння теплопровідності $P_t = d_2 P_{xx}$.

При порівнянні систем із реакційними доданками (нелінійними членами), наведеними в таблиці 8.1, із загальним виглядом системи (8.3), легко помітити, що випадки 2–5 є найбільш цікавими з точки зору їх практичного застосування та можливої інтерпретації точних розв'язків. У всіх інших випадках таблиці 8.1 розглядаються системи, що містять автономне рівняння Фішера

$$u_t = d u_{xx} + u(1 - u).$$

Це означає, що на популяцію фермерів u не впливають представники популяції v , тобто мисливці-збирачі, які стали фермерами. Незважаючи

Табл. 8.1: Оператори Q -умовної симетрії системи (8.3)

	Реакційні доданки	Обмеження	Оператори
1	$u(1-u)$ $\frac{d_2}{d_1} v(1-u) + uw$ $a_3 w(1-w) - a_4 uw$	$a_3 \neq 0$	$\partial_t + \mu \partial_x + (q^2 u + p^2) \partial_v,$ $q^2 = \left(\alpha_1 + \alpha_2 e^{\frac{d_2}{d_1} t} \right) E(d_1, d_2),$ $p^2 = -\alpha_2 e^{\frac{d_2}{d_1} t} E(d_1, d_2)$
2	$u(1-u-a_1 v)$ $\frac{d_2-d_3}{d_1-d_3} v(1-u-a_1 v) +$ $uw + a_1 vw$ $-\frac{d_3}{d_1} uw - \frac{a_1 d_3}{d_1} vw$	$a_1 \neq 0$ $d_1 \neq d_2$ $d_1 \neq d_3$	$\partial_t - \frac{d_1}{d_1-d_2} w(a_1 \partial_u - \partial_v) - \frac{d_3}{d_1-d_3} w \partial_w;$ $\partial_t - \frac{d_3}{a_1(d_1-d_3)} u(a_1 \partial_u - \partial_v) -$ $\frac{(d_1-d_2)d_3^2}{a_1 d_1(d_1-d_3)^2} u \partial_w$
3	$u(1-u-a_1 v)$ $\frac{d_2}{d_1} v(1-u-a_1 v) +$ $uw + a_1 vw$ $-a_4 uw - a_1 a_4 vw$	$a_1 \neq 0$ $d_1 \neq d_2$ $a_4 d_1 \neq d_3$	$(d_1 - d_2) \partial_t +$ $\left(\frac{d_2}{a_1} (u-1) + d_2 v + \frac{d_1 d_3}{a_4 d_1 - d_3} w \right) (a_1 \partial_u - \partial_v)$
4	$u(1-u-a_1 v)$ $v(1-u-a_1 v) +$ $uw + a_1 vw$ $-a_4 uw - a_1 a_4 vw$	$a_1 \neq 0$ $d_1 = d_2 = d$ $a_4 d \neq d_3$	$\partial_t + \left((\alpha_1 + \alpha_2 (a_4 d - d_3) e^t) u + \right.$ $\left. \alpha_2 a_1 (a_4 d - d_3) e^t v + \alpha_2 a_1 d_3 e^t w + \right.$ $\left. \alpha_2 (d_3 - a_4 d) e^t \right) (a_1 \partial_u - \partial_v)$
5	$u(1-u-a_1 v)$ $v(1-u-a_1 v) +$ $uw + a_1 vw$ $-\frac{d_3}{d} uw - a_1 \frac{d_3}{d} vw$	$a_1 \neq 0$ $d_1 = d_2 = d$	$\partial_t + \mu \partial_x +$ $(\alpha_1 u + \alpha_2 e^t E(d_3, d) w) (a_1 \partial_u - \partial_v)$
6	$u(1-u)$ $a_2 v(1-u) + uw$ $-a_4 uw$	$a_4 d_2 \neq a_2 d_3$ $a_2 d_1 \neq d_2$ $d_2 \neq d_3$	$a_2 P(t, x) = 0, (d_2 - d_3) \partial_t - a_2 d_3 w \partial_w +$ $\left(\alpha_1 v + \frac{d_3(a_2 d_3 + \alpha_1)}{a_4 d_2 - a_2 d_3} w + P(t, x) \right) \partial_v$
7	$u(1-u)$ $\frac{a_4 d_2}{d_3} v(1-u) + uw$ $-a_4 uw$		$\partial_t + \mu \partial_x + (\alpha_1 v + h^2 w) \partial_v + \alpha_1 w \partial_w,$ $h^2 = \alpha_2 \exp \left(\frac{a_4 d_2 + \alpha_1 (d_2 - d_3)}{d_3} t \right) E(d_3, d_2)$

Продовження таблиці 8.1

	Реакційні доданки	Обмеження	Оператори
8	$u(1-u)$ $\frac{d_2}{d_1} v(1-u) + uw$ $-a_4 uw$	$a_4 d_1 \neq d_3$	$\partial_t + \mu \partial_x + (\alpha_1 v + q^2 u + p^2) \partial_v + \alpha_1 w \partial_w,$ $q^2 = \left(\alpha_2 + \alpha_3 e^{\frac{d_2}{d_1} t} \right) E(d_1, d_2),$ $p^2 = -\alpha_3 e^{\frac{d_2}{d_1} t} E(d_1, d_2);$ $(d_2 - d_3) \partial_t + \left(\alpha_1 v + \frac{d_3(d_2 d_3 + d_1 \alpha_1)}{d_2(a_4 d_1 - d_3)} w + \right.$ $\left. \alpha_2 u + \alpha_3 e^{\frac{d_2}{d_1} t} (u - 1) \right) \partial_v - \frac{d_2 d_3}{d_1} w \partial_w$
9	$u(1-u)$ $\frac{d_2}{d_1} v(1-u) + uw$ $-\frac{d_3}{d_1} uw$		$\partial_t + \mu \partial_x + (\alpha_1 v + q^2 u + h^2 w + p^2) \partial_v +$ $\alpha_1 w \partial_w, p^2 = -\alpha_3 e^{\frac{d_2}{d_1} t} E(d_1, d_2),$ $q^2 = \left(\alpha_2 + \alpha_3 e^{\frac{d_2}{d_1} t} \right) E(d_1, d_2),$ $h^2 = \alpha_4 \exp \left(\frac{d_2 d_3 + \alpha_1 d_1 (d_2 - d_3)}{d_1 d_3} t \right) E(d_3, d_2)$
10	$u(1-u)$ $\frac{d_2 - d_3}{d_1} v(1-u) + uw$ $-\frac{d_3}{d_1} uw$	$d_2 \neq d_3$	$\partial_t + (\alpha_1 v + q^2 u) \partial_v + (\alpha_1 w + q^3 u + \alpha_2) \partial_w,$ $q^3 = \alpha_3 e^{-\frac{d_3}{d_1} t} - \alpha_2, q^2 = -\frac{d_1}{d_3} q^3;$ $\partial_t + \left(\alpha_1 v + \frac{\alpha_1 d_1 + d_3}{d_3} w \right) \partial_v - \frac{d_3}{d_1} w \partial_w$
11	$u(1-u)$ $a_2 v(1-u) + uw$ $-\frac{d_3}{d_1} uw$	$a_2 d_1 \neq d_2$ $a_2 d_1 \neq d_2 - d_3$ $d_2 \neq d_3$ $a_2 P(t, x) = 0$	$\partial_t + \left(\alpha_1 v - \frac{d_1 \alpha_2}{a_2 d_1 - d_2} u + P(t, x) \right) \partial_v +$ $(\alpha_2 (1-u) + \alpha_1 w) \partial_w; -a_2 d_3 w \partial_w +$ $(d_2 - d_3) \partial_t + \left(\alpha_1 v + \frac{d_1 (a_2 d_3 + \alpha_1)}{d_2 - a_2 d_1} w \right) \partial_v;$ $\partial_t + \left(\frac{a_2 d_3}{d_3 - d_2} w + \alpha_1 e^{-\frac{d_3}{d_1} t} u \right) \partial_w + \left(P(t, x) + \right.$ $\left. \frac{\alpha_1 d_1}{a_2 d_1 - d_2} e^{-\frac{d_3}{d_1} t} u + \frac{d_3 (a_2 d_1 - d_2 + d_3)}{(a_2 d_1 - d_2)(d_3 - d_2)} w - \frac{d_3}{d_1} v \right) \partial_v$
12	$u(1-u)$ $a_2 v(1-u) + uw$ $-\frac{d}{d_1} uw$	$a_2 \neq 0$ $d_2 = d_3 = d$	$\partial_t + \mu \partial_x + (q^3 u + \alpha_1 w + p^3) \partial_w +$ $(\alpha_1 v + q^2 u) \partial_v, q^2 = \alpha_2 E(d_1, d),$ $q^3 = \frac{a_2 d_1 - d}{d_1} q^2, p^3 = \frac{d - a_2 d_1}{d_1} q^2$
13	$u(1-u)$ uw $-\frac{d}{d_1} uw$	$d_2 = d_3 = d$	$\partial_t + \mu \partial_x + (\alpha_1 v + q^2 u + h^2 w + P(t, x)) \partial_v +$ $(q^3 u + \alpha_2 w + p^3) \partial_w, h^2 = \frac{d_1 (\alpha_1 - \alpha_2)}{d},$ $q^2 = \left(\alpha_3 e^{-\frac{d}{d_1} t} + \alpha_4 \right) E(d_1, d),$ $q^3 = -\frac{d}{d_1} q^2, p^3 = \frac{\alpha_4 d}{d_1} E(d_1, d)$

на те, що таке відокремлення популяцій теоретично можливе, моделі, які його описують, є надто специфічними для вивчення процесів поширення і взаємодії між фермерами та мисливцями-збирачами.

8.3 Побудова точних розв'язків та їх властивості

Отримані в теоремі 8.1 оператори Q -умовної симетрії можна застосувати для проведення редукції відповідних систем диференціальних рівнянь із частинними похідними до систем звичайних диференціальних рівнянь та подальшого знаходження їх точних розв'язків. Розгляньмо, наприклад, систему та оператори умовної симетрії з випадку 2 таблиці 8.1, тобто

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + u(1 - u - v), \\ v_t &= d_2 v_{xx} + \frac{d_2 - d_3}{d_1 - d_3} v(1 - u - v) + uw + vw, \\ w_t &= d_3 w_{xx} - \frac{d_3}{d_1} uw - \frac{d_3}{d_1} vw, \\ Q_1 &= \partial_t - \frac{d_1}{d_1 - d_2} w(\partial_u - \partial_v) - \frac{d_3}{d_1 - d_3} w \partial_w, \quad d_1 \neq d_2, \quad d_1 \neq d_3, \\ Q_2 &= \partial_t - \frac{d_3}{d_1 - d_3} u(\partial_u - \partial_v) - \frac{(d_1 - d_2)d_3^2}{d_1(d_1 - d_3)^2} u \partial_w. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Для побудови анзацу, породженого оператором Q -умовної симетрії вигляду (8.5), необхідно розв'язати таку лінійну систему диференціальних рівнянь із частинними похідними:

$$\begin{aligned} u_t + \xi u_x &= \eta^1, \\ v_t + \xi v_x &= \eta^2, \\ w_t + \xi w_x &= \eta^3. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Для оператора Q_1 система (8.8) матиме вигляд

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{d_1}{d_2 - d_1} w, \\ v_t &= \frac{d_1}{d_1 - d_2} w, \\ w_t &= \frac{d_3}{d_3 - d_1} w. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Розв'язавши систему (8.9), отримуємо такий анзац:

$$\begin{aligned} u &= \varphi_1(x) + \frac{d_1(d_1-d_3)}{d_3(d_1-d_2)} \varphi_3(x) \exp\left(\frac{d_3}{d_3-d_1} t\right), \\ v &= \varphi_2(x) - \frac{d_1(d_1-d_3)}{d_3(d_1-d_2)} \varphi_3(x) \exp\left(\frac{d_3}{d_3-d_1} t\right), \\ w &= \varphi_3(x) \exp\left(\frac{d_3}{d_3-d_1} t\right), \end{aligned} \quad (8.10)$$

де φ_1 , φ_2 та φ_3 — нові шукані функції.

Підставивши анзац (8.10) в систему (8.7), отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} d_1 \varphi_1'' + \varphi_1 \left(1 - \varphi_1 - \varphi_2\right) &= 0, \\ d_2 \varphi_2'' + \frac{d_2-d_3}{d_1-d_3} \varphi_2 \left(1 - \varphi_1 - \varphi_2\right) &= 0, \\ d_1 \varphi_3'' - \varphi_3 \left(\varphi_1 + \varphi_2 + \frac{d_1}{d_3-d_1}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Аналогічний результат було отримано для оператора Q_2 , а саме: анзац

$$\begin{aligned} u &= \varphi_1(x) \exp\left(\frac{d_3}{d_3-d_1} t\right), \\ v &= \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \exp\left(\frac{d_3}{d_3-d_1} t\right), \\ w &= \varphi_3(x) + \frac{d_3(d_1-d_2)}{d_1(d_1-d_3)} \varphi_1(x) \exp\left(\frac{d_3}{d_3-d_1} t\right), \end{aligned} \quad (8.12)$$

та редуковану систему

$$\begin{aligned} d_1 \varphi_1'' - \varphi_1 \left(\frac{d_1}{d_3-d_1} + \varphi_2\right) &= 0, \\ d_2 \varphi_2'' + \frac{d_2-d_3}{d_1-d_3} \varphi_2 \left(1 - \varphi_2 + \frac{d_1-d_3}{d_2-d_3} \varphi_3\right) &= 0, \\ d_1 \varphi_3'' - \varphi_2 \varphi_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Незважаючи на те, що отримані нелінійні системи звичайних диференціальних рівнянь (8.11) та (8.13) не є інтегровними, нам вдалося знайти їхні частинні розв'язки, що дозволило побудувати багатопараметричні сім'ї точних розв'язків досліджуваної системи (8.7).

Розглянемо систему (8.11) з додатковим обмеженням $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$, яке суттєво її спрощує. Таким чином, ми одразу отримуємо

$$\varphi_1 = \alpha x + \beta, \quad \varphi_2 = -\alpha x + 1 - \beta,$$

де α та β — довільні сталі. Оскільки $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, то третє рівняння системи (8.11) можна легко проінтегрувати. При цьому знаходимо його загальний розв'язок

$$\varphi_3 = c_1 \sin(\sqrt{D}x) + c_2 \cos(\sqrt{D}x),$$

у випадку $D = \frac{d_3}{d_1(d_1-d_3)} > 0$, та

$$\varphi_3 = c_1 e^{\sqrt{|D|x}} + c_2 e^{-\sqrt{|D|x}},$$

у випадку $D < 0$ (тут c_1 та c_2 — довільні сталі).

Підставивши отримані функції φ_1 , φ_2 та φ_3 в анзац (8.10), можна встановити асимптотичну поведінку відповідного розв'язку

$$(u, v, w) \rightarrow (\varphi_1, \varphi_2, 0) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad (8.14)$$

за умови, що $d_1 > d_3$ (в іншому випадку всі компоненти прямують до нескінченності з часом). Таким чином, ми зупинемося детальніше саме на випадку $d_1 > d_3$ при аналізі отриманих розв'язків.

Виберемо довільні параметри таким чином: $c_1 = k(d_2 - d_1)D > 0$, $c_2 = 0$, $k > 0$ і підставимо функції φ_1 , φ_2 та φ_3 в анзац (8.10). В результаті, ми отримуємо такий точний розв'язок:

$$\begin{aligned} u &= -k \sin(\sqrt{D}x) \exp(-d_1 D t) + \alpha x + \beta, \\ v &= k \sin(\sqrt{D}x) \exp(-d_1 D t) - \alpha x + 1 - \beta, \\ w &= k(d_2 - d_1)D \sin(\sqrt{D}x) \exp(-d_1 D t), \quad D = \frac{d_3}{d_1(d_1-d_3)} > 0. \end{aligned} \quad (8.15)$$

системи (8.7).

Для прийнятної інтерпретації всі компоненти розв'язку (8.15) мають бути обмеженими та невід'ємними в певній області. Наприклад, ці вимоги виконуються в області

$$\Omega = \left\{ (t, x) \in (0, +\infty) \times \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{D}} \right) \right\},$$

при таких обмеження на параметри :

$$k > 0, d_1 < d_2, \quad \max \left\{ 0, k - \frac{\alpha\pi}{2\sqrt{D}} \right\} \leq \beta \leq 1 - \frac{\alpha\pi}{\sqrt{D}}, \text{ якщо } \alpha \geq 0,$$

$$\max \left\{ -\frac{\alpha\pi}{\sqrt{D}}, k - \frac{\alpha\pi}{2\sqrt{D}} \right\} \leq \beta \leq 1, \text{ якщо } \alpha < 0.$$

Також можна помітити асимптотичну поведінку

$$(u, v, w) \rightarrow (\beta, 1 - \beta, 0) \text{ при } t \rightarrow +\infty$$

розв'язку (8.15) при додатковому обмеженні $\alpha = 0$. Отже, розв'язок (8.15) прямує до стаціонарної точки системи (8.7).

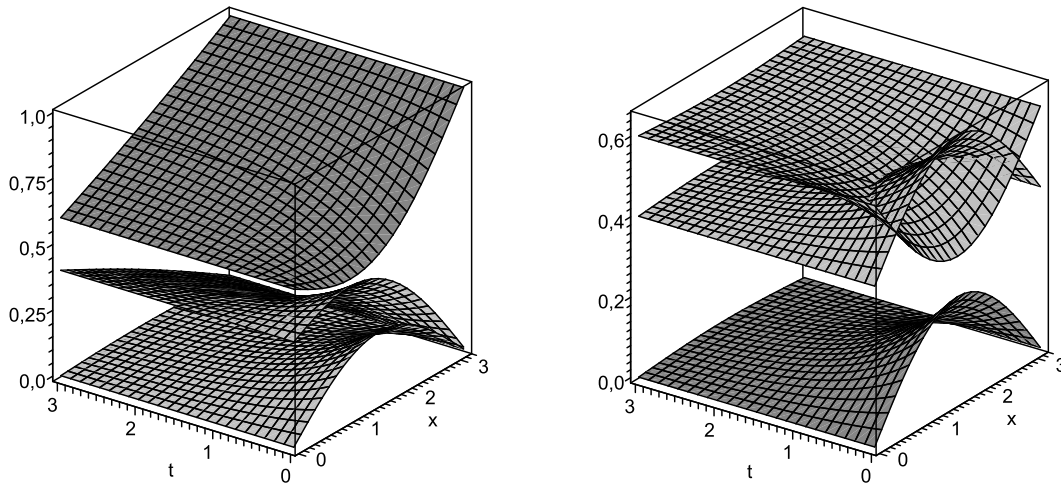


Рис. 8.1: Розв'язок (8.15) системи (8.7) з $\alpha = 1/8$ (зліва) та $\alpha = 0$ (справа). Інші параметри такі: $k = 1/4$, $\beta = 3/5$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 1/2$. Верхня, середня та нижня поверхні відповідають функціям u , v та w .

Таким чином, розв'язок (8.15) з наведеними вище обмеженнями має чітку інтерпретацію, оскільки може описувати таку взаємодію між фермерами та мисливцями-збирачами, при якій мисливці-збирачі вимирають з часом (власне це і сталося в Європі), тоді як популяції початкових фермерів та мисливців-збирачів перетворених у фермерів співіснують. Графік розв'язку (8.15) з фіксованими параметрами представлено на рис. 8.1.

Розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь (8.13). Будемо шукати її розв'язки, припускаючи, що функції φ_2 та φ_3 є лінійно залежними. Це припущення приводить до рівняння

$$d_1\varphi_2'' = \varphi_2(\varphi_2 - 1), \quad (8.16)$$

та додаткової умови

$$\varphi_3 = \frac{d_3(d_2 - d_1)}{d_1(d_1 - d_3)}(\varphi_2 - 1). \quad (8.17)$$

Загальний розв'язок нелінійного рівняння (8.16), представлений у параметричній формі, має такий вигляд

$$\varphi_2 = \pm \frac{3}{2}y, \quad x = \sqrt{d_1} \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 \pm y^3 - y^2}} + c_2. \quad (8.18)$$

Розв'язок рівняння (8.16) можна отримати в явному вигляді при певних значеннях c_1 . Наприклад, при $c_1 = 0$ отримуємо таке значення функції φ_2 :

$$\varphi_2 = \frac{3}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2\sqrt{d_1}} \right). \quad (8.19)$$

У випадку $c_1 = \frac{4}{27}$, функція φ_2 має вигляд:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2} \left(-1 + 3 \tanh^2 \frac{x}{2\sqrt{d_1}} \right). \quad (8.20)$$

Враховуючи наведені вище викладки (формули (8.12), (8.17) та (8.19)), отримуємо такий розв'язок системи (8.7):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \varphi_1(x) \exp \left(\frac{d_3}{d_3 - d_1}, t \right), \\ v(t, x) &= \frac{3}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2\sqrt{d_1}} \right) - \varphi_1(x) \exp \left(\frac{d_3}{d_3 - d_1}, t \right), \\ w(t, x) &= \frac{d_3(d_2 - d_1)}{2d_1(d_1 - d_3)} \left(1 + 3 \tan^2 \frac{x}{2\sqrt{d_1}} \right) + \frac{d_3(d_1 - d_2)}{d_1(d_1 - d_3)} \varphi_1(x) \exp \left(\frac{d_3}{d_3 - d_1}, t \right), \end{aligned} \quad (8.21)$$

де функція $\varphi_1(x)$ є довільним розв'язком лінійного рівняння

$$d_1\varphi_1'' - \varphi_1 \left(\frac{3d_3 - d_1}{2(d_3 - d_1)} + \frac{3}{2}, \tan^2 \frac{x}{2\sqrt{d_1}} \right) = 0. \quad (8.22)$$

Рівняння (8.22) зводиться до гіпергеометричного рівняння

$$z(z-1)\psi''(z) - \left(z + \frac{1}{2}\right)\psi'(z) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3d_3 - d_1}{d_3 - d_1}\right)\psi(z) = 0 \quad (8.23)$$

заміною змінних

$$z = \sin^2 \frac{x}{2\sqrt{d_1}}, \quad \psi(z) = \cos^2 \frac{x}{2\sqrt{d_1}} \varphi_1(x). \quad (8.24)$$

Загальний розв'язок рівняння (8.23) можна виразити через гіпергеометричні функції. Накладаючи додаткові обмеження на сталі d_1 та d_3 , можна отримати точні розв'язки рівняння (8.23) у вигляді елементарних функцій. Зокрема, при $d_3 = \frac{5}{9}d_1$ розв'язком рівняння (8.23) є функція $\psi(z) = (1-z)^{\frac{5}{2}}$.

Таким чином, використавши формули (8.12), (8.17), (8.20), (8.21), (8.24) та застосувавши перетворення $x \rightarrow \sqrt{d_1}x$, отримуємо точний розв'язок

$$\begin{aligned} u &= c_1 \cos^3 \frac{x}{2} \exp\left(-\frac{5}{4}t\right), \\ v &= \frac{3}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) - c_1 \cos^3 \frac{x}{2} \exp\left(-\frac{5}{4}t\right), \\ w &= \frac{5(d-1)}{8}\left(1 + 3 \tan^2 \frac{x}{2}\right) + c_1 \frac{5(1-d)}{4} \cos^3 \frac{x}{2} \exp\left(-\frac{5}{4}t\right) \end{aligned} \quad (8.25)$$

системи рівнянь

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(1 - u - v), \\ v_t &= dv_{xx} + \frac{9d-5}{4}v(1 - u - v) + uw + vw, \\ w_t &= \frac{5}{9}w_{xx} - \frac{5}{9}uw - \frac{5}{9}vw. \end{aligned} \quad (8.26)$$

На відміну від розв'язку (8.15), розв'язок (8.25) є менш реалістичним з точки зору можливої інтерпретації. Дійсно, з асимптотичної поведінки

$$(u, v, w) \rightarrow \left(0, \frac{3}{2}\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right), \frac{5(d-1)}{8}\left(1 + 3 \tan^2 \frac{x}{2}\right)\right) \text{ при } t \rightarrow +\infty$$

впливає, що первісні фермери з часом вимирають, тоді як мисливці-збирачі та мисливці-збирачі, які стали фермерами, співіснують.

9 Q -умовні симетрії та точні розв'язки системи Шігесади–Кавасаки–Терамото

9.1 Математична модель взаємодії двох видів

Розглянемо систему нелінійних еволюційних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= [(d_1 + d_{11}u + d_{12}v)u]_{xx} + u(a_1 - b_1u - c_1v), \\ v_t &= [(d_2 + d_{21}u + d_{22}v)v]_{xx} + v(a_2 - b_2u - c_2v). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Система (9.1) була запропонована в роботі [Shigesada N., Kawasaki K., Teramoto E., *J. Theoret. Biol.*, 1979] для опису процесу взаємодії двох видів типу змагання і є узагальненням класичної системи Лотки–Вольтера. Система (9.1) досі активно досліджується якісними та числовими методами, проте робіт з точними розв'язками вкрай мало (див. цитовану літературу в [64]). В системі (9.1) невідомі функції u and v змінних t та x описують щільність популяцій двох видів; d_1 та d_2 — коефіцієнти дифузії; доданки $d_{12}v$ та $d_{21}u$ відповідають за поперечно-дифузійний тиск, доданки $d_{11}u$ та $d_{22}v$ — внутрішньодифузійний тиск; a_1 та a_2 — коефіцієнти природного приросту видів; b_1 та c_2 — коефіцієнти внутрішньовидової конкуренції; b_2 та c_1 — коефіцієнти міжвидової конкуренції.

В роботі [64] досліджується система (9.1) у випадку $d_{11} = d_{22} = 0$, тобто система вигляду

$$\begin{aligned} u_t &= [(d_1 + d_{12}v)u]_{xx} + u(a_1 - b_1u - c_1v), \\ v_t &= [(d_2 + d_{21}u)v]_{xx} + v(a_2 - b_2u - c_2v). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Параметри a_k , b_k , c_k , d_k ($k = 1, 2$), d_{12} та d_{21} системи (9.2) є довільними дійсними числами, які задовольняють такі обмеження:

$$d_{12}^2 + d_{21}^2 \neq 0, \quad d_1^2 + d_{12}^2 \neq 0, \quad d_2^2 + d_{21}^2 \neq 0, \quad d_1^2 + d_2^2 \neq 0 \quad (9.3)$$

та

$$d_{12}^2 + c_1^2 \neq 0, \quad d_{21}^2 + b_2^2 \neq 0. \quad (9.4)$$

Перше обмеження з (9.3) означає, що ми розглядаємо лише такі системи вигляду (9.2), які містять поперечну дифузію. Інші три умови в (9.3) гарантують, що обидва рівняння системи (9.2) є диференціальними рівняннями другого порядку. Обмеження (9.4) накладено з метою виключення систем вигляду (9.2), які не є повністю зачепленими, щоб забезпечити врахування взаємодій між видами (клітинами, хімічними речовинами).

Зазначимо, що випадок $d_{12} = d_{21} = 0$ (який відповідає дифузійній системі Лотки–Вольтера) розглянуто в роботі [33], а також в оглядовій статті [49].

9.2 Q -умовні симетрії системи Шігесади–Кавасакі–Терамото

У роботі [64] описано всі оператори Q -умовної симетрії вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t, x, u, v)\partial_x + \eta^1(t, x, u, v)\partial_u + \eta^2(t, x, u, v)\partial_v \quad (9.5)$$

системи (9.2). Основний результат подаємо у вигляді теореми.

Теорема 9.1. *Система (9.2) при обмеженнях на параметри (9.3) та (9.4) допускає оператори Q -умовної симетрії вигляду (9.5) тоді і лише тоді, коли ця система та відповідні оператори мають форми, наведені в таблиці 9.1. Будь-яка інша система вигляду (9.2), яка допускає Q -умовну симетрію, зводиться до відповідної системи з таблиці 9.1, за допомогою перетворень*

$$t^* = \gamma_1 t, \quad x^* = \gamma_2 x, \quad u^* = \gamma_3 u + \gamma_4 v, \quad v^* = \gamma_5 v + \gamma_6 u, \quad (9.6)$$

з правильно заданими сталими γ_i , $i = 1, \dots, 6$.

Зауваження 9.1. Симетрії Лі систем, поданих у таблиці 9.1, є тривіальними (зсуви по часовій та просторовій змінним) при умові, що коефіцієнти цих систем є довільними та задовольняють обмеження, наведені у теоремі 9.1. Єдиним винятком є система з випадку 12, яка додатково допускає оператор масштабних перетворень $2t\partial_t + x\partial_x$ (див. систему (45) у

[Cherniha R., Davydovych V., Muzyka L., *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2017]).

Використовуючи перетворення вигляду (9.6), можна звести деякі параметри в системах та відповідних операторах Q -умовної симетрії з таблиці 9.1 до значень ± 1 . Наприклад, застосувавши перетворення

$$t^* = b_1 t, \quad x^* = \sqrt{b_1} x$$

до системи з випадку 2 таблиці 9.1 при $b_1 > 0$, отримуємо систему

$$\begin{aligned} u_{t^*} &= [(1+v)u]_{x^*x^*} + u\left(\frac{a_1}{b_1} - u - \frac{b_2}{b_1}v\right), \\ v_{t^*} &= [uv]_{x^*x^*} + v\left(\frac{a_2}{b_1} - \frac{b_2}{b_1}u\right). \end{aligned} \quad (9.7)$$

Перепозначивши в системі (9.7) параметри $\frac{a_1}{b_1} \rightarrow a_1$, $\frac{a_2}{b_1} \rightarrow a_2$, та $\frac{b_2}{b_1} \rightarrow b_2$, отримуємо систему з випадку 2 таблиці 9.1 при $b_1 = 1$. Аналогічним чином можна прибрати параметр b_2 у випадку 5, та параметр a_2 у випадках 7, 8 та 10 таблиці 9.1.

9.3 Побудова точних розв'язків та їх інтерпретація

З точки зору можливого застосування, системи, які наведені у випадках 1–4, 7 та 9 таблиці 9.1, зберігають основні характеристики початкової системи Шігесади–Кавасаки–Терамото, оскільки вони містять доданки з поперечною дифузиею в обох рівняннях і можуть описувати взаємодію типу змагання двох популяцій за умови, що параметри a_i , b_i та c_i є невід'ємними. Не зважаючи на те, що решта систем із таблиці 9.1 також можуть бути корисними для інших застосувань, детальніше зупинимось на вивченні лише зазначених систем.

Використавши оператори з випадків 1–4, 7 та 9 таблиці 9.1, ми отримали анзаці та провели редукцію досліджуваних систем до систем звичайних диференціальних рівнянь. Результат наших обчислень подано в таблиці 9.2.

Табл. 9.1: Q -умовні симетрії системи Шігесади–Кавасаки–Терамото (9.2)

	Системи рівнянь	Оператори та обмеження
1	$u_t = [(1 + d_{12}v)u]_{xx} + u(a_1 - c_1v)$ $v_t = [uv]_{xx} + v(a_2 - b_2u - v)$	$Q^1 = \partial_t + v(a_2 - v)\partial_v +$ $u\left(v + a_1 + b_2(a_2d_{12} + 1) - a_2(c_1 + 1)\right)\partial_u$
2	$u_t = [(1 + v)u]_{xx} + u(a_1 - b_1u - b_2v)$ $v_t = [uv]_{xx} + v(a_2 - b_2u)$	$b_1 \neq 0, Q^2 = \partial_t + a_2v\partial_v,$ $Q_0^3 = \partial_t + \frac{e^{a_2t}f(x)}{u}\partial_v$
3	$u_t = [(1 + d_{12}v)u]_{xx} + u(a_1 - c_1v)$ $v_t = [uv]_{xx} - b_2uv$	$Q^4 = \partial_t + \alpha u\partial_u$
4	$u_t = [(d_1 + v)u]_{xx} - b_2uv$ $v_t = [(d_2 + u)v]_{xx} + v(a_2 - b_2u)$	$a_2 + b_2d_2 \neq 0,$ $Q^5 = \partial_t + (a_2 + b_2d_2)((d_2 + u)\partial_u + v\partial_v)$
5	$u_t = [(d_1 + v)u]_{xx} + u\left(-\frac{b_2d_1^2}{d_1+d_2} - b_2v\right)$ $v_t = [(d_2 + u)v]_{xx} + v\left(-\frac{b_2d_2^2}{d_1+d_2} - b_2u\right)$	$b_2 \neq 0, d_1 + d_2 \neq 0, Q^6 = \partial_t +$ $\frac{b_2d_1d_2}{d_1+d_2}\left(\left(\frac{d_2^2}{d_1+d_2} + u\right)\partial_u + \left(\frac{d_1^2}{d_1+d_2} + v\right)\partial_v\right)$
6	$u_t = [(1 + v)u]_{xx} + u(a_1 + a_1v)$ $v_t = [uv]_{xx} + v(a_2 - b_2u - (a_1 + b_2)v)$	$Q_0^7 = \partial_t + \beta u(1 + v)\partial_u + (a_2v - \beta v^2)\partial_v,$ $Q^7 = \partial_t + \beta u(1 + v)\partial_u +$ $(\beta + a_2 + a_2v - \beta v^2)\partial_v$
7	$u_t = [(1 + v)u]_{xx} + u(a_1 - b_2v)$ $v_t = [uv]_{xx} + v(a_2 - b_2u)$	$a_1 \neq -b_2, a_2 \neq 0, Q_0^3,$ $Q^8 = \partial_t + \alpha u\partial_u + a_2v\partial_v$
8	$u_t = [(1 + v)u]_{xx} + u(a_1 + (a_1 + 2a_2)v)$ $v_t = [uv]_{xx} + v(a_2 + (a_1 + 2a_2)u + a_2v)$	$a_2 \neq 0, Q^9 = \partial_t - 2a_2u\partial_u - a_2(1 + v)\partial_v,$ $Q^{10} = \partial_t - a_2u(3 + v)\partial_u + a_2(1 + v)v\partial_v$
9	$u_t = [(1 + v)u]_{xx} + u(a_1 - b_2v)$ $v_t = [uv]_{xx} - b_2uv$	$Q_0^{11} = \partial_t + \alpha u\partial_u + \frac{f(x)}{u}e^{2\alpha t}\partial_v, Q^{11} = \partial_t +$ $\beta u\partial_u + \frac{\beta e^{\beta t}}{\alpha_0 e^{\beta t} + \beta - \alpha_0}\left(\alpha_0(1 + v) + \frac{e^{\beta t}f(x)}{u}\right)\partial_v$
10	$u_t = [(1 + v)u]_{xx} - u(b_2 + b_2v)$ $v_t = [uv]_{xx} + v(a_2 - b_2u)$	$a_2 \neq 0, Q^8, Q^3 = \partial_t +$ $\frac{a_2 e^{a_2 t}}{\alpha_0 e^{a_2 t} + a_2 - \alpha_0}\left(\alpha_0(1 + v) + \frac{f(x)}{u}\right)\partial_v$
11	$u_t = [(1 + v)u]_{xx} - u(b_2 + b_2v)$ $v_t = [uv]_{xx} - b_2uv$	$Q_0^{11}, Q^{12} = \partial_t + \left(\frac{1+v}{t} + \frac{f(x)}{tu}\right)\partial_v$
12	$u_t = [(1 + v)u]_{xx}$ $v_t = [(-1 + u)v]_{xx}$	$Q^{13} = \partial_t + \alpha\partial_u + \alpha\partial_v$

В таблиці 9.1, α and α_0 — довільні сталі, $a_1 + b_2 = \beta \neq 0$, функція $f(x)$ — загальний розв'язок рівняння $f'' - b_2f = 0$, тобто

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_1 \exp(\sqrt{b_2}x) + \alpha_2 \exp(-\sqrt{b_2}x), & \text{якщо } b_2 > 0, \\ \alpha_1 \cos(\sqrt{-b_2}x) + \alpha_2 \sin(\sqrt{-b_2}x), & \text{якщо } b_2 < 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 x, & \text{якщо } b_2 = 0. \end{cases} \quad (9.8)$$

Табл. 9.2: Анзаці та редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь

Оператор	Анзац	Редукована система
Q^1 $a_2 \neq 0$	$u = (a_2\psi(x) + (e^{a_2t} - 1)\varphi(x))e^{\gamma t},$ $v = \frac{a_2\varphi(x)e^{a_2t}}{a_2\psi(x) + (e^{a_2t} - 1)\varphi(x)},$ $\gamma = a_1 + b_2 - a_2(1 + c_1 - b_2d_{12})$	$\varphi'' - b_2\varphi = 0,$ $\psi'' - (1 + c_1 - b_2d_{12})\varphi +$ $(a_1 - \gamma)\psi = 0$
Q^1 $a_2 = 0$	$u = (\varphi(x)t + \psi(x))e^{(a_1+b_2)t},$ $v = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)t + \psi(x)}$	$\varphi'' - b_2\varphi = 0,$ $\psi'' - b_2\psi - (1 + c_1 - b_2d_{12})\varphi = 0$
Q^2	$u = \psi(x),$ $v = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}e^{a_2t}$	$\varphi'' - b_2\varphi = 0,$ $\psi'' + \psi(a_1 - b_1\psi) = 0$
Q_0^3 $a_2 \neq 0$	$u = \psi(x),$ $v = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \frac{f(x)}{\psi(x)}e^{a_2t}$	$\varphi'' + \varphi\left(\frac{a_2}{\psi} - b_2\right) = 0,$ $\psi'' + \psi(a_1 - b_1\psi) - \frac{a_2\varphi}{\psi} = 0$
Q_0^3 $a_2 = 0$	$u = \psi(x),$ $v = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \frac{f(x)}{\psi(x)}t$	$\varphi'' - b_2\varphi - \frac{f}{\psi} = 0,$ $\psi'' + \psi(a_1 - b_1\psi) + \frac{f}{\psi} = 0$
Q^4	$u = \psi(x)e^{\alpha t},$ $v = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$	$\varphi'' - b_2\varphi = 0,$ $\psi'' + (a_1 - \alpha)\psi - (c_1 - b_2d_{12})\varphi = 0$
Q^5	$u = \psi(x)e^{\mu t} - d_2,$ $v = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}e^{\mu t},$ $\mu = a_2 + b_2d_2$	$\varphi'' - b_2\varphi = 0,$ $(d_2\varphi + d_1\psi^2)\psi'' + d_2(\psi^2)'\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)' +$ $\mu\psi^3 = 0$
Q^8	$u = \psi(x)e^{\alpha t},$ $v = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}e^{a_2t}$	$\varphi'' - b_2\varphi = 0,$ $\psi'' + (a_1 - \alpha)\psi = 0$
Q_0^{11} $\alpha \neq 0$	$u = \psi(x)e^{\alpha t},$ $v = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \frac{f(x)}{\psi(x)}\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$	$\varphi'' - b_2\varphi - \frac{f}{\psi} = 0,$ $\psi'' + (a_1 - \alpha)\psi + \frac{f}{\psi} = 0$
Q_0^{11} $\alpha = 0$	$u = \psi(x),$ $v = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \frac{f(x)}{\psi(x)}t$	$\varphi'' - b_2\varphi - \frac{f}{\psi} = 0,$ $\psi'' + a_1\psi + \frac{f}{\psi} = 0$
Q^{11} $\alpha_0 \neq 0$	$u = \psi(x)e^{\beta t},$ $v = \frac{\beta + \alpha_0(e^{\beta t} - 1)}{\psi(x)}(\varphi(x) + f(x)) - 1$	$\varphi'' - b_2\varphi = 0, \beta = a_1 + b_2,$ $\psi'' - b_2\psi + \alpha_0\beta\frac{\varphi}{\psi} = 0$

Зауваження 9.2. Декілька анзаців у таблиці 9.2 можна спростити шляхом перепозначення $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow \varphi(x)$. Проте, редуковані системи звичайних диференціальних рівнянь стають більш складними після такого перепозначення, оскільки кожна з них включатиме доданки вигляду $(\varphi\psi)''$.

З таблиці 9.2 легко помітити, що редукція по операторам Q -умовної

симетрії Q^1 , Q^4 та Q^8 веде до лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь, хоча досліджувані системи диференціальних рівнянь із частинними похідними є нелінійними. Таким чином, можна отримати багатопараметричні сім'ї точних розв'язків нелінійних систем рівнянь, проінтегрувавши відповідні їм лінійні системи. Зокрема, всі точні розв'язки, які можна отримати за допомогою оператора Q^1 , представлено нижче.

Розглянемо систему з випадку 1 таблиці 9.1

$$\begin{aligned} u_t &= [(1 + d_{12}v)u]_{xx} + u(a_1 - c_1v), \\ v_t &= [uv]_{xx} + v(a_2 - b_2u - v). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Для побудови точних розв'язків системи (9.9), використаємо оператор Q -умовної симетрії Q^1 . В залежності від значення параметра a_2 (див. перші 2 випадки таблиці 9.2), отримуємо анзац

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (a_2\psi(x) + (e^{a_2t} - 1)\varphi(x))e^{\gamma t}, \\ v(t, x) &= \frac{a_2\varphi(x)e^{a_2t}}{a_2\psi(x) + (e^{a_2t} - 1)\varphi(x)}, \quad \gamma = a_1 + b_2 - a_2(1 + c_1 - b_2d_{12}), \end{aligned} \quad (9.10)$$

у випадку $a_2 \neq 0$, та анзац

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (\varphi(x)t + \psi(x))e^{(a_1+b_2)t}, \\ v(t, x) &= \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)t + \psi(x)}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

у випадку $a_2 = 0$.

Редукована система рівнянь, що відповідає оператору (9.10), має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi'' - b_2\varphi &= 0, \\ \psi'' + (a_1 - \gamma)\psi - (1 + c_1 - b_2d_{12})\varphi &= 0. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Виявляється, що оператор (9.11) також приводить до системи (9.12), проте вираз для γ спрощується до вигляду $\gamma = a_1 + b_2$ у зв'язку з тим, що $a_2 = 0$.

Загальний розв'язок першого рівняння системи (9.12) має вигляд

$$\varphi(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{b_2}x} + C_2 e^{-\sqrt{b_2}x}, & \text{if } b_2 > 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{-b_2}x) + C_2 \sin(\sqrt{-b_2}x), & \text{if } b_2 < 0, \\ C_1 + C_2 x, & \text{if } b_2 = 0. \end{cases} \quad (9.13)$$

Підставивши функцію φ в друге рівняння системи (9.12), отримуємо

$$\psi(x) = \begin{cases} C_3 e^{\kappa x} + C_4 e^{-\kappa x} + \frac{\varphi(x)}{a_2}, & \text{якщо } a_2(1 + c_1 - b_2 d_{12}) < b_2, \\ C_3 \cos(\kappa x) + C_4 \sin(\kappa x) + \frac{\varphi(x)}{a_2}, & \text{якщо } a_2(1 + c_1 - b_2 d_{12}) > b_2, \\ C_3 + C_4 x + \frac{\varphi(x)}{a_2}, & \text{якщо } a_2(1 + c_1 - b_2 d_{12}) = b_2, \end{cases} \quad (9.14)$$

у випадку $a_2 \neq 0$. У формулі (9.14) введено позначення

$$\kappa = \sqrt{|a_2(1 + c_1 - b_2 d_{12}) - b_2|},$$

а сталі C_i ($i = 1, \dots, 4$) — довільні дійсні числа.

У випадку $a_2 = 0$, функція $\psi(x)$ має такий вигляд:

$$\psi(x) = \begin{cases} C_3 e^{\sqrt{b_2}x} + C_4 e^{-\sqrt{b_2}x} + \frac{(1+c_1-b_2 d_{12})x}{2b_2} \varphi', & \text{якщо } b_2 > 0, \\ C_3 \cos(\sqrt{-b_2}x) + C_4 \sin(\sqrt{-b_2}x) + \frac{(1+c_1-b_2 d_{12})x}{2b_2} \varphi', & \text{якщо } b_2 < 0, \\ C_3 + C_4 x + \frac{(1+c_1)x^2}{6} (3C_1 + C_2 x), & \text{якщо } b_2 = 0. \end{cases}$$

Підставивши знайдені функції φ та ψ в анзаці (9.10) та (9.11), можна отримати багатопараметричні сім'ї точних розв'язків системи Шіґесади–Кавасакі–Терамото (9.9).

Розглянемо можливу біологічну інтерпретації системи (9.9). Накладемо такі додаткові обмеження на її параметри: a_1 та a_2 є довільними невід'ємними числами, c_1 та b_2 мають бути додатними числами для опису конкуренції між двома популяціями видів. Параметр $d_{12} \neq 0$ може мати будь-який знак, за умови, що коефіцієнт дифузії $1 + d_{12}v \geq 0$ для

всіх відповідних значень v . Також припустимо, що дані параметри задовольняють нерівність

$$\gamma = a_1 + b_2 - a_2(1 + c_1 - b_2 d_{12}) < a_1,$$

тобто $b_2 - a_2(1 + c_1 - b_2 d_{12}) < 0$. З першого рядка формули (9.13) та другого рядка формули (9.14) (після заміни лінійної комбінації тригонометричних функцій на одну функцію синуса і введені параметра x_0 замість C_4) отримуємо багатопараметричну сім'ю точних розв'язків

$$\begin{aligned} u(t, x) &= e^{(\gamma+a_2)t} (C_1 e^{\sqrt{b_2}x} + C_2 e^{-\sqrt{b_2}x} + C_3 e^{-a_2 t} \sin(\sqrt{a_1 - \gamma}(x + x_0))), \\ v(t, x) &= a_2 \frac{C_1 e^{\sqrt{b_2}x} + C_2 e^{-\sqrt{b_2}x}}{C_1 e^{\sqrt{b_2}x} + C_2 e^{-\sqrt{b_2}x} + C_3 e^{-a_2 t} \sin(\sqrt{a_1 - \gamma}(x + x_0))}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

системи Шігесади–Кавасаки–Терамото (9.9).

Задамо область, в якій відбувається взаємодія між двома популяціями, таким чином:

$$\Omega = \{(t, x) \in (0, +\infty) \times (\alpha, \beta)\}, \quad \alpha < \beta \in \mathbb{R}.$$

Припустивши, що $C_3 \neq 0$ (інакше отримуємо тривіальний розв'язок $v(t, x) = a_2$), ми встановили умови на сталі

$$|C_3| < 2\sqrt{C_1 C_2}, \quad C_1 > 0, \quad C_2 > 0,$$

які гарантують обмеженість та невід'ємність компонент розв'язку (9.15).

В залежності від співвідношень між параметрами γ та a_2 , розв'язок (9.15) може описувати три різні сценарії взаємодії між видами.

Якщо $\gamma < -a_2 \Leftrightarrow d_{12} < \frac{a_2 c_1 - a_1 - b_2}{a_2 b_2}$, то $(u, v) \rightarrow (0, a_2)$ при $t \rightarrow +\infty$. У цьому випадку спостерігається домінування виду v над видом u , внаслідок чого останній вид вимирає (див. рис. 9.1).

Якщо $\gamma > -a_2 \Leftrightarrow d_{12} > \frac{a_2 c_1 - a_1 - b_2}{a_2 b_2}$, то $(u, v) \rightarrow (+\infty, a_2)$ при $t \rightarrow +\infty$. Отже, спостерігається співіснування видів u та v (див. рис. 9.2). Однак, необмежений ріст однієї з популяцій є мало ймовірним, оскільки

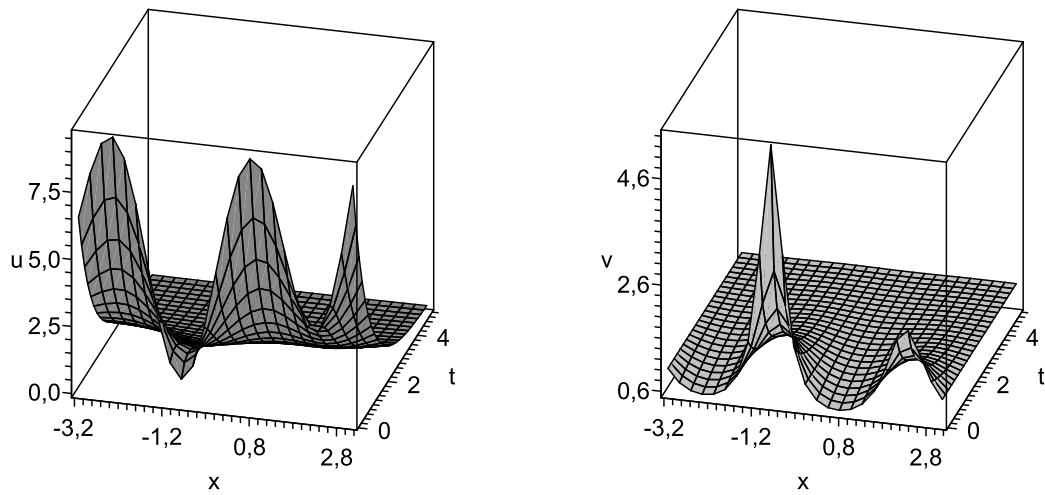


Рис. 9.1: Компоненти u та v розв'язку (9.15) системи Шігесаді-Кавасаки-Терамото (9.9) з параметрами $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $\gamma = -2$, $b_2 = \frac{1}{10}$, $d_{12} = 10c_1 - 31$, $C_1 = 3$, $C_2 = 2$, $C_3 = 4$, $x_0 = 0$.

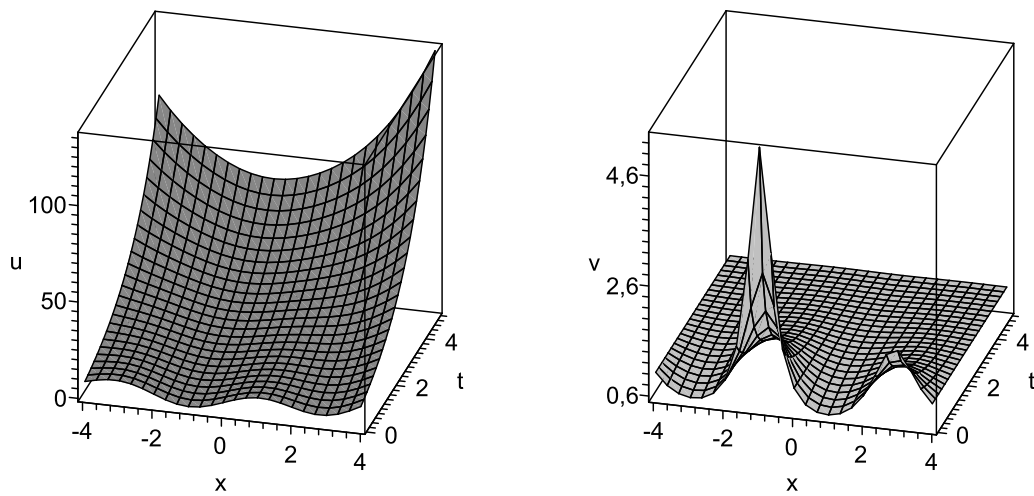


Рис. 9.2: Компоненти u та v розв'язку (9.15) системи Шігесаді-Кавасаки-Терамото (9.9) з параметрами $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{10}$, $d_{12} = 10c_1 - 16$, $C_1 = 3$, $C_2 = 2$, $C_3 = 4$, $x_0 = 0$.

обмеженість ресурсів, міжвидова конкуренція або інші екологічні фактори перешкоджатимуть безконтрольному зростанню виду u .

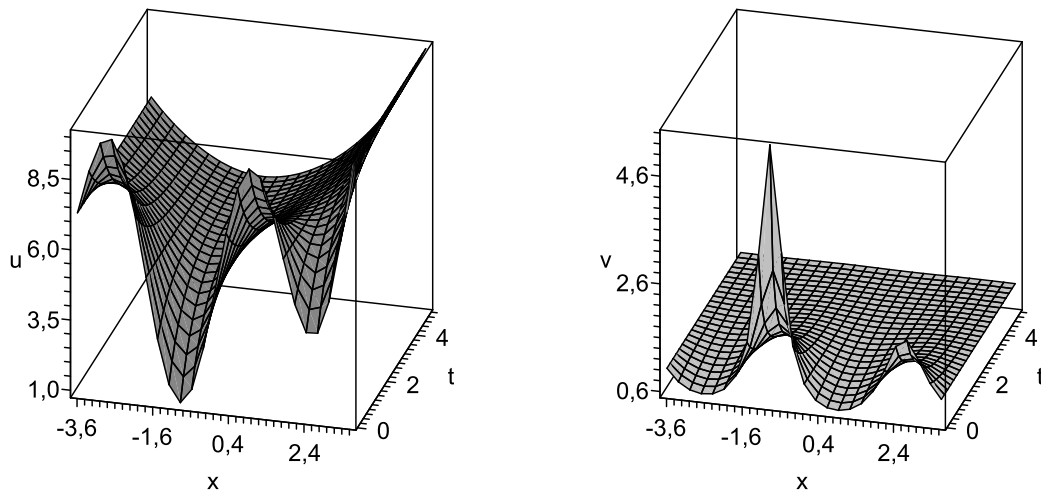


Рис. 9.3: Компоненти u та v розв'язку (9.15) системи Шігесакі-Кавасаки-Терамото (9.9) з параметрами $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $\gamma = -1$, $b_2 = \frac{1}{10}$, $d_{12} = 10c_1 - 21$, $C_1 = 3$, $C_2 = 2$, $C_3 = 4$, $x_0 = 0$.

Якщо $\gamma = -a_2 \Leftrightarrow d_{12} = d_{12}^0 = \frac{a_2 c_1 - a_1 - b_2}{a_2 b_2}$, то

$$(u, v) \rightarrow \left(C_1 e^{\sqrt{b_2} x} + C_2 e^{-\sqrt{b_2} x}, a_2 \right) \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Як видно з поведінки розв'язку, у цьому випадку також спостерігається співіснування видів u та v (див. рис. 9.3).

Також зазначимо, що для розв'язку (9.15) з $x_0 = 0$ та $d_{12} = d_{12}^0$ існують такі параметри C_1 та C_2 , за яких цей розв'язок задовольняє крайову задачу для системи рівнянь (9.9) з умовами Діріхле:

$$x = \alpha : u = U_\alpha, v = a_2,$$

$$x = \beta : u = U_\beta, v = a_2$$

в області Ω з інтервалом $(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{\sqrt{a_1 + a_2}}(k_1, k_2)$, $k_1 < k_2 \in \mathbb{Z}$. Тут U_α та U_β — задані дійсні числа.

Розглянемо тепер систему з випадку 9 таблиці 9.1. Застосувавши перетворення $t \rightarrow \frac{1}{b_2} t$, $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{b_2}} x$ та перепозначивши $a_1 \rightarrow a_1 b_2$, отримуємо

систему рівнянь

$$\begin{aligned} u_t &= [(1+v)u]_{xx} + u(a_1 - v), \\ v_t &= [uv]_{xx} - uv. \end{aligned} \quad (9.16)$$

Використаємо оператори Q_0^{11} та Q^{11} для знаходження розв'язків системи (9.16).

Анзаці, що відповідають операторам Q_0^{11} та Q^{11} , мають вигляд

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \psi(x)e^{\alpha t}, \\ v(t, x) &= \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \frac{f(x)}{\psi(x)} \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}, \quad \text{якщо } \alpha \neq 0, \\ u(t, x) &= \psi(x), \\ v(t, x) &= \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \frac{f(x)}{\psi(x)} t, \quad \text{якщо } \alpha = 0, \end{aligned} \quad (9.17)$$

та

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \psi(x)e^{(1+a_1)t}, \\ v(t, x) &= (1 + a_1 + \alpha_0 (e^{(a_1+1)t} - 1)) \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \frac{f(x)}{\psi(x)} - 1, \quad \alpha_0 \neq 0. \end{aligned} \quad (9.18)$$

У формулах (9.17) та (9.18), φ та ψ нові шукані функції, а функція $f(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x}$ (див. (9.8) при $b_2 = 1$).

Застосувавши перший анзац з (9.17) отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \varphi'' - \varphi - \frac{f}{\psi} &= 0, \\ \psi'' + (a_1 - \alpha)\psi + \frac{f}{\psi} &= 0. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Другий анзац з (9.17) дає редуковану систему вигляду (9.19) з $\alpha = 0$.

Редукована система, що відповідає анзацу (9.18), має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi'' - \varphi &= 0, \\ \psi\psi'' - \psi^2 + \alpha_0(1 + a_1)\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Таким чином, ми отримали нелінійні системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку.

Зупинимось на побудові точних розв'язків системи (9.19). Розглянемо два випадки: $f = 0$ (тобто $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$); $f \neq 0$.

У випадку $f = 0$, розв'язок системи (9.19) має вигляд

$$\varphi(x) = C_3 e^x + C_4 e^{-x},$$

$$\psi(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\alpha-a_1}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha-a_1}x}, & \text{якщо } \alpha - a_1 > 0, \\ C_1 \cos(\sqrt{a_1-\alpha}x) + C_2 \sin(\sqrt{a_1-\alpha}x), & \text{якщо } \alpha - a_1 < 0, \\ C_1 + C_2 x, & \text{якщо } \alpha - a_1 = 0. \end{cases}$$

Наклавши додаткове обмеження $\alpha < 0$, яке є необхідною умовою для обмеженості знайденого розв'язку, отримуємо такий розв'язок

$$u(t, x) = \left(C_1 \cos(\sqrt{a_1 - \alpha}x) + C_2 \sin(\sqrt{a_1 - \alpha}x) \right) e^{\alpha t},$$

$$v(t, x) = \frac{C_3 e^x + C_4 e^{-x}}{C_1 \cos(\sqrt{a_1 - \alpha}x) + C_2 \sin(\sqrt{a_1 - \alpha}x)}$$
(9.20)

системи (9.16).

Щоб знайти точні розв'язки системи (9.19) у випадку $f \neq 0$, припустимо, що функція $\psi(x) = C_1 e^{\gamma x}$, де C_1 та γ — довільні ненульові сталі. Підставивши функцію $\psi(x)$ у друге рівняння системи (9.19), знаходимо обмеження на параметри

$$\gamma = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = C_1^2 \left(\alpha - a_1 - \frac{1}{4} \right),$$

за яких функція $\psi(x) = C_1 e^{-x/2}$ буде його розв'язком.

Розв'язавши перше рівняння системи (9.19), отримуємо

$$\varphi(x) = -\frac{4}{3} C_1 \left(\alpha - a_1 - \frac{1}{4} \right) e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^x.$$

Підставивши знайдені функції φ та ψ у перший анзац з (9.17), отримуємо такий точний розв'язок

$$u(t, x) = C_1 e^{\alpha t - \frac{1}{2}x},$$

$$v(t, x) = \frac{1+4(a_1-\alpha)}{3} - \frac{1+4(a_1-\alpha)}{4\alpha} C_1 e^{\alpha t - \frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + C_3 e^{\frac{3}{2}x}$$
(9.21)

системи Шіґесади–Кавасакі–Терамото (9.16).

Дослідимо властивості розв’язку (9.21) в області

$$\Omega = \{(t, x) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)\}.$$

Легко показати, що кожна компонента розв’язку (9.21) є обмеженою та невід’ємною в області Ω при виконанні таких умов:

$$\alpha < 0, \quad C_1 > 0, \quad C_3 = 0, \quad C_2 + \frac{1 + 4(a_1 - \alpha)}{3} > 0. \quad (9.22)$$

Крім того, точний розв’язок (9.21) з обмеженнями (9.22) має таку асимптотичну поведінку:

$$(u, v) \rightarrow \left(0, \frac{1 + 4(a_1 - \alpha)}{3} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \right), \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Таким чином, розв’язок (9.21) може описувати змагання між двома видами, при якому вид v домінує, тоді як вид u вимирає.

10 Умовна та прихована симетрія диференціальних рівнянь та класифікація відносних диференціальних інваріантів

Досліджені умовна та прихована симетрії багатовимірних хвильових рівнянь [42]. Раніше ми розглядали приклад нескінченновимірної симетрії, де коефіцієнти операторів симетрії включають довільні функції, яка виникає як умовна/прихована симетрія хвильового рівняння Клейна–Гордона:

$$\square u = F(x, u) \quad (10.1)$$

для дійсної функції $u = u(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $x_0 = t$ — це часова змінна, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ — відповідні просторові змінні. Ми розглядали рівняння в багатовимірному просторі, тобто $n \neq 1$. Для позначення оператора д’Аламбера використовується символ $\square u$, де

$$\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Таке загальне рівняння (10.1) використовується досить часто для побудови математичних моделей хвильових процесів. Проте, воно не є інваріантним відносно будь-яких операторів, якщо функція в правій частині явно залежить від всіх своїх змінних. Деякі рівняння в цьому класі мають досить широкі алгебри симетрії.

Якщо $F = F(u)$ (тобто не залежить від x), максимальною алгеброю лівської симетрії рівняння (10.1) буде алгебра Пуанкаре $AP(1, n)$ в просторі з n просторовими змінними, яка може бути описана базисними операторами

$$p_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu,$$

де μ, ν приймають значення $0, 1, 2, \dots, n$; і ми завжди, якщо не зазначене інше, вважаємо, що відбувається підсумовування за індексами, що

повторюються — для малих грецьких літер:

$$x_\nu x_\nu = x_\nu x^\nu = x^\nu x_\nu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2,$$

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1),$$

для малих латинських літер:

$$x_k x_k = x_k x^k = x^k x_k = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2.$$

Алгебри інваріантності для рівняння (10.1) в часткових випадках включатимуть також оператори ділатації, якщо $F = \lambda u^k$ або $F = \lambda \exp u$, та конформні оператори для $F = \lambda u^{\frac{n+3}{n-1}}$.

Для ще одного часткового випадку максимальна алгебра інваріантності для рівняння (10.1) з $F = F(x^2, u)$ ($x^2 = x_\nu x_\nu$) є підалгеброю алгебри Пуанкаре $AP(1, n)$ з базисними операторами - поворотами алгебри Лоренца $J_{\mu\nu}$.

Класична лівська симетрія лінійного рівняння (10.1) з $F = 0$ та нелінійного $F = \lambda \exp u$, $n = 1$ буде нескінченновимірною. Рівняння з нескінченновимірною симетрією є досить цікавими, тому що мають широкі класи точних розв'язків та можуть бути інтегровними.

Процедура симетрійної редукції відносно нееквівалентних підалгебр алгебри інваріантності рівняння (10.1) дозволяє знайти симетрійні точні розв'язки для цього рівняння.

Будемо використовувати наступні означення, які стосуються умовної симетрії:

Означення 10.1. Рівняння $\Phi(x, u, u_1, \dots, u_l) = 0$, де u_k — набір всіх частинних похідних порядку k функції $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$, називається умовно інваріантним відносно оператора

$$Q = \xi^i(x, u) \partial_{x_i} + \eta^r(x, u) \partial_{u^r},$$

якщо існує додаткова умова

$$G(x, u, u_1, \dots, u_{l_1}) = 0, \tag{10.2}$$

така, що система з двох рівнянь $\Phi = 0$, $G = O$ інваріантна відносно оператора Q .

Якщо (10.2) має форму $G = Qu$, тоді ми маємо частковий випадок умовної симетрії, а саме Q -умовну симетрію. Рівняння $\Phi = 0$ буде тоді називатись Q -умовно інваріантним відносно оператора Q .

Це означення умовної інваріантності певного рівняння, або системи рівнянь базуються фактично на тому, що є класичною ліівською симетрією того самого рівняння з якоюсь додатковою умовою.

Пояснимо суттєву різницю між поняттями Q -умовної симетрії, та просто умовної симетрії, яка не є Q -умовною: Q -умовна симетрія забезпечує можливість для редукції вихідного рівняння та знаходження розв'язків, аналогічні можливостям та властивостям звичайної ліівської симетрії: виникає можливість редукувати вихідне рівняння до одного нового рівняння з меншим числом незалежних змінних, на основі розв'язків можна побудувати за допомогою відповідного анзацу розв'язки вихідного диференціального рівняння. На відміну від цього, анзац, побудований за допомогою оператора умовної симетрії, який не є оператором Q -умовної симетрії, редукуватиме вихідну систему рівнянь з додатковою умовою $\Phi = 0$, $G = O$ до двох редукованих рівнянь з меншим числом незалежних змінних.

Систематичне дослідження умовних, і зокрема, Q -умовних симетрій для хвильових (квазігіперболічних) рівнянь, є суттєво складнішим, ніж таке дослідження для квазіпараболічних (еволюційних) рівнянь.

Означення 10.2. Рівняння має приховану Q -умовну симетрію, якщо редуковане рівняння має нову Q -умовну симетрію відносно певної додаткової умови.

Алгоритм систематичного опису рівнянь, які мають задану Q -умовну, приховану та приховану Q -умовну, запропонований нами раніше в роботі [23].

Переважає більшість робіт, присвячених умовній симетрії диференціальних рівнянь в частинних похідних, надає приклади Q -умовної симетрії. Ми розглядаємо приклади умовної симетрії рівняння (10.1), яка не є Q -умовною. Саме Q -умовна симетрія має визначну властивість, доведену в роботі Р.З.Жданова, Р.О.Поповича та І.М. Цифри 1999 року, яку можна описово сформулювати так - наявність Q -умовної симетрії за певних умов (системи в інволюції) еквівалентна можливості редукувати рівняння за допомогою анзацу, який відповідає цій симетрії.

Теорема 10.1. Рівняння (10.1), $F = x_0^{-2} F_1(\frac{x_a}{x_0}, ux_0^{-\alpha})$, де x_a — просторові змінні, $a = 1, 2, \dots, n$ з додатковою умовою

$$x_\mu u_\mu + \alpha u = 0, \quad (10.3)$$

де $\alpha \neq 0$, має максимальну алгебру симетрії, яка визначається операторами

$$X = \left(-\frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}} x_\mu \int \Phi_u u^{\frac{1}{\alpha}-1} du + dx_\mu \right) p_{x_\mu} + \Phi \partial_u, \quad (10.4)$$

де $\Phi = \Phi(u, u^{\frac{1}{\alpha}} x_\mu)$ — довільна функція своїх аргументів.

∂_u використовується для скороченого запису оператора $\frac{\partial}{\partial u}$.

$\alpha = 1$ не є спеціальним випадком, проте саме для такого значення α оператор (10.4) матиме більш просту форму

$$X = (-ux_\mu \Phi + dx_\mu) p_{x_\mu} + \Phi \partial_u, \quad \Phi = \Phi(u, x_\mu) \quad (10.5)$$

Якщо $\alpha = 0$, відповідна максимальна алгебра інваріантності породжується оператором

$$X = x_0 \phi^\mu \left(\frac{x_a}{x_0}, u \right) p_{x_\mu} + \psi \left(\frac{x_a}{x_0}, u \right) \partial_u, \quad (10.6)$$

де ϕ^μ, ψ — довільні функції своїх аргументів.

Додаткова умова (10.3) може бути представлена як $Du = 0$, де D — оператор діляції

$$D = x_\mu \partial_\mu + i\alpha u \partial_u. \quad (10.7)$$

Рівняння (10.3) має загальний розв'язок

$$u = x_0^\alpha \phi\left(\frac{x_a}{x_0}\right), \quad (10.8)$$

де ϕ — довільна функція.

Якщо ми застосуємо анзац (10.8), де $\omega_a = \frac{x_a}{x_0}$, до лінійного хвильового рівняння

$$\square u = 0, \quad (10.9)$$

ми отримаємо редуковане рівняння

$$(1 + 2\alpha)\omega_a \phi_{\omega_a} + \omega_a \omega_b \phi_{\omega_a \omega_b} + \alpha(\alpha + 1)\phi - \phi_{\omega_a \omega_a} = 0. \quad (10.10)$$

Анзац (10.8) породжується оператором ділатації (10.7), який є оператором класичної лівської симетрії рівняння (10.9).

В попередніх роботах ми знайшли деякі часткові розв'язки рівняння (10.10). Анзац $\phi = \phi(\omega)$, де $\omega = m_a \omega_a$, m_a — параметри, для яких виконується умова $m_a m_a = 1$, ми отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$(1 + 2\alpha)\omega \phi' + (\omega^2 - 1)\phi'' + \alpha(\alpha + 1)\phi = 0. \quad (10.11)$$

Його розв'язок для $\alpha = 0$ —

$$\phi = c_1 \ln |\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}| + c_2,$$

для $\alpha = -1$ —

$$\phi = c_1 \left(\frac{\omega}{2} \sqrt{\omega^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}| \right) + c_2.$$

Якщо $\phi = \phi(\omega)$, $\omega = \omega_a \omega_a$, $\alpha = 0$, тоді розв'язок (10.10) матиме вигляд

$$\phi = \int \omega^{-\frac{n}{2}} (\omega - 1)^{-\frac{n}{2}-1} d\omega.$$

Аналогічно можна отримати редуковані рівняння для початкового рівняння (10.1) з довільною нелінійністю, хоча точні розв'язки для цих рівнянь буде отримати набагато складніше.

Ми отримали розв'язки, які не є новими — це класичні симетрійні розв'язки рівняння, отримані за допомогою симетрійних анзаців. Проте, знайдена умовна нескінченновимірна симетрія дозволяє розмноження цих розв'язків та отримання нових, які вже не будуть класичними ліівськими розв'язками.

Умовні симетрії (10.4) та (10.6) можна розглядати як приклади прихованої симетрії рівняння (10.9) — це нові симетрії редукованого рівняння (10.10) за умови $\alpha \neq 0$ або $\alpha = 0$, які не є симетріями початкового рівняння.

Далі ми наведемо приклад анзацу та розв'язків для лінійного хвильового рівняння (10.9) з іншою додатковою умовою

$$x_\mu x_\nu u_{\mu\nu} + \alpha x_\mu u_\mu = 0. \quad (10.12)$$

Цю умову можна розглядати як диференціальний наслідок умови (10.3).

Ця нова умова (10.12) породжує наступний анзац для (10.9):

$$u = x_0^{1-\alpha} \psi \left(\frac{x_a}{x_0} \right) + \phi \left(\frac{x_a}{x_0} \right) f(x_0), \quad (10.13)$$

де $f(x_0) = \ln x_0$ для $\alpha = 1$, або $f(x_0) = 1$ для $\alpha \neq 1$.

Анзац (10.13) породжує антиредукцію, тобто для одного початкового рівняння дає систему двох редукованих рівнянь виду

$$\begin{aligned} 2\omega_a \phi_{\omega_a} + \omega_a \omega_b \phi_{\omega_a \omega_b} - \phi_{\omega_a \omega_a} &= 0, \\ \alpha(\alpha - 1)\psi + 2\alpha\omega_a \psi_{\omega_a} + \omega_a \omega_b \psi_{\omega_a \omega_b} - \psi_{\omega_a \omega_a} &= 0 \end{aligned} \quad (10.14)$$

для $\alpha \neq 1$, та

$$\begin{aligned} 2\omega_a \phi_{\omega_a} + \omega_a \omega_b \phi_{\omega_a \omega_b} - \phi_{\omega_a \omega_a} &= 0, \\ \alpha\omega_a \psi_{\omega_a} + \omega_a \omega_b \psi_{\omega_a \omega_b} - \psi_{\omega_a \omega_a} - \phi - 2\omega_a \phi_{\omega_a} &= 0 \end{aligned} \quad (10.15)$$

для $\alpha = 1$.

Наведемо часткові розв'язки цих редукованих рівнянь, де $\phi = \phi(\omega)$, $\omega = m_a \omega_a$, m_a — параметри, для яких виконується умова $m_a m_a = 1$.

Для (10.14) це

$$\phi = c_1 \ln \frac{\omega - 1}{\omega + 1}, \quad \psi = c_3 \int \frac{d\omega}{(\omega^2 - 1)^\alpha},$$

для (10.15) це

$$\begin{aligned} \phi &= c_1 \ln \frac{\omega - 1}{\omega + 1}, \\ \psi &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \left\{ c_2 \ln |\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}| - 2 \frac{c_1}{\sqrt{\omega^2 - 1}} + \right. \\ &\quad \left. c_1 \int \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \ln |\omega + \sqrt{\omega^2 - 1}| d\omega \right\}. \end{aligned}$$

Підстановка знайдених розв'язків редукованих рівнянь до анзацу (10.13) дасть точні розв'язки рівняння (10.9). Розглянемо застосування анзацу (10.13) до загального рівняння (10.1). Підстановка анзацу (10.13) в це рівняння призводить до висновку, що редукція можлива лише для лінійного рівняння (функція F має залежати від u лише лінійно):

$$F = x_0^{-2} u f(\omega_a).$$

Система з хвильового рівняння та додаткової умови — породженої оператором ділатації або диференціального наслідку такої умови — має нові цікаві симетрії, яких не має початкове рівняння. Подальші дослідження можуть включати застосування розглянутих в цій роботі додаткових умов та анзаців до інших хвильових рівнянь, що включають диференціальні інваріанти алгебри Пуанкаре (проте, можуть не бути інваріантними відносно цієї алгебри). Редукція таких рівнянь за допомогою цих анзаців може давати нові симетрії та точні розв'язки.

Розглядаємо реалізації алгебр Лі з базисними операторами $L = \langle Q_m \rangle$,

$$Q_m = \zeta_{ms}(x_i) \partial_{x_s}, \tag{10.16}$$

де x_i — змінні, які можуть розглядатись як залежні або незалежні для побудови рівняння диференціальних інваріантів, а ζ_{ms} — деякі функції of x_i . В прикладах, де залежні змінні конкретно виділені, ми можемо вживати інші літери. Тут ми використовуємо підсумовування за індексами, що повторюються, якщо не зазначене інше.

Ми вводимо додаткові змінні R_k , та досліджуємо оператори розширеної дії $\hat{Q}_m = Q_m + \lambda_{mjk} R_j \partial_{R_k}$, які утворюють таку саму алгебру Лі з такими самими структурними константами. Для реалізації алгебри Лі L , ми можемо класифікувати всі нееквівалентні реалізації розширеної дії для скінченної кількості додаткових змінних. Це дозволяє побудувати нові інваріантні рівняння для тієї самої реалізації алгебри, але з включенням додаткових змінних, і, зокрема, провести вичерпну класифікацію відносних диференціальних інваріантів (ВДІ) та інваріантних рівнянь для відповідних реалізацій.

Ми розглядаємо побудову розширень для реалізацій низьковимірних алгебр Лі, які були перераховані та класифіковані в роботах М.О. Нестеренко, В.М. Бойка, Р.О. Поповича та наших раніших роботах. Тут ми матимемо справу лише з одно- та двовимірними алгебрами та тривимірною алгеброю Пуанкаре для однієї просторової змінної з метою представлення основних ідей. Проблема класифікації розширених реалізацій (не тільки лінійних) цікава сама по собі, але для класифікації відносних інваріантів алгебр Лі потрібні саме лінійні розширення з ненульовими коефіцієнтами при $R \partial_R$.

ВДІ (не тільки абсолютні інваріанти) необхідні, зокрема, для повної групової класифікації PDE-інваріантів щодо деяких алгебр Лі. Класифікація ВДІ є цікавою проблемою абстрактної алгебри, навіть без будь-якого відношення до диференціальних рівнянь та їх симетрії.

Означення 10.3. Функція Θ , що залежить від x , u і від частинних похідних u порядку до l (Θ може бути набором функцій $(\Theta_1, \dots, \Theta_N)$) називається ВДІ для алгебри Лі $L = \langle Q_m \rangle$, якщо вона є інваріантом l -го

продовження Лі цієї алгебри:

$$Q_m^l \Theta(x, u, u_1, \dots, u_l) = \lambda_m(x, u, u_1, \dots, u_l) \Theta,$$

де λ_m деякі функції; якщо $\lambda_m = 0$, Θ — абсолютний диференціальний інваріант (АДІ) алгебри L ; якщо $\lambda_m \neq 0$, це власний ВДІ.

Означення 10.4. Максимальний набір функціонально незалежних інваріантів порядку $r \leq l$ алгебри Лі L є функціональним базисом диференціальних інваріантів порядку l для алгебри L .

Зауважте, що ми не можемо розглядати набір незалежних ВДІ так само, як ми б обробляли набір АДІ — функція ВДІ може бути неінваріантною. Наприклад лінійні комбінації ВДІ загалом не будуть ВДІ. Методи повного опису та класифікації абсолютних диференціальних інваріантів добре відомі. Однак виявилось складніше знайти спосіб класифікації ВДІ.

У випадку, коли стоїть задача побудови загальних операторів розширення для операторів (10.16), розширення шукаємо у вигляді

$$\hat{Q}_m = Q_m + a_m(x_i, R) \partial_R. \quad (10.17)$$

Означення 10.5. Розширення реалізації алгебри Лі L з базисними операторами виду (10.16) будується з тих самих операторів із додаванням більшої кількості змінних (10.17).

Щоб знайти скалярні ВДІ, нам потрібно додати лише одну нову змінну та знайти лише лінійні розширення.

$$\hat{Q}_m = Q_m + a_m(x_i) R \partial_R. \quad (10.18)$$

Треба зауважити, що ідея еквівалентності/нееквівалентності для розширеної реалізації враховує класифікацію ВДІ — різницю з класифікацією саме щодо локального перетворення буде видно на прикладі операторів трансляції. Наша класифікація лінійних розширень має на увазі наступне визначення еквівалентності ВДІ.

Означення 10.6. Два ВДІ алгебри L є називаються еквівалентними, якщо вони є еквівалентними відносно перетворень з групи еквівалентності відносної інваріантності умови

$$Q_m^l R(x, u, u_1, \dots, u_l) = \lambda_m(x, u, u_1, \dots, u_l) R.$$

Також можемо розглянути еквівалентність пар (R, λ) ВДІ з відповідними мультиплікаторами. Це може бути корисним для практичних цілей опису інваріантних диференціальних рівнянь, оскільки лінійна комбінація ВДІ з тим самим мультиплікатором також буде ВДІ і може бути використана для побудови інваріантного диференціального рівняння.

Порядок опису ВДІ: 1) Побудувати продовження Лі операторів Q_m ; 2) написати оператори розширеної дії; 3) класифікувати реалізації розширеної дії до перетворення з групи еквівалентності умов інваріантності; 4) знайти функціональну основу АДІ для нееквівалентних реалізацій; 5) побудувати ВДІ та АДІ алгебри L з абсолютних інваріантів операторів розширеної дії шляхом виключення допоміжних змінних. Зверніть увагу, що допоміжні змінні R можуть входити до АДІ операторів розширеної реалізації, оскільки множники виду R^K , $K \neq 0$ є деякими цілими числами — АДІ мають вигляд FR^K , де F — деякі функції залежних і незалежних змінних, а похідні залежних змінних відповідного порядку дадуть ВДІ форми F .

Нагадаємо деякі властивості ВДІ — добуток ВДІ також є ВДІ, ВДІ в нульовому ступені також буде ВДІ.

Починаємо з, здавалося б, дуже легкого випадку, тобто одновимірної алгебри Лі. Його все одно варто розглянути з метою вичерпного викладу. Це алгебра Лі, базис якої складається з одного оператора. Будь-який окремий диференціальний оператор першого порядку, очевидно, утворює алгебру Лі та локально еквівалентний оператору трансляції.

Спочатку побудуємо лінійне розширення для оператора трансляції ∂_x . Будемо шукати його у формі $\hat{Q} = \partial_x + R(x)F\partial_F$. Легко перевірити, що довільне $R(x)$ задовольнятиме критерію комутатора для цієї алгебри.

Хоча оператор $\hat{Q} = \partial_x + a(x)R\partial_R$ безперечно локально еквівалентний $Q = \partial_x$, для нашої класифікації ВДІ нам потрібно розглядати оператори з ненульовим коефіцієнтом при ∂_R . Легко побачити, що нерозширений $Q = \partial_x$ не створює жодних ВДІ, але розширений оператор дав нам ВДІ $R = \exp x$. Цей ВДІ, як і інші експоненціальні ВДІ операторів трансляції, зовсім не корисний для опису інваріантних рівнянь, але його слід перерахувати, якщо ми прагнемо отримати вичерпну класифікацію ВДІ. Отже, процедура класифікації ВДІ потребує класифікації лінійних розширених алгебр з ненульовими коефіцієнтами при $R\partial_R$.

Така класифікація у випадку операторів, що розглядаються тут, визначає алгебри або одиничні оператори, чиї дії не є еквівалентними при локальних перетвореннях наступної форми: $\tilde{x} = \kappa(x, R)$, $\tilde{R} = \phi(x, R)$, $\tilde{Q}_m = \tilde{a}_m(\tilde{x})\partial_{\tilde{x}} + \tilde{b}_m(\tilde{x})\tilde{R}\partial_{\tilde{R}}$.

Подібні критерії також будуть доречними для алгебр, що містять більше змінних. Однак для цілей цієї роботи ми можемо легко перевірити еквівалентність або нееквівалентність за допомогою інваріантів відповідних алгебр або операторів.

Ми будемо розглядати розширення алгебр

$$\partial_x, x\partial_x; \tag{10.19}$$

$$\partial_x, y\partial_x; \tag{10.20}$$

$$\partial_x, x\partial_x + \partial_y, \tag{10.21}$$

виключаючи з нашого розгляду тут алгебри, які складаються лише з операторів трансляції.

Комутатор операторів (10.19) — ∂_x . Розглядаємо розширення $\partial_x + a(x, y)R\partial_R$, $x\partial_x + b(x, y)R\partial_R$. З комутаційних співвідношень $b_x - xa_x = a$ отримуємо визначальні умови для коефіцієнтів $-xa = \phi(y)$; a є довільним. Ми отримуємо $b = xa(x, y) + \phi(y)$ та загальний вигляд розширених операторів

$$\partial_x + a(x, y)R\partial_R, \quad x\partial_x + (xa(x, y) + \phi(y))R\partial_R.$$

Ми шукаємо розширення базисних операторів алгебри (10.20) як $\partial_x + a(x, y)R\partial_R$, $y\partial_x + b(x, y)R\partial_R$. З комутаційних співвідношень $b_x - ya_x$, $b = ya(x, y) + \phi(y)$ і базисних операторів розширеної алгебри виглядає так:

$$\partial_x + a(x, y)R\partial_R, \quad y\partial_x + (ya(x, y) + \phi(y))R\partial_R.$$

Шукаємо розширення базисних операторів як $\partial_x + a(x, y)R\partial_R$, $x\partial_x + \partial_y + b(x, y)R\partial_R$; $b_x - xa_x - a_y = a$, тоді $b + xa = \Phi_y(x, y)$, $a = \Phi_x(x, y)$. $b = \Phi_y(x, y) - x\Phi_x(x, y)$.

Розширені оператори мають вигляд

$$\partial_x + \Phi_x(x, y)R\partial_R, \quad x\partial_x + (\Phi_y(x, y) - x\Phi_x(x, y))R\partial_R.$$

Табл. 10.1

	Базисні оператори	Загальні розширені базисні оператори	Нееквівалентні розширені базисні оператори
1	$\partial_x, x\partial_x$	$\partial_x + a(x, y)R\partial_R,$ $x\partial_x + (xa(x, y) + \phi(y))R\partial_R$	$\partial_x + R\partial_R,$ $x(\partial_x + R\partial_R) + \epsilon R\partial_R$
2	$\partial_x, y\partial_x$	$\partial_x + a(x, y)R\partial_R,$ $y\partial_x + (ya(x, y) + \phi(y))R\partial_R$	$\partial_x + R\partial_R,$ $y\partial_x + (y + \epsilon)R\partial_R$
3	$\partial_x, x\partial_x + \partial_y$	$\partial_x + \Phi_x(x, y)R\partial_R,$ $x\partial_x + (\Phi_y - x\Phi_x)R\partial_R$	$\partial_x + \Phi_x(x, y)R\partial_R,$ $x\partial_x + (\Phi_y - x\Phi_x)R\partial_R$

$a(x, y)$, $\phi(y)$, $\Phi(x, y)$ є довільними достатньо гладкими функціями; ϵ дорівнює 0 або 1.

Оператори, перелічені в таблиці 10.1, дозволяють розрахувати ВДІ нульового порядку. Пошук ВДІ вищого порядку вимагав би пошуку розширень пролонгацій операторів початкової реалізації до відповідного порядку. Ми хотіли б зазначити, що тут нам потрібні продовження відповідних продовжень операторів, які розглядаються, а не продовження продовжень.

Тут ми будемо шукати *функціональні базиси* ВДІ до другого порядку похідних. Знайдено інваріанти для двох незалежних змінних x і

y і однієї залежної змінної u . Зазначимо, що пошук диференціальних інваріантів в основному залежить від вибору та призначення залежних і незалежних змінних.

Табл. 10.2

	Розширені другі продовження	Функціональні бази-си АДІ	Функціональні бази-си ВДІ
1	$\partial_x + R\partial_R, \quad x\partial_x - u_x\partial_{u_x} - u_{xx}\partial_{u_{xx}} - u_{xy}\partial_{u_{xy}} + R\partial_R;$	$y, \quad u, \quad u_y, \quad u_{yy}, \quad u_x R, \quad u_{xx} R, \quad u_{xy} R;$	$y, \quad u, \quad u_y, \quad u_{yy}, \quad u_x, \quad u_{xx}, \quad u_{xy};$
2	$\partial_x + R\partial_R, \quad y\partial_x - u_x\partial_{u_y} - u_{xx}\partial_{u_{xy}} - u_{xy}\partial_{u_{yy}} + R\partial_R;$	$y, \quad u, \quad u_x, \quad u_{xx}, \quad \exp \frac{u_y}{u_x} R, \quad u_x u_{xy} - u_y u_{xx}, \quad u_{xy}^2 - 2u_{xx} u_{yy};$	$y, \quad u, \quad u_x, \quad u_{xx}, \quad \exp u_y, \quad u_x u_{xy} - u_y u_{xx}, \quad u_{xy}^2 - 2u_{xx} u_{yy};$
3	$\partial_x + R\partial_R, \quad x\partial_x + \partial_y - u_x\partial_{u_x} - u_{xx}\partial_{u_{xx}} - u_{xy}\partial_{u_{xy}} + R\partial_R;$	$\frac{\exp y}{R}, \quad u, \quad u_y, \quad u_{yy}, \quad u_x R, \quad u_{xx} R, \quad u_{xy} R;$	$\exp y, \quad u, \quad u_y, \quad u_{yy}, \quad u_x, \quad u_{xx}, \quad u_{xy}$

Було вивчено багато розширень для багатьох відомих алгебр математичної фізики без обмежень лінійності та без будь-якого відношення до пошуку ВДІ. Ці нелінійні реалізації були використані для знаходження їхніх диференціальних інваріантів і звідки нових рівнянь, інваріантних відносно цих алгебр.

Проілюструємо різницю в задачі класифікації загальних розширень для алгебр Лі та розширень з метою класифікації ВДІ на прикладі алгебри Пуанкаре з двома незалежними змінними t і x і однією залежною змінною u :

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad J = t\partial_x + x\partial_t. \quad (10.22)$$

Функціональний базис АДІ другого порядку може бути записаний наступним чином:

$$I_1 = u, \quad I_2 = u_t^2 - u_x^2, \quad I_3 = u_{tt} - u_{xx}, \\ I_4 = (u_t - u_x)^2 (u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx}),$$

$$I_5 = (u_t + u_x)^2(u_{tt} - 2u_{tx} + u_{xx}). \quad (10.23)$$

Деякі з цих виразів є ВДІ

$$\begin{aligned} AR_1 &= u_t - u_x, & AR_2 &= u_t + u_x, & AR_3 &= u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx}, \\ AR_4 &= u_{tt} - 2u_{tx} + u_{xx}, \end{aligned} \quad (10.24)$$

показані за допомогою перерахування інваріантних рівнянь типу $AR_i = 0$, але без поняття відносного диференціального інваріанту.

Розглянемо розширення стандартної реалізації алгебри Пуанкаре (10.22), побудоване з метою класифікації ВДІ.

$$\begin{aligned} \partial_t + a(t, x)R\partial_R, & \quad \partial_x + b(t, x)R\partial_R, \\ J &= t\partial_x + x\partial_t + c(t, x)R\partial_R. \end{aligned} \quad (10.25)$$

З комутаційних співвідношень $[P_t, P_x] = 0$, $[P_t, J] = P_x$, $[P_x, J] = P_t$ отримуємо умови на функції $a(t, x)$, $b(t, x)$, $c(t, x)$: $a_x = b_t$, $c_t - ta_x - xa_t = b$, $c_x - tb_x - xb_t = a$, звідки $a(t, x) = \Phi_t$, $b(t, x) = \Phi_x$, $c(t, x) = t\Phi_x + x\Phi_t + C$, де $\Phi = \Phi(t, x)$ є довільною достатньо гладкою функцією своїх аргументів, а $C = \text{const}$.

З точністю до локальної еквівалентності та за умови ненульових коефіцієнтів при $R\partial_R$ отримуємо таку реалізацію

$$\partial_t + R\partial_R, \quad \partial_x + R\partial_R, \quad (10.26)$$

$$J = t(\partial_x + R\partial_R) + x(\partial_t + R\partial_R) + \epsilon R\partial_R, \quad (10.27)$$

де ϵ дорівнює 0 або 1.

Оператори (10.27) з $\epsilon = 0$ з функціонального базису АДІ $R^{-1} \exp t$, $R^{-1} \exp x$ а set of ВДІ $\exp t$, $\exp x$.

Ми можемо знайти розширене продовження реалізації, використовуючи комутаційні співвідношення подібним чином, і отримати:

$$\begin{aligned} \partial_t + R\partial_R, & \quad \partial_x + R\partial_R, & J &= t(\partial_x + R\partial_R) + x(\partial_t + R\partial_R) - \\ & & & u_t\partial_{u_x} - u_x\partial_{u_t} - u_{tt}\partial_{u_{xt}} - 2u_{xt}(\partial_{u_{xx}} + \partial_{u_{tt}}) - u_{xx}\partial_{u_{xt}} + \epsilon R\partial_R. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Оператори (10.28) з $\epsilon = 1$ дають функціональний базис АДІ першого порядку

$$(u_t + u_x)R^{-1}, \quad (u_t - u_x)R \quad (10.29)$$

ВДІ першого порядку для алгебри (10.22) $u_t + u_x, u_t - u_x$.

Визначальне рівняння для АДІ другого порядку у формі

$$F = F(u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}),$$

виглядатиме наступним чином:

$$2u_{xt}(F_{u_{xx}} + F_{u_{tt}}) + (u_{xx} + u_{tt})F_{u_{xt}} + RF_R = 0.$$

Отримані АДІ другого порядку

$$u_{tt} - u_{xx}, \quad (u_{tt} + 2u_{xt} + u_{xx})R^{-2}, \quad (u_{tt} - 2u_{xt} + u_{xx})R^2. \quad (10.30)$$

Таким же чином отримуємо два нееквівалентних власних ВДІ другого порядку:

$$u_{tt} + 2u_{xt} + u_{xx}, \quad u_{tt} - 2u_{xt} + u_{xx}.$$

Інваріант $u_{tt} - u_{xx} \in$ АДІ (10.22), тому ми не включаємо його до списку належних ВДІ.

Добутки інваріантів у відповідних ступенях зі списків (10.29), (10.30) для виключення допоміжних змінних R дадуть абсолютні інваріанти зі списку (10.23). Отже, для опису всіх нееквівалентних ВДІ до другого порядку реалізації, що розглядається, достатньо окрім списку АДІ взяти лише ВДІ нульового та першого порядку.

$$A_1 = u_t + u_x, \quad A_2 = (u_t - u_x)u^{-2}, \quad A_3 = (u_{tt} - u_{xx})u^{-1}, \\ A_4 = (u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx})u, \quad A_5 = (u_{tt} - 2u_{tx} + u_{xx})u^{-3}.$$

Щоб отримати вичерпну класифікацію ВДІ для цієї розширеної реалізації, нам потрібно розширити її далі та розглянути реалізацію

$$P_t = \partial_t + a(t, x, u)R\partial_R, \quad P_x = \partial_x + b(t, x, u)R\partial_R,$$

$$J = t\partial_x + x\partial_t + u\partial_u + c(t, x, u)R\partial_R.$$

З комутаційних співвідношень $[P_t, P_x] = 0$, $[P_t, J] = P_x$, $[P_x, J] = P_t$ ми можемо отримати умови на функції $a(t, x, u)$, $b(t, x, u)$, $c(t, x, u)$:

$$a_x = b_t, \quad c_t - ta_x - xa_t - ua_u = b, \quad c_x - tb_x - xb_t - ub_u = a,$$

звідки

$$a(t, x, u) = \Phi_t, \quad b(t, x, u) = \Phi_x, \quad c(t, x, u) = t\Phi_x + x\Phi_t + u\Phi_u + C,$$

де $\Phi = \Phi(t, x, u)$ – довільна досить гладка функція, а $C = \text{const}$.

З точністю до локальної еквівалентності та за умови ненульових коефіцієнтів при $R\partial_R$ отримуємо

$$\begin{aligned} &\partial_t + R\partial_R, \quad \partial_x + R\partial_R, \\ &J = t(\partial_x + R\partial_R) + x(\partial_t + R\partial_R) + u\partial_u + \epsilon R\partial_R, \end{aligned} \quad (10.31)$$

де ϵ буде 0 або 1.

Оператори (10.31) з $\epsilon = 0$ дають з свого функціонального базису АДІ $R^{-1} \exp t$, $R^{-1} \exp x$ набір ВДІ $\exp t$, $\exp x$.

Ми можемо знайти розширене продовження реалізації, використовуючи комутаційні співвідношення подібним чином, і отримати:

$$\begin{aligned} &\partial_t + R\partial_R, \quad \partial_x + R\partial_R, \\ &J = t(\partial_x + R\partial_R) + x(\partial_t + R\partial_R) + u\partial_u + u_x\partial_{u_x} + u_t\partial_{u_t} \\ &\quad + u_{xx}\partial_{u_{xx}} + 2u_{xt}\partial_{u_{xt}} + u_{tt}\partial_{u_{tt}} - u_t\partial_{u_x} - u_x\partial_{u_t} \\ &\quad - u_{tt}\partial_{u_{xt}} - 2u_{xt}(\partial_{u_{xx}} + \partial_{u_{tt}}) - u_{xx}\partial_{u_{xt}} + \epsilon R\partial_R. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Ми можемо взяти відносні диференціальні інваріанти наступним чином:

$$\begin{aligned} IR_1 &= u, \quad IR_2 = u_t + u_x, \quad IR_3 = u_t - u_x, \quad IR_4 = u_{tt} - u_{xx}, \\ IR_5 &= u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx}, \quad IR_6 = u_{tt} - 2u_{tx} + u_{xx}. \end{aligned}$$

Ідея розширених реалізацій, для яких ми знаходимо абсолютні диференціальні інваріанти забезпечує можливість використання всієї великої теорії, доступної в літературі для таких абсолютних диференціальних інваріантів, напр. здатність будувати оператори інваріантного диференціювання та фундаментальні базиси АДІ, що дозволяють описувати інваріанти будь-якого порядку. Було б цікаво вивчати ВДІ для більшої кількості алгебр, а також шукати нові нелінійні реалізації таких алгебр.

11 Групова класифікація та точні розв'язки диференціальних рівнянь.

Реалізації алгебр Лі

11.1 Групова класифікація $(2+1)$ -вимірних лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів та деякі фундаментальні розв'язки

Досліджено симетрійні властивості класу $(2+1)$ -вимірних лінійних рівнянь вигляду

$$u_t = x^2 u_{xx} + f(x) u_y, \quad (11.1)$$

де $u = u(t, x, y)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $f(x) \neq \text{const}$ є довільною гладкою функцією.

Рівняння (11.1) можна отримати заміною незалежних та залежної змінних з лінійного рівняння ціноутворення азійських опціонів [Barucci E., Polidoro S., Vespri V., *Math. Models and Methods in Appl. Sci.* **11** (2001), 475–497]:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + f(S) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \quad (11.2)$$

де $V = V(\tau, S, A)$; r, σ — сталі. У зазначеній заміні $S = x$ і функція $f(S)$ має такий самий вигляд, як і в рівнянні (11.1).

Рівняння (11.2) містить низку відомих рівнянь азійських опціонів. Так, у роботі [Barucci E., Polidoro S., Vespri V., *Math. Models and Methods in Appl. Sci.* **11** (2001), 475–497] розглядається рівняння із $f(S) = S$ та $f(S) = \ln S$, у роботі [Al-Azemi F., Calin O., *Appl. Math. Inf. Sci.* **9** (2015), 2803–2811] — рівняння із $f(S) = \frac{1}{S}$.

Широке застосування рівняння (11.2) в задачах фінансової математики викликає беззаперечний інтерес до отримання його точних розв'язків. Одним із найбільш ефективних методів, що дозволяють здійснити пошук розв'язків, є методи групового аналізу [Лагно В.І., Спічак С.В.,

Стогній В.І., *Інститут математики НАН України, Київ*, 2002; Ovsiannikov L.V., *Academic Press, New York*, 1982].

У роботі [Спічак С. В., Стогній В. І., Копась І. Н., *Зб. праць Ін-ту математики*, **16** (2019), 164–173] досліджено симетрійні властивості рівняння (11.2) із $f(S) = S$ й отримано такий результат: рівняння допускає 5-параметричну групу нетривіальних локальних перетворень незалежних і залежних змінних. Це дало можливість будувати точні розв’язки у явному вигляді рівняння (11.2) через проведення симетрійної редукції за операторами з алгебри інваріантності цього рівняння.

Оскільки теоретико-групові методи дають змогу інтегрувати диференціальні рівняння, які мають нетривіальні групи інваріантності, то актуальною є задача групової класифікації диференціального рівняння (11.1) з довільною функцією.

Сучасну постановку задачі групової класифікації диференціальних рівнянь зробив Л.В. Овсянніков у 1959 р., де він запропонував метод розв’язування задачі групової класифікації та застосував його для класифікації нелінійних рівнянь теплопровідності. Детальний огляд публікацій із групової класифікації диференціальних рівнянь станом на середину 90-х рр. XX ст. наведено в довіднику [Ibragimov N. X., *CRC Press, Boca Raton*, 1994]. Групову класифікацію еволюційних рівнянь у просторах вищої розмірності, ніж у двовимірному просторі-часі, розглянуто у низці праць, зокрема у [Demetriou E., Ivanova N. M., Sophocleous C., *J. Math. Anal. Appl.* **348** (2008), 55–65; Rassokha I., Serov M., Spichak S., Stogniy V., *J. Math. Phys.* **59** (2018), 071514].

Розв’язання задачі групової класифікації класу рівнянь (11.1) дозволить виокремити підкласи рівняння, що допускають нетривіальні симетрійні властивості, а також побудувати точні розв’язки таких рівнянь.

Ядро максимальних алгебр інваріантності. Групову класифікацію рівнянь (11.1) можна провести, використовуючи класичний метод Лі-Овсяннікова. Перший етап реалізації цього алгоритму вимагає обчи-

слення ядра максимальних алгебр інваріантності диференціальних рівнянь досліджуваного класу, тобто дозволяє знайти максимальну алгебру інваріантності рівняння (11.1) за довільної функції $f(x)$.

Теорема 11.1. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (11.1) за довільної гладкої функції $f(x)$ є алгебра*

$$A^{\ker} = \langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, \beta(t, x)\partial_u \rangle, \quad (11.3)$$

де функція $\beta(t, x)$ є довільним розв'язком лінійного рівняння $\beta_t = x^2\beta_{xx}$.

Група перетворень еквівалентності. Щоб дослідити симетрійні властивості певного класу, важливо знати перетворення еквівалентності цього класу, тобто такі перетворення змінних, які переводять будь-яке рівняння із класу (11.1) в деяке інше рівняння з цього самого класу. За допомогою перетворень еквівалентності клас рівнянь можна поділити на нееквівалентні підкласи, виділивши при цьому в кожному з підкласів по одному представнику з найпростішим виглядом рівняння, які називають канонічними рівняннями. Тоді досить дослідити тільки канонічні представники із кожного підкласу, щоб зробити висновок про симетрійні властивості всіх рівнянь певного класу.

Множина перетворень еквівалентності становить групу перетворень еквівалентності, яку надалі позначатимемо E . Групу E знаходимо за відомим алгоритмом. Провівши обчислення, отримуємо таке твердження.

Теорема 11.2. *Група E рівнянь (11.1) складається з таких перетворень:*

$$\begin{aligned} \bar{t} &= a_1^2 t + a_2; & \bar{x} &= a_3 x^{a_1}; & \bar{y} &= a_4 t + a_5 y + a_6; \\ \bar{u} &= a_7 e^{(1-a_1^2)t/4} x^{(a_1-1)/2} u + \varphi(t, x); & \bar{f} &= \frac{a_5}{a_1^2} f - \frac{a_4}{a_1^2}, \end{aligned} \quad (11.4)$$

де a_i , $i \in \{1, \dots, 7\}$ — довільні сталі, що задовольняють умову $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $a_5 \neq 0$, $a_7 \neq 0$; $\varphi(t, x)$ — довільний розв'язок лінійного рівняння

$$\varphi_t = x^2 \varphi_{xx} + (1 - a_1) x \varphi_x.$$

Розширення ядра максимальних алгебр інваріантності диференціальних рівнянь із класу (11.1). Розглянемо розв’язок задачі виділення із класу (11.1) з точністю до перетворень еквівалентності тих диференціальних рівнянь (знайдемо всі специфікації функції $f(x)$), які мають нетривіальні симетрійні властивості, тобто допускають алгебру інваріантності вищої розмірності, ніж

$$A^{\ker} \oplus_s \langle \gamma(t, x, y) \partial_u \rangle, \quad (11.5)$$

де $\gamma(t, x, y)$ — довільний гладкий розв’язок відповідного рівняння (11.1); символ $\oplus_s$ тут і надалі позначатиме напівпрямую суму двох алгебр Лі. Оператор симетрії $X = \gamma(t, x, y) \partial_u$, який притаманний лінійним рівнянням й обумовлює принцип суперпозиції, надалі не враховуватимемо.

Перший етап полягає в тому, щоб знайти представників підкласів рівнянь із найпростішим виглядом, алгебра інваріантності яких має вищу розмірність, ніж (11.5), тобто треба знайти відповідні “канонічні” функції $f(x)$. Для розв’язування цієї задачі необхідно розв’язати систему визначальних рівнянь:

$$\tau_x = \tau_u = \xi_u^1 = \xi_x^2 = \xi_u^2 = \eta_{uu} = 0, \quad (11.6)$$

$$x\tau_t - 2x\xi_x^1 + 2\xi^1 - xf(x)\tau_y = 0, \quad (11.7)$$

$$\xi_t^1 - x^2\xi_{xx}^1 - f(x)\xi_y^1 + 2x^2\eta_{ux} = 0, \quad (11.8)$$

$$f'(x)\xi^1 + f(x)(\tau_t - \xi_y^2) - (f(x))^2\tau_y + \xi_t^2 = 0, \quad (11.9)$$

$$\eta_t - x^2\eta_{xx} - f(x)\eta_y = 0. \quad (11.10)$$

Із рівнянь (11.6) отримуємо, що

$$\tau = \tau(t, y), \quad \xi^1 = \xi^1(t, x, y), \quad \xi^2 = \xi^2(t, y), \quad \eta = \alpha(t, x, y)u + \beta(t, x, y).$$

У результаті аналізу цих визначальних рівнянь, а також, використовуючи перетворення еквівалентності (11.4), отримуємо, що функція $f(x)$ може набути вигляду, який відображено у табл. 11.1.

Табл. 11.1

№ з/п	$f(x)$	Перетворення еквівалентності	$\bar{f}(\bar{x})$
1	$k_1 x^n + k_2,$ $k_1 \neq 0, n \neq 0$	$\bar{t} = t, \bar{x} = k_1 ^{\frac{1}{n}} x,$ $\bar{y} = (k_2 t + y) \text{sign} k_1, \bar{u} = u$	$\bar{x}^n$
2	$k_1 \ln(\ln x + k_2) + k_3,$ $k_1 \neq 0$	$\bar{t} = t, \bar{x} = e^{k_2} x,$ $\bar{y} = \frac{k_3}{k_1} t + \frac{1}{k_1} y, \bar{u} = u$	$\ln \ln \bar{x}$
3	$k_1 (\ln x + k_2)^n + k_3,$ $k_1 \neq 0, n \neq 0$	$\bar{t} = t, \bar{x} = e^{k_2} x,$ $\bar{y} = \frac{k_3}{k_1} t + \frac{1}{k_1} y, \bar{u} = u$	$\ln^n \bar{x}$

Отже, знайдено “канонічні” функції, які представляють відповідні підкласи рівнянь у випадку $\tau_y = 0$. У випадку $\tau_y \neq 0$ аналіз пошуку “канонічних” функцій $f(x)$ аналогічний (хоча і більш складний) і приводить до такого ж результату, що і в попередньому випадку, який відображено в табл. 11.1.

Останній етап групової класифікації передбачає розв’язування визначальних рівнянь (11.6)–(11.10) для кожного випадку отриманих функцій $f(x) = x^n$, $f(x) = \ln \ln x$ та $f(x) = \ln^n x$, де $n \neq 0$, й знаходження відповідних інфінітезимальних операторів симетрії.

Розглянемо випадок $f(x) = x^n$, $n \neq 0$.

Розв’язавши визначальні рівняння (11.6)–(11.10) із $f(x) = x^n$, отримуємо такий розв’язок системи:

$$\begin{aligned} \tau &= C_1; \quad \xi^1 = (C_2 y + C_3) x; \quad \xi^2 = C_2 \frac{n}{2} y^2 + C_3 n y + C_4; \\ \eta &= \left(C_2 \frac{1}{2n} (x^n + n(1-n)y) + C_5 \right) u + \beta(t, x, y), \end{aligned}$$

де C_i , $i \in \{1, \dots, 5\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t, x, y)$ — довільний розв’язок рівняння (11.1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності рівняння (11.1) з функцією $f(x) = x^n$, $n \neq 0$, є п’ятивимірна алгебра із базисними оператора-

ми:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, x\partial_x + ny\partial_y, xy\partial_x + \frac{n}{2}y^2\partial_y + \frac{1}{2n}(x^n + n(1-n)y)u\partial_u \rangle.$$

Таким чином, в цьому випадку до операторів алгебри $A^{\ker}$ додаються оператори

$$X_4 = x\partial_x + ny\partial_y, \quad X_5 = xy\partial_x + \frac{n}{2}y^2\partial_y + \frac{1}{2n}(x^n + n(1-n)y)u\partial_u.$$

Якщо $f(x) = \ln \ln x$, то із системи визначальних рівнянь (11.7)–(11.10) отримуємо такий розв'язок:

$$\begin{aligned} \tau &= C_1 t + C_2; \quad \xi^1 = \frac{1}{2}C_1 x \ln x; \quad \xi^2 = C_1 \left(y - \frac{1}{2}t \right) + C_3; \\ \eta &= \left(\frac{1}{4}C_1(\ln x - t) + C_4 \right) u + \beta(t, x, y), \end{aligned}$$

де $C_i, i \in \{1, \dots, 4\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t, x, y)$ — довільний розв'язок рівняння (11.1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності є чотиривимірна алгебра із базисними операторами:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x \ln x \partial_x + \left(y - \frac{1}{2}t \right) \partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u\partial_u \rangle.$$

У цьому випадку до операторів алгебри $A^{\ker}$ додається оператор

$$X_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}x \ln x \partial_x + \left(y - \frac{1}{2}t \right) \partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u\partial_u.$$

Розглянемо випадок, коли у класі рівнянь (11.1) $f(x) = \ln^n x, n \neq 0, n \neq 1$.

Якщо $f(x) = \ln^n x, n \neq 0, n \neq 1$, то із системи визначальних рівнянь (11.6)–(11.10) отримуємо такий розв'язок:

$$\begin{aligned} \tau &= C_1 t + C_2; \quad \xi^1 = \frac{1}{2}C_1 x \ln x; \quad \xi^2 = C_1 \frac{n+2}{2}y + C_3; \\ \eta &= \left(\frac{1}{4}C_1(\ln x - t) + C_4 \right) u + \beta(t, x, y), \end{aligned}$$

де C_i , $i \in \{1, \dots, 4\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t, x, y)$ — довільний розв'язок рівняння (11.1).

Отже, максимальною алгеброю інваріантності є чотиривимірна алгебра із базисними операторами:

$$\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, t\partial_t + \frac{1}{2}x \ln x \partial_x + \frac{n+2}{2}y\partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u\partial_u \rangle.$$

Таким чином, в цьому випадку до операторів алгебри $A^{\ker}$ додається оператор

$$X_4 = t\partial_t + \frac{1}{2}x \ln x \partial_x + \frac{n+2}{2}y\partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u\partial_u.$$

Розглянемо випадок, коли у класі рівнянь (11.1) $f(x) = \ln x$.

Розв'язавши систему визначальних рівнянь (11.6)–(11.10) із $f(x) = \ln x$, отримуємо такий розв'язок:

$$\begin{aligned} \tau &= C_1 t^2 + C_2 t + C_3; \\ \xi^1 &= \left(C_1 t + \frac{1}{2} C_2 \right) x \ln x + (C_4 t^2 + C_5 t - 3C_1 y + C_6) x; \\ \xi^2 &= 3C_1 t y + \frac{3}{2} C_2 y - \frac{1}{3} C_4 t^3 - \frac{1}{2} C_5 t^2 - C_6 t + C_7; \\ \eta &= \left(-C_1 \ln^2 x + \frac{1}{2} \left((C_1 - 2C_4) t - C_5 + \frac{1}{2} C_2 \right) \ln x + \frac{1}{4} (2C_4 - C_1) t^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (2C_5 - 8C_1 - C_2) t - \left(C_4 + \frac{3}{2} C_1 \right) y + C_8 \right) u + \beta(t, x, y), \end{aligned}$$

де C_i , $i \in \{1, \dots, 8\}$ — довільні сталі інтегрування, $\beta(t, x, y)$ — довільний розв'язок рівняння (11.1). Отже, максимальною алгеброю інваріантності рівняння (11.1) із функцією $f(x) = \ln x$ є восьмивимірна алгебра із базисними операторами:

$$\begin{aligned} &\langle \partial_t, \partial_y, u\partial_u, x\partial_x - t\partial_y, tx\partial_x - \frac{1}{2}t^2\partial_y + \frac{1}{2}(t - \ln x)u\partial_u, \\ &t^2\partial_t + (t \ln x - 3y)x\partial_x + 3ty\partial_y \\ &+ \left(-\ln^2 x + \frac{1}{2}t \ln x - \frac{1}{4}t^2 - 2t - \frac{3}{2}y \right) u\partial_u, \end{aligned}$$

$$t\partial_t + \frac{1}{2}x \ln x \partial_x + \frac{3}{2}y \partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u \partial_u, \\ t^2x \partial_x - \frac{1}{3}t^3 \partial_y - \left(t \ln x + y - \frac{1}{2}t^2\right) u \partial_u \rangle.$$

У цьому випадку до операторів алгебри $A^{\ker}$ додаються оператори:

$$X_4 = x\partial_x - t\partial_y, X_5 = tx\partial_x - \frac{1}{2}t^2\partial_y + \frac{1}{2}(t - \ln x)u\partial_u, \\ X_6 = t^2\partial_t + (t \ln x - 3y)x\partial_x + 3ty\partial_y \\ + \left(-\ln^2 x + \frac{1}{2}t \ln x - \frac{1}{4}t^2 - 2t - \frac{3}{2}y\right) u\partial_u, \\ X_7 = t\partial_t + \frac{1}{2}x \ln x \partial_x + \frac{3}{2}y \partial_y + \frac{1}{4}(\ln x - t)u \partial_u, \\ X_8 = t^2x \partial_x - \frac{1}{3}t^3 \partial_y - \left(t \ln x + y - \frac{1}{2}t^2\right) u \partial_u.$$

Фундаментальні розв'язки. Одним із застосувань симетрійних властивостей лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними є побудова в явному вигляді фундаментальних розв'язків.

Фундаментальним розв'язком рівняння (11.2) називають узагальнену функцію $V = V(\tau, S, A, \tau_0, S_0, A_0)$, яка залежить від τ_0, S_0, A_0 як від параметрів і задовольняє рівняння

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + f(S) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = \delta(\tau - \tau_0, S - S_0, A - A_0), \quad (11.11)$$

де δ — функція Дірака.

Відомо, що фундаментальні розв'язки зазвичай є інваріантними відносно перетворень, які допускає вихідне рівняння. Зокрема, зазначену властивість мають фундаментальні розв'язки таких класичних рівнянь математичної фізики, як рівняння Лапласа, рівняння теплопровідності, хвильове рівняння. Отже, якщо рівняння має нетривіальні властивості, то для побудови фундаментального розв'язку можна використати теоретико-групові методи. Конструктивний метод знаходження симетрій лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними із δ -функцією у правій частині було запропоновано у роботі [Аксенов А.В.,

Доклады Академии наук **342** (1995), 151–153], в якій було наведено й алгоритм побудови інваріантних фундаментальних розв’язків.

Для деяких функцій $f(S)$, які мають алгебру інваріантності вищої розмірності ніж ядро основних алгебр інваріантності, згідно з цим методом знайдено алгебру інваріантності рівняння (11.11), яка є підалгеброю алгебри інваріантності рівняння (11.2), а використовуючи цю підалгебру, можна побудувати фундаментальний розв’язок.

11.2 Класифікація реалізацій алгебр Лі векторних полів на колі. Комбінаторні формули

Описано реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на колі. Побудовано “канонічні” реалізації двовимірної некомутативної алгебри, а також алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Показано, що будь-яка реалізація цих алгебр гладких векторних полів зводиться до однієї із “канонічних” за допомогою кусочно-гладких глобальних перетворень кола на себе, а також отримано формули для розрахунку кількості нееквівалентних реалізацій.

Проблема опису реалізацій алгебр Лі векторними полями має широке застосування, зокрема, для побудови диференціальних рівнянь із частинними похідними з відповідною алгеброю інваріантності, для пошуку точних розв’язків. Однак ця проблема недостатньо досліджена систематично. Вперше реалізації алгебри Лі на прямій і площині розглянув С. Лі. І тільки майже через століття після досліджень Лі дослідження з цієї тематики відновилися на регулярній основі. Різні напрями цієї проблеми представлені, зокрема, в роботах [González-López A., Kamran N. and Olver P.J., *Proc. London Math. Soc.* **64** (1992), 339–368] (вивчені реалізації диференціальних операторів першого порядку спеціальної форми), [Yehorchenko I.A., *Inst. of Math. of NAS of Ukraine, Kyiv* (1992), 62–66; Zhdanov R.Z., Lahno V.I. and Fushchych W.I., *Comm. Math. Phys.* **212** (2000), 535–556; Nesterenko M., Posta S., Vaneeva O., *J. Phys. A: Math.*

Theor. **49** (2016), 115203, 26 pp.], де розглядалися реалізації фізичних алгебр (Галілея, Пуанкаре та Евкліда). Систематичне дослідження нееквівалентних реалізацій дійсних алгебр Лі розмірності не більше чотирьох векторними полями у просторі з довільною кількістю змінних було проведено в роботі [Porovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O. and Lutfullin M.W., *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 7337–7360; arXiv:math-ph/0301029], де можна знайти більш повний огляд даної проблеми та список посилань.

У представлених роботах дослідження реалізацій алгебр Лі векторних полів розглядаються з точністю до локальних перетворень еквівалентності. Класифікація реалізацій алгебр на деякому многовиді з точністю до глобальних перетворень еквівалентності (на всьому многовиді) є більш складною проблемою, яка, на відміну від локальної теорії, вимагає інших методів досліджень. Лише в декількох роботах (див., зокрема, в [Стригунова М.С., *Тр. МИАН* **236** (2002), 338–342]) були зроблені спроби класифікувати реалізації алгебри Лі векторних полів на деякому многовиді в “цілому”. У цих роботах доведено, що існують три алгебри, а саме одновимірні, некомутативні двовимірні і тривимірні алгебра $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, які можна реалізувати аналітичними векторними полями на колі.

Побудовано в явному вигляді всі нееквівалентні реалізації на колі скінченновимірних алгебр з ненульовим фактором Леві, а також описано реалізації відомих розв’язних алгебр (розмірності не вище п’яти) в класі векторних полів, який не обмежується вимогою аналітичності, як це розглядалося у вищезгаданій роботі М.С. Стригунової.

На колі S^1 вводимо параметр $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Будемо вважати, що при збільшенні параметра θ відповідна точка на колі рухається за годинниковою стрілкою. Векторне поле на S^1 можна представити як векторне поле $v(\theta)\partial_\theta$, де $v(\theta)$ — гладка дійсна функція на колі. Також, можна вважати, що $\theta \in \mathbb{R}$, а $v(\theta)$ є гладкою 2π -періодичною функцією на прямій.

Точку θ_0 будемо й надалі називати *особливою точкою* векторного поля $v(\theta)\partial_\theta$, якщо $v(\theta_0) = 0$. Позначимо через $\mathcal{C}$ клас векторних полів $v(\theta)\partial_\theta$, таких що:

- не існують інтервалів на яких $v(\theta) = 0$, тобто інтервалів з особливих точок;
- функції $v(\theta)$ є неперервно-диференційовними, що природно вимагати при обчисленні комутаторів двох векторних полів.

Також, введемо клас перетворень $f: S^1 \rightarrow S^1$ кола на себе, які визначаються наступними властивостями:

- це є взаємно-однозначне відображення кола на себе;
- $f(\theta)$ є неперервним в будь-якій точці $\theta \in S^1$;
- воно є неперервно-диференційоване в усіх точках окрім скінченного їх числа;
- похідна $f'(\theta)$ прямує до $-\infty$ або $+\infty$ в усіх точках її розриву;
- при зміні координати $\tilde{\theta} = f(\theta)$ векторне поле із класу $\mathcal{C}^1$ перетворюється у векторне поле того самого класу.

Клас перетворень із зазначеними властивостями визначає *перетворення еквівалентності* векторних полів. Позначимо його через $\mathcal{F}$. Будемо називати дві реалізації алгебри векторних полів *нееквівалентними*, якщо неможливо перетворити реалізацію з однієї в іншу шляхом композиції перетворень еквівалентності з класу $\mathcal{F}$. Отже, нас цікавлять усі нееквівалентні відносно перетворень $\mathcal{F}$ реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторних полів з класу $\mathcal{C}$.

Ступінь відображення, яке відповідає функції f , є $\deg f = \pm 1$. Визначимо наступні підкласи перетворень $\mathcal{F}$:

- $\mathcal{F}_0^+$ – перетворення, які мають нерухому нульову точку ($f(0) = 0$), і $\deg f = 1$;
- O_φ – поворот кола на кут φ (в напрямку годинникової стрілки);
- T – дзеркальне відображення кола відносно осі, що проходить через центр кола і нульову точку на ньому.

Нескладно побачити, що будь-яке перетворення з класу $\mathcal{F}$ є композицією перетворень з цих трьох підкласів. Очевидно, що якщо перетворення $f(\theta) \in \mathcal{F}_0^+$, то воно є монотонним на всьому відкритому проміжку $0 \leq \theta < 2\pi$. Якщо $f(\theta) \in T$, то $\deg f = -1$, а якщо $f(\theta) \in O_\varphi$, то $\deg f = 1$.

У наступних пунктах розглядаються двовимірні алгебри, а також доводяться допоміжні леми, які необхідні для класифікації реалізацій некомутативної алгебри. Далі виконано класифікацію реалізацій, нееквівалентних відносно перетворень з класу $\mathcal{F}_0^+$. Потім завершено класифікацію реалізацій двовимірної некомутативної алгебри і алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ відносно перетворень O_φ і T , а також представлено комбінаторні формули для обчислення кількості відповідних нееквівалентних реалізацій.

Комутативна алгебра $A_{2,1} = A_1 \oplus A_1$. Позначимо і надалі векторні поля $v(\theta)\partial_\theta$ і $w(\theta)\partial_\theta$ відповідно як $V, W \in \mathcal{C}$. Нехай вони комутують. Особливу точку θ_0 векторного поля V назовемо *виродженою*, якщо $v'(\theta_0) = 0$. Легко показати, що якщо $0 \leq \theta_0 < \theta_1 < 2\pi$ дві вироджені точки такі, що інтервал (θ_0, θ_1) не містить вироджених точок, то $w(\theta) = \lambda v(\theta)$ на (θ_0, θ_1) , де $\lambda \neq 0$ – довільна константа. Це випливає з того, що $W \in \mathcal{C}$ (неперервність похідних функцій $v(\theta)$ і $w(\theta)$). Зокрема, якщо немає вироджених точок, або є лише одна вироджена точка, то $w(\theta) = \lambda v(\theta)$ на S^1 . У цьому випадку векторні поля V і W лінійно залежні і тоді немає реалізації двовимірної комутативної алгебри Лі.

Припустимо, що є більше однієї виродженої точки для функції $v(\theta)$. Без втрати загальності, можна вважати, що точка 0 (і відповідно 2π) є виродженою. Тоді функція $w(\theta)$ може бути описана наступним чином. Візьмемо довільну точку $\theta \in S^1$. Якщо вона не вироджена для функції $v(\theta)$, то, очевидно, існує максимальний відрізок $[\theta_0, \theta_1]$ з двома виродженими кінцевими точками на ньому так, що $0 \leq \theta_0 < \theta < \theta_1 < 2\pi$. Тому $w(\theta) = \lambda v(\theta)$ на цьому відрізку.

Далі розглянемо точку $\theta' \notin [\theta_0, \theta_1]$ і, якщо вона не вироджена, повторюємо процедуру. Знову маємо співвідношення $w(\theta) = \lambda' v(\theta)$ на де-

якому відрізку (не на $[\theta_0, \theta_1]$). Причому, коефіцієнти λ і λ' можуть бути неоднаковими. Якщо точка θ' є виродженою, то в силу того, що $V \in \mathcal{C}$, можна знайти будь як близько від неї невироджену точку $\theta'' \notin [\theta_0, \theta_1]$. Отже, повторюємо наведену вище процедуру для θ'' . Таким чином, весь відрізок $[0, 2\pi]$ розбивається на відрізки (можливо на нескінченну кількість) з кінцевими виродженими точками. На цих відрізках функція $w(\theta)$ пропорційна функції $v(\theta)$ з ненульовими різними коефіцієнтами пропорційності.

Реалізації розв'язних алгебр. А) Реалізації алгебри $A_{2,2}$. Нехай векторні поля V і W генерують некомутативну алгебру. Можна припустити (з точністю до їх лінійної комбінації), що вони задовольняють комутаційне співвідношення $[V, W] = W$, що еквівалентно такій умові для функцій $v(\theta)$ і $w(\theta)$:

$$v(\theta)w'(\theta) - v'(\theta)w(\theta) = w(\theta). \quad (11.12)$$

Враховуючи допоміжні леми, аналіз класифікації призводить до наступного результату.

Теорема 11.3. *Будь-яка реалізація двовимірної некомутативної алгебри $A_{2,2}$ векторних полів на колі еквівалентна*

$$A_{2,2}^n = \left\langle \sigma^n(\theta)(1 - \cos(n\theta))\partial_\theta, \frac{1}{n} \sin(n\theta)\partial_\theta \right\rangle, \quad (11.13)$$

де $n \in \mathbb{N}$, функція $\sigma^n(\theta)$ дорівнює або 1, або -1 на відрізках

$$\left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n} \right], \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Б) Реалізації алгебр $A_{k,i}$ розмірності більше ніж два. Відомо, що задача класифікації неізоморфних розв'язних алгебр Лі розв'язана лише для дійсних алгебр Лі до шостого порядку включно (див., наприклад, [Turkowski P., *J. Math. Phys.* **31**(6) (1990), 1344–1350]). Тут наводимо реалізації розв'язних алгебр Лі на колі над полем $\mathbb{R}$, розмірність яких

не перевищує п'яти. Будемо користуватися позначеннями [Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І., *Інститут математики НАН України, Київ, 2002*]. Там описані комутаційні співвідношення як нерозкладних алгебр $A_{k,i}$ розмірності k (i – порядковий номер), так і розкладних в пряму суму алгебр. Нехай серед базисних елементів алгебри є такі e_l, e_m, e_n , що $[e_l, e_m] \neq 0$, $[e_l, e_n] = [e_m, e_n] = 0$. Очевидно, що реалізацій на колі таких алгебр не існує. Дійсно, з останніх умов випливає, що $e_l \sim e_n$, $e_m \sim e_n$, тоді $e_l \sim e_m$ і $[e_l, e_m] = 0$, що суперечить першій умові. Це твердження виключає можливі реалізації на колі багатьох розв'язних алгебр, наприклад усіх розкладних.

Також, нескладно переконатися, що майже всі нерозкладні алгебри також виключаються. Наприклад, нехай існує реалізація на колі алгебри $A_{3,9}$ з ненульовими комутаційними співвідношеннями

$$[e_1, e_3] = qe_1 - e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1 + qe_2, \quad (q > 0).$$

З цих співвідношень випливає, що $e_1 \sim e_2$, тобто локально на деякому інтервалі виконуються умови $e_2 = \lambda e_1$, $[e_1, e_3] = (q - \lambda)e_1$, $[\lambda e_1, e_3] = (1 + q\lambda)e_1$ звідки отримуємо $\lambda(q - \lambda) = (1 + q\lambda)$, що неможливо, якщо $\lambda \in \mathbb{R}$.

Аналогічний аналіз стосовно інших розв'язних алгебр призводить до такого результату.

Теорема 11.4. *Існують наступні реалізації розв'язних алгебр $\mathcal{L}i A_{k,i} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ векторних полів на колі ($k \leq 5$):*

$A_{3,1} = 3A_1$, де $e_1 \sim e_2 \sim e_3$;

$A_{3,5}$, де $e_2 \sim e_1$, $\langle e_1, e_3 \rangle$ утворюють реалізації $A_{2,2}^n$ алгебри $A_{2,2}$ в теоремі 11.3;

$4A_1$, де $e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim e_4$;

$A_{4,5}$ ($q = p = 1$), де $e_2 \sim e_1$, $e_3 \sim e_1$, $\langle e_1, e_4 \rangle = A_{2,2}^n$;

$5A_1$, де $e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim e_4 \sim e_5$;

$A_{5,7}$ ($q = p = r = 1$), де $e_2 \sim e_1$, $e_3 \sim e_1$, $e_4 \sim e_1$, $\langle e_1, e_5 \rangle = A_{2,2}^n$.

Алгебри з ненульовим фактором Леві. Як відомо, довільна алгебра Лі може бути представлена напівпрямою сумою розв'язної і напівпростої підалгебр. Якщо ця напівпроста підалгебра (фактор Леві) ненульова, то алгебра містить просту підалгебру. Були отримані наступні результати

Теорема 11.5. *Якщо розмірність простої алгебри векторних полів більше трьох, то для неї не існує її реалізації на колі.*

Як відомо, існує лише дві прості алгебри розмірності не вище ніж 3: $\mathfrak{so}(3)$ і $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Реалізацій алгебри $\mathfrak{so}(3)$ векторних полів на прямій (а тому і на колі) не існує (див. напр. [Стригунова М.С., *Тр. МИАН* **236** (2002), 338–342]). Розглянемо алгебру $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Доведено наступну теорему.

Теорема 11.6. *Будь-яка реалізація алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ векторних полів на колі еквівалентна*

$$\left\langle \sigma^n(\theta)(1 - \cos(n\theta))\partial_\theta, \frac{1}{n} \sin(n\theta)\partial_\theta, \frac{\sigma^n(\theta)}{n^2}(1 + \cos(n\theta))\partial_\theta \right\rangle, \quad (11.14)$$

де $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^n(\theta) = \pm 1$ на відрізках

$$\left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n} \right], \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Далі, якщо фактор Леві є напівпростою алгеброю, тобто прямою сумою простих алгебр, то реалізацій таких алгебр не існує, як було показано в попередньому параграфі перед теоремою 11.4.

Нарешті, якщо розглядати напівпрямі суми алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ (як фактора Леві) і розв'язних алгебр (тих, які відомі на сьогодні), то можна довести, що відповідних алгебр в одновимірному випадку, і, зокрема, на колі, не існує. Для цього достатньо розглянути всі випадки таких алгебр, де розв'язна підалгебра (радикал) співпадає з однією із алгебр, які наведені в теоремі 11.4. Враховуючі комутаційні співвідношення між операторами алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ і відповідними операторами розв'язних алгебр (радикалів), отримуємо протиріччя.

Отже, теореми 11.3, 11.4 і 11.6 дають перелік усіх можливих реалізацій некомутативних алгебр Лі векторних полів на колі.

Деякі комбінаторні формули. У теоремі 11.3 знайдено всі нееквівалентні реалізації на колі (11.13) двовимірної некомутативної алгебри $A_{2,2}$ відносно перетворень $\mathcal{F}_0^+$. Однак, серед цих реалізацій є такі, які еквівалентні відносно перетворень O_φ (поворотів) і T (інверсії) (див. означення перетворень у вступі). Якщо опишемо кількість реалізацій цієї алгебри, які нееквівалентні відносно всіх трьох вказаних перетворень, тобто кількість наборів відповідних функцій $\sigma^n(\theta)$, то, в силу теорем 11.3 і 11.6, така ж сама кількість нееквівалентних реалізацій буде і для алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

А) Нееквівалентні реалізації на колі відносно поворотів. Опишемо спочатку реалізації, які еквівалентні відносно перетворень O_φ , а також знайдемо їх кількість. Очевидно, що якщо деяка пара реалізацій еквівалентна відносно поворотів кола на кут φ , то кількість n особливих точок відповідних полів W і $\bar{W}$ співпадає і при цьому $O_\varphi = O_{\varphi_k} \equiv O_k$, де $\varphi_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. У реалізації (11.13) сигнатурою довжиною n назвемо вектор $\sigma^n = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$, де $\sigma_k = \pm 1$ і співпадають з відповідними значеннями функції $\sigma^n(\theta)$ на відрізках $[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n}]$. Тоді, ця реалізація за допомогою поворотів O_k перетворюється в реалізацію (11.13) з сигнатурою $\tilde{\sigma} = O_k(\sigma) = (\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1})$, де $\tilde{\sigma}_i = \sigma_{n-k+i \pmod n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Такі сигнатури σ і $\tilde{\sigma}$ назвемо еквівалентними відносно поворотів O_k . Таким чином, вся множина сигнатур однакової довжини (тобто реалізацій (11.13)) розпадається на класи еквівалентності відносно поворотів. Реалізації з сигнатурами різної довжини, очевидно, є нееквівалентними.

Нехай $d \in \mathbb{N}$ ($1 \leq d \leq n$) таке мінімальне число, що $O_d(\sigma) = \sigma$ (воно існує, оскільки $O_n(\sigma) \equiv \sigma$). Таку сигнатуру назвемо d -періодичною. Тоді неважко переконатися, що:

- d є дільник n : $d|n$;

– якщо $d \neq d'$, то d - і d' -періодичні сигнатури нееквівалентні.

Введемо такі позначення:

L^n — кількість класів еквівалентності сигнатур довжини n ;

M_d^n — кількість класів еквівалентності d -періодичних сигнатур довжини n ;

N_d^n — кількість різних (можливо еквівалентних) d -періодичних сигнатур довжиною n .

Оскільки при поворотах d -періодична сигнатура σ перетворюється в d -періодичну сигнатуру $\tilde{\sigma}$, а також сигнатури σ і $O_k(\sigma)$ різні, якщо $k < d$, то кожний клас M_d^n містить d різних сигнатур, і тоді $N_d^n = dM_d^n$. Далі, якщо $d|n$, то, очевидно, що $N_d^n = N_d^d$ і ми маємо:

$$L^n = \sum_{d|n} M_d^n = \sum_{d|n} \frac{N_d^n}{d} = \sum_{d|n} \frac{P_d}{d}, \text{ де } P_d = N_d^d \quad (11.15)$$

(тут і далі мається на увазі сума по всіх дільниках d числа n). Оскільки повна кількість усіх різних сигнатур дорівнює 2^n , то

$$\sum_{d|n} N_d^n = \sum_{d|n} P_d = 2^n. \quad (11.16)$$

Очевидно, що $P_1 = 2$ (сигнатура σ_0 дорівнює або 1, або -1). Таким чином, маємо рекурентну формулу (11.16) для обчислення P_d і далі по формулі (11.15) можна знайти кількість L^n класів еквівалентності сигнатур.

Знайдемо формулу для обчислення величин L^n і P_d . Для цього введемо такі позначення. Нехай n розкладається на прості числа:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}, \quad \alpha_i > 0.$$

Вважаємо далі, що n і, відповідно, числа s , p_i і α_i фіксовані. Далі позначимо наступні три вектора: $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$, де $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ — натуральні числа, $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s)$, де $\varepsilon_i = \{0; 1\}$.

Можно довести наступну теорему.

Теорема 11.7. Нехай $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_s^{\beta_s}$ дільник числа n , тобто $\beta_i \leq \alpha_i$ (позначимо, що $\vec{\beta} \leq \vec{\alpha}$). Введемо також такі позначення: $\{\vec{\gamma}\} = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_s^{\gamma_s}$, $|\vec{\varepsilon}| = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_s$. Тоді виконується наступне співвідношення

$$P_d = P_{\{\vec{\beta}\}} = \sum_{\vec{\varepsilon} \leq \vec{\beta}} (-1)^{|\vec{\varepsilon}|} 2^{\{\vec{\beta} - \vec{\varepsilon}\}}. \quad (11.17)$$

Враховуючи формулу (11.15) маємо, що кількість класів еквівалентності сигнатур довжини n є

$$L_n = L_{\{\vec{\alpha}\}} = \sum_{\vec{\beta} \leq \vec{\alpha}} \frac{1}{\{\vec{\beta}\}} \sum_{\vec{\varepsilon} \leq \vec{\beta}} (-1)^{|\vec{\varepsilon}|} 2^{\{\vec{\beta} - \vec{\varepsilon}\}}. \quad (11.18)$$

Б) Нееквівалентні реалізації на колі відносно інверсій. Розглянемо інверсії T кола відносно “вертикальної” осі, тобто перетворення для якого степінь відображення $\deg T = -1$, що $\theta \rightarrow \theta' = 2\pi - \theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Неважко переконатися, що при перетворенні T реалізація з сигнатурою σ перетворюється в реалізацію з сигнатурою $\tilde{\sigma} = T(\sigma) = (-\sigma_{n-1}, -\sigma_{n-2}, \dots, -\sigma_0)$. Тоді деякі нееквівалентні відносно поворотів O_k сигнатури (і відповідно реалізації алгебр), які належать одному із L_n класів еквівалентності (назвемо її O -еквівалентністю), можуть бути еквівалентними відносно інверсії. Оскільки має місце співвідношення $O_k T = T O_{-k}$, то легко показати, що під дією інверсії множина елементів будь-якого класу O -еквівалентності взаємно-однозначно відображається в множину елементів деякого класу O -еквівалентності. Таким чином, кількість класів еквівалентності відносно перетворень O_k і T менша ніж L_n . Позначимо число K_n як кількість таких класів. Має місце наступна теорема.

Теорема 11.8. Множина реалізацій алгебри $A_{2,2}$ (або $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \supset A_{2,2}$) векторних полів на колі, для яких векторне поле W (базисний елемент алгебри — див. (11.12)) має n особливих точок, розпадається на класи

еквівалентності відносно множини перетворень $\mathcal{F}$ кола на себе. Кількість K_n таких класів є наступним:

а) якщо n є непарне число, то $K_n = \frac{L_n}{2}$.

б) якщо n є парне число, то $K_n = \frac{L_n + I_n}{2}$, де I_n — кількість таких класів еквівалентності відносно перетворень O_k , елементи яких мають сигнатури з однаковим числом позитивних і негативних компонент σ_i і які інваріантні відносно інверсії T . Якщо $n = 2k$, то $I_n = 2^{k-1}$.

Теореми 11.7 і 11.8 завершують повну класифікацію реалізацій на колі двовимірної некомутативної алгебри $A_{2,2}$ і алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

12 Контракції реалізацій алгебр Лі

Для дослідження граничних переходів між різними теоріями, моделями чи рівняннями, що інваріантні відносно певних алгебр Лі, важливо не лише отримати контракцію, що пов'язує структурні сталі алгебр, а й побудувати відповідний зв'язок між операторами симетрій, тобто між реалізаціями цих алгебр чи їх зображеннями.

На жаль, пряме застосування матриці контракції до базисних елементів зображень або реалізацій та подальший перехід до границі не-ефективні, оскільки в результаті є неточні зображення та реалізації. Почнемо з кількох прикладів контракцій і реалізацій та спробуємо їх поєднати.

Розглянемо тривимірну абелеву алгебру $3A_1$, алгебру Гейзенберга $A_{3.1}$ з ненульовим комутаційним співвідношенням $[e_2, e_3] = e_1$, та тривимірну алгебру $A_{3.2}$ з ненульовими комутаторами $[e_1, e_3] = e_1$ та $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$.

Кожна з цих алгебр має єдину породжуючу реалізацію, тобто реалізацію у просторі такої самої кількості змінних як і розмірність алгебри:

$$3A_1: R(e_1) = \partial_1, R(e_2) = \partial_2, R(e_3) = \partial_3;$$

$$A_{3.1}: R(e_1) = \partial_1, R(e_2) = \partial_2, R(e_3) = x_2\partial_1 + \partial_3;$$

$$A_{3.2}: R(e_1) = \partial_1, R(e_2) = \partial_2, R(e_3) = (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3.$$

Для цих алгебр існує три нееквівалентні контракції: $A_{3.2} \rightarrow A_{3.1}$ з матрицею діагональної контракції Іньюн–Вігнера $U(\varepsilon) = \text{diag}(\varepsilon, 1, \varepsilon)$, $A_{3.2} \rightarrow 3A_1$ та $A_{3.1} \rightarrow 3A_1$ з тією самою матрицею ІВ-контракції $U(\varepsilon) = \text{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)$.

Застосувавши ці матриці контракції до вищенаведених реалізацій, в усіх випадках отримаємо неточні реалізації

$$A_{3.2} \rightarrow A_{3.1}: R^\varepsilon(e_1) = \varepsilon\partial_1 \rightarrow 0, R^\varepsilon(e_2) = 1 \cdot \partial_2 \rightarrow \partial_2, R^\varepsilon(e_3) = \varepsilon\partial_3 \rightarrow 0;$$

$$A_{3.2} \rightarrow 3A_1 \text{ та } A_{3.1} \rightarrow 3A_1: R^\varepsilon(e_1) \rightarrow 0, R^\varepsilon(e_2) \rightarrow 0, R^\varepsilon(e_3) \rightarrow 0.$$

Отриманий результат — передбачуваний і був зазначений у першій роботі Інью та Вігнера, що стосувалась контракцій зображень алгебр Лі. У випадку зображень проблему нульових матриць можна подолати додатковим перетворенням подібності, що залежить від параметра контракції, саме такий підхід було застосовано у роботі [De Montigny M., Niederle J., Nikitin A. G., *J. Phys. A* **39** (2006), 9365–9385].

Якщо узагальнити цей підхід на випадок реалізацій алгебр Лі, то слід подіяти на реалізацію ε -залежними перетвореннями з групи $\text{Aut}(\mathfrak{g})$, а також ε -залежними дифеоморфізмами многовиду M , але це призводить до громіздких та нерозв’язних обчислень.

Інший підхід до контракції реалізацій було запропоновано Інью та Вігнером та успішно застосовано у роботах [Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C., arXiv:0710.3049] та [Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., *J. Math. Anal. Appl.* **396** (2012) 225–242], а саме, було застосовано ε -залежне перетворення відповідної групи Лі. Суттєвим недоліком даного методу є те, що для побудови параметризованого перетворення, результат контракції має бути попередньо відомим.

Для контракції реалізацій пропонуємо метод, який полягає у побудові параметризованої реалізації початкової алгебри Лі, виходячи зі структурних сталих, що вже містять параметр контракції та збігаються до структурних сталих результуючої алгебри Лі.

Нехай базис векторного простору V зафіксовано $\{e_1, \dots, e_n\}$ і алгебри Лі $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$ на ньому визначаються своїми тензорами структурних сталих $(c_{ij}^k) \in \mathbb{R}^{n^3}$ (або $(c_{ij}^k) \in \mathbb{C}^{n^3}$), де $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Позначимо U_ε матрицю контракції з компонентами — функціями від ε , тоді структурні сталі параметризованих алгебр Лі $\mathfrak{g}_\varepsilon$ обчислюються за формулою

$$c_{\varepsilon, i'j'}^{k'} := (U_\varepsilon)_{i'}^i (U_\varepsilon)_{j'}^j (U_\varepsilon^{-1})_k^{k'} c_{ij}^k. \quad (12.1)$$

При цьому контракція алгебри $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{g}_0$ еквівалентна збіжності

структурних сталих $\forall i', j'$ та k'

$$c_{0,i'j'}^{k'} := \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} c_{\varepsilon,i'j'}^{k'} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (U_\varepsilon)_{i'}^i (U_\varepsilon)_{j'}^j (U_\varepsilon^{-1})_k^{k'} c_{ij}^k.$$

Оскільки породжуючі реалізації алгебр Лі співпадають з лівоінваріантними векторними полями та можуть бути відновлені з дуальних диференціальних 1-форм, які в свою чергу конструюються з приєднаних зображень (структурних сталих), то маючи параметризовані структурні сталі можна побудувати параметризовані реалізації, що збігатимуться до реалізації алгебри $\mathfrak{g}_0$. Алгоритм побудови параметризованої реалізації, що контракуватиме до реалізації результуючої алгебри контракції складається з трьох основних кроків:

1. Будуємо параметризовані структурні сталі $c_{\varepsilon,i'j'}^{k'}$, використовуючи матрицю контракції U_ε (яка реалізує потрібну нам контракцію), вихідні структурні сталі c_{ij}^k та формулу (12.1).
2. Використовуючи сталі $c_{\varepsilon,i'j'}^{k'}$, обчислюємо ε -залежні приєднані дії $\text{ad}^\varepsilon e_i$, експоненти $\exp(-x_i \text{ad}^\varepsilon e_i)$ та диференціальні 1-форми $\omega^\varepsilon(x)$.
3. Щоб отримати векторні поля $\xi^\varepsilon(x) = (\omega^\varepsilon(x))^{-1}$, які є шуканими параметризованими реалізаціями, знаходимо перетворення обернене до диференціальної 1-форми.

Застосувавши запропонований метод (кроки 1–3) до вищенаведених алгебр $3A_1$, $A_{3.1}$ та $A_{3.2}$, ми отримаємо добре визначені точні реалізації:

$$A_{3.1} \xrightarrow{\text{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)} 3A_1, \text{ звідси}$$

$$R^\varepsilon(e_1) = \partial_1 \rightarrow \partial_1, \quad R^\varepsilon(e_2) = \partial_2 \rightarrow \partial_2, \quad R^\varepsilon(e_3) = \varepsilon x_2 \partial_1 + \partial_3 \rightarrow \partial_3,$$

$$A_{3.2} \xrightarrow{\text{diag}(\varepsilon, 1, \varepsilon)} A_{3.1}, \text{ звідси}$$

$$R^\varepsilon(e_1) = \partial_1 \rightarrow \partial_1, \quad R^\varepsilon(e_2) = \partial_2 \rightarrow \partial_2,$$

$$R^\varepsilon(e_3) = (\varepsilon x_1 + x_2) \partial_1 + \varepsilon x_2 \partial_2 + \partial_3 \rightarrow x_2 \partial_1 + \partial_3,$$

$$A_{3.2} \xrightarrow{\text{diag}(\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon)} 3A_1, \text{ звідси}$$

$$R^\varepsilon(e_1) = \partial_1 \rightarrow \partial_1, \quad R^\varepsilon(e_2) = \partial_2 \rightarrow \partial_2, \quad R^\varepsilon(e_3) = (\varepsilon x_1 + \varepsilon x_2) \partial_1 + \varepsilon x_2 \partial_2 + \partial_3 \rightarrow \partial_3.$$

Зауважимо, що запропонований метод контракції реалізацій стосується породжуючих реалізацій. Для побудови контракції довільної реалізації потрібно встановити відповідну їй підалгебру (знайти ядро лінійного перетворення у початковій точці), належним чином впорядкувати базис для побудови диференціальної 1-форми та виконати проєкцію отриманої реалізації на підпростір, що комплементарний до підалгебри.

Для контракції зображень алгебр Лі може бути застосована аналогічна процедура, тобто матричне зображення слід будувати виходячи з параметризованого тензора структурних сталих, що задається формулою (12.1). Для зображень, порядок яких співпадає з розмірністю алгебри Лі, існує інший спосіб побудови контракцій. Він полягає у зв'язку зображень та реалізацій з лінійними коефіцієнтами, розглянемо його детальніше. Нехай n -вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g}$ реалізовано векторними полями вигляду $e_i = a_{ik}^l x_l \partial_k$, $i = 1, 2, \dots, n$, $a_{ik}^l \in \mathbb{R}$ (або $a_{ik}^l \in \mathbb{C}$), а $k, l = 1, 2, \dots, m$. Розглянемо набір матриць

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{i1}^1 & a_{i2}^1 & \cdots & a_{im}^1 \\ a_{i1}^2 & a_{i2}^2 & \cdots & a_{im}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}^m & a_{i2}^m & \cdots & a_{im}^m \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_m \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Базисні елементи реалізації можна переписати у вигляді $e_i = X A_i D$. З того, що $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, випливає, що матриці A_i задовольняють ті самі комутаційні співвідношення $[A_i, A_j] = c_{ij}^k A_k$. Таким чином, $m \times m$ матриці A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ утворюють m -вимірне зображення алгебри $\mathfrak{g}$. Отже, якщо існує взаємно-однозначна відповідність між зображенням та лінійною реалізацією, то контракція реалізації є одночасно і контракцією зображення. Важливо зауважити, що, у загальному випадку, розглянутий метод побудови реалізацій, призводить до нелінійних реалізацій, тому додатково необхідно розв'язати задачу зведення лінійної реалізації до канонічного вигляду, що відповідає проєкції векторних полів за підалгеброю.

13 Застосування квазікристалів до обробки даних

Розглянемо задачу про рівномірний розподіл втрачених або пошкоджених даних під час передачі або зберігання інформації, тобто задачу про порядок передачі і організацію даних таким чином, щоб втрачені дані не були локально зосереджені в певних місцях. Варто зауважити, що підхід який ми пропонуємо, автоматично захищає дані від прямого розголошення і спотворення на рівні переставних методів шифрування. Відповідно до вимог, ми можемо створювати як кодування без ключа, так і кодування з симетричним ключем.

Процедура обробки даних базується на дискретних аперіодичних наборах точок, які називаються модельними множинами або квазікристалами. Взагалі кажучи, алгоритм базується на перестановці координат даних або значень даних відповідно до впорядкованих дискретних множин які є строго аперіодичними (немає періодичних підмножин) та мають пов'язане з ними всюди розривне відображення. Метод дозволяє досягнути двох основних цілей

- оптимізація порядку передачі даних, що дозволяє при невеликій кількості даних мати інформацію про весь об'єкт, а не тільки про його локальну частину;
- ефективне відновлення пошкоджених даних методом інтерполяції, оскільки значення функції втрачаються лише в дискретних точках, а не неперервних інтервалах;
- покращення загальної ситуації зі втратою інформації коли пошкодження є періодичними або локалізованими.

Для початку у розділі 13.1 сформулюємо необхідні математичні означення та наведемо загальну ідею кодування у розділі 13.2, після чого обговоримо обчислювальні аспекти у розділі 13.3. Для перевірки ефективності запропонованого алгоритму у розділі 13.4 представлено та обговорено запропонований метод для випадку кодування растрових зобра-

жень. Переваги підходу полягають у швидкості обчислень і можливості його безпосереднього узагальнення на дані більшої розмірності. Цей метод може бути ефективно застосований для прискорення візуалізації у випадку, коли необхідно завантажити або передати об'ємні дані, наприклад, при відображенні голограм та інших багатовимірних об'єктів. Це дозволяє отримати розмиту, але загальну картину навіть з найменшою кількістю даних і поступово деталізувати її відповідно до надходження наступної інформації.

13.1 Математичні компоненти

Квазікристали, квазікристалічні фотонні кристали, хвильові експерименти Фарадея та ряд інших фізичних об'єктів і явищ демонструють властивості майже періодичності. Типовим прикладом є потенціальне поле фізичного квазікристала. Характерною для квазікристалів є структурована далекосяжна впорядкованість, але при цьому відсутній періодичний порядок. Таким чином, потенціал є неперіодичною функцією, але належить до множини майже періодичних функцій.

Зазвичай подібні структури моделюються за наступною схемою: беремо скінченну частину об'єкта дослідження, накладаємо періодичні крайові умови, дискретизуємо і зводимо об'єкт до періодичного апроксиманта та застосовуємо звичайну кристалографію. Незважаючи на те, що подібний підхід досить успішно застосовується у багатьох задачах з моделювання, він не є цілком задовільним, оскільки майже періодичний порядок принципово відрізняється від періодичного порядку і неспіврозмірність, що лежить в основі квазікристалів проникає в кожную з частин теорії.

Станом на зараз використовують три основні підходи до побудови d -вимірних ($d = 1, 2, \dots$) квазікристалів: замощення, фрактальний поділ (дефляція або подрібнення) та метод перерізів і проєкцій.

Нашою метою є побудувати одновимірний аперіодичний дискретний

набір виходячи з двовимірної ґратки. Для початку оберемо дві прямі лінії $V_1: y = \tau x$ та $V_2: y = \tau' x$, що перетинаються у початку координат, та розглянемо квадратну ґратку $\mathbb{Z}_2$ (див. Рис. 13.1). Тут τ і τ' — два

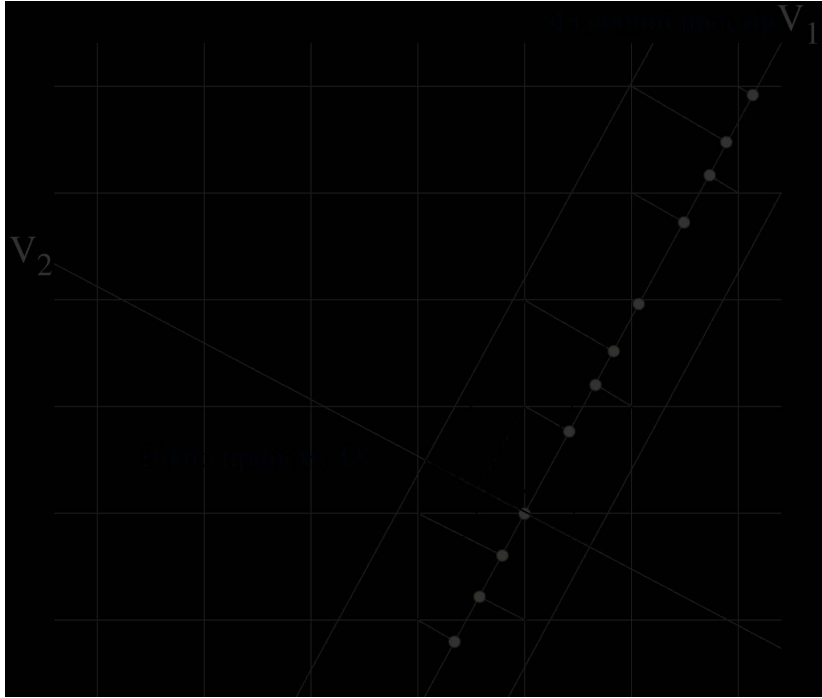


Рис. 13.1: Побудова одновимірного квазікристалу з ґратки $\mathbb{Z}_2$

ірраціональні числа, які можна обрати нескінченною кількістю способів, наприклад, у випадку Фібоначчі $\tau = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ і $\tau' = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, зауважимо, що прямі V_1 і V_2 у цьому випадку ортогональні.

Одна з прямих, скажімо V_1 , грає роль фізичного простору на який проєктується ‘переріз’ ґратки $\mathbb{Z}_2$ щоб отримати квазікристал. У напрямку V_2 ми обираємо скінчений напіввідкритий інтервал Ω . Точка ґратки $\mathbb{Z}_2$ стає точкою квазікристалу після проєкції на V_1 , за умови що проєкція цієї ж точки на пряму V_2 потрапляє в Ω , тобто вона знаходиться у ‘перерізі’.

Позначимо розширення цілих чисел як $\mathbb{Z}[\tau]$, тобто це всі дійсні числа вигляду $(a + b\tau)$, з цілими a та b .

Відображення $(\cdot)'$ між точкою квазікристалу $(a + b\tau)$ та точкою $(a +$

$b\tau'$) вікна Ω задається співвідношеннями

$$\begin{aligned} (\cdot)' : \mathbb{Z}[\tau] &\longrightarrow \mathbb{Z}[\tau'], \\ (a + b\tau) &\mapsto (a + b\tau'), \quad a, b \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Важливо зазначити, що існує нескінченний вибір ірраціональних пар τ і τ' можна використати розв'язки двох нескінчених серій квадратних рівнянь $x^2 = mx + 1$, $m = 1, 2, \dots$ або $x^2 = mx - 1$, $m = 3, 4, \dots$

Одновимірний *квазікристал* або *множина перерізу та проєкції* $\Lambda_\tau(\Omega)$ описується таким чином.

Нехай Ω це скінченний інтервал, а τ і τ' — ірраціональні числа, тоді

$$\Lambda_\tau(\Omega) = \{a + b\tau \mid a, b \in \mathbb{Z}, a + b\tau' \in \Omega\},$$

де Ω це *вікно прийому* квазікристала $\Lambda_\tau(\Omega)$.

Підкреслимо, що означений тут квазікристал $\Lambda_\tau(\Omega)$ є нескінченною та однорідно дискретною точковою множиною, в той час як вікно Ω це скінченний інтервал, щільно покритий $(\cdot)'$ -перетворенням точок з $\Lambda_\tau(\Omega)$.

З означення $\Lambda_\tau(\Omega)$ можна вивести ряд властивостей квазікристала, зокрема аперіодичність та розривність $(\cdot)'$ -перетворення та існування лише двох або трьох різних відстаней між сусідніми точками квазікристала $\Lambda_\tau(\Omega)$. Наведемо дві наступні теореми.

Нехай Ω — це напіввідкритий інтервал. Для кожної множини $\Lambda_\tau(\Omega)$ існують додатні числа $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{Z}[\tau]$, такі, що відстань між двома сусідніми точками у $\Lambda_\tau(\Omega)$ набуває значень з множини $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 + \Delta_2\}$. Відстані залежать лише від τ, τ' та довжини вікна Ω .

Залежність кількості можливих відстаней між сусідніми точками квазікристала від довжини вікна виражається співвідношенням

$$\{x_{n+1} - x_n \mid n \in \mathbb{Z}\} = \begin{cases} \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 + \Delta_2\}, \\ \text{якщо } |\Delta'_1 - \Delta'_2| > |\Omega|, \\ \{\Delta_1, \Delta_2\}, \\ \text{якщо } |\Delta'_1 - \Delta'_2| = |\Omega|. \end{cases}$$

Зауважимо, що не існує аналогічних відстаней для перетворених точок x' у вікні Ω , тому $(\cdot)'$ -перетворення не можна розглядати як передбачуване перетворення.

Можна встановити загальну масштабну властивість квазікристалів: Для довільних ірраціональних чисел $\tau, \tau', \tau \neq \tau'$ та обмеженого інтервалу Ω , існують $\tilde{\tau}' \in (-1, 0), \tilde{\tau} > 0, s \in \mathbb{R}$ та $\tilde{\Omega}$ (що задовольняють умові $\max\{1 + \tilde{\tau}', -\tilde{\tau}'\} < |\tilde{\Omega}| \leq 1$), такі що

$$\Lambda_{\tau}(\Omega) = s\Lambda_{\tilde{\tau}}(\tilde{\Omega}).$$

Більш того, відстані між сусідніми точками у $\Lambda_{\tilde{\tau}}(\tilde{\Omega})$ рівні числам $\tilde{\tau}, 1 + \tilde{\tau}, 1 + 2\tilde{\tau}$, коли $|\tilde{\Omega}| \neq 1$ та числам $\tilde{\tau}, 1 + \tilde{\tau}$, коли $|\tilde{\Omega}| = 1$.

Остаточно підкреслимо, що одновимірний квазікристал $\Lambda_{\tau}(\Omega)$ — це нескінченний дискретний аперіодичний набір точок, однозначно визначений вибором τ, τ' та вікна $\Omega = [c, c + d)$, де c та d довільні дійсні числа. Не втрачаючи загальності, ми можемо розглядати $\tau' \in (-1, 0), \tau > 0, c = 0$ та $d \in (\max\{1 + \tau', -\tau'\}, 1]$. Більш того, завдяки масштабуванню можна виключити з розгляду випадки коли ті самі частини різних квазікристалів Λ_1 і Λ_2 , таких, що $\Lambda_1 = s\Lambda_2$ призводять до того самого кодування.

Насамкінець підкреслимо, що одновимірний квазікристал $\Lambda_{\tau}(\Omega)$ є нескінченним дискретним аперіодичний набір точок, однозначно визначений вибором τ, τ' і вікно $\Omega = [c, c + d)$, де c і d — будь-які дійсні числа. Без втрати загальності ми можемо розглянути $\tau' \in (-1, 0), \tau > 0, c = 0$ і $d \in (\max\{1 + \tau', -\tau'\}, 1]$. Тому, використовуючи властивості одновимірних квазікристалів, ми можемо уникнути побудови проєкцій на фізичний і внутрішній простір, а натомість перевірити, чи належить спряжене число вікну.

У випадку вищих розмірностей досить застосувати декартів добуток одновимірних квазікристалів, наприклад, у ортогональних напрямках або виконати проєкцію непрямокутних ґраток вищих розмірностей.

Загальна ідея методу перерізів та проєкцій у d -вимірному випадку дуже схожа і наведена на схемі

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^d & \xleftarrow{\parallel} & \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\perp} & \mathbb{R}^d \\ & & \cup & & \\ L & \xleftarrow{1-1} & \tilde{L} & \xrightarrow{\text{dense image}} & L' \end{array}$$

Тут $\tilde{L}$ це ґратка у $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ яка орієнтована таким чином, що її проєкції на $\mathbb{R}^d$ будуть $1 - 1$ та щільна.

Ліворуч $\mathbb{R}^d$ це *фізичний простір* (де лежить квазікристал Λ), а праворуч $\mathbb{R}^d$ це *внутрішній простір* (використовується для контролю проєкції) $\tilde{x} \in \tilde{L}$, $\tilde{x} = (x, x')$ де $x \in L$ і $x' \in L'$.

$(\cdot)'$: $L \rightarrow L'$ визначається за допомогою відображення $x \mapsto x'$, яке пов'язує фізичний та внутрішній простори.

Вікно Ω обирається у внутрішньому просторі (компактне, співпадає з замиканням внутрішньої частини та має межу міри нуль). d -вимірний квазікристал Λ можна означити наступним чином $\Lambda(\Omega) := \{x \mid \tilde{x} \in \tilde{L}, x' \in \Omega\}$.

13.2 Процедура обробки даних

Ми називаємо квазікристалом дискретну детерміновану аперіодичну множину точок Λ у скінченновимірному дійсному евклідовому просторі. У багатьох відношеннях такі квазікристали нагадують решітки окрім властивості симетрії зсуву (періодичності). Іноді їх навіть називають аперіодичними ґратками або аперіодичними кристалами. Для обробки даних ми використаємо дві чудові властивості квазікристалів:

- (i) вони не містять жодних періодичних підмножин будь-якого виду,
- (ii) відображення $(\cdot)'$ між квазікристалом Λ і його 'вікном' Ω є розривним в кожній точці.

Загальна ідея запропонованого підходу полягає в тому, щоб взяти задані цифрові дані, встановити взаємно-однозначну відповідність між

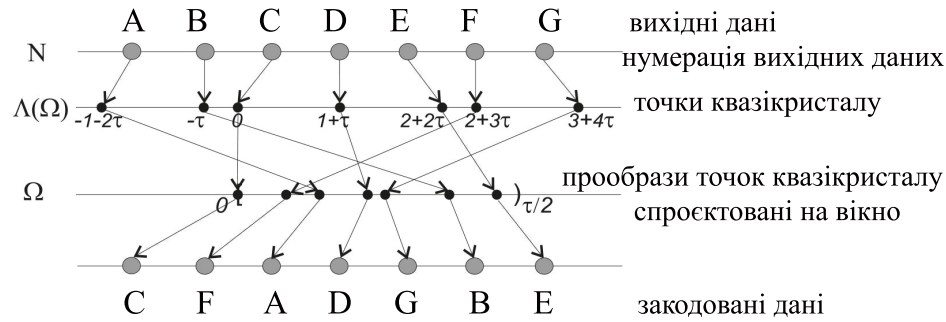


Рис. 13.2: Схема найпростішого кодування, що базується на квазікристалі

інформаційними бітами та цілими числами N , а потім відобразити точки N на фрагмент квазікристала Λ (див. перші два рядки рис. 13.2). На цьому етапі дані відображаються на точки квазікристала. За ним слідує застосування відображення $(\cdot)'$ до точок квазікристала (див. другий і третій рядки рис. 13.2), що є ключовим етапом кодування. В результаті ми отримуємо точки квазікристала, що несуть інформацію про впорядкування наших даних, «перемішаними» у вікні Ω . Залишається відобразити вміст Ω на бажану решітку для виводу, зберігання чи передачі даних (див. останні два рядки рис. 13.2).

Декодування відбувається у зворотньому порядку.

Якщо розглядати цю процедуру з криптографічної точки зору, то набір закритих ключів у нашому методі шифрування нескінченний але початкові дані можна розшифрувати, перебравши всі можливі перестановки. Генерація точок квазікристала є дуже гнучкою. Це може бути як один потік, так і розпаралелений процес. Використовуючи квазікристали, всі обчислення можна проводити в цілих числах. Це гарантує абсолютну точність процедур кодування та декодування і забезпечує стійкість алгоритму.

13.3 Побудова одновимірних квазікристалів

Розглянемо кілька випадків одновимірних квазікристалів $\Lambda_\tau(\Omega)$. Візьмемо два корені квадратного рівняння $x^2 = x + 1$: $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ та $\tau' =$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Тоді $\tau + \tau' = 1$, $\tau\tau' = -1$. Оберемо $\Omega = [0, d)$, $d = \frac{\tau}{2}$, в цьому випадку задовольняються умови твердження, а саме $\tau' \approx -0,62 \in (-1, 0)$ та $\tau \approx 1,62 > 0$. Тоді відстані між сусідніми точками квазікристала $\Lambda_\tau([0, d))$ наступні $\Delta_1 = \tau$, $\Delta_2 = 1 + \tau$ і $\Delta_3 = 1 + 2\tau$.

У якості початкової точки для побудови квазікристала $\Lambda_\tau([0, d))$ можна обрати будь-яку точку $x = a + b\tau$ таку, що $x' = a + b\tau' \in [0, d)$. Оберемо, наприклад, точку $x = 0$.

На відміну від загального означення квазікристала, яке не є конструктивним, ми маємо необхідну інформацію для швидкої побудови його точок. Ми можемо рухатись ліворуч або праворуч від початкової точки додаючи або віднімаючи одну за одною відстані Δ_1 , Δ_2 або Δ_3 .

Припустимо, що ми встановили, що x є точкою $\Lambda_\tau([0, d))$, тобто, що $x' \in [0, d)$, тоді права сусідня точка до x є однією з трьох

$$x + \tau, \quad x + 1 + \tau \quad \text{або} \quad x + 1 + 2\tau.$$

Щоб визначити яка саме з них підходить, ми перевіряємо одне за одним включення $x + \tau' \in [0, d)$, $x + 1 + \tau' \in [0, d)$ або $x + 1 + 2\tau' \in [0, d)$. Перше включення яке справдилось визначає нову точку квазікристала.

Вищенаведеним способом було отримано дві підмножини квазікристалів $\Lambda_\tau([0, d))$

$$\begin{aligned} \{\dots, -1-2\tau, -\tau, 0, 1+\tau, 2+2\tau, 2+3\tau, 3+4\tau, \dots\} &\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \{\dots, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_2, \dots\}; \\ \{\dots, -\tau, 0, 1+\tau, 2+3\tau, 3+4\tau, \dots\} &\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \{\dots, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_2, \dots\}. \end{aligned}$$

Другий рядок у кожному з прикладів містить відповідну послідовність відстаней (порядок перевірки чи належить спряжена точка вікну). Два наведені квазікристали відрізняються порядком у якому три можливі відстані Δ_1 , Δ_2 та Δ_3 були використані для побудови точок. Перший випадок використано як другий рядок схеми на рис. 13.2.

Наступний квазікристал $\Lambda_\tau(\Omega)$ побудовано з використанням ірраціональностей $\tau = 1 + \sqrt{2}$, $\tau' = 1 - \sqrt{2}$, які є коренями рівняння $x^2 = 2x + 1$. Умови твердження знову виконуються: $\tau' \approx -0,42 \in (-1, 0)$ та $\tau \approx 2,42 > 0$. Оберемо $\Omega = [0, 1)$, у цьому випадку лише дві різні відстані $\Delta_1 = \tau$ та $\Delta_2 = 1 + \tau$ між точками квазікристала $\Lambda_\tau([0, 1))$.

Використовуючи нульову точку як початкову, ми отримаємо множину перерізу та проєкції

$$\begin{aligned} & \{\dots, -1-3\tau, -2\tau, -\tau, 0, 1+\tau, 1+2\tau, 2+3\tau, 2+4\tau, 3+5\tau, \dots\} \\ & \leftrightarrow \{\dots, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_1, \Delta_2, \dots\}. \end{aligned}$$

Можливі випадки коли точка x' розташована досить близько до межі інтервалу Ω , у цьому випадку процедура визначення належності $x' \in \Omega$ чи не належності $x' \notin \Omega$ точки вікну займатиме багато часу. Цього можна уникнути викидаючи з розгляду точки x' , що розташовані до меж Ω на відстані меншій за деяке наперед задане число ε .

Дійсні числа вигляду $a + b\tau$ вважаються такими, що задані двома цілими компонентами кортежу (a, b) . Оскільки необхідні операції вичерпуються додаванням та відніманням, то усі операції виконуються абсолютно точно.

13.4 Застосування до растрових зображень

У цьому розділі використовуються фрагменти квазікристалів для кодування 2-вимірних цифрових даних.

Припустимо, що дані подано на прямокутній сітці, яка містить скінчену кількість n_1, n_2 точок у кожному з напрямків, тоді нам знадобиться скінчений фрагмент $\Lambda^{(i)}(\Omega_i)$, $i = 1, 2$ квазікристала $\Lambda(\Omega) = \Lambda^{(1)}(\Omega_1) \otimes \Lambda^{(2)}(\Omega_2)$. Кількість точок у кожному фрагменті визначається відповідною розмірністю цифрових даних $n_i = |\Lambda^{(i)}(\Omega_i)|$.

Кожне з вікон Ω_i це інтервал на дійсній осі, які взаємноортогональні. Для кожного з фрагментів вікно обирається незалежно.

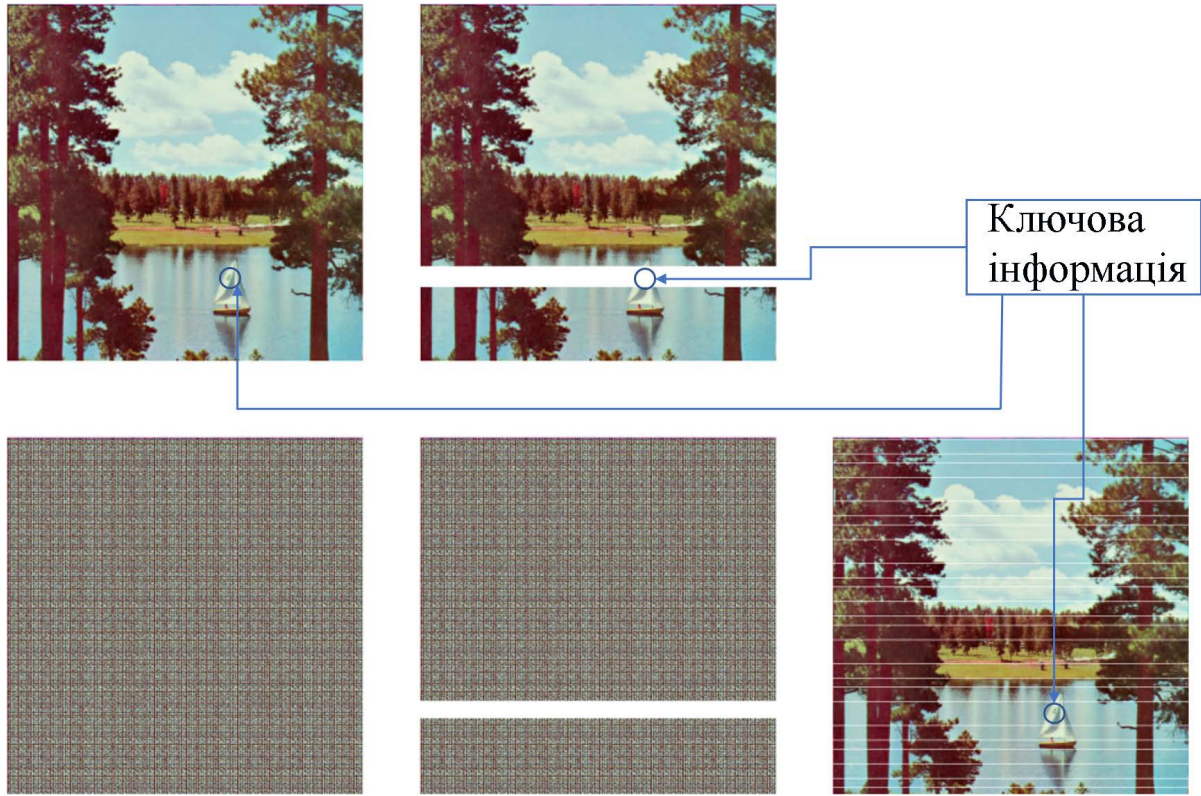


Рис. 13.3: Приклад втрати інформації при передачі даних у вихідному растровому зображенні та зображенні, закодованому за допомогою квазікристала. Ліворуч у першому рядку — оригінальне зображення. Праворуч у першому рядку знаходиться оригінальне зображення з втраченими даними. Ліворуч у другому рядку — оригінальне зображення, трансформоване за допомогою квазікристала. У центрі другого ряду знаходиться квазікристалоперетворене зображення з втраченими даними. Праворуч у другому рядку розшифроване пошкоджене зображення з втраченими даними.

Нашим головним інструментом є взаємнооднозначне відображення між скінченною точковою множиною $\Lambda_i(\Omega_i)$ та її образом у Ω_i

$$\Lambda_i(\Omega_i) \longleftrightarrow \Omega_i, \quad i = 1, 2.$$

Зауважимо, що ролі $\Lambda_i(\Omega_i)$ та образу у Ω_i взаємозамінні, оскільки фрагменти $\Lambda_i(\Omega_i)$ є скінченими точковими множинами.

У попередньому розділі вже було наведено швидкий метод конструювання точок квазікристала $\Lambda_i(\Omega_i)$, він вимагає, щоб було задано значення $n_1, n_2, \tau_i, \tau'_i$ і Ω_i , та дві початкові точки для $\Lambda_i(\Omega_i)$, $i = 1, 2$.

Нехай задано растрове зображення $P(L)$, на точках (x, y) фрагменту

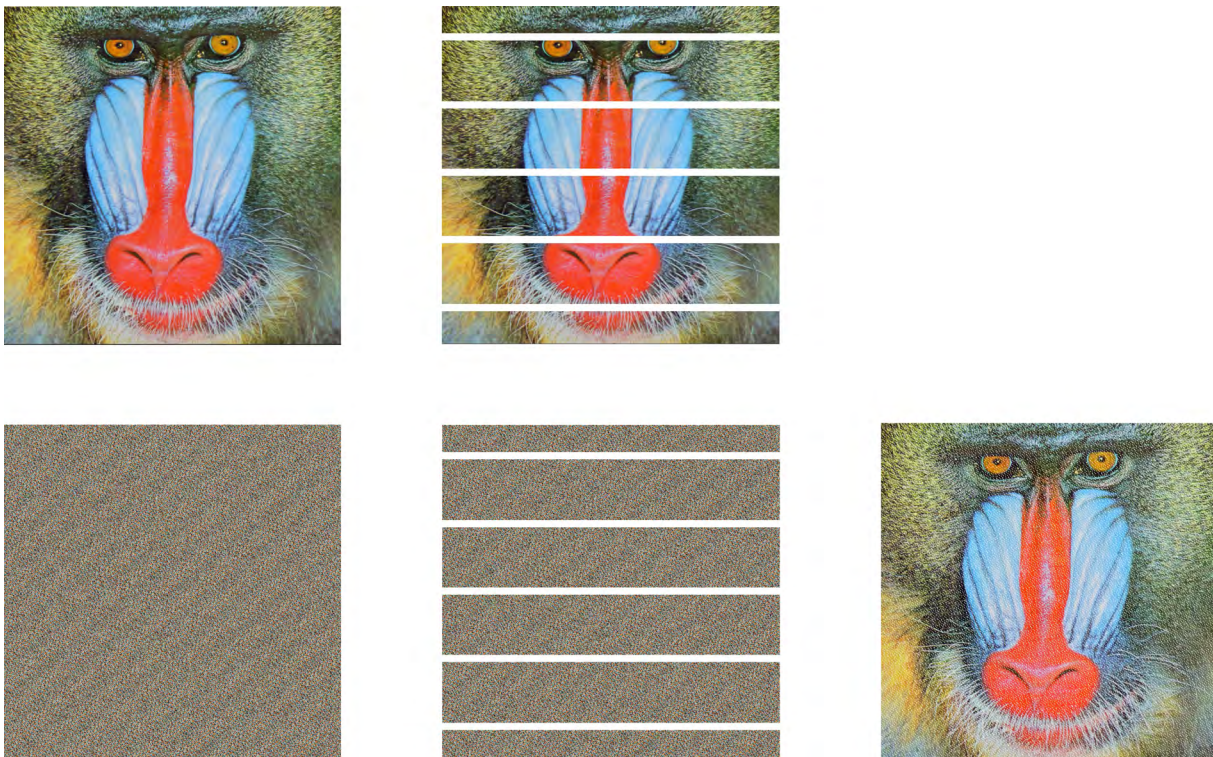


Рис. 13.4: Приклад втрати інформації при передачі даних у вихідному растровому зображенні та зображенні, закодованому за допомогою квазікристала. Ліворуч у першому рядку знаходиться оригінальне зображення розміром 512×512 пікселів. Праворуч у першому рядку знаходиться оригінальне зображення з втраченими даними. Ліворуч у другому рядку — оригінальне зображення, трансформоване за допомогою квазікристала. У центрі другого рядка знаходиться квазікристал-перетворене зображення з втраченими даними. Праворуч у другому рядку розшифроване пошкоджене зображення з втраченими даними.

L прямокутної ґратки.

Тоді ми опрацьовуємо незалежно кожну з координат даних використовуючи фрагмент квазікристалу так, як це показано на рис. 13.2.

Сформулюємо базовий алгоритм

- Побудова двох різних одновимірних квазікристалі $\Lambda^{(1)}$ і $\Lambda^{(2)}$ розмірностей n_1 та n_2 відповідно до заданих даних $P(L)$. (Кожен фрагмент, як і його вікно, може бути обраний будь-де на відповідній дійсній прямій.)
- Співставити один-до-одного послідовність координат x з точками

$\Lambda^{(1)}$, аналогічно співставляємо координати y з точками $\Lambda^{(2)}$. (Таким чином, x стає точкою $x_1 + x_2\tau \in \Lambda^{(1)}$, а y стає точкою $y_1 + y_2\tau \in \Lambda^{(2)}$, де x_1, x_2, y_1, y_2 — цілі числа.)

- Основним кроком кодування є відображення $(\cdot)'$ декартового добутку $\Lambda^{(1)} \otimes \Lambda^{(2)}$ у відповідне вікно $\Omega_1 \otimes \Omega_2$

$$\begin{aligned}\Lambda^{(1)}(\Omega_1) &\longrightarrow \Omega_1, & \Lambda^{(2)}(\Omega_2) &\longrightarrow \Omega_2; \\ x_1 + x_2\tau_1 &\mapsto x_1 + x_2\tau'_1, & y_1 + y_2\tau_2 &\mapsto y_1 + y_2\tau'_2.\end{aligned}$$

(Послідовність вихідних координат даних при цьому драматично змінюється внаслідок розривності відображення $(\cdot)'$.)

- Залищається відобразити точки закодованого фрагмента квазікристалу, які зараз містяться у Ω_1 і Ω_2 , у послідовність цілих чисел вздовж напрямків x та y .

Розглянутий алгоритм переставляє точки даних без зміни значення даних у кожній точці. Можна також розглядати значення функцій як ще один набір дискретних точок і застосувати до нього той самий алгоритм. По суті, ми маємо справу з тривимірною задачею, де функція трьох змінних набуває лише двох значень. Усі відображення, які ми використовували в алгоритмі кодування, є однозначними, тому їх можна використовувати для розшифровки у зворотному порядку. З тієї ж причини ніщо не заважає нам ітеративно застосовувати наш алгоритм.

Ми застосували перетворення $(\cdot)'$ до растрових зображень і рівномірно розподілити втрачену інформацію по всьому зображенню. Нижче наведено три приклади застосування запропонованого алгоритму. Підкреслимо, що, для спрощення, дані були зашифровані в кожному напрямку одним і тим самим квазікристалом Фібоначчі. Час обчислення коливається між двома і дев'ятьма секундами. При цьому програма не розбиває зображення на блоки для обробки та не розпаралелює процес обчислень.

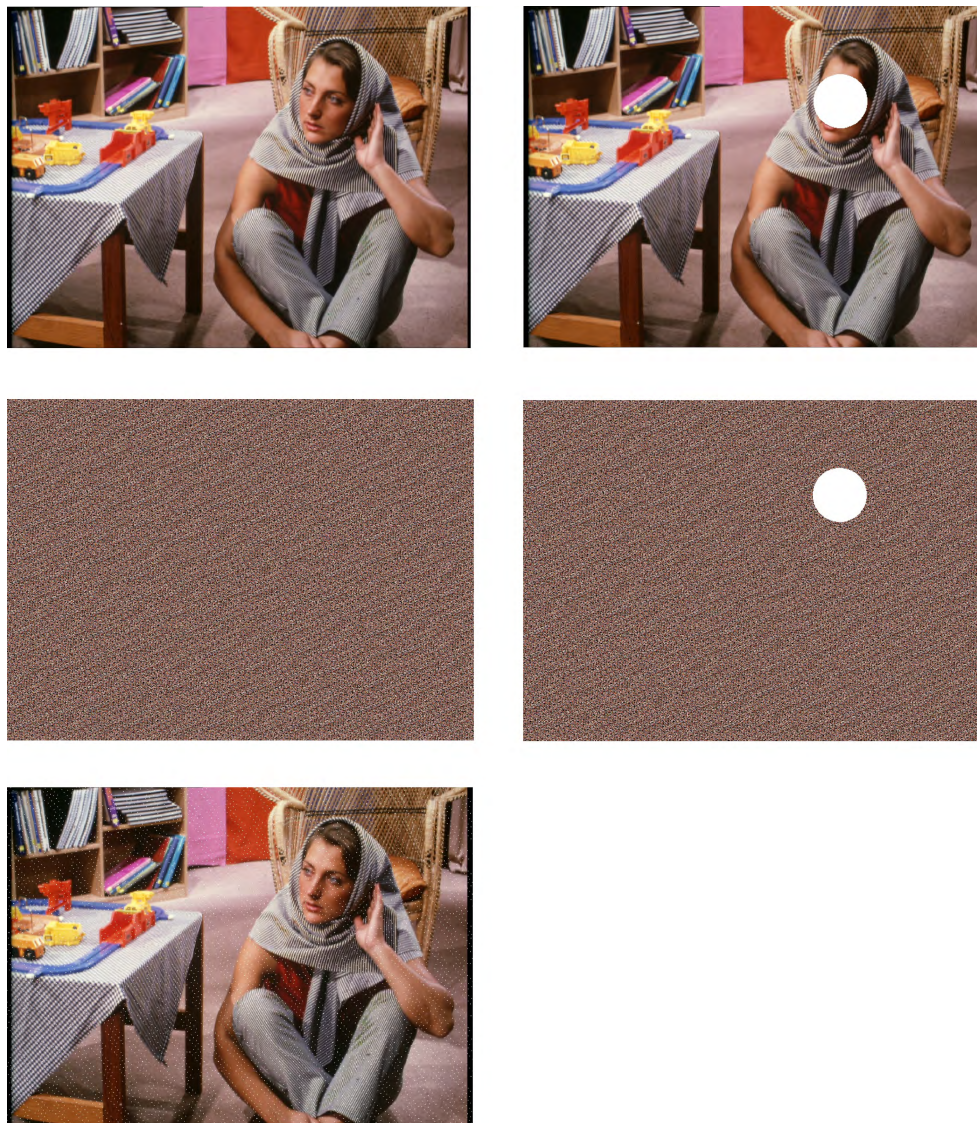


Рис. 13.5: Приклад навмисного знищення інформації при передачі даних або при зберіганні у вихідному растровому зображенні та зображенні, закодованому за допомогою квазікристала. Ліворуч у першому рядку знаходиться вихідне зображення розміром 787×576 пікселів. Праворуч у першому рядку знаходиться оригінальне зображення зі знищеними даними. Ліворуч у другому рядку — оригінальне зображення, трансформоване за допомогою квазікристала. Праворуч, у другому рядку, є квазікристал-перетворене зображення зі знищеними даними. У третьому рядку знаходиться розкодоване пошкоджене зображення з втраченими даними.

Ми описали один із найпростіших варіантів кодування на основі квазікристалів, але навіть у такому вигляді він виявляється цікавим для багатьох застосувань. Алгоритм заснований на строго аперіодичних на-

борах, включає всюди розривне $(\cdot)'$ відображення і абсолютно стабільний щодо накопичення помилки обчислень, оскільки він працює лише з цілими числами. Тому пошкодження кількох точок даних не впливає на решту процесу шифрування/дешифрування. Більш складну систему обробки можна побудувати шляхом використання властивостей багатовимірних квазікристалів. Також у схемі можуть бути задіяні масштабні властивості квазікристала або можливість породжувати випадкові числа з аперіодичних дискретних наборів.

14 Ліівські ортогональні оператори

Умова ліівської ортогональності операторів на алгебрах Лі природно виникає при вивченні деяких структур, що пов'язані з алгебрами Лі, таких як многовиди Келера та структури Кліффорда. Найпростішими серед таких структур є абелеві комплексні структури на дійсних алгебрах Лі, тобто лінійні оператори, що задовольняють дві умови:

- 1) $J^2 = -\text{id}$,
- 2) $[Jx, Jy] = [x, y]$.

Об'єктом дослідження у цьому розділі є ширший клас операторів, кожен з яких задовольняє лише другу умову, яку і називають умовою ліівської ортогональності. Відкидання першої умови допомагає зрозуміти, за які властивості абелевих комплексних структур відповідає саме умова ліівської ортогональності.

Крім того, невироджені ліівські ортогональні оператори пов'язані з так званими узагальненими диференціюваннями в той самий спосіб, як автоморфізми пов'язані з диференціюваннями. Нагадаємо, що лінійний оператор $D \in \text{End}(\mathfrak{g})$ називають узагальненим (α, β, γ) -диференціюванням на алгебрі $\mathfrak{g}$, якщо для будь-яких елементів x, y з алгебри $\mathfrak{g}$ виконуються співвідношення

$$\alpha D[x, y] = \beta[Dx, y] + \gamma[x, Dy]$$

для заданих сталих α, β, γ . Очевидно, що інфінітезимальними аналогами ліівських ортогональних операторів є $(0, 1, 1)$ -диференціювання.

Нижче узагальнено та повністю описано множини ліівських ортогональних операторів на деяких класах алгебр Лі. Вважаємо, що базове поле $\mathbb{F}$ має характеристику нуль, а алгебра Лі $\mathfrak{g}$ скінченновимірною. Додаткові обмеження на базове поле і алгебру вказуємо там, де вони суттєві.

14.1 Елементарні властивості ліївськи ортогональних операторів

Означення 14.1. (Лінійний) оператор J на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ називають *ліївськи ортогональним*, якщо $[Jx, Jy] = [x, y]$ для довільних елементів $x, y \in \mathfrak{g}$.

Приклад 14.1. Будь-який (лінійний) оператор на абелевій алгебрі Лі є ліївськи ортогональним. Лише абелева алгебра Лі допускає нульовий оператор як ліївськи ортогональний.

Останнє твердження можна узагальнити до такого:

Твердження 14.1. Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі, а J — нільпотентний ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Тоді алгебра $\mathfrak{g}$ абелева.

Приклад 14.2. Для будь-якої алгебри Лі $\mathfrak{g}$ тотожний оператор $\text{id}_{\mathfrak{g}}$, а також $-\text{id}_{\mathfrak{g}}$ є ліївськи ортогональними операторами на $\mathfrak{g}$. Будемо називати такі оператори *тривіальними* ліївськи ортогональними операторами на $\mathfrak{g}$. Тому цікавими для дослідження ліївськи ортогональними операторами є лише ті, що відрізняються від тривіальних.

Для деяких алгебр Лі множина ліївськи ортогональних операторів вичерпується тривіальними.

Приклад 14.3. Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Зафіксуємо базис (e_1, e_2, e_3) , в якому комутаційні співвідношення мають вигляд $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_3] = e_1$, $[e_3, e_1] = e_2$, або $[e_i, e_j] = e_k$ для парної перестановки трійки індексів i, j, k . Інакше кажучи, використаємо зображення алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ як алгебри тривимірних векторів з векторним добутком як дужкою Лі. Нехай J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. За означенням, $e_k = [e_i, e_j] = [Je_i, Je_j]$. Отже, вектор e_k ортогональний векторам Je_i та Je_j . Перегрупуваючи ці співвідношення, отримаємо, що для кожного i вектор Je_j ортогональний e_j і e_k , а тому пропорційний e_i : $Je_i = \lambda_i e_i$ для деякої сталої λ_i . З комутаційних співвідношень випливає

$\lambda_i \lambda_j = 1$, $i \neq j$, звідки або $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, або $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, тобто або $J = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, або $J = -\text{id}_{\mathfrak{g}}$. Таким чином, алгебра $\text{sl}(2, \mathbb{C})$ допускає лише тривіальні ліівськи ортогональні оператори.

Твердження 14.2. *Нехай $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_p$, тобто $\mathfrak{g}$ є прямою сумою своїх ідеалів $\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_p$, а J_s — ліівськи ортогональний оператор на $\mathfrak{i}_s$, $s = 1, \dots, p$. Тоді оператор $J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_p$ є ліівськи ортогональним оператором на $\mathfrak{g}$.*

Приклад 14.4. Нехай $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_p$, де $\mathfrak{i}_1, \dots, \mathfrak{i}_p$ — ідеали алгебри $\mathfrak{g}$, і для кожного $s = 1, \dots, p$ або $J_s = \text{id}_{\mathfrak{i}_s}$, або $J_s = -\text{id}_{\mathfrak{i}_s}$. Тоді оператор $J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_p$ є ліівськи ортогональним оператором на $\mathfrak{g}$.

Нехай J — ліівськи ортогональний оператор на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, а x, y, z — довільні елементи цієї алгебри. Для виведення тотожності, яка пов'язує ліівську ортогональність з тотожністю Якобі, підставимо Jx, Jy, Jz у тотожність Якобі й використаємо означення ліівськи ортогонального оператора:

$$[Jx, [y, z]] + [Jy, [z, x]] + [Jz, [x, y]] = 0. \quad (14.1)$$

Щоб отримати іншу корисну тотожність, підставимо Jx замість x у (14.1) та багаторазово використаємо тотожність Якобі й означення ліівськи ортогонального оператора:

$$\begin{aligned} & [J^2x, [y, z]] + [Jy, [z, Jx]] + [Jz, [Jx, y]] \\ &= [J^2x, [y, z]] - [Jx, [Jy, z]] - [z, [x, y]] - [Jx, [y, Jz]] - [y, [z, x]] \\ &= [J^2x, [y, z]] - [J^2x, J[Jy, z]] - [J^2x, J[y, Jz]] + [x, [y, z]] \\ &= [J^2x, [y, z]] - [J^2x, J[Jy, z]] - [J^2x, J[y, Jz]] + [J^2x, J^2[y, z]] \\ &= [J^2x, (J^2 + \text{id})[y, z] - J[Jy, z] - J[y, Jz]] = 0. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Твердження 14.3. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі, J — ліівськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$ — підалгебра алгебри $\mathfrak{g}$, інваріантна відносно оператора J . Тоді обмеження оператора J на $\mathfrak{s}$ є ліівськи ортогональним оператором на підалгебрі $\mathfrak{s}$.*

Відношення еквівалентності. Наведемо допоміжні твердження, які обґрунтовують природність введеної нижче еквівалентності ліївськи ортогональних операторів.

Лема 14.1. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі, $\mathfrak{l}$ — деякий доповняльний підпростір алгебри $\mathfrak{g}$ до її центру $\mathfrak{z}$, тобто $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \dot{+} \mathfrak{l}$, J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$, а оператор $\tilde{J}$ на $\mathfrak{g}$ задовольняє умови $\tilde{J}|_{\mathfrak{l}} = J|_{\mathfrak{l}}$ і $\tilde{J}\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{z}$. Тоді $\tilde{J}$ — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$.*

Інакше кажучи, ліївськи ортогональний оператор можна довизначати на центрі алгебри Лі довільним чином.

Наступна лема є узагальненням леми 14.1.

Лема 14.2. *Нехай J — ліївськи ортогональний оператор на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, а J_0 — оператор на $\mathfrak{g}$, образ якого міститься у центрі $\mathfrak{z}$ цієї алгебри: $J_0\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{z}$. Тоді $J + J_0$ — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$.*

У лемі 14.1 оператор J_0 дорівнює нулю на доповняльному підпросторі $\mathfrak{l}$ до центру. Лема 14.2 дає змогу ввести відношення еквівалентності на множині ліївськи ортогональних операторів на фіксованій алгебрі $\mathfrak{g}$.

Означення 14.2. Ліївськи ортогональні оператори J та $\tilde{J}$ на деякій алгебрі Лі назвемо *еквівалентними*, якщо образ їх різниці міститься в центрі цієї алгебри.

Якщо центр алгебри нульовий, еквівалентними є лише рівні оператори.

Алгебраїчні структури на ліївськи ортогональних операторах. Ліївськи ортогональні оператори утворюють різні алгебраїчні структури.

Твердження 14.4. *Якщо J — ліївськи ортогональний оператор на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, то оператор $-J$ також є ліївськи ортогональним на цій алгебрі.*

Твердження 14.5. *Нехай J — невідроджений лівськи ортогональний оператор на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$. Тоді*

(i) *обернений до нього оператор J^{-1} також є лівськи ортогональним на цій алгебрі;*

(ii) *умова лівської ортогональності оператора J еквівалентна умові $[Jx, y] = [x, J^{-1}y]$ для довільних елементів $x, y \in \mathfrak{g}$.*

Твердження 14.6. *Нехай $\mathfrak{g}$ — алгебра Лі. Тоді композиція лівськи ортогональних операторів на $\mathfrak{g}$ є лівськи ортогональним оператором на цій алгебрі. Отже, лівськи ортогональні оператори на $\mathfrak{g}$ утворюють моноїд з інволюцією. Множина лівськи ортогональних невідроджених операторів на алгебрі Лі є групою відносно композиції операторів.*

Використовуючи міркування з доведення теореми 3 зі статті [S.V. Bilun, D.V. Maksimenko, A.P. Petravchuk, *Methods Funct. Anal. Topology* **17** (2011), 199-203], можна отримати таке твердження:

Твердження 14.7. *Нехай J — лівськи ортогональний оператор на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, S — її автоморфізм. Тоді оператор $S^{-1}JS$ є лівськи ортогональним оператором на $\mathfrak{g}$.*

Наслідок 14.1. *Множина лівськи ортогональних операторів на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ є G -множиною, де $G = \text{Aut}(\mathfrak{g})$.*

Базисний підхід. Нехай $\mathfrak{g}$ — n -вимірний ($n < \infty$) алгебра Лі, а J — лівськи ортогональний оператор на ній. Зафіксуємо базис $(e_1, \dots, e_n)$ у $\mathfrak{g}$. Комутаційні співвідношення алгебри $\mathfrak{g}$ у зафіксованому базисі мають вигляд $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, де c_{ij}^k є компонентами тензора структурних сталих, а матриця оператора $J = (J_{ij})$: $Je_i = J_{ij}e_j$. Тут і надалі індекси i, j, k пробігають значення від 1 до n , а за індексами, що повторюються, іде підсумовування.

Запишемо означення лівськи ортогонального оператора для пар базисних елементів і розкладемо всі елементи алгебри, що зустрічаються,

за базисом:

$$\begin{aligned} [Je_i, Je_j] &= [J_{i'i}e_{i'}, J_{j'j}e_{j'}] = J_{i'i}J_{j'j}[e_{i'}, e_{j'}] = J_{i'i}J_{j'j}c_{i'j'}^k e_k = \\ &= [e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \end{aligned}$$

звідки $J_{i'i}J_{j'j}c_{i'j'}^k = c_{ij}^k$. У матричних позначеннях останню умову можна записати у вигляді $J^T C^k J = C^k$, де для кожного фіксованого k матриця $C^k = (c_{ij}^k)$ кососиметрична. Ця умова є не чим іншим як умовою інваріантності білінійної кососиметричної форми, асоційованої з матрицею C_k , відносно оператора J для всіх k . Для коефіцієнтів матриці оператора J це дає систему щонайбільше $n^2(n-1)/2$ квадратичних неоднорідних рівнянь. Розв'язок цієї системи повністю описує множину ліївськи ортогональних операторів на алгебрі $\mathfrak{g}$.

14.2 Ліївськи ортогональні автоморфізми

Вивчимо ліївськи ортогональні оператори алгебр Лі, що також є їх автоморфізмами. Через $\mathfrak{g}'$ позначимо похідну алгебру алгебри $\mathfrak{g}$: $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Лема 14.3. *Нехай J — ліївськи ортогональний автоморфізм на алгебрі $\mathfrak{g}$. Тоді $\ker(J - \text{id}_{\mathfrak{g}}) \supseteq \mathfrak{g}'$ та $[\text{im}(J - \text{id}_{\mathfrak{g}}), \mathfrak{g}'] = \{0\}$.*

Очевидно, що ліївськи ортогональні автоморфізми на алгебрі Лі можна описати як автоморфізми, що діють тотожно на похідній алгебрі, або як ліївськи ортогональні оператори, що задовольняють ту саму умову.

Наслідок 14.2. *Ліївськи ортогональний автоморфізм на досконалій алгебрі³ може бути лише тотожнім.*

Лема 14.4. *Оператор J на алгебрі Лі $\mathfrak{g}$ є ліївськи ортогональним автоморфізмом тоді і лише тоді, коли його можна представити у вигляді*

$$J = \text{id}_{\mathfrak{g}} + N, \tag{14.3}$$

³Алгебру Лі називають *досконалою*, якщо вона збігається зі своєю похідною алгеброю.

де оператор N задовольняє такі умови: $N[x, y] = 0$ і $[Nx, y] + [x, Ny] + [Nx, Ny] = 0$ для довільних $x, y \in \mathfrak{g}$. Крім того, оператор JN є $(0, 1, 1)$ -диференціюванням на $\mathfrak{g}$.

Позначимо через V базовий векторний простір скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$, а через $\text{LOA}(\mathfrak{g})$ — групу ліівськи ортогональних автоморфізмів на цій алгебрі:

$$\text{LOA}(\mathfrak{g}) := \{J \in \text{GL}(V) \mid J[x, y] = [Jx, Jy] = [x, y] \ \forall x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

Згідно з лемою 14.4 $\text{LOA}(\mathfrak{g}) = \{J = \text{id}_{\mathfrak{g}} + N \mid N \in \text{loa}(\mathfrak{g})\}$, де

$$\begin{aligned} \text{loa}(\mathfrak{g}) := \{N \in \text{End}(V) \mid N[x, y] = 0, \\ [Nx, y] + [x, Ny] + [Nx, Ny] = 0 \ \forall x, y \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Лема 14.5. Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі, а J — ліівськи ортогональний автоморфізм алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді $\text{im}(J - \text{id}_{\mathfrak{g}}) \subseteq C_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{g}')$, де $C_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{g}')$ позначає централізатор похідної алгебри $\mathfrak{g}'$ алгебри $\mathfrak{g}$ у радикалі $\mathfrak{r}$ цієї алгебри.

Припустимо, що поле $\mathbb{F}$, над яким визначено алгебру $\mathfrak{g}$, є алгебраїчно замкненим. Через $\mathfrak{i}_{\mu}$ для $\mu \in \mathbb{F}$ позначимо ідеал алгебри $\mathfrak{g}$.

Наслідок 14.3. Нехай J — ліівськи ортогональний автоморфізм скінченновимірної алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Тоді для будь-якого власного значення μ оператора J , що не дорівнює одиниці, відповідний ідеал $\mathfrak{i}_{\mu}$ є нільпотентним степеня нільпотентності не більше двох.

Наслідок 14.4. Нехай J — ліівськи ортогональний автоморфізм на скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$. Тоді алгебру $\mathfrak{g}$ можна представити у вигляді суми двох ідеалів $\mathfrak{i}_1 + \hat{\mathfrak{i}}$, де обмеження оператора J на $\mathfrak{i}_1$ має лише одиничні власні значення, а $\hat{\mathfrak{i}}$ є нільпотентним ідеалом степеня нільпотентності не більше двох.

У випадку нульового центру можна довести сильніше твердження, не накладаючи обмежень на поле $\mathbb{F}$.

Лема 14.6. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі з нульовим центром. Оператор J на $\mathfrak{g}$ є ліівськи ортогональним автоморфізмом тоді і лише тоді, коли він допускає представлення у вигляді*

$$J = \text{id}_{\mathfrak{g}} + N, \quad (14.4)$$

де N — нільпотентний оператор на $\mathfrak{g}$ степеня нільпотентності не більше двох: $N^2 = 0$, причому $N\mathfrak{g}' = (N\mathfrak{g})' = \{0\}$ і оператор N додатково є $(0, 1, 1)$ -диференціюванням на $\mathfrak{g}$.

Теорема 14.1. *Якщо $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна алгебра Лі з нульовим центром, то множина $\text{loa}(\mathfrak{g})$ є асоціативною алгеброю відносно композиції операторів з тривіальним (тотожно нульовим) антикомутатором. Також для довільного $N \in \text{loa}(\mathfrak{g})$ маємо $N^2 = 0$, $N\mathfrak{g}' = (N\mathfrak{g})' = \{0\}$, $N\mathfrak{g} \subseteq C_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{g}')$ і оператор N є $(0, 1, 1)$ -диференціюванням на $\mathfrak{g}$. Тут $C_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{g}')$ позначає централізатор похідної алгебри $\mathfrak{g}'$ алгебри $\mathfrak{g}$ у радикалі $\mathfrak{r}$ цієї алгебри.*

14.3 Ліівськи ортогональні оператори на метричних алгебрах Лі і алгебрах Лі з ненульовим фактором Леві

Нагадаємо, що алгебру Лі $\mathfrak{g}$ називають *метричною*, якщо на цій алгебрі існує невироджена симетрична інваріантна білінійна форма $B(x, y)$ (яка задає ad -інваріантну “метрику” на $\mathfrak{g}$). Класичними прикладами метричних алгебр Лі є

- напівпрості алгебри, для кожної з яких відповідна форма Кіллінга є єдиною з точністю до ненульового множника невиродженою симетричною інваріантною білінійною формою,
- абелеві алгебри, для яких кожна невироджена симетрична білінійна форма є тривіально інваріантною,
- редуковані алгебри як прямі суми напівпростих і абелевих.

Але є й інші метричні алгебри Лі. Будь-яка метрична розв'язна алгебра Лі має ненульовий центр, тому, наприклад, алгебра $\mathfrak{g}_{2,1}$ не є метричною. Метричні дійсні алгебри Лі розмірності не вище п'яти вичерпують тривимірні $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{so}(3)$, чотиривимірні $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus A_1$, $\mathfrak{so}(3) \oplus A_1$, $A_{4,8}^{-1}$, $A_{4,9}^0$, п'ятивимірні $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus 2A_1$, $\mathfrak{so}(3) \oplus 2A_1$, $A_{4,8}^{-1} \oplus A_1$, $A_{4,9}^0 \oplus A_1$, $\mathfrak{n}_{5,4}$.

Лема 14.7. *Довільний ліївськи ортогональний оператор на будь-якій метричній алгебрі Лі еквівалентний такому, що його анулює многочлен $x^2 - 1$.*

Наслідок 14.5. *Многочлен $x^2 - 1$ анулює довільний ліївськи ортогональний оператор на будь-якій метричній алгебрі Лі з нульовим центром.*

Теорема 14.2. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна метрична алгебра Лі, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Тоді існує розклад алгебри $\mathfrak{g}$ у пряму суму двох ідеалів $\mathfrak{i}_+$, $\mathfrak{i}_-$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_+ \oplus \mathfrak{i}_-$ такий, що оператор J можна зобразити у вигляді*

$$J = \text{id}_{\mathfrak{i}_+} \oplus (-\text{id}_{\mathfrak{i}_-}) + J_3,$$

де J_3 — оператор на $\mathfrak{g}$ з образом, що міститься в центрі $\mathfrak{z}$.

Теорема 14.3. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна метрична алгебра Лі з нульовим центром, а J — ліївськи ортогональний оператор на $\mathfrak{g}$. Тоді існує розклад алгебри $\mathfrak{g}$ у пряму суму двох ідеалів $\mathfrak{i}_+$, $\mathfrak{i}_-$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_+ \oplus \mathfrak{i}_-$ такий, що оператор J можна зобразити у вигляді*

$$J = \text{id}_{\mathfrak{i}_+} \oplus (-\text{id}_{\mathfrak{i}_-}).$$

Інакше кажучи, кожний нетривіальний ліївськи ортогональний оператор J розщеплює метричну алгебру Лі $\mathfrak{g}$ з нульовим центром на два власних ідеали, на одному з яких діє як id , а на іншому — як $-\text{id}$.

Будь-яка напівпроста алгебра Лі $\mathfrak{g}$ є метричною алгеброю Лі з нульовим центром, де форма Кіллінга є єдиною з точністю до ненульово-

го множника невідродженою симетричною інваріантною білінійною формою. Тому наслідок 14.5 справедливий для таких алгебр. З нього випливає, що всі власні числа ліівськи ортогонального оператора J дорівнюють 1 або -1 . Але твердження цього наслідку значно сильніше: воно гарантує існування власного базису оператора J . Маємо такі теореми:

Теорема 14.4. *Ліівськи ортогональні оператори на будь-якій простій алгебрі Лі вичерпуються тривіальними операторами $\text{id}_{\mathfrak{g}}$ та $-\text{id}_{\mathfrak{g}}$.*

Теорема 14.5. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна напівпроста алгебра Лі, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_p$ — її розклад на прості компоненти. Тоді будь-який ліівськи ортогональний оператор J на $\mathfrak{g}$ можна зобразити у вигляді*

$$J = J_1 \oplus \cdots \oplus J_p,$$

де для кожного $s = 1, \dots, p$ або $J_s = \text{id}_{\mathfrak{i}_s}$, або $J_s = -\text{id}_{\mathfrak{i}_s}$.

Можна одразу отримати повний опис ліівськи ортогональних операторів на редуктивних алгебрах Лі.

Наслідок 14.6. *Нехай $\mathfrak{g}$ — скінченновимірна редуктивна алгебра Лі, а $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{i}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{i}_p$ — її розклад на центр і прості компоненти. Оператор J є ліівськи ортогональним на $\mathfrak{g}$ тоді й лише тоді, коли його можна зобразити у вигляді:*

$$J = J_0 \oplus J_1 \oplus \cdots \oplus J_p + J_{\mathfrak{z}},$$

де для кожного $s = 1, \dots, p$ або $J_s = \text{id}_{\mathfrak{i}_s}$, або $J_s = -\text{id}_{\mathfrak{i}_s}$, J_0 — тотожно нульовий оператор на $\mathfrak{z}$, $J_{\mathfrak{z}}$ — довільний оператор на $\mathfrak{g}$ з образом, що міститься в центрі $\mathfrak{z}$.

Алгебру Лі, що допускає ліівськи ортогональний оператор J , можна зобразити у вигляді суми ідеалів $\mathfrak{i}_{\lambda}$, кожен з яких має вигляд: $\mathfrak{i}_{\lambda} = \mathfrak{l}_{\lambda} \dot{+} \mathfrak{l}_{\lambda^{-1}} \dot{+} \mathfrak{z}$, якщо $\lambda \notin \{\pm 1, 0\}$, або $\mathfrak{i}_{\lambda} = \mathfrak{l}_{\lambda} \dot{+} \mathfrak{z}$, якщо $\lambda = \pm 1$. Тут кожне λ — ненульове власне значення оператора J . Якщо λ^{-1} також є власним

числом оператора, відповідний ідеал у сумі опускаємо для уникнення повторень. Ця сума в загальному випадку не є прямою, оскільки кожна пара таких ідеалів перетинається по центру алгебри $\mathfrak{g}$. Але, оскільки ці ідеали є інваріантними підпросторами оператора J і $[\mathbf{i}_\lambda, \mathbf{i}_\mu] = 0$, коли $\lambda \neq \mu$ і $\mu\lambda \neq 1$, з урахуванням відношення еквівалентності кожен з цих ідеалів можна досліджувати окремо з точки зору обмежень на їх структуру, які накладає оператор J .

Кожен ідеал $\mathbf{i}_\lambda$, де $\lambda \neq \pm 1$, є розв'язним і тому міститься в радикалі $\mathfrak{r}$ алгебри $\mathfrak{g}$. Отже, ненульовий перетин з фактором Леві алгебри $\mathfrak{g}$ можуть мати лише ідеали $\mathbf{i}_1$ та $\mathbf{i}_{-1}$. Завдяки існуванню інволюції $J \rightarrow -J$ на множині ліївськи ортогональних операторів, достатньо вивчити ідеал $\mathbf{i}_1$.

Радикал $\mathfrak{r}$ та фактор Леві $\mathfrak{f}$ всієї алгебри $\mathfrak{g}$ у перетині з ідеалом $\mathbf{i}_1$ дають відповідно його радикал $\mathfrak{r}_1$ та фактор Леві $\mathfrak{f}_1$. Зауважимо, що $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_1 \oplus \mathfrak{f}_{-1}$, де $\mathfrak{f}_{-1} = \mathfrak{f} \cap \mathbf{i}_{-1}$. Радикал $\mathfrak{r}_1$ інваріантний відносно J , а тому й відносно обмеження J на $\mathbf{i}_1$. Фактор-алгебра ідеалу $\mathbf{i}_1$ по його радикалу $\mathfrak{r}_1$ ізоморфна підалгебрі $\mathfrak{f}_1$ і, очевидно, є напівпростою. Оскільки радикал $\mathfrak{r}_1$ інваріантний відносно J , то факторизація обмеження J_1 оператора J на $\mathbf{i}_1$ по $\mathfrak{r}_1$ дає добре визначений оператор $J_1/\mathfrak{r}_1$ на фактор-алгебрі $\mathbf{i}_1/\mathfrak{r}_1$ з єдиним власним значенням, рівним 1. За теоремою 14.5, факторизований оператор $J_1/\mathfrak{r}_1$ є тотожним. Отже, образ оператора $J_1 - \text{id}_{\mathbf{i}_1}$ міститься в $\mathfrak{r}_1$, а сам оператор є нільпотентним за визначенням $\mathbf{i}_1$ з точністю до відношення еквівалентності.

Підсумуємо отриманий результат у вигляді твердження.

Твердження 14.8. *Нехай J — ліївськи ортогональний оператор на скінченновимірній алгебрі Лі $\mathfrak{g}$, а $\mathbf{i}_1$ — ідеал, що відповідає власному числу 1. Тоді обмеження J_1 оператора J на ідеал $\mathbf{i}_1$ можна зобразити у вигляді $J_1 = \text{id}_{\mathbf{i}_1} + N$, де N — нільпотентний оператор на $\mathbf{i}_1$, причому його образ міститься в радикалі $\mathfrak{r}_1$ ідеалу $\mathbf{i}_1$.*

15 Централізатори лінійних і локально нільпотентних диференціювань

Нехай $\mathbb{K}$ — алгебраїчно замкнене поле, що має характеристику нуль, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ — алгебра многочленів, а $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ — поле раціональних функцій від n змінних. Нагадаємо, що $\mathbb{K}$ -диференціюванням алгебри A називають $\mathbb{K}$ -лінійне відображення $D: A \rightarrow A$ таке, що $D(fg) = D(f)g + fD(g)$ для довільних $f, g \in A$. Всі $\mathbb{K}$ -диференціювання алгебри A утворюють алгебру Лі $\text{Der}_{\mathbb{K}} A$ над полем $\mathbb{K}$ відносно операції комутування. Позначимо $W_n(\mathbb{K}) := \text{Der}_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, кожен елемент із $W_n(\mathbb{K})$ можна однозначно записати у вигляді $D = f_1 \partial_1 + \dots + f_n \partial_n$, де $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ і $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$ — частинні похідні на $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Зауважимо, що кожне диференціювання D алгебри A однозначно продовжується на поле часток R ; це продовження будемо позначати також через D , якщо це не призводить до непорозумінь. Алгебру Лі всіх $\mathbb{K}$ -диференціювань поля $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ будемо позначати через $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$; елементи цієї алгебри Лі однозначно записуються у вигляді

$$D = \varphi_1 \partial_1 + \dots + \varphi_n \partial_n,$$

де $\varphi_i \in \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$ і $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Структура алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$ представляє значний інтерес, оскільки з геометричної точки зору $W_n(\mathbb{K})$ є алгеброю Лі векторних полів на $\mathbb{K}^n$ з поліноміальними коефіцієнтами, а з точки зору теорії диференціальних рівнянь диференціюванню $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$ відповідає автономна система диференціальних рівнянь $\dot{x} = F(x)$, де $x = x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ і $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$.

Для диференціювання $D \in W_n(\mathbb{K})$ позначимо через $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ множину всіх елементів із алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$, які комутують з D (далі будемо скорочено позначати $C_{W_n}(D)$). Очевидно, $C_{W_n}(D)$ — підалгебра алгебри Лі $W_n(\mathbb{K})$, яка містить D . Опис централізаторів диференціювань $D \in W_n(\mathbb{K})$ є важливою задачею, яка тісно пов'язана з деякими пробле-

мами із теорії диференціальних рівнянь і диференціальної геометрії; ця задача розв’язана лише для окремих класів диференціювань.^{4,5}

15.1 Лінійні диференціювання

Нижче розглядаємо централізатори лінійних диференціювань, тобто диференціювань вигляду $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$, де $f_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Такому диференціюванню відповідає матриця $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, а комутатору диференціювань D і $D' = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_j \partial_i$ з матрицею $B = (b_{ij})$ відповідає матриця $[A, B] = AB - BA$. Тому алгебра Лі всіх лінійних диференціювань ізоморфна повній матричній алгебрі Лі $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ і ми для простоти будемо позначати алгебру Лі всіх лінійних диференціювань на $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ через $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ і вважати, що $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \subset W_n(\mathbb{K})$. Для лінійного диференціювання $D = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \partial_i$ можна розглядати два централізатори: $C_0 = C_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)$ і $C = C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ (очевидно, $C_0 \subseteq C$). Структура централізатора C_0 добре відома, оскільки C_0 складається з диференціювань, визначених матрицями, що комутують з $A = (a_{ij})$. Задача опису таких матриць (задача Фробеніуса) розв’язана давно.⁶

Виявляється, що в деякому сенсі підалгебра C близька до C_0 . Це показано в теоремі 15.1, де доведено, що

$$C_{W_n(\mathbb{K})}(D) = (FC_{\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})}(D)) \cap W_n(\mathbb{K}),$$

де F — ядро D в $\mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$.

Далі скрізь в цьому розділі $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $W_n(\mathbb{K}) = \text{Der}_{\mathbb{K}}(A)$.

Лема 15.1. *Нехай $D \in W_n(\mathbb{K})$, $f \in \text{Ker } D$ і θ — довільний автоморфізм кільця A . Тоді $\theta^{-1}D\theta \in W_n(\mathbb{K})$ і*

⁴Y. Y. Chapovskyi, D. Efimov and A. P. Petravchuk, Centralizers of elements in Lie algebras of vector fields with polynomial coefficients, Proc. Int. Geom. Cent. **14** (2021), no. 4, 257–270; MR4409445

⁵J. Nagloo, A. Ovchinnikov and P. Thompson, Commuting planar polynomial vector fields for conservative Newton systems, Commun. Contemp. Math. **22** (2020), no. 4, 1950025, 30 pp.; MR4106819

⁶F.R. Gantmakher, *The theory of matrices. Vols. 1, 2*, translated by K. A. Hirsch, Chelsea, New York, 1959; MR0107649

1. $\text{Ker}_A(\theta^{-1}D\theta) = \theta^{-1}(\text{Ker } D)$;
2. $\theta^{-1}(fD)\theta = \theta^{-1}(f)\theta^{-1}D\theta$;
3. $C_{W_n}(D) = \theta(C_{W_n}(\theta^{-1}D\theta))\theta^{-1}$.

Доведення. Безпосередня перевірка. $\square$

Лема 15.2. Нехай $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i$, $T = \sum_{i=1}^n g_i \partial_i$, $f_i, g_i \in A$ — диференціювання із $W_n(\mathbb{K})$. Диференціювання T і D комутують тоді і тільки тоді, коли $D(g_i) = T(f_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Доведення. Достатньо зауважити, що $g_i = T(x_i)$ та $f_i = D(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. $\square$

Лема 15.3. Нехай $D = \sum_{i=1}^n f_i \partial_i \in W_n(\mathbb{K})$ — таке диференціювання, що $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_k]$ і $f_{k+1}, \dots, f_n \in \mathbb{K}[x_{k+1}, \dots, x_n]$. Якщо $T \in C_{W_n}(D)$, $T = \sum_{i=1}^n g_i \partial_i$, то диференціювання $T_1 = \sum_{i=1}^k g_i \partial_i$ і $T_2 = \sum_{i=k+1}^n g_i \partial_i$ лежать в $C_{W_n}(D)$ і $T = T_1 + T_2$.

Доведення. Запишемо $T_1 = \sum_{i=1}^k t_i \partial_i$, де $t_i = g_i$, $i = 1, \dots, k$ і $t_i = 0$, $i = k+1, \dots, n$ і покажемо, що $[T_1, D] = 0$. Для цього за лемою 15.2 достатньо показати, що $T_1(f_i) = D(t_i)$, $i = 1, \dots, n$. Нехай спочатку $i = 1, \dots, k$. Тоді $t_i = g_i$ і $T_1(f_i) = T(f_i) = D(g_i) = D(t_i)$. Нехай тепер $i = k+1, \dots, n$. Тоді, очевидно $T_1(f) = 0$ за умовою леми і $D(t_i) = D(0) = 0$. Таким чином $D(t_i) = T_1(f_i)$ для $i = 1, \dots, n$ і за лемою 15.2 $[D, T_1] = 0$. Аналогічно можна показати, що $[D, T_2] = 0$. $\square$

Зауваження 15.1. Легко бачити, що твердження лем 15.2 та 15.3 залишаються справедливими і для диференціювань поля раціональних функцій $R = \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$, тобто елементів алгебри Лі $\widetilde{W}_n(\mathbb{K})$.

Теорема 15.1. Нехай $D = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \partial_i \in W_n(\mathbb{K})$ — лінійне диференціювання, $F = \text{Ker}_R D$ — поле констант для D в R . Якщо $C_{\mathfrak{gl}_n}(D)$ і $C_{W_n}(D)$ — централізатори D в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \subset W_n(\mathbb{K})$ і в $W_n(\mathbb{K})$ відповідно, то $C_{W_n}(D) = (FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)) \cap W_n(\mathbb{K})$.

Доведення. Без обмеження загальності можна вважати, що матриця $A = (a_{ij})$ диференціювання D записана у жордановій нормальній формі у вигляді

$$A = \bigoplus_{i=1}^t J_{n_i - n_{i-1}}(\lambda_i) \quad (15.1)$$

для деяких $0 = n_0 < \dots < n_t = n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{K}$. (ми розглядаємо нижньотрикутні жорданові блоки). Дійсно, для цього достатньо скористатися лемою 15.1. Далі, оскільки сума (15.1) пряма, то $D = D_1 + \dots + D_t$, де $D_i \in W_n(\mathbb{K})$ і визначається матрицею

$$O_{n_1} \oplus \dots \oplus J_{n_i - n_{i-1}}(\lambda_i) \oplus \dots \oplus O_{n_t - n_{t-1}}$$

з нульовими матрицями $O_{n_j - n_{j-1}}, j \neq i$. Нехай $T \in C_{W_n}(D)$ — довільний елемент централізатора. Тоді за лемою 15.3, яку легко перенести на скінченне число доданків, має місце рівність $T = T_1 + \dots + T_t$, де $T_i = \sum_{s=n_{i-1}+1}^{n_i} g_s \partial_s$ лежать в $C_{W_n}(D)$ (зауважимо, що в загальному випадку многочлени g_j залежать від усіх змінних $x_1, \dots, x_n$). Покажемо спочатку, що

$$T_1 = \sum_{s=1}^{n_1} g_s \partial_s \in (FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)) \cap W_n(\mathbb{K}).$$

Тут диференціювання D_1 визначається матрицею вигляду

$$J_{n_1}(\lambda_1) \oplus O_{n_2 - n_1} \oplus \dots \oplus O_{n_t - n_{t-1}},$$

де $O_{n_i - n_{i-1}}, i = 2, \dots, t$ — квадратна нульова матриця відповідного порядку, в наших позначеннях

$$J_{n_1}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

За лемою 15.2 з умови $[D, T_1] = 0$ випливає, що

$$D(g_1) = \lambda_1 g_1, \quad D(g_2) = \lambda_1 g_2 + g_1, \quad \dots, \quad D(g_{n_1}) = \lambda_1 g_{n_1} + g_{n_1-1}.$$

Нехай r — індекс диференціювання T_1 , тобто найменше натуральне число, таке що $g_r \neq 0$. Тоді $g_{r-1} = 0$ і тому $D(g_r) = \lambda_1 g_r$. З іншого боку, очевидно, що

$$D(x_1) = \lambda_1 x_1, \quad D(x_2) = \lambda_1 x_2 + x_1, \quad \dots, \quad D(x_{n_1}) = \lambda_1 x_{n_1} + x_{n_1-1}.$$

Враховуючи, що за відзначеним вище $g_r \neq 0$, отримаємо, що $g_r/x_1 \neq 0$ і $D(g_r/x_1) = 0$, тобто $g_r/x_1 \in F$, де $F = \text{Ker}_R D$ — поле констант для D в R .

Далі розглянемо лінійне диференціювання $D_1 \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K}) \subset W_n(\mathbb{K})$, яке визначається матрицею

$$J_{n_1}(\lambda_1) \oplus O_{n_2-n_1} \oplus \dots \oplus O_{n_t-n_{t-1}},$$

де $O_{n_i-n_{i-1}}$ — нульові квадратні матриці відповідних порядків. Очевидно, $[D_1, D] = 0$ і $D_1 = W_1 + V_1$, де лінійне диференціювання W_1 визначається діагональною матрицею

$$d_{n_1}(\lambda_1) \oplus O_{n_2-n_1} \oplus \dots \oplus O_{n_t-n_{t-1}},$$

і V_1 задається нижньотрикутною матрицею $M_1 = J_{n_1}(0) \oplus O_{n_2-n_1} \oplus \dots \oplus O_{n_t-n_{t-1}}$. Легко бачити, що $[W_1, D] = 0$ і тому також $[V_1, D] = 0$. Безпосередньо перевіряється, що лінійне диференціювання $V_1^{(r-1)}$, яке визначається матрицею M_1^{r-1} має вигляд $x_1 \partial_r + \dots + x_{n_1-r+1} \partial_{n_1}$ і комутує з D . Тоді диференціювання

$$T_1^{(2)} := (T_1 - \frac{g_r}{x_1} V_1^{(r-1)}) \in F \cdot C_{W_n}(D) \subset \widetilde{W}_n(\mathbb{K}),$$

де F — поле констант для D в полі R (нагадаємо, що $g_r/x_1 \in F$). Але тоді $T_1^{(2)}$ має більший індекс ніж індекс T_1 (нагадаємо, що індекс — найменший з номерів ненульових коефіцієнтів диференціювання). Повторюючи ці міркування достатню кількість разів, з урахуванням Зауваження 15.1, ми отримаємо деяке диференціювання $T_1^{(s)}$, $s \geq 2$ яке

комутує з D і має вигляд $h_{n_1}\partial_{n_1}$ для деякої раціональної функції $h_{n_1} \in F \cdot A \subset \mathbb{K}(x_1, \dots, x_n)$. Але тоді з умови $[D, h_{n_1}\partial_{n_1}] = 0$ випливає, що $D(h_{n_1}) = 0$, тобто диференціювання $h_{n_1}\partial_{n_1}$ лежить в $FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)$. Звідси випливає, що диференціювання T_1 є сумою деяких диференціювань із $FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)$, бо на кожному кроці ми віднімали від T_1 деяке диференціювання із $FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)$. Тому $T_1 \in (FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)) \cap W_n(\mathbb{K})$. Аналогічно можна показати, що $T_i \in (FC_{\mathfrak{gl}_n}(D)) \cap W_n(\mathbb{K})$ для $i = 2, \dots, t$, що і дає доведення теореми. $\square$

15.2 Централізатор базисного диференціювання Вейтценбека

На жаль, теорема 15.1 не дає можливості знаходити $C_{W_n}(D)$, оскільки перетин $(FC_0) \cap W_n(\mathbb{K})$ дуже важко знаходити. Тому в даному розділі роботи для найважливішого випадку, коли матриця лінійного диференціювання має жорданову нормальну форму у вигляді однієї жорданової клітини вказано метод знаходження системи твірних централізатора C як модуля над ядром $\text{Ker } D$ в $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (теорема 15.3). Для розв'язання цієї задачі було знайдено опис ядер степенів D^n диференціювання Вейтценбека при умові, що вже знайдено систему твірних $\text{Ker } D$ (теорема 15.2). Зауважимо, що знаходженню системи твірних $\text{Ker } D$, тобто кілець констант локально нільпотентних диференціювань D присвячено багато робіт. ^{7,8}

Нагадаємо, що лінійне диференціювання D на $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ називається базисним диференціюванням Вейтценбека, якщо D задається матрицею $J_n(0)$, яка складається з єдиної жорданової клітини з власним числом $\lambda = 0$ (ми розглядаємо нижньотрикутні жорданові клітини). В координатній формі маємо $D = x_1\partial_2 + \dots + x_{n-1}\partial_n$. Тоді, за лемою 15.2

⁷ A. W. Nowicki and M. Nagata, Rings of constants for k -derivations in $k[x_1, \dots, x_n]$, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), no. 1, 111–118; MR0929212

⁸ L. Bedratyuk, Kernels of derivations of polynomial rings and Casimir elements, Ukrain. Mat. Zh. **62** (2010), no. 4 Ukrainian Math. J. **62** (2010), no. 4; MR2888613

для довільного диференціювання $T = \sum_{i=1}^n g_i \partial_i$, яке комутує з D маємо

$$D(g_1) = 0, D(g_2) = g_1, \dots, D(g_n) = g_{n-1}.$$

Для довільного многочлена $f \in A$ позначимо через D_f диференціювання кільця многочленів вигляду

$$D_f = D^{n-1}(f) \partial_1 + D^{n-2}(f) \partial_2 + \dots + D(f) \partial_{n-1} + f \partial_n.$$

Має місце наступний зручний критерій для перевірки того, чи буде диференціювання $T \in W_n(\mathbb{K})$ комутувати з диференціюванням Вейтценбека.

Твердження 15.1. *Диференціювання $T \in W_n(\mathbb{K})$ комутує з D тоді і тільки тоді, коли існує многочлен $f \in A$, D -порядок якого $\leq n - 1$ такий, що $T = D_f$.*

Доведення. Нехай $T \in C_{W_n}(D)$ і $T = \sum_{i=1}^n g_i \partial_i$ для деяких многочленів $g_i \in A$. Тоді з умови $[T, D] = 0$ за лемою 15.2 отримаємо рівності $D(g_1) = 0$, $D(g_2) = g_1$, $\dots$, $D(g_n) = g_{n-1}$. і тому g_n — многочлен D -порядку $\leq n - 1$. Поклавши $f = g_n$ маємо $T = D_f$ і $\text{ord}_D(f) \leq n - 1$. Навпаки, якщо $T = \sum_{i=1}^{n-1} D^{n-i}(f) \partial_i + f \partial_n$ і $\text{ord}_D(f) \leq n - 1$, то знову за лемою 15.2 маємо, що $[T, D] = 0$. $\square$

Диференціювання Вейтценбека D на $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ визначає фільтрацію

$$0 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots,$$

$$\text{з } A_1 = \text{Ker } D, A_i = \{f \in A \mid D(f) \in A_{i-1}\}, i = 2, \dots$$

Тоді із твердження 15.1 випливає, що для опису $C_{W_n}(D)$ достатньо дослідити члени фільтрації A_i з $i \leq n - 1$, бо всі $T \in C_{W_n}(D)$ мають вигляд $T = \sum_{i=1}^n D^{n-i}(f) \partial_i$ для $f \in A_{n-1}$. Зауважимо, що A_{n-1} — це модуль над алгеброю констант $A_1 = \text{Ker } D$ диференціювання D .

Для вивчення A_{n-1} скористаємося методом із роботи Бедратюка⁸, де диференціювання Вейтценбека D вкладалося в тривимірну підалгебру

$L = \mathbb{K} \langle D, \widehat{D}, H \rangle \subset W_n(\mathbb{K})$, яка ізоморфна тривимірній простій алгебрі Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Лінійні диференціювання $\widehat{D}$ і H на A визначимо за правилом:

$$\widehat{D}(x_i) = i(n-i)x_{i+1}, \quad H(x_i) = (n-2i+1)x_i.$$

Безпосередньо перевіряється⁸, що виконуються комутаторні співвідношення

$$[D, \widehat{D}] = H, \quad [H, D] = 2D, \quad [H, \widehat{D}] = -2\widehat{D}, \quad (15.2)$$

тобто, $L \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Диференціювання $\widehat{D}$, очевидно, локально нільпотентне; $\widehat{D}$ -порядок многочлена $f \in A$ будемо позначати $\text{ord}(f)$ і називати просто порядком. Безпосередньо перевіряється, що довільний моном $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in A$ є власним вектором для H з власним значенням

$$\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} = n \sum_{i=1}^n \alpha_i - (\alpha_1 + 3\alpha_2 + \dots + (2i-1)\alpha_i + \dots + (2n-1)\alpha_n).$$

Це власне значення будемо називати вагою цього монома. Многочлен $f \in A$ будемо називати *ізобарним*, якщо всі його мономи мають одну і ту ж вагу. Оскільки мономи утворюють базис векторного простору $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ над $\mathbb{K}$, тобто $A = \bigoplus_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} \mathbb{K}x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, то H діагоналізується в цьому базисі. Але тоді $A = \bigoplus_{\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}} A_{\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}}$ — пряма сума підпросторів, де $A_{\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}}$ — лінійна оболонка всіх мономів ваги $\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$, тобто $A_{\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}}$ складається з ізобарних многочленів ваги $\lambda_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$.

Твердження наступної технічної леми зразу впливають із властивостей модулів над алгеброю Лі $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$.

Лема 15.4. *Нехай D — диференціювання Вейтценбека на $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ і $f, g \in A$ — ізобарні многочлени ваги λ і μ відповідно. Тоді:*

- (1) $D(f)$ — ізобарний многочлен ваги $\lambda + 2$, $\widehat{D}(f)$ — ізобарний многочлен ваги $\lambda - 2$;

- (2) fg — ізобарний многочлен ваги $\lambda + \mu$;
- (3) Якщо $f \in \text{Ker } D$ і $f = f_{\lambda_1} + \dots + f_{\lambda_k}$ — розклад f в суму ізобарних многочленів попарно різної ваги, то $f_{\lambda_i} \in \text{Ker}, i = 1, \dots, k$.

З теореми Вейтценбека⁹ випливає, що алгебра констант $\text{Ker } D$ диференціювання Вейтценбека алгебри многочленів $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ скінченно породжена. Збільшуючи, якщо потрібно кількість твірних можна за лемою 15.4 завжди вважати, що $\text{Ker } D$ має скінченну систему твірних із ізобарних многочленів. Наступна лема вказує на поведінку елементів із фільтрації $0 = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$, яка побудована із ядер лінійних відображень $\text{Ker } D^i$ під дією диференціювань D і $\widehat{D}$.

Лема 15.5. Нехай $b \in A_k \setminus A_{k-1}$ — ізобарний многочлен, $k \geq 2$. Тоді

1. $\widehat{D}(D(b)) \in A_k \setminus A_{k-1}$;
2. $D^{s-1}(\widehat{D}D(b)) = \widehat{D}D^s(b) + \lambda D^{s-1}(b)$ для довільного $s \geq 2$ і деякого $\lambda = \lambda(s)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Доведення. 1. Нехай $\deg b = t$ і V — множина всіх многочленів із A степеня не більшого ніж t . Оскільки $D, \widehat{D}, H = [D, \widehat{D}]$ — лінійні диференціювання на A , то V — інваріантний підпростір відносно алгебри Лі $L = \mathbb{K} \langle D, \widehat{D}, H \rangle \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{K})$. При цьому $b \in V$ і $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$. Тоді L -модуль V розкладається в пряму суму $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ незвідних L -модулів і $b = b_1 + \dots + b_m$, $b_i \in V_i$. Оскільки $D^{k-1}(b) \neq 0$, $D^k(b) = 0$, то хоча б один із доданків, наприклад b_i має таку ж саму властивість, тобто $D^{k-1}(b_i) \neq 0$, $D^k(b_i) = 0$. Вибираючи в незвідному L -модулі V_i стандартний базис $v_0, \dots, v_{n_i}$ і позначаючи $e = D, f = \widehat{D}, h = H$ і записуючи $b_i = \alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_{k-1} v_{k-1}$ можна переконатися, що $D^{k-1}(\widehat{D}D(b_i)) \neq 0$, але $D^k(\widehat{D}D(b_i)) = 0$. Звідси випливає, що $D^k(\widehat{D}D(b)) = 0$, $D^{k-1}(\widehat{D}D(b)) \neq 0$, тобто $\widehat{D}D(b) \in A_k \setminus A_{k-1}$.

⁹R. W. Weitzenböck, Über die Invarianten von linearen Gruppen, Acta Math. **58** (1932), no. 1, 231–293; MR1555349

2. Індукція по s . Якщо $s = 2$, то $D\hat{D}D(b) = \hat{D}D^2(b) + HD(b) = \hat{D}D^2(b) + \lambda D(b)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, бо $D(b)$ за лемою 15.4 є також ізобарним многочленом (нагадаємо, що за умовою леми b — ізобарний многочлен). Нехай твердження 2 леми справедливе для $s - 1$, доведемо його для s . Маємо $D^{s-1}(\hat{D}D(b)) = D(D^{s-2}\hat{D}D(b)) = D(\hat{D}D^{s-1}(b) + \mu D^{s-2}(b))$ для деякого $\mu \in \mathbb{K}$ за індуктивним припущенням. Тоді

$$\begin{aligned} D^{s-1}(\hat{D}D(b)) &= D\hat{D}D^{s-1}(b) + \mu D^{s-1}(b) \\ &= (\hat{D}D + H)D^{s-1}(b) + \mu D^{s-1}(b) \\ &= \hat{D}D^s(b) + HD^{s-1}(b) + \mu D^{s-1}(b) \\ &= \hat{D}D^s(b) + \alpha D^{s-1}(b) + \mu D^{s-1}(b) \\ &= \hat{D}D^s(b) + (\alpha + \mu)D^{s-1}(b) \end{aligned}$$

(тут ми скористалися тим, що $D^{s-1}(b)$ є ізобарним многочленом з деяким власним значенням α для H). Лему доведено. $\square$

Далі, нехай $a_1, \dots, a_k$ — система твірних ядра $A_1 = \text{Ker } D$ (як підалгебри алгебри A), яка складається із ізобарних многочленів. Для зручності будемо вважати, що $\hat{D}^0(a_i) = 1, i = 1, \dots, k$. Розглянемо систему підмножин із A вигляду

$$S_i = \left\{ \hat{D}^{k_1}(a_{i_1}) \times \dots \times \hat{D}^{k_t}(a_{i_t}) \mid a_{i_j} \in \{a_1, \dots, a_k\}, \right. \\ \left. k_j \geq 0, \sum_{j=1}^t k_j \leq i - 1 \right\},$$

де $i = 1, 2, \dots$. За нашими домовленостями, очевидно, $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{1, \hat{D}(a_1), \dots, \hat{D}(a_k)\}$, а за лемою 15.4 всі елементи із множин S_i є ізобарними многочленами.

Теорема 15.2. *Нехай D — диференціювання Вейтценбека на алгебрі $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Виберемо яку-небудь систему ізобарних твірних $a_1, \dots, a_k$ для ядра $A_1 = \text{Ker } D$ (як підалгебри із A) і позначимо $A_i =$*

$\text{Ker } D^i$, $i \geq 1$. Тоді A_i , $i \geq 1$ є A_1 -модулем з системою твірних (як модуля)

$$S_i = \left\{ \widehat{D}^{k_1}(a_{i_1}) \times \cdots \times \widehat{D}^{k_t}(a_{i_t}) \mid a_{i_j} \in \{a_1, \dots, a_k\}, \sum_{j=1}^t k_j \leq i-1 \right\}.$$

Доведення. Індукція по i . Для $i = 1$ все очевидно, оскільки A_1 як модуль над A_1 породжується елементом 1. Нехай твердження теореми справедливе для $i-1$, доведемо для i . Нехай $b \in A_i \setminus A_{i-1}$ — довільний елемент. Тоді $b = b_1 + \cdots + b_t$, де b_s — ізобарні многочлени попарно різної ваги, $b_s \in A_i$, $s = 1, \dots, t$ і хоча б один із многочленів b_s належить множині $A_i \setminus A_{i-1}$. Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати, що b — ізобарний многочлен.

За лемою 15.5 має місце включення $\widehat{D}D(b) \in A_i \setminus A_{i-1}$ і за тією ж лемою

$$D^{i-1}(\widehat{D}D(b)) = \widehat{D}D^i(b) + \lambda D^{i-1}(b) \quad (15.3)$$

для деякого $\lambda \in \mathbb{K}$. Оскільки $b \in A_i$, то $D^i(b) = 0$ і тому із рівності (15.3) отримаємо, що $D^{i-1}(\widehat{D}D(b)) = \lambda D^{i-1}(b)$ для деякого $\lambda \in \mathbb{K}$. Оскільки за лемою 15.5 $\widehat{D}D(b) \in A_i \setminus A_{i-1}$, то $\lambda \neq 0$. Тому отримаємо рівність $D^{i-1}(\widehat{D}D(b) - \lambda b) = 0$. Це означає, що елемент $d := \widehat{D}D(b) - \lambda b \in A_{i-1}$. За індуктивним припущенням d є лінійною комбінацією елементів множини S_{i-1} з коефіцієнтами із $A_1 = \text{Ker } D$. Далі, елемент $D(b) \in A_{i-1}$ і тому за індуктивним припущенням також

$$D(b) = \sum_{s_j \in S_{i-1}} c_j s_j, \quad c_j \in A_1.$$

Тому виконується рівність

$$\widehat{D}D(b) = \sum_{s_j \in S_{i-1}} (\widehat{D}(c_j)s_j + c_j\widehat{D}(s_j)). \quad (15.4)$$

Зауважимо, що $\widehat{D}(s_j)$ є лінійною комбінацією елементів із S_i з цілочисельними коефіцієнтами. Крім того, для $c_j \in A_1 = \text{Ker } D$ маємо, що

$c_j = c_j(a_1, \dots, a_k)$ — многочлен від твірних $a_1, \dots, a_k$ ядра $\text{Ker } D = A_1$. Тому, як неважко переконатися,

$$\widehat{D}(c_j) = \sum_{s=1}^k \frac{\partial c_j}{\partial a_s}(a_1, \dots, a_k) \widehat{D}(a_s),$$

а отже $\widehat{D}(c_j) \in A_1$ є лінійною комбінацією елементів із S_2 з коефіцієнтами з A_1 . Тому з рівності (15.4) отримаємо, що $\widehat{D}D(b) \in A_1$ є лінійною комбінацією елементів із S_i з коефіцієнтами із $A_1 = \text{Ker } D$. Але $b = \lambda^{-1}(\widehat{D}D(b) - d)$. Це означає, що S_i — система твірних A_1 -модуля A_i . Теорему доведемо. $\square$

Теорема 15.3. *Нехай D — диференціювання Вейтценбека на кільці $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $a_1, \dots, a_k$ — система твірних ядра $A_1 = \text{Ker } D$ (як підалгебри із A) і*

$$S_n = \left\{ \widehat{D}^{k_1}(a_{i_1}) \times \dots \times \widehat{D}^{k_t}(a_{i_t}) \mid a_{i_j} \in \{a_1, \dots, a_k\}, \sum_{j=1}^t k_j \leq n-1 \right\}.$$

Тоді $C_{W_n(\mathbb{K})}(D)$ як модуль над $\text{Ker } D$ має систему твірних $\{D_s \mid s \in S_n\}$.

Доведення. Для довільного елемента $s \in S_n$ маємо $D^n(s) = 0$. За твердженням 15.1 диференціювання D_s має вигляд

$$D_s = \sum_{i=1}^{n-1} D^{n-i}(s) \partial_i + s \partial_n \in C_{W_n}(D).$$

Нехай T — довільний елемент із $C_{W_n}(D)$. Тоді $T = D_b$, $b \in A_n$ за твердженням 15.1. Але за теоремою 15.2 $b = \sum_{s \in S_n} r_s s$, де $r_s \in \text{Ker } D$. Тому $D_b = \sum_{s \in S_n} r_s D_{s_i}$. Звідси випливає, що D_{s_i} , $s_i \in S_n$ є системою твірних для $\text{Ker } D$ -модуля $C_{W_n}(D)$. $\square$

Приклад 15.1. Побудуємо систему твірних у випадку централізатора $C_{W_3(\mathbb{K})}(D_3)$ як модуля над ядром диференціювання Вейтценбека D_3 кільця многочленів $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$.

Ядро D_3 породжується ізобарними многочленами $a_1 = x_1$, $a_2 = x_1 x_3 - (1/2)x_2^2$. Зауважимо, що

$$\widehat{D}(x_1) = x_2, \quad \widehat{D}(x_1 x_3 - (1/2)x_2^2) = 0,$$

$$\widehat{D}^2(x_1) = x_3, \quad \widehat{D}^2(x_1x_3 - (1/2)x_2^2) = 0.$$

Тоді для A_1 -модулів A_1, A_2, A_3 маємо системи твірних відповідно

$$S_1 = \{1\}, \quad S_2 = \{1, x_2\}, \quad S_3 = \{1, x_2, 2x_3, 4x_2^2\}.$$

За теоремою 15.3 маємо систему твірних централізатора $C_{W_3(\mathbb{K})}(D_3)$ як A_1 -модуля

$$\partial_3, x_1\partial_2 + x_2\partial_3, 2x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 + 2x_3\partial_3, 8x_1^2\partial_1 + 8x_1x_2\partial_2 + 4x_2^2\partial_3.$$

Зауваження 15.2. Системи твірних, які побудовані в теоремах 15.2 і 15.3 не обов'язково мінімальні.

15.3 Централізатори локально нільпотентних диференціювань

В цьому розділі A — область цілісності над довільним полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль. В наступній лемі зібрано деякі властивості локально нільпотентних диференціювань областей цілісності над полями характеристики нуль.

Лема 15.6. ¹⁰ Нехай $D \neq 0$ — локально нільпотентне диференціювання області цілісності A над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль і $C = \text{Ker } D$. Тоді

1. C — підкільце із A , яке інваріантне відносно довільного $T \in \text{Der}_{\mathbb{K}} A$ такого, що $[T, D] = 0$;
2. Якщо D має слайс s в A , тобто існує $s \in A$ такий, що $D(s) = 1$, то $A \simeq C[s]$ — кільце многочленів від s ;
3. Якщо D не має слайсів в A , то існують $h_0 \in C$, $h_1 \in A$ такі, що в кільці $A[h_0^{-1}]$ елемент $s = h_1/h_0$ є слайсом для продовження $\overline{D}$ на $A[h_0^{-1}]$ і ядро $\overline{D}$ в $A[h_0^{-1}]$ збігається з $C[h_0^{-1}]$.

¹⁰G. Freudenburg, *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, 136 VII, Springer, Berlin, 2006; MR2259515

Твердження 15.2. *Нехай $D \neq 0$ — локально нільпотентне диференціювання області цілісності A над $\mathbb{K}$, $C = \text{Ker } D$ в A . Якщо D має слайс в A , то $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D) \simeq C \ltimes \text{Der}_{\mathbb{K}}C$, де C розглядається як алгебра Лі над $\mathbb{K}$ з нульовим множенням і дія $\text{Der}_{\mathbb{K}}C$ на C природня.*

Доведення. За лемою 15.6 $A \simeq C[s]$. Нехай T — довільний елемент із $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$. Тоді з умови $[T, D] = 0$ випливає, що $T(s) \in C$. Позначимо $c_0 = T(s)$. Легко бачити, що $T - c_0D \in C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$ і при цьому $(T - c_0D)(s) = 0$. Позначимо через L і M підмножини із $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$ вигляду

$$L = \{T \in C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D) \mid T(s) = 0\}, \quad M = \{T \in C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D) \mid T(C) = 0\},$$

відповідно. Легко бачити, що L підалгебра із $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$, а M — абелевий ідеал із $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$. Незавжно переконатися, що $M = C \cdot D$ і $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D) \simeq M \ltimes L$ — напівпряма сума. Зауважимо, що $L \simeq \text{Der}_{\mathbb{K}}C$, оскільки кожне диференціювання алгебри C над $\mathbb{K}$ однозначно продовжується до деякого диференціювання T кільця A з $T \in C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$ (для цього достатньо покласти $T(s) = 0$). $\square$

Теорема 15.4. *Нехай A — скінченнопороджена область цілісності над полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль, $D \neq 0$ — локально нільпотентне диференціювання на A . Тоді $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$ має ранг n над A , де $n = \text{tr.deg}_{\mathbb{K}}A$.*

Доведення. Нехай спочатку диференціювання D має слайс s в A . Легко бачити, що для степеня трансцендентності $C = C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$ над $\mathbb{K}$ маємо рівність $\text{tr.deg}C = n - 1$ з огляду на лему 15.6. Виберемо який-небудь базис трансцендентності $c_1, \dots, c_{n-1}$ в C (над полем $\mathbb{K}$) і на підкільці $\mathbb{K}[c_1, \dots, c_{n-1}] \subseteq C$ розглянемо часткові похідні $\frac{\partial}{\partial c_i}$, $i = 1, \dots, n - 1$. Тоді як відомо ці диференціювання однозначно продовжуються на поле часток $\text{Frac}(C)$ (ми зберігаємо ті ж самі позначення для $\frac{\partial}{\partial c_i}$). Нехай $S = C \setminus \{0\}$ і $A[S^{-1}]$ — кільце часток. Оскільки $A = C[s]$, то $A[S^{-1}] = \text{Frac}(C)[s]$.

Продовжимо диференціювання $\frac{\partial}{\partial c_i}$, $i = 1, \dots, n - 1$ на $A[S^{-1}]$, покладаючи $\frac{\partial}{\partial c_i}(s) = 0$, $i = 1, \dots, n - 1$. Нехай $a_1, \dots, a_k$ — яка-небудь

система твірних алгебри A і $\frac{\partial}{\partial c_i}(a_j) = e_{ij}/d_{ij}$ для деяких $e_{ij} \in A$, $d_{ij} \in S = C \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, k$. Позначимо $d = \prod_{i,j} d_{ij}$. Тоді, очевидно, $d \in C$ і $d \frac{\partial}{\partial c_i}(a_j) \in A$, $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, k$. Це означає, що $d \frac{\partial}{\partial c_i}(A) \subseteq A$, $i = 1, \dots, n-1$ і, як легко бачити, всі диференціювання $d \frac{\partial}{\partial c_i}$ комутують з диференціюванням D на A (зауважимо, що диференціювання $\frac{\partial}{\partial c_i}$ були розширені на $A[S^{-1}]$). Легко бачити, що диференціювання $D, d \frac{\partial}{\partial c_i}, i = 1, \dots, n-1$ області цілісності A лінійно незалежні над R і утворюють базис векторного простору $RC_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$ над полем $R = \text{Frac}(A)$. Це означає, що $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$ має ранг n над A .

Нехай тепер D не має слайсів в A . Тоді за лемою 15.6 існує локальний слайс $h_1 \in A$ такий, що $D(h_1) = h_0 \neq 0$, $h_0 \in C$ і $s = h_1/h_0$ — слайс для розширення $\bar{D}$ диференціювання D на кільце часток $A[h_0^{-1}]$.

Кожне диференціювання T кільця $C = \text{Ker } D$ однозначно продовжується до диференціювання $\bar{T}$ кільця $A[h_0^{-1}]$, якщо покласти $\bar{T}(s) = 0$ (бо $A[h_0^{-1}] = C[h_0^{-1}][s]$ і випадок існування слайсу вже розглядався вище). Легко бачити, що $[\bar{T}, \bar{D}] = 0$, де $\bar{D}$ — продовження D на кільце $A[h_0^{-1}]$ (очевидно D — локально нільпотентне диференціювання і $\text{Ker } \bar{D} = C[h_0^{-1}]$). Для системи твірних $a_1, \dots, a_k$ алгебри A маємо $\bar{T}(a_i) = b_i/h_0^{k_i}$ для деяких $b_i \in A$ і $k_i \geq 0$. Нехай $k = \max k_i$. Тоді $h_0^k \bar{T}$ комутує з $\bar{D}$ і при цьому виконується включення $h_0^k \bar{T}(A) \subseteq A$. Оскільки домноження на степені h_0 диференціювань із $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$ не змінює ранг $C_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D)$ над $R = \text{Frac}(A)$, то, повторюючи міркування із випадку існування слайса, ми отримаємо рівність $\dim_R RC_{\text{Der}_{\mathbb{K}}A}(D) = n$. $\square$

16 Кореляційні функції нескінченних систем

Розглядається нескінченна система точкових частинок у просторі $\mathbb{R}^d$, які взаємодіють за допомогою стійкого регулярного парного потенціалу ϕ . Конфігураційний простір частинок $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ буде складатися з усіх локально скінченних підмножин простору $\mathbb{R}^d$. Нехай σ — це міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Позначимо множину усіх скінченних конфігурацій простору Γ через Γ_0 . Якщо усі частинки знаходяться в деякій обмеженій множині Λ , то простір позначається Γ_Λ . На просторах Γ_0 і Γ_Λ визначається міра Лебега–Пуассона λ_σ , введення якої не тільки спрощує запис багатьох громіздких виразів, але й допомагає збагатити техніку доведення багатьох тверджень:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda} \cdots \int_{\Lambda} F_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n. \quad (16.1)$$

16.1 Рівняння для кореляційних функцій кластерів

Результати цієї секції детально викладені в роботі [8].

Частково зв'язні кореляційні функції (ЧЗКФ) описують кореляції між кластерами частинок. Дано $m \in \mathbb{N}$, розглянемо колекцію $(\eta_i)_{i=1}^m$ конфігурацій $\eta_i \in \Gamma_0 \setminus \emptyset$ (наприклад, у результаті розкладання заданого $\bar{\eta} \in \Gamma_0$ на m кластерів). Відповідні ЧЗКФ визначаються рекурсивно формулами:

$$\tilde{\rho}^T(\eta_1) := \rho(\eta_1), \quad (16.2)$$

$$\tilde{\rho}^T(\eta_1; \dots; \eta_m) := \rho\left(\bigcup_{i=1}^m \eta_i\right) - \sum_{k=2}^m \sum_{I_1, \dots, I_k \subset \{1, \dots, m\}}^* \prod_{l=1}^k \tilde{\rho}^T(\tilde{\eta}_l), \quad m \geq 2,$$

де зірочка над сумою означає суму за всіма розбиттями $\{1, \dots, m\}$ на k непорожніх неперетинних підмножин, і де

$$\tilde{\eta}_l := \bigcup_{i \in I_l} \eta_i \quad \text{і} \quad \bigcup_{l=1}^k \tilde{\eta}_l = \bigcup_{i=1}^m \eta_i. \quad (16.3)$$

Остаточним є такий вигляд ключового рівняння:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{j;m}^T(\eta_1; \dots; \eta_m) &= z e^{-\beta W(x_1; \eta'_1)} j(x_1) \times \\ &\times \sum_{I \subset \{2, \dots, m\}} \sum_{\xi \subseteq \bigcup_{i \in I} \eta_i}^* \int_{\Gamma_0} K(x_1; \xi \cup \gamma) \times \\ &\times \tilde{\rho}_{j;m-|I|}^T(\eta'_1 \cup_{i \in I} \eta_i \cup \gamma; \eta_{\{2, \dots, m\} \setminus I}) \lambda_\sigma(d\gamma), \end{aligned} \quad (16.4)$$

де зірочка означає, що для всіх $i \in I$, для яких $\xi \cup \eta_i \neq \emptyset$. Відповідно до стратегії запропонованої Мінлосом і Погосяном (1977) шукаємо розв'язок рівняння у формі

$$\tilde{\rho}_{j;m}^T(\eta_1; \dots; \eta_m) = \int_{\Gamma_0} \chi_j \left(\bigcup_{i=1}^m \eta_i \cup \gamma \right) T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma), \quad (16.5)$$

де $T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma)$, $m \geq 2$ і $\gamma \in \Gamma_0$, — сім'я ядер, таких що

$$T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) = 0 \quad \text{якщо} \quad \gamma \cap \bar{\eta} \neq \emptyset, \quad \bar{\eta} := \bigcup_{i=1}^m \eta_i.$$

одержуємо такі рекурентні співвідношення для T_m з огляду на довільність функції j :

$$\begin{aligned} T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) &= z e^{-\beta W(x_1; \eta'_1)} \times \\ &\times \sum_{\xi \subset \gamma} \sum_{I \subset \{2, \dots, m\}} \sum_{\eta \subseteq \bar{\eta}_I}^* K(x_1; \eta \cup \xi) T_{m-|I|}(\eta'_1 \cup \bar{\eta}_I \cup \xi; \eta_{\{2, \dots, m\} \setminus I} \mid \gamma \setminus \xi), \end{aligned} \quad (16.6)$$

де поклали $\bar{\eta}_I = \bigcup_{i \in I} \eta_i$. За умови дотримання початкових умов:

$$\begin{aligned} (4.15) T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) &= 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma \neq \emptyset, \quad \text{а} \quad \eta_i = \emptyset \\ &\text{для} \quad i \in \{1, \dots, m\}, \quad m > 1, \\ T_1(\emptyset \mid \emptyset) &= 1, \quad T_1(\emptyset \mid \gamma) = 0, \quad \text{якщо} \quad \gamma \neq \emptyset, \end{aligned} \quad (16.7)$$

рівняння (16.6) має єдиний розв'язок унаслідок своєї рекурентної структури.

16.2 Формула для кількості діаграм-лісів

Залишається оцінити кількість графів-лісів за фіксованих конфігурацій $\bigcup_{i=1}^m \eta_i \cup \gamma$. Позначимо це число через $N_n^{(m)}(l_1, \dots, l_m)$, $l_i := |\eta_i|$, і наведемо таку комбінаторну лему (див. доведення в [8]):

Лема 16.1. *Нехай $n \in \mathbb{N}_0$ і $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Покладемо $L_i := 2^{l_i} - 1$ для $i = 2, \dots, m$. Тоді*

$$N_n^{(m)}(l_1; \dots; l_m) = l_1 \left(\prod_{i=2}^m L_i \right) \left(\sum_{i=1}^m l_i + n \right)^{m+n-2}. \quad (16.8)$$

Зауваження 16.1. Зазначимо, що (16.8) є узагальненням (добре відомої) формули Келі для кількості графів-дерев з $n \geq 2$ вершинами:

$$K_n = n^{n-2}$$

для випадку графів-лісів системи m кластерів $(\eta_i)_{i=1}^m$ і n одиничних вершин з $l_i = |\eta_i|$, $n = |\gamma|$.

16.3 Комбінаторна тотожність

Метою цієї секції є надати новий, елементарний доказ комбінаторної тотожності (16.9) у теоремі 16.1 і надати деякі нетривіальні застосування до перерахування графів-лісів. Доведення, яке ми наводимо за допомогою індукції, просте, оскільки вимагає лише використання біноміальної формули разом із оператором виведення. Ця тотожність може бути корисною у теорії графів (для перерахування лісів) та її застосуваннях. Детальне доведення див. в [34].

Теорема 16.1. *Дано $m, p \in \mathbb{N}$ з $1 \leq p \leq m$ і набір $(x_i)_{i=1}^m$ з (комплексних) чисел $x_i \in \mathbb{C}$ виконується наступна тотожність.*

$$\sum_{\{I_1, \dots, I_p\} \in \Pi_p(\{1, \dots, m\})} \prod_{j=1}^p \left(\sum_{i \in I_j} x_i \right)^{|I_j|-1} = \binom{m-1}{p-1} \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^{m-p}, \quad (16.9)$$

де сума в лівій частині дорівнює множині $\Pi_p(\{1, \dots, m\})$ усіх розбиттів $(I_j)_{j=1}^p$ множини $\{1, \dots, m\}$ на p непорожніх підмножин.

16.4 Операторний та аналітичний методи розв'язків рівнянь Кірквуда–Зальцбурга

В операторному підході систему рівнянь Кірквуда–Зальцбурга

$$\rho(\eta) = ze^{-\beta W(x; \eta^{(\hat{x})})} \int_{\Gamma_0} K(x; \xi) \rho(\eta^{(\hat{x})} \cup \xi) \lambda_\sigma(d\xi), \quad (16.10)$$

де

$$K(x; \xi) := \begin{cases} \prod_{y \in \xi} (e^{-\beta \phi(|x-y|)} - 1), & |\xi| \geq 1, \\ 1, & \xi = \emptyset. \end{cases} \quad (16.11)$$

записують як одне операторне рівняння в банаховому просторі E_ξ :

$$\rho = z\hat{K}\rho + \rho_0, \quad \rho_0(x_1) = z, \quad \rho_0(x_1, \dots, x_l) = 0 \text{ для } l \geq 2. \quad (16.12)$$

Оператор $\hat{K}$ діє на функцію $f \in E_\xi$ наступним чином:

$$\begin{aligned} (\hat{K}f)(x_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{dn}} (dy)^n K(x_1; \{y_1, \dots, y_n\}) f(y_1, \dots, y_n) \\ (\hat{K}f)(x_1, \dots, x_l) &= e^{-\beta W(x_1; x_2, \dots, x_l)} \left[f(x_2, \dots, x_l) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^{dn}} (dy)^n K(x_1; \{y_1, \dots, y_n\}) f(x_2, \dots, x_l, y_1, \dots, y_n) \right]. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Для регулярних значень активності і температури розв'язок записуємо у вигляді ряду

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z\hat{K} \right)^n \rho_0, \quad (16.14)$$

який є абсолютно збіжним в області

$$|z| < e^{-2\beta-1} C(\beta)^{-1}. \quad (16.15)$$

В аналітичному підході розглядається рівняння для функцій

$$\rho_j(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{\Xi_j} \int_{\Gamma_0} e_\lambda(j; \eta \cup \gamma) e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (16.16)$$

де

$$\Xi_j = \int_{\Gamma_0} e_\lambda(j; \gamma) e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (16.17)$$

функціонал $e_\lambda(j; \gamma)$ визначений рівнянням

$$e_\lambda(j; \eta) := \begin{cases} 1, & \eta = \emptyset, \\ \prod_{x \in \eta} j(x), & \eta \in \Gamma_0 \setminus \{\emptyset\}, \end{cases} \quad (16.18)$$

а $j: \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ — обмежена (для простоти візьмемо $j \leq 1$), неперервна, невід’ємна, фінітна функція. Якщо $j = \mathbb{1}_\Lambda$ (індикатор множини Λ), тоді вираз (16.16) збігається з виразом для кореляційних функцій в обмеженому об’ємі Λ з порожніми граничними розподілами.

Таким самим чином легко показати, що ці функції задовольняють рівняння Кірквуда–Зальцбурга:

$$\begin{aligned} \rho_j(\eta) &= z e^{-\beta W(x; \eta^{(\hat{x})})} j(x) \int_{\Gamma_0} K(x; \xi) \rho_j(\eta^{(\hat{x})} \cup \xi) \lambda_\sigma(d\xi), \quad |\eta| \geq 1, \\ \rho_j(\emptyset) &= 1. \end{aligned} \quad (16.19)$$

Будемо шукати розв’язок рівнянь (16.19) у такому вигляді:

$$\rho_j(\eta) = e_\lambda(j; \eta) \int_{\Gamma_0} T(\eta|\gamma) e_\lambda(j; \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma), \quad (16.20)$$

де $e_\lambda(j; \eta)$ визначено формулою (16.18), а $T(\eta|\gamma)$ є вимірною функцією на $\Gamma_0 \times \Gamma_0$, яка повинна бути λ_σ -інтегровною за змінною γ . Функцію $T(\eta|\gamma)$ будемо називати *ядром Урсела*. Підставимо в рівняння (16.19) відповідні вирази функцій $\rho_j(\eta)$ і $\rho_j(\eta^{(\hat{x})} \cup \xi)$ і застосуємо до правої частини формулу (2.7) праці [28] з $G(\gamma \cup \xi) = e_\lambda(j; \gamma \cup \xi)$ і $H(\xi, \gamma) = K(\pi(\eta); \xi) T(\eta \setminus \{\pi(\eta)\} \cup \xi | \gamma)$. Внаслідок того, що рівність інтегралів в правій і лівій частині рівності (16.19) виконується при довільних функціях $j \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ми можемо прирівняти підінтегральні вирази. Отримаємо наступне співвідношення:

$$T(\eta|\gamma) = z e^{-\beta W(\pi(\eta); \eta \setminus \{\pi(\eta)\})} \sum_{\xi \subseteq \gamma} K(\pi(\eta); \xi) T(\eta \setminus \{\pi(\eta)\} \cup \xi | \gamma \setminus \xi) \quad (16.21)$$

Для довільних конфігурацій $\eta = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$ і $\gamma = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ таких, що $\eta \cap \gamma = \emptyset$, розв'язок цього рекурентного співвідношення можна записати у вигляді: внесків спеціальних графів-лісів (див. деталі в [28]).

Зв'язок цих двох підходів встановлює наступна лема.

Лема 16.2. *Для довільних n і $l \leq n + 1$*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n-l+1)!} \int (dy)^{n-l+1} T(\{x_1, \dots, x_l\} | \{y_1, \dots, y_{n-l+1}\}) \\ & = z^n (\hat{K}^n \rho_0)(x_1, \dots, x_l). \end{aligned} \quad (16.22)$$

16.5 Віріальні розклади кореляційних функцій канонічного ансамблю

Проблема побудови розкладу кореляційних функцій у канонічному ансамблі є більш складною ніж у великому канонічному ансамблі. Це тому, що для кореляційних функцій канонічного ансамблю в обмеженому об'ємі не можна записати рівняння. Існують тільки рекурентні співвідношення, які перетворюються в систему інтегральних рівнянь при переході до термодинамічної границі. Тобто треба окремо довести збіжність скінченнооб'ємних кореляційних функцій до їх граничних значень. Більш прозорий варіант був викладений в огляді [75]. Але рівняння для граничних кореляційних функцій буде мати такий вигляд:

$$\rho(\eta) = \varrho a(\varrho) e^{-\beta W(x_1; \eta^{(\hat{x}_1)})} \int_{\Gamma_0} K(x_1; \xi) \rho(\eta^{(\hat{x}_1)} \cup \xi) \lambda_\sigma(d\xi), \quad (16.23)$$

де

$$a(\varrho) = \frac{1}{\tilde{Q}(\varrho)}, \quad \tilde{Q}(\varrho) = \int_{\Gamma_0} K(x_1; \xi) \rho(\xi) \lambda_\sigma(d\xi). \quad (16.24)$$

Розв'язок рівнянь (16.23) операторним методом Рюеля чи аналітичним методом приводить до ряду за параметром $\varrho a(\varrho)$. Тому в дійсності ці рівняння є нелінійні бо $a(\varrho)$ залежить від усіх кореляційних функцій.

Перепишемо рівняння (16.23), (16.24) таким чином:

$$\tilde{Q}(\rho_j)\rho_j(\eta) = \varrho e^{-\beta W(x_1; \eta^{(\hat{x}_1)})} j(x_1) \int_{\Gamma_0} K(x_1; \xi) \rho_j(\eta^{(\hat{x}_1)} \cup \xi) \lambda_\sigma(d\xi), \quad (16.25)$$

$$\tilde{Q}(\rho_j) = \int_{\Gamma_0} K(x_1; \xi) \rho_j(\xi) \lambda_\sigma(d\xi), \quad (16.26)$$

де ми ввели додатню функцію $j: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ і $\rho(\eta)$ є функціонал такий, що $\rho(\eta) = \rho_j(\eta)|_{j=1}$.

Будемо шукати розв'язок у вигляді:

$$\rho_j(\eta) = e(j; \eta) \int_{\Gamma_0} T(\eta|\gamma) e(j; \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma), \quad (16.27)$$

де $e(j; \eta)$ задано в (16.18).

Тоді для ядра $T(\eta|\gamma)$ одержимо нелінійне рекурентне співвідношення:

$$\begin{aligned} T(\eta|\gamma) = & \varrho e^{-\beta W(x_1; \eta')} \sum_{\xi \subseteq \gamma} K(x_1; \xi) T(\eta' \cup \xi | \gamma \setminus \xi) - \\ & - \sum_{\substack{\xi \subseteq \gamma \\ \xi \neq \emptyset}} T(\eta | \gamma \setminus \xi) \sum_{\substack{\zeta \subseteq \xi \\ \zeta \neq \emptyset}} K(x_1; \zeta) T(\zeta | \xi \setminus \zeta). \end{aligned} \quad (16.28)$$

Початкові умови є такими:

$$T(\emptyset|\emptyset) = 1, \quad T(\emptyset|\gamma) = 0, \quad \text{якщо } \gamma \neq \emptyset, \quad (16.29)$$

$$T(\{\eta|\gamma) = 0, \quad \text{якщо } \eta \cap \gamma \neq \emptyset. \quad (16.30)$$

Аналітичний вираз ядра $T(\eta|\gamma)$ можна подати за допомогою внесків графів-лісів. Але нелінійний член, очевидно, значно збільшує кількість лісових графів. Проте згідно з формулою (16.28) кожен внесок лісового графа, що містить дерево із внеском множника $K(x_1; \xi)$, $\xi \in \gamma$, який з'являється у другій сумі в (16.28), включається зі знаком мінус. Щоб продемонструвати скорочення аналітичних виразів треба виконати додаткові розклади експонент. Але така процедура еквівалентна перетворенню внеска від граф-дерева у внесок звичайного майєровського графа. Щоб описати цю процедуру визначимо множину графів $\mathcal{D}(\eta; \gamma)$.

Означення 16.1. Множина $\mathcal{D}(\eta; \gamma)$ є множиною кореневих графів, зв'язні компоненти яких є 2-зв'язними графами відносно конфігурації γ . Будь-який граф $G \in \mathcal{D}(\eta; \gamma)$ має $m = |\eta|$ вершин конфігурації η і $n = |\gamma|$ вершин конфігурації γ . Кожна вершина з η може бути вільною від ліній або з'єднуватися тільки з вершинами y конфігурації γ . Кожна вершина $y \in \gamma$ з'єднується з вершинами x або y принаймні двома лініями. Якщо до експоненти $\exp[-\beta U(\eta)]$ застосувати розклад додаючи і віднімаючи одиницю, то множина $\exp[-\beta U(\eta)]\mathcal{D}(\eta; \gamma)$ буде збігатися зі множиною $\mathcal{D}(W; B)$. Роль коренів графа відіграє конфігурація η . Одноточковий граф $G \in \mathcal{D}(x_1; \emptyset)$. Внесок будь-якої вершини дорівнює ϱ . Внесок лінії $w(l_{xy})$, яка з'єднує дві вершини x та y або y_i та y_j , це $K(x; y)$.

Основне твердження розділу таке (див. [75]):

Теорема 16.2. *Розв'язок рекурентного співвідношення (16.28) можна записати внесками від графів множини $\mathcal{D}(\eta; \gamma)$:*

$$T(\eta|\gamma) = \varrho^{|\eta|+|\gamma|} \exp[-\beta U(\eta)] \sum_{G \in \mathcal{D}(\eta; \gamma)} w_G(\eta, \gamma).$$

17 Асимптотичні солітоноподібні розв'язки модифікованого рівняння Камасси–Холма зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням

Розглянуто модифіковане рівняння Камасси–Холма зі змінними коефіцієнтами і сингулярним збуренням вигляду:

$$a(x, t, \varepsilon)u_t - \varepsilon^2 u_{xxt} + b(x, t, \varepsilon)u^2 u_x - 2\varepsilon^2 u_x u_{xx} - \varepsilon^2 u u_{xxx} = 0. \quad (17.1)$$

Тут ε — малий параметр.

Вважається, що функції $a(x, t, \varepsilon)$ і $b(x, t, \varepsilon)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0; T]$ для деякого $T > 0$ можна представити таким чином:

$$\begin{aligned} a(x, t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k a_k(x, t) + O(\varepsilon^{N+1}), \\ b(x, t, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k b_k(x, t) + O(\varepsilon^{N+1}), \end{aligned} \quad (17.2)$$

і $a_0(x, t)b_0(x, t) \neq 0$ для всіх $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0; T]$.

Рівняння (17.1) узагальнює модифіковане рівняння Камасса–Холма, яке використовується для опису хвильових процесів на мілкій воді:

$$u_t - u_{xxt} + 3u^2 u_x = 2u_x u_{xx} + u u_{xxx}. \quad (17.3)$$

Це рівняння є повністю інтегрованою динамічною системою і вивчалось за допомогою багатьох методів, включаючи підхід Рімана–Гільберта. Доступні кілька результатів щодо стабільності піконових розв'язків, коректності, існування глобальних розв'язків, а також явища розриву. Рівняння (17.3) має розв'язки з різними властивостями, включаючи солітонні розв'язки, багатосолітонні розв'язки, періодичні розв'язки тощо. Наприклад, солітонні розв'язки рівняння (17.3) можна записати так:

$$u(x, t) = \frac{8\mu^2}{(\mu + A \cosh(2t - x) - A \sinh(2t - x))^2} \quad (17.4)$$

$$-\frac{8\mu}{\mu + A \cosh(2t - x) - A \sinh(2t - x)},$$

де A, μ — дійсні числа і $\mu A > 0$.

Для опису хвильових процесів у рідинах з неоднорідними характеристиками наведених вище рівнянь уже недостатньо: для цього запропоновано більш загальні версії рівняння (17.3) зі змінними коефіцієнтами. У цьому розширеному випадку точна форма рішень невідома, оскільки більшість традиційних аналітичних методів втрачають свою ефективність через наявність змінних коефіцієнтів. Отже, доцільно шукати наближені розв'язки, подібні до точних розв'язків відповідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У ситуаціях, що характеризуються малою дисперсією в середовищі або впливом зовнішньої сили, методи асимптотичного аналізу продемонстрували свою ефективність. Зокрема, метод ВКБ виявився корисним для побудови солітоноподібних розв'язків рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами. Наприклад, для рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами і сингулярними збуреннями були побудовані асимптотичні однофазні та багатofазні солітоноподібні рішення. Характеристики цих розв'язків подібні до характеристик класичного рівняння Кортевега–де Фріза зі сталими коефіцієнтами. У подальшому використовуються певні функціональні простори. Позначаємо через G простір нескінченно диференційованих функцій $f: \mathbb{R} \times [0; T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняють наступні дві умови:

- 1) для будь-яких цілих невід'ємних чисел n, p, q і r

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} f(x, t, \tau) = 0,$$

рівномірно відносно $(x, t) \in K$, для довільної компактної множини $K \subset \mathbb{R} \times [0; T]$.

- 2) існує диференційована функція $f^-: \mathbb{R} \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ така, що для

будь-яких невід'ємних цілих n, p, q і r

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^q}{\partial t^q} \frac{\partial^r}{\partial \tau^r} (f(x, t, \tau) - f^-(x, t)) = 0,$$

рівномірно відносно $(x, t) \in K$, для довільної компактної множини $K \subset \mathbb{R} \times [0; T]$.

Нехай G_0 — підпростір G , що складається з усіх функцій $f \in G$ таких, що

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} f(x, t, \tau) = 0,$$

рівномірно відносно змінних $(x, t) \in K$, для довільної компактної множини $K \subset \mathbb{R} \times [0; T]$.

Через $\tilde{G}$ позначимо простір нескінченно диференційовних функцій $g: [0; T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняє наступні дві умови:

- 1) для будь-яких цілих невід'ємних чисел n, p і q

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial t^p} \frac{\partial^q}{\partial \tau^q} g(t, \tau) = 0,$$

рівномірно відносно $t \in [0; T]$.

- 2) існує диференційована функція $g^-: [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ така, що для будь-яких невід'ємних цілих чисел n, p і q

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \tau^n \frac{\partial^p}{\partial t^p} \frac{\partial^q}{\partial \tau^q} (g(t, \tau) - g^-(t)) = 0,$$

рівномірно відносно $t \in [0; T]$.

Нехай $\tilde{G}_0$ — підпростір $\tilde{G}$, що складається з усіх функцій $g: [0; T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, так що

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} g(t, \tau) = 0,$$

рівномірно відносно $t \in [0; T]$.

Визначення асимптотичної солітоноподібної функції дано нижче.

Означення 17.1. Функція $u = u(x, t, \varepsilon)$, де $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0; T]$, а $\varepsilon > 0$ – малий параметр, називається асимптотичною однофазовою солітоноподібною функцією, якщо для будь-якого цілого $N \geq 0$ її можна представити у вигляді

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j [u_j(x, t) + V_j(x, t, \tau)] + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \quad (17.5)$$

де $\varphi \in C^\infty([0; T])$ – скалярна функція, $u_j \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0; T])$, для $j = 0, 1, \dots, N$, нетривіальна функція $V_0 \in G_0$, і $V_j \in G$, для $j = 1, \dots, N$.

Асимптотичний однофазний солітоноподібний розв’язок рівняння (17.1) шукається у формі (17.5). Функція φ називається *фазовою функцією* і буде визначена як розв’язок диференціального рівняння першого порядку, який знайдено під час побудови асимптотичного розв’язку. Для даного асимптотичного солітоноподібного розв’язку u , як у (17.5), крива, визначена рівнянням $x - \varphi(t) = 0$, називається *кривою розриву*.

Регулярну частину $U_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j u_j(x, t)$ асимптотичного розв’язку (17.5) можна розглядати як фонову функцію, а сингулярна частина $V_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j V_j(x, t, \tau)$ необхідна для відображення солітонних властивостей асимптотичного розв’язку. Це змушує нас накласти на сингулярні терміни $V_j(x, t, \tau)$, $j = 0, 1, \dots$, відповідні функціональні обмеження.

Перейдемо до побудови асимптотичних солітоноподібних розв’язків рівняння (17.1). Ми розглядаємо випадок нульової фонової функції, тобто припускаємо виконання рівності $U_N(x, t, \varepsilon) \equiv 0$. Таким чином, розв’язок шукається у вигляді:

$$u(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j V_j(x, t, \tau) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}. \quad (17.6)$$

Перший доданок розкладу (17.6), тобто функція $V_0 = V_0(x, t, \tau)$ будується як розв’язок диференціального рівняння третього порядку:

$$-a_0 \varphi' \frac{\partial V_0}{\partial \tau} + \varphi' \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} + b_0 V_0^2 \frac{\partial V_0}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \tau} \right)^2 - V_0 \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} = 0, \quad (17.7)$$

де змінні (x, t) вважаються параметрами. У подальшому, для зручності залежність від змінних (x, t) опускається.

Старші члени асимптотики (17.6) визначаються стандартним чином:

$$-a_0 \varphi' \frac{\partial V_j}{\partial \tau} + \varphi' \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau^3} + b_0 \frac{\partial}{\partial \tau} (V_0^2 V_j) - V_0 \frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau^3} - \frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3} V_j = F_j, \quad (17.8)$$

де функції $F_j = F_j(x, t, \tau)$, $j = 1, \dots, N$, обчислюються рекуррентно, після визначення функцій $V_1, \dots, V_{j-1}$ на попередніх кроках.

Суттєвим моментом при побудові шуканого асимптотичного розв'язку є те, що рівняння (17.7), (17.8) повинні мати розв'язки в просторах G_0, G відповідно. Зауважимо також, що якщо $V_0 \in G_0$, то тоді функція

$$v_0(t, \tau) = V_0(x, t, \tau)|_{x=\varphi(t)} \in \tilde{G}_0,$$

а якщо $V_1 \in G$, то тоді функція

$$v_1(t, \tau) = V_1(x, t, \tau)|_{x=\varphi(t)} \in \tilde{G}.$$

Крім того, одночасно з визначенням функцій V_j , $j = 0, 1, \dots, N$, ми маємо також знайти фазову функцію $\varphi = \varphi(t)$, яка задає криву розриву $\Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0; T] \mid x = \varphi(t)\}$.

З урахуванням цих міркувань система рівнянь (17.7), (17.8) вивчається таким чином. Спочатку ми припускаємо, що фазова функція $\varphi = \varphi(t)$ є відомою. Потім рівняння (17.7), (17.8) розглядаються на кривій розриву Γ , при цьому змінна t трактується як параметр. Таким способом ми можемо знайти функцію $v_0 = v_0(t, \tau) = V_0(x, t, \tau)|_{x=\varphi(t)}$ у явному вигляді:

$$v_0(t, \tau) = -6 \frac{a_0(\varphi, t)}{b_0(\varphi, t)} \cosh^{-2} \left(\sqrt{a_0(\varphi, t)} \frac{\tau}{2} + C_0 \right), \quad (17.9)$$

де величина C_0 не залежить від τ .

Доводиться, що $v_0 = v_0(t, \tau)$ є швидко спадною функцією стосовно змінної τ , тобто $v_0 \in \tilde{G}_0$.

Далі використовуючи властивість $V_1 \in G$ ми знаходимо розв'язок $v_1(t, \tau) = V_1(x, t, \tau)|_{x=\varphi(t)}$ також у явному вигляді. Більш того, ми отримуємо необхідні і достатні умови існування швидко спадного розв'язку за змінною $\tau \rightarrow +\infty$. Після цього ці умови використовуються для отримання рівняння для фазової функції $\varphi = \varphi(t)$, яке записується таким чином:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 6 \frac{a_0(\varphi, t)}{b_0(\varphi, t)}. \quad (17.10)$$

Встановлено також розв'язність у відповідних функціональних просторах рівнянь (17.8) для старших членів асимптотики. Позначимо для $j = 0, 1, \dots, N$,

$$v_j = v_j(t, \tau) = V_j(x, t, \tau)|_{x=\varphi(t)}.$$

З рівнянь (17.8) для функцій $v_j(t, \tau)$ виводяться співвідношення:

$$\begin{aligned} (\varphi' - v_0) \frac{\partial^3 v_j}{\partial \tau^3} - a_0(\varphi, t) \varphi' \frac{\partial v_j}{\partial \tau} + b_0(\varphi, t) \frac{\partial}{\partial \tau} (v_0^2 v_j) \\ - 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \tau} \frac{\partial v_j}{\partial \tau} \right) - \frac{\partial^3 v_0}{\partial \tau^3} v_j = \mathcal{F}_j, \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (17.11)$$

де величини $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}_j(t, \tau)$ визначаються рекуррентно після знаходження функцій $V_0(x, t, \tau)|_{x=\varphi(t)}, V_1(x, t, \tau)|_{x=\varphi(t)}, \dots, V_{j-1}(x, t, \tau)|_{x=\varphi(t)}$. Тут для спрощення запису використано позначення φ замість $\varphi(t)$.

Позначимо для $j = 1, 2, \dots, N$

$$\Phi_j(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \mathcal{F}_j(t, \xi) d\xi + E_j(t), \quad (17.12)$$

де величина $E_j(t)$ не залежить від змінної τ і знаходиться з формули (17.12) за умови

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Phi_j(t, \tau) = 0.$$

Основний результат становить наступне твердження:

Теорема 17.1. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

1. Функції $a_j(x, t), b_j(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times [0; T])$, $j = 0, 1, \dots, N$, та

$$a_0(x, t)b_0(x, t) \neq 0 \quad \text{для всіх} \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0; T];$$

2. Нерівність $a_0(\varphi(t), t) > 0$ виконується для всіх $t \in [0; T]$, де функція φ задовольняє рівняння (17.10);

3. Виконуються умови ортогональності:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_j(t, \tau) v_0(t, \tau) d\tau = 0, \quad t \in [0; T], \quad j = 1, \dots, N; \quad (17.13)$$

4. Виконується умова

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi_j(t, \tau) = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

Тоді функція

$$u_N(x, t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^N \varepsilon^j V_j(x, t, \tau), \quad \tau = \frac{x - \varphi(t)}{\varepsilon}, \quad (17.14)$$

задовольняє рівняння (17.1) на множині $\mathbb{R} \times [0; T]$ з асимптотичною точністю $O(\varepsilon^N)$ і є N -им наближенням для асимптотичного солітоноподібного розв'язку рівняння (17.1).

Для ілюстрації отриманих результатів побудовано приклад рівняння Камаси–Холма зі змінними коефіцієнтами, для якого знайдено його перше асимптотичне наближення, а також побудовано їх графіки при різних значеннях малого параметра.

18 Теорія вимітання мір Радона на локально компактному просторі та її застосування

Цей розділ присвячено подальшому розвитку теорії потенціалу на локально компактному, хаусдорфовому просторі X відносно ядра κ , що визначається як напівнеперервна знизу, симетрична функція $\kappa: X \times X \rightarrow [0, \infty]$. Більш конкретно, наша мета — узагальнити класичну теорію вимітання¹¹ на якомога більш загальні ядра κ на X , а також показати ефективність такого узагальнення в дослідженні добре відомої варіаційної задачі Гаусса, див. [58, 80–82, 104]. Щодо інших результатів Н.В. Зорій, див. [57, 83, 105, 106].

18.1 Основні означення, позначення та постулати

Лінійний простір $\mathfrak{M}$ усіх дійсних мір Радона μ на X устаткуємо так званою *широкою* топологією — топологією поточної збіжності на класі $C_0(X)$ усіх неперервних функцій $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ з компактным носієм. Істотно зауважити, що широка топологія, взагалі кажучи, не задовольняє першу аксіому зліченності, а отже її опис вимагає використання *узагальнених послідовностей* (nets) або ж *фільтрів*. Для $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$, *взаємна енергія* та *потенціал* визначаються відповідно формулами¹²

$$I(\mu, \nu) := \int \kappa(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y),$$

$$U^\mu(x) := \int \kappa(x, y) d\mu(y), \quad x \in X,$$

якщо інтеграл справа є добре визначеним (як скінченне число або $\pm\infty$). При $\mu = \nu$, взаємна енергія $I(\mu, \nu)$ визначає *енергію* міри μ .

¹¹Щодо теорії вимітання на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, відносно ядра Ньютона див. піонерське дослідження Cartan H., Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, *Ann. Univ. Fourier Grenoble* **22** (1946), а також Doob J.L., Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart, Springer, Berlin (1984).

¹²Детальний опис теорії мір та інтегрування на локально компактному просторі наведено, наприклад, в монографії Bourbaki N., Integration. Chapters 1–6, Springer, Berlin (2004).

Всюди в розділах 18.2, 18.3 ядро κ задовольняє *принципам енергії, узгодженості та домінування*.¹³ Згідно з принципом енергії, $I(\mu) \geq 0$ для всіх мір $\mu \in \mathfrak{M}$, де $I(\mu) = 0$ лише для $\mu = 0$. Тоді всі $\mu \in \mathfrak{M}$ зі скінченною енергією утворюють передгільбертовий простір $\mathcal{E}$ з внутрішнім добутком $\langle \mu, \nu \rangle := I(\mu, \nu)$ та нормою $\|\mu\| := \sqrt{I(\mu)}$. Відповідна топологія нормованого простору на $\mathcal{E}$ називається *сильною*. Далі, згідно з принципом узгодженості, конус $\mathcal{E}^+ := \{\mu \in \mathcal{E} : \mu \geq 0\}$ *повний* в індукованій сильній топології, а сильна топологія на $\mathcal{E}^+$ *сильніша* широкої; отже, кожна сильно фундаментальна узагальнена послідовність в $\mathcal{E}^+$ збігається *одночасно сильно і широко* до єдиної міри в $\mathcal{E}^+$.¹⁴ Нарешті, згідно з принципом домінування, якщо $U^\mu \leq U^\nu$ μ -майже всюди, де $\mu \in \mathcal{E}^+$ і $\nu \in \mathfrak{M}^+ := \{\nu \in \mathfrak{M} : \nu \geq 0\}$, то ця нерівність справджується всюди в X .

Інколи від ядра вимагається також виконання *принципа Фростмана*, згідно з яким для всяких $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^+$ має місце нерівність $U^\mu \leq U^\nu$ всюди в X , якщо тільки вона справджується μ -майже всюди.

Приклад 18.1. Усі принципи енергії, узгодженості, домінування та Фростмана виконуються, наприклад, для таких ядер [80, Section 2.3]:

- ✓ Ядра α -Ріса $|x - y|^{\alpha-n}$ порядку $\alpha \in (0, 2]$, $\alpha < n$, на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (зокрема, ядро Ньютона $|x - y|^{2-n}$ на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$).
- ✓ Ядра α -Гріна, де $\alpha \in (0, 2]$ і $\alpha < n$, на довільній відкритій множині в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (зокрема, класичне ядро Гріна в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$).
- ✓ Класичне ядро Гріна на плоскій множині Гріна.

Якщо не зазначено інше, A — фіксована *довільна* множина в X . Позначимо через $\mathfrak{C}_A$ частково впорядковане зростаюче сімейство всіх компактних підмножин в A , де $K_1 \leq K_2$ означає, що $K_1 \subset K_2$. Збіжність

¹³Щодо теоретико-потенціальних принципів та співвідношень між ними, див. Ohtsuka M., On potentials in locally compact spaces, *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I* **25** (1961), 135–352.

¹⁴Теорія потенціалів відносно узгоджених ядер розвинена в піонерському дослідженні Fuglede B., On the theory of potentials in locally compact spaces, *Acta Math.* **103** (1960), 139–215.

узагальненої послідовності $(x_K)_{K \in \mathfrak{C}_A} \subset Y$ до $x_0 \in Y$, де Y — топологічний простір, зображується наступним записом: $x_K \rightarrow x_0$ в Y при $K \uparrow A$.

Позначимо символом $\mathfrak{M}_A^+$ клас усіх $\mu \in \mathfrak{M}^+$, *зосереджених на A* (це означає, що множина A є μ -вимірною і $\mu = \mu|_A$, де $\mu|_A$ — звуження μ на A), а символом $\mathcal{E}'_A$ — замикання $\mathcal{E}_A^+ := \mathfrak{M}_A^+ \cap \mathcal{E}$ у сильній топології на просторі $\mathcal{E}$. Оскільки конус $\mathcal{E}^+$ сильно повний згідно з принципом узгодженості, його сильно замкнута підмножина $\mathcal{E}'_A$ є також сильно повною.

Твердження $\mathcal{T}(x)$ справджується *приблизно всюди* (пр. вс.) на A , якщо множина E всіх $x \in A$, де $\mathcal{T}(x)$ не виконується, має нульову *внутрішню ємність* $c_*(E)$. Замінивши тут внутрішню ємність множини E на її *зовнішню ємність* $c^*(E)$, отримаємо поняття *квазі-всюди*.¹⁵

18.2 Внутрішнє вимітання: існування та єдиність, альтернативні означення, теореми збіжності, елементарні властивості

Теорема 18.1. *Для всякої множини $A \subset X$ та всякої міри $\sigma \in \mathcal{E}^+$ існує єдина міра $\sigma^A \in \mathcal{E}'_A$, яка називається внутрішнім вимітанням σ на A і характеризується любым з наступних (еквівалентних) тверджень.*

- (i) σ^A — єдина міра в $\mathcal{E}'_A$, що має властивість $U^{\sigma^A} = U^\sigma$ пр. вс. на A .
- (ii) σ^A — єдина ортогональна проекція міри σ в просторі $\mathcal{E}$ на (опуклий, сильно замкнутий) конус $\mathcal{E}'_A$.¹⁶ Іншими словами, $\sigma^A \in \mathcal{E}'_A$

i

$$\|\sigma - \sigma^A\| = \min_{\mu \in \mathcal{E}'_A} \|\sigma - \mu\|.$$

¹⁵Щодо теорій внутрішньої та зовнішньої ємностей множин відносно узгоджених ядер на локально компактному просторі, див. наведену вище роботу Fuglede (1960). Якщо множина E вимірна по ємності (capacitable — наприклад, відкрита або компактна), то будемо писати $c(E) := c_*(E) = c^*(E)$.

¹⁶Щодо існування такої проекції, див. теорему 1.12.3 в монографії Edwards R.E., Functional Analysis. Theory and Applications, Holt, Rinehart and Winston, New York (1965).

(iii) σ^A визначається єдиним чином таким, що σ^A є єдиним з співвідношень¹⁷

$$\begin{aligned}\sigma^K &\rightarrow \sigma^A && \text{сильно в } \mathcal{E}^+ \text{ при } K \uparrow A, \\ \sigma^K &\rightarrow \sigma^A && \text{широко в } \mathcal{E}^+ \text{ при } K \uparrow A, \\ U^{\sigma^K} &\uparrow U^{\sigma^A} && \text{поточково в } X \text{ при } K \uparrow A,\end{aligned}$$

де σ^K — єдина міра в $\mathcal{E}_K^+$ з властивістю $U^{\sigma^K} = U^\sigma$ нр. вс. на K .

(iv) σ^A — єдина міра в класі $\Gamma_{A,\sigma}$, що має властивість

$$U^{\sigma^A} = \min_{\mu \in \Gamma_{A,\sigma}} U^\mu \quad \text{всюди на } X,$$

де

$$\Gamma_{A,\sigma} := \{\mu \in \mathcal{E}^+ : U^\mu \geq U^\sigma \quad \text{нр. вс. на } A\}.$$

(v) σ^A — єдина міра в класі $\Gamma_{A,\sigma}$, що має властивість

$$\|\sigma^A\| = \min_{\mu \in \Gamma_{A,\sigma}} \|\mu\|.$$

Доведення. Див. [58, Definition 4.1, Proofs of Theorems 4.3, 4.8] і [80, Definition 1.1, Proof of Theorem 3.1]. $\square$

Наслідок 18.1. Нехай простір X є зліченим об'єднанням компактних множин,¹⁸ а ядро κ задовольняє принцип максимуму Фростмана. Тоді σ^A є мірою з мінімальною повною масою в класі $\Gamma_{A,\sigma}$:

$$\sigma^A(X) = \min_{\mu \in \Gamma_{A,\sigma}} \mu(X). \quad (18.1)$$

Доведення. Це безпосередньо випливає з теореми 18.1(iv) з допомогою принципу позитивності мас у формі, наведений в [80, Theorem 2.1]. $\square$

¹⁷Твердження (iii) теореми 18.1 обґрунтовує термін "внутрішнє"вимітання.

¹⁸Такий простір X називається зліченим на нескінченності, див. Section I.9, Definition 5 у Bourbaki N., General Topology. Chapters 1–4, Springer, Berlin (1989).

Зауваження 18.1. Властивість (18.1) не може слугувати, однак, альтернативним означенням внутрішнього вимітання, оскільки вона не визначає σ^A однозначно. Дійсно, розглянемо ядро α -Ріса порядку $\alpha \leq 2$, $\alpha < n$, на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, і замкнуту, не α -тонку на нескінченності множину $A \subset \mathbb{R}^n$ (наприклад, $A := \{|x| \geq 1\}$).¹⁹ Тоді для всякої міри $\sigma \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \setminus A}^+$,

$$\sigma^A \neq \sigma \quad \text{і} \quad \sigma^A(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathbb{R}^n), \quad (18.2)$$

де друге співвідношення випливає з [57, Corollary 5.3]. А оскільки σ і σ^A належать опуклому конусу $\Gamma_{A,\sigma}$, то з формул (18.1) і (18.2) бачимо, що існує насправді нескінченно багато різних мір в $\Gamma_{A,\sigma}$ з мінімальною повною масою, оскільки такими є всі міри $a\sigma + b\sigma^A$, де $a, b \in [0, 1]$ і $a + b = 1$.

Зауважимо, що, взагалі кажучи, внутрішнє вимітання σ^A не зосереджене на множині A , тобто $\sigma^A \notin \mathcal{E}^+(A)$. Наприклад, якщо κ — ядро Ньютона в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, а A — відкрита куля $\{|x| < r\}$, то для всякого $\sigma \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n \setminus A}^+$ виконується $\text{Supp}(\sigma^A) = \{|x| = r\}$, де $\text{Supp}(\cdot)$ — носій міри. Це, однак, вже не так, якщо множина A замкнута в X або, більш загально, квазі-замкнута (див. означення 18.1 і наслідок 18.2).

Означення 18.1. Множина A називається *квазі-замкнутою*, якщо

$$\inf_F c^*(A \triangle F) = 0, \quad (18.3)$$

де множина $F \subset X$ замкнута, а $\triangle$ позначає симетричну різницю множин. Заміняючи в (18.3) замкнуті F на компактні $K \subset X$, отримаємо означення *квазі-компактної* множини A .²⁰

¹⁹Множина $Q \subset \mathbb{R}^n$ називається *внутрішньо α -тонкою на нескінченності*, якщо

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{c_*(Q_j)}{q^{j(n-\alpha)}} < \infty,$$

де $q \in (1, \infty)$ і $Q_j := Q \cap \{x \in \mathbb{R}^n : q^j \leq |x| < q^{j+1}\}$. Див. Kurokawa T. and Mizuta Y., On the order at infinity of Riesz potentials, *Hiroshima Math. J.* **9** (1979), 533–545, а також [57, Section 2].

²⁰Див. Fuglede B., The quasi topology associated with a countably subadditive set function, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **21** (1971), 123–169.

Наслідок 18.2. *Якщо множина A квазі-замкнута (квазі-компактна), то теорема 18.1 залишається в силі з $\mathcal{E}'_A$, заміненем всюди на $\mathcal{E}_A^+$.*

Доведення. Це випливає з теореми 18.1, оскільки для квазі-замкнутого A конус $\mathcal{E}_A^+$ сильно замкнутий, а отже $\mathcal{E}'_A = \mathcal{E}_A^+$ (див. [104, Theorem 2.13]). $\square$

Окрім твердження (iii) теореми 18.1, мають місце наступні дві теореми збіжності при апроксимації множини A монотонними сімействами.

Теорема 18.2. *Нехай A — об'єднання зростаючої послідовності (A_j) універсально вимірних множин.²¹ Тоді для всякого $\sigma \in \mathcal{E}^+$ виконується*

$$\begin{aligned} \sigma^{A_j} &\rightarrow \sigma^A && \text{сильно і широко в } \mathcal{E}^+ \text{ при } j \rightarrow \infty, \\ U^{\sigma^{A_j}} &\uparrow U^{\sigma^A} && \text{поточково всюди в } X \text{ при } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теорема 18.3. *Нехай A — перетин спадної узагальненої послідовності (аналогічно, спадної послідовності) (A_j) замкнутих (відповідно, квазі-замкнутих) множин. Тоді для всякого $\sigma \in \mathcal{E}^+$ виконується*

$$\begin{aligned} \sigma^{A_j} &\rightarrow \sigma^A && \text{сильно і широко в } \mathcal{E}^+, \\ U^{\sigma^{A_j}} &\downarrow U^{\sigma^A} && \text{поточково квазі-всюди в } X. \end{aligned}$$

Доведення. Щодо доведень теорем 18.2, 18.3, див. [57, SS8.2, 8.3]. $\square$

Нарешті, наведемо деякі елементарні властивості внутрішнього вимітання, встановлені в [57, §7].

Твердження 18.1 (Властивість монотонності). *Якщо $A \subset Q \subset X$, то для всякого $\sigma \in \mathcal{E}^+$ виконується $U^{\sigma^A} \leq U^{\sigma^Q}$ всюди в X .*

Твердження 18.2 (Вимітання 'з відпочинком'). *Якщо $A \subset Q \subset X$, то для всякого $\sigma \in \mathcal{E}^+$ маємо $\sigma^A = (\sigma^Q)^A$.*

Твердження 18.3. *Якщо $\sigma \in \mathcal{E}'_A$ (зокрема, $\sigma \in \mathcal{E}_A^+$), то $\sigma^A = \sigma$.*

²¹Множина в X називається універсально вимірною, якщо вона μ -вимірна для всякого $\mu \in \mathfrak{M}^+$.

Твердження 18.4. *Якщо ядро κ задовольняє принцип Фростмана, то для всяких $A \subset X$ і $\sigma \in \mathcal{E}^+$ виконується $\sigma^A(X) \leq \sigma(X)$.*

Твердження 18.5. *Якщо внутрішня ємність множини A скінченна, а ядро κ задовольняє принцип Фростмана, то*

$$\sigma^A(X) = \int U^{\gamma_A} d\sigma \quad \text{для всякого } \sigma \in \mathcal{E}^+,$$

де γ_A — внутрішня рівноважна міра множини A .²²

18.3 Зовнішнє вимітання і його властивості

Показано, що при додаткових топологічних обмеженнях на локально компактний, хаусдорфовий простір X і множину $A \subset X$ досліджене в розділі 18.2 внутрішнє вимітання σ^A , де $\sigma \in \mathcal{E}$ — довільна додатна міра Радона зі скінченною енергією, служить зовнішнім вимітанням.

Теорема 18.4. *Нехай простір X задовольняє другу аксіому зліченності, а $A \subset X$ є борелівською множиною. Тоді теорема 18.1 залишається в силі з 'приблизно всюди на A ', замінену повсюди на 'квазі-всюди на A '. Міра σ^{*A} , таким чином однозначно визначена, називається зовнішнім вимітанням $\sigma \in \mathcal{E}$ на множину A . Більш того, має місце рівність*

$$\sigma^{*A} = \sigma^A.$$

Теорема 18.4 випливає з теореми 18.1 з врахуванням наступного.

Теорема 18.5. *Якщо простір X має зліченну базу відкритих множин, то для любого узгодженого ядра всяка борелівська множина в X вимір-на по ємності.*

Доведення. Це є наслідком з теореми 4.5 згаданої в примітці 14 роботи Fuglede, оскільки локально компактний, хаусдорфовий простір X має

²²Щодо внутрішньої рівноважної міри γ_A , див. теорему 4.1 у згаданій в примітці 14 роботи Fuglede.

зліченну базу відкритих множин тоді і лише тоді, коли він метризовний і є зліченим об'єднанням компактних множин.²³ $\square$

В свою чергу, з теорем 18.4 і 18.5 випливає, що всі інші твердження розділу 18.2 залишаються в силі з заміною термінів σ^A , 'приблизно всюди на A ', 'внутрішня ємність' і 'внутрішня рівноважна міра' відповідно на σ^{*A} , 'квазі-всюди на A ', 'зовнішня ємність' і 'зовнішня рівноважна міра'.

18.4 Застосування теорії вимітання до варіаційної задачі Гаусса

Всюди далі вважаємо, що виконуються наступні умови (H_1) і (H_2) :

(H_1) Ядро κ задовольняє принципи енергії та узгодженості.

(H_2) Конус $\mathcal{E}^+(A)$ сильно замкнутий, а отже сильно повний.

(Щодо означень, див. розділ 18.1. Умова (H_2) виконується, зокрема, якщо множина A квазі-замкнута, означення 18.1 і [104, Theorem 2.13].)

Щоб уникнути тривіальностей, всюди далі вважаємо, що $c_*(A) > 0$. Тоді і лише тоді клас $\mathcal{E}_A^+$ не зводиться до $\{0\}$, а отже

$$\check{\mathcal{E}}_A^+ := \{\mu \in \mathcal{E}_A^+ : \mu(X) = 1\} \neq \emptyset. \quad (18.4)$$

А оскільки $c(K) \uparrow c_*(A)$, де $K \uparrow A$, то при апроксимації A множинами $K \in \mathfrak{C}_A$ без обмеження загальності розгляду покладаємо $c(K) > 0$.

Зафіксуємо універсально вимірну функцію $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, яка трактується як *зовнішнє поле*, що діє на заряди (міри) на просторі X . Відсилаючи до [104] за аналізом варіаційної задачі Гаусса для більш загальних f , для простоти формулювань обмежимося випадком, коли

$$f := -U^\vartheta, \quad \text{де } \vartheta \in \mathcal{E}. \quad (18.5)$$

²³Див. Section IX.2, Corollary to Proposition 16 у монографії Bourbaki N., General Topology. Chapters 5–10, Springer, Berlin (1989).

Тоді f скінченна квазі-всюди на X (див. с. 165 згаданої у виносці 14 статті Fuglede) і має скінченний *функціонал Гаусса* $I_f(\mu)$ для всіх $\mu \in \mathcal{E}$:²⁴

$$I_f(\mu) := \|\mu\|^2 + 2 \int f d\mu = \|\mu - \vartheta\|^2 - \|\vartheta\|^2 \in (-\infty, \infty). \quad (18.6)$$

Задача 18.1. Чи існує $\lambda_{A,f} \in \check{\mathcal{E}}_A^+$, що мінімізує функціонал Гаусса:

$$I_f(\lambda_{A,f}) = \inf_{\mu \in \check{\mathcal{E}}_A^+} I_f(\mu) =: w_f(A)?$$

Ця задача, відома в літературі як *варіаційна задача Гаусса*, є коректною, оскільки внаслідок (18.4), (18.6) і принципу енергії виконується

$$-\infty < -\|\vartheta\|^2 \leq w_f(A) < \infty.$$

Хоча вона бере свій початок ще в роботі Гаусса,²⁵ її нинішня актуальність обумовлена численними застосуваннями до конструктивної теорії функцій (див., наприклад, згадану вище монографію Saff і Totik) та ін.

Лема 18.1. Розв'язок $\lambda_{A,f}$ задачі 18.1 (якщо він існує) є єдиним.

Доведення. Це перевіряється стандартними методами, що ґрунтуються на передгільбертовій структурі простору $\mathcal{E}$ та опуклості класу $\check{\mathcal{E}}_A^+$. $\square$

Зауваження 18.2. Для компактного $A =: K$ розв'язок $\lambda_{K,f}$ задачі 18.1 завжди існує. Це очевидно в силу широкої напівнеперервності знизу функціонала $I_{f|_K}(\mu)$, де $\mu \in \mathcal{E}_K^+$, та широкої замкнутості класу $\check{\mathcal{E}}_K^+$.²⁶ Однак, як зазначено в розділі 2.2 згаданої у виносці 13 роботи Ohtsuka, для некомпактної множини A задача 18.1 є *'вельми складною'*. Більш того, як буде показано нижче, ця задача є, взагалі кажучи, *нерозв'язною*.

²⁴У конструктивній теорії функцій $I_f(\mu)$ також називають *f-ваговою енергією* міри μ — див., наприклад, Saff E.B., Totik V., Logarithmic Potentials with External Fields, Springer, Berlin (2024).

²⁵Див. Gauss C.F., Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte (1839), Werke 5, 197–244 (1867).

²⁶Див. Section III.1, Corollary 3 у згаданій у виносці 12 монографії Bourbaki.

18.4.1 Деякі елементи запропонованого методу

Щоб отримати достатні та/або необхідні умови існування $\lambda_{A,f}$, нами запропоновано новий ефективний підхід, що ґрунтується на одночасному використанні сильної та широкої топологій на просторі $\mathcal{E}$ та властивості узгодженості між ними. Ключову роль тут відіграє концепція *екстремальної міри*, введена лемою 18.2.

Узагальнену послідовність (μ_j) назовемо *мінімізуючою*, якщо

$$(\mu_j) \subset \check{\mathcal{E}}_A^+ \quad \text{і} \quad \lim_j I_f(\mu_j) = w_f(A); \quad (18.7)$$

сукупність усіх таких (μ_j) позначимо символом $\mathbb{M}_f(A)$.

Лема 18.2. *Існує єдина міра $\xi_{A,f} \in \mathcal{E}_A^+$, що має властивість*

$$\mu_j \rightarrow \xi_{A,f} \quad \text{сильно і широко в } \mathcal{E}_A^+ \text{ для всякого } (\mu_j) \in \mathbb{M}_f(A); \quad (18.8)$$

таку $\xi_{A,f}$ назовемо екстремальною.

Доведення. Застосовані тут аргументи ґрунтуються на опуклості класу $\mathbb{M}_f(A)$ та тотожності паралелограма в передгільбертовому просторі $\mathcal{E}$. Більш детально, див. [104, Proof of Lemma 4.1]. $\square$

Лема 18.3. *Функціонал $I_f(\mu)$ сильно неперервний на $\mathcal{E}$, а отже*

$$I_f(\xi_{A,f}) = w_f(A).$$

Доведення. Це очевидно з врахуванням співвідношень (18.6)–(18.8). $\square$

Лема 18.4. *$\lambda_{A,f}$ існує тоді і лише тоді, коли $\xi_{A,f} \in \check{\mathcal{E}}_A^+$ (або еквівалентно, $\xi_{A,f}(X) = 1$);²⁷ у ствердному випадку ці дві міри співпадають:*

$$\lambda_{A,f} = \xi_{A,f}.$$

Доведення. Це випливає з леми 18.3 з врахуванням хаусдорфовості сильної і широкої топологій. Більш детально, див. [104, Proof of Lemma 4.5]. $\square$

²⁷Взагалі кажучи, $\xi_{A,f}(X) \leq 1$, що видно з леми 18.2 і широкої напівнеперервності знизу функції $\mu \mapsto \mu(X)$ на $\mathfrak{M}^+$ (див. Section IV.1, Proposition 4 у згаданий у виносі 12 монографії Bourbaki).

При аналізі існування розв'язку $\lambda_{A,f}$ часто є корисною наступна його характеристична властивість, відома ще з початку 2000-х.²⁸

Теорема 18.6. *Щоб міра $\lambda \in \check{\mathcal{E}}_A^+$ слугувала розв'язком $\lambda_{A,f}$, необхідно і достатньо виконання любого з співвідношень*

$$\begin{aligned} U_f^\lambda &\geq c_{A,f} \quad \text{пр. вс. на } A, \\ U_f^\lambda &= c_{A,f} \quad \lambda\text{-майже всюди,} \end{aligned}$$

де

$$c_{A,f} := \int U_f^{\lambda_{A,f}} d\lambda_{A,f} \in (-\infty, \infty)$$

називається внутрішньою f -ваговою рівноважною константою для множини A , а $U_f^\lambda := U^\lambda + f$ називається f -ваговим потенціалом міри λ .

18.4.2 Необхідні та достатні умови розв'язності варіаційної задачі Гаусса

Теорема 18.7. *Окрім постійних умов (H_1) , (H_2) та (18.5), нехай²⁹*

$$c_*(A) < \infty. \tag{18.9}$$

Тоді (єдиний) розв'язок $\lambda_{A,f}$ задачі 18.1 дійсно існує.

Доведення. Дійсно, що при умовах (H_1) , (H_2) та (18.9) клас $\check{\mathcal{E}}_A^+$ є сильно замкнутим (див. [104, Proof of Theorem 1.2]), а отже $\xi_{A,f} \in \check{\mathcal{E}}_A^+$ (див. лему 18.2). Враховуючи лему 18.4, отримуємо бажане твердження. $\square$

Теорема 18.8. *Окрім (H_1) і (H_2) , нехай справджуються (H_3) і (H_4) :*

(H_3) Ядро κ задовольняє принципи Фростмана та домінування.

²⁸Див. теореми 1, 2 і твердження 1 у статті Zorii N.V., Equilibrium potentials with external fields, *Ukrainian Math. J.* **55** (2003), 1423–1444.

²⁹Якщо множина A квазі-компактна, то умови (H_2) і (18.9) справджуються автоматично і отже можуть бути упущені.

(H₄) Виконується наступний частковий випадок умови (18.5):

$$f = -U^\zeta, \quad \text{де } \zeta \in \mathcal{E}^+ \text{ і } \zeta(X) \leq 1.$$

Тоді розв'язок $\lambda_{A,f}$ існує тоді і лише тоді, коли

$$c_*(A) < \infty \quad \text{або} \quad \zeta^A(X) = 1,$$

де $\zeta^A \in \mathcal{E}_A^+$ — внутрішнє вимітання міри ζ на A . У ствердному випадку має місце зображення³⁰

$$\lambda_{A,f} = \begin{cases} \zeta^A + c_{A,f} \gamma_A, & \text{якщо } c_*(A) < \infty, \\ \zeta^A, & \text{якщо } c_*(A) = \infty, \end{cases} \quad (18.10)$$

де $\gamma_A \in \mathcal{E}_A^+$ — внутрішня рівноважна міра множини A , а $c_{A,f}$ — внутрішня f -вагова рівноважна константа, яка при вказаних тут умовах має вигляд

$$c_{A,f} := \frac{1 - \zeta^A(X)}{c_*(A)} \in [0, \infty).$$

До того ж цей розв'язок $\lambda_{A,f}$ альтернативно визначається любим з наступних трьох (еквівалентних) тверджень:

(i₁) $\lambda_{A,f}$ є єдиною мірою з мінімальною нормою в класі

$$\Lambda_{A,f} := \{ \mu \in \mathcal{E}^+ : U_f^\mu \geq c_{A,f} \quad \text{пр. вс. на } A \},$$

тобто

$$\lambda_{A,f} \in \Lambda_{A,f} \quad \text{і} \quad \|\lambda_{A,f}\| = \min_{\mu \in \Lambda_{A,f}} \|\mu\|.$$

³⁰Зображення (18.10) має численні застосування. Наприклад, для ядра α -Ріса $|x - y|^{\alpha-n}$ на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, порядку $0 < \alpha \leq 2$, $\alpha < n$, формула (18.10) дозволяє дати відповідь на Відкрите питання 2.1, підняте Ohtsuka в Section 2.12 його роботи, згаданої у виносі 13. Така відповідь є ствердною для $\alpha < 2$ і негативною для $\alpha = 2$ (див. [57, Theorem 4.2, Corollary 5.4], а також Theorem 8.5 в Zorii N., A theory of inner Riesz balayage and its applications, *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.* **68** (2020), 41–67).

(ii₁) $\lambda_{A,f}$ є єдиною мірою з мінімальним потенціалом в класі $\Lambda_{A,f}$, тобто³¹

$$\lambda_{A,f} \in \Lambda_{A,f} \quad i \quad U^{\lambda_{A,f}} = \min_{\mu \in \Lambda_{A,f}} U^{\mu} \quad \text{всюди на } X.$$

(iii₁) $\lambda_{A,f}$ є єдиною мірою в класі $\mathcal{E}^+(A)$, що має властивість

$$U_f^{\lambda_{A,f}} = c_{A,f} \quad \text{пр. вс. на } A.$$

Доведення. Відсилаючи до [104, Section 4.4] за цим вельми делікатним доведенням, ми обмежимося зауваженням, що воно використовує допоміжні результати з розділу 18.4.1 і істотно ґрунтується на теорії внутрішнього вимітання та теорії внутрішніх рівноважних мір (див. [58]–[81]). $\square$

Наслідок 18.3. При умовах $(H_1)–(H_4)$ нехай $c_*(A) = \infty$.³² Тоді задача 18.1 є нерозв’язною, якщо $\zeta(X) < 1$, і розв’язною, якщо $\zeta \in \check{\mathcal{E}}_A^+$. Більш того, в останньому випадку $\lambda_{A,f} = \zeta$.

Доведення. У першому випадку наслідок випливає з теореми 18.8 в силу твердження 18.4, а в другому — в силу твердження 18.3. $\square$

Наслідок 18.4. Якщо при умовах теореми 18.8 простір X є зліченим на нескінченності, то $\lambda_{A,f}$ має мінімальну повну масу в класі $\Lambda_{A,f}$:

$$\lambda_{A,f}(X) = \min_{\mu \in \Lambda_{A,f}} \mu(X) \quad (= 1). \quad (18.11)$$

Доведення. Це безпосередньо випливає з теореми 18.8(ii₁) з допомогою принципу позитивності мас у формі, наведений в [80, Theorem 2.1]. $\square$

³¹Звідси також випливає, що $\lambda_{A,f}$ є єдиною мірою з мінімальним f -ваговим потенціалом в класі $\Lambda_{A,f}$ — тепер, однак, приблизно всюди на X :

$$U_f^{\lambda_{A,f}} = \min_{\mu \in \Lambda_{A,f}} U_f^{\mu} \quad \text{пр. вс. на } X.$$

³²Якщо це не так, то задача 18.1 є завжди розв’язною — див. теорему 18.7 або 18.8.

Зауваження 18.3. Екстремальна властивість (18.11) не може слугувати, однак, альтернативним означенням розв'язку $\lambda_{A,f}$ задачі 18.1, оскільки вона не визначає $\lambda_{A,f}$ однозначно. У цьому можна переконатися з допомогою таких же міркувань, як і в зауваженні 18.1.

19 Періодична кулонівська динаміка трьох рівних негативних зарядів у полі шістьох рівних позитивних зарядів, зафіксованих у вершинах октаедра

Механічні системи d -вимірних систем N частинок (тіл, точкових зарядів) з масами m_j , $j = 1, \dots, N$, і координатами $x_j = (x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^d)$ характеризуються рівнянням руху (динамікою)

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = -\frac{\partial U(x_{(N)})}{\partial x_j},$$

$$j = 1, \dots, N, \quad x_{(N)} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}, \quad x_j = (x_j^1, \dots, x_j^d), \quad (19.1)$$

і потенціальною енергією $U(x_{(N)})$, яка є сингулярною на множині зіткнень $x_j = x_k, j \neq k$, та дійсною аналітичною функцією на множині регулярності.

Ми розглядаємо просторову динаміку Кулона у просторі $\mathbb{R}^3$ трьох однакових негативних зарядів $-e_0 < 0$ з координатами x_1, x_2, x_3 у полі шістьох однакових позитивних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах октаедра $b_j, 1 \leq j \leq 6, b_j = (b_j^1, b_j^2, b_j^3) \in \mathbb{R}^3$:

$$b_1 = (a, b, 0), \quad b_2 = (a, -b, 0), \quad b_3 = (-a, b, 0), \quad b_4 = (-a, -b, 0),$$

$$b_5 = (0, 0, \sqrt{3a^2 + b^2}), \quad b_6 = (0, 0, -\sqrt{3a^2 + b^2}), \quad a, b > 0,$$

з потенціальною енергією

$$U(x_{(3)}) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k=1}^3 \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|} - e_0 e' \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^6 |x_j - b_k|^{-1}, \quad (19.2)$$

де

$$|x_j|^2 = (x_j^1)^2 + (x_j^2)^2 + (x_j^3)^2,$$

і знаходимо періодичні розв'язки рівняння (19.1), спершу знайшовши рівновагу для U .

Динамічна система (19.1), (19.2) має два інваріантних многовиди $x_j^3 = 0, j = 1, 2, 3$, і $x_j^2 = 0, x_j^3 = 0, j = 1, 2, 3$ (лінійний і площинний). Асоційовані з ними механічні системи визначаються потенціальною енергією U , звуженою на них.

Рівновага для U дає змогу знайти періодичні розв'язки лінійного, площинного та просторового рівняння руху Кулона (19.1), (19.2). Раніше було знайдено періодичні й квазіперіодичні розв'язки рівнянь руху Кулона двох та трьох негативних однакових зарядів у полі двох однакових позитивних зарядів. Періодичні розв'язки було знайдено в системах двох негативних однакових зарядів у полі зафіксованих чотирьох та шістьох однакових позитивних зарядів, а також в системі трьох негативних однакових зарядів у полі зафіксованих шістьох та чотирьох однакових позитивних зарядів на площині. Зазначені результати були отримані завдяки тому, що для симетричної матриці U^0 частинних других похідних потенціальної енергії у рівновазі було знайдено в явному вигляді власні значення, серед яких були додатні, що породжують періодичні чи квазіперіодичні розв'язки. Існування періодичних розв'язків впливає з центральної теореми Ляпунова, якщо немає нульових та вироджених власних значень U^0 . При цьому потенціальна енергія повинна бути дійсною аналітичною функцією в околі рівноваги. Саме такою є кулонівська потенціальна енергія.

Існування квазіперіодичних розв'язків було доведено у випадку наявності нульового власного значення U^0 за допомогою методу небесної механіки вилучення вузла та центральної теореми Ляпунова. При цьому враховувалось, що нульове власне значення є наслідком обертальної інваріантності системи. Площинна і просторова системи у цій статті не мають обертальної інваріантності, а також нульового власного значення U^0 .

Виникає питання: чи можливо довести існування періодичних розв'язків у кулонівських системах, коли немає рівноваги? В 2108 В.І. Скри-

пник дав ствердну відповідь на це питання, довівши їх існування у нейтральній системі n однакових негативних зарядів у полі n однакових позитивних зарядів. Метод доведення цього результату ґрунтується на узагальненні методу мажорант Зігеля, що застосовувався ним для знаходження розв'язків задачі трьох тіл небесної механіки.

Центральна теорема Ляпунова має справу з системами Гамільтона, рівновага яких збігається з початком координат, і формулюється так.

Теорема 19.1. *Нехай n -вимірний гамільтоновий векторний поле визначається дійсним аналітичним гамільтоніаном, розклад Тейлора якого збігається абсолютно та рівномірно в околі початку координат і починається з квадратичних доданків. Нехай також $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ — власні значення матриці, що визначає лінійну частину гамільтонового векторного поля, такі що λ_s , $s = 1, \dots, k$, є уявними і нерезонансними: $\lambda_j \neq n' \lambda_s$, $s = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, 2n$, $j \neq s$, де n' — довільне ціле число. Тоді рівняння Гамільтона допускає існування k періодичних розв'язків, таких що кожен з них залежить від дійсного параметра c_j для деякого $j = 1, \dots, k$. Ці розв'язки та їхні періоди $\tau_1(c_1), \dots, \tau_k(c_k)$ є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й $\tau_j(0) = \frac{2\pi}{|\lambda_j|}$.*

Відомо, що для (19.1) з $m_j = m$ власні значення з теореми 19.1 збігаються з $\lambda_j = \pm \sqrt{-m^{-1}\sigma_j}$, $j = 1, \dots, dN$, де σ_j — власні значення U^0 . Таким чином, існування періодичних розв'язків рівняння (19.1) можна отримати з теореми 19.1.

19.1 Лінійна динаміка Кулона

Ми розглядаємо динаміку на першій координатній прямій трьох однакових негативних зарядів $-e_0 < 0$ в полі шістьох однакових позитивних зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах октаедра з першими координатами $\pm a$, другими $\pm b$ та третіми $\pm \sqrt{3a^2 + b^2}$, $a, b > 0$. Площинні вершини належать прямокутнику, який симетрично розташований на

площині щодо двох координатних осей. Три негативні точкові заряди рухаються вздовж першої координатної прямої, яка є інваріантним многовидом $x_j^2 = 0$, $x_j^3 = 0$, $j = 1, 2, 3$, просторової динаміки.

Потенціальна енергія цієї системи збігається з потенціальною енергією (19.2), звуженою на цей інваріантний многовид, і визначається за формулою

$$U(x_{(3)}) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k=1}^3 \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|} - 2e_0 e' \sum_{j=1}^3 \left[\left(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2} \right)^{-1} + \left(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2} \right)^{-1} + \left(\sqrt{x_j^2 + 3a^2 + b^2} \right)^{-1} \right], \quad x_j \in \mathbb{R}. \quad (19.3)$$

Рівноважні рівняння мають вигляд $\frac{\partial}{\partial x_j} U(x_{(3)}) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Підставимо рівності

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} |x_1 - x_2|^{-k} &= -k \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^{k+2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sqrt{(x_1 - a)^2 + b^2} \right)^{-k} &= -k \frac{x_1 - a}{\left(\sqrt{(x_1 - a)^2 + b^2} \right)^{k+2}} \end{aligned}$$

в них при $k = 1$. Отже,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} U(x_{(3)}) &= -e_0^2 \sum_{j \neq k, k=1}^3 \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^3} + 2e_0 e' \left[\frac{x_j - a}{\left(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2} \right)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_j + a}{\left(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2} \right)^3} + \frac{x_j}{\left(\sqrt{x_j^2 + 3a^2 + b^2} \right)^3} \right]. \end{aligned}$$

В результаті отримаємо рівноважне співвідношення для рівноваги x^0 , $x_1 = x_1^0 = -a$, $x_2 = x_2^0 = 0$, $x_3 = x_3^0 = a$ з цієї рівності при $j = 1, 2$:

$$\frac{e_0^2}{(2a)^2} + \frac{e_0^2}{a^2} = \frac{3e'(2a)e_0}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2} \right)^3}, \quad \frac{5e_0}{(2a)^3} = \frac{3e'}{\left(\sqrt{(2a)^2 + b^2} \right)^3}.$$

Рівність $\frac{\partial}{\partial x_2} U(x_{(3)}) = 0$ є правильною, тому що $|x_2^0 - x_1^0| = |x_3^0 - x_2^0|$, $x_1^0 = -x_3^0$, $x_2^0 = 0$.

Тепер необхідно знайти матрицю U^0 других частинних похідних потенціальної енергії в рівновазі. Її недіагональні елементи рівні:

$$\frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_l \partial x_j} = \frac{\partial^2 U(x_{(3)})}{\partial x_j \partial x_l} = -2e_0^2 |x_j - x_l|^{-3}.$$

Нехай $U_{j,l}^0$ — функція в рівновазі. Тоді

$$U_{1,3}^0 = U_{3,1}^0 = -\frac{e_0^2}{4a^3} = -u', \quad U_{1,2}^0 = U_{2,1}^0 = U_{2,3}^0 = U_{3,2}^0 = -8u'.$$

Далі, друга похідна визначається за формулою

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} U(x_{(2)}) = & \sum_{j \neq k, k=1}^3 \frac{2e_0^2}{|x_j - x_k|^3} + 2e_0 e' \left[\frac{1}{(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2})^3} \right. \\ & - \frac{3(x_j - a)^2}{(\sqrt{(x_j - a)^2 + b^2})^5} + \frac{1}{(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2})^3} \\ & - \frac{3(x_j + a)^2}{(\sqrt{(x_j + a)^2 + b^2})^5} + \frac{1}{(\sqrt{x_j^2 + 3a^2 + b^2})^3} \\ & \left. - \frac{3x_j^2}{(\sqrt{x_j^2 + 3a^2 + b^2})^5} \right]. \end{aligned}$$

Нехай $U_{j,l}^0$ — функція в рівновазі. Тоді

$$\begin{aligned} U_{1,1}^0 = U_{3,3}^0 = & \frac{9e_0^2}{4a^3} + 2e_0 e' \left[b^{-3} + \frac{2}{(\sqrt{(2a)^2 + b^2})^3} - \frac{15a^2}{(\sqrt{(2a)^2 + b^2})^5} \right], \\ U_{2,2}^0 = & \frac{16e_0^2}{4a^3} + 2e_0 e' \left[\frac{2}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} - \frac{6a^2}{(\sqrt{a^2 + b^2})^5} + \frac{1}{(\sqrt{3a^2 + b^2})^3} \right]. \end{aligned}$$

З рівноважного співвідношення випливає, що

$$\begin{aligned} \left(\frac{5e_0}{3e'} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2a} &= \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + b^2}}, \quad 2a = (1 - \eta)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\eta} b, \\ \eta &= \left(\frac{5e_0}{3e'} \right)^{\frac{2}{3}} < 1. \end{aligned} \tag{19.4}$$

Наслідком (19.4) є дев'ять додаткових співвідношень рівноваги:

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= a^2[4(\eta^{-1} - 1) + 1] = a^2\eta^{-1}(4 - 3\eta), \\
3a^2 + b^2 &= a^2[4(\eta^{-1} - 1) + 3] = a^2\eta^{-1}(4 - \eta), \\
2e_0e'b^{-3} &= 5\frac{2}{3}(2a)^{-3}e_0^2(1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{5u'}{3}(1 - \eta)^{-\frac{3}{2}}, \\
\frac{4e_0e'}{(\sqrt{(2a)^2 + b^2})^3} &= 4e_0e'\frac{5e_0}{3e'}\left(\frac{1}{2a}\right)^3 = \frac{10u'}{3}, \\
\frac{30e_0e'a^2}{(\sqrt{(2a)^2 + b^2})^5} &= 4^{-1} \cdot 30e_0e'\left(\frac{5e_0}{3e'}\right)^{\frac{5}{3}}(2a)^{-3} = \frac{25u'}{4}\eta, \\
6e_0e'b^2((2a)^2 + b^2)^{-\frac{5}{2}} &= 6e_0e'(2a)^2(1 - \eta)\eta^{-1}\left(\frac{5e_0}{3e'}\right)^{\frac{5}{3}}\left(\frac{1}{2a}\right)^5 \\
&= 5u'(1 - \eta), \\
\frac{4e_0e'}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} &= 4e_0e'a^{-3}\eta^{\frac{3}{2}}(4 - 3\eta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{80}{3}u'(4 - 3\eta)^{-\frac{3}{2}}, \\
\frac{12e_0e'a^2}{(\sqrt{a^2 + b^2})^5} &= 12e_0e'a^{-3}\eta^{\frac{5}{2}}(4 - 3\eta)^{-\frac{5}{2}} = 80u'\eta(4 - 3\eta)^{-\frac{5}{2}}, \\
\frac{2e_0e'}{(\sqrt{3a^2 + b^2})^3} &= 2e_0e'a^{-3}\eta^{\frac{3}{2}}(4 - \eta)^{-\frac{3}{2}} = \frac{40}{3}u'(4 - \eta)^{-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Ці співвідношення дозволяють записати діагональні елементи U^0 у простому вигляді у термінах u' та η :

$$\begin{aligned}
U_{1,1}^0 &= U_{3,3}^0 = u'v, \quad v = \frac{37}{3} + \frac{5}{3}(1 - \eta)^{-\frac{3}{2}} - \frac{25}{4}\eta, \\
U_{2,2} &= u'g \\
&= u'\left[16 + \frac{80}{3}(4 - 3\eta)^{-\frac{3}{2}} - 80\eta(4 - 3\eta)^{-\frac{5}{2}} + \frac{40}{3}\eta(4 - \eta)^{-\frac{3}{2}}\right] = \\
&= u'\left[16 + \frac{80}{3}(4 - 3\eta)^{-\frac{5}{2}}(4 - 3\eta - 3\eta) + \frac{40}{3}\eta(4 - \eta)^{-\frac{3}{2}}\right], \\
g &= 3^{-1} \cdot 8\left[6 + 20(2 - 3\eta)(4 - 3\eta)^{-\frac{5}{2}} + 5\eta(4 - \eta)^{-\frac{3}{2}}\right].
\end{aligned}$$

Нехай U^0 — матриця з елементами $U_{j,l}^0, j, l = 1, 2, 3$. Тоді

$$U^0 = u'U'_1, \quad U'_1 = \begin{pmatrix} v & -8 & -1 \\ -8 & g & -8 \\ -1 & -8 & v \end{pmatrix} = -2U_{*1} + (v+1)I,$$

$$U_*(g_1) = U_{*1} = 2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 8 & 2g_1 & 8 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2g_1 = -g + v + 1,$$

де I — одинична матриця. U_{*1} має однакові перший та третій рядки, а це означає, що $\text{Det } U_{*1} = 0$. Це дозволяє знайти корені характеристичних поліномів p_{*1} і p'_1 відповідно матриць U_{*1} і U'_1 за допомогою формули

$$p_*(\lambda, q) = \text{Det} (\lambda I - U_*(q)) = [\lambda^2 - (q+1)\lambda + q - 32]\lambda.$$

Щоб довести цю рівність, відніmemo третій рядок $-U_*(q) + \lambda I$ від першого. Детермінант при цьому не зміниться:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2^{-1} & -4 & 2^{-1} \\ -4 & \lambda - q & -4 \\ -2^{-1} & -4 & \lambda - 2^{-1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ -4 & \lambda - q & -4 \\ -2^{-1} & -4 & \lambda - 2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Після цього розкладемо детермінант останньої матриці за елементами першого рядка:

$$\begin{aligned} p_*(\lambda, q) &= \lambda[(\lambda - q)(\lambda - 2^{-1}) - 16 - 16 - 2^{-1}(\lambda - q)] \\ &= \lambda[(\lambda - q)(\lambda - 1) - 32]. \end{aligned}$$

Корені $p_*(q)$ визначено так:

$$2\lambda = q + 1 \pm \sqrt{(q-1)^2 + 128}, \quad \lambda = 0.$$

Корені p'_1 матриці U'_1 мають вигляд

$$p'_1(\lambda) = -2^3 p_* \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{v+1}{2}, g_1 \right),$$

$$\lambda = v - g_1 \pm \sqrt{(g_1 - 1)^2 + 128}, \quad \lambda = v + 1 = \zeta'_1.$$

Нехай ζ'_2, ζ'_3 збігаються з коренями, що відповідають плюсу та мінусу перед знаком кореня:

$$\begin{aligned} \zeta'_2 &= \frac{g + v - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{g - v + 1}{2}\right)^2 + 128}, \\ \zeta'_3 &= \frac{g + v - 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{g - v + 1}{2}\right)^2 + 128}. \end{aligned}$$

Далі будемо використовувати $\eta < 1$.

Твердження 19.1. *Якщо $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$, то немає резонансу по ζ'_2 і квадратичного резонансу по ζ'_1 , тобто $\zeta'_s \zeta'^{-1}_1 \neq k^2$, $s = 2, 3$, де k — ціле число.*

Порядок зарядів на прямій зберігається завдяки необмеженому відштовхуванню між ними, тому ми можемо замінити потенціал $|x_j - x_k|^{-1}$ на дійсну аналітичну функцію $(x_j - x_k)^{-1}$ в околі рівноваги. З того, що власні значення U^0 рівні, $\zeta_j = u' \zeta'_j$, і з центральної теореми Ляпунова випливає така теорема.

Теорема 19.2. *Нехай $\eta = \left(\frac{5e_0}{3e}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3}$. Тоді рівняння руху Кулона (19.1) для $d = 1$, $N = 3$, $m_1 = m_2 = m$ з потенціальною енергією (19.3) має рівновагу $x_1^0 = -a$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = a > 0$ і два періодичних розв'язки, кожен з яких залежить від дійсного параметра c_j при $j = 1, 2$. Ці розв'язки та їхні періоди $\tau_1(c_1), \tau_2(c_2)$ є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_j})^{-1}$.*

19.2 Площинна динаміка Кулона

У цьому пункті розглядаємо динаміку у просторі $\mathbb{R}^2$ трьох однакових негативних зарядів $-e_0 < 0$ в полі шістьох однакових позитивних

зарядів $e' > 0$, зафіксованих у вершинах октаедра з “площинними” координатами вершин прямокутника b_j , $1 \leq j \leq 4$, $b_j = (b_j^1, b_j^2) \in \mathbb{R}^2$, й “ортогональними” вершинами $b_5, b_6 \in \mathbb{R}^3$.

Потенціальна енергія цієї системи збігається з потенціальною енергією (19.2), звуженою на інваріантний многовид $x_j^3 = 0$, $j = 1, 2, 3$, просторової динаміки, і визначається за формулою

$$U(x_{(3)}) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k=1}^3 \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|} - e_0 e' \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 |x_j - b_k|^{-1} - 2e_0 e' \sum_{j=1}^3 (|x_j|^2 + 3a^2 + b^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (19.5)$$

де

$$x_j = (x_j^1, x_j^2) \in \mathbb{R}^2, \quad |x_j|^2 = (x_j^1)^2 + (x_j^2)^2, \quad e_j = -e_0 < 0.$$

Доведено таку теорему.

Теорема 19.3. *Нехай $\eta = \left(\frac{5e_0}{3e'}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3}$. Тоді рівняння руху Кулона (19.1) для $d = 2$, $N = 3$, $m_1 = m_2 = m$ з потенціальною енергією (19.5) має рівновагу $x_1^{01} = -a$, $x_2^{01} = 0$, $x_3^{01} = a$, $x_j^{02} = 0$, $j = 1, 2, 3$, і два періодичних розв’язки, кожен з яких залежить від дійсного параметра c_j при $j = 1, 2$. Ці розв’язки та їхні періоди $\tau_1(c_1)$, $\tau_2(c_2)$ є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_j})^{-1}$.*

Доведено таке твердження.

Твердження 19.2. *Резонансу по $\zeta_2 = u'\zeta'_2$ і квадратичного резонансу по $\zeta_1 = u'\zeta'_1$ немає для власних значень ζ_j , $1 \leq j \leq 9$, матриці U^0 просторової кулонівської системи, якщо $0 < \eta \leq \frac{1}{3}$.*

Наступне твердження є остаточним кроком для застосування центральної теореми Ляпунова.

Твердження 19.3. *Існує таке число $\eta_* \in (0, \frac{1}{3})$, що $\zeta'_8(\eta_*) = 0$.*

Два останніх твердження та центральна теорема Ляпунова доводять таку теорему.

Теорема 19.4. *Якщо $\eta = \frac{1}{3}$ чи $0 < \eta = \left(\frac{5\epsilon_0}{3\epsilon'}\right)^{\frac{2}{3}} < \frac{1}{3}$ і $\zeta'_8 \neq 0$, то рівняння руху Кулона (19.1) для $d = 3$, $N = 3$, $m_1 = m_2 = m$ з потенціальною енергією (19.2) має рівновагу $x_1^{01} = -a$, $x_2^{01} = 0$, $x_3^{01} = a$, $x_j^{0\alpha} = 0$, $\alpha = 2, 3$, $j = 1, 2, 3$, і два періодичних розв'язки, кожен з яких залежить від дійсного параметра c_j при $j = 1, 2$. Ці розв'язки та їхні періоди $\tau_1(c_1)$, $\tau_2(c_2)$ є дійсними аналітичними функціями цих параметрів в околі нуля й $\tau_j(0) = 2\pi\sqrt{m}(\sqrt{\zeta_j})^{-1}$.*

20 Динамічні системи конфлікту (ДСК) із зовнішньою допомогою

Феномен конфлікту, як суперечність між життєвими інтересами опонентів, або конкурентне змагання між гравцями, в математичних термінах означає перетин розподілів їх ймовірнісного перебування в різних позиціях (областях) спільного життєвого чи ресурсного: наприклад, носіїв відповідних мір чи перекриття областей визначення для операторів. Конфліктна, у фізичному сенсі, взаємодія між опонентами математично описується специфічними перетвореннями (відображеннями) станів динамічної системи, еволюцією мір, розподілів, векторів у скінченновимірному чи гільбертовому просторі. У свою чергу, ці відображення змінюють спектральні характеристики спостережувальних величин.

Ми досліджували поведінку складних динамічних систем з довільною кількістю відносно подібних між собою елементів (абстрактно — векторів, мір), які ведуть боротьбу за свій, умовно, енергетичний статус. В різних термінах і за допомогою специфічного виду динамічних рівнянь аналогічні системи інтенсивно вивчаються та моделюються в різних наукових центрах вже понад 40 років. В роботах^{33,34} було запропоновано абстрактний підхід до опису конфліктної взаємодії між довільною кількістю опонентів в термінах ймовірностних розподілів на спільному просторі існування, на основі якого було побудовано ряд досить реалістичних моделей³⁵. Ключова формула конфліктної взаємодії в нашому підході ґрунтується на класичній теоремі Баєса про умовну ймовірність. Ітерація формули Баєса в дискретному часі породжує динаміку станів складної системи в термінах ймовірностних розподілів. Для опису закону

³³Koshmanenko V., On the conflict theorem for a pair of stochastic vectors, *Ukrainian Math. J.* **55** (2003), № 4, 555–560

³⁴Koshmanenko V., The theorem of conflict for probability measures. *Math. Methods of Operations Research* **59** (2004), 303–313

³⁵Кошманенко В.Д., Спектральна теорія динамічних систем конфлікту, Київ: Наукова Думка, 2016, 287 р.

конфліктної взаємодії ми використовуємо досить прості різниці рівняння, які в подальшому удосконалюються введенням фактору зовнішнього впливу. Під ним ми розуміємо адитивні зсуви соціальних статусів (енергетичних рівнів) індивідів. По цій причині система стає не автономною і, як наслідок, кардинально змінюється початкова ієрархія домінувань індивідуальних пріоритетів, що приводить до значно складнішого закону визначення остаточного переможця у конфліктній боротьбі. Асимптотична поведінка змінюється, стає менш передбачуваною, а досягнення рівноважних станів іноді забирає багато часу. Ми виявляємо і демонструємо нові ефекти спричинені зовнішнім впливом, знаходимо критичні значення параметрів і нерухомі точки, досліджуємо їх на стійкість.

Динамічні системи, які ми досліджуємо, звуться динамічними системами конфлікту. З самого початку постають наступні фундаментальні питання. Який розумний закон конфліктної взаємодії (гри чи війни) треба прийняти для розв'язання початкових перетинів статусів опонентів? За яких умов існують нерухомі точки, як рівноважні чи компромісні стани? Яким має бути справедливий граничний розподіл території життєвого ресурсу? Як урахувувати роль зовнішньої допомоги? Коли виникає фізичний точковий спектр у граничних мір ймовірнісних розподілів, та яка його геометрична та топологічна структура? Можливі застосування в задачах формування та поширення соціальних переконань?

У абстрактному формулюванні, розв'язання конфліктних проблем означає детальний опис усіх можливих результатів про поведінку та стани динамічної системи конфлікту. Зокрема питання про перемоги, поразки, рівноваги, компроміси, нерухомі точки, разом з басейнами їх притягання, та спектральними характеристиками.

Протягом 2021–2024 рр. продовжувалися дослідження по цій темі в таких напрямках.

1. Побудова математичних моделей конфліктного соціуму, які описують перерозподіл соціальної енергії між індивідами абстрактного

суспільства під дією взаємної конкурентної боротьби та зовнішнього впливу.

2. Пошуки умов виникнення рівноважних (компромісних) станів при наявності зовнішньої допомоги.
3. Аналіз різних варіантів формули опису конфліктної взаємодії та постановки задачі про конфлікт в термінах теорії лінійних операторів у гільбертових просторах.
4. Критерій виникнення та аналіз структури граничного точкового спектру в моделях з фрактральним подібненням простору.
5. Застосування абстрактних результатів моделювання конфліктної взаємодії до проблем формування та поширення переконань

Досліджено математичну модель абстрактного суспільства, в якій динаміка визначається двома факторами - взаємною конкурентною боротьбою та надходженням зовнішнього впливу. Доведено та проілюстровано комп'ютерними прикладами, що при введенні зовнішнього впливу, еволюційна динаміка може кардинально відрізнитися від випадків із суто внутрішньою боротьбою, при цьому асимптотика граничних розподілів істотно змінюється. Типовий принцип конфліктної боротьби, “переможець забирає все” при урахуванні зовнішніх впливів модифікується: визначення переможця залежить від тонкого балансу між початковим ресурсом та величиною зовнішнього впливу. Описано різні режими поведінки в термінах траєкторій динамічних систем конфлікту та встановлено умови існування рівноважних (нерухомих) станів, знайдено їх явний вигляд.

У випадку постійного впливу зовнішнього середовища дано опис усіх рівноважних станів залежно від параметру зовнішнього впливу, досліджено їх стійкість та частково описані басейни притягання одноточкових атракторів. На прикладі з трьох індивідів детально досліджена залежність фазового портрету системи від значень параметра допомоги та

його біфуркаційних порогів. Наведено ряд комп'ютерних прикладів.

У моделі динамічних систем конфлікту (ДСК) для пари альтернативних опонентів, що борються за присутність у різних регіонах простору життєвих ресурсів встановлено і проілюстровано конкретними прикладами існування компромісних станів (одночасну присутність обох опонентів у фіксованому регіоні) при наявності зовнішньої допомоги для кожного з опонентів. Показано, що статуси гравців (значення ймовірностей присутності) визначаються параметрами зовнішньої допомоги, а не стартовими розподілами.

20.1 Постановка задачі

Нехай $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^m$, $1 < m < \infty$ позначає множину подібних елементів (індивідів) абстрактного суспільства (соціума). Кількість елементів a_i скінченна і як завгодно велика.

В кожен момент дискретного часу $t = 0, 1, \dots$ стан системи задається нормованим вектором $\mathbf{p}^t \in \mathbb{R}_1^m$ (тут індекс 1 означає нормованість на одиницю, а $m \geq 2$ кількість невід'ємних координат:

$$\mathbf{p}^t = (p_1^t, \dots, p_m^t), \quad p_1^t + \dots + p_i^t + \dots + p_m^t = 1, \quad p_i^t \geq 0,$$

(залежність від часу вектора та і його координат позначаємо верхнім індексом). Значення координати характеризує соціальний статус (запас соціальної енергії) відповідного індивіда a_i . Внаслідок конкурентної та конфліктної боротьби, а також зовнішньому впливу цей статус змінюється:

$$\mathbf{p}^t \xrightarrow{*} \mathbf{p}^{t+1}, \quad \mathbf{p}^{t=0} = \mathbf{p}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

де відображення $*$ позначає фіксований закон конфліктної взаємодії та зовнішнього впливу (див. нижче формули (20.2)–(20.3)).

Далі припускаємо, що абстрактне суспільство $\mathcal{A}$ є цілком конфліктним. Це означає, що оточення кожного індивіда a_i , тобто множина

усіх інших індивідів $\mathcal{A}_i^\perp := \{a_k\}_{k \neq i}$ є для нього конкурентом або опонентом. Отже, в нашій моделі виконується принцип — “кожен сам за себе і проти всіх”. Тоді соціальна енергія конкурента для a_i визначається, як середнє значення енергій усіх індивідів з оточення $\mathcal{A}_i^\perp$. Фактично тут використовується відомий метод середнього поля. Отже, в початковий момент часу вектору індивідуальних енергій $\mathbf{p}$ протистоїть вектор енергій усереднених оточень:

$$\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_m), \quad r_i = \frac{\sum_{k \neq i} p_k}{m-1} = \frac{1-p_i}{m-1} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m r_i = 1.$$

20.2 Введення зовнішнього впливу

Покладаємо, що еволюцією змін керують різницеві рівняння з додатковим параметром b_i^t :

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1-r_i^t) + b_i^t}{z^t}, \quad p_i^0 = p_i, \quad r_i^t = \frac{1-p_i^t}{m-1}, \quad t = 0, 1, \dots,$$

або асимптотично еквівалентні рівняння:

$$\begin{aligned} p_i^{t+1} &= \frac{p_i^t(1 + \theta^t - r_i^t) + b_i^t}{z^t}, \quad r_i^t = \frac{1-p_i^t}{m-1}, \quad t = 0, 1, \dots, \\ \theta^t &= (\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t) = \frac{1}{m-1}(1 - \|\mathbf{p}^t\|^2), \quad z^t = 1 + \sum_k b_k^t. \end{aligned} \tag{20.1}$$

де $0 \leq b_i^t < 1$ позначають величини зовнішнього впливу (адитивні зсуви координат). Нормувальний знаменник z^t забезпечує стохастичність вектора $\mathbf{p}^t$.

Ми досліджуємо поведінку траєкторій ДСК залежно від початкових значень координат p_i та величин зовнішнього впливу b_i^t .

Зовнішні впливи (вони задані доданками b_i^t) є пропорційними індивідуальним енергіям індивідів:

$$b_i^t = b_i p_i^t, \quad 0 \leq b_i < 1, \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

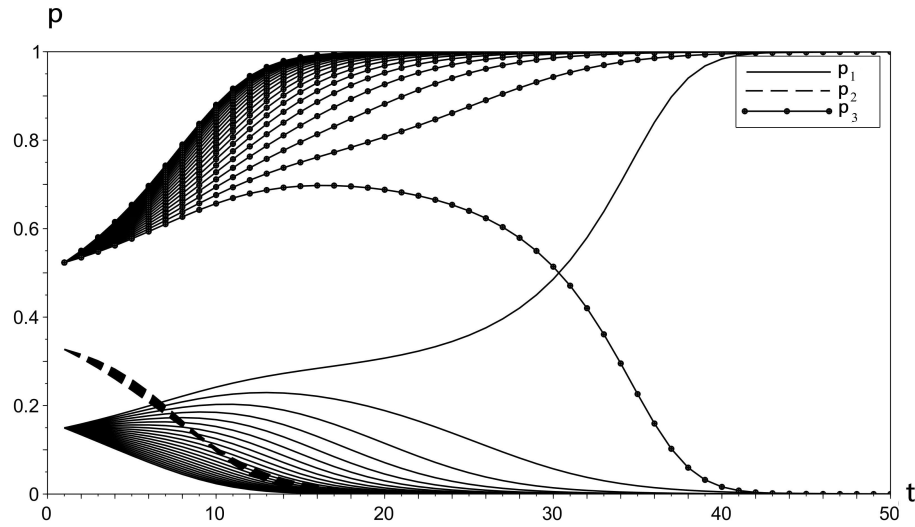


Рис. 20.1: $m = 3$. Нелінійна залежність еволюції координат динамічної системи від зміни першої координати вектора зовнішнього впливу. $\mathbf{p} = (0.16, 0.35, 0.56)$, $b_l = (0.145 + (0.01) \cdot (l - 1), 0.145, 0.145)$, $l = \overline{1, 23}$.

При цьому, формули (20.1) набувають такого вигляду:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t (1 + \frac{p_i^t - \|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + b_i)}{z^t}, \quad z^t = 1 + \sum_{k=1}^m b_k p_k^t, \quad t = 0, 1, \dots \quad (20.2)$$

Вводячи позначення

$$\gamma_i^t := \frac{p_i^t}{m-1} + b_i, \quad B^t := \sum_{k=1}^m b_k p_k^t,$$

перепишемо (20.2) у вигляді:

$$p_i^{t+1} = p_i^t c_i^t, \quad c_i^t = \frac{1 - \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + \gamma_i^t}{1 + B^t}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (20.3)$$

де коефіцієнти c_i^t задають швидкість зміни енергетичного статусу індивідів абстрактного суспільства. Усі вони, за побудовою, як неважко переконатися, є строго додатними, $c_i^t > 0$.

З формул (20.3) видно, що статус індивіда a_i зростає, тобто виконується нерівність, $p_i^{t+1} > p_i^t$, лише якщо $c_i^t > 1$. Введемо важливу величину

$$\xi^t := \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} + B^t.$$

Тоді умову $c_i^t > 1$, або еквівалентно, $\gamma_i^t - \frac{\|\mathbf{p}^t\|^2}{m-1} > B^t$ можна переписати у вигляді нерівності

$$\gamma_i^t > \xi^t. \quad (20.4)$$

Нерівність (20.4) дає критерій успішного розвитку індивіда a_i у конфліктному суспільстві, тобто зростанню його енергетичного статусу, $p_i^{t+1} > p_i^t$. Внаслідок конкуренції та зовнішнього впливу, нерівність (20.4) може змінитися на протилежну і статус відповідного індивіда почне спадати. В цілому, динамічна картина перерозподілу енергетичних статусів усіх індивідів a_i є досить складною, вона істотно залежить від величин b_i , які мають стратегічне значення (рис. 20.1).

Нерухомим точкам ДСК, породженою формулами (20.3) відповідають вектори $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_1^m$, координати яких не змінюються під дією динамічної системи. Існування та вигляд нерухомих станів істотно залежать від значень зовнішніх впливів b_i .

Позначимо $\mathbf{p}^C$ вектор з координатами $p_i^C = 1/m, \forall i$. Якщо усі зсуви однакові, $b_i = b$, то неважко перевірити, що вектор $\mathbf{p}^C$ є нерухомою точкою динамічної системи. При цьому треба врахувати, що $\gamma_i = 1/m + b = \gamma$ не залежить від індексу координати, усі c_i однакові і дорівнюють одиниці, а також, що норма $\|\mathbf{p}^C\|_1 = 1/m$.

З формули (20.3) очевидно, що вектор $\mathbf{p}^*$ з ненульовими координатами, $p_i^* > 0, \forall i$, утворює нерухому точку системи, тоді і лише тоді, коли усі $c_i = 1$.

Твердження 20.1. *Необхідною і достатньою умовою нерухомості точки $\mathbf{p}^*$ із строго додатними координатами та зсувами:*

$$p_i^* > 0, b_i > 0, \forall i$$

є виконання рівностей

$$\gamma_i^* = \frac{p_i^*}{m-1} + b_i = \gamma_j^* = \frac{p_j^*}{m-1} + b_j, \quad \forall i, j \in \overline{1, m}. \quad (20.5)$$

Залежно від розмірності системи, тобто цілого числа m , та значень b_i , кількість і вигляд нерухомих векторів змінюється. Конкретні випадки нерухомих точок і залежність поведінки траєкторій ДСК від початкових значень координат p_i та величин зовнішнього впливу b_i^t з прикладами наведених у роботі [67].

Наведемо лише основну теорему про збіжність траєкторій до граничних нерухомих точок.

Теорема 20.1. *Нехай вектор-функція $\mathbf{p}^t$, $t \geq 0$ описує траєкторію ДСК задану формулами (20.3) з деяким початковим вектором $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_1^m$.*

Припустимо виконання таких умов:

- 1) *усі координати вектора $\mathbf{p}$ ненульові і попарно різні, $0 \neq p_i \neq p_k$, $i \neq k$,*
- 2) *$\mathbf{p}$ не є однією з нерухомих точок типу $\mathbf{p}^C$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$, $\mathbf{p}_n^{0**}$, $1 \leq n \leq m - 2$,*
- 3) *для кожної підмножини координат $b_{j_1}, \dots, b_{j_s}$, $s = m - n$ вектора зовнішнього впливу $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ існує хоча б одна b_{j_i} , $i \in \overline{1, s}$, яка задовольняє нерівність*

$$b_{j_i} > \frac{mB_s}{s(m-1)}, \quad B_s := \sum_{i=1}^s b_{j_i}. \quad (20.6)$$

Тоді існує границя $\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t$. При цьому, вектор $\mathbf{p}^\infty$ є нерухомою точкою з єдиною ненульовою координатою:

$$p_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = 1, \quad (20.7)$$

усі інші координати $p_k^\infty = 0$, $k \neq i$.

Опис нерухомих точок типу $\mathbf{p}^C$, $\mathbf{p}^*$, $\mathbf{p}^{**}$, $\mathbf{p}_n^{0**}$, $1 \leq n \leq m - 2$ наведений в [67].

20.3 Ефекти постійного зовнішнього впливу

Нехай динамічна система конфлікту задається різницевиими рівняннями в термінах координат з постійним значенням зовнішнього впливу:

$$p_i^{t+1} = Tp_i^t := \frac{(p_i^t + b)(1 - r_i^t)}{z^t}, \quad p_i^0 = p_i, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (20.8)$$

де параметр $0 < b < 1$ позначає зовнішній вплив, а нормувальний знаменник $z^t = \sum_k (p_k^t + b)(1 - r_k^t)$.

Прямо з (20.8) випливає, що стохастичний вектор $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_{1,+}^m$, у якого усі координати однакові, $q_i = q_k$, $i, k \in \overline{1, m}$, позначимо цей вектор $\mathbf{q}^C := (1/m, \dots, 1/m)$, є нерухомим станом ДСК при довільному b . Цей стан ми називаємо тривіальним.

Неважко знайти умови постійності вектора з $\mathbb{R}_{1,+}^m$ при відображенні (20.8) (див. [91]). А саме, стохастичний вектор $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_{1,+}^m$, $\mathbf{q} = \{q_1, \dots, q_m\}$, $0 \leq q_i \leq 1$ є нерухомою точкою (рівноважним станом) ДСК з відображенням (20.8) тоді і лише тоді, коли його координати задовольняють систему рівнянь:

$$(q_i - q_k)[q_i q_k - (m - 2)b] = 0, \quad i, k \in \overline{1, m}, \quad \forall i, k. \quad (20.9)$$

Зрозуміло, що серед усіх рівнянь в системі (20.9) незалежних лише $m - 1$. Залишивши рівняння з $i = 1$ та $k = 2, \dots, m$, одержуємо еквівалентну систему:

$$(q_1 - q_k)[q_1 q_k - (m - 2)b] = 0, \quad k = \overline{2, m}, \quad q_1 + \dots + q_m = 1. \quad (20.10)$$

Відзначимо, що нерухомий вектор $\mathbf{q}^C$ відповідає ситуації, коли в (20.10) усі перші множники дорівнюють нулю, $q_1 = q_k$. Тоді $q_1 = \dots = q_m = 1/m$.

У випадку, коли стан ДСК описується вектором $\mathbf{p}^t \in \mathbb{R}_{1,+}^2$ з двома координатами, $\mathbf{p}^t = (p_1^t, p_2^t)$, рівняння мають вигляд:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(p_i^t + b)}{z^t}, \quad z^t = (p_1^t)^2 + (p_2^t)^2 + b, \quad i = 1, 2.$$

З цих рівнянь, розглядаючи відношення p_1^t/p_2^t , легко зрозуміти, що при будь-якому $b > 0$ існують ті ж самі рівноважні стани, що і при $b = 0$. А саме, два асимптотично стійких, $\mathbf{q}_{1,0}^* = (1, 0)$, $\mathbf{q}_{0,1}^* = (0, 1)$, та один не стійкий, $\mathbf{q}_{1/2,1/2}^* = (1/2, 1/2)$. При цьому, басейн притягання точки $\mathbf{q}_{1,0}^*$ складається з усіх векторів $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ таких, що $p_1 > p_2$, а басейном $\mathbf{q}_{0,1}^*$ є вектори $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ з $p_1 < p_2$.

Ситуація змінюється, якщо вплив середовища у кожного з опонентів є різним. Тоді рівняння динаміки мають вигляд:

$$\begin{aligned} p_1^{t+1} &= \frac{p_1^t(p_1^t + b_1)}{z^t}, \quad p_2^{t+1} = \frac{p_2^t(p_2^t + b_2)}{z^t}, \\ z^t &= (p_1^t)^2 + (p_2^t)^2 + b_1 p_1^t + b_2 p_2^t, \quad 0 < b_1, b_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (20.11)$$

Нескладно переконатися у справедливості наступного твердження.

Твердження 20.2. *Для ДСК з двома опонентами, які згідно рівнянь (20.11) мають різні зовнішні впливи, існує три рівноважні стани: один нестійкий,*

$$\mathbf{q}^* = (q_1, q_2), \quad q_1 = \frac{1 + b_2 - b_1}{2}, \quad q_2 = \frac{1 - b_2 + b_1}{2},$$

та два стійкі

$$\mathbf{q}_{1,0}^* = (1, 0), \quad \mathbf{q}_{0,1}^* = (0, 1),$$

з басейнами притягання, які складаються з векторів $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ таких, що $p_1 > p_2 + b_2 - b_1$, $p_1 < p_2 + b_2 - b_1$, відповідно.

Отже, якою б не була перевага одного з опонентів над другим у початковий момент часу, скажімо, $p_1 > p_2$, це не гарантує йому перемогу в конфлікті. Дійсно, згідно твердження 20.2 він зазнає поразки, якщо зовнішній вплив другого опонента задовольняє рівняння $b_2 + p_2 > b_1 + p_1$.

Розглянемо опис нерухомих точок (рівноважних станів) ДСК з трьома альтернативними опонентами при наявності постійного зовнішнього впливу $b > 0$.

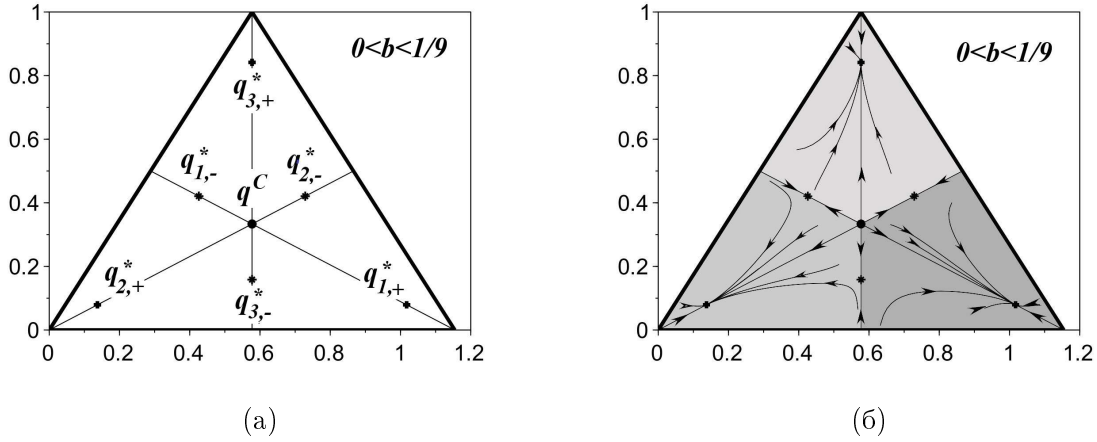


Рис. 20.2: (а) Розташування 7 нерухомих точок у випадку, коли параметр зовнішнього впливу не перевершує перший біфуркаційний поріг, $0 < b < 1/9$. (б) Типова динаміка траєкторій на симетричних басейнах притягання.

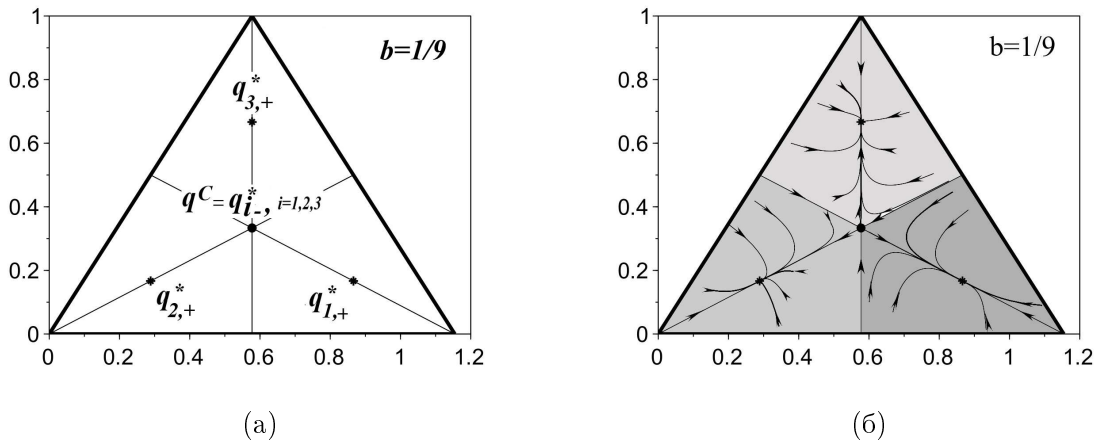


Рис. 20.3: Перший поріг біфуркації, $b_1 = 1/9$. (а) 3 рівноважні стани, $\mathbf{q}_{i,-}^*, i = \overline{1,3}$ та $\mathbf{q}^C$ стають тотожними. (б) Поведінки траєкторій суттєво змінилась: у точки $\mathbf{q}^C$ виникли басейни притягання у вигляді відрізків $B_{\mathbf{q}_{i,-}^*}$ (див. (20.14)).

У випадку $m = 3$ для знаходження незмінних векторів відображення T перепишемо формули (20.8) у вигляді системи трьох рівнянь:

$$p_i^{t+1} = \frac{(p_i^t + b)(p_i^t + 1)}{1 + L^t + 4b}, \quad t \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad (20.12)$$

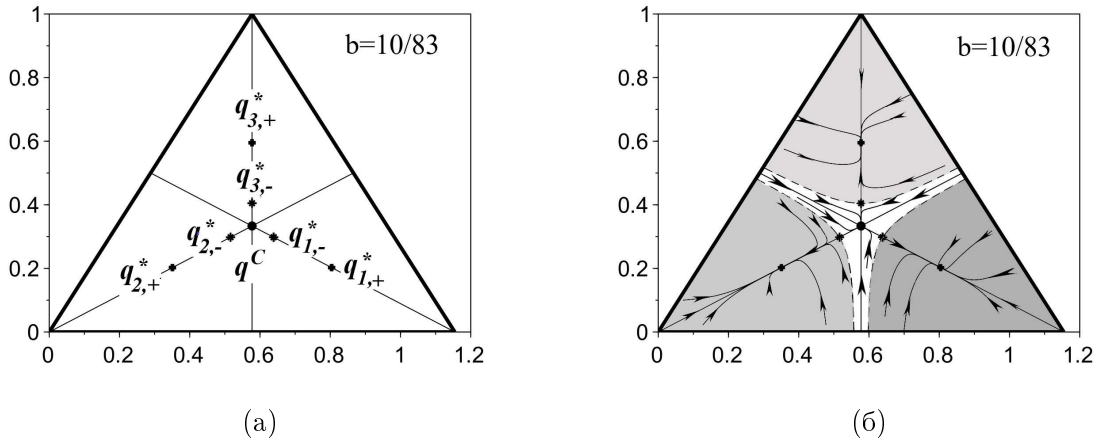


Рис. 20.4: (а) В кожному з рівноважних станів $\mathbf{q}_{i,+}^*, \mathbf{q}_{i,-}^*, i = \overline{1,3}$ є тільки одна найбільша координата, $q_{i,+}, q_{i,-} > 1/3$. (б) Окрім $\mathbf{q}_{i,+}^*$, точка $\mathbf{q}^C$ стає аттрактором, $\mathbf{q}_{i,-}^*$ є повними репелерами.

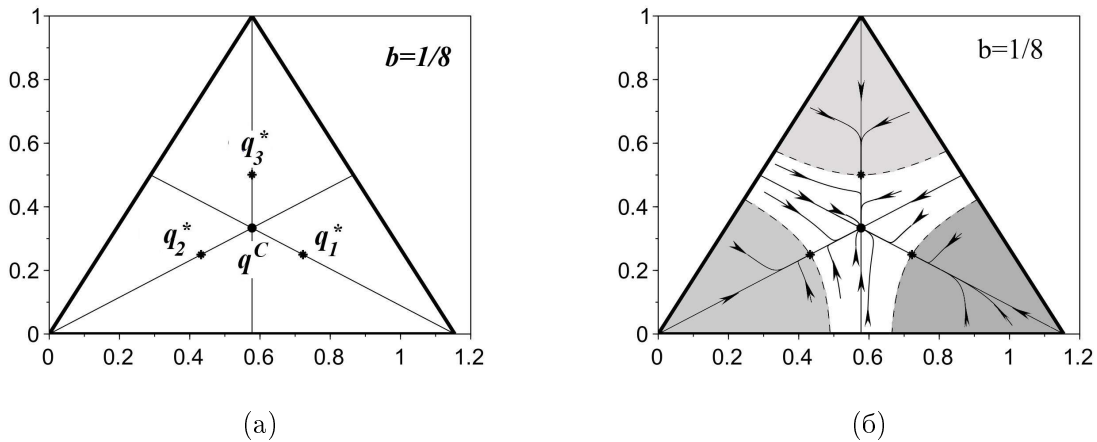


Рис. 20.5: Другий біфуркаційний поріг, $b = b_2 = 1/8$. (а) Рівноважні стани $\mathbf{q}_{i,+}^*$ та $\mathbf{q}_{i,-}^*, i = \overline{1,3}$ стають тотожними і позначенні через $\mathbf{q}_i^*$. (б) Точка $\mathbf{q}^C$ залишається повним аттрактором, а рівноважні стани $\mathbf{q}_i^*$ є нестійкими, вони мають лише односторонні басейни притягання.

де

$$L^t = \|\mathbf{p}^t\|^2 = \sum_{k=1}^3 p_k^{t^2}.$$

Теорема 20.2. При усіх строго додатних значеннях параметру зовнішнього впливу, $b > 0$, у динамічній системи заданої рівняннями (20.12)

існують рівноважні стани, яким відповідають, окрім $\mathbf{q}^C$, нерухомі вектори $\mathbf{q}_{i,\pm}^*$, $i \in \overline{1,3}$ з простору $\mathbb{R}_{1,+}^3$. Їхня кількість, як і значення координат залежать від величини параметру b .

А саме, при $0 < b < 1/9$ та $1/9 < b < 1/8$ існує сім нерухомих векторів:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^C, \mathbf{q}_{1,\pm}^* &= \left(\frac{1 \pm D}{2}, \frac{1 \mp D}{4}, \frac{1 \mp D}{4} \right), \\ \mathbf{q}_{2,\pm}^* &= \left(\frac{1 \mp D}{4}, \frac{1 \pm D}{2}, \frac{1 \mp D}{4} \right), \\ \mathbf{q}_{3,\pm}^* &= \left(\frac{1 \mp D}{4}, \frac{1 \mp D}{4}, \frac{1 \pm D}{2} \right), \quad D = \sqrt{1 - 8b}.\end{aligned}$$

При $b = 1/9$ динамічна система має чотири нерухомі точки, одну тривіальну

$$\mathbf{q}^C = \mathbf{q}_{i,-}^*, \quad i = \overline{1,3},$$

та три симетричні,

$$\mathbf{q}_{1,+}^* = \{2/3, 1/6, 1/6\}, \quad \mathbf{q}_{2,+}^* = \{1/6, 2/3, 1/6\}, \quad \mathbf{q}_{3,+}^* = \{1/6, 1/6, 2/3\}.$$

При $b = 1/8$ існує також чотири нерухомі точки:

$$\mathbf{q}^C, \mathbf{q}_1^* = \{1/2, 1/4, 1/4\}, \quad \mathbf{q}_2^* = \{1/4, 1/2, 1/4\}, \quad \mathbf{q}_3^* = \{1/4, 1/4, 1/2\},$$

де $\mathbf{q}_i^* := \mathbf{q}_{i,+}^* = \mathbf{q}_{i,-}^*$, $i = \overline{1,3}$,

Нарешті, при $b > 1/8$ система має єдину тривіальну нерухому точку $\mathbf{q}^C = \{1/3, 1/3, 1/3\}$.

Метод дослідження стійкості рівноважних станів ґрунтується на обчисленні власних значень матриці Якобі перетворення, яке генерує динамічну систему в нерухомій точці. За означенням, нерухома точка буде асимптотично стійкою, якщо модулі усіх власних значень матриці Якобі, позначимо їх μ_i , обчисленої в цій точці, менші за 1. Ми використовуємо цей метод для дослідження асимптотичної стійкості точок, які відповідають рівноважним станам наведеним в теоремі 20.2.

Наша динамічна система генерується перетворенням, яке в термінах координат задається однією і тією ж функцією:

$$f_i(p_1^t, p_2^t, p_3^t) = (p_i^t + b) \frac{1 + p_i^t}{1 + \sum_{k=1}^3 p_k^{t^2} + 4b}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Тому матриця Якобі має вигляд $J = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^3$ з елементами визначеним за похідними

$$a_{ii} = \frac{\partial f_i}{\partial p_i} = \frac{1}{z} \left[(1 + p_i) + (p_i + b) \left(1 - \frac{2p_i(1 + p_i)}{z} \right) \right],$$

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j} = -\frac{2p_j(1 + p_i)(p_i + b)}{z^2},$$

де $z = 1 + \sum_{k=1}^3 p_k^2 + 4b$.

Підставляючи у формули для a_{ii} , a_{ij} координати фіксованого нерухомого вектора $\mathbf{q}^C$ або $\mathbf{q}_{i,\pm}^*$ з теореми 20.2 з конкретним значенням параметру b , знаходимо явно елементи матриці Якобі. Для безпосереднього обчислення власних значень μ_i матриці J ми використовували Scilab — пакет прикладних математичних програм (<https://en.wikipedia.org/wiki/Scilab>).

Підсумовуючи наведені вище результати сформулюємо теорему.

Теорема 20.3. *При кожному значенні параметру зовнішнього впливу в межах $0 < b < 1/8$, за виключенням $b = 1/9$, існує 7 рівноважних станів: $\mathbf{q}^C$, $\mathbf{q}_{i,\pm}^*$, $i \in \overline{1, 3}$. При цьому, три з них, $\mathbf{q}_{i,+}^*$, є стійкими атрactorами з різними басейнами притягання. Інші три нерухомі стани $\mathbf{q}_{i,-}^*$ є нестійкими, переважно вони є репелерами, але у них є і нетривіальні басейни притягання (див. рис. 20.2–20.4).*

Вектор $\mathbf{q}^C$ при $0 < b < 1/9$ є чистим репелером (абсолютно не стійким станом). В той час, як вже при $b = 1/9$, коли з ним отождествлюються три вектори $\mathbf{q}_{i,-}$, у нього заявляється деякий басейн притягання (див. рис. 20.3).

Отже, при $b = 1/9$ динамічна система має три стійких рівноважних точок

$$\mathbf{q}_{1,+}^* = \{2/3, 1/6, 1/6\}, \quad \mathbf{q}_{2,+}^* = \{1/6, 2/3, 1/6\}, \quad \mathbf{q}_{3,+}^* = \{1/6, 1/6, 2/3\},$$

та одну нестійку: $\mathbf{q}^C = \mathbf{q}_{i,-}^*$, $i \in \overline{1,3}$.

При $b = 1/8$ вектори $\mathbf{q}_{i,+}$ та $\mathbf{q}_{i,-}$ стають тотожними. Їм відповідають три нестійкі рівноважні стани, які позначено через $\mathbf{q}_i$, $i = 1, 2, 3$. Вони розташовані на сепаратрисах, які поділяють простір $\mathbb{R}_{+,1}^3$ на регіони притягання до $\mathbf{q}_i$ та $\mathbf{q}^C$, відповідно (див. рис. 20.5).

Далі, у всіх трьох випадках, $1/9 < b < 1/8$, $b = 1/8$, $b > 1/8$ вектор $\mathbf{q}^C$ є одноточковим аттрактором з різними басейнами притягання (див. рис. 20.4, 20.5). При цьому, при $b > 1/8$ він залишається єдиним стійким рівноважним станом.

Теорема 20.4. Залежно від значення параметру зовнішнього впливу $b > 0$ поведінка ДСК з трьома гравцями демонструє наступні 5 режимів.

1. При $0 < b < 1/9$ нерухомі точки $\mathbf{q}_{i,+}^*$, $i \in \overline{1,3}$ є одноточковими аттракторами з басейнами притягання виду

$$B_{\mathbf{q}_{i,+}^*}(0 < b < 1/9) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3 \mid p_i > p_k, \quad k \neq i\}, \quad i = \overline{1,3}. \quad (20.13)$$

Стани, яким відповідають вектори $\mathbf{q}_{i,-}^*$ є репелерами лише частково, бо мають басейни притягання у вигляді напіввідкритих відрізків виду

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{q}_{i,-}^*}(0 < b < 1/9) \\ = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3 \mid p_i \in [0, 1/3), \quad p_k = p_{k'}, \quad k, k' \neq i\}, \quad i = \overline{1,3}. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Центральний рівноважний стан $\mathbf{q}^C$ є повним репелером (рис. 20.2).

2. Значення $b = b_1 = 1/9$ є першим біфуркаційним порогом. Чотири вектори, $\mathbf{q}^C$, $\mathbf{q}_{i,-}^*$ $i \in \overline{1,3}$ стають тотожними і утворюють

один нестійкий рівноважний стан, який переважно є репелером, але має басейн притягання у вигляді об'єднання трьох множини

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{q}^C}(b_1 = 1/9) &= \bigcup_{i=1}^3 B_{\mathbf{q}_{i,-}^*}(0 < b < 1/9) \\ &= \bigcup_{i=1}^3 \mathbb{R}_{+,1}^3 \setminus B_{\mathbf{q}_{i,+}^*}(0 < b \leq 1/9). \end{aligned} \quad (20.15)$$

Точки $\mathbf{q}_{i,+}^*$ залишаються стійкими атрactorами з попередніми басейнами притягання виду (20.13) (див. рис. 20.3).

3. При значеннях параметру зовнішнього впливу в межах $1/9 < b < 1/8$ існує знову 7 рівноважних станів, $\mathbf{q}_{i,+}^*$, $\mathbf{q}_{i,-}^*$, $i \in \overline{1,3}$, та $\mathbf{q}^C$ (див. рис. 20.4). При цьому, басейни притягання векторів $\mathbf{q}_{i,+}^*$ звужуються:

$$B_{\mathbf{q}_{i,+}^*}(1/9 < b < 1/8) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3 \mid p_i > q_{i,-} + \varepsilon_1(p_k, p_{k'}), \quad k, k' \neq i\},$$

де функція $\varepsilon_1(p_k, p_{k'})$ задає сепаратиси між басейнами притягання точок $\mathbf{q}_{i,+}^*$ та $\mathbf{q}^C$. Вектори $\mathbf{q}_{i,-}^*$ стають повними репелерами. Вектор $\mathbf{q}^C$ перетворюється на одноточковий атрactor з нетривіальним басейном притягання:

$$B_{\mathbf{q}^C}(1/9 < b < 1/8) = \mathbb{R}_{+,1}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^3 B_{\mathbf{q}_{i,+}^*}(1/9 < b < 1/8).$$

4. Значення параметру $b = b_2 = 1/8$ є другим біфуркаційним порогом. Із попередніх семи нерухомих точок залишається лише чотири: $\mathbf{q}^C$ та $\mathbf{q}_i^* := \mathbf{q}_{i,+}^*(b = 1/8) = \mathbf{q}_{i,-}^*(b = 1/8)$, $i \in \overline{1,3}$ з координатами $q_i = 1/2, q_k = q_{k'} = 1/4$, (див. рис. 20.5). При цьому, точки $\mathbf{q}_i^*$ є нестійкими (одностороніми) атрactorами з басейнами притягання виду

$$B_{\mathbf{q}_i^*} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_{+,1}^3 \mid p_i > 1/2 + \varepsilon_2(p_k, p_{k'})\}, \quad (20.16)$$

з функцією сепаратиси $0 \leq \varepsilon_2(p_k, p_{k'}) < 1/2$, а точка $\mathbf{q}^C(b = 1/8)$ є

асимптотично стійким атрактором з басейном виду:

$$B_{\mathbf{q}^C}(b = 1/8) = \mathbb{R}_{+,1}^3 \setminus \bigcup_{i=1}^3 B_{\mathbf{q}_i^*}.$$

5. При $b > 1/8$ існує лише один рівноважний стан заданий вектором $\mathbf{q}^C(b > 1/8) = \{1/3, 1/3, 1/3\}$. Він є стійким атрактором з басейном притягання, який складається з множини усіх стохастичних векторів

$$B_{\mathbf{q}^C}(b > 1/8) = \mathbb{R}_{+,1}^3.$$

Детально знаходження нерухомих станів і опис басейнів притягання з прикладами і рисунками наведений в [68].

20.4 Проблема існування компромісних станів

Досліджувалися моделі динамічних систем конфлікту в термінах стохастичних векторів, які описують еволюцію енергетичних статусів альтернативних опонентів у різних регіонах Ω_i життєвого або ресурсного простору Ω , який природним чином розкладається у скінчену кількість регіонів Ω_i , $2 \leq m < \infty$. Конфліктність опонентів означає, що їх конкурентна взаємодія відбувається по закону остаточного відштовхування, тобто повного взаємного витіснення у кожному з регіонів у сенсі ймовірнісної присутності. Математичний побудова таких моделей задається в дискретному часі еволюцією стохастичних векторів

$$\{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\} \rightarrow \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\}, \quad t = 1, 2, \dots$$

генерованою системою різницевих рівнянь в термінах координат виду

$$\begin{aligned} p_i^{t+1} &= \lambda p_i^t (1 - r_i^t), \quad r_i^{t+1} = \lambda r_i^t (1 - p_i^t), \quad t = 0, 1, \dots, \\ \lambda &= 1/z^t, \quad z^t = 1 - \theta^t, \quad \theta^t := (p^t, r^t) = \sum_i p_i^t r_i^t, \end{aligned} \quad (20.17)$$

де p_i^t, r_i^t — ймовірнісні статуси опонентів в регіонах Ω_i в момент часу t . Отже вектори $\mathbf{p}^t = (p_1^t, \dots, p_m^t), \mathbf{r}^t = (r_1^t, \dots, r_m^t)$ є стохастичними:

$$\sum_{i=1}^m p_i^t = 1 = \sum_{i=1}^m r_i^t, \quad p^t, r^t \in \mathbb{R}_{+,1}^m.$$

Такі моделі вже досліджувались в ряді публікацій. Один із основних результатів теорії динамічних систем стверджує збіжність траєкторій таких систем до рівноважних станів. Цей результат, відомий як теорема про конфлікт, коротко можна сформулювати таким чином.

Кожна траєкторія $\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\}$ динамічної системи породженої системою рівнянь (20.17), що стартує з довільної точки заданої парою стохастичних векторів $\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0 \in \mathbb{R}_{+,1}^m$ з умовою, $(\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0) \neq 1$, збігається до граничного стану (fixed point),

$$\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \longrightarrow \{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}, \quad t \longrightarrow \infty,$$

який складається з ортогональних векторів, $\mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty$. При цьому, якщо в початковий момент часу для якихось координат виконувалась нерівність $p_i^0 > r_i^0$, то $p_i^\infty > 0, r_i^\infty = 0$, якщо $p_k^0 < r_k^0$, то $p_k^\infty = 0, r_k^\infty > 0$, а якщо $p_j^0 = r_j^0$, то $p_j^\infty = r_j^\infty = 0$. Значення не нульових граничних координат $p_i^\infty > 0, r_k^\infty > 0$ є пропорційними початковим різницям $d_i = p_i^0 - r_i^0, d_k = r_k^0 - p_k^0$, тобто $p_i^\infty = d_i/D, r_k^\infty = d_k/D$, де коефіцієнт пропорції D є незалежним від індексів ненульових координат.

Ми досліджуємо нові питання про існування рівноважних компромісних станів, коли боротьба у фіксованому регіоні завершується не перемогою чи поразкою, а постійними додатними і взагалі різними статусами обох опонентів хоча б в одному конфліктному регіоні. Виявляється, що явище своєрідної компромісної рівноваги у боротьбі альтернативних опонентів стає можливим, якщо опоненти одержують (зовнішню) допомогу (підсилення). Математично це записується введенням зсувів координат у векторах ймовірнісної присутності опонентів в різних регіонах. В загальному випадку динамічна картина таких моделей досить складна і нетривіальна. Ми наводимо найпростіші спостереження і умови, при яких

альтернативні опоненти здатні одночасно співіснувати в одному чи декількох регіонах із строго додатними ймовірностями. Новий результат встановлює існування компромісних станів (одночасну присутність обох опоненти у фіксованому регіоні) при наявності, як несиметричної, так і симетричної стратегії отримання зовнішньої допомоги У несиметричному випадку один з опонентів отримує підсилення, яке пропорційне силі іншого опонента (залежне від часу), а другий не залежну від часу постійну підтримку. Не втрачаючи загальності ми покладемо, що кількість регіонів конфлікту дорівнює чотирьом, $m = 4$, а зовнішній вплив, як адитивне підсилення, опоненти одержують лише в одному третьому регіоні. Тоді рівняння динаміки мають вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 - r_i^t)}{z_p^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{r_i^t(1 - p_i^t)}{z_r^t}, \quad \forall i \neq 3, \quad (20.18)$$

$$p_3^{t+1} = \frac{(p_3^t + h_{p3}r_3^t)(1 - r_3^t)}{z_p^t}, \quad r_3^{t+1} = \frac{(r_3^t + h_{r3})(1 - p_3^t)}{z_r^t}, \quad (20.19)$$

де $0 < h_{p3}, h_{r3}$ позначають параметри підсилення в регіоні Ω_3 для опонентів А та В, відповідно. Зараз нормувальні знаменники z_p^t, z_r^t мають складніший вигляд, а саме легко переконатися, що

$$z_p^t = 1 - \theta^t + h_{p3}r_3^t(1 - r_3^t), \quad z_r^t = 1 - \theta^t + h_{r3}(1 - p_3^t),$$

де $\theta^t = \sum_i p_i^t r_i^t$. В цьому випадку ми доводимо, що система має принаймні пару компромісних станів. Ряд комп'ютерних прикладів ілюструє динаміку встановлення компромісного стану у регіоні Ω_3 при різних значеннях параметрів допомоги та початкових координат.

При симетричних стратегіях обидва опоненти отримують підсилення пропорційне силі іншого. Рівняння динаміки мають вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{(p_i^t + h_{pi}r_i^t)(1 - r_i^t)}{z_p^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{(r_i^t + h_{ri}p_i^t)(1 - p_i^t)}{z_r^t}, \quad i \in \overline{1, m}, \quad (20.20)$$

де параметри $h_{pi}, h_{ri} \geq 0$ мають інтерпретацію зовнішнього впливу (допомоги чи підсилення) опонентам А, В, відповідно, у регіоні Ω_i , а нор-

мувальні знаменники явно визначаються за формулами:

$$z_p^t = 1 - \theta^t + \sum_{i=1}^m h_{pi} r_i^t (1 - r_i^t), \quad z_r^t = 1 - \theta^t + \sum_{i=1}^m h_{ri} p_i^t (1 - p_i^t).$$

Для динамічних систем конфлікту заданих рівняннями (20.20) при необхідних умовах на параметри підсилення також існують компромісні стани. При цьому, компромісні значення координат у регіонах Ω_i визначаються тільки величинами параметрів зовнішньої допомоги і повністю втрачають залежність від координат у початкових векторах. Повний опис компромісних значень координат наведений у [91].

21 Аналіз поведінки траєкторій в моделях багатокomпонентних динамічних систем конфлікту

21.1 Залежність поведінки траєкторій динамічних систем конфлікту від вектора взаємодії

Далі буде розглянуто динамічні системи конфлікту в дискретному часі в термінах двох або більше стохастичних векторів $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, $m \geq 2$, $n \geq 2$, залежних від часу. Еволюція в часі задається відображенням, яке позначається символом $*$ і діє у просторі $\mathbb{R}_+^n$. Відображення $*$ генерує багатокomпонентну динамічну систему в дискретному часі з траєкторіями:

$$\{\mathbf{p}_i^t\}_{i=1}^m \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}_i^{t+1}\}_{i=1}^m, \quad t = 0, 1, \dots \quad (21.1)$$

У загальному випадку координати векторів $\mathbf{p}_i^{t+1}$ визначаються ітеративно за координатами попередніх векторів згідно з системою різницьових рівнянь:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{t+1} &= \frac{1}{z^t} (p_{ij}^t (\theta^t + 1) + \alpha \tau_j^t), \\ \alpha &\in [-1; 1], \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 0, 1, \dots, \\ z^t &= \theta^t + 1 + \alpha W^t, \quad W^t = \sum_j \tau_j^t, \end{aligned} \quad (21.2)$$

де $\theta^t = \theta(\mathbf{p}_1^t, \mathbf{p}_2^t, \dots, \mathbf{p}_m^t)$ — деяка обмежена додатна функція, яка визначає вільну еволюцію системи. Нормувальний знаменник z^t забезпечує стохастичність векторів $\mathbf{p}_i^{t+1}$. Набір додатних функцій τ_j^t (певним чином залежних від координат векторів $\mathbf{p}_i^t$) відповідає закону взаємодії. Значення цих функцій при кожному фіксованому t утворюють деякий нестохастичний вектор з невід'ємними координатами, який позначено символом $\mathcal{T}^t = (\tau_j^t)_{j=1}^n$ і називаємо вектором взаємодії. Вектор $\mathbf{w}^t = (w_j^t)_{j=1}^n$, де $w_j^t := \frac{\tau_j^t}{W^t}$, є стохастичним аналогом вектора $\mathcal{T}^t$. Далі буде досліджено

ряд моделей динамічних систем конфлікту, траєкторії яких залежать від вигляду вектора $\mathcal{T}^t$, а також вивчено залежність поведінки системи від поведінки $\mathcal{T}^t$ при $t \rightarrow \infty$.

В рівняннях (21.2) стала α може набувати довільного значення, але при досить великих α швидкість збіжності (чи розбіжності) системи буде досить великою при малих значення часу t . Така динаміка не відповідає динаміці реальних процесів, тому при побудові моделі було вибрано значення сталої α з проміжку $[-1; 1]$. Згідно з наведеними рівняннями, у випадку $\alpha \in (0; 1]$ відстань між векторами $\mathbf{p}_i^t$ в l_1 -нормі збігається до нуля,

$$\|\mathbf{p}_i^t - \mathbf{p}_k^t\|_1 = \sum_{j=1}^n |p_{ij}^t - p_{kj}^t| \rightarrow 0, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, \dots, m,$$

тому відображення $\star$, задане цими рівняннями, описує взаємодію притягання. При $\alpha \in [-1; 0)$ будемо говорити про динамічну систему з взаємодією відштовхування. Зауважимо, що при $\alpha = 0$ початковий стан $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$ є нерухомим.

В [38] досліджено багатокomпонентну динамічну систему з притягальною взаємодією, що описує модель поведінки довільної скінченної кількості сторін. Динаміка системи задається рівняннями (21.2) для $\alpha = 1$. Основним результатом роботи [38] є теорема 1, яку можна узагальнити для довільного $\alpha \in (0; 1]$. Доведення наступної теореми є аналогічним до доведення теореми 1 в [38].

Теорема 21.1. *Нехай всі координати стохастичного вектора $\mathbf{w}^t$ є монотонними (зростають або спадають незалежно одна від одної). Тоді існує граничний вектор $\mathbf{w}^\infty$ і кожна траєкторія динамічної системи (21.1) з початковим станом $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$ при $\alpha = (0; 1]$ збігається до нерухомого граничного стану $\{\mathbf{p}_i^\infty\}_{i=1}^m$*

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому всі граничні вектори $\mathbf{p}_i^\infty$ мають однакові координати

$$p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j^\infty}{W^\infty} \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

які співпадають з координатами вектора $\mathbf{w}^\infty$.

Також в роботі [38] розглянуто поведінку динамічної системи (21.1) у випадку, коли координати вектора $\mathcal{T}^t$ задані явно за допомогою координат векторів $\mathbf{p}_i^t$ однією з наступних рівностей:

$$\tau_j^t := \tau_{j,\min}^t = \min_i \{p_{ij}^t\}, \quad (21.3)$$

$$\tau_j^t := \tau_{j,\max}^t = \max_i \{p_{ij}^t\}. \quad (21.4)$$

$$\tau_j^t := \bar{\tau}_j^t = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n p_{ij}^t, \quad (21.5)$$

$$\tau_{j_1}^t = \tau_{j_2}^t > 0, \quad j_1, j_2 = 1, \dots, n. \quad (21.6)$$

Задання координат вектора $\mathcal{T}^t$ за допомогою однієї із формул (21.3), (21.4), (21.5), (21.6) забезпечує виконання рівності

$$\frac{\tau_j}{W} = \frac{\tau_j^t}{W^t}. \quad (21.7)$$

Завдяки рівності (21.7) у всіх таких випадках виконується теорема 21.1, причому всі граничні вектори $\mathbf{p}_i^\infty$ співпадають з початковим вектором $\mathbf{w}^{t=0}$, тобто

$$p_{ij}^\infty = \frac{\tau_j^{t=0}}{W^{t=0}} \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \quad (21.8)$$

Наступні теореми стосуються випадку $\alpha = [-1; 0)$. Монотонність послідовності w_j^t забезпечує існування граничних координат $w_j^\infty \in \mathbb{R}^1$ (див. [76]).

Теорема 21.2. *Нехай всі координати стохастичного вектора $\mathbf{w}^t$ спадають. Тоді кожна траєкторія динамічної системи (21.1) з початковим*

станом $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$ при $\alpha = [-1; 0)$ збігається до нерухомого граничного стану $\{\mathbf{p}_i^\infty\}_{i=1}^m$

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому, якщо $w_j^\infty < 0$ для всіх $j = 1, \dots, n$, то

$$p_{ij}^\infty = w_j^\infty \quad \forall i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$$

Теорема 21.3. Нехай $\tau_j^t = \min_i \{p_{ij}^t\}$, $j = 1, \dots, n$. Тоді кожна траєкторія динамічної системи (21.1) з початковим станом $\{\mathbf{p}_i^{t=0}\}_{i=1}^m$ при $\alpha = [-1; 0)$ збігається до нерухомого граничного стану $\{\mathbf{p}_i^\infty\}_{i=1}^m$

$$\mathbf{p}_i^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_i^t, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

При цьому, якщо $\tau_j^{t=0} = p_{ij}^{t=0}$, то

$$p_{ij}^\infty = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (21.9)$$

Теорема 21.4. Нехай $m = 2$. Координати граничних векторів $\mathbf{p}_1^\infty$ та $\mathbf{p}_2^\infty$ кожної траєкторії динамічної системи (21.1) при $\alpha \in [-1; 0)$, $\tau_j = \min_i \{p_{ij}^t\}$ для всіх $j = 1, \dots, n$ мають наступний явний опис. Якщо початкові вектори однакові, $\mathbf{p}_1^t = \mathbf{p}_2^t$, то й граничні вектори будуть рівними, $\mathbf{p}_1^\infty = \mathbf{p}_2^\infty$. Якщо $\mathbf{p}_1^t \neq \mathbf{p}_2^t$, то граничні вектори є ортогональними, $\mathbf{p}_1^\infty \perp \mathbf{p}_2^\infty$, причому

$$p_{1j}^\infty = \begin{cases} \frac{d_j}{D}, & \text{якщо } p_{1j} > p_{2j}, \\ 0, & \text{якщо } p_{1j} < p_{2j}, \end{cases} \quad p_{2j}^\infty = \begin{cases} \frac{d_j}{D}, & \text{якщо } p_{2j} > p_{1j}, \\ 0, & \text{якщо } p_{2j} < p_{1j}. \end{cases} \quad (21.10)$$

Результати, отримані в теоремах 21.3 та 21.4 можуть бути застосовані до опису перерозподілу простору існування між двома та багатьма альтернативними сторонами. Лише у випадку двох альтернативних сторін ($m = 2$) простір існування розпадається на дві окремі множини. Для випадку $m > 2$, тобто взаємодії більше ніж двох альтернативних сторін, теорему 21.3 можна трактувати наступним чином: взаємодія триватиме до повного витіснення однієї зі m сторін з кожного регіону простору

існування, тобто з кожного регіону простору існування буде витіснено найслабшу сторону.

Результати теореми 21.1 можуть бути застосовані при дослідженні виникнення достовірної події. За означенням, достовірна подія відповідає граничному вектору з одиничною координатою. При $\alpha \in (0; -1]$ можна знайти умови, що забезпечать рівність одиниці однієї з граничних координат вектора $\mathbf{w}^\infty$, тобто $w_j^\infty = 1$ для довільного $j = 1, \dots, n$. Цим самим можна стверджувати, що в фіксованому j -ому регіоні одночасно буде виникати достовірна подія для m альтернативних сторін. Така модель узагальнює раніше досліджену модель з двох сторін на скінченну кількість альтернативних сторін.

Далі буде розглянуто декілька варіантів описаної вище моделі динамічних систем конфлікту та умови при яких динаміка системи є циклічною. Нехай координати кожного вектора $\mathbf{p}_i^t = (p_{ij}^t)_{j=1}^n$, $i = 1, \dots, m$ змінюються згідно з рівняннями (21.2). Припустимо, що координати вектора взаємодії $\tau_j^t = \tau_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, де $\tau_j(t)$ — довільні додатні періодичні функції з сумірними періодами. Тоді за властивістю періодичних функцій $W(t) \equiv W^t$, координати $w_j^t = w_j(t) = \frac{\tau_j(t)}{W(t)}$ стохастичного вектора $\mathbf{w}^t$ будуть також періодичними з головним періодом, який позначимо через T .

Теорема 21.5. *Припустимо, що головний період функцій $w_j(t)$ є додатнім цілим числом $T > 1$, а координати вектора $\mathbf{w}^t$ не є константами. Тоді кожна траєкторія динамічної системи (21.1), заданої системою різницевих рівнянь (21.2), збігається до ω -граничної множини Γ^∞ , яка є циклічною орбітою. Тобто, множина Γ^∞ є інваріантною відносно перетворення $\ast$ та складається з T впорядкованих векторів Γ_l , $l = 1, \dots, T$*

$$\Gamma_1 \xrightarrow{\ast} \Gamma_2 \xrightarrow{\ast} \Gamma_3 \xrightarrow{\ast} \dots \xrightarrow{\ast} \Gamma_T \xrightarrow{\ast} \Gamma_1.$$

Гранична множина Γ^∞ залежить від початкового вектора $\mathbf{w}^{t=0}$.

Можна записати динамічну систему для неперервного часу аналогічно до систем (21.1) в термінах диференціальних рівнянь:

$$\dot{p}_{ij}(t) = -\frac{p_{ij}(t) \cdot W(t) - \alpha \tau_j(t)}{\theta(t) + 1 + \alpha W(t)}, \quad (21.11)$$

де

$$W(t) = \sum_{j=1}^n \tau_j(t),$$

$\theta(t) = \theta(\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \dots, \mathbf{p}_m(t))$ — деяка обмежена додатна функція, $\tau_j(t)$ — довільні додатні періодичні функції з сумірними періодами. Для динамічної системи такого сорту з неперервним часом також справедлива теорема 21.5, тобто існуватиме ω -гранична множина, що є циклічною орбітою.

В статтях [38, 76] при побудові моделі припускалося, що координати τ_j^t вектора $\mathcal{T}^t$ залежать лише від j -того індексу координат p_{ij}^t та не залежать від індексу вектора $\mathbf{p}_i^t$. У подальших дослідженнях планується дослідити ускладнення, якщо для всіх координат p_{ij}^t задати різні значення τ_{ij}^t , тобто якщо координати τ_{ij}^t будуть залежні від j -того індексу координат p_{ij}^t та індексу вектора $\mathbf{p}_i^t$. В такій постановці модель динамічної системи можна інтерпретувати як деяку модель соціуму, де кількість векторів відповідає загальній кількості груп в суспільстві, кількість координат описує кількість індивідів у кожній групі, а відповідно кожна координата p_{ij}^t може описувати поведінку конкретного індивіда. При такій постановці вектор $\mathcal{T}^t$ може задавати взаємодію між групами суспільства чи індивідами в середині кожної з груп.

У різних постановках такого типу задача досліджувалася в багатьох роботах, зокрема, поведінку динамічної системи з притягальною взаємодією, задану рівняннями (21.2) можна інтерпретувати як ефект синхронізації в моделях фазових осциляторів. Вище досліджену модель динамічної системи як модель формування поглядів та досягнення консенсусу. Також такого сорту динамічні системи можуть мати пряме за-

стосування при прогностичному аналізі статистичних даних. В якості значень вектора взаємодії $\mathcal{T}^t$ можна приймати деякий ряд статистичних даних за певний проміжок часу, котрі необов'язково змінюються за строгим математичним законом, однак володіють деякими відстежуваними закономірностями (наприклад, коливаються в деяких межах, періодично повторюються і т.д.).

21.2 Збіжність до рівноважного атрактора у моделях динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією

Далі побудовано модель динамічної системи, що описує рівномірний або груповий розподіл особин популяції на деякому ресурсному просторі існування $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n > 1$. Зафіксуємо на Ω деяку ймовірнісну дискретну міру μ , яка відповідатиме деякій популяції. Значення цієї міри $\mu(\omega_i) =: p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, інтерпретуємо як щільність розподілу популяції в регіоні існування ω_i . За побудовою $\sum_i p_i = 1$. Тому послідовність $\mu(\omega_i)$ визначає в $\mathbb{R}_+^n$ стохастичний вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$.

Боротьбу за життєві ресурси, зосереджені в кожному з регіонів простору, описуємо в термінах міри ν , значення якої в точках ω_i визначаються так:

$$\nu(\omega_i) = \frac{1 - \mu(\omega_i)}{n - 1} = \frac{1 - p_i}{n - 1} =: r_i.$$

Легко перевірити, що ці значення також утворюють стохастичний вектор $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Величини $\nu(\omega_i)$ можна інтерпретувати як усереднення розподілу μ на підмножині $\Omega \setminus \omega_i$.

Дослідимо поведінку траєкторій динамічної системи з дискретним часом у термінах стохастичних векторів

$$\mathbf{p}^t \xrightarrow{*,t} \mathbf{p}^{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (\mathbf{p}^0 \equiv \mathbf{p}), \quad (21.12)$$

де $*$ позначає перетворення, яке відповідає динаміці зміни популяції на просторі існування Ω .

У термінах координат закон конфліктної динаміки визначимо так:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 + c_i r_i^t)}{z^t}, \quad 0 \leq c_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (21.13)$$

де $r_i^t = \frac{1-p_i^t}{n-1}$, а нормувальний знаменник z^t забезпечує стохастичність вектора $\mathbf{p}^{t+1}$. Набір сталих c_i трактується як незмінні з часом t сприятливі умови для існування популяції в кожному з регіонів ω_i відповідно.

Зауважимо, що у роботах ^{36 37} побудовано математичну модель динамічної системи конфлікту, що описує поведінку індивідів у соціумі. Динаміка в цій моделі описується рівняннями з відштовхувальною взаємодією:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 - c_i r_i^t)}{z^t}, \quad 0 \leq c_i \leq 1.$$

Вибір притягальної взаємодії докорінно змінює динаміку системи й істотно впливає на її властивості.

Далі проведено аналіз поведінки траєкторій (21.12), заданих рівняннями (21.13), у термінах координат стохастичних векторів $\mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^t$.

Припустимо, що у формулах (21.13) всі $c_i = 1$ для всіх $i = 1, \dots, n$, тобто умови для існування популяції однакові в кожному з регіонів ω_i та незмінні з часом. Тоді рівняння (21.13) можна переписати у вигляді

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 + r_i^t)}{1 + (\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t)}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (21.14)$$

Далі дослідимо властивості траєкторій (21.12) в такому випадку. Зауважимо, що поведінка динамічної системи є аналогічною для випадку, коли всі сталі c_i дорівнюють деякому додатному числу c . Для простоти доведення розглянуто випадок, коли $c_i = 1$. Нижче буде доведено, що зміна координат векторів $\mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^t$ згідно з рівняннями (21.14) приводить до того, що всі ненульові координати цих векторів стають рівними між собою при $t \rightarrow \infty$, а це відповідає рівномірному розподілові на просторі Ω .

³⁶Karataeva T.V., Koshmanenko V.D., Society, Mathematical Model of a Dynamical System of Conflict, *J. Math. Sci.*, **247**, (2020), P. 291–313.

³⁷Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M., Kulakowski K., Mean field model of a game for power, *Physica A*, **525**, (2019), P. 535–547.

Якщо ввести величину $L^t := \sum_{i=1}^n (p_i^t)^2 = \|\mathbf{p}^t\|^2$, то перетворення $\ast$ можна переписати лише в термінах координат вектора $\mathbf{p}^t$:

$$p_i^{t+1} = p_i^t k_i^t, \quad k_i^t = \frac{n - p_i^t}{n - L^t}. \quad (21.15)$$

Позначимо через M множину всіх нульових координат вектора $\mathbf{p}$, тобто $M = \{p_i : p_i = 0\}$, а через $\gamma(M)$ — потужність цієї множини. З рівнянь (21.15) зрозуміло, що M та $\gamma(M)$ не залежать від t .

Теорема 21.6. *Кожна траєкторія динамічної системи конфлікту (21.12) з довільною парою початкових стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$ ($n > 1$), еволюція якої задана формулами (21.15), збігається до граничного стану, який є нерухомою точкою $\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t$, $\mathbf{r}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}^t$. При цьому,*

- 1) якщо $\gamma(M) = 0$, то $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$ і $p_i^\infty = r_i^\infty = \frac{1}{n}$;
- 2) якщо $\gamma(M) = m$, $m < n$, то $\mathbf{p}^\infty \neq \mathbf{r}^\infty$ і для всіх $p_j \in M$

$$p_j^\infty = 0, \quad r_j^\infty = \frac{1}{n-1},$$

а для всіх $p_i \notin M$

$$p_i^\infty = \frac{1}{n-m}, \quad r_i^\infty = \frac{n-m-1}{(n-1)(n-m)}.$$

Граничний стан стійкий лише у випадку $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$.

Далі розглянемо випадок, коли всі параметри c_i є різними. Саме вони впливають на розподіл популяції та призводять до збільшення чи зменшення популяції по деяких регіонах ω_i . Адже граничний стан повністю визначається набором параметрів c_i . Так, порушення умови (21.18) для деякого i в теоремі 21.8 призводить до $p_i^\infty = 0$, що можна трактувати як повне зникнення особин популяції з цього i -го регіону. Це підтверджено численними комп'ютерними симуляціями. А явний вигляд граничних

векторів демонструє, що чим більше значення сталої c_i , тим більше значення відповідної i -ої граничної координати. Тобто сприятливі умови для існування популяції в деякому регіоні приводять до збільшення кількості особин популяції в цьому регіоні.

Враховуючи, що $r_i^t = \frac{1-p_i^t}{n-1}$, рівняння (21.13) можна записати як

$$p_i^{t+1} = p_i^t \cdot \frac{n-1+c_i(1-p_i^t)}{n-1+L_c^t} = p_i^t \cdot k_{i,c}^t, \quad t \geq 1, \quad (21.16)$$

де

$$k_{i,c}^t = \frac{n-1+c_i(1-p_i^t)}{n-1+L_c^t}, \quad L_c^t = \sum_{i=1}^n c_i p_i^t (1-p_i^t).$$

Надалі використовуватимемо позначення $\kappa_i^t := c_i^t(1-p_i^t)$.

Теорема 21.7. *Нехай $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^2$, тоді кожна траєкторія динамічної системи конфлікту (21.12) збігається до стійкого граничного стану, який є нерухомою точкою $\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t$, причому*

$$\mathbf{p}^\infty = \left(\frac{c_1}{c_1+c_2}, \frac{c_2}{c_1+c_2} \right). \quad (21.17)$$

Теорема 21.8. *Нехай $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^3$, причому для кожного $i = 1, 2, 3$ виконується одна з умов $\kappa_i^t > L_c^t$ або $\kappa_i^t < L_c^t$ для довільного t . Тоді кожна траєкторія динамічної системи конфлікту (21.12) збігається до граничного стану, який є нерухомою точкою $\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t$. Причому,*

$$\mathbf{p}^\infty = \left(\frac{c_1 c_2 + c_1 c_3 - c_2 c_3}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}, \frac{c_1 c_2 - c_1 c_3 + c_2 c_3}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3}, \frac{c_1 c_3 - c_1 c_2 + c_2 c_3}{c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3} \right),$$

якщо для всіх $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq k$

$$c_i > \frac{c_j c_k}{c_j + c_k}. \quad (21.18)$$

Теорема 21.9. *Нехай $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^n$, $n > 3$. Припустимо для кожного $i = 1, \dots, n$ починаючи з деякого моменту часу t^* виконується одна з умов*

$\kappa_i^{t^*} > L_c^{t^*}$ або $\kappa_i^{t^*} < L_c^{t^*}$. Тоді кожна траєкторія динамічної системи конфлікту збігається до нерухомого граничного стану $\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t$. Причому, для довільного $i = 1, 2, \dots, n$ виконується одна з рівностей

$$p_i^\infty = 0 \quad \text{або} \quad p_i^\infty = f_i(c_1, c_2, \dots, c_n),$$

де $f_i(c_1, c_2, \dots, c_n)$ набуває додатнього значення.

Можна припустити, що кожен з параметрів c_i впливає на розподіл популяції та призводить до збільшення чи зменшення кількості особин популяції по деяких регіонах ω_i простору існування Ω . Явний вигляд граничних векторів демонструє, що чим більше значення сталої c_i , тим більше значення відповідної i -ої граничної координати. Тобто сприятливі умови для існування популяції в деякому регіоні приводять до збільшення кількості особин популяції в цьому регіоні. Отже, така модель динамічної системи може описувати випадковий, груповий або рівномірний розподіл особин у популяції згідно з класифікацією Швердтфегера. Досягнути випадкового розподілу можна шляхом випадкового вибору значень набору параметрів c_i , $i = 1, \dots, n$ на кожному кроці часу t .

В подальших дослідженнях можливий розгляд поведінки траєкторій такого сорту системи при зміні параметрів c_i , $i = 1, \dots, n$ на кожному кроці часу t , тобто набір параметрів може задаватися як деякий набір функцій чи набувати матричних значень. При такій постановці задачі можливе досягнення періодичності траєкторій чи виявлення ефекту синхронізації між деякими координатами.

Отже, досліджено моделі багатокомпонентних динамічних систем конфлікту. Для притягальної та відштовхувальної взаємодії встановлено умови збіжності траєкторій до рівноважного стану або граничного циклу. Проаналізовано вплив параметрів взаємодії на поведінку системи та розподіл популяції в ресурсному просторі.

У пункті 21.1 розглядаються багатокомпонентні динамічні системи конфлікту, траєкторії яких залежать від стохастичних векторів та їх вза-

ємодії. Установлено, що для взаємодії типу притягання всі траєкторії сходяться до одного граничного стану при певних умовах на параметри системи. Аналізуються різні способи задання вектора взаємодії (мінімальне, максимальне чи середнє значення координат), що визначає характер динаміки. Для взаємодії типу відштовхування досліджено траєкторії, що розбіжні або сходяться до специфічних нерухомих точок.

У пункті 21.2 запропоновано модель, що описує рівномірний або груповий розподіл популяції на ресурсному просторі. Встановлено умови, за яких система сходиться до рівноважного стану, що забезпечує рівномірний розподіл. Вплив параметрів середовища (коефіцієнтів сприятливості) на популяційний розподіл показує, що сприятливі умови в регіонах ведуть до збільшення популяції в них. Результати підтверджено аналітично та через числове моделювання.

Результати можуть бути застосовані до аналізу процесів синхронізації, формування консенсусу або прогнозування розподілу в складних системах.

Висновки

У роботі отримано такі основні результати:

Проведено повну класифікацію інтегровних та суперінтегровних гамільтонових систем зі змінним параметром маси, які володіють циліндричною симетрією. Такі системи мають дуже широке коло застосувань у сучасній фізиці, зокрема, теорії твердого тіла та напівпровідників, тому отримані результати можуть мати певне прикладне значення, оскільки саме суперінтегровні системи у багатьох теоріях є найбільш фундаментальними (чл.-кор. НАН України А.Г. Нікітін).

Отримано повну класифікацію симетрій відносно неперервних груп перетворень для рівняння Шрьодінгера, що описує взаємодію зарядженої частинки зі суперпозицією електричного та магнітного полів. Отримані результати створюють важливу частину теоретико-групового підґрунтя квантової механіки і можуть бути корисними елементами моделей сучасної теоретичної фізики, оскільки надають апріорну інформацію щодо можливих симетрій фундаментальних рівнянь квантової механіки відносно неперервних груп перетворень (чл.-кор. НАН України А.Г. Нікітін).

Явно сформульовано й систематично вивчено новий тип задач групового аналізу диференціальних рівнянь — обернені задачі щодо законів збереження. Розв'язано декілька частинних задач цього типу: обернену задачу щодо перших інтегралів звичайних диференціальних рівнянь, обернену задачу щодо законів збереження еволюційних рівнянь, а також обернену задачу щодо законів збереження диференціальних рівнянь, що допускають нескінченний розмірний простір характеристик закону збереження нульового порядку спеціальної структури (Р.О. Попович).

Для одночасного пошуку груп еквівалентності ненормалізованого класу диференціальних рівнянь та набору його підкласів запропоновано оптимізовану версію прямого методу. Під час застосування запропонованої техніки до підкласів класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь

реакції–дифузії з коефіцієнтом дифузії, залежним від градієнта, вперше побудовано нетривіальний приклад скінченновимірної ефективної узагальненої групи еквівалентності та приклад класу диференціальних рівнянь, звичайна група еквівалентності якого не міститься у будь-якій його ефективній узагальненій групі еквівалентності (В.М. Бойко, С.В. Опанасенко, Р.О. Попович).

Фізично-інформовані нейронні мережі вперше використано для розв'язання рівнянь мілкої води на сфері в метеорологічному контексті. Ці мережі навчено задовольняти диференціальні рівняння разом із заданими початковими та граничними умовами, а тому їх можна розглядати як альтернативний підхід до чисельного інтегрування диференціальних рівнянь порівняно з традиційними обчислювальними методами (різницеvими, скінченних об'ємів або спектральними). Запропоновано простий мультимодельний підхід у випадку порівняно довгих інтервалів часу, в рамках якого замість однієї нейронної мережі для всього інтервалу інтегрування розглянуто послідовність нейронних мереж, а кодування граничних умов на спеціальному рівні нейронної мережі дозволило суттєво оптимізувати обчислення і покращити їх точність. Можливості методу проілюстровано через розв'язання найвідоміших тестових прикладів з метеорології (Р.О. Попович).

Ревізовано основи теорії групової класифікації диференціальних рівнянь включно з її фундаментальними поняттями і постановками задач. Після введення нового поняття слабкоподібних класів диференціальних рівнянь для таких класів розроблено метод групової класифікації через відображення між класами, який узагальнює всі версії цього методу, представлені в літературі. Метод відображення застосовано до групової класифікації різних класів рівнянь Колмогорова та рівнянь Фоккера–Планка у випадку просторової розмірності один. Обчислено груподи еквівалентності та групи еквівалентності цих класів, а задачі групової класифікації для них щодо відповідних груп еквівалентності зведе-

но до знаходження повного набору нееквівалентних розв'язків рівнянь теплопровідності з нееквівалентними потенціалами, що допускають розширення лівської симетрії. Це зведення дозволяє вичерпно розв'язати задачі групової класифікації для класів рівнянь Колмогорова та Фоккера–Планка з незалежними від часу коефіцієнтами (Р.О. Попович).

Показано, що добре відома теорія лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь зазнає істотних змін при введенні додаткового дійсного параметра. Певні важливі властивості, як то існування фундаментальних множин розв'язків або їх характеристика за допомогою ненульових вронськіанів, виявилися чутливими до топологічних властивостей області, яку пробігає набір з незалежної змінної та параметра. Вичерпно охарактеризовано розв'язність таких систем із параметром залежно від топологічних властивостей області. Цю проблему також вивчено в межах теорії узагальнених функцій (В.М. Бойко, Р.О. Попович).

Доведено, що клас рівнянь Клейна–Гордона є нормалізованим у звичайному сенсі відносно як точкової так і контактної еквівалентності. Виконано вичерпну групову класифікацію цього класу та низки його підкласів (В.М. Бойко, О.В. Локазюк, Р.О. Попович).

Уточнено результати щодо допустимих перетворень між лінійними системами звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з довільною кількістю залежних змінних за відповідних калібрувань довільних елементів, що параметризують ці системи. Це дозволило вичерпно описати групоїди еквівалентності виокремлених класів, а також їхніх сингулярних і регулярних підкласів. Застосовуючи різноманітні алгебраїчні прийоми, досліджено основні властивості лівських симетрій розглянутих систем і описано шляхи їх повної симетрійної класифікації. Як ілюстративний приклад використання розробленої теорії розв'язано задачу повної групової класифікації для всіх цих класів у випадку двох залежних змінних (В.М. Бойко, О.В. Локазюк, Р.О. Попович).

Проведено розширений симетрійний аналіз $(1+2)$ -вимірної системи Бойті–Леона–Пемпінеллі. Низка ретельно підібраних диференціальних зв'язків дозволила побудувати сім'ї її точних розв'язків, які значно ширші за усі відомі і додатково можуть бути суттєво розширені перетвореннями Лапласа та Дарбу (Р.О. Попович).

Використовуючи оригінальну версію алгебраїчного методу на основі мегаідеалів, знайдено псевдогрупи точкових і контактних симетрій бездисперсійного рівняння Нижника. Це перший приклад у літературі диференціальних рівнянь для яких алгебраїчна умова повністю визначає групу її точкових симетрій. Прокласифіковано одно- та двовимірні підалгебри максимальної алгебри ліївської інваріантності бездисперсійного рівняння Нижника, детально досліджено ліївські та точкові симетрії редуктованих рівнянь, і як результат побудовано широкі сім'ї нових точних інваріантних розв'язків бездисперсійного рівняння Нижника (В.М. Бойко, Р.О. Попович, О.О. Вінніченко).

Проведено розширений симетрійний аналіз ультрапараболічного рівняння Фокера–Планка з трьома незалежними змінними, яке відзначається чудовими симетрійними властивостями в класі таких рівнянь Фокера–Планка. Обраховано псевдогрупу точкових симетрій рівняння, проаналізовано її структуру та виділено суттєву підгрупу. Після класифікації підалгебр алгебри ліївської інваріантності, прокласифіковано ліївські редукції та проведено узагальнені редукції, які пов'язано з генерацією розв'язків ітеративною дією операторами ліївської симетрії. У результаті побудовано широкі сім'ї точних розв'язків рівняння Фокера–Планка, параметризованих довільною скінченною кількістю розв'язків $(1+1)$ -вимірного лінійного рівняння теплопроводності (С.Д. Коваль, Р.О. Попович).

Отримано зручне зображення для перетворень точкової симетрії $(1+1)$ -вимірного лінійного рівняння теплопроводності та коректно їх інтерпретовано. Це дозволило довести, що псевдогрупа цих перетворень

має рівно дві компоненти зв'язності. Тобто, рівняння теплопровідності допускає єдину незалежну дискретну симетрію, в якості якої можна вибрати заміну знаку залежної змінної. Введено поняття псевдодискретних елементів групи Лі та показано, що заміна знаку просторової змінної, яка довгий час неправильно інтерпретувалась як дискретна симетрія рівняння теплопровідності, насправді є псевдодискретним елементом її суттєвої групи точкових симетрій (С.Д. Коваль, Р.О. Попович).

Серед $(1+2)$ -вимірних ультрапараболічних лінійних рівнянь виокремлено гарне зворотнє рівняння Колмогорова з квадратичною дифузивністю. За модулем точкової еквівалентності, це єдине рівняння в класі, чия суттєва алгебра ліївської інваріантності є п'ятивимірною та нерозв'язною. Прямим методом обраховано псевдогрупу точкових симетрій цього рівняння та проаналізовано її структуру. Вичерпно класифіковано всі підалгебри суттєвої алгебри ліївської інваріантності з точністю до внутрішніх автоморфізмів і з точністю до дії суттєвої групи точкових симетрій, що дозволило класифікувати ліївські редукції та інваріантні розв'язки рівняння (С.Д. Коваль, Р.О. Попович).

Досліджено трансформаційні властивості двох класів узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної, а також продемонстровано ефективність методу еквівалентності для побудови точних розв'язків таких рівнянь. Зокрема, знайдено групоїди еквівалентності обох класів рівнянь, і доведено, що обидва класи є нормалізованими. Знайдено критерій звідності рівнянь з одного з досліджуваних класів зі змінними коефіцієнтами до стандартного модифікованого рівняння Кортевега–де Фріза, а для другого класу рівнянь встановлено повну подібність до класичного рівняння Кортевега–де Фріза. Отримано формули для генерації точних розв'язків узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами та наведено приклади побудови точних розв'язків за допомогою цих формул (О.О. Ванєєва, О.Ю. Жалій).

Клас узагальнених рівнянь Кавахари з коефіцієнтами, що залежать від часу, розглянуто з симетрійної точки зору. Проведено класифікацію ліївських редукцій рівнянь з такого класу. Для кожного випадку розширення ліївської симетрії визначено тип максимальної алгебри інваріантності відповідного рівняння Кавахари, побудовано оптимальну систему одновимірних підалгебр такої алгебри, які використано для знаходження ліївських анзаців. Виконано редукції рівняння Кавахари до звичайних диференціальних рівнянь, а також побудовано деякі точні ліївські інваріантні розв'язки (Ванєєва О.О., Жалій О.Ю.).

Виконано групову класифікацію ненормалізованого класу узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами. Для цього спочатку досліджено допустимі перетворення та проведено розбиття цього класу на два нормалізованих підкласи, для кожного з яких побудовано групоїди еквівалентності. В результаті виокремлено всі рівняння з класу, які допускають розширення ліївської симетрії (О.О. Ванєєва, О.Ю. Жалій).

Метод розгалуженого розщеплення й алгебраїчний метод Гайдона узагальнено для класифікації допустимих перетворень. Розвинуто такі нові техніки пошуку групоїдів еквівалентності, як встановлення ізоморфізмів між цими групоїдами й побудова породжувальної множини допустимих перетворень. Введено поняття регулярних і сингулярних розширень ліївської симетрії, за допомогою яких алгебраїчний метод групової класифікації розширено на ненормалізовані класи диференціальних рівнянь. Запропоновані поняття і методи застосовано для вичерпного опису групоїда еквівалентності й виконання групової класифікації ненормалізованого класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних хвильових і еліптичних рівнянь (О.О. Ванєєва, Р.О. Попович).

Знайдено локальні закони збереження двовимірного виродженого рівняння Бюргерса. Доведено, що простір законів збереження для цього рівняння є нескінченновимірним і природно ізоморфним до простору

розв'язків $(1+1)$ -вимірному зворотного лінійного рівняння теплопровідності. Також знайдено різні типи прихованих симетрій і прихованих законів збереження (локальних і потенціальних) цього рівняння (О.О. Ванєєва, Р.О. Попович).

Запропоновано нову математичну модель для опису розповсюдження інфекційних захворювання, яка базується на системі рівнянь реакції-дифузії з поперечною дифузією. Досліджено симетрійні властивості відповідної нелінійної системи. Побудовано точні розв'язки та вивчено їх властивості. Показано, що поведінка окремих розв'язків якісно описує процес розповсюдження пандемії Ковід-19 в Україні (В. В. Давидович, Р. М. Черніга).

Вичерпно описано оператори Q -умовної симетрії (окрім так званого по-го випадку) відомої трикомпонентної систем рівнянь реакції-дифузії, яка є основою відомої моделі для моделювання взаємодії первісних фермерів з мисливцями-збирачами. Отримані оператори застосовано для побудови нових точних розв'язків. Досліджено властивості отриманих розв'язків та наведено їхню інтерпретацію, яка якісно відповідає відомим числовим розв'язкам цієї моделі (В.В. Давидович, Р.М. Черніга).

Здійснено вичерпний опис операторів Q -умовної симетрії (окрім так званого по-го випадку) класичної моделі Шіґесади-Кавасакі-Терамото (при реалістичних обмеженнях), яка базується на нелінійних рівняннях реакції-дифузії з поперечною дифузією. За допомогою таких симетрій побудовано нові точні розв'язки досліджуваної моделі, які неможливо отримати за допомогою симетрій Лі (В.В. Давидович, Р.М. Черніга).

Знайдені розширення реалізацій деяких алгебр Лі низьких розмірностей, зокрема, для алгебри Пуанкаре для однієї просторової змінної. Використовуючи нееквівалентні розширення, ми виконали повну класифікацію відносних диференціальних інваріантів для цих алгебр Лі. Ми продемонстрували відмінність між класифікацією розширень реалізацій, та класифікацією нелінійних реалізацій алгебр Лі. Класифікація відно-

сних диференціальних інваріантів може бути застосована для повного опису інваріантних диференціальних рівнянь та в задачах розпізнавання образів (І.А. Єгорченко).

Розглянуті умовна та прихована симетрія багатовимірних хвильових рівнянь, які породжуються додатковими умовами. Додаткова умова, яка відповідає оператору ділатації, породжує нескінченновимірну умовну симетрію для хвильового рівняння. Розглянуті умови, коли виникає така нескінченновимірна симетрія. Знайдені широкі класи нових точних розв'язків багатовимірних хвильових рівнянь (І.А. Єгорченко).

Проведено групову класифікацію одного класу $(2+1)$ -вимірних лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів. За допомогою перетворень еквівалентності виділено всі нееквівалентні підкласи рівнянь, які мають алгебру інваріантності ширшу ніж, ядро основних алгебр інваріантності. Використовуючи теоретико-групові методи для деяких рівнянь цього класу, які мають алгебру інваріантності вищої розмірності ніж ядро основних алгебр інваріантності, були побудовані фундаментальні розв'язки (С.В. Спічак).

Вивчалися реалізації скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на колі. Описано всі реалізації цих алгебр над полем $\mathbb{R}$ з ненульовим фактором Леві, а також реалізації розв'язних алгебр Лі, розмірність яких не перевищує п'яти. Отримано комбінаторні формули для підрахунку кількості реалізацій алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ відносно кусочно-гладких глобальних перетворень кола на себе (С.В. Спічак).

Переглянуто методи побудови алгебр Лі диференціальних операторів першого порядку з гладкими коефіцієнтами та запропоновано конструктивний метод побудови граничних зв'язків між ними, що обходить вказані Юджином Вігнером перешкоди і не використовує перехід до груп Лі та параметризовані калібрувальні перетворення. Новий метод полягає у відкладеному граничному переході у неперервній параметризованій серії тензорів структурних сталих і дозволяє уникнути отримання нето-

чних реалізацій та неточних матричних представлень, що відповідають лінійним реалізаціям (М. Нестеренко).

Побудовано проекції ґраток кореневих систем D_4 та F_4 . Отримано надлишковий набір дискретних точок та знайдено вікно прийому для кореневої ґратки F_4 , що породжує щитовий квазікристал. Змодельовано тестовий потенціал, що відповідає плоскому перерізу фізичного квазікристалу такого типу (М. Нестеренко).

Запропоновано метод обробки даних на основі відображення між точками фізичного квазікристалу та його внутрішнього простору. Цей метод застосовано до обробки растрових зображень. Даний підхід дозволяє рівномірно розподілити дані, що втрачаються або шкодяться в процесі передавання чи зберігання. При цьому зберігається можливість однозначно відновити решту даних. Основними перевагами є суворе аперіодичність дискретних наборів і всюди розривна властивість відображення, а також висока швидкість обчислень, простота реалізації і можливість розширення методу для шифрування даних більшої розмірності. Наведено кілька прикладів побудови квазікристалів і прикладів обробки зображень (М. Нестеренко).

Розроблено модифікацію класичного шифру Вернама, яка заміняє одноразовий блокнот на аперіодичний дискретний набір з плитками двох типів. Метод використовує послідовність квазікристалічних мінімальних відстаней як одноразову послідовність логічних сталих для операції «виключне або». Головними перевагами є нескінченна кількість таких наборів і досить короткий ключ, який однозначно визначає квазікристал та дозволяє суттєво зменшити кількість даних, які необхідно зберігати або передавати захищеним каналом (М. Нестеренко).

Вивченню ліївськи ортогональні автоморфізми алгебр Li . отримано вичерпний опис ліївськи ортогональних операторів на метричних алгебрах Li , з якого випливає, що на простих алгебрах існують лише тривіальні ліївськи ортогональні оператори. Завдяки цьому повністю описано

множину ліївськи ортогональних операторів на напівпростих та редукованих алгебрах Лі, а також отримано деякі результати для загальних алгебр Лі з ненульовими факторами Леві (Д.Р. Попович).

Для довільного лінійного диференціювання D було отримано опис його централізатора в алгебрі Лі всіх $\mathbb{K}$ -диференціювань кільця многочленів від n змінних. У випадку, коли D є базовим диференціюванням Вейтценбека було вказано алгоритм знаходження твірних його централізатора як модуля над кільцем констант диференціювання D . У випадку локально нільпотентного диференціювання D скінченнопородженої області цілісності A над полем $\mathbb{K}$ було доведено, що централізатор диференціювання D в алгебрі Лі всіх $\mathbb{K}$ -диференціювань на A має ранг рівний степеню трансцендентності поля часток кільця A над полем $\mathbb{K}$ (Є.Ю. Чаповський).

Виведені нові рівняння для частково зв'язних кореляційних функцій, які описують взаємодію між кластерами. Описані кореляції кластерів та оцінки їх спадання (О.Л. Ребенко).

Отримана формула для кількості діаграм-лісів при заданій кількості кластерів і частинок у кожному кластері. Ця формула узагальнює відому формулу Келі для кількості діаграм-дерев з заданим числом вершин. Як наслідок приведене найпростіше доведення цієї формули (О.Л. Ребенко).

Встановлена нова комбінаторна тотожність, яка може бути корисною в теорії графів, теорії симетрій або в комбінаторній теорії множин (О.Л. Ребенко).

Встановлений аналітичний зв'язок між операторним підходом Рюеля і підходом, який був запропонований Мінлосом і Погосяном, до знаходження розв'язків рівнянь Кірквуда–Зальцбурга (О.Л. Ребенко).

Побудовані віріальні розклади кореляційних функцій канонічного ансамблю безпосередньо з рівнянь типу Кірквуда–Зальцбурга, які є нелінійними за параметром густини (О.Л. Ребенко).

Побудовано асимптотичні солітоноподібні розв'язки модифікованого рівняння Камаси–Холма зі змінними коефіцієнтами та сингулярним збуренням. Представлено загальну схему знаходження наближень будь-якого порядку і досліджено їх точність. Запропоновану методику можна використати для дослідження хвилеподібних розв'язків інших рівнянь зі змінними коефіцієнтами та малою дисперсією (В.Г. Самойленко).

Досліджена поведінка динамічної системи конфлікту, яка моделює еволюцію перерозподілу соціальної енергії індивідів абстрактного суспільства з урахуванням двох факторів — взаємною конкурентною боротьбою та зовнішнім впливом. Побудовані нерухомі точки. Для атракторів описані басейни притягання. Виявлено феномен поразки індивіда з найбільшою початковою енергією за умови отримання одним з слабший гравців достатньої зовнішньої підтримки (В.Д. Кошманенко, Т.В. Каратаєва).

Для динамічної системи конфлікту з трьома гравцями знайдено нові умови існування рівноважних станів та дано їх повний опис при наявності постійного однакового для усіх зовнішнього впливу. Досліджена стійкість таких станів залежно від параметру зовнішнього впливу. Наведено ряд комп'ютерних прикладів (В.Д. Кошманенко, Т.В. Каратаєва).

Запропоновані нові формули до постановка задачі про конфлікт в термінах теорії лінійних операторів в гільбертовому просторі (В.Д. Кошманенко, Т.В. Каратаєва).

Проаналізовано задачу про перерозподіл присутності альтернативних опонентів у різних регіонах простору життєвих ресурсів. Новий результат встановлює існування компромісних станів. При наявності зовнішньої допомоги для кожного з опонентів існують стани одночасної і постійної присутності обох опонентів хоча б у одному спірному регіоні). Доведено, що в таких станах статуси гравців (значення ймовірностей присутності) визначаються параметрами зовнішньої допомоги,

а не стартовими розподілами. Результати можна використати, наприклад, в теорії формування переконань (В.Д. Кошманенко, Т.В. Каратаєва).

Вивчено структуру точкового спектру в граничних по часу станах динамічних систем конфлікту в термінах ймовірнісних мір. Показано, що достатню умову виникнення мір з точковим спектром можна сформулювати у вигляді нерівностей для початкових розподілів опонентів. Результати придатні до застосування при створенні інформаційної політики формування та поширення соціальних поглядів та переконань у суспільстві (В.Д. Кошманенко, Т.В. Каратаєва, О.Р. Сатур).

Побудовано математичні моделі динамічних систем конфлікту та розглянуто випадки притягальної та відштовхувальної взаємодії. Доведено існування нерухомих граничних станів у цих системах та досліджено їх стійкість і залежність від різних параметрів. Використано підхід до опису динаміки систем конфлікту за допомогою стохастичних векторів. Визначено умови, за яких всі вектори збігаються до одного граничного стану, що відповідає рівноважному розподілу. Досліджено багатокompонентні динамічні системи, де поведінка визначається вектором взаємодії — величиною, що характеризує динаміку всієї системи. Доведено, що всі траєкторії систем збігаються до одного граничного стану, якщо параметри вектора взаємодії змінюються монотонно. Крім того, досліджено властивості граничних станів, такі як їх стійкість, стабільність та залежність від початкових умов. Проведено числове моделювання різних сценаріїв поведінки динамічних систем залежно від значень параметрів взаємодії. Наприклад, у випадках із притягальною взаємодією було проілюстровано швидкість збіжності до рівноважного стану. У дослідженнях розглянуто різні способи задання вектора взаємодії (мінімальне, максимальне чи середнє значення координат), що дало змогу розкрити особливості динаміки таких систем (О.Р. Сатур).

Побудовано теорію вимітання мір Радона зі скінченною енергією, що узагальнює класичну теорію Картана ньютонівського вимітання на вельми загальні теоретико-потенціальні ядра на локально компактному просторі. Доведено ряд альтернативних еквівалентних означень, отримано формулу для знаходження повної маси, встановлено теореми збіжності для частково впорядкованих сукупностей множин (Н.В. Зорій).

У теорії потенціалів відносно вельми загальних ядер на локально компактному просторі знайдено ряд характеристичних властивостей внутрішніх та зовнішніх ємностей вельми загальних множин та відповідних ємнісних розподілів, кожна з яких може слугувати альтернативним означенням та мати різну сферу застосувань. Метод дослідження істотно ґрунтується на встановленому глибинному зв'язку між теорією вимітання та теорією рівноваги. Як супутній результат, дано повне обґрунтування теорії В. Fuglede вимірності по ємності (Н.В. Зорій).

При вельми загальних початкових даних знайдено необхідні та достатні умови розв'язуваності задачі мінімізації енергій при наявності зовнішніх полів. Започаткована ще Гауссом, ця задача залишається актуальною в силу її ефективних застосувань до математичної фізики, конструктивної теорії функцій, сферичного дизайну тощо. Отримані результати істотно покращують ряд раніше відомих, що стало можливим завдяки новому підходу, який ґрунтується на одночасному використанні сильної та широкої топологій над просторами мір Радона, а також на побудованій Зорій теорії вимітання (Н.В. Зорій).

Запропоновано концепцію псевдо-вимітання, що розширює відому концепцію вимітання зі збереженням її основних властивостей на знакозмінні міри Радона та більш загальні ядра. Доведено теорему існування та єдиності, вивчено основні властивості, дано застосування до задачі мінімізації енергій при наявності зовнішніх полів (Н.В. Зорій).

Для потенціалів α -Ріса та α -Гріна отримано досить несподіване посилення принципу Дені позитивності мас. Показано, що принцип Дені

все ще справджується, якщо відповідна нерівність для потенціалів α -Ріса виконується лише на множині в $\mathbb{R}^n$, не α -тонкій на нескінченності. Для потенціалів α -Гріна аналогічна умова формулюється в термінах запровадженої Зорій концепції α -гармонічної міри борелівських підмножин $\overline{\mathbb{R}^n}$, одноточкової компактифікації $\mathbb{R}^n$ (Н.В. Зорій).

Знайдено періодичні розв'язки d -вимірних ($d = 1, 2, 3$) рівнянь руху Кулона трьох однакових негативних точкових зарядів у полі шістьох однакових позитивних точкових зарядів, зафіксованих у вершинах октаедра (В.І. Скрипник).

Результати, що ввійшли в підсумковий звіт, доповідались на ряді міжнародних конференцій. Загалом, за 2020–2024 роки виконавцями зроблено понад 100 наукових доповідей на міжнародних конференціях. Щодо цілої низки висвітлених тут досягнень проводиться тісне міжнародне наукове співробітництво (зокрема, з науковцями з Австрії, Англії, Канади, Кіпру, Польщі, Чехії та ін.).

У 2020–2024 роках виконавцями роботи захищено 2 докторські дисертації, 2 кандидатські дисертації та 4 дисертації на здобуття ступеня доктора філософії:

- доктори філософії:
 - Сатур О.Р., “Аналіз поведінки траєкторій в моделях складних динамічних систем з притягальною взаємодією” (2021), науковий керівник В.Д. Кошманенко, <https://events.imath.kiev.ua/event/689/attachments/45/136/dissSatur.pdf>;
 - Локазюк О.В., “Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація диференціальних рівнянь” (2023), науковий керівник В.М. Бойко, <https://events.imath.kiev.ua/event/689/attachments/45/136/dissSatur.pdf>;

- Чаповський Є.Ю., “Нільпотентні і розв’язні алгебри Лі диференційовань кілець многочленів” (2024), науковий керівник А.П. Петравчук, <https://scc.knu.ua/components/com-chronoforms7/chronoforms/uploads/335992/Chapovskyi-PhD-thesis.pdf>;
 - Вінніченко О.О., “Geometric and algebraic properties of dispersionless Nizhnik equation” (2024), наукові керівники Р.О. Попович, В.М. Бойко, <https://events.imath.kiev.ua/event/1741/attachments/137/384/Vinnichenko-OO-thesis-PhD-2024.pdf>.
- кандидати наук:
 - Опанасенко С.В., “Узагальнені групи еквівалентності та розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь” (2020), науковий керівник Р.О. Попович, <https://events.imath.kiev.ua/event/622/attachments/32/95/pdf>;
 - Попович Д.Р., “Узагальнення контракцій Іньоню–Вігнера і ліївськи ортогональні оператори” (2021), науковий керівник А.П. Петравчук, <https://events.imath.kiev.ua/event/622/attachments/32/95/pdf>.
- доктори наук:
 - Ванеєва О.О., “Групоїди еквівалентності в задачах групової класифікації” (2020), науковий консультант Р.О. Попович, <https://events.imath.kiev.ua/event/476/attachments/27/68/pdf>;
 - Нестеренко М.О., “Реалізації та контракції алгебр Лі орбіт-функції та квазікристали” (2021), науковий консультант В.М. Бойко, <https://events.imath.kiev.ua/event/753/attachments/59/177/dis-Nesterenko.pdf>.

У рамках роботи опубліковано 1 монографію [85], захищено 4 дисертації доктора філософії [29, 61, 86, 102], 2 кандидатські дисертації [4, 26], 2 докторські дисертації [2, 25], 2 магістерські дисертації [60, 84] та опубліковано 95 наукових статей.

Перелік джерел посилання

1. Бойко В.М., Ванеєва О.О., Жалій О.Ю., Попович Р.О. Із симетрією в житті та математиці. До 75-річчя члена-кореспондента НАН України А.Г. Нікітіна // Вісник НАН України. — 2020. — № 12. — С. 87–92. — URL: <https://doi.org/10.15407/visn2020.12.087>
2. Ванеєва О.О. Групоїди еквівалентності в задачах групової класифікації: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.03. — Київ, 2020. — 399 с.
3. Ванеєва О.О., Жалій О.Ю. Ліївські симетрії узагальнених рівнянь Кавахари // Доповіді НАН України. — 2020. — № 12. — С. 3–10. — URL: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2020.12.003>
4. Опанасенко С.В. Узагальнені групи еквівалентності та розширений симетрійний аналіз диференціальних рівнянь: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03. — Київ, 2020. — 196 с.
5. Bihlo A., Poltavets N., Popovych R.O. Lie symmetries of two-dimensional shallow water equations with variable bottom topography // Chaos. — 2020. — Vol. 30, 073132. — 17 pp. — URL: <https://doi.org/10.1063/5.0007274>
6. Bihlo A., Popovych R.O. Zeroth-order conservation laws of two-dimensional shallow water equations with variable bottom topography // Stud. Appl. Math. — 2020. — Vol. 145. — P. 291–321. — URL: <https://doi.org/10.1111/sapm.12320>
7. Cherniha R., Davydovych V. A mathematical model for the COVID-19 outbreak and its applications // Symmetry. — 2020. — Vol. 12, 990. — 12 pp. — URL: <https://doi.org/10.3390/sym12060990>
8. Dorlas T.C., Rebenko A.L., Savoie B. Correlation of clusters: partially truncated correlation functions and their decay // J. Math. Phys. — 2020. — Vol. 61, 033301. — 30 pp.
9. Kurujyibwami C., Popovych R.O. Equivalence groupoids and group classification of multidimensional nonlinear Schrödinger equations. —

- J. Math. Anal. Appl. — 2020. — Vol. 491, 124271. — 35 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124271>
10. Nesterenko M., Pošta S. Contractions of realizations, in Lie Theory and Its Applications in Physics // Springer Proc. Math. Stat. — Springer, Singapore, 2020. — Vol. 335. — P. 447–453. — URL: https://doi.org/10.1007/978-981-15-7775-8_35
 11. Nikitin A.G. Symmetries and supersymmetries of generalized Schrödinger equations // Збірник праць Інституту математики. — 2020. — Vol. 17, no. 2. — P. 1–84.
 12. Nikitin A.G. Symmetries of Schrodinger equation with scalar and vector potentials // J. Phys. A: Math. Theor. — 2020. — Vol. 53, 455202. — 21 pp. — URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/abb956>
 13. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O., Equivalence groupoid and group classification of a class of variable-coefficient Burgers equations // J. Math. Anal. Appl. — 2020. — Vol. 491, 124215. — 22 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124215>
 14. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O., Sergyeyev A. Extended symmetry analysis of isothermal no-slip drift flux model // Phys. D. — 2020. — Vol. 402, 132188. — 16 pp.
 15. Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O., Sergyeyev A. Generalized symmetries, conservation laws and Hamiltonian structures of an isothermal no-slip drift flux model // Phys. D. — 2020. — Vol. 411, 132546. — 19 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2020.132546>
 16. Opanasenko S., Boyko V., Popovych R.O. Enhanced group classification of nonlinear diffusion-reaction equations with gradient-dependent diffusion // J. Math. Anal. Appl. — 2020. — Vol. 484, 123739. — 30 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2019.123739>
 17. Opanasenko S., Popovych R.O. Generalized symmetries and conservation laws of (1+1)-dimensional Klein–Gordon equation // J. Math. Phys. —

2020. — Vol. 61, 101515. — 13 pp. — URL: <https://doi.org/10.1063/5.0003304>
18. Popovych R.O., Bihlo A. Inverse problem on conservation laws // Phys. D. — 2020. — Vol. 401, 132175. — 16 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.132175>
 19. Popovych R.O., Cheviakov A.F. Variational symmetries and conservation laws of the wave equation in one space dimension // Appl. Math. Lett. — 2020. — Vol. 104, 106225. — 7 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106225>
 20. Popovych R.O., Sakhnovich A. GBDT version of the Darboux transformation for the matrix coupled dispersionless equations (local and non-local cases) // J. Integrable Syst. — 2020. — Vol. 5, xyaa004. — 24 pp. — URL: <https://doi.org/10.1093/integr/xyaa004>
 21. Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovych R.O. Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2020. — Vol. 91, 105419. — 28 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105419>
 22. Vaneeva O., Magda O., Zhaliy A. Equivalence groupoid and enhanced group classification of a class of generalized Kawahara equations // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2020. — Vol. 335. — P. 329–340. — URL: https://doi.org/10.1007/978-981-15-7775-8_23
 23. Єгорченко І.А. Диференціальні інваріанти, прихована та умовна симетрія // Укр. мат. журн. — 2021. — Т. 73. — С. 1023–1033. — URL: <https://doi.org/10.37863/umzh.v73i8.6377>
 24. Локазюк О.В. Ліівські симетрії лінійних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Доп. НАН України. — 2021. — № 5. — С. 3–11. — URL: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2021.05.003>

25. Нестеренко М.О. Реалізації та контракції алгебр Лі, орбіт-функції та квазікристали: дис. ... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.03. — Київ, 2021. — 175 с.
26. Попович Д.Р. Узагальнення контракцій Іньоно–Вігнера і ліївськи ортогональні оператори: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.03. — Київ, 2021. — 196 с.
27. Попович Д.Р. Прапори підалгебр у контрактованих алгебрах Лі // Допов. Нац. акад. наук Укр. — 2021. — № 4. — С. 9–17.
28. Ребенко О.Л. Про зв'язок деяких підходів до розв'язання рівнянь Кірквуда–Зальцбурга // Укр. мат. журн. — 2021. — Т. 73. — С. 381–394.
29. Сатур О.Р. Аналіз поведінки траєкторій в моделях складних динамічних систем з притягальною взаємодією: дис. ... д-ра філософії. — Київ, 2021. — 130 с.
30. Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O. Parameter-dependent linear ordinary differential equations and topology of domains // J. Differential Equations. — 2020. — Vol. 284. — P. 546–575. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.03.001>
31. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O. Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations // Anal. Math. Phys. — 2021. — Vol. 11, 127. — 38 pp. — URL: <https://doi.org/10.1007/s13324-021-00550-z>
32. Cherniha R., Davydovych V. Conditional symmetries and exact solutions of a nonlinear three-component reaction-diffusion model // Eur. J. Appl. Math. — 2021. — Vol. 32. — P. 280–300. — URL: <https://doi.org/10.1017/S0956792520000121>
33. Cherniha R., Davydovych V. New conditional symmetries and exact solutions of the diffusive two-component Lotka–Volterra system //

- Mathematics. — 2021. Vol. 9, 1984. — 17 pp. URL: <https://doi.org/10.3390/math9161984>
34. Dorlas T.C., Rebenko A.L., Savoie B. A combinatorial identity with applications to forest graphs // Discrete Math. — 2021. — Vol. 144 , 112270. — 9 pp.
 35. Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Popovych R.O. On the ineffectiveness of constant rotation in the primitive equations and their symmetry analysis // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2021. — Vol. 101, 105885. — 15 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105885>
 36. Nikitin A.G. Symmetries of the Schrödinger–Pauli equation for neutral particles // J. Math. Phys. — 2021. — Vol. 62, 083509. — 24 pp. — URL: <https://doi.org/10.1063/5.0021725>
 37. Popovych R.O. Point and contact equivalence groupoids of two-dimensional quasilinear hyperbolic equations // Appl. Math. Lett. — 2021. — Vol. 116, 107068. — 8 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107068>
 38. Satur O.R. Limit states of multicomponent discrete dynamical systems // J. Math. Sci. — 2021. — Vol. 256, P. 648–662. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05451-x>
 39. Skrypnyk W.I. Equilibrium, regular polygons, and Coulomb-type dynamics in different dimensions // Adv. Math. Phys. — 2021. — Vol. 2021, 6639294. — 11 pp.
 40. Vaneeva O., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced symmetry analysis of two-dimensional degenerate Burgers equation // J. Geom. Phys. — 2021. — Vol. 169, 104336. — 21 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104336>
 41. Ванеєва О.О., Жалій О.Ю., Магда О.В. Класифікація ліївських редукцій узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами // Доповіді НАН України. — 2022. — № 6. — С. 3–9. — URL: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2022.06.003>

42. Єгорченко І.А., Воробйова А.І. Умовні та приховані нескінченновимірні симетрії хвильових рівнянь // Укр. мат. журн. — 2022. — Т. 74, С. 335–341. — URL: <https://doi.org/10.37863/umzh.v74i3.703>
43. Нестеренко М. Спеціальні експоненційні функції на ґратках простих алгебр Лі та алотропні модифікації карбону // Укр. мат. журн. — 2022. — Т. 74, С. 351–359. — URL: <https://doi.org/10.37863/umzh.v74i3.7130>
44. Спічак С.В. Класифікація реалізацій алгебр Лі векторних полів на колі // Укр. матем. жур. — 2022.— Т. 74, С. 389–399.
45. Спічак С.В., Стогній В.І., Копась І.Н. Групова класифікація одного класу $(2+1)$ -вимірних лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів // Буковинський матем. журнал. — 2022. — Т. 10, С. 240–248.
46. Bihlo A., Popovych R.O. Physics-informed neural networks for the shallow-water equations on the sphere // J. Comp. Phys. — 2022. — Vol. 456, 111024. — 18 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.111024>
47. Cherniha R., Davydovych V. A reaction-diffusion system with cross-diffusion: Lie symmetry, exact solutions and their applications in the pandemic modelling // Eur. J. Appl. Math. — 2022. — Vol. 33, P. 785–802. — URL: <https://doi.org/10.1017/S095679252100022X>
48. Cherniha R., Davydovych V. A hunter-gatherer–farmer population model: new conditional symmetries and exact solutions with biological interpretation // Acta Appl. Math. — 2022. — Vol. 182, 4. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10440-022-00537-3>
49. Cherniha R., Davydovych V. Construction and application of exact solutions of the diffusive Lotka–Volterra system: A review and new results // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2022. — 113, 106579. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2022.106579>

50. Нікітін А.Г. Вільгельм Ілліч Фущич (18.12.1936–07.04.1997) // Укр. матем. журн. — 2022. — Т. 74, С. 291–293. — URL: <https://doi.org/10.37863/umzh.v74i3.7192>
51. Нікітін А.Г. Суперінтегровні та масштабно інваріантні квантовомеханічні системи зі змінною масою // Укр. матем. журн. — 2022. — Т. 74, С. 360–372. — URL: <https://doi.org/10.37863/umzh.v74i3.7162>
52. Ребенко О.Л. Нове найпростіше доведення формули Келі та зв'язок із рівняннями Кірквуда–Зальцбурга // Укр. матем. журн. — 2022. — Т. 74. — С. 1441–1444.
53. Nikitin A.G. Symmetries of the Schrödinger–Pauli equations for charged particles and quasirelativistic Schrödinger equations // J. Phys. A: Math. Theor. — 2022. — Vol. 55, 115202. — 13 pp. — URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac515d>
54. Opanasenko S., Popovych R.O. Mapping method of group classification // J. Math. Anal. Appl. — 2022. — Vol. 513, 126209. — 43 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126209>
55. Skrypnyk W.I. Periodic Coulomb dynamics of three identical negative charges in the field of four fixed identical positive charges // Ukrainian Math. J. — 2022. — Vol. 73, no. 12. — P. 1967–1984.
56. Vaneeva O., Magda O., Zhaliy A. Lie reductions and exact solutions of generalized Kawahara equations // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. — 2022. — Vol. 396. — P. 333–338. — URL: https://doi.org/10.1007/978-981-19-4751-3_28
57. Zorii N. Harmonic measure, equilibrium measure, and thinness at infinity in the theory of Riesz potentials // Potential Anal. — 2022. — Vol. 57. — P. 447–472. — URL: <https://doi.org/10.1007/s11118-021-09923-2>
58. Zorii N. Balayage of measures on a locally compact space // Anal. Math. — 2022. — Vol. 48. — P. 249–277. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10476-022-0122-1>

59. Ванеєва О.О., Брагінець О.В., Жалій О.Ю., Магда О.В. Точні розв'язки узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Доповіді НАН України. — 2023. — № 6. — С. 3–11. — URL: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.06.003>
60. Коваль С.Д. Точкові й узагальнені симетрії рівняння теплопровідності: кваліфікаційна дипломна робота на здобуття освітнього ступеня «магістр». — Київ, 2023. — 51 с.
61. Локазюк О.В. Реалізації алгебр Лі на прямій та групова класифікація диференціальних рівнянь: дис. . . . д-ра філософії. — Київ, 2023. — 195 с.
62. Погорелов Ю.Г., Ребенко О.Л. Про віріальні розклади кореляційних функцій. Канонічний ансамбль // Укр. матем. журн. — 2023. — Т. 75, С. 650–668.
63. Сатур О. Збіжність до рівноважного атрактора у моделях динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією // Доповіді НАН України. — 2023. — по. 3. — С. 3–8. — URL: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.03.003>
64. Cherniha R., Davydovych V., King J.R. The Shigesada–Kawasaki–Teramoto model: conditional symmetries, exact solutions and their properties // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2023. — Vol. 124, 107313. — 18 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107313>
65. Davydovych V., Dutka V., Cherniha R. Reaction-diffusion equations in mathematical models arising in epidemiology // Symmetry. — 2023. — Vol. 15, 2025. — 23 pp. — URL: <https://doi.org/10.3390/sym15112025>
66. Cherniha R., Davydovych V. Symmetries and exact solutions of the diffusive Holling–Tanner prey-predator model // Acta Appl. Math. — 2023. — Vol. 187, 8. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10440-023-00600-7>

67. Karataieva T.V., Koshmanenko V.D. A model of conflict society with external influence // J. Math. Sci. — 2023. — Vol. 272, P. 244–266. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06414-0>
68. Karataieva T.V., Koshmanenko V.D. Equilibrium states of the dynamic conflict system for three players with a parameter of influence of the ambient environment // J. Math. Sci. — 2023. — Vol. 274. — P. 861–880.
69. Koshmanenko V. The theory of dynamical systems of conflict in the framework of functional analysis // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. — 2023. — Vol. 20. — P. 843–872. — URL: <https://doi.org/10.3842/trim.v20n1.530>
70. Koval S., Bihlo A., Popovych R.O. Extended symmetry analysis of remarkable (1+2)-dimensional Fokker–Planck equation // European J. Appl. Math. — 2023. — Vol. 44, P. 1067–1098. — URL: <https://doi.org/10.1017/S0956792523000074>
71. Koval S.D., Popovych R.O. Point and generalized symmetries of the heat equation revisited // J. Math. Anal. Appl. — 2023. — Vol. 527, 127430. — 21 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127430>
72. Nesterenko M., Pošta S. Realizations and invariants of Lie algebras // J. Phys. Conf. Ser. — 2023. — Vol. 2667, 012020. — 11 pp. — URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2667/1/012020>
73. Nikitin A.G. Superintegrable quantum mechanical systems with position dependent masses invariant with respect to two parametric Lie groups // J. Phys. A: Math. Theor. — 2023. — Vol. 56, 395203. — 19 pp. — URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/acee2f>
74. Nikitin A.G. Superintegrable quantum mechanical systems with position dependent masses invariant with respect to three parametric Lie groups // J. Math. Phys. — 2023. — Vol. 64, 113505. — 20 pp. — URL: <https://doi.org/10.1063/5.0147792>
75. Rebenko A.L. Virial expansions for correlation functions in canonical ensemble // Lett. Math. Phys. — 2023. — Vol. 113, 85. — 14 pp.

76. Satur O.R. Dependence of the behaviors of trajectories of dynamic conflict systems on the interaction vector // J. Math. Sci. — 2023. — Vol. 274. — P. 76–93. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06572-1>
77. Skrypnyk W.I. Periodic Coulomb dynamics of three identical negative charges in the field of six identical positive charges fixed at the vertices of octahedron // Ukrainian Math. J. — 2023. — Vol. 75, no. 2. — P. 262–281.
78. Skrypnyk W.I. Exact and quasi-exact Newton dynamics of $n - 1$ and n bodies $n - 1$ of which have equal masses // J. Geom. Phys. — 2023. — Vol. 183, 104706. — 8 pp.
79. Yehorchenko I. Extensions of realisations for low-dimensional Lie algebras // SciPost Phys. Proc. — 2023. — Vol. 14, 048. — 8 pp. — URL: <https://doi.org/10.21468/SciPostPhysProc.14.048>
80. Zorii N. On the theory of capacities on locally compact spaces and its interaction with the theory of balayage // Potential Anal. — 2023. — Vol. 59, P. 1345–1379. — URL: <https://doi.org/10.1007/s11118-022-10010-3>
81. Zorii N. On the theory of balayage on locally compact spaces // Potential Anal. — 2023. — Vol. 59, P. 1727–1744. — URL: <https://doi.org/10.1007/s11118-022-10024-x>
82. Zorii N. Minimum Riesz energy problems with external fields // J. Math. Anal. Appl. — 2023. — Vol. 526, 127235. — 32 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2023.127235>
83. Zorii N. On the role of the point at infinity in Deny's principle of positivity of mass for Riesz potentials // Anal. Math. Phys. — 2023. — Vol. 13, 38. — 18 pp. — URL: <https://doi.org/10.1007/s13324-023-00793-y>
84. Гурака С.Т. Групова класифікація диференціальних рівнянь: алгебраїчний підхід: кваліфікаційна дипломна робота на здобуття освітнього ступеня «магістр». — Київ, 2024. — 51 с.

85. Ребенко О.Л. Математичні основи сучасної статистичної механіки. — Київ: Наукова думка, 2024. — 300 с. — URL: <https://doi.org/10.15407/978-966-00-1937-9>
86. Чаповський Є.Ю. Нільпотентні і розв'язні алгебри Лі диференціювань кілець многочленів: дис. . . . д-ра філософії. — Київ, 2024. — 111 с.
87. Bedratyuk L., Petravchuk A.P. and Chapovskyi Y.Y. Centralizers of linear and locally nilpotent derivations // Ukrainian Math. J. — 2024. — Vol. 75, no. 8. — P. 1190–1202. — URL: <https://doi.org/10.1007/s11253-023-02255-x>
88. Boyko V.M., Lokaziuk O.V., Popovych R.O. Admissible transformations and Lie symmetries of linear systems of second-order ordinary differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 2024. — Vol. 539, 128543. — 51 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128543>
89. Boyko V.M., Popovych R.O., Vinnichenko O.O. Point- and contact-symmetry pseudogroups of dispersionless Nizhnik equation // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2024. — Vol. 132, 107915. — 19 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2024.107915>
90. Gargiulo G., Samoilenko V., Zappale E. Power law approximation results for optimal design problems // Chapter in Book: Beirão da Veiga, H., Minhós, F., Van Goethem, N., Sanchez Rodrigues, L. (eds) Nonlinear Differential Equations and Applications. PICNDEA 2022. CIM Series in Mathematical Sciences. — Vol. 7. — Springer, Cham, 2024. — P. 91–106. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-53740-0_6
91. Karataieva T.V., Koshmanenko V.D. Existence of compromise states in the competition of alternative opponents in the presence of external support // J. Math. Sci. — 2021. — Vol. 282. — P. 1–24. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07228-4>
92. Ivanova N.M., Pallikaros C.A. Degenerations of complex associative algebras of dimension three via Lie and Jordan algebras // Adv. Group

- Theory Appl. — 2024. — Vol. 18. — P. 41–79. — URL: <https://doi.org/10.32037/agta-2024-002>
93. Koval S.D., Popovych R.O. Extended symmetry analysis of $(1+2)$ -dimensional fine Kolmogorov backward equation // Stud. Appl. Math. — 2024. — Vol. 153, e12695. — 30 pp. — URL: <https://doi.org/10.1111/sapm.12695>
 94. Lyashko S., Samoilenko V., Samoilenko Yu., Gapyak I. Les equations de type hydrodynamique et les solutions solitaires // Chapter in book: Méthodes de calcul et modélisation mathématique en cyberphysique et applications techniques 1. Ed. D. Koroliuk, S. Lyashko et N. Lumnious. — ISTE, 2024. — P. 3–16. — URL: <https://doi.org/10.51926/ISTE.9164.ch1>
 95. Lyashko S., Samoilenko V., Samoilenko Yu., Vakal E. Les solutions asymptotiques pour l'équation de Korteweg–de Vries avec des coefficients variables et une perturbation singuliere // Chapter in book: Méthodes de calcul et modélisation mathématique en cyberphysique et applications techniques 1. Ed. D. Koroliuk, S. Lyashko et N. Lumnious. — ISTE, 2024. — P. 17–49. — URL: <https://doi.org/10.51926/ISTE.9164.ch2>
 96. Lyashko S., Samoilenko V., Samoilenko Yu., Lyashko N. Analyse asymptotique de l'équation de KdV avec singularite faible // Chapter in book: Méthodes de calcul et modélisation mathématique en cyberphysique et applications techniques 1. Ed. D. Koroliuk, S. Lyashko et N. Lumnious. — ISTE, 2024. — P. 51–69. — URL: <https://doi.org/10.51926/ISTE.9164.ch3>
 97. Maltseva D.S., Popovych R.O. Point-symmetry pseudogroup, Lie reductions and exact solutions of Boiti–Leon–Pempinelli system // Phys. D. — 2024. — Vol. 460, 134081. — 21 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2024.134081>

98. Nesterenko M., Pošta S. Application of quasicrystals to data processing // J. Phys. Conf. Ser. — 2024. — Vol. 2912, 0120330. — 8 pp. — URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2912/1/012033>.
99. Nikitin A.G. Integrable and superintegrable quantum mechanical systems with position dependent masses invariant with respect to one parametric Lie groups. 1. Systems with cylindric symmetry // J. Phys. A: Math. Theor. — 2024. — Vol. 57, 265201. — 35 pp. — URL: <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ad51ba>
100. Opanasenko S., Vitolo R. Bi-Hamiltonian structures of WDVV-type // Proc. A. — 2024. — Vol. 480, 20240249. — 21 pp. — URL: <https://doi.org/10.1098/rspa.2024.0249>
101. Vaneeva O., Brahinets O., Magda O., Zhalij A. Equivalence groupoid and exact solutions of a class of generalized modified Korteweg–de Vries equations, in Lie Theory and Its Applications in Physics // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2024. — Vol. 473. — URL: https://doi.org/10.1007/978-981-97-6453-2_21
102. Vinnichenko O.O. Geometric and algebraic properties of dispersionless Nizhnik equation: PhD Thesis. — Kyiv, 2024. — 171 pp.
103. Vinnichenko O.O., Boyko V.M., Popovych R.O. Lie reductions and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation // Anal. Math. Phys. — 2024. — Vol. 14, 82, — 56 pp. — URL: <https://doi.org/10.1007/s13324-024-00925-y>
104. Zorii N. Minimum energy problems with external fields on locally compact spaces // Constr. Approx. — 2024. — Vol. 59. — P. 385–417. — URL: <https://doi.org/10.1007/s00365-023-09643-3>
105. Zorii N. Inner Riesz pseudo-balayage and its applications to minimum energy problems with external fields // Potential Anal. — 2024. — Vol. 60. — P. 1271–1300. — URL: <https://doi.org/10.1007/s11118-023-10087-4>

106. Zorii N. On an extension of Fuglede's theory of pseudo-balayage and its applications // Expo. Math. — 2024. — 125630. — 21 pp. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2024.125630>