

УДК 517.9

УКПП

№ держреєстрації

Інв. №

Національна академія наук України

Інститут математики

01024, м.Київ-4, вул. Терещенківська, 3, тел. (044) 2345150;

факс 38-044-2352010

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. директора

Інституту математики

доктор фіз.мат. наук

О.В.Антонюк

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ, ЩО
ОПИСУЮТЬ ДЕТЕРМІНОВАНІ ТА СТОХАСТИЧНІ ПРОЦЕСИ В
СКЛАДНИХ СИСТЕМАХ ПРИРОДОЗНАВСТВА

(Заключний)

Науковий керівник НДР

головний науковий співробітник

док.фіз.-мат. наук, професор

О.Л.Ребенко

2020

Рукопис закінчено 1 грудня 2020 р.

Результати роботи розглянуто Вченою Радою ІМ НАН України протокол від
22 грудня 2020 року №. 11

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник роботи головний науковий співробітник доктор фіз.-мат.наук, професор	О.Л. Ребенко (реферат; вступ; розділ 1,2; висновки)
Відповідальний виконавець провідний науковий співробітник доктор фіз.-мат.наук	В. І. Скрипник (розділ 3)
Відповідальний виконавець провідний науковий співробітник доктор фіз.-мат.наук	В.Д. Кошманенко (розділи 4,5)
Відповідальний виконавець провідний науковий співробітник доктор фіз.-мат.наук	Н.В. Зорій (розділи 6,7)
Виконавець молодший науковий співробітник кандидат фіз.-мат.наук	С.М. Петренко (підрозділи 5.3)
Виконавець молодший науковий співробітник кандидат фіз.-мат.наук	Н.В. Харченко (розділ 5.1)
Виконавець головний інженер-дослідник кандидат фіз.-мат.наук	Т.В.Каратаєва (підрозділ 5.2,5.3)
Виконавець аспірант відділу	О.Р.Сатур (підрозділ 5.4)

РЕФЕРАТ

Звіт по НДР: 130 с., 1 ч., 1 рис., 121 джерело.

α -РІССОВІ ТА α -ГРІНОВІ ЕНЕРГІЇ І ПОТЕНЦІАЛИ, БАСЕЙНИ ПРИТЯГАННЯ, ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА ГАУССА, ДИНАМІКА КУЛОНА, ДИНАМІЧНА СИСТЕМА КОНФЛІКТУ, НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА, ОСНАЩЕНИЙ ПРОСТІР, РІВНОВАЖНІ СТАНИ, РІЗНИЦЕВІ РІВНЯННЯ, СИНГУЛЯРНЕ ЗБУРЕННЯ, СКЛАДНА СИСТЕМА, ТОЧКОВІ АТРАКТОРИ, УЗАГАЛЬНЕНИЙ КОНДЕНСАТОР З НЕПОРОЖНІМ ПЕРЕТИНОМ, ЦИКЛІЧНІ ОРБИТИ, ШКАЛА ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРІВ

Об'єкт дослідження – системи, що описують моделі математичної фізики, в яких відбуваються процеси, обумовлені колективною взаємодією великої кількості їх підсистем. Такі дослідження є важливими як для розвитку власне теорії складних систем, так і для прикладних застосувань в моделях фізики, моделях біологічної еволюції, екологічних моделях очищення забрудненого середовища, при моделюванні конфліктних ситуацій в бізнесі, соціології, тощо.

В рамках науково-дослідницької роботи отримані результати, найбільш вагомими з яких є наступні.

Вирішена проблема опису взаємодії між кластерами для нескінченної системи взаємодіючих частинок: виведені нові рівняння для кореляційних функцій кластерів, їх розв'язки представляються внесками від діаграм-лісів; отримана формула яка узагальнює відому формулу Келі числа діаграм-дерев з заданим числом вершин.(О.Л. Ребенко)

Знайдені періодичні та квазі-періодичні розв'язки рівнянь руху Кулона для зарядів у полі фіксованих додатних зарядів з допомогою центральної теореми Ляпунова.(В.І. Скрипник)

Викладено новий підхід до проблеми побудови сингулярно збурених операторів, на основі якого розвинута теорія побудови самоспряженого оператора для довільного сингулярного збурення.(В.Д. Кошманенко)

Розвинуто оригінальну математичну теорію опису конфліктних процесів у природі та суспільстві. Побудовано цілий ряд конкретних моделей динамічних систем конфлікту.(В.Д. Кошманенко, С.М. Петренко, Н.В. Харченко, Т.В.Каратаєва)

Розв'язано задачу Гаусса мінімізації α -ріссових енергій при наявності зовнішніх полів в якісно новій постановці — для (узагальненого) конденсатора, протилежно заряджені пластини якого перетинаються по множині як завгодно великої ємності. (Н.В. Зорій)

Введено в аналіз нову альтернативну концепцію α -ріссової енергії, що ґрунтується на законі Рісса декомпозиції ядер та перегукується з відомим визначенням Дені α -ріссової енергії, даним через перетворення Фур'є. (Н.В. Зорій)

Розвинуто теорію потенціалів відносно фракційних α -ґрінових ядер та дано її застосування до задач теорії α -ріссових потенціалів на узагальнених конденсаторах. (Н.В. Зорій)

Розвинуто теорію внутрішнього α -ріссового вимітання, що узагальнює класичну теорію Картана внутрішнього ньютонівського вимітання на випадок $\alpha \neq 2$, та дано її застосування до задач теорії узагальнених конденсаторів. (Н.В. Зорій)

Керівник НДР

головний науковий співробітник

док.фіз.-мат. наук, професор

О.Л.Ребенко

ЗМІСТ

Вступ	7
1 Побудова рівноважних ергодичних статистичних станів нескінченних систем взаємодіючих частинок	12
1.1. Мета дослідження та властивість перемішування статистичних систем	12
1.2. Потенціали взаємодії. Міра Гіббса	14
1.3. Кореляційні функції і рівняння Кірквуда-Зальцбурга	16
1.4. Кореляційні функції моделі коміркового газу та рівняння для них	18
1.5. Рівняння Кірквуда-Зальцбурга для кореляційних функцій коміркового газу	19
1.6. Висновки. Можливі застосування результатів	23
2 Кореляції кластерів взаємодіючих частинок та оцінка їх спадання	25
2.1. Кластери та опис їх взаємодії	25
2.2. Рівняння для ЧЗКФ	27
2.3. Розв'язки. Узагальнення формули Келі	29
2.4. Оцінки швидкості ослаблення взаємодії кластерів	32
2.5. Висновки. Можливі застосування результатів	36
3 Розв'язки наближених рівнянь руху Максвелла-Лоренца	38
3.1. Пост-Дарвінівське наближення рівнянь руху	38
3.2. Кулонівська динаміка рівних від'ємних зарядів у полі рівних фіксованих додатніх зарядів	42
3.3. Точна і квазіточна динаміка Кулона	45
4 Метод оснащених просторів в теорії сингулярних збурень	46
5 Побудова моделей динамічних систем конфлікту та їх теоретичний аналіз	57
5.1. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту	57
5.2. Побудова моделей динамічних систем конфлікту	59
5.3. Існування рівноважних граничних станів	64
5.4. Дослідження умов достовірної події	72
5.5. Виникнення точкового спектру в граничних розподілах динамічних систем конфлікту	85
6 Рівноважні потенціали та задача мінімізації енергій на конденсаторах	

з дотичними пластинами	94
6.1. Позначення, означення, відомі факти	95
6.1.1. До теорії мір Радона на локально компактному просторі	95
6.1.2. До теорії потенціалів на локально компактному просторі	96
6.2. Теорія α -грінових потенціалів та α -ріссового вимітання	99
6.3. Варіаційна задача Гаусса в мажорантній постановці	103
6.3.1. Мотивація	103
6.3.2. Постановка задачі	104
6.3.3. Зведення задачі 1 до α -грінової задачі Гаусса на додатних мірах	106
6.3.4. Про існування розв'язку задачі 1 та його властивості	107
7 Альтернативна концепція α -ріссової енергії та її застосування до задач на узагальнених конденсаторах	110
7.1. Мотивація	110
7.2. Слабка α -ріссова енергія	111
7.3. Співвідношення між α -гріновою і слабкою α -ріссовою енергіями 112	112
7.4. Приклад застосування концепції слабкої α -ріссової енергії до задач теорії узагальнених конденсаторів	113
Висновки	116
Перелік посилань	119

ВСТУП

Характерною рисою сучасної математичної фізики є дослідження, які пов'язані не тільки з фізичною природою тіл, що нас оточують, а й таких, які описують біологічні, екологічні, економічні та інші системи. Дослідження по цих напрямках проводяться в усіх розвинених країнах світу, серед яких можна виділити Німеччину, Італію, Францію, Росію, США. В Україні, крім Інституту математики НАНУ можна відзначити Харківський фізико-технічний інститут та Харківський університет.

Дослідження у 2016-2020 роках проводились у наступних фундаментальних напрямках:

- 1) Класичні неперервні системи нескінченної кількості частинок, взаємодія яких описується парними стійкими та посилено надстійкими потенціалами.
- 2) Інтегральні рівняння у просторах функцій, заданих на нескінченних конфігураціях.
- 3) Теорія графів-дерев та її комбінаторні застосування.
- 4) Періодичні та квазі-періодичні розв'язки рівнянь руху Кулона.
- 5) Наближене рівняння руху n точкових зарядів $e_1, \dots, e_n$ третього порядку нерелятивістської електродинаміки Максвелла-Лоренца (МЛ).
- 6) Метод оснащених просторів у теорії сингулярних збурень, який удосконалює і розвиває метод самоспряжених розширень симетричних операторів.
- 7) Побудова та теоретичний аналіз моделей динамічних систем з конфліктною взаємодією.
- 8) Розробка нових ефективних підходів до дослідження істотно некомпактних екстремальних задач теорії α -ріссових потенціалів над знаковмінними мірами Радона в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, асоційованими з узагальненими конденсаторами, протилежно заряджені пластини яких перетинаються по множині як завгодно великої ємності. Узагальнення таких підходів на широкі класи теоретико-потенціальних ядер в довільному локально компактному просторі та векторні міри Радона скінченної чи нескінченної розмірності.
- 9) Дослідження (класичної) варіаційної задачі Гаусса мінімізації енергій при наявності зовнішніх полів, — однак тепер вже над узагальненими конденсаторами, протилежно заряджені пластини яких мають непорожній перетин. Така задача вивчається як в первісній постановці Гаусса (тобто за умови вільного розподілу допустимих мір), так і в мажорантній постановці Драгньова–Рахманова–Саффа (при наявності верхніх крайових обмежень на допустимі

міри).

10) Впровадження в теорію α -ріссових потенціалів нової альтернативної концепції енергії міри Бореля, що є менш обтяжливою, ніж стандартна концепція α -ріссової енергії, розвиток відповідної альтернативної теорії та її застосування до задач теорії α -ріссових потенціалів на узагальнених конденсаторах.

8) Розвиток теорії потенціалів відносно фракційного α -грінового ядра та її застосування до задач теорії α -ріссових потенціалів на узагальнених конденсаторах.

11) Узагальнення теорії Картана ньютонівського вимітання на α -ріссові ядра та застосування отриманих результатів до задач теорії узагальнених конденсаторів.

Результати з розвинення перших трьох напрямків викладені в першому та другому розділі звіту: виведено рівняння для кореляційних функцій, які апроксимують звичайні кореляційні функції [31] (так звані кореляційні функції *коміркового газу* (див. [26])), доведена властивість степеневого спадання кореляцій між цими функціями в залежності між відстані між кластерами (див. [31]), доведена властивість перемішування для гіббсівської міри неперервних статистичних систем точкових частинок, що взаємодіють за допомогою двочастинкового посилено надстійкого потенціалу скінченного радіусу дії [31], виведені рівняння для частково зв'язних кореляційних функцій (ЧЗКФ), які описують взаємодію між кластерами [6], отримані озв'язки цих рівнянь записуються у вигляді розкладів, доданки яких представляються аналітичними внесками від графів-лісів [6], отримана формула для кількості графів-лісів при заданій кількості кластерів і числа частинок у кожному кластері [6]. Ця формула узагальнює відому формулу Келі для числа графів-дерев з заданим числом вершин, тобто вона збігається з формулою Келі, якщо кожний кластер складається з однієї частинки, узагальнена відома формула Келі для числа графів-дерев з заданим числом вершин [6], доведена теорема, яка встановлює швидкість спадання ЧЗКФ, тобто кореляцій між кластерами [6], встановлені дві нові комбінаторні тотожності, які можуть бути корисними в теорії графів або в комбінаторній теорії множин [6].

В третьому розділі дослідження стосуються систем багатьох точкових зарядів електродинаміки Максвелла-Лоренца, які є фундаменальними для атомної фізики та теорії плазми. Результати за період 2016-2020 років що-

до розв'язків наближених рівнянь руху цих систем викладені у трьох підрозділах. У першому підрозділі доводиться існування розв'язків пост-Дарвінівського наближення рівнянь руху на обмеженому часовому інтервалі. У другому та третьому підрозділах розглядаються системи багатьох однакових негативних та кількох однакових зарядів, які можуть бути вільними чи зафіксованими (масивними) у певних конфігураціях на площині. У першому випадку (другий підрозділ, додатні заряди однакові) нами знайдені періодичні, квазіперіодичні та обмежені розв'язки, які збігаються до рівноваги у границі нескінченного часу. У другому випадку (третій підрозділ) для $n + 2, n + 1 > 4, n + 1 > 3$ точкових зарядів $n - 1$ з яких однакові та від'ємні знайдено точні та квазіточні розв'язки рівнянь руху Кулона. Для таких систем знайдена рівновага така, що однакові негативні заряди знаходяться у вершинах правильного багатокутника, а додатні заряди знаходяться на перпендикулярі до нього. Ця властивість характерна і для динаміки.

В четвертому розділі викладено метод оснащених просторів у новітньому розділі теорії збурень лінійних операторів – теорії сингулярних збурень, яка разом із спектральною теорією займає центральне місце у функціональному аналізі та математичній фізиці. Метод оснащених просторів у теорії сингулярних збурень удосконалює і розвиває метод самоспряжених розширень симетричних операторів. Цей підхід був викладений у монографії [55] і ґрунтується на теорії самоспряжених розширень симетричних операторів, теорії сингулярних квадратичних форм та теорії оснащених просторів Гільберта. Ключова ідея методу полягає у тому, що сингулярне збурення як квадратична форма використовується і враховується для заміни скалярних добутків в оснащених просторах, а збурений оператор визначається за канонічним ізоморфізмом, який пов'язує негативний та позитивний простори оснащення.

В п'ятому розділі послідовно викладається новий математичний підхід до опису конфліктних процесів у моделях складних систем у термінах спектральної теорії. Підхід ґрунтується на інтерпретації протилежних сторін конфлікту як імовірнісних розподілів (мір) на спірній території. В основу формули конфліктної динаміки закладено принцип незнищенності опонента. Результатом конфліктної боротьби є не знищення опонента, а встановлення компромісу у формі рівноважного стану. Опис граничних компромісних станів здійснюється в термінах спектральних характеристик імовірнісних розподілів.

Побудовано цілий ряд конкретних моделей динамічних систем конфлікту. Зокрема, побудована математична модель перерозподілу соціальної енергії в складній системі із конфліктною взаємодією. Виведена формула динаміки на основі принципу середнього поля, що відповідає закону «кожен проти всіх», одержана інтерпретація відомого ефекту Матфея про концентрацію багатства. Досліджено умови виникнення нерухомих точок, їх стійкість та басейни притягання.

Для моделей з фрактальним подрібненням ймовірнісного простору в термінах ентропії знайдена оптимальна стратегія для одного з опонентів, яка гарантує захоплення території повної лебегової міри.

Досліджено декілька модельних варіантів соціуму з конфліктною взаємодією, як складної багатокомпонентної системи. Доведено існування різного типу рівноважних станів. Знайдено достатні умови для зростання соціальної енергії з довільно низького початкового рівня. У задачі трьох гравців описано вплив параметрів сили конфліктної взаємодії.

Доведено існування граничних інваріантних станів в складних динамічних моделях з різними формулами задання показника атрактора.

Одержано ряд достатніх умов виникнення достовірної події у моделях складних динамічних систем з генератором еволюції, що відповідає притягальній взаємодії.

Доведено, що критерієм виникнення точкового спектру для граничних ймовірнісних розподілів, які виникають, як в моделях з притягальною взаємодією, так з взаємодією відштовхування є стратегія пріоритету лише у одному регіоні на кожному кроці конфліктного перерозподілу;

У шостому розділі запропоновано та обґрунтовано нові ефективні підходи до дослідження екстремальних задач теорії α -ріссових потенціалів над мірами Радона в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, асоційованими з узагальненими конденсаторами, протилежно заряджені пластини яких мають непорожній перетин. Наші підходи ґрунтуються на встановленому тісному взаємозв'язку між, з одного боку, задачею мінімізації α -ріссової енергії над знакозмінними мірами, асоційованими з конденсатором, та, з іншого боку, задачею мінімізації α -ґрінової енергії над належними додатними мірами. В свою чергу, ефективний аналіз останньої став можливим дякуючи доведень у звітний період теоремі про повноту конуса додатних мір у сильній α -ґріновій топології.

У сьомому розділі класичну задачу Гаусса мінімізації α -ріссових енер-

гій при наявності зовнішніх полів досліджено в якісно новій постановці — для узагальненого конденсатора, протилежно заряджені пластини перетинаються по множині як завгодно великої ємності. Прості приклади показують, що ця задача є, взагалі кажучи, нерозв'язною (в термінології електростатики — між пластинами відбувається коротке замикання). Однак було доведено, що розв'язок вже існує, якщо допустимі розподіли мір задовольняють належні верхні крайові обмеження. У такій — мажорантній — задачі Гаусса отримано критерії розв'язності, дано повний опис екстремалей, вивчено питання стійкості при варіації початкових даних. Ці результати узагальнено на широкий клас теоретико-потенціальних ядер в довільному локально компактному просторі та векторні міри Радона скінченної чи нескінченної розмірності.

Феномен нерозв'язності класичної задачі Гаусса для узагальнених конденсаторів з непорожнім перетином протилежно заряджених пластин спонукав введення в дослідження нової альтернативної концепції α -ріссової енергії, що ґрунтується на законі Рісса декомпозиції ядер та перегукується з відомим визначенням Дені, даним через перетворення Фур'є. Будучи менш обтяжливою, ніж стандартна концепція, нова концепція α -ріссової енергії розширює клас мір зі скінченною енергією та, як наслідок, дозволяє ефективно розв'язувати такі задачі на узагальнених конденсаторах, які в рамках стандартного визначення енергії були принципово нерозв'язними — зокрема, класичну задачу Гаусса та відому задачу Beurling–Kishi про існування міри конденсатора.

Розвинуто теорію потенціалів відносно фракційних α -ґрінових ядер g_D^α та дано її застосування до задач теорії α -ріссових потенціалів на узагальнених конденсаторах. Зокрема, доведено теорему про повноту конуса додатних мір зі скінченною α -ґріновою енергією в топології, що визначається енергетичною нормою, встановлено виконання повного принципу максимуму, обґрунтовано існування внутрішньої рівноважної α -ґрінової міри для довільної множини зі скінченною внутрішньою α -ґріновою ємністю та отримано повний опис її потенціалу і носія, досліджено співвідношення між α -ґріновою, стандартною α -ріссовою та альтернативною α -ріссовою енергіями.

Ці та інші результати Н.В. Зорій за звітний період були отримані нею як самотійно, так і в співавторстві з P.D. Dragnev, B. Fuglede, H. Harbrecht, D.P. Hardin, E.B. Saff і W.L. Wendland, та опубліковані в роботах [92]– [121].

1 ПОБУДОВА РІВНОВАЖНИХ ЕРГОДИЧНИХ СТАТИСТИЧНИХ СТАНІВ НЕСКІНЧЕННИХ СИСТЕМ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ЧАСТИНОК

1.1 Мета дослідження та властивість перемішування статистичних систем

В дослідженні динамічних систем ключову роль відіграє властивість перемішування, бо забезпечує їх ергодичність і дозволяє ствержувати, що в системі з перемішуванням будь який нерівноважний розподіл буде прямувати до рівноважного (див., наприклад, [15]). На мові розподілів Гіббса властивість перемішування означає, що поведінка системи в деяких об'ємах, які знаходяться на великих відстанях один від одного, є статистично незалежною (див., наприклад, [4] або Зауваження 2.7 в роботі [2]). Найбільш зручно з технічної точки зору довести цю властивість оцінивши кореляції між кластерами частинок, тобто поведінку кореляційних функцій, в яких одна група змінних знаходиться на значній відстані від іншої групи.

В цьому розділі ми встановлюємо властивість швидкого зменшення кореляцій для класичних неперервних систем точкових частинок, що взаємодіють за допомогою парного фінітного потенціалу ϕ скінченного радіусу дії R при малих значеннях активності (або великих від'ємних значеннях хімічного потенціалу). Введемо для цього основні математичні поняття і величини.

Позначимо через $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, борелівську σ -алгебру відкритих множин в $\mathbb{R}^d$, а через $\mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d)$ усі підмножини, що мають компактне замикання. *Конфігураційний простір* $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ буде складатися з усіх локально скінченних підмножин простору $\mathbb{R}^d$, тобто

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \mid |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ для всіх } \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \}, \quad (1.1)$$

де $|A|$ є число, що означає кількість точок в A . Позначимо множину усіх скінченних конфігурацій простору Γ через Γ_0 . Насправді Γ_0 є підмножиною Γ , але вона буде розглядатися як самостійний конфігураційний простір, в якому незалежним чином можна ввести свою топологію (див., наприклад, [13]). Визначимо спершу конфігураційний простір з фіксованою кількістю

ТОЧОК:

$$\Gamma^{(n)} := \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma| = n, n \in \mathbb{N}\}, \quad \Gamma^{(0)} := \emptyset \quad (1.2)$$

Якщо усі такі конфігурації знаходяться в деякій обмеженій множині $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, то відповідний простір буде:

$$\Gamma_\Lambda^{(n)} := \left\{ \gamma \in \Gamma^{(n)} \mid \gamma \subset \Lambda \right\}. \quad (1.3)$$

Тоді простори скінченних конфігурацій в $\mathbb{R}^d$ і в $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ можна представити у вигляді диз'юнктивних об'єднань:

$$\Gamma_0 := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}, \quad \Gamma_\Lambda := \coprod_{n=0}^{\infty} \Gamma_\Lambda^{(n)}. \quad (1.4)$$

Топологічні і вимірні структури просторів Γ , Γ_0 і Γ_Λ добре вивчені (див., наприклад, [18], [19], [5], [12]).

В дослідженні багатьох термодинамічних характеристик нескінченних систем важливе значення має розбиття простору $\mathbb{R}^d$ на елементарні гіперкуби з довжиною ребер $a > 0$, і центри яких розташовані в точках $r \in a\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$:

$$\Delta_a(r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid (r^i - a/2) \leq x^i < (r^i + a/2), i = 1, \dots, d\}. \quad (1.5)$$

Будемо писати Δ замість $\Delta_a(r)$, якщо не має потреби вказувати, де знаходиться центр гіперкубика. Позначимо таке розбиття через $\overline{\Delta}_a$. Не втрачаючи загальності розгляду, будемо для зручності розглядати Λ , які є об'єднаннями скінченної кількості гіперкубиків $\Delta \in \overline{\Delta}_a$.

Для побудови вище згаданої апроксимації введемо ще один простір— *простір конфігурацій коміркового газу*:

$$\Gamma^{(a)} := \left\{ \gamma \in \Gamma \mid |\gamma_\Delta| \leq 1, \text{ для всіх } \Delta \in \overline{\Delta}_a \right\}. \quad (1.6)$$

Щоб не складалося враження, що конфігурації $\Gamma^{(a)}$ описують фізичні системи розріджених газів, наведемо наступне зауваження.

Зауваження 1.1. Однією з найважливіших характеристик фізичного стану системи взаємодіючих частинок є густина, тобто кількість частинок в одиниці об'єму. Скільки завгодно велике значення цієї характеристики можна отримати і в рамках опису системи у просторі конфігурацій $\Gamma^{(a)}$, вибираючи розмір a ребер гіперкубиків достатньо малим.

1.2 Потенціали взаємодії. Міра Гіббса

У цьому розділі розглядається система точкових частинок, взаємодію яких будемо описувати за допомогою 2-частинкового потенціалу ϕ . Енергія довільної конфігурації $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ або $\gamma \in \Gamma_0$ визначається наступним чином:

$$U_\phi(\gamma) = U(\gamma) := \sum_{\{x,y\} \subset \gamma} \phi(|x-y|), \quad (1.7)$$

де сума береться по усім можливим різним парам точок конфігурації γ . Визначимо, також, енергію взаємодії між конфігураціями $\eta, \gamma \in \Gamma_0$ ($\eta \cap \gamma = \emptyset$) формулою:

$$W(\eta; \gamma) := \sum_{\substack{x \in \eta \\ y \in \gamma}} \phi(|x-y|). \quad (1.8)$$

(А): Припущення щодо потенціалу взаємодії. В цьому розділі ми розглядаємо двочастинкові потенціали загального вигляду ϕ , неперервні на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ і такі, що існують сталі $r_0 > 0$, $B \geq 0$, $R > 0$, та $\varphi_0 > 0$, для яких:

$$1) \phi(|x|) \equiv \phi^+(|x|) \geq \frac{\varphi_0}{|x|^s}, \quad s \geq d \quad \text{для } |x| \leq r_0 \quad (1.9)$$

$$2) \phi(|x|) \equiv 0 \quad \text{для } |x| \geq R, \quad (1.10)$$

де

$$\phi^+(|x|) := \max\{0, \phi(|x|)\}, \quad \phi^-(|x|) := -\min\{0, \phi(|x|)\},$$

Такі потенціали є посилено надстійкими (див. детальніше [28]). Це забезпечує можливість апроксимувати систему, що розглядається, системою коміркового газу [26]. Як наслідок ми будемо, також, використовувати факт, що енергія взаємодії частинок конфігурації γ задовольняє умові стійкості:

$$U(\gamma) = \sum_{\{x,y\} \in \gamma} \phi(|x-y|) \geq -B|\gamma|, \quad \gamma \in \Gamma_0, \quad B \geq 0. \quad (1.11)$$

У молекулярній фізиці має безпосереднє застосування потенціал Ленарда-Джонса

$$\phi(|x|) = \frac{C}{|x|^{12}} - \frac{D}{|x|^6},$$

де $C > 0$, $D > 0$ -деякі константи. В роботі ми будемо розглядати потенціали такого ж типу, які мають поведінку зображену на рис. 1.1, але при $|x| \rightarrow R$ зліва потенціал $\phi(|x|) \rightarrow 0$.

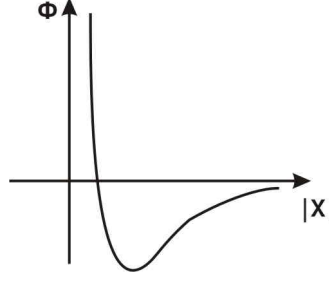


Рис. 1.1

Згідно з ідеями Гіббса фізичний стан системи описується ймовірнісною мірою, яка будується спершу в деякому обмеженому об'ємі простору $\mathbb{R}^d$ в залежності від ансамблю (мікроканонічного, канонічного або великого канонічного), який розглядається для конкретної задачі і подальшому граничному термодинамічному переході. Ми будемо розглядати системи статистичної механіки в рамках великого канонічного ансамблю і почнемо цей розгляд з системи невзаємодіючих точкових частинок (*ідеальний газ*).

Нехай σ – це міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Стан ідеального газу в рівноважній статистичній механіці описується мірою *Пуассона* $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ , де $z > 0$ – це активність (фізичний параметр, який пов'язаний з густиною частинок в системі). Міру $\pi_{z\sigma}$ з мірою інтенсивності $z\sigma$ ми визначимо трохи нижче. Для цього спершу введемо аналог такої міри на просторах скінченних конфігурацій в $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ (див. [20]), яку інколи називають мірою *Лебега-Пуассона* (див., наприклад, [1]) за формулою:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda} \cdots \int_{\Lambda} F_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n, \quad (1.12)$$

для всіх вимірних функцій $F = \{F_n\}_{n \geq 0}$, $F_n \in L^\infty(\Lambda^n)$ (або $F_n \in L^1(\mathbb{R}^{dn})$). За допомогою міри $\lambda_{z\sigma}$ побудуємо сім'ю ймовірнісних мір

$$\pi_{z\sigma}^\Lambda := e^{-z\sigma(\Lambda)} \lambda_{z\sigma}^\Lambda, \quad \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d). \quad (1.13)$$

Легко переконатись, використовуючи визначення (1.12), що сім'я (1.13) є попарно узгоджена і за теоремою Колмогорова (див., наприклад, [24]) існує єдина ймовірнісна міра $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ .

Міра Гіббса для великого канонічного ансамблю на просторі конфігурацій Γ_Λ визначається формулою:

$$\mu_\Lambda(d\gamma) = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (1.14)$$

$$Z_\Lambda = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (1.15)$$

де ми скористалися визначенням міри Лебега-Пуассона (1.12). У випадку нескінченної системи в $\mathbb{R}^d$ у підході Добрушина-Ленфорда-Рюеля (див. [4], [16]) міра Гіббса μ визначається на Γ за допомогою сім'ї умовних ймовірнісних розподілів, щільність яких визначається похідною Радона-Нікодима

$$\frac{d\mu_\Lambda}{d\lambda_{z\sigma}}(\eta | \bar{\gamma}_{\Lambda^c}) = \frac{\exp\{-\beta U(\eta | \bar{\gamma}_{\Lambda^c})\}}{Z_\Lambda(\bar{\gamma}_{\Lambda^c})}, \quad (1.16)$$

де

$$U(\eta | \bar{\gamma}_{\Lambda^c}) := U(\eta) + W(\eta; \bar{\gamma}_{\Lambda^c}), \quad (1.17)$$

а

$$\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d), \quad \Lambda^c = \mathbb{R}^d \setminus \Lambda, \quad \eta \in \Gamma_\Lambda, \quad \bar{\gamma} \in \Gamma.$$

Існування і єдиність міри Гіббса μ для взаємодій і умов, що розглядаються є відомим результатом (див., наприклад, огляди [14], [2]), а умову перемішування можна записати у вигляді:

$$\mu(F_1 F_2) - \mu(F_1) \mu(F_2) \rightarrow 0 \quad (1.18)$$

для двох обмежених функцій $F_1, F_2 : \Gamma \mapsto \mathbb{R}$, для яких

$$\text{dist}(\text{supp } F_1, \text{supp } F_2) \rightarrow \infty$$

.

1.3 Кореляційні функції. Рівняння Кірквуда-Зальцбурга

Кореляційні функції є в певному сенсі моментами міри Гіббса, за якими розраховують середні значення спостережуваних величин, а статистична сума відіграє важливе значення у побудові термодинамічних функцій вільної енергії та тиску системи (див., наприклад, [32], [25]).

Запишемо вирази для статистичної суми Z_Λ та відповідного набору кореляційних функцій ρ_Λ за допомогою інтегралів за мірою $\lambda_{z\sigma}$. Тоді у випадку великого канонічного ансамблю:

$$Z_\Lambda(z, \beta) := \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (1.19)$$

$$\rho_\Lambda(\eta; z, \beta) := \frac{1}{Z_\Lambda(z, \beta)} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad \eta \in \Gamma_\Lambda. \quad (1.20)$$

Для малих значень активності z існує єдина термодинамічна границя ρ_Λ при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ [32]. Граничні функції $\rho(\eta; z, \beta)$ є розв'язками нескінченної системи рівнянь Кірквуда-Зальцбурга у банаховому просторі E_ξ (див., наприклад, [32], [25]) з нормою

$$\|\varphi\|_\xi := \sup_{\eta \in \Gamma_0 \setminus \emptyset} |\varphi(\eta)| \xi^{-|\eta|}, \quad \varphi \in E_\xi. \quad (1.21)$$

Система рівнянь Кірквуда-Зальцбурга може бути записана у вигляді єдиного операторного рівняння (див. [32])

$$\rho = z\tilde{K}\rho + z\delta, \quad (1.22)$$

де оператор $\tilde{K}$ діє на довільну функцію $\varphi \in E_\xi$ у відповідності за правилом:

$$(\tilde{K}\varphi)(\{x\}) = \int_{\Gamma_0} K(x; \gamma) \varphi(\gamma) \lambda_\sigma(d\gamma), \quad (1.23)$$

якщо $\eta = \{x\}$, $K(x; \emptyset) = \varphi(\emptyset) = 1$ і

$$(\tilde{K}\varphi)(\eta) = \sum_{x \in \eta} \tilde{\pi}(x; \eta^{\hat{x}}) e^{-\beta W(x; \eta^{\hat{x}})} \int_{\Gamma_0} K(x; \gamma) \varphi(\eta^{\hat{x}} \cup \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma), \quad (1.24)$$

якщо $|\eta| \geq 2$, а $\eta \setminus \{x\} := \eta^{\hat{x}}$,

$$\tilde{\pi}(x; \eta^{\hat{x}}) = \frac{\pi_W(x; \eta^{\hat{x}})}{\sum_{y \in \eta} \pi_W(y; \eta^{\hat{y}})} \quad (1.25)$$

$$\pi_W(x; \eta^{\hat{x}}) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } W(x; \eta^{\hat{x}}) \geq -2B, \\ 0 & \text{у решті випадків,} \end{cases} \quad (1.26)$$

$$K(x; \gamma) := \prod_{y \in \gamma} C_{xy}; \quad C_{xy} := e^{-\beta \phi(|x-y|)} - 1, \quad (1.27)$$

$$\delta(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } |\eta| = 1, \\ 0 & \text{у решті випадків.} \end{cases} \quad (1.28)$$

Зауваження 1.2. Оператор $\tilde{K} = \Pi K$ у позначеннях Д. Рюеля [32], а (1.26), (1.25) є реалізація оператора Π :

$$(\Pi\varphi)(\eta) := \sum_{x \in \eta} \tilde{\pi}(x; \eta \setminus \{x\}) \varphi(x, \eta \setminus \{x\})$$

При цьому оператор $K : E_\xi \rightarrow E_{e^{2\beta B}\xi}$, а оператор $\tilde{K} : E_\xi \rightarrow E_\xi$ (див. детальніше [32]).

Оператор $\tilde{K}$ обмежений у банаховому просторі E_ξ .

Розв'язок рівняння (1.22) можна подати у формі збіжних у просторі E_ξ (та точково збіжних для будь-якої фіксованої конфігурації $\eta \in \Gamma_0$) рядів

$$\rho(\eta; z, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} (\tilde{K}^n \delta)(\eta; z, \beta), \quad (1.29)$$

якщо взаємодія задовольняє умови **(A)**, а значення активності z належить колу:

$$|z| \leq e^{-2\beta B} \xi e^{-\xi C(\beta)} \quad (1.30)$$

Оптимальним значенням параметра ξ є $\xi = C(\beta)^{-1}$, де

$$C(\beta) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-\beta \phi(|x|)} - 1 \right| dx < \infty. \quad (1.31)$$

Тоді основний результат розділу є наступна теорема:

Теорема 1.1. *Нехай потенціал $\phi(|x|)$ є неперервним на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ і задовольняє умовам (1.9)–(1.11) Тоді для довільних конфігурацій $\eta, \eta_1 \in \Gamma_0$, $\eta \cap \eta_1 = \emptyset$, відстань між якими $\text{dist}(\eta, \eta_1) := \min_{x \in \eta, y \in \eta_1} |x - y| > R$ і достатньо малого значення активності z , справедлива наступна нерівність:*

$$|\rho(\eta \cup \eta_1) - \rho(\eta)\rho(\eta_1)| \leq C m_{\xi_0}^{\frac{\text{dist}(\eta, \eta_1)}{R}} \xi_0^{|\eta| + |\eta_1|}, \quad (1.32)$$

де $m_{\xi_0} < 1$, $C > 0$, $\xi_0 = \xi_0(\beta, z) > 0$ не залежать від η, η_1 .

1.4 Кореляційні функції моделі коміркового газу та рівняння для них

Як ми зазначили вище, в роботах [27], [29], [30] було встановлено, що для взаємодій, які ми розглядаємо, кореляційні функції моделі коміркового газу поточно збігаються до кореляційних функцій $\rho(\eta; z, \beta)$ якщо параметр розбиття $a \rightarrow 0$. Це означає, що для доведення Теорема 1.1 достатньо довести нерівність (1.32) для кореляційних функцій моделі коміркового газу з константами $m_{\xi_0} < 1$, $C > 0$, $\xi_0 = \xi_0(\beta, z) > 0$, які не залежать від параметра розбиття a .

Щоб визначити кореляційні функції моделі коміркового газу введемо таку функцію на просторі Γ_0 :

$$\chi_{-}^{\Delta}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{для } \gamma \text{ з } |\gamma_{\Delta}| \in \{0, 1\}, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (1.33)$$

Тоді статистична сума і кореляційні функції моделі коміркового газу визначаються наступними формулами:

$$\begin{aligned} Z_{\Lambda}^{(a)}(z, \beta) &:= \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\gamma)} \prod_{\Delta \in \overline{\Delta_a} \cap \Lambda} \chi_{-}^{\Delta}(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) := \\ &:= \int_{\Gamma_{\Lambda}^{(a)}} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}^a(d\gamma) \end{aligned} \quad (1.34)$$

і

$$\rho_{\Lambda}^{(a)}(\eta; z, \beta) := \frac{1}{Z_{\Lambda}^{(a)}(z, \beta)} \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}^a(\eta \cup d\gamma), \quad (1.35)$$

де

$$\lambda_{z\sigma}^a(\eta \cup d\gamma) := \prod_{\Delta \in \overline{\Delta_a} \cap \Lambda} \chi_{-}^{\Delta}(\eta \cup \gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \quad (1.36)$$

Визначимо також сім'ю *умовних* кореляційних функцій $\rho_{\Lambda}^{(a)}(\cdot \mid \eta_1; z, \beta)$:

$$\rho_{\Lambda}^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta) := \frac{z^{|\eta|}}{Z_{\Lambda}^{(a)}(\eta_1; z, \beta)} \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma \mid \eta_1)} \lambda_{z\sigma}^a(\eta \cup \eta_1 \cup d\gamma), \quad (1.37)$$

де

$$U(\gamma \mid \eta) = U(\gamma) + W(\gamma; \eta), \quad (1.38)$$

а відповідна статистична сума має вигляд:

$$Z_{\Lambda}^{(a)}(\eta_1; z, \beta) := \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\gamma \mid \eta_1)} \lambda_{z\sigma}^a(\eta_1 \cup d\gamma). \quad (1.39)$$

1.5 Рівняння Кірквуда-Зальцбурга для кореляційних функцій коміркового газу

Основним технічним засобом доведення нерівності (1.32) будуть Рівняння Кірквуда-Зальцбурга для кореляційних функцій $\rho^{(a)}(\eta; z, \beta)$ і $\rho^{(a)}(\cdot \mid \eta_1; z, \beta)$. В роботі [29] рівняння для функцій $\rho^{(a)}(\eta; z, \beta)$ були використані для доведення граничного переходу

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho^{(a)}(\eta; z, \beta) = \rho(\eta; z, \beta). \quad (1.40)$$

Зауважимо, що доведення існування термодинамічного граничного переходу $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$ для функцій $\rho_{\Lambda}^{(a)}(\eta; z, \beta)$ виконується аналогічно (див. [29]), а щоб вивести рівняння для функцій $\rho_{\Lambda}^{(a)}(\cdot \mid \eta_1; z, \beta)$ домножимо чисельник і знаменник

у правій частині виразу (1.37) на множник $\frac{z^{|\eta_1|} e^{-\beta U(\eta_1)}}{Z_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta, a)}$. Тоді

$$\rho_{\Lambda}^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta) := \frac{\frac{z^{|\eta \cup \eta_1|}}{Z_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta, a)} \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\eta \cup \eta_1 \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}^a(\eta \cup \eta_1 \cup d\gamma)}{\frac{z^{|\eta_1|}}{Z_{\Lambda}^{(-)}(z, \beta, a)} \int_{\Gamma_{\Lambda}} e^{-\beta U(\eta_1 \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}^a(\eta_1 \cup d\gamma)}. \quad (1.41)$$

Враховуючи визначення кореляційних функцій $\rho_{\Lambda}^{(a)}(\cdot; z, \beta)$ ми можемо переписати (1.41) у вигляді:

$$\rho_{\Lambda}^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta) := \frac{\rho_{\Lambda}^{(a)}(\eta \cup \eta_1; z, \beta)}{\rho_{\Lambda}^{(a)}(\eta_1; z, \beta)} \quad (1.42)$$

і аналогічне співвідношення для граничних функцій $\rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta)$. Щоб записати рівняння для функцій $\rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta)$, запишемо рівняння Кірквуда-Зальцбурга для функції

$\rho^{(a)}(\eta \cup \eta_1; z, \beta)$, виділивши змінну $x \in \eta$ і застосувавши оператор $\tilde{\pi}(x; \eta^{\hat{x}})$ (формули (1.26)–(1.25)):

$$\begin{aligned} \rho^{(a)}(\eta \cup \eta_1; z, \beta) &= z \tilde{\pi}(x; \eta^{\hat{x}}) e^{-\beta W(x; \eta^{\hat{x}} \cup \eta_1)} \left\{ \rho^{(a)}(\eta^{\hat{x}} \cup \eta_1; z, \beta) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{\substack{Q \subset \bar{\Delta}_a, Q \neq \emptyset \\ Q \cap \eta^{\hat{x}} \cup \eta_1 = \emptyset}} \prod_{y \in Q} (e^{-\beta \phi_{xy}} - 1) \rho^{(a)}(\eta^{\hat{x}} \cup \eta_1 \cup Q; z, \beta) \right\}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

де $Q = \{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$, $k = 0, 1, \dots$ всеможливі підмножини кубів розбиття $\bar{\Delta}_a$, в кожному з яких знаходиться точка конфігурації. У формулі (6.13) ми використали наступне позначення:

$$\sum_{Q \subset \bar{\Delta}_a} f(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\} \subset \bar{\Delta}_a} \int_{\Delta_1} \cdots \int_{\Delta_k} f(y_1, \dots, y_k) dy_1 \cdots dy_k \quad (1.44)$$

Тоді, враховуючи (1.42), маємо:

$$\begin{aligned} \rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta) &= z \tilde{\pi}(x; \eta^{\hat{x}}) e^{-\beta W(x; \eta^{\hat{x}} \cup \eta_1)} \left\{ \rho^{(a)}(\eta^{\hat{x}} \mid \eta_1; z, \beta) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{\substack{Q \subset \bar{\Delta}_a, Q \neq \emptyset \\ Q \cap \eta^{\hat{x}} \cup \eta_1 = \emptyset}} \prod_{y \in Q} (e^{-\beta \phi_{xy}} - 1) \rho^{(a)}(\eta^{\hat{x}} \cup Q \mid \eta_1; z, \beta) \right\}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Запишемо сім'ю рівнянь (1.45) у вигляді одного операторного рівняння:

$$\rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1) = z \left(\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \rho^{(a)} \right) (\eta \mid \eta_1) + z \delta_{\eta_1}(\eta), \quad (1.46)$$

де

$$\delta_{\eta_1}(\eta) = \begin{cases} e^{-\beta W(x; \eta_1)} & \text{якщо } \eta = \{x\}, \\ 0 & \text{якщо } |\eta| \geq 2. \end{cases}$$

Оператор $\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)}$ діє на довільну функцію $\varphi \in C_0(\Gamma_0^{(a)})$ за правилом:

$$\left(\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \varphi \right) (x) = e^{-\beta W(x; \eta_1)} \sum_{\substack{Q \subset \bar{\Delta}_a, Q \neq \emptyset, \\ Q \cap \eta_1 = \emptyset}} \prod_{y \in Q} (e^{-\beta \phi_{xy}} - 1) \varphi(Q) \quad (1.47)$$

для $|\eta| = 1$, і

$$\begin{aligned} \left(\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \varphi \right) (\eta) = & \tilde{\pi}(x; \eta^{\hat{x}}) e^{-\beta W(x; \eta^{\hat{x}} \cup \eta_1)} \left\{ \varphi(\eta^{\hat{x}}) + \right. \\ & \left. \sum_{\substack{Q \subset \bar{\Delta}_a, Q \neq \emptyset \\ Q \cap \eta^{\hat{x}} \cup \eta_1 = \emptyset}} \prod_{y \in Q} (e^{-\beta \phi_{xy}} - 1) \varphi(\eta^{\hat{x}} \cup Q) \right\} \end{aligned} \quad (1.48)$$

для $|\eta| \geq 2$.

Важливо зауважити, що якщо $\text{dist}(\eta, \eta_1) > R$ тоді $W(\eta; \eta_1) = 0$, $e^{-\beta W(x; \eta_1)} = 1$ і в сумах виразів (1.47), (1.48) сумування виконується по підмножинам $Q \subset R(\Delta)$ де

$$R(\Delta) = \bigcup_{\Delta' \in \bar{\Delta}_a, \text{dist}(\Delta', \Delta) \leq R} \Delta'. \quad (1.49)$$

Оператор $\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)}$ є обмеженим оператором у просторі $E_\xi (\xi > 0)$ (див. [32]). Його норма задовольняє нерівності (див. також аналогічні оцінки в [23] для моделі ґратчастого газу):

$$\| \tilde{K}_{\eta_1}^{(-)} \|_\xi \leq e^{\beta D(a)} e^{\xi C(\beta)} \xi^{-1}. \quad (1.50)$$

Розв'язок рівняння (1.46) можна записати у вигляді збіжного в E_ξ (а також поточково збіжного для кожної фіксованої конфігурації $\eta \in \Gamma_0$) ряду (при достатньо малих значень активності z):

$$\rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1; z, \beta, a) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \left(\left(\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \right)^n \delta_{\eta_1} \right) (\eta). \quad (1.51)$$

Покладаючи $\eta_1 = \emptyset$ ми отримаємо аналогічні рівняння для функцій $\rho^{(a)}(\eta; z, \beta)$, а їх розв'язки задаються аналогічним рядом:

$$\rho^{(a)}(\eta; z, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \left(\left(\tilde{K}^{(a)} \right)^n \delta \right) (\eta). \quad (1.52)$$

Вираз для оператора $\tilde{K}^{(a)}$ ($|\eta| \geq 2$) є аналогічним до (1.48) без множника $e^{-\beta W(x; \eta_1)}$.

Доведення Теорема 1.1

Для доведення нерівності (1.32) сформулюємо наступну лему (див. також [23], лекція 6):

Лема 1.1. *Якщо дві функції f_1 і f_2 збігаються ($f_1(\eta) = f_2(\eta)$) для всіх $\eta \in \Gamma_0$ таких, що*

$$\text{dist}(\eta, \eta_1) \geq pR > 0, p \in \mathbb{N},$$

тоді

$$\left(\tilde{K}^{(a)} f_1 \right) (\eta) = \left(\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} f_2 \right) (\eta).$$

для всіх η таких, що

$$\text{dist}(\eta, \eta_1) \geq (p+1)R.$$

Доведення. З рівнянь (1.47), (1.48) і того факту, що коли $Q \subset R(\Delta)$ тоді $\text{dist}(\eta \setminus \{x\} \cup Q, \eta_1) \geq pR$ якщо $\text{dist}(\eta, \eta_1) \geq (p+1)R$. У виразі для операторів $\tilde{K}^{(a)}$ і $\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)}$ сумування виконується по різних областях ($Q \cap \eta \setminus \{x\} = \emptyset$ і $Q \cap (\eta \setminus \{x\} \cup \eta_1) = \emptyset$ відповідно). Але це не приводить до різних операторів, бо, якщо $Q \cap \eta_1 \neq \emptyset$ і $\text{dist}(\eta, \eta_1) > R$ за умовою леми, тоді $e^{-\beta \phi_{xy}} - 1 = 0$ для довільного $y \in Q$.

Якщо $\text{dist}(\eta, \eta_1) \geq R$ тоді $\delta(\eta) = \delta_{\eta_1}(\eta)$. Крім того, для довільного $\eta, \eta_1 \in \Gamma_0$ такого, що $\text{dist}(\eta, \eta_1) \geq R$:

$$\left(\tilde{K}^{(a)} \delta \right) (\eta) = \left(\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \delta_{\eta_1} \right) (\eta).$$

Враховуючи твердження леми, отримаємо:

$$\left(\left(\tilde{K}^{(a)} \right)^p \delta \right) (\eta) = \left(\left(\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \right)^p \delta_{\eta_1} \right) (\eta). \quad (1.53)$$

для всіх p :

$$1 \leq p \leq \left\lfloor \frac{\text{dist}(\eta, \eta_1)}{R} \right\rfloor.$$

Для довільного $\eta, \eta_1 \in \Gamma_0$ існує $n \in \mathbb{N}_0$ таке, що:

$$(n+1)R \geq \text{dist}(\eta, \eta_1) \geq nR.$$

Використовуючи цей факт і (1.53) ми отримаємо наступну оцінку для довільних $\eta, \eta_1 \in \Gamma_0$ таких, що $\text{dist}(\eta, \eta_1) \geq R$:

$$\begin{aligned} \left| \rho^{(a)}(\eta) - \rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1) \right| &\leq \left| \sum_{l=n+1}^{\infty} z^{l+1} \left(\left(\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \right)^l \delta \right) (\eta) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{l=n+1}^{\infty} z^{l+1} \left(\left(\tilde{K}^{(a)} \right)^l \delta_{\eta_1} \right) (\eta) \right|. \end{aligned} \quad (1.54)$$

З означення норми у просторі E_ξ і того, що існує ξ_0 таке, що має місце наступна нерівність:

$$z \parallel \tilde{K}^{(a)} \parallel_{\xi_0} \leq m_{\xi_0}(a), \quad z \parallel \tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \parallel_{\xi_0} \leq m_{\xi_0}(a), \quad 0 \leq m_{\xi_0}(a) \leq 1$$

отримаємо нерівності:

$$z^l \left| \left(\left(\tilde{K}^{(a)} \right)^l \delta \right) (\eta) \right| \leq z^l \parallel \left(\tilde{K}^{(a)} \right)^l \delta \parallel_{\xi_0} \xi_0^{|\eta|} \leq m_{\xi_0}^l \xi_0^{|\eta|-1}, \quad (1.55)$$

$$z^l \left| \left(\left(\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \right)^l \delta_{\eta_1} \right) (\eta) \right| \leq z^l \parallel \left(\tilde{K}_{\eta_1}^{(a)} \right)^l \delta_{\eta_1} \parallel_{\xi_0} \xi_0^{|\eta|} \eta \leq e^{\beta B} m_{\xi_0}^l \xi_0^{|\eta|-1}. \quad (1.56)$$

З оцінок (1.55)-(1.56) ми можемо переписати оцінку (1.54) таким чином:

$$\left| \rho^{(a)}(\eta) - \rho^{(a)}(\eta \mid \eta_1) \right| \leq C_0 m_{\xi_0}^{n+1} \xi_0^{|\eta|} \leq C_0 m_{\xi_0}^{\frac{\text{dist}(\eta, \eta_1)}{R}} \xi_0^{|\eta|}. \quad (1.57)$$

Враховуючи (1.42) та обмеженість функцій $\rho^{(a)}(\eta; z, \beta)$:

$$\rho^{(a)}(\eta_1; z, \beta) \leq C_1 \xi_1^{|\eta_1|}, \quad (1.58)$$

де C_1 не залежить від a (див. [30]) отримуємо з (1.57) нерівність

$$\left| \rho^{(a)}(\eta \cup \eta_1) - \rho^{(a)}(\eta) \rho^{(a)}(\eta_1) \right| \leq C m_{\xi_0}^{\frac{\text{dist}(\eta, \eta_1)}{R}} \xi^{|\eta|+|\eta_1|}. \quad (1.59)$$

Права частина нерівності (5.9) не залежить від параметра розбиття a . Граничний перехід $a \rightarrow 0$ завершує доведення теореми 1.1. ■

1.6 Висновки. Можливі застосування результатів

Основним результатом цього розділу була теорема 1.1, тобто нерівність (1.32). Для моделі гратчастого газу її доведення дивись в роботі [23]. В роботі [31] був застосований метод роботи [23]. Він полягав у тому, що внаслідок результату роботи [29] неперервну систему взаємодіючих частинок можна

апроксимувати за допомогою моделі коміркового газу. Для цього були виведені рівняння (1.46), за допомогою яких була доведена нерівність (5.9), яка після граничного переходу $a \rightarrow 0$ перетворювалась в нерівність (1.32).

З нерівності (1.32) впливає поведінка міри Гіббса, яку відображає граничний перехід (1.18). Цю властивість називають умовою перемішування.

Найбільш характерним прикладом застосування цього результату є його перевірка при дослідженні динамічних систем на їх ергодичність і встановленні факту їх прямування до рівноваги. Детально це описано в монографії [15].

2 КОРЕЛЯЦІЇ КЛАСТЕРІВ ВЗАЄМОДІЮЧИХ ЧАСТИНОК ТА ОЦІНКА ЇХ СПАДАННЯ

У попередньому розділі були досліджені умови, які забезпечують поведінку нескінченної системи взаємодіючих точкових частинок, яка забезпечує ергодичність системи, яка в свою чергу дозволяє застосувати статистичні методи дослідження. Теорема 1.1 фактично зводить цю проблему до оцінки взаємодії двох кластерів (двох віддалених груп частинок). Виникає зовсім природне узагальнення цієї задачі. Яким чином описати взаємодію багатьох таких груп? Виявляється така задача має досить широке поле застосувань у математичній фізиці та інших галузях природознавства.

2.1 Кластери та опис їх взаємодії

Мабуть вперше така проблема виникла в фізиці (див. [17]). Детально її обговорення з точки зору математичних методів дослідження було розглянуто в роботі [8]). Для систем на ґратках були отримані ряд важливих результатів. Для неперервних систем були сформульовані важливі для дослідження проблеми. Окремі проблеми були досліджені в [8] і пізніше в роботах [9–11, 22]. В роботі [6] дослідження взаємодії між кластерами були сформульовані в термінах рівнянь, які були вперше виведені в цій роботі для так званих частково зв'язних кореляційних функцій (ЧЗКФ), введених ще в [8]). Математичний апарат, необхідний для виводу цих рівнянь спирається на теорію узагальнених функцій.

Узагальнені функції в $\mathcal{D}'(\Gamma_0)$.

Простір основних функцій $\mathcal{D}(\Gamma_0)$ визначається раступним чином. Функція $G \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$ є відображення $G : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ задане за допомогою послідовності симетричних функцій $G_n \in C_{0,sym}^\infty(\mathbb{R}^{dn})$ таких, що для $\gamma \in \Gamma^{(n)}$, $G(\gamma) = G(\gamma_{(x_1, \dots, x_n)}) = G_n(x_1, \dots, x_n)$.

Для заданого $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ з $|j| \leq 1$ визначимо функцію $e_j : \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$, такою рівністю

$$\eta \mapsto e_j(\eta) = \begin{cases} 1, & \eta = \emptyset \\ \prod_{x \in \eta} j(x), & |\eta| \geq 1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Зрозуміло, що $e_j \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$. Для довільного $\eta \in \Gamma_0$ визначимо узагальнену

функцію δ_η таким чином, що для $G \in \mathcal{D}(\Gamma_0)$

$$\langle \delta_\eta, G \rangle := \int_{\Gamma_0} \delta_\eta(\gamma) G(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) = z^{|\eta|} G(\eta). \quad (2.2)$$

На мові δ -функцій в $\mathbb{R}^d$ для конфігурацій $\eta = \{x_1, \dots, x_m\}$ і $\gamma = \{y_1, \dots, y_m\}$

$$\delta_\eta(\gamma) = \begin{cases} 0, & \text{для } |\gamma| \neq |\eta|, \\ 1, & \text{для } \gamma = \eta = \emptyset, \\ \sum_{\pi \in \mathcal{S}_m} \prod_{k=1}^m \delta(x_k - y_{\pi(k)}), & \text{для } \gamma, \eta \in \Gamma_0^{(m)} \end{cases}. \quad (2.3)$$

Добуток в останній стрічці це прямий добуток δ -функцій. Зауваимо, що коли $\eta_1 \cap \eta_2 = \emptyset$ тоді $\delta_{\eta_1} \cdot \delta_{\eta_2} = 0$ і ми можемо визначити добуток

$$\prod_{i=1}^m \Delta_{(\alpha_i \eta_i)}(\gamma) := \prod_{i=1}^m \left(1 + \alpha_i \sum_{\xi_i \leq \gamma} \delta_{\eta_i}(\xi_i) \right), \quad (2.4)$$

де $\alpha_j \in \mathbb{R}$. На мові лінійних функціоналів

$$\langle \prod_{i=1}^m \Delta_{(\alpha_i \eta_i)}, G \rangle = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}} \prod_{i \in I} \alpha_i z^{|\eta_i|} \int_{\Gamma_0} G \left(\bigcup_{i \in I} \eta_i \cup \gamma \right) \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (2.5)$$

враховуючи тотожність

$$\int_{\Gamma_\Lambda} G(\gamma) \sum_{\eta \subseteq \gamma} H(\eta, \gamma \setminus \eta) \lambda_\sigma(d\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} G(\eta \cup \gamma) H(\eta, \gamma) \lambda_\sigma(d\eta) \lambda_\sigma(d\gamma). \quad (2.6)$$

в сенсі узагальнених функцій і того факту, що для $\eta_i \cap \eta_j = \emptyset$

$$\sum_{\xi_i \subseteq \gamma \cup \eta_i} \delta_{\eta_j}(\xi) = \sum_{\xi_i \subseteq \gamma} \delta_{\eta_j}(\xi), \quad i \neq j. \quad (2.7)$$

Зв'язні кореляційні функції

Справжні фізичні кореляції між частинками описуються зв'язними кореляційними функціями. Ці функції визначаються рекурсивно: $\rho^T(x_1) = \rho(\{x_1\})$ і

$$\rho^T(x_1, \dots, x_n) = \rho(\eta) - \sum_{k=2}^n \sum_{I_1, \dots, I_k \subset \{1, \dots, n\}}^* \prod_{l=1}^k \rho^T(\eta_{I_l}), \quad (2.8)$$

де $n = |\eta|$ а зірочка над сумою означає, що це сума за всіма розбиттями множини $\{1, \dots, n\}$ на k не порожніх множин, що не перетинаються, тобто

$$\bigcup_{l=1}^k \eta_l = \eta, \quad \eta_i \cap \eta_j = \emptyset \quad i \neq j; \quad \eta_l \neq \emptyset. \quad (2.9)$$

Їх також можна записати в термінах кореляційних функцій $\rho(\eta)$ наступним виразом:

$$\rho^T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{I_1, \dots, I_k \subset \{1, \dots, n\}}^* \prod_{l=1}^k \rho(\eta_{I_l}). \quad (2.10)$$

Частково зв'язні кореляційні функції.

Частково зв'язні кореляційні функції (ЧЗКФ) описують кореляції між кластерами, тобто між окремими групами частинок. Оцінки послаблення цих кореляцій є важливим технічним засобом при доведенні багатьох фізичних гіпотез (див, наприклад, оцінку (4.2) ів роботі [3]).

Нехай $\eta = \cup_{i=1}^m \eta_i$. Тоді ЧЗКФ, що відповідають такому розбиттю :

$$\tilde{\rho}^T(\eta_1; \dots; \eta_m) = \rho(\cup_{i=1}^m \eta_i) - \sum_{k=2}^m \sum_{I_1, \dots, I_k \subset \{1, \dots, m\}}^* \tilde{\rho}^T(\tilde{\eta}_1) \tilde{\rho}^T(\tilde{\eta}_2) \cdots \tilde{\rho}^T(\tilde{\eta}_k), \quad (2.11)$$

де $\tilde{\eta}_l = \cup_{i \in I_l} \eta_i$. Очевидно, що це визначення збігається з (2.8) коли усі конфігурації η_i містять по одній точці (частинки). Зрозуміло, що $\cup_{l=1}^k \tilde{\eta}_l = \cup_{i=1}^m \eta_i = \eta$. Аналогічно до (2.10), ЧЗКФ $\tilde{\rho}_m^T(\tilde{\eta})$ можна також виразити безпосередньо через $\rho(\eta_i)$:

$$\tilde{\rho}_m^T(\tilde{\eta}) = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} (k-1)! \sum_{I_1, \dots, I_k \subset \{1, \dots, m\}}^* \rho(\tilde{\eta}_1) \cdots \rho(\tilde{\eta}_k). \quad (2.12)$$

2.2 Рівняння для ЧЗКФ

Для того, щоб вивести рівняння для цих функцій, визначимо породжуючи функціонал. Для заданого $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ визначимо згладжену кореляційну функцію ρ_j :

$$\rho_j(\eta) = \rho_{j;1}(\eta) = \frac{1}{Z_j} \int_{\Gamma_0} e_j(\eta \cup \gamma) e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (2.13)$$

$$Z_j = \int_{\Gamma_0} e_j(\gamma) e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma).$$

Використовуючм (2.1) – (2.5), покладемо

$$\tilde{F}_{\rho_j}^T(\alpha, \eta)_1^m = \log Z_j(\alpha, \eta)_1^m, \quad (2.14)$$

де

$$\begin{aligned} Z_j(\alpha, \eta)_1^m &= \int_{\Gamma_0} \prod_{i=1}^m \Delta_{(\alpha_i, \eta_i)}(\gamma) e_j(\gamma) e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma) \\ &= \left\langle \prod_{i=1}^m \Delta_{(\alpha_i, \eta_i)}, e_j \cdot e^{-\beta U} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Зауважимо, що якщо $j(x) = \mathbb{1}_\Lambda(x)$, а $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ формула (2.15) є аналітичним виразом для великої статистичної суми (1.15). Визначимо такі функції для $1 \leq k \leq m$:

$$\tilde{\rho}_{j;k}^T(\eta_1; \dots; \eta_k | (\alpha, \eta)_{k+1}^m) = \frac{\partial^k}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_k} \tilde{F}_{\rho_j}^T(\alpha, \eta)_1^m \Big|_{\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0}. \quad (2.16)$$

Визначимо k -точкові j -ЧЗКФ:

$$\tilde{\rho}_{j;k}^T(\eta_1; \dots; \eta_k) = \tilde{\rho}_{j;k}^T(\eta_1; \dots; \eta_k | (\alpha, \eta)_{k+1}^m) \Big|_{\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0}. \quad (2.17)$$

У роботі [6] була доведена наступна лема:

Лема 2.1. j -ЧЗКФ мають наступний вигляд:

$$\tilde{\rho}_{j;m}^T(\eta_1; \dots; \eta_m) = \sum_{r=1}^m (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{\{J_1, \dots, J_r\} \subset \{1, \dots, m\}}^* \prod_{l=1}^r \rho_j \left(\sum_{i \in J_l} \eta_i \right), \quad (2.18)$$

де друга сума в (2.18) виконується за усіма розбиттями множини $\{1, \dots, m\}$ на r непорожніх підмножин $J_1, \dots, J_r$ з обмеженнями (2.9).

Наприклад, для $j(x) = \mathbb{1}_\Lambda(x)$ функції (2.17) є ЧЗКФ в Λ , а для $j = 1$ це ЧЗКФ в $\mathbb{R}^d$.

У випадку $m = 1$ ЧЗКФ $\tilde{\rho}_j^T(\eta_1) = \rho_j(\eta_1)$, а рівняння збігається зі звичайним рівнянням Кірквуда-Зальцбурга (1.22)–(1.28):

$$\rho_j(\eta_1) = z e^{-\beta W(x_1; \widehat{\eta}^{x_1})} j(x_1) \int_{\Gamma} K(x_1; \xi) \rho_j(\widehat{\eta}^{x_1} \cup \xi) \lambda_{\sigma}(d\xi), \quad (2.19)$$

де ядро K визначено в (1.27), а $W(x_1; \widehat{\eta}^{x_1})$ в (1.25).

Для того щоб отримати рівняння для $\tilde{\rho}_{j;m}^T(\eta_1; \dots; \eta_m)$ запишемо рівняння (2.19) для

$$\rho_j(\eta_1 \cup \eta) = z e^{-\beta W(x_1; \eta^{\widehat{x}_1})} j(x_1) \sum_{\xi \subseteq \eta} \int_{\Gamma_0} K(x_1; \xi \cup \gamma) \rho_j(\eta^{\widehat{x}_1} \cup \eta \cup \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma), \quad (2.20)$$

де в розкладі експоненти $e^{-\beta U(\eta_1 \cup \gamma)}$ використано тотожність

$$\sum_{\xi \subseteq \gamma \cup \eta} K(x_1; \xi) = \sum_{\xi \subseteq \eta} \sum_{\varsigma \subseteq \gamma} K(x_1; \xi \cup \varsigma). \quad (2.21)$$

Після деяких перетворень (див. [6], розділ 4.1) отримаємо рівняння:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{j;m}^T(\eta_1; \dots; \eta_m) &= z e^{-\beta W(x_1; \eta^{\widehat{x}_1})} j(x_1) \sum_{I \subset \{2, \dots, m\}} \sum_{\xi \subseteq \bar{\eta}_I}^* \int_{\Gamma_0} \lambda_\sigma(d\gamma) K(x_1; \xi \cup \gamma) \\ &\quad \times \tilde{\rho}_{j;m-|I|}^T \left(\eta^{\widehat{x}_1} \cup \bar{\eta}_I \cup \gamma; \eta_{\{2, \dots, m\} \setminus I} \right), \end{aligned} \quad (2.22)$$

де $\bar{\eta}_I = \cup_{i \in I} \eta_i$, $\eta_I = \{\eta_{i_1}; \dots; \eta_{i_{|I|}}\}$, $I = \{i_1, \dots, i_{|I|}\}$, а зірочка над другою сумою означає, що для всіх $i \in I$, $\xi \cap \eta_i \neq \emptyset$.

2.3 Розв'язки. Узагальнення формули Келі

Слідуючи роботі [22] будемо шукати розв'язки рівняння (2.22) у вигляді інтегралу:

$$\tilde{\rho}_{j;m}^T(\eta_1; \dots; \eta_m) = \int_{\Gamma_0} e_j(\cup_{i=1}^m \eta_i \cup \gamma) T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma). \quad (2.23)$$

(Тут $T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) = 0$ якщо $\gamma \cap \cup_{i=1}^m \eta_i \neq \emptyset$.)

Підставляючи вирази для $\tilde{\rho}_{j;m}^T$ і $\tilde{\rho}_{j;m-|I|}^T$ вигляду (2.23) в обидві частини рівняння (2.22) і застосуємо тотожність (2.6) отримаємо рекурентне співвідношення для ядра T_m і завдяки довільності функції j :

$$\begin{aligned} T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) &= z e^{-\beta W(x_1; \eta^{\widehat{x}_1})} \sum_{\xi \subset \gamma} \sum_{I \subset \{2, \dots, m\}} \sum_{\eta \subset \bar{\eta}_I}^* K(x_1; \eta \cup \xi) \\ &\quad \times T_{m-|I|} \left(\eta^{\widehat{x}_1} \cup \bar{\eta}_I \cup \xi; \bar{\eta}_{\{2, \dots, m\} \setminus I} \mid \gamma \setminus \xi \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

з початковими умовами

$$T_1(\emptyset \mid \emptyset) = 1, \quad T_1(\emptyset \mid \gamma) = 0 \quad \gamma \neq \emptyset, \quad (2.25)$$

а для $m > 1$,

$$T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) = 0 \quad \gamma \neq \emptyset \text{ і } \eta_i = \emptyset, \quad (2.26)$$

це рівняння має єдиний розв'язок внаслідок рекурентної структури. (Ці умови слідують з того, що $\rho_j(\emptyset) = 1$ і $\tilde{\rho}_{j:m}^T(\eta_1; \dots; \eta_m) = 0$ якщо $\eta_j = \emptyset$ для деякого $j = 1, \dots, m$.)

Головний результат цього розділу є наступна теорема:

Теорема 2.1. *Припустимо, що потенціал взаємодії ϕ задовольняє умовам (А) (див. (1.9)–(1.10)). Тоді в термодинамічній границі $j \rightarrow 1$ існує єдиний розв'язок $\tilde{\rho}_m^T(\eta_1; \dots; \eta_m)$ рівняння (2.22) який можна записати у вигляді:*

$$\tilde{\rho}_m^T(\eta_1; \dots; \eta_m) = \int_{\Gamma_0} T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma), \quad (2.27)$$

де $|T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma)|$ є обмеженим степеневим степеневим рядом за активністю z , який є абсолютно збіжним в області

$$ze^{2\beta B+2\nu_1} < 1. \quad (2.28)$$

Аналітичний вираз для ядра $T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma)$ можна записати у вигляді вкладів графів лісів,

$$T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) = \sum_{\tilde{f} \in \mathfrak{S}_{\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma}} G_C(\tilde{f}), \quad (2.29)$$

де

$$G_C(\tilde{f}) = z^{l+n} \prod_{(x,y) \in E(\tilde{f})} C_{xy} \prod_{(x,y) \in E(f^*) \setminus E(\tilde{f})} e^{-\beta\phi(|x-y|)}, \quad (2.30)$$

$\tilde{f}$ це граф-ліс, зв'язні компоненти якого є графами-деревами з вершинами в точках множини $\cup_{j=1}^m \eta_j \cup \gamma$ і такі, що не мають ліній, які з'єднують точки одного й того самого кластера, а $E(\tilde{f})$ це множина внутрішніх ліній графа $\tilde{f}$. Через f^* позначено максимальний граф-ліс, побудований з графа $\tilde{f}$ дорисовуванням ліній, що зв'язують всі точки в кожному кластері η_j та ліній за процедурою Пен-Роуза (див. [21]).

Зауваження 2.1. Зауважимо, що згідно (2.30) внутрішнім лініям $E(\tilde{f})$ відповідають функції C_{xy} , а внутрішнім лініям $E(f^*) \setminus E(\tilde{f})$ відповідають функції $e^{-\beta\phi(|x-y|)}$,

Для ядер $T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma)$ справедлива наступна лема.

Лема 2.2. Нехай параметри $\beta > 0$, $z > 0$ і припустимо, що ϕ є таким, що

$$ze^{2\beta B} \leq h, \quad |e^{-\beta\phi(|x-y|)} - 1| \leq \nu(x-y), \quad (2.31)$$

тоді

$$|T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma)| \leq Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma), \quad (2.32)$$

де ядра $Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma)$ задовольняють рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) &= h \sum_{\xi \subset \gamma} \sum_{I \subset \{2, \dots, m\}} \sum_{\eta \subset \bar{\eta}_I}^* K_\nu(x_1; \eta \cup \xi) \\ &\times Q_{m-|I|}(\eta^{\widehat{x}_1} \cup \bar{\eta}_I \cup \xi; \eta_{\{2, \dots, m\} \setminus I} \mid \gamma \setminus \xi), \end{aligned} \quad (2.33)$$

з початковими умовами

$$Q_1(\emptyset \mid \emptyset) = 1, \quad Q_1(\emptyset \mid \gamma) = 0 \text{ якщо } \gamma \neq \emptyset, \quad (2.34)$$

і

$$Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) = 0 \quad \eta_i = \emptyset, \quad (m > 1) \quad (2.35)$$

де

$$K_\nu(x_1; \xi) = \begin{cases} 1, & \xi = \emptyset \\ \prod_{x \in \xi} \nu(x_1 - x), & |\xi| \geq 1. \end{cases} \quad (2.36)$$

Детальне доведення в [6], а для ядер $Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma)$ мають місце наступні леми

Лема 2.3.

$$Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) = \sum_{\tilde{f} \in \mathfrak{S}_{\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma}} G_\nu(\tilde{f}). \quad (2.37)$$

де аналітичний вклад $\tilde{f} \in \mathfrak{S}_{\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma}$, позначений виразом $G_\nu(\tilde{f})$, і заданий формулою

$$G_\nu(\tilde{f}) = G_\nu(\tilde{f}; \eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma) = h^{l+n} \prod_{(x,y) \in E(\tilde{f})} \nu(x - y), \quad (2.38)$$

з

$$l = l_1 + \dots + l_m, \quad l_i = |\eta_i| \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.39)$$

Оцінка ядер $Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma)$ і завдяки (2.32) ядер

$T_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \gamma)$ має вигляд

$$\int_{\mathbb{R}^{dn}} G_\nu(\tilde{f}; \eta_1; \dots; \eta_m \mid \{y_1, \dots, y_n\}) dy_1 \cdots dy_n \leq h^{l+n} \nu_0^{|E_\eta(\tilde{f})|} \nu_1^n, \quad (2.40)$$

де

$$\nu_0 = \max_{x \in \mathbb{R}^d} \nu(x) = \max_{x \in \mathbb{R}^d} |e^{-\beta\phi(|x|)} - 1|, \quad (2.41)$$

$$\nu_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(x) dx = \int_{x \in \mathbb{R}^d} |e^{-\beta\phi(|x|)} - 1| dx. \quad (2.42)$$

Для завершення доведення теореми 2.1 треба встановити кількість діаграм-лісів $N_n^{(m)}(l_1; \dots; l_m)$ у розкладі (2.29) із заданим числом кількості кластерів m і кількістю частинок $l_i = |\eta_i|$ у кожному кластері, а також точок $n = |\gamma|$. Відповідь дає наступна лема.

Лема 2.4. *Нехай $L_i = 2^{l_i} - 1$ для $i = 2, \dots, m$, тоді*

$$N_n^{(m)}(l_1; \dots; l_m) = L_2 \cdots L_m l_1 (l_1 + \dots + l_m + n)^{m+n-2}. \quad (2.43)$$

Формула (2.43) узагальнює відому формулу Келі, яка встановлює кількість зв'язних діаграм-дерев із заданим числом вершин.

Враховуючи цю формулу остаточно оцінюється розклад для ЧЗКФ, збіжність якого остаточно встановлює твердження теореми 2.1:

$$|\tilde{\rho}_m^T(\eta_1; \dots; \eta_m)| \leq (2ze^{2\beta B+1})^l \nu_0^{l-l_1} l^{m-2} \sum_{n=0}^{\infty} (ze^{2\beta B+2} \nu_1)^n. \quad (2.44)$$

■

2.4 Оцінки швидкості ослаблення взаємодії кластерів

Найбільш важливою властивістю ЧЗКФ є послаблення взаємодії між кластерами при збільшенні відстані між кластерами. Оцінка швидкості такого послаблення є досить складною аналітичною проблемою, яка охоплює проблематику аналізу та комбінаторної топології. Ці оцінки залежать від поведінки функції ν , яка визначається потенціалом взаємодії формулою (2.31). Припустимо, що ν є поліноміально обмеженою, наприклад, такою, що $\nu(x) \leq C\bar{\nu}(x)$, де

$$\bar{\nu}(x) = \frac{1}{|x|^\alpha + 1}, \quad (2.45)$$

з константою $\alpha > d$. В основі усіх оцінок цього розділу лежить наступна лема.

Лема 2.5. Для функцій $\bar{\nu}$, які визначені формулою (2.45) для всіх $p \geq 2$ і $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^d$,

$$\int \prod_{r=1}^p \bar{\nu}(x_r - y) dy \leq 2^{\alpha(p-1)} \bar{\nu}_1 \sum_{r=1}^p \prod_{k=1; k \neq r}^p \bar{\nu}(x_k - x_r), \quad (2.46)$$

де

$$\bar{\nu}_1 = \int \bar{\nu}(y) dy.$$

Основним результатом цього розділу є теорема

Теорема 2.2. Нехай потенціал взаємодії ϕ задовольняє умовам (1.11) і (1.31). Припустимо до того ж, що існує $\alpha > d$ і для всіх $\beta > 0$ існує константа $C > 0$ така, що

$$\nu(x) \leq C \bar{\nu}(x) \quad (2.47)$$

Тоді, при умові, що

$$ze^{2\beta B} [\nu_1(\beta)e + \bar{\nu}(\beta)(e + 2^{1+\alpha})] < 1 \quad (2.48)$$

існують константи $A_{m,\sigma}(\beta, z, \alpha) > 0$, $1 \leq \sigma \leq m$ такі, що ЧЗКФ задовольняють наступним нерівностям

$$|\tilde{\rho}_m^T(\eta_1; \dots; \eta_m)| \leq \sum_{\sigma=1}^m A_{m,\sigma} \max_{T_m \in \mathfrak{T}_m} \bar{\nu}_{T_m}, \quad (2.49)$$

де $\mathfrak{T}_m$ це множина усіх зв'язних графів-дерев з m вершинами, а

$$\bar{\nu}_{T_m} = \prod_{(i,j) \in T_m} \max_{x \in \eta_i; y \in \eta_j} \bar{\nu}(x - y). \quad (2.50)$$

Доведення теореми технічно дуже складне. Воно детально викладене в роботі [6], а тут будуть приведені основні ключові моменти. Для частинних випадків $m = 2, 3$ доведення дуже прозоре. Для встановлення точного розв'язку треба виходити з рекурентного співвідношення (2.24), але оцінка (2.32) дозволяє розглядати співвідношення (2.33). Перш ніж переходити до цих викладок, зробимо деякі спрощення, проінтегрувавши вклади тих діаграм, в яких лінії закінчуються змінними y , що належать конфігурації $\gamma = \{y_1, \dots, y_n\}$. Введемо для цього наступні ядра:

$$Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid n) := \int dy_1 \cdots dy_n Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid \{y_1, \dots, y_n\}). \quad (2.51)$$

Вони задовольняють наступним співвідношенням:

$$\begin{aligned} Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid n) &= \\ &= h \sum_{I \subset \{2, \dots, m\}} K^{(0)}(x_1; \bar{\eta}_I) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \int (dy)^k \prod_{j=1}^k K_\nu(x_1; y_j) \\ &\times Q_{m-|I|}(\widehat{\eta^{x_1}} \cup \bar{\eta}_I \cup \{y_1, \dots, y_k\}; \eta_{\{2, \dots, m\} \setminus I} \mid n - k), \end{aligned} \quad (2.52)$$

де $K^{(0)}(x_j; \emptyset) := 1$, і

$$K^{(0)}(x_j; \bar{\eta}_I) = \sum_{\eta \subset \bar{\eta}_I}^* K_\nu(x_j; \eta) = \sum_{\eta \subset \bar{\eta}_I}^* \prod_{x \in \eta} \nu(x_j - x). \quad (2.53)$$

Тоді справедлива пропозиція:

Пропозиція 2.1. Розв'язок рекурентного співвідношення (2.52) можна виразити наступною формулою:

$$Q_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid n) = h^l \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! N_{n-k}^{(1)}(l + k) (h\nu_1)^{n-k} \tilde{Q}_m(\eta_1; \dots; \eta_m \mid k), \quad (2.54)$$

де $\tilde{Q}^{(k)}(\eta_1 \mid 1) = \delta_{k0}$ і $\tilde{Q}_m(\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_m \mid k)$ складається з вкладів графів-лісів $\mathfrak{S}_{\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_m \mid \{y_1, \dots, y_k\}}$, у яких y_i з γ зв'язують принаймні дві вершини.

У випадку $m = 2$

$$Q_2(\eta_1; \eta_2 \mid n) = h^l \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! N_{n-k}^{(1)}(l + k) (h\nu_1)^{n-k} \tilde{Q}_2(\eta_1; \eta_2 \mid k), \quad (2.55)$$

і

$$\tilde{Q}_2(\eta_1; \eta_2 \mid k) = \sum_{x_1 \in \eta_1} K^{(k)}(x_1; \eta_2) \quad (2.56)$$

де $K^{(0)}(x_1; \eta_2)$ задано в (2.53) і

$$K^{(k)}(x_1; \eta_2) = h^k \int dy_1 \dots dy_k \nu(x_1 - y_1) \prod_{i=1}^{k-1} \nu(y_i - y_{i+1}) K^{(0)}(y_k; \eta_2) \quad (2.57)$$

для $k \geq 1$.

Використовуючи лему 2.5

$$K^{(k)}(x_1; \eta_2) \leq h^k (2^{1+\alpha} C \bar{\nu}_1)^{k-1} C \int dy_k \bar{\nu}(x_1 - y_k) \sum_{\eta \subset \eta_2}^* \prod_{x \in \eta} \nu(y_k - x). \quad (2.58)$$

Припустимо, що ν є поліноміально обмеженою, тобто $\nu(x) \leq C\bar{\nu}(x)$ (див. (2.41) і (2.45)). Інтегруючи від y_1 до y_{k-1} , використовуючи лему 2.5, яка дає множники $2^{1+\alpha}C\bar{\nu}_1$. Тобто,

$$K^{(k)}(x_1; \eta_2) \leq h^k (2^{1+\alpha}C\bar{\nu}_1)^{k-1} C \int dy_k \bar{\nu}(x_1 - y_k) \sum_{\eta \subset \eta_2}^* \prod_{x \in \eta} \nu(y_k - x). \quad (2.59)$$

Останній інтеграл може бути оцінений наступним чином. Завдяки тому, що $\nu(x) \leq C$,

$$\begin{aligned} \int \bar{\nu}(x_1 - y) \prod_{k=1}^p \nu(y - x'_k) dy &\leq C^p \int \bar{\nu}(x_1 - y) \bar{\nu}(y - x'_k) dy \\ &\leq \bar{\nu}_1 2^{1+\alpha} C^p \bar{\nu}(x_1 - x'_k) \end{aligned} \quad (2.60)$$

для довільного $k = 1, \dots, p$. Сумуючи за $\eta \subset \eta_2$ з $x_k \in \eta$, маємо

$$\begin{aligned} K^{(k)}(x_1; \eta_2) &\leq (h 2^{1+\alpha} C \bar{\nu}_1)^k L_2 C^{l_2} \max_{\eta'_2 \subset \eta_2; x_2 \in \eta'_2} \bar{\nu}(x_1 - x_2) \\ &= (h 2^{1+\alpha} C \bar{\nu}_1)^k L_2 C^{l_2} \max_{x_2 \in \eta_2} \bar{\nu}(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Далі сумуємо по кожному дереву і враховуємо, що є $(n_i + 1)^{n_i-1}$ таких дерев для кожного i :

$$\begin{aligned} |\tilde{\rho}_2^T(\eta_1; \eta_2)| &\leq h^l L_2 \sum_{x_1 \in \eta_1} C^{l_2} \sum_{k=0}^{\infty} (h 2^{1+\alpha} C \bar{\nu}_1)^k \times \\ &\times \sum_{n_1, \dots, n_{k+l}=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{k+l} \frac{(n_i + 1)^{n_i-1} (h \nu_1)^{n_i}}{n_i!} \max_{x' \in \eta_2} \bar{\nu}(x_1 - x') \\ &= C_l(h, \bar{\nu}_1) N_0^{(2)}(l_1; l_2) \max_{x_1 \in \eta_1; x_2 \in \eta_2} \bar{\nu}(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Це виконується, якщо $h(\nu_1 e + 2^{2+\alpha} C \bar{\nu}_1) < 1$, що забезпечує доведення теореми 2.2 у випадку $m = 2$, покладаючи

$$A_{2,1} = A_{2,2} = \frac{1}{2_1} l_2 C (1 + C)^{l_2-1} \left(\frac{h}{1 - h \nu_1 e} \right)^l \frac{1 - h \nu_1 e}{1 - h \nu_1 e - h \bar{\nu}_1 2^{1+\alpha} C}. \quad (2.63)$$

Зауваження 2.2. Порівнюючи (2.62) з виразом (2.55), отримуємо важливу тотожність:

$$N_n^{(1)}(l) = \sum_{n_1, \dots, n_l \geq 0; \sum_{i=1}^l n_i = n} \frac{n!}{n_1! \dots n_l!} \prod_{i=1}^l (n_i + 1)^{n_i-1}, \quad (2.64)$$

де ми замінили $n - k$ на n , а $k + l$ на l .

Випадок довільного $m \geq 3$ детально викладений у роботі [6]. Важливо при цьому відмітити, що для одержання остаточної оцінки була доведена наступна комбінаторна рівність:

$$\sum_{\{I_1, \dots, I_p\} \in \Pi_p(\{1, \dots, m\})} \prod_{j=1}^p \left(\sum_{i \in I_j} x_i \right)^{|I_j|-1} = \binom{m-1}{p-1} \left(\sum_{i=1}^m x_i \right)^{m-p} \quad (2.65)$$

для заданих $m, p \in \mathbb{N}$ з $1 \leq p \leq m$ і послідовності $(x_i)_{i=1}^m$ з $x_i \in \mathbb{C}$, а сума по множині $\Pi_p(\{1, \dots, m\})$ виконується за всіма розбиттями $(I_j)_{j=1}^p$ множини $\{1, \dots, m\}$ на p не порожніх підмножин, що не перетинаються. Детальне доведення цієї рівності міститься в роботі [7]. ■

2.5 Висновки. Можливі застосування результатів

Взаємодія між великими групами частинок, які називають кластерами, є важливою характеристикою системи. Вона характеризує вплив колективної взаємодії на вибрану модель взаємодії між окремими частинками. Основним результатом цього розділу була теорема 2.2. В області регулярних значень основних фізичних параметрів системи температури $T = \beta/k$ і активності z (див. нерівність (2.48)) характер взаємодії не змінюється. Цей результат є важливим для дослідження поведінки систем в області фазових переходів. Ще в роботах [8–10] такі результати були передбачені і частково доведені для ґратчастих систем. В роботі [3] вони використані для доведення основної теореми. До роботи [6], яка є предметом цього звіту для неперервних систем ці результати були відсутні. В цій роботі вперше були виведені рівняння для так званих **частково зв'язних кореляційних функцій (ЧЗЛФ)**, які описують взаємодію між кластерами. Це рівняння (2.22) цього ЗВІТу.

Розв'язки цих рівнянь записуються у вигляді вкладів графів-лісів, зв'язні компоненти яких є графи-дерева. Але на відміну від звичайних графів-дерев Келі, вершинами цих графів-дерев є кластери, тобто цілі конфігурації точок, а лінії з'єднують тільки точки різних кластерів. Тому, якщо конфігурацію кожного кластера стиснути до однієї точки-вершини отримуємо звичайний граф-дерево Келі.

В роботі [6] одержана формула кількості графів-лісів для заданої кількості кластерів і кількості частинок у кожному кластері. Це формула (2.43). Ця

формула є узагальненням відомої формули Келі $N = n^{n-2}$, яка встановлює кількість графів-дерев з заданим числом вершин n .

Крім цього в роботі [6] були виведені дві нові комбінаторні тотожності, це формули (2.64) і (2.65).

Результати цього розділу є предметом застосування в теорії графів і комбінаторній теорії множин.

3 РОЗВ'ЯЗКИ НАБЛИЖЕНИХ РІВНЯНЬ РУХУ МАКСВЕЛЛА-ЛОРЕНЦА

3.1 Пост-дарвінівське наближення рівнянь руху Максвелла - Лоренца точкових зарядів

Ми розглядаємо наближене рівняння руху n точкових зарядів $e_1, \dots, e_n$ третього порядку нерелятивістської електродинаміки Максвелла-Лоренца (МЛ). Воно дозволяє випромінювання зарядів, містить обернені степені швидкості світла менше чотирьох і має вигляд (див. розділ 75 в [33])

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(t)}{\partial v_j} - \frac{\partial L(t)}{\partial x_j} = \frac{2}{3c^3} e_j \sum_{l=1}^n \frac{d^3 x_l}{dt^3} e_l, \quad j \in (n) = (1, \dots, n),$$

де $L(t)$ - лагранжіан Дарвіна n нерелятивістських точкових зарядів, що характеризуються координатами $x_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3) \in \mathbb{R}^3$ та швидкостями $\frac{dx_j}{dt} = \dot{x}_j = v_j = (v_j^1, v_j^2, v_j^3) \in \mathbb{R}^3$, залежними від часу t ,

$$L = L^1 - U(x_{(n)}),$$

$$U(x_{(n)}) = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k=1}^n e_k e_j |x_k - x_j|^{-1},$$

$$L^1 = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2} |v_j|^2 + \sum_{j \neq k=1}^n e_k e_j (2c)^{-2} [(v_j, v_k) |x_k - x_j|^{-1} + |x_k - x_j|^{-3} (v_j, x_k - x_j)(v_k, x_k - x_j)]$$

де $(x_k, x_k) = |x_k|^2 = (x_k^1)^2 + (x_k^2)^2 + (x_k^3)^2$ та m_j - маси точкових зарядів e_j . Енергія $H = L^1 + U(x_{(n)})$ є сталою для рівняння Дарвіна породженого L (див. розділ 41 в [34]).

Легко бачити, що

$$L^1 = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \sum_{\alpha,\beta}^3 K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) v_j^\alpha v_k^\beta,$$

де

$$K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) = m_j \delta_{j,k} \delta_{\alpha,\beta} + K'_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}),$$

$$K'_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) = (1 - \delta_{j,k})(2c^2)^{-1}e_j e_k [\delta_{\alpha,\beta}|x_k - x_j|^{-1} + \\ + |x_k - x_j|^{-3}(x_k^\alpha - x_j^\alpha)(x_k^\beta - x_j^\beta)], \quad x_j^\alpha, v_j^\alpha \in \mathbb{R},$$

та $\delta_{a,b}$ -символ Кронекера.

Рівняння нерелятивістської динаміки Дарвіна, як і у випадку релятивістської динаміки, виводяться формально з лагранжіану для електромагнітних потенціалів та швидкостей точкових зарядів фундаментальної моделі Максвелла-Лоренца з допомогою розкладу електромагнітних потенціалів за степенями оберненої швидкості світла, яка є малим параметром. Цей лагранжіан так само розкладається за степенями оберненої швидкості світла. Його нульове наближення збігається з кулонівським лагранжіаном. Доданок з першою степінню c^{-1} збігається з часовою похідною повного заряду системи і є нулем. Доданок з c^{-2} збігається з лагранжіаном Дарвіна.

Математично строгий вивід наближення Дарвіна, що вимагає перенормування мас зарядів, запропонований в [35, 36].

Нехтуючи доданками, що залежать від вищих степеней c^{-1} у співвідношенні між імпульсами та швидкостями частинок, тобто використовуючи їх звичайне співвідношення, отримується наближений (апроксимований) гамільтоніан Дарвіна, виписаний в [33].

В наших попередніх статтях [38, 39] ми довели існування голоморфних за часом розв'язків рівняння Кулона, рівняння, породженого апроксимованим гамільтоніаном Дарвіна, та рівняння Дарвіна. Ми отримуємо подібний результат для вищевказаного наближеного рівняння руху зарядів третього порядку, переписаного так [43]

$$-\frac{\partial L}{\partial x_j^\alpha} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_j^\alpha} = \\ \sum_{\beta=1}^3 \sum_{k=1}^n K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) \frac{d^2 x_k^\beta}{dt^2} - G_{j,\alpha}(x_{(n)}; \dot{x}_{(n)}) = \frac{2}{3c^3} e_j \sum_{l=1}^n \frac{d^3 x_l^\alpha}{dt^3} e_l, \quad j \in (n), \quad (3.1)$$

$$G_{j,\alpha}(x_{(n)}; v_{(n)}) = \frac{\partial L}{\partial x_j^\alpha} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_j^\alpha} \right)_-, \quad x_{(n)} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n}.$$

де в правій частині останньої рівності у другому доданку відсутні прискорення зарядів.

Щоб отримати голоморфні по часу у диску розв'язки (3.1) чи рівняння Дарвіна згідно теореми існування Коші необхідно знайти гіпердиск за всіма змінними, в якому матриця K та функція G є голоморфні та зобразити його у вигляді звичайного диференціального рівняння з голоморфною у знайленому гіпердиску правою частиною. Таке зображення забезпечується для рівняння Дарвіна, якщо K має обернену матрицю в такому гіпердиску. Таке підхід для нашого рівняння є більш складним, ніж для рівняння Дарвіна, бо матриця Z з матричними елементами $Z_{j,k} = e_k$, яка визначає його праву частину, не має оберненої. Вона має $n - 1$ нульових власних значень та власне значення $e_* = \sum_{l=1}^n e_j$ бо $Z^2 = e_* Z$, вказуючи на те, що вона є нільпотентною для нейтральної системи, тобто при $e_* = 0$. Ми будемо розглядати системи без умови нейтральності та покажемо, що

$$Z = SZ'S^{-1}$$

де $Z'_{k,l} = e_* \delta_{1,l} \delta_{1,k}$, $S^{-1}_{1,j} = e_j$.

Ми вводимо нові змінні $x_* = S^{-1}x$ та отримуємо для них наступне рівняння

$$\sum_{\beta=1}^3 \sum_{k=1}^n \tilde{K}_{j,\alpha;k,\beta}(x_{*(n)}) \dot{v}_{*k}^\beta - \tilde{G}_{j,\alpha}(x_{*(n)}; v_{*(n)}) = \frac{2}{3c^3} (Z' \frac{d^3 x_*}{dt^3})_j^\alpha, \quad (3.2)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{j,\alpha;k,\beta}(x_{*(n)}) &= (S^{-1} \hat{e}_*^{-1} K S)_{j,\alpha;k,\beta}(Sx_{*(n)}), \quad \tilde{G}_{j,\alpha}(x_{*(n)}; v_{*(n)}) = \\ &= (S^{-1} \hat{e}_*^{-1} G)_{j,\alpha}(Sx_{*(n)}; Sv_{*(n)}), \end{aligned}$$

$$Sx_{*(n)} = (Sx_*)_{(n)}, \quad (\hat{e}_* y)_j = e_j e_* y_j, \quad (S^{-1} K)_{j,\alpha;k,\beta} = \sum_{l=1}^n S_{j,l}^{-1} K_{l,\alpha;k,\beta},$$

Це означає, що

$$S_{j,\alpha;k,\beta} = S_{j,k} \delta_{\alpha,\beta}, \quad S_{j,\alpha;k,\beta}^{-1} = S_{j,k}^{-1} \delta_{\alpha,\beta}.$$

Ми зображуємо (3.2) у формі звичайного диференціального рівняння беручи до уваги, що

$$(Z' \frac{d^3 x_*}{dt^3})_k = \frac{d^3 x_{*1}}{dt^3} \delta_{1,k}.$$

Ми знаходимо гіпердиск, в якому права частина його - голоморфна функція, що дає змогу застосувати теорему існування Коші.

Наш результат формулюється в Теоремі 1.1, в якій ми вводим гіпердиск

$$D_l(r; \xi) = \{x_j : |x_j - \xi_j|_0 < r, \quad x_j, \xi_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, l\},$$

Голоморфні функції тоді визначаються рівномірно та абсолютно збіжними степеневими розкладами за степенями $x_j - \xi_j$ при $|x_j - \xi_j|_0 < r$.

Якщо $x_j \in \mathbb{R}^d, j = 1, \dots, n$ то цей гіпердиск може відповідати будь-якому перенумеруванню цих змінних у порядку зростання їх номерів від 1 до nd .

Ми використовуємо також наступні позначення $|x|_0 = \max_{s,j} |x_j^s|, x_j^s \in \mathbb{R}, |Sx|_0 \leq \|S\| |x|_0$.

Теорема 3.1. *Нехай $m_j = m + \mu_j, 0 \leq \mu_j \leq \mu$ та $a_j, b_j, b_- \in \mathbb{R}^3, j \in (n)$ є вектори такі, що $|a_j - a_l| \geq r_1, |b_j|_0 \leq r_2, |b_-|_0 \leq r_3$. Нехай також*

$$R = (mg_1 - \mu g_2 - c_1 g_3)^{3n-3} -$$

$$\sum_{s=0}^{3n-5} (3n-3-s)!(3n-3)^s (mg_1 + \mu g_2 + c_1 g_3)^s (\mu g_2 + c_1 g_3)^{3n-3-s},$$

де $mg_1 - \mu g_2 - c_1 g_3 > 0, c_1 = (2c^2 r_1)^{-1}$, та додатні $g_l, l = 1, 2, 3$ залежать тільки від зарядів. Якщо $R > 0$ тоді існує розв'язок (3.2) для початкових даних $x_{*j}(t_0) = (S^{-1}a)_j, v_{*j}(t_0) = (S^{-1}b)_j, \dot{v}_{*1}(t_0) = b_-, t_0 \geq 0$ такий, що для $j \in (n)$

$$(x_{*j}(t); v_{*j}(t); \dot{v}_{*1}(t)) \in D_{3n}(r, S^{-1}a) \times D_{3n}(r; S^{-1}b) \times D_3(r; b_-) = D_{S(6n+3)}(r; a, b, b_-), \quad (3.3)$$

де $\kappa < \frac{1}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}, r = \|S\|^{-1} \kappa r_1$ та $x_{*j}(t)$ є голоморфною функцією за t у диску $|t - t_0| < T$ для певного T .

Більше того $x(t) = Sx_*(t)$ є розв'язком (3.1) таким, що

$$(x_j(t); v_j(t)) \in D_{3n}(\kappa r_1; a) \times D_{3n}(\kappa r_1; b) = D_{6n}(\kappa r_1; a, b), \quad j \in (n) \quad (3.4)$$

Заувага 3.1

(3.4) випливає з (3.3) та нерівностей

$$|(Sx)_k - a_k|_0 = |(S(x - S^{-1}a))_k|_0 \leq \|S\| |x - S^{-1}a|_0 < \kappa r_1,$$

$$|(Sv)_k - b_k|_0 = |(S(v - S^{-1}b))_k|_0 \leq \|S\| |v - S^{-1}b|_0 < \kappa r_1.$$

(3.3) приводить також до нерівності

$$\left| \sum_{j=1}^n e_j \dot{v}_j - b_- \right| < \kappa r_1.$$

З (3.4) випливає, що наступна нерівність виконується для розв'язків (3.1)

$$|x_j(t) - x_l(t)|_0 \geq |a_j - a_l|_0 - |x_j(t) - a_j|_0 - |x_l(t) - a_l|_0 > (1 - 2\kappa)r_1.$$

Це означає, що зіткнень зарядів немає для $0 \leq t - t_0 < T$ та $\kappa < \frac{1}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}$.

Теорема 3.1 випливає з теореми Коші [37,40] про існування голоморфних розв'язків l -вимірних звичайних диференціальних рівнянь з голоморфним векторним полем в результаті редукції рівнянь (3.2) до них. Найпростіша версія теореми Коші формулюється наступним чином.

Теорема 3.2. *Нехай система l -вимірних звичайних диференціальних рівнянь*

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x_{(l)}), \quad j = 1, \dots, l, \quad x_{(l)} \in \mathbb{R}^l, \quad t \geq t_0 \quad (3.5)$$

визначається функціями f_j , які є голоморфними функціями змінних x_j в $D_l(r; \xi)$ та рівномірно обмежені: $|f_j| \leq C$. Тоді розв'язок $x_j(t)$ (3.5) для початкових даних $\xi_j = x_j(t_0)$ є голоморфною функцією t у диску $|t - t_0| < T = r((n+1)C)^{-1}$ та належить $D_l(r; \xi)$.

3.2 Кулонівська динаміка рівних від'ємних зарядів у полі рівних фіксованих додатніх зарядів

Важливою задачею математики є знаходження розв'язків рівнянь руху Ньютона систем багатьох d -вимірних частинок (тіл, зарядів) з сингулярною потенціальною енергією U у вигляді збіжних на всьому часовому інтервалі рядів. Ці рівняння для систем N тіл з масами $m_j, j = 1, \dots, N$ мають вигляд

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = - \frac{\partial U(x_{(N)})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.6)$$

$$x_{(N)} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}, \quad x_j = (x_j^1, \dots, x_j^d).$$

Важливим класом цих систем є такі, що мають рівноважні конфігурації (рівновагу), в яких симетрична матриця U^0 частинних других похідних потенціальної енергії не має нульових власних значень, а потенціальна енергія

є дійсно аналітичною функцією в них. Кулонівські лінійні системи двох та трьох негативних зарядів e_0 однакової маси в полі двох зовнішніх точкових фіксованих додатніх зарядів e' є саме такі. Цей важливий факт дозволив нам побудувати періодичні розв'язки поблизу рівноваги рівнянь руху Кулона цих негативних зарядів, розташованих на такій прямій, що додатні заряди розташовані симетрично на перпендикулярі до цієї прямої [44]. Ми застосували теореми Ляпунова(центрально), Мозера, Вайнстайна(Weinstein) та Зігеля, які вимагають знання спектру матриці U^0 . Перші дві теореми, які гарантують існування періодичних розв'язків у вигляді збіжних рядів, обмежували значення $\frac{e_0}{e'}$ через умову нерезонансності. Теорема Вайнстайна встановлює існування періодичних розв'язків без цієї умови, але може бути застосована тільки для систем зі стійкою рівновагою (U^0 є позитивно визначеною матрицею і рівновага є мінімумом потенціальної енергії). Ми розглядаємо кулонівську площинну систему двох та трьох негативних зарядів e_0 однакової маси в полі двох точкових фіксованих додатніх зарядів e' [45]. Ми також переформулюємо наші результати для системи таких трьох негативних зарядів на прямій у простішому вигляді, бо ми змогли знайти корені характеристичного полінома U^0 у явній формі (так само як і для площинних наших систем) без використання формули Кардано як це було в [44]. Ми встановлюємо, що матриця U^0 є прямою сумою двох 2×2 чи 3×3 матриць, відповідно для площинних систем двох чи трьох зарядів.

Для використання згаданих теорем та визначення спектру U^0 необхідно перерахувати змінні. Ми це зробимо наступним чином для їх індексів (перший індекс у парі відповідає номеру заряду)

$$(1, 1) = 1, \dots, (N, 1) = N, (1, 2) = N + 1, \dots, (N, 2) = 2N, \dots,$$

$$(N(d - 1), d) = N(d - 1) + 1, \dots, (N, d) = dN.$$

Тоді рівняння руху Ньютона для систем тіл з однаковою масою m мають вигляд

$$m \frac{d^2 x_j}{dt^2} = - \frac{\partial U(x_{(n)})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad x_{(n)} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Існування обмежених розв'язків (2.1) доводиться нами з допомогою наступної теореми.

Теорема 3.3. *Нехай матриця частинних других похідних потенціальної енергії U має ненульові власні значення $m\sigma_j$ у рівновазі $x_j^0, j = 1, \dots, n$, а U є у ній дійсно аналітичною функцією, та $\sigma_j < 0, j = 1, \dots, p$. Тоді рівняння руху (3.2) має обмежені розв'язки, які є дійсно аналітичними функціями в початку координат за p дійсними параметрами та*

$$\|x - x^0\|_\lambda < \infty, \quad \|\dot{x}\|_\lambda < \infty,$$

де

$$\|x\|_\lambda = \sup_{t \geq 0} \max_{j \in (1, \dots, n)} e^{\lambda t} |x_j(t)|, \quad \lambda < \lambda_0 = \min_{j=1, \dots, p} \lambda_j, \quad \lambda_j = \sqrt{-\sigma_j}.$$

Можливість застосувати цю теорему дає той факт, що кулонівський потенціал є дійсно аналітичною функцією поза початком координат і те, що дійсно аналітичну функцію можна продовжити до голоморфної в комплексному околі аналітичності. В [44] ми використовували цю теорему з умовою відсутності резонансів між $\lambda_j, j \leq p$.

Розглядаються також системи двох та трьох рівних від'ємних зарядів у полі фіксованих двох рівних додатніх зарядів [46, 48], трьох рівних від'ємних зарядів у полі рівних додатніх зарядів зафіксованих у вершинах шестикутника [49] та плоска система n негативних зарядів у постійному магнітному полі та полі n однакових фіксованих додатніх зарядів [50]. Для них знайдені періодичні та квазі-періодичні розв'язки рівнянь руху Кулона. При цьому для перших двох з них та використана центральна теорема Ляпунова для перетворених з допомогою процедури усунення вузла рівнянь руху. Четверта ж характерна тим, що кожен негативний заряд є близьким до свого додатнього фіксованого заряду. Результати для [45] отримані також з допомогою центральної теореми Ляпунова

Розглядаються також механічні системи, матриці других похідних потенціальних енергій яких у рівновазі мають нульові власні значення [51]. Припускається, що їхні потенціальні енергії є голоморфними функціями в цих сингулярних рівновагах. Для таких систем ми доводимо існування власних обмежених для додатнього часу розв'язків нютонівських рівнянь руху, які збігаються до рівноваги в границі нескінченного часу (узагальнена теорема (3.3)). Ці результати застосовуються до кулонівських систем трьох зарядів з сингулярною рівновагою на прямій з зарядами $-e_0, -e_0, \frac{e_0}{4}$.

Координати x_j зарядів $e_j, j = 1, \dots, n$ з масами m_j задовольняють рів-

нянню Кулона якщо

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = - \frac{\partial U(x_{(n)})}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

де

$$x_{(n)} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{dn}, \quad U(x_{(n)}) = - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|}, \quad |x|^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^d)^2.$$

Якщо координати кількох зарядів зафіксовані то рівняння руху для них відсутні.

3.3 Точна і квазіточна динаміка Кулона

Для $n+2$ точкових зарядів $n-1$ з яких однакові, від'ємні і належать площині знайдено точні розв'язки рівнянь руху Кулона, які описують рух однакових $n-1$ негативних зарядів навколо нерухомого центрального додатнього заряду таким чином, що їх координати збігаються з вершинами правильного багатокутника. При цьому ще два інших однакових зардів рухаються уздовж перпендикуляру до площини з $n-1$ зарядами [[52]].

Для $n+1 > 4$ точкових зарядів $n-1$ з яких однакові і від'ємні знайдено квазі-точні періодичні розв'язки рівнянь руху Кулона, які описують рух однакових $n-1$ негативних зарядів навколо вертикальної осі таким чином, що їх координати збігаються з вершинами правильного багатокутника в площинах перпендикулярних до цієї осі. уздовж якої рухаються два інші однакові додатні заряди [[53]].

Для $n+1 > 3$ точкових зарядів $n-1$ з яких однакові і від'ємні знайдено квазі-точні періодичні розв'язки рівнянь руху Кулона, які описують рух однакових $n-1$ негативних зарядів навколо вертикальної осі таким чином, що їх координати збігаються з вершинами правильного багатокутника в площинах перпендикулярних до цієї осі. уздовж якої рухається додатний заряд. При цьому використовуються теореми Вейнстайна та Ляпунова [[54]].

4 МЕТОД ОСНАЩЕНИХ ПРОСТОРІВ В ТЕОРІЇ СИНГУЛЯРНИХ ЗБУРЕНЬ

Метод оснащених просторів полягає у побудові нового оснащеного гільбертового простору відповідного до заданого збурення. Метрика і скалярний добуток значно чутливіший до змін на множинах нульової міри Лебега, ніж лінійний оператор. Збурений оператор з'являється як оператор однозначно асоційований із новим оснащеним простором. Замість стандартної процедури побудови збуреного оператора як формальної суми вільного оператора та збурення (така сума часто просто не має сенсу) у методі оснащених просторів збурення використовується безпосередньо для заміни метрики (скалярного добутку) в одному з просторів із початкового оснащення простору станів фізичної системи. Після цього збурений оператор визначається стандартною операцією за канонічним ізоморфізмом Березанського.

Під процедурою сингулярного збурення ми розуміємо заміну (збурення) одного з початкових об'єктів (гільбертового простора, самоспряженого оператора, квадратичної форми) на якійсь множині, близькій у певному сенсі до нуля. Наприклад, у функціональному просторі сингулярне збурення означає зміну хоча б одного із основних об'єктів задану на множині нульової лебегової міри. Таким чином, при сингулярному збуренні скалярний добуток, самоспряжений оператор, квадратична форма залишаються незмінними на всюди щільній множині у відповідному просторі. І лише наївно можна думати, що такого сорту зміни не мають значення і їх неможливо врахувати.

Отже незважаючи на близькість до нуля носія збурення, з'ясовується, що він містить у собі нетривіальний фізичний ефект, який треба адекватно математично врахувати, описати й дослідити. У фізичних теоріях сингулярно збурений об'єкт набуває нових спектральних і динамічних властивостей. Але послідовної математичної теорії у цьому напрямі і досі ще не створено. Дослідження, пов'язані із способом введення і трактуванням сингулярного і суперсингулярного збурення, ведуть до, на перший погляд, непомітних і тому ігнорованих, але нетривіальних, зв'язків між шкалами гільбертових просторів, щільно вкладених один в інший, теорією самоспряжених розширень симетричних операторів та розкладами незамикальних квадратичних форм на регулярну та сингулярну компоненти.

З'ясовується, що метод оснащених гільбертових просторів найбільш зру-

чний і, можна сказати, адекватний для дослідження задач теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів. Зауважимо, що теорію оснащених гільбертових просторів створено у досконало рафінованій формі Ю. М. Березанським у зв'язку із задачами спектральних розкладів, як для диференціальних, так і абстрактних операторів. Ця теорія знайшла блискуче застосування і у низці задач математичної фізики та квантової теорії поля, зокрема виявилася чудовим інструментом для побудови збуреного оператора у найрізноманітніших ситуаціях, коли звичайні підходи класичної теорії збурень абсолютно не працюють.

Ми демонструємо, що введення оснащених просторів, розширення їх до шкал гільбертових просторів, розгляду і класифікації сингулярних квадратичних форм у відповідних шкалах, інтерпретації сингулярних збурень у термінах такого сорту квадратичних форм, конструкції сингулярно збурених операторів з використанням формули М. Крейна з теорії самоспряжених розширень симетричних операторів і, нарешті, дослідження спектральних властивостей нових операторів за допомогою оснащених просторів – усе це, на наш погляд, на цей час – найбільш досконалий інструмент у теорії сингулярних збурень.

Більш докладно, розглянемо у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ необмежений лінійний оператор T із щільною областю визначення $\mathfrak{D}(T)$. Припускаємо, що він замкнений.

За означенням, $\lambda \in \mathbb{C}$ – точка з комплексної площини називається *регулярною* для оператора T або, еквівалентно, належить до *резольвентної множини*, пишемо $\lambda \in \rho(T)$, якщо оператор $T - \lambda I \equiv T - \lambda$ бієктивно відображає $\text{Dom} T$ на весь простір $\mathcal{H}$. У такому разі обернений оператор $(T - \lambda)^{-1}$ існує, обмежений і визначений в усьому просторі.

Отже за означенням, резольвентна множина

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Ran}(T - \lambda) = \mathcal{H}\}.$$

Операторна функція

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T)$$

називається *резольвентою* оператора T . Доповнення у $\mathbb{C}$ до резольвентної множини називається *спектром* оператора T ; пишемо $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. Якщо у оператора T існують власні значення, то вони утворюють підмножину чисто точкового спектра $\sigma_{\text{pp}}(T) \subseteq \sigma(T)$.

Далі ми цікавимося лише симетричними, або самоспряженими операторами.

Легко переконатися, що точки $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ належать до резольвентної множини будь-якого самоспряженого оператора. Як наслідок, спектр кожного самоспряженого оператора міститься на дійсній вісі, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Добре відомо і це неважко показати, що для кожного самоспряженого оператора T його резольвентна множина $\rho(T)$ відкрита, а резольвента $R_\lambda(T)$ – аналітична операторна функція на $\rho(T)$. Більш за те, оператори $R_\lambda(T)$, $R_\mu(T)$, $\lambda, \mu \in \rho(T)$ комутують між собою як обмежені оператори, і для них виконується рівність

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\lambda - \mu)R_\lambda(T)R_\mu(T), \quad \lambda, \mu \in \rho(T),$$

яка називається *тотожністю Гільберта*.

Нехай T – симетричний оператор. Число з комплексної площини $\lambda \in \mathbb{C}$ називається точкою *регулярного типу*, якщо існує і обмежений оператор $(T - \lambda)^{-1}$, хоча його область визначення не обов'язково збігається з $\mathcal{H}$, а може утворювати лише підпростір у $\mathcal{H}$. Множина всіх точок регулярного типу симетричного оператора T називається полем регулярності цього оператора.

Легко зрозуміти, що $\lambda \in \mathbb{C}$ – точка регулярного типу оператора T , якщо існує $k > 0$ таке, що

$$\|(T - \lambda)f\| \geq k\|f\|, \quad \forall f \in \mathfrak{D}(T).$$

Як наслідок, справедливе таке твердження.

Для симетричного оператора T у $\mathcal{H}$ усі точки

$$z \in \mathbb{C}, z = \mu + i\lambda, \quad \operatorname{Im}(z) = \lambda \neq 0.$$

регулярного типу.

Є очевидною оцінка:

$$\|(T - z)f\|^2 = \|(T - \mu)f\|^2 + |\lambda|^2\|f\|^2 \geq k\|f\|^2, \quad k = |\lambda|^2.$$

Таким чином, поле регулярності кожного симетричного оператора, це відкрита множина у $\mathbb{C}$, яка містить у собі всі точки $z = \mu + i\lambda$, $\lambda \neq 0$ і складається з однієї або двох зв'язних компонент.

Якщо симетричний оператор T не самоспряжений, $T \neq T^*$, то завдяки його замкнутості, для кожної точки регулярного типу, зокрема для всіх $z \in \mathbb{C}$,

$\operatorname{Im} z \neq 0$, область значень $\mathcal{R}(T - \bar{z})$ замкнений підпростір,

$$\mathcal{M}_z = \mathcal{M}_z^{\text{cl}} = \operatorname{Ran}(T - \bar{z}) \equiv \mathcal{R}(T - \bar{z}) \neq \mathcal{H}.$$

Це випливає з обмеженості і замкненості оператора $(T - \bar{z})^{-1}$. Ортогональне доповнення

$$\mathcal{N}_z := \mathcal{H} \ominus \mathcal{M}_z \neq \{0\}$$

називається *дефектним* підпростором оператора T у точці z . З'ясовується (див. [68]), що розмірність дефектних підпросторів $\mathcal{N}_z \equiv \mathcal{M}_z^\perp$ постійна для всіх z із кожної зв'язної компоненти точок регулярного типу. Пару чисел

$$\mathbf{n}_+ = \dim \mathcal{N}_z, \quad \mathbf{n}_- = \dim \mathcal{N}_{\bar{z}}, \quad \operatorname{Im} z > 0$$

називають *індексами дефекту* оператора T .

Розглянемо детальніше процедуру побудови спряженого оператора. Нехай у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано лінійний необмежений оператор T із щільною областю визначення, $(\operatorname{Dom} T)^{\text{cl}} = \mathcal{H}$. Для кожного такого оператора (незалежно від того, чи він симетричний і замкнений) існує спряжений оператор T^* , який будується так.

Зафіксуємо довільний вектор $g \in \mathcal{H}$. Припустимо, що для цього вектора лінійний функціонал

$$l_g(f) := (Tf, g), \quad f \in \mathfrak{D}(T)$$

неперервний у $\mathcal{H}$. Завдяки щільній визначеності, його можна розширити за неперервністю на весь простір. Тоді за теоремою Ріса він має зображення

$$l_g(f) = (Tf, g) = (f, g^*)$$

з деяким $g^* \in \mathcal{H}$. За означенням, усі вектори g такого сорту утворюють область визначення спряженого до T оператора T^* , а відповідні вектори g^* – область значень:

$$g \in \operatorname{Dom} T^*, \quad T^*g = g^* \in \operatorname{Ran} T^*.$$

Взагалі, може статися, що $\mathfrak{D}(T^*) = \{0\}$. Хоча далі, зазвичай, ми розглядаємо лише оператори T , для яких область визначення спряженого оператора також щільна у $\mathcal{H}$. Якщо до того виконуються і такі умови,

$$\operatorname{Dom} T \subseteq \operatorname{Dom} T^*, \quad Tf = T^*f, \quad f \in \operatorname{Dom} T,$$

то оператор T буде *симетричним*, $T \subseteq T^*$. Якщо $T = T^*$, то оператор T *самоспряжений*. Нагадаємо, що симетричний оператор, який стає самоспряженим після замикання, $T^{\text{cl}} = T^*$, називають *істотно самоспряженим*.

Варто зазначити, що для щільно визначеного оператора T його спряжений з необхідністю замкнений, $(T^*)^{\text{cl}} = T^*$. А якщо T замикальний, то $T^* = (T^{\text{cl}})^*$.

Наголосимо, що для симетричного, але не самоспряженого оператора, його спряжений T^* – обов’язково, розширення T , тобто $T \subset T^*$.

У застосуваннях часто виникають формально симетричні оператори, для яких одразу не ясно, чи вони істотно самоспряжені. Які додаткові властивості симетричного оператора гарантують його самоспряженість? У літературі існує багато достатніх умов (істотної) самоспряженості симетричних, переважно диференціальних операторів у різних постановках і конкретних задачах.

Наступна теорема містить досить прості необхідні і достатні умови самоспряженості.

Теорема 4.1. (*основний критерій самоспряженості*,) *Нехай $T \subseteq T^*$ – щільно визначений симетричний оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Тоді еквівалентні такі три твердження*

- (a) $T = T^*$,
- (b) T – замкнений і $\text{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$,
- (c) $\text{Ran}(T \mp i) = \mathcal{H}$.

Доведення. Покажемо $(a) \implies (b)$. Справді, оператор T замкнений, оскільки T^* замкнений за побудовою, і $T = T^*$.

Припустимо, що для деякого вектора $\varphi \in \text{Dom} T^*$ виконується рівність

$$T^* \varphi = i\varphi \quad (\text{або } T^* \varphi = -i\varphi).$$

Тоді з рівності $T = T^*$ випливає, що $T\varphi = \pm i\varphi$ і

$$\pm i(\varphi, \varphi) = (T\varphi, \varphi) = (\varphi, T^* \varphi) = (\varphi, T\varphi) = \mp i(\varphi, \varphi).$$

Це означає, що $\varphi = 0$. Імплікація $(a) \implies (b)$ доведена.

Доведемо $(b) \implies (c)$. Покажемо, що факт існування у рівняння $T^* \varphi = \pm i\varphi$ лише нульових розв’язків має наслідком щільність області значень $\text{Ran}(T \mp i)$ у $\mathcal{H}$. Справді, якби це було не так, то для $\varphi \perp \text{Ran}(T \pm i)$ виконувалася би рівність

$$((T \pm i)\psi, \varphi) = 0, \forall \psi \in \text{Dom} T.$$

Але тоді виходить, що $\varphi \in \text{Dom} T^*$ і $(T^* \mp i)\varphi = 0$. А завдяки (b) для $\varphi \neq 0$ це неможливо. Отже $(\text{Ran}(T \mp i))^{\text{cl}} = \mathcal{H}$. Навпаки, очевидно, що щільність $(\text{Ran}(T \mp i))$ у $\mathcal{H}$ приводить до того, що $\text{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$. Далі із рівності

$$\|(T \mp i)\varphi\|^2 = \|T\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2$$

впливає, що внаслідок замкненості оператора T , отримуємо

$$\text{Ran}(T \mp i) = \mathcal{H}.$$

Встановимо нарешті імплікацію $(c) \implies (a)$. Нехай $\varphi \in \text{Dom} T^*$. Оскільки $T \subseteq T^*$ і $\text{Ran}(T \mp i) = \mathcal{H}$, то для будь-якого $\varphi \in \mathfrak{D}(T^*)$ існує вектор $\eta \in \text{Dom} T$, такий що

$$(T \pm i)\eta = (T^* \pm i)\varphi.$$

Тому $(T^* \pm i)(\varphi - \eta) = 0$. Використовуючи вже установлений факт $\text{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$, робимо висновок, що $\varphi - \eta = 0$. Це означає, що $\varphi = \eta$, тобто $\text{Dom} T = \text{Dom} T^*$ і $T = T^*$.

Зауважимо, що для симетричного оператора, який не замкнений, із щільності $\text{Ran}(T \mp i)$ у $\mathcal{H}$ випливає $\text{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$. У такому разі умову (c) можна переписати у так:

$$(c') \text{Ran}(T \mp i)^{\text{cl}} = \mathcal{H}.$$

Це означає, що для істотно самоспряженого оператора множина $\text{Ran}(T \mp i)$ щільна у $\mathcal{H}$. Лише для самоспряженого оператора виконується рівність $\text{Ran}(T \mp i) = \mathcal{H}$. Справді, завдяки замкненості T , якщо послідовність $\varphi_n \in \text{Dom} T$ збігається до φ і послідовність $T\varphi_n$ збіжна, то $\varphi \in \text{Dom} T$ і вектор $\psi = (T \mp i)\varphi \in \text{Ran}(T \mp i)$. Але збіжність $\psi_n = (T \mp i)\varphi_n$ еквівалентна збіжності двох послідовностей φ_n і $T\varphi_n$. Отже $(\text{Ran}(T \mp i))^{\text{cl}} = \text{Ran}(T \mp i) = \mathcal{H}$.

Опишемо коротко зміст одного із варіантів теорії розширень симетричних операторів створеного взагалі фон Нейманом.

Нехай $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}^*$ – замкнений симетричний (але не самоспряжений) оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Завдяки симетричності $\mathbf{A}$ для кожної точки $z \in \mathbb{C}$, $\text{Im} z \neq 0$ виконується нерівність

$$\|(\mathbf{A} - z)\varphi\|^2 \geq b^2\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbf{A}), \quad z = a + ib, \quad b \neq 0.$$

З цієї нерівності випливає, що відображення

$$(\mathbf{A} - \bar{z})^{-1} : \mathcal{M}_z \longrightarrow \mathfrak{D}(\mathbf{A})$$

замкнені обмежені оператори, визначені на підпросторі

$$\mathcal{M}_z := \text{Ran}(\mathbf{A} - \bar{z}) \neq \mathcal{H}.$$

Зрозуміло, що цей підпростір замкнений. Отже такий оператор $(\mathbf{A} - \bar{z})^{-1}$ обмежений, хоча і не щільно визначений у $\mathcal{H}$. Далі, оскільки $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^*$, то підпростір

$$\mathcal{N}_z = \mathcal{M}_z^\perp = \mathcal{H} \ominus \mathcal{M}_z \neq \{0\}.$$

Неважко зрозуміти, що цей підпростір складається із власних векторів спряженого до $\mathbf{A}$ оператора:

$$\mathbf{A}^* \eta_z = z \eta_z, \quad \eta_z \in \mathcal{N}_z.$$

Отже

$$\mathcal{N}_z = \text{Ker}(\mathbf{A}^* - z).$$

За означенням $\mathcal{N}_z$ називається дефектним підпростором оператора $\mathbf{A}$ у точці z . Розмірність $\dim \mathcal{N}_z =: \mathbf{n}_z$ – числова характеристика несамоспряженості оператора $\mathbf{A}$. Відомо, що значення $\mathbf{n}_z$ стає при зміні z у відкритій верхній $\mathbb{C}_+$ та відкритій нижній $\mathbb{C}_-$ півплощинах $\mathbb{C}$. Отже дефект несамоспряженості оператора $\mathbf{A}$ характеризується двома числами (індексами дефекту оператора $\mathbf{A}$):

$$\mathbf{n}_+ = \dim \mathcal{N}_z, \quad \mathbf{n}_- = \dim \mathcal{N}_{\bar{z}}, \quad \text{Im} z > 0.$$

Взагалі $\mathbf{n}_+, \mathbf{n}_-$ можуть бути довільними цілими числами, і навіть дорівнювати $+\infty$.

Неважко зрозуміти, що у симетричного оператора $\mathbf{A}$ існують самоспряжені розширення у $\mathcal{H}$, лише якщо

$$\mathbf{n}_+ = \mathbf{n}_-. \quad (4.1)$$

Ця рівність виконується автоматично для обмеженого знизу оператора, тобто, якщо $(\mathbf{A}\varphi, \varphi) \geq m\|\varphi\|^2$. У цьому разі розмірність $\dim \mathcal{N}_z$ однакова і постійна для всіх $z \in \mathbb{C} \setminus [m, \infty)$.

Зрозуміло, що для самоспряженого оператора індекси дефекту дорівнюють нулю: $\mathbf{n}_- = \mathbf{n}_+ = 0$.

Задача, яку ми тут розглядаємо, полягає у такому. Ми хочемо описати множину всіх обмежених знизу самоспряжених розширень оператора $\mathbf{A}$. Позначимо, цю множину через $\mathcal{A}(\mathbf{A})$. Але переважно ми аналізуємо обмежені знизу розширення $\tilde{A} \in \mathcal{A}(\mathbf{A})$, для яких існують зворотні $\tilde{A}^{-1}$, і вони обмежені, визначені на усьому $\mathcal{H}$ оператори. Цю родину операторів ми позначаємо через $\mathcal{A}_{\neq 0}(\mathbf{A})$. Тобто

$$\mathcal{A}_{\neq 0}(\mathbf{A}) := \{\tilde{A} \geq m > -\infty \mid \mathbf{A} \subset \tilde{A} = \tilde{A}^* \subset \mathbf{A}^*, \mathfrak{D}(\tilde{A}^{-1}) = \mathcal{H}\}.$$

Підмножину додатних розширень операторів з $\mathcal{A}_{\neq 0}(\mathbf{A})$ позначаємо через $\mathcal{A}_+(\mathbf{A})$.

Факт існування хоча б одного самоспряженого розширення $\tilde{A}$ в обмеженого знизу симетричного оператора $\mathbf{A}$, причому такого, що $m_{\tilde{A}} = m_{\mathbf{A}}$, стверджував ДЖ. фон Нейман – один із творців теорії операторів і квантової механіки. Пізніше М. Н. Стоун та К. Фрідріхс довели цей факт, а М. Крейн описав усю множину додатних самоспряжених розширень додатного симетричного оператора.

Якщо оператор $\mathbf{A} \geq 1$, то побудувати його самоспряжене розширення із збереженням нижньої грані найлегше методом оснащених просторів. З цією метою розглянемо квадратичну форму

$$\gamma_{\mathbf{A}}[\varphi] = (\mathbf{A}\varphi, \varphi), \quad \varphi \in \text{Dom}\mathbf{A}.$$

Зауважимо, що внаслідок необмеженості оператора $\mathbf{A}$ квадратична форма $\gamma_{\mathbf{A}}$ з $Q(\gamma_{\mathbf{A}}) = \text{Dom}\mathbf{A}$ не замкнена, навіть якщо $\mathbf{A}$ – замкнений оператор. Замикання форми $\gamma_{\mathbf{A}}$ позначимо через γ_{∞} , тобто $\gamma_{\infty} = \gamma_{\mathbf{A}}^{\text{cl}}$. Зрозуміло, що $\gamma_{\infty} \geq 1$. Визначимо $A_{\infty} \geq 1$ як оператор, асоційований з квадратичною формою γ_{∞} . Побудова A_{∞} методом оснащених просторів проводиться так.

За квадратичною формою γ_{∞} вводиться гільбертів простір $\mathcal{H}_1$ з нормою $\|\varphi\|_1 = (\gamma_{\infty}[\varphi])^{1/2}$. Цей простір збігається з областю визначення форми γ_{∞} завдяки її замкненості:

$$\mathcal{H}_1 = \text{Dom}\gamma_{\infty} \equiv Q(\gamma_{\infty}).$$

Оскільки $\gamma_{\infty} \geq 1$, то гільбертів простір $\mathcal{H}_1$ – позитивний, відносно $\mathcal{H}$ у сенсі Ю. М. Березанського, тобто $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_1$. Тому пара $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ утворює передоснащений простір (див. далі розділ 4). Він єдиним чином продовжується до оснащеного:

$$\mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1. \quad (4.2)$$

Тепер A_{∞} будується як звуження канонічного ізоморфізму Березанського $D_{-1,1} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$. А саме,

$$A_{\infty} = D_{-1,1} \upharpoonright \mathfrak{D}(A_{\infty}), \quad \mathfrak{D}(A_{\infty}) = \{\varphi \in \mathcal{H}_1 \mid D_{-1,1}\varphi \in \mathcal{H}\}. \quad (4.3)$$

Оператор A_{∞} називається розширенням за Фрідріхсом оператора $\mathbf{A}$, або, у термінології М. Крейна, жорстким розширенням. Зрозуміло, що у кожного обмеженого знизу симетричного оператора існує його самоспряжене розширення за Фрідріхсом.

У фундаментальній роботі М. Крейна встановлено низку важливих результатів про додатні самоспряжені розширення довільного додатного симетричного оператора. У теоремі ми формулюємо деякі з цих результатів, які далі використовуються для опису множини $\tilde{A} \in \mathcal{A}_+(\mathbf{A})$.

Теорема 4.2.. *Нехай $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}^*$, $\mathbf{A} \geq 1$ – необмежений замкнений симетричний оператор у $\mathcal{H}$. Тоді стверджується, що у множині $\mathcal{A}_+(\mathbf{A})$ усіх додатних самоспряжених розширень оператора $\mathbf{A}$ існує пара екстремальних: A_0 – мінімальний та A_∞ – максимальний, який збігається з розширенням за Фрідріхсом. Решта операторів $\tilde{A}$ з $\mathcal{A}_+(\mathbf{A})$ задовольняють нерівність М. Крейна:*

$$A_0 \leq \tilde{A} \leq A_\infty, \quad \tilde{A} \in \mathcal{A}_+(\mathbf{A}). \quad (4.4)$$

При цьому оператор A_∞ єдиний серед усіх $\tilde{A} \in \mathcal{A}_+(\mathbf{A})$, який має властивість:

$$\text{Dom} A_\infty \subseteq \text{Dom} \gamma_\infty. \quad (4.5)$$

Зауважимо, що в наслідок теореми

$$\text{Dom} A_\infty^{1/2} = \text{Dom} \gamma_\infty \quad (4.6)$$

Таким чином, згідно з теорією М. Крейна у множині $\mathcal{A}_+(\mathbf{A})$ можна ввести часткове впорядкування. Нагадаємо, що для пари операторів $A_1, A_2 \in \mathcal{A}_+(\mathbf{A})$ пишуть, $A_1 \leq A_2$, якщо для якоїсь (а отже і для кожної) спільної регулярної точки a з $\mathbb{R}^1$ виконується нерівність

$$((A_1 - a)^{-1}h, h) \geq ((A_2 - a)^{-1}h, h), \quad \forall h \in \mathcal{H}. \quad (4.7)$$

Зокрема, у разі, коли $\mathbf{A} \geq 0$, згідно з теорією М. Крейна, у множині його додатних самоспряжених розширень існує пара екстремальних операторів: A_0 – найменший і A_∞ – найбільший у сенсі введеної вище впорядкованості. Хоча варто зазначити, що для оператора $\mathbf{A} \geq 0$ може статися, що $A_0 = A_\infty$. Це означає, що існує лише єдине невід’ємне самоспряжене розширення. Зрозуміло, що у нашому разі, коли $\mathbf{A} \geq 1$, існує континуум додатних розширень. У літературі оператор A_0 називається розширенням за М. Крейном. Цей оператор фіксується рівністю $A_0 \mathcal{N}_0 = 0$. Друге екстремальне розширення A_∞ звичайно називається розширенням за Фрідріхсом, хоча його незалежно вводили багато авторів. За побудовою оператор A_∞ максимальним у множині $\mathcal{A}_+(\mathbf{A})$, тобто $\tilde{A} \leq A_\infty$ для всіх $\tilde{A} \in \mathcal{A}_+(\mathbf{A})$. Легко бачити, що він має ту саму нижню грань, що й оператор $\mathbf{A}$.

Далі ми продовжуємо досліджувати самоспряжені розширення простого симетричного оператора $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}^*$, $\mathbf{A} \geq 1$ у $\mathcal{H}$. Нагадаємо, що для кожного дійсного числа $a < 1$ підпростір

$$\mathcal{N}_a = \mathcal{M}_a^\perp, \quad \mathcal{M}_a := \text{Ran}(\mathbf{A} - a)$$

складається із власних векторів спряженого оператора $\mathbf{A}^*$

$$\mathbf{A}^* \eta_a = a \eta_a, \quad \forall \eta_a \in \mathcal{N}_a. \quad (4.8)$$

Нехай задано $\mathbf{A} \subset \mathbf{A}^*$, $\mathbf{A} \geq 1$. Тоді для кожного дійсного числа $a < 1$ існує самоспряжене розширення $\tilde{A} = A_a \in \mathcal{A}_+(\mathbf{A})$ з нижньою гранню $m_{\tilde{A}} = a$. При цьому

$$A_a \eta_a = a \eta_a, \quad \eta_a \in \mathcal{N}_a. \quad (4.9)$$

Оператор $\tilde{A} = A_a$ визначаємо на

$$\text{Dom} A_a = \text{span}\{\text{Dom} \mathbf{A}, \mathcal{N}_a\},$$

за лінійністю, беручи до уваги розширення оператора $\mathbf{A}$, заданого рівностями

$$A_a \varphi = \mathbf{A} \varphi, \varphi \in \text{Dom} \mathbf{A}, \quad A_a \eta_a = a \eta_a, \quad \eta_a \in \mathcal{N}_a. \quad (4.10)$$

За побудовою $A_a \subset A^*$ (див. (4.8)). Легко перевірити, що A_a – самоспряжений оператор, $A_a = A_a^*$. Справді, з (4.10) випливає, що A_a розкладається на ортогональну суму двох самоспряжених операторів: оператора $A_a P_{\mathcal{M}_a}$ у підпросторі $\mathcal{M}_a$, що діє за правилом

$$A_a P_{\mathcal{M}_a} \varphi = \mathbf{A} \varphi - a P_{\mathcal{N}_a} \varphi, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\mathbf{A}),$$

та оператора множення на a у $\mathcal{N}_a$. Самоспряженість першого у $\mathcal{M}_a$ випливає з того, що $\text{Ran}(\mathbf{A} - a) = \mathcal{M}_a$. Неважко показати, що оператор A_a мінімальний серед усіх самоспряжених розширень з умовою $\tilde{A} \geq a$.

Таким чином, у симетричного оператора $\mathbf{A} \geq 1$, а отже і у кожного обмеженого знизу симетричного оператора $\mathbf{A}$ існує континуум різних самоспряжених розширень A_a , $a < m_{\mathbf{A}}$. Хоча, очевидно, що множина $\{\mathbf{A} \subset A_a = A_a^* \subset \mathbf{A}^* \mid a < m_{\mathbf{A}}\}$ не вичерпує всіх самоспряжених розширень оператора $\mathbf{A}$. Зокрема до цієї множини не належить розширення за Фрідріхсом A_∞ . Опишемо цей оператор у випадку довільної нижньої грані $m_{\mathbf{A}}$. Характерна властивість оператора A_∞ полягає у тому, що його нижня грань така сама як і в оператора $\mathbf{A}$:

$$m_{A_\infty} = m_{\mathbf{A}}. \quad (4.11)$$

Хоча, взагалі, оператор $\mathbf{A}$ може мати й інші самоспряжені розширення, які зберігають нижню грань. У роботі М. Крейна знайдено критерій, коли (4.11) виконується лише для A_∞ .

У разі $m_{\mathbf{A}} < 1$ для побудови A_∞ на $\text{Dom}(A)$ вводиться додатна форма

$$\chi_1(\varphi, \psi) = \gamma_{\mathbf{A}}(\varphi, \psi) + (1 - m_{\mathbf{A}})\chi(\varphi, \psi), \quad (\chi[\cdot] = \|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2).$$

Замикальність форми χ_1 доводиться перевіркою критерію замикальності. Нехай $\varphi_n \in \text{Dom}\mathbf{A}$, $\varphi_n \rightarrow 0$ у $\mathcal{H}$ і $\chi_1[\varphi_n - \varphi_m] \rightarrow 0$. Тоді, використовуючи операторне зображення $\gamma_{\mathbf{A}}(\cdot, \cdot) = (\mathbf{A}\cdot, \cdot)$, доходимо висновку, що $\chi_1[\varphi_n] \rightarrow 0$. Тепер, за теоремою 4.1, з формою χ^{cl} асоційовано самоспряжений оператор $A' \geq 0$. Оператор A_∞ визначається як $A' - (1 - m_{\mathbf{A}})\mathbf{1}$. За побудовою нижня грань m_{A_∞} така сама як і нижня грань оператора $\mathbf{A}$. При цьому $\gamma_\infty[\cdot] := (\gamma_{\mathbf{A}}[\cdot])^{\text{cl}}$. Нарешті, якщо припустити існування ще одного самоспряженого розширення $\tilde{A}$, для якого $\text{Dom}\tilde{A} \subseteq \text{Dom}\gamma_\infty$, то легко бачити, що $\tilde{A} \subseteq A_\infty$. Завдяки самоспряженості це означає, що $\tilde{A} = A_\infty$.

Тепер задачу про опис операторів $\tilde{A} \in \mathcal{A}_+(\mathbf{A})$ (їх параметризацію) ми зводимо до установлення зв'язку між кожним оператором $\tilde{A}$ і A_∞ на основі закону часткового впорядкування (4.4). Далі заради спрощення ми дещо звужуємо задачу і розглядаємо не всі оператори з множини $\mathcal{A}_+(\mathbf{A})$, а лише взаємно прості з A_∞ відносно $\mathbf{A}$. Це означає, що симетричний оператор $\mathbf{A}$ – максимальна спільна частина для пари $\tilde{A}$ і A_∞ . Тобто множина

$$\mathfrak{D} = \{\varphi \in \text{Dom}\tilde{A} \cap \text{Dom}A_\infty \mid \tilde{A}\varphi = A_\infty\varphi\}$$

збігається з областю $\text{Dom}\mathbf{A}$:

$$\tilde{A} \upharpoonright \mathfrak{D} = A_\infty \upharpoonright \mathfrak{D} = \mathbf{A}. \quad (4.12)$$

5 ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ КОНФЛІКТУ ТА ЇХ ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ

5.1 Спектральна теорія динамічних систем конфлікту

В монографії [56] "Спектральна теорія динамічних систем конфлікту" послідовно викладається новий математичний підхід до опису конфліктних процесів у моделях складних систем у термінах спектральної теорії. Підхід ґрунтується на інтерпретації протилежних сторін конфлікту як імовірнісних розподілів (мір) на спірній території. В основу формули конфліктної динаміки закладено принцип незнищенності опонента. Результатом конфліктної боротьби є не знищення опонента, а встановлення компромісу у формі рівноважного стану. Опис граничних компромісних станів здійснюється в термінах спектральних характеристик імовірнісних розподілів.

Більш детально, в абстрактному випадку досліджуємо еволюційне рівняння складної системи:

$$d/dtX = HX - KX, t \geq 0,$$

де стан системи $X(t) = \mu(t), \nu(t)$ складається щонайменше з двох компонент, H – генератор вільної еволюції (без конфлікту), K – конфліктна (нелінійна) взаємодія між компонентами складної системи. Сама складна система об'єднує не менше двох опонентів, скажімо, A і B , яким ставиться у відповідність пара імовірнісних мір μ, ν на просторі конфлікту Ω .

У підході, що розвивається в цій монографії, величини P, R , які звичайно мають зміст кількості певних популяцій, замінюються на векторні:

$$P, R \rightarrow p = (p_1, \dots, p_n), r = (r_1, \dots, r_n), n > 1,$$

координати яких мають статистичний сенс. А у загальнішому випадку величинам P, R відповідають імовірнісні міри:

$$P, R \rightarrow \mu, \nu.$$

Закон популяційного розвитку і боротьби узагальнюється і записується як універсальні системи різницевих або диференціальних рівнянь. Їх можна трактувати як узагальнені векторні варіанти рівнянь Лотки – Вольтерри.

В абстрактному випадку тут досліджуються динамічні системи конфлікту, які описують еволюцію конфліктної боротьби між парою опонентів чи протидіючих сторін, скажімо, А і В. Схематично траєкторії такої системи можна зобразити як

$$\left\{ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} \right\} \xrightarrow{*, t} \left\{ \begin{array}{c} A^t \\ B^t \end{array} \right\},$$

де $*$, t позначає конфліктне перетворення на момент часу t .

Двовимірні математичні моделі ДСК відомі як автономні динамічні системи на площині. Вони задаються парою нелінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = f(x, y) \quad \dot{y} = g(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^1, \quad (5.1)$$

де f, g – диференційовні функції. Існує змістовна нетривіальна наука про такі автономні системи (див., наприклад, популярний огляд Епштейна, фундаментальні монографії Колмогорова чи Арнольда. Важливо, що внаслідок нелінійності неможливо сподіватися на побудову загального розв'язку для системи (5.1), тому її дослідження є нетривіальною задачею. Але завдяки тому, що ця система є плоскою, вдається здобути досить багато тонких математичних результатів.

Зокрема, низку цікавих якісних результатів одержано методом лінеаризації системи (5.1) в околі рівноважної точки. Припустімо, що точка $\bar{x}, \bar{y}$ є рівноважною:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = 0 = g(\bar{x}, \bar{y}).$$

Тоді замість (5.1) на першому етапі досліджується лінійна система в околі рівноважної точки:

$$\dot{x} = f(\bar{x}, \bar{y}) + f'_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + f'_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}), \quad (5.2)$$

$$\dot{y} = g(\bar{x}, \bar{y}) + g'_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + g'_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}).$$

Цю систему можна переписати у вигляді

$$\dot{p} = J(\bar{x}, \bar{y})p, \quad p = \{p_1, p_2\}, \quad p_1 = x - \bar{x}, p_2 = y - \bar{y},$$

де

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} \partial_x f & \partial_y f \\ \partial_x g & \partial_y g \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

позначає якобіан векторного поля $F = (f(x, y), g(x, y))$ в точці $\bar{x}, \bar{y}$, або зобразити абстрактно:

$$\dot{y} = A y, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ik} \in \mathbb{C}, \quad (5.4)$$

як стандартну лінійну систему. І навіть це лінійне спрощення є дуже змістовним. Особливо цікавими є дослідження лінійних та нелінійних систем в околі гіперболічної рівноважної точки, коли усі власні значення якобіана $DF(x_{\text{eq}})$ мають ненульові дійсні компоненти. Саме до цього випадку належить відома теорема Хартмана – Гробмана, яка стверджує топологічну еквівалентність поведінки нелінійної системи (5.1) та її лінеаризованого варіанту (5.2) в деякому околі рівноважної точки.

Надзвичайно цікавим і популярним результатом плоскої задачі є теорема Пуанкаре – Бендіксона, яка стверджує, що траєкторія $x_1(t), x_2(t)$, $t > 0$ з необхідністю наближається до граничного циклу, якщо вона повністю розташована в компактї і нерухома точка відсутня.

Тут доречно нагадати про частину 16 проблеми Гільберта, в якій поставлено питання про максимальну кількість циклічних орбіт у системи (5.1), коли функції f, g є поліномами фіксованого степеня.

До проблем існування граничних рухомих асимптотичних станів, їх стабільності, існування циклічних орбіт, порогів біфуркацій, фаз можливої хаотичної поведінки належать відомі результати Пуанкаре, Ляпунова, Хопфа. Потужний метод досліджень ґрунтується на використанні відображення Пуанкаре. Добре відомими є теорема Бендіксона – Дугласа про відсутність замкнених траєкторій і твердження Рогозкіна про відсутність циклів.

5.2 Побудова моделей динамічних систем конфлікту

В роботах [57, 60, 61, 63, 65, 66] побудовано ряд конкретних моделей динамічних систем конфлікту та досліджено їх властивості.

Для кожної з математичних моделей складних конфліктних систем виведені свої еволюційні рівняння, досліджена динаміка в часі, доведено існування нерухомих станів, описана їх структура.

Зокрема, побудована і досліджується математична модель соціуму у вигляді багатокomпонентної динамічної системи, генератор якої відповідає конфліктній взаємодії між індивідами. Поведінка індивідів залежить від вели-

чини початкової соціальної енергії та двома стратегічними параметрами – активністю конфліктної взаємодії та зв'язками з локальним оточенням. Для класу моделей соціуму, в яких можливість вибору стратегій відсутня, доведена теорема про повну перемогу найсильнішого. В цьому випадку виконується принцип "переможець отримує все". В класі моделей, де стратегічний параметр активності конфліктної взаємодії можна регулювати, знайдено достатні умови для зростання соціальної енергії з довільно низького початкового рівня. Зокрема показано, що існує стратегія виживання і навіть перемоги для кожного індивіда. Для ілюстрації результатів наведено приклади з комп'ютерними симуляціями.

Побудова, дослідження та аналіз математичних моделей, які описують динаміку змагальних і конфліктних процесів у суспільстві, а також знаходження умов компромісу, об'єднання чи консенсусу – є трендами сучасної прикладної науки.

Звичайно, поведінка індивіда у суспільстві у значній мірі визначається прийняттям рішення (часто стихійним) щодо вибору оптимальної стратегії. При цьому, використовується певна модель соціальної системи. У більшості випадків така модель є інтуїтивною. Зрозуміло, що успішний результат можна забезпечити лише адекватна математична модель на основі наукового передбачення. Тому математичне моделювання є потужним інструментом для прогнозу соціальних подій та розв'язання перспективних проблем сучасного суспільства.

Математичні моделі соціальних явищ можна поділити на два класи, детерміністичні та ймовірнісні. Моделі першого типу дають передбачення про кількісне значення певних характеристик стану системи у фіксований момент часу. Другий тип моделей дає ймовірнісну оцінку різним станам системи.

Більшість відомих моделей належить до першого класу і ґрунтуються на явних, часом досить складних формулах динаміки, які призначені дати конкретний опис явищу, що досліджується. Але деталізація конкретних моделей звужує можливість їх використання при змінених умовах. Тому виникає потреба у побудові загальних моделей із ймовірнісною інтерпретацією.

Вибір формул і рівнянь (законів), які описують динаміку конфліктних взаємодій між індивідами є головним пунктом при побудові моделей складних систем суспільства. Ці формули мають бути максимально простими, універсальними та одночасно адекватними реальній картині. Лише тоді їх

використання, з одного боку, буде підтверджувати спостереження, а з другого, передбачати нові, навіть несподівані явища та ефекти.

В роботі [60] ми будуємо елементарно просту математичну модель соціуму, як багатокомпонентної динамічної системи, на основі теорії динамічних систем конфлікту розвинутої в попередніх роботах. Ця модель описує еволюцію імовірності для кожного індивіда володіти певним запасом соціальної енергії у конфліктному середовищі.

Ми розглядаємо декілька варіантів формули конфліктової взаємодії. В першу чергу ми досліджуємо грубий (дикий) стихійний конфлікт між окремим індивідом та суспільним конкурентним оточенням. Більш досконалий варіант моделі включає в себе стратегічні параметри сили конфліктної взаємодії та зв'язки із іншими індивідами. При цьому модель настільки ускладнюється, що виявлені ефекти неможливо охопити в одній роботі.

Тому тут ми обмежуємося лише деякими випадками. А саме, спочатку досліджуємо динаміку перерозподілу соціальної енергії між конфліктуючими індивідами без введення параметрів взаємодії та зв'язків (модель стихійного соціуму). В цьому варіанті моделі, як правило, виникає єдиний переможець, той хто був найсильнішим в початковий момент часу. Ми помічаємо, що на зростання (чи втрату) соціальної енергії впливає величина (сила) конфліктної активності індивіда. Зокрема, якщо цей параметр має нульове значення, то індивід взагалі не втрачає свою енергію, а лише накопичує. Параметр сили конфліктної активності є стратегічним. Можливість його вибору перетворює модель стихійного соціуму в модель керованого конфліктного процесу. Показано, що в цьому випадку індивід з незначною початковою соціальною енергією може стати переможцем, якщо обере "правильну" стратегію регулювання параметру сили конфліктної активності.

Отже, в роботі проведено аналіз поведінки переможця і на конкретних прикладах продемонстровано розв'язок проблеми вибору стратегії виживання для окремого індивіда. Доведена теорема існування рівноважних нерухомих станів, досліджені умови їх стійкості. Як наслідок, знайдено умови виживання для індивіда з довільно малою початковою соціальною енергією. Показано, що математичні питання для моделі навіть лише з трьома індивідами є нетривіальними.

Елементарна модель соціуму. Нехай $\mathcal{A} = \{a_i\}_{i=1}^m$, $1 < m < \infty$ позначає деяку множину подібних елементів, які відповідають конкуруючим індивідам

абстрактного суспільства. Далі множину $\mathcal{A}$ називаємо соціумом, а елементи a_i індивідами. Тут m це кількість елементів, вона скінчена, але може бути як завгодно великою. Можна вважати, що a_i відповідає не лише окремому індивіду у суспільстві, але і деякому об'єднанню (соціальному кластеру індивідів).

Ми припускаємо, що соціум $\mathcal{A}$ є конфліктним у тому сенсі, що між його індивідами відбувається конкурентна взаємодія, в ході якої кожен індивід прагне зберегти та збільшити свій запас соціальної енергії за рахунок інших. Варто пояснити це більш детально.

Вважаємо, що в найпростішому випадку, тільки який тут і розглядається, кожному індивіду a_i в початковий момент поставлено у відповідність деякий соціальний (життєвий) ресурс $P_i > 0$. Отже, в елементарній моделі соціуму з кожним індивідом a_i асоційовано залежну від часу одновимірну числову величину P_i , характеристику соціальної енергії індивіда або його статусу в соціальному оточенні:

$$a_i \sim P_i(t).$$

Значення P_i є додатними та обмеженими. Далі досліджується перерозподіл соціальної енергії в моменти конфліктної взаємодії. Припускаємо, що повний запас соціальної енергії всієї системи не змінюється в часі, тобто є фіксованим: $\sum_{i=1}^m P_i(t) = P = \text{const}$.

Нехай в кожен момент дискретного часу $t = 1, 2, \dots$ між індивідами a_i відбувається акт конфліктної боротьби, внаслідок якої індивідуальна соціальна енергія P_i змінюється (перерозподіляється) по певному закону. Якщо позначити через $*$ фіксований закон цього перерозподілу, то виникає складна багато-компонентна динамічна система,

$$\{P_i(0)\} \xrightarrow{*,t} \{P_i(t)\}, \quad t > 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Далі ми конкретизуємо відображення $*$ і детально досліджуємо поведінку $P_i(t)$, зокрема, і в залежності від специфіки індивідуальної стратегії конфліктної боротьби. А саме, ми розглядаємо такі ситуації: **(1)** грубий конфлікт кожного з усіма, **(2)** ефекти, що залежать від вибору величини (сили) конфліктної активності.

Підкреслимо, що ми розвиваємо ймовірнісний підхід і тому замість кількісних величин P_i використовуємо значення соціальної енергії нормовані на

одиницю, $p_i = P_i/P$. Рівняння динаміки виписуємо в термінах стохастичних векторів $\mathbf{p}(t) = \{p_i(t)\}_{i=1}^m$, тому для усіх $t \geq 0$ виконується умова, $\sum_{i=1}^m p_i(t) = 1$.

Говоримо, що соціум $\mathcal{A}$ є *цілком конфліктним*, якщо для кожного індивіда a_i його конкуруюче оточення складається з множини усіх інших індивідів $\mathcal{A}_i^\perp := \{a_k\}_{k \neq i}$. Тоді виконується принцип – один проти всіх, або, кожен сам за себе. В такому випадку соціальна енергія оточення для a_i є сумою енергій усіх індивідів з $\mathcal{A}_i^\perp$. Позначимо її $R_i = \sum_{k \neq i} P_k$. Набору величин R_i відповідає стохастичний вектор $\mathbf{r} = \{r_i\}_{i=1}^m$ з координатами $r_i := R_i/R$, де $R = \sum_{i=1}^m R_i$. Очевидно, $r_i \geq 0$ та $\sum_{i=1}^m r_i = 1$.

Введемо закон конфліктної взаємодії між окремим індивідом a_i та оточенням $\mathcal{A}_i^\perp$ у цілком конфліктному соціумі. З цією метою зафіксуємо довільний стохастичний вектор $\mathbf{p} \in \Delta^{m-1}$, де Δ^{m-1} позначає $(m-1)$ -мірний симплекс в $\mathbb{R}_+^m$. Вектор $\mathbf{p}$ задає стартовий ($t = 0$) розподіл нормованої на одиницю соціальної енергії між m індивідами соціуму. Найпростіший варіант закону конфліктного перерозподілу соціальної енергії (закон конфліктної взаємодії) в термінах координат має вигляд:

$$p_i^1 = \frac{p_i(1-r_i)}{z}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (5.5)$$

де $r_i := (1-p_i)/(m-1)$, а $z = 1 - \sum_{k=1}^m p_k r_k$ – нормувальний знаменник. Тут p_i^1 позначає координати нового стохастичного вектора $\mathbf{p}^1 \in \Delta^{m-1}$, який задає розподіл соціальної енергії між індивідами a_i після першого акту конфліктної взаємодії в системі.

Ітерація в дискретному часі закону конфліктної взаємодії (5.5),

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1-r_i^t)}{z^t}, \quad r_i^t = \frac{1-p_i^t}{m-1}, \quad p_i^{t=0} \equiv p_i, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.6)$$

породжує деяку траєкторію в термінах стохастичних векторів:

$$\Delta^{m-1} \ni \mathbf{p}^t \xrightarrow{*,t} \mathbf{p}^{t+1} \in \Delta^{m-1}. \quad (5.7)$$

Зрозуміло, що задане формулами (6.17) перетворення $*$ в (5.7) залишає симплекс Δ^{m-1} інваріантним. Динамічну систему в Δ^{m-1} породжену цим перетворенням ми звемо динамічною системою конфлікту.

Складніший закон взаємодії у соціумі має вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t - c_i \cdot (\sum_{k=1}^m s_{ik} p_k^t) r_i^t}{z^t}, \quad r_i^t = \frac{1-p_i^t}{m-1}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.8)$$

і включає в себе параметри c_i сили конфліктної взаємодії та матрицю стратегічних зв'язків між індивідами $S = \{s_{ik}\}$. В цій роботі ми обмежуємося лише випадком одиничної матриці, $S = I$.

5.3 Існування інваріантних станів

Далі показано, що у динамічній системи з найпростішою формулою конфліктної взаємодії, яка моделює еволюцію цілком конфліктного соціуму, існує рівноважний граничний стан (fixed point) при $t \rightarrow \infty$. Цьому стану відповідає індивід (єдиний переможець), який мав найбільший соціальний статус в початковий момент часу, усі інші індивіди втрачають повністю свою соціальну енергію (гинуть). Це типова ситуація притаманна соціальним моделям, в яких панує принцип, "кожен проти всіх, або сам за себе" і справджується відомий ефект: "переможець забирає все". Тим більше, у примітивному (дикому) соціумі індивід з найбільшою початковою соціальною енергією (найвищим статусом) неминуче збільшує свій потенціал, знищуючи своїх опонентів в конкурентній боротьбі. Стихійна еволюція такої системи наближається до нерухомої граничної точки, яка є стійкою. Цей математичний результат має соціальну інтерпретацію про існування диктатора в закритому суспільстві.

Для встановлення описаного результату в математичній формі перепишемо першу формулу в (6.17) використовуючи $r_i^t = (1 - p_i^t)/(m - 1)$ у вигляді

$$p_i^{t+1} = p_i^t(1 - \delta_i^t), \quad \delta_i^t := \frac{L^t - p_i^t}{m - 2 + L^t}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.9)$$

де

$$L^t := \sum_k (p_k^t)^2 \equiv \|\mathbf{p}^t\|^2.$$

Або інакше

$$p_i^{t+1} = p_i^t k_i^t, \quad k_i^t = \frac{m - 2 + p_i^t}{m - 2 + L^t}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.10)$$

Рівняння (6.18) (5.9) можна також переписати у вигляді

$$p_i^{t+1} = k_i^t \cdot p_i^t = \prod_{\tau=0}^t k_i^\tau \cdot p_i = \prod_{\tau=0}^t (1 + \delta_i^\tau) \cdot p_i.$$

Наступні твердження легко випливають з наведених формул.

Якщо у вектора $\mathbf{p} \in \Delta^{m-1}$, $m > 1$ якась пара координат має однакові значення, $p_i = p_k$, то ця властивість не змінюється з часом, тобто зберігається

рівність координат, $p_i^t = p_k^t$, $t = 1, 2, \dots$. Якщо ж для якоїсь пари координат виконується нерівність $p_i < p_k$, $i \neq k$, то така ж нерівність виконується і для усіх $t \geq 1$.

Твердження 5.1.

$$p_i^t \leq p_k^t \implies p_i^{t+1} \leq p_k^{t+1}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.11)$$

де $p_i^0 \equiv p_i$, $p_k^0 \equiv p_k$.

Як наслідок, можна стверджувати, що конфліктна взаємодія у соціумі задана законом (5.5) не змінює упорядкованість індивідів a_i визначену початковими рівнями їхніх соціальних статусів:

$$0 \leq p_{i_1} \leq p_{i_2} \leq \dots \leq p_{i_m} \leq 1 \implies 0 \leq p_{i_1}^t \leq p_{i_2}^t \leq \dots \leq p_{i_m}^t \leq 1, \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Прямо з (5.9) видно, що знак величини $L^t - p_i^t$ визначає зростає чи спадає значення координати p_i^t на $t + 1$ кроці конфліктної взаємодії. Отже, динаміка змін координати p_i^t залежить від знаку різниці $L^t - p_i^t$.

Твердження 5.2. Якщо $L^t - p_i^t < 0$, то p_i^t зростає,

$$p_i^t > L^t \implies p_i^{t+1} > p_i^t, \quad (5.13)$$

а якщо $L^t - p_i^t > 0$, то p_i^t спадає,

$$p_i^t < L^t \implies p_i^{t+1} < p_i^t. \quad (5.14)$$

Отже, в кожний момент часу квадрат норми $\|p^t\|^2 =: L^t$ вектора p^t є порогом, який поділяє соціум $\mathcal{A}$ на три класи індивідів. Для індивідів $a_{i'}$, значення статусу яких $p_{i'}^t$ нижча порогу L^t , їхній рівень статусу зменшується в результаті конфліктної взаємодії. А для індивідів $a_{i''}$, значення статусу яких $p_{i''}^t$ вище порогу L^t , їхній статус збільшується. Якщо для якихось a_j їх статус точно дорівнює порогу, $p_j^t = L^t$, то такий статус, очевидно, не зміниться $p_j^{t+1} = p_j^t$. Але лише на один акт конфліктної взаємодії. Неважко довести, що квадрат норми вектора p^t , тобто поріг L^t монотонно зростає, і вже на наступному кроці виникне нерівність $p_j^{t+1} < L^{t+1}$. Отже рівність $p_j^t = L^t$ нестійка, змінюється на нерівність $p_j^{t+1} < L^{t+1}$ і починає спадати з наступного кроку: $p_j^{t+2} < p_j^{t+1}$.

Виходячи з цього аналізу природно розкласти соціум $\mathcal{A}$ в кожен момент часу t на три підмножини,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_-^t \cup \mathcal{A}_0^t \cup \mathcal{A}_+^t,$$

$$\mathcal{A}_-^t := \{a_i | p_i^t < L^t\}, \quad \mathcal{A}_0^t := \{a_i | p_i^t = L^t\}, \quad \mathcal{A}_+^t := \{a_i | p_i^t > L^t\}, \quad L^t \equiv \|p^t\|^2. \quad (5.15)$$

Варто відзначити, що за виключенням випадку $\{p_i = 1/m, i = 1, \dots, m\}$, коли $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$, підмножини $\mathcal{A}_-^t$, $\mathcal{A}_+^t$, $t > 1$ завжди є не порожніми, а множина $\mathcal{A}_0^t$ може бути не порожньою лише епізодично (не більше $m - 1$ разів).

Твердження 5.3. Послідовність $L^t := \|p^t\|^2$, $t = 0, 1, \dots$ монотонно зростає і збігається до обмеженої границі:

$$0 < L^\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} L^t = b \leq 1. \quad (5.16)$$

Доведення. Зрозуміло, що $0 < L^t \leq 1$, $t \geq 0$, бо вектори p^t є стохастичними. Для доведення твердження достатньо показати, що

$$L^{t+1} - L^t > 0, \quad t \geq 1. \quad (5.17)$$

Скористаємося розкладом соціума на три множини згідно (5.15). Далі множину $\mathcal{A}_0^t$ без втрати загальності вважаємо порожньою, бо вона виникає лише епізодично і не впливає на суть доведення. За означенням, якщо $a_{i'} \in \mathcal{A}_-^t$, то $p_{i'}^t - L^t < 0$ і тому завдяки (5.14) різниця $d_{i'}^t := p_{i'}^{t+1} - p_{i'}^t < 0$. А для $a_{i''} \in \mathcal{A}_+^t$ навпаки $p_{i''}^t - L^t > 0$ і завдяки (5.13) різниця $d_{i''}^t := p_{i''}^{t+1} - p_{i''}^t > 0$. Але завдяки стохастичності векторів p^t ,

$$\sum_{i'} d_{i'}^t + \sum_{i''} d_{i''}^t = 0. \quad (5.18)$$

Тому маємо:

$$L^{t+1} - L^t = \|p^{t+1}\|^2 - \|p^t\|^2 = 2 \sum_{i'} p_{i'}^t d_{i'}^t + 2 \sum_{i''} p_{i''}^t d_{i''}^t + \sum_{i'} (d_{i'}^t)^2 + \sum_{i''} (d_{i''}^t)^2.$$

Оскільки $d_{i'}^t < 0$ та $p_{i'}^t < L^t$, а $p_{i''}^t > L^t$, то

$$L^{t+1} - L^t > 2L^t \left(\sum_{i'} d_{i'}^t + \sum_{i''} d_{i''}^t \right) + \sum_{i'} (d_{i'}^t)^2 + \sum_{i''} (d_{i''}^t)^2.$$

Нарешті, завдяки (5.18) одержуємо

$$L^{t+1} - L^t > \sum_{i'} (d_{i'}^t)^2 + \sum_{i''} (d_{i''}^t)^2 > 0.$$

Отже L^t є зростаючою обмеженою послідовністю, тому виконується (5.16). ■

Сформулюємо основний результат розділу.

Теорема 5.4. Припустимо, що в початковий момент максимальне значення p_{i_m} (див. (5.12)) досягає лише одна координата стохастичного вектора $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^m$:

$$p_{i_l} < p_{i_m}, \quad \forall i_l \neq i_m. \quad (5.19)$$

Тоді

$$p_{i_m}^\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i_m}^t = 1, \quad (5.20)$$

а

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i_l}^t = 0, \quad \forall i_l \neq i_m. \quad (5.21)$$

Доведення. Очевидно, що

$$p_{i_1}^t = \min_i \{p_i^t\} \leq \|p^t\|^2 = L^t \leq \max_i \{p_i^t\} = p_{i_m}^t. \quad (5.22)$$

Тому, з тверджень 2 та 3 випливає, що послідовність $p_{i_m}^t$ зростає при $t \rightarrow \infty$. Оскільки вона обмежена, то існує границя $p_{i_m}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{i_m}^t = a \leq 1$. Для цієї границі виконується оцінка:

$$0 < a = p_{i_m}^\infty \leq 1.$$

Доведемо, що $a = 1$. З цією метою спочатку покажемо, що $a = b$ де $b = L^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} L^t$. Дійсно, з існування границь $p_{i_m}^\infty$ та L^∞ випливає, що

$$a = p_{i_m}^\infty = p_{i_m}^\infty k^\infty, \quad k^\infty = \frac{m - 2 + p_{i_m}^\infty}{m - 2 + L^\infty}. \quad (5.23)$$

Оскільки очевидно $k^\infty = 1$, то з необхідністю $a = b$. Легко зрозуміти, що числа a, b насправді дорівнюють одиниці. Для цього проведемо аналіз поведінки передостанньої координати $p_{i_{m-1}}^t$. Завдяки (5.12) та Твердженню 1, нерівність $p_{i_{m-1}}^t < p_{i_m}^t$ виконується для усіх t . Зокрема, завжди $p_{i_{m-1}}^t < a$. Більш за те, відношення $p_{i_m}^t / p_{i_{m-1}}^t$ є більшим за одиницю і, як легко з'ясувати, використовуючи (6.18), необмежено зростає (прямує до нескінченності), а отже, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i_{m-1}}^t = 0$. Дійсно, якщо припустити інше, тобто, що $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{i_{m-1}}^t = a' > 0$, то має виконуватися рівність $L^\infty = b = a'$, що є суперечністю, бо $b = a$. Аналогічно можна переконатися, що усі інші координати також прямують до нуля. ■

З цієї теореми одержуємо такий висновок: Примітивна боротьба "кожен проти всіх" у конфліктному соціумі приводить до загибелі усіх індивідів, окрім одного, найсильнішого, яким він був з самого початку.

Твердження 5.5. Якщо $p_i \neq p_k$, для усіх $i \neq k$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} L^t = 1$. Але якщо вектор $\mathbf{p}$ має $l > 1$ однакових максимальних координат, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L^t = 1/l.$$

Доведення. Справедливість твердження випливає з рівності (5.23) записаної для однієї з l максимальних координат

$$1/l = p_i^\infty = p_i^\infty k_i^\infty,$$

де $k_i^\infty = (m - 2 + p_i^\infty)/(m - 2 + L^\infty) = 1$. Звідки одержуємо рівність $L^\infty = 1/l$. ■

Позначимо

$$\Gamma_{(l)}^{(m)} := \{\mathbf{p} \in \Delta^{m-1} : \|\mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{l}, p_i = 0 \vee \frac{1}{l}, i = 1, \dots, m\}, l \in \{1, \dots, m\}.$$

Враховуючи Теорему 5.4 та Твердження 5.5, безпосередня перевірка доводить, справедливість наступного твердження.

Твердження 5.6. Множина векторів

$$\Gamma_{\text{fixed}} = \bigcup_{l=1}^m \Gamma_{(l)}^{(m)} \quad (5.24)$$

вичерпує усі нерухомі точки динамічної системи конфлікту задану формулами (6.17). Стійкі нерухомі точки складаються лише з підмножини $\Gamma_{(1)}^{(m)}$, для якої $l = 1$. Усі вектори $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^m$ з $\Gamma_{(l)}^{(m)}$, $2 \leq l \leq m$, зокрема вектори вигляду $p = (0, \dots, 0, 1/l, \dots, 1/l)$, $l > 1$ відповідають нестійким нерухомим станам системи.

Проведено дослідження структури спектру та його властивостей для мір, які, зокрема, можуть виникнути як граничні стани динамічних систем з конфліктною взаємодією. Встановлено зв'язок між побудовою нескінченного добутку імовірнісних мір та спектральною властивістю міри мати структурну подібність.

Сучасна математична теорія конфлікту ґрунтується на рівняннях Лотки-Вольтерри,

$$\dot{x}_1 = x_1(r_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(r_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2), \quad (5.25)$$

та їх спеціалізованих версіях відомих як рівняння Ланчестера та рівняння Ріхардсона. В (5.25) функції $x_i(t)$ позначають кількість біологічного виду в момент часу t , а дійсні коефіцієнти r_i, a_{ik} є параметрами задачі.

Система рівнянь (5.25) з початку виникнення призначалася для опису динаміки кількісних змін двох біологічних видів в результаті їх природної популяції, конфліктної боротьби та ефектів самознищення внаслідок пере-насичення. Багато прикладів такого сорту, зокрема, ряд моделей поширення епідемій, розглянуто в монографії Марі "Математична біологія". Згодом виявилось, що ці рівняння в певному сенсі є універсальними. Вони чудово працюють не лише в математичній біології, а придатні для побудови моделей конфлікту та опису динамічної поведінки складних систем різної природи, в екології, в соціальних науках, в процесах взаємодії різних мов, в релігійних, політичних і навіть військових конфліктах, зокрема, в процесах гонки озброєнь.

Важливо підкреслити, що рівняння (5.25) описують динаміку кількісних змін опонентів. В застосуваннях саме кількісні характеристики конфліктуючих сторін мають вирішальне значення. Ідеологія теорії конфліктів на основі рівнянь Лотки-Вольтерри спрямована на здобуття переваги та перемоги для однієї із сторін та мінімізації втрат, або, щонайменше, – порятунку для сторони, яка програє. Про встановлення компромісу між опонентами мова не йдеться.

Більш глибоке дослідження явища конфлікту та створення досконалішої теорії потребує статистичного аналізу величезної кількості актів конфліктної боротьби, які повторюються незліченну кількість разів. Такий аналіз можливий лише в термінах теорії ймовірностей, коли стан системи конфлікту задається розподілами випадкових величин пов'язаних з опонентами в просторі їх існування. Перехід від рівнянь Лотки-Вольтерри до рівнянь в термінах імовірнісних розподілів аналогічний переходу від класичної фізики до квантової в термінах рівнянь.

Тут під системою конфлікту розуміється складна фізична система, яка описує конфліктну взаємодію двох альтернативних сторін в термінах імовірнісних розподілів на спільному просторі існування. Наведемо математичне означення.

Нехай Ω позначає компакт з деякого метричного простору, на якому задана σ -алгебра підмножин $\mathcal{R}$. Позначимо через $\mathcal{M}^+(\Omega)$ сімейство всіх σ -адитивних додатних мір на $\mathcal{R}$. Підклас імовірнісних мір позначаємо $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$.

Кожну пару мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ називаємо станом системи конфлікту між парою опонентів, розподіли яких на Ω задані цими мірами. Довільне

відображення

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array} \right\} \xrightarrow{*} \left\{ \begin{array}{c} \mu' \\ \nu' \end{array} \right\}, \quad \mu, \nu, \mu', \nu' \in \mathcal{M}_1^+(\Omega) \quad (5.26)$$

називаємо композицією конфлікту, а трійку $(\Omega, \mathcal{M}_1^+(\Omega), *)$ – системою конфлікту.

Звичайно, відображення $*$ задається нелінійними рівняннями в дискретному чи неперервному часі (див. нижче) і мають додаткові властивості. Рівняння описують еволюцію змін розподілів, заданих мірами ω, ν на просторі Ω внаслідок конфліктної взаємодії протидіючих сторін. Замість наведених вище рівнянь Лотки-Вольтерри ми розглядаємо рівняння виду:

$$\mu^{N+1} = \mu^N(\theta^N + 1 - \nu^N), \quad \nu^{N+1} = \nu^N(\theta^N + 1 - \mu^N), \quad (5.27)$$

$$\mu^{N+1} = \mu^N(\theta^N + 1) - \tau^N, \quad \nu^{N+1} = \nu^N(\theta^N + 1) - \tau^N, \quad (5.28)$$

для дискретного часу $N = 0, 1, \dots$, та

$$\dot{\mu} = \mu(\theta - \nu), \quad \dot{\nu} = \nu(\theta - \mu), \quad (5.29)$$

$$\dot{\mu} = \frac{\mu\theta - \nu}{z}, \quad \dot{\nu} = \frac{\nu\theta - \mu}{z} \quad (5.30)$$

для неперервного часу $t \geq 0$. Тут $\theta = \theta(\mu, \nu)$ – скалярна функція, яка називається показником (глобальної) конфліктності між опонентами, математично задається як квадратична форма від мір μ, ν , її явний вигляд визначається конкретною моделлю. Функція $\tau = \tau(\mu, \nu)$ називається показником локальної конфронтації або окупації. Знаменник z в рівняннях (5.28) необхідний для нормування мір на одиницю.

Рівноважним станом системи конфлікту називається пара мір $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, для якої права частина рівнянь в одній із систем (5.27)–(5.30) тотожно дорівнює нулю.

В роботі ми розглядаємо докладно декілька моделей систем конфлікту лише з дискретним часом, хоча основний результат є справедливим і для неперервного часу.

Розглянемо довільну пару $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, $\mu \neq \nu$. Згідно класичного результату з теорії міри для заряду $\omega = \mu - \nu$ існує розклад Гана множини Ω на дві частини:

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad \Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset, \quad (5.31)$$

такий, що для ω має місце розклад Жордана:

$$\omega = \omega_+ - \omega_-, \quad \omega_+(\Omega_-) = 0 = \omega_-(\Omega_+), \quad (5.32)$$

де компоненти $\omega_+, \omega_- \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ визначаються умовами:

$$\omega_+(A) = \omega_+(A_+) = \sup_{B \subseteq A} \omega(B), \quad A_+ = A \cap \Omega_+, \quad A, B \in \mathcal{R},$$

$$\omega_-(A) = \omega_-(A_-) = \sup_{B \subseteq A} -\omega(B), \quad A_- = A \cap \Omega_-.$$

Звичайно, розклад Гана (5.31) не єдиний, але додатні міри ω_+, ω_- в (5.32) фіксуються зарядом ω однозначно. Нормуючи їх на одиницю одержуємо дві імовірнісні міри з $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$:

$$\mu_+ := \frac{\omega_+}{\omega_+(\Omega)}, \quad \nu_- := \frac{\omega_-}{\omega_-(\Omega)}. \quad (5.33)$$

Ми стверджуємо, що справедлива наступна теорема.

Теорема. *Кожна траєкторія системи конфлікту, задана однією з систем рівнянь (5.27)-(5.30) з початковим станом $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, збігається до рівноважного стану $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$. При цьому, виконується рівність*

$$\mu^\infty = \mu_+, \quad \nu^\infty = \nu_-, \quad (5.34)$$

де μ_+, ν_- визначені в (5.33).

Еволюцію векторів $p(t), r(t)$, $t \geq 0$ в часі ми задаємо системою $2n$ звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dp_k}{dt} = \tilde{p}_k(\theta - \tilde{r}_k), \quad \frac{dr_k}{dt} = \tilde{r}_k(\theta - \tilde{p}_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (5.35)$$

які визначають закон конфліктної взаємодії між F та W . Вплив зовнішнього підживлення та внутрішнього перемішування з точністю до нормування має адитивний характер:

$$\tilde{p}_k = \frac{p_k + s_k}{z_p}, \quad \tilde{r}_k = \frac{r_k + h_k}{z_r}, \quad (5.36)$$

де $s_k, h_k \geq 0$ - деякі фіксовані значення. Величину $\theta := (\tilde{p}, \tilde{r}) \equiv \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \tilde{r}_k$ називаємо *показником конфліктності* між стихіями F, W в момент часу t . Нормувальні знаменники z_p, z_r в (5.36) забезпечують стохастичність векторів в кожен момент часу.

Еквівалентна модель задається системою рівнянь:

$$\dot{p}_k = \frac{p_k(\theta - r_k) + s_k}{z_p}, \quad \dot{r}_k = \frac{r_k(\theta - p_k) + h_k}{z_r}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (5.37)$$

Ми розбиваємо дослідження поведінки моделі заданої рівняннями (5.35) на декілька етапів. На першому кроці розглянемо автономну систему з чисто внутрішньою конфліктною взаємодією.

5.4 Дослідження умов достовірної події

В статті [59] проведено дослідження достатніх умов достовірної події.

Чи не вперше багатокomпонентні динамічні системи згенеровані відображенням, яке відповідає притягальній взаємодії між *a priori* незнищеними опонентами в n -вимірному, $n > 1$, просторі досліджувались ще у перших роботах з динамічних систем конфлікту. Вивчалась еволюція стохастичних векторів $\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t$ з простору $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, які характеризують стан опонентів. Там, зокрема, було показано, що для таких динамічних систем існують рівноважні стаціонарні стани (точкові атрактори) вигляду $\mathbf{p} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{r} = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, де 1 може стояти будь-якому однаковому для $\mathbf{p}$ та $\mathbf{r}$ місці. Такі стани є стійкими. У численних публікаціях присвячених застосуванням, зокрема у моделях формування поглядів та моделях виборів, такого типу стани мають інтерпретацію консенсусу. Актуальною є проблема опису басейнів притягання до таких атракторів, тобто опису усіх початкових станів, які асимптотично при $t \rightarrow \infty$, наближаються саме до цих станів. Відзначимо, що парам векторів типу $\mathbf{p} = (0, 0, \dots, \frac{1}{m}, 0, \dots, \frac{1}{m})$, $\mathbf{r} = (0, 0, \dots, \frac{1}{m}, 0, \dots, \frac{1}{m})$, $1 < m \leq n$ також відповідають нерухомі стаціонарні стани, але вони є нестійкими.

Розглянемо в метричному просторі X деяку некомутативну бінарну композицію (відображення) $\ast$:

$$\{x, y\} \xrightarrow{\ast} \{x', y'\}, \quad x' = x \ast y, \quad y' = y \ast x, \quad x, y \in X.$$

Далі композицію $\ast$ називаємо взаємодією між елементами простору X . За означенням, взаємодія $\ast$ є притягальною, якщо

$$|x' - y'| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in X \quad (5.38)$$

де $|x - y|$ позначає відстань між елементами в просторі X . Використовуючи відображення $\ast$ побудуємо дискретну динамічну систему з притягальною взаємодією в прямому добутку $X \otimes X$.

Співставимо кожній парі елементів $\{x, y\} \equiv \{x^0, y^0\} \in X \otimes X$ траєкторію

$$\{x^t, y^t\} \xrightarrow{\ast} \{x^{t+1}, y^{t+1}\} \in X \otimes X, \quad t = 0, 1, \dots$$

де $x^{t+1} := x^t * y^t$, $y^{t+1} := y^t * x^t$. Завдяки умові притягання (5.38) природно очікувати, що в X існують границі

$$x^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} x^t, y^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} y^t,$$

і вони тотожні, $x^\infty = y^\infty$. Іншими словами, пара $\{x^\infty, y^\infty\}$ утворює нерухому стаціонарну точку динамічної системи сгенерованої відображенням $*$:

$$x^\infty * y^\infty = x^\infty, y^\infty * x^\infty = y^\infty.$$

Відзначимо, що оскільки станам динамічної системи відповідають елементи з прямого добутку $X \otimes X$, то взагалі нерухома точка не єдина, як у відомій теоремі Банаха. В залежності від структури простору X та властивостей відображення $*$ нерухомих точок може бути багато, вони утворюють так звану ω -граничну множину.

Нехай двом опонентам A та B , які далі звуться гравцями, в момент часу $t = 0$ співставлено незалежні дискретні випадкові розподіли на просторі $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n \geq 2$ (множина відвідуваних позицій):

$$A \sim \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad B \sim \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n).$$

Зрозуміло, що вектори $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ є стохастичними:

$$0 \leq p_i, r_i \leq 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad p_1 + \dots + p_n = 1 = r_1 + \dots + r_n.$$

Далі припускаємо, що вони є різними і неортогональними, тобто в $\mathbb{R}^n$ їх скалярний добуток задовольняє умову $0 < (\mathbf{p}, \mathbf{r}) < 1$. Координати p_i, r_i можна інтерпретувати як незалежні ймовірності попадання A , B в ω_i . Іншими словами, величини p_i , r_i характеризують випадкові події відвідування позиції ω_i гравцями A та B в початковий момент часу $t = 0$. Отже, $p_i = \mathbf{P}(A \text{ перебуває в позиції } \omega_i)$, де $\mathbf{P}(\cdot)$ означає ймовірність. Аналогічно для r_i .

Припустимо, що в наступні моменти дискретного часу $t = 1, 2, \dots$ гравці A та B вступають один з одним у взаємодію, яку позначаємо $*$. Це приводить до зміни відповідних їм розподілів:

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \equiv \{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\} \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{*} \dots$$

Покладаємо, що закон зміни координат стохастичних векторів задається ітеративно такими формулами:

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 + r_i^t)}{z^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{r_i^t(1 + p_i^t)}{z^t}, \quad t = 0, 1, \dots, \quad p_i^0 = p_i, r_i^0 = r_i, \quad (5.39)$$

де нормувальний знаменник z^t має вигляд $z^t = 1 + \theta^t$, $\theta^t = (\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t) = \sum_{i=1}^n p_i^t r_i^t$.

На множині усіх стохастичних векторів фіксованої розмірності $n > 1$, яка є сімплексом Δ^{n-1} , введемо відстань за формулою

$$D(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_i d_i, \quad d_i = |p_i - r_i|.$$

Легко перевірити, що тоді Δ^{n-1} стає метричним простором.

З формул (5.39) випливає, що взаємодія $\ast$ задовольняє умову (5.38), тобто є притягальною

$$D(\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}) \leq D(\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t), \quad t > 0.$$

Це дійсно так, бо для усіх $i = \overline{1, n}$:

$$d_i^{t+1} = \frac{d_i^t}{z^t} < d_i^t, \quad z^t = 1 + \theta^t > 1 \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.40)$$

Тому ми говоримо, що гравці А, В притягуються.

Динамічні системи з притягальною взаємодією можна інтерпретувати, як такі, що описують конфліктні події в наступному сенсі. Кожна з позицій ω_i , $i = \overline{1, n}$, $n > 1$ з достовірним її захопленням обома опонентами є взаємовиключною для усіх інших $n - 1$ позицій. Тому притягальна взаємодія між опонентами по формулі (5.39) насправді містить у собі конфлікт n -мірної альтернативності для позицій ω_i .

В теорії динамічних систем конфлікту координати векторів $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ мають сенс ймовірностей перебування опонентів в одній із позицій деякого простору $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Граничну нерухому точку $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ називаємо *достовірною подією*, якщо, окрім рівності $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$, ця точка є стійкою. Достовірна подія відповідає вектору з одиничною координатою в одній з ω_i позицій, $i = \overline{1, n}$.

Задача полягає у знаходженні умов на координати довільної початкової пари стохастичних векторів $\mathbf{p}^{t=0}, \mathbf{r}^{t=0} \in \mathbb{R}^n$, які забезпечують збіжність траєкторії динамічної системи до граничного стану, що має сенс одночасної достовірної події у фіксованій позиції ω_i для обох опонентів. Тобто задача полягає у знаходженні необхідних та достатніх умов належності початкової точки траєкторії до басейну притягання точки як достовірної події. Зрозуміло, що це питання еквівалентне задачі опису басейнів притягання до станів вигляду $\mathbf{p}^\infty = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{r}^\infty = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$.

В цьому підрозділі досліджено наступне питання. Для яких початкових розподілів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ обидва граничні вектори $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ мають єдину, наприклад i -ту, ненульову координату, тобто існує єдина позиція ω_i , де гравці А, В зустрінуться з одиничною ймовірністю, $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$? Відзначимо, що формула притягальної взаємодії, яка генерує динамічну систему в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, має досить простий вигляд (див. (5.39)). Це дозволяє встановити цілий ряд простих достатніх ознак достовірної події, зокрема, при додаткових умовах симетрії на вектори $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ та їх розмірність. Встановлення критерію достовірної події здається нетривіальною задачею, навіть в розмірності $n = 3$, принаймні для динамічних систем з дискретним часом, які тут тільки і розглядаються. Це ілюструється прикладами з комп'ютерними симуляціями.

Далі, як і вище, $*$ позначає бінарне відображення векторів записане в термінах їх координат згідно формули (5.39). В прямому добутку симплексів Δ^{n-1} відображення $*$ породжує $2(n-1)$ -параметричну динамічну систему:

$$\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1} \ni \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\} \in \Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}. \quad (5.41)$$

Виявляється, що кожна траєкторія цієї динамічної системи збігається до нерухомої точки $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ (див. нижче теорему ??). При цьому, питання, які саме координати p_i^∞, r_i^∞ граничних векторів є ненульовими та скільки їх є досить нетривіальним. Наведемо декілька попередніх результатів у цьому напрямку досліджених.

Твердження 5.7. Нехай для деякої пари $i, k \in \overline{1, n}$ відповідні координати початкової точки $\{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\}$, $\mathbf{p}^0 \equiv \mathbf{p}$, $\mathbf{r}^0 \equiv \mathbf{r}$ траєкторії (5.41) задовольняють нерівності

$$p_i \geq p_k, \quad r_i > r_k \quad \text{або} \quad p_i > p_k, \quad r_i \geq r_k. \quad (5.42)$$

Тоді k -ті координати граничної пари є нульовими, $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$.

Доведення. Прямо з (5.39) випливає, що завдяки умовам (5.42) відношення $\frac{p_k^t}{p_i^t}$, як і $\frac{r_k^t}{r_i^t}$ монотонно спадають при $t \rightarrow \infty$ і прямують до нуля. Тому $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$. $\square$

Введемо позначення суми та добутку координат з фіксованим індексом для векторів з траєкторії (5.41):

$$\sigma_i^t := p_i^t + r_i^t, \quad \rho_i^t := p_i^t r_i^t.$$

Твердження 5.8. Якщо для деякої пари $i, k \in \overline{1, n}$ початкові значення сум та добутків координат задовольняють нерівності

$$\sigma_i \geq \sigma_k, \quad \rho_i > \rho_k \quad \text{або} \quad \sigma_i > \sigma_k, \quad \rho_i \geq \rho_k, \quad (5.43)$$

то $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$.

Доведення. З (5.39) випливає, що

$$\sigma_k^{t+1} = \frac{1}{z^t}(\sigma_k^t + 2\rho_k^t), \quad z^t = 1 + (\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t), \quad (5.44)$$

та

$$\rho_k^{t+1} = \frac{1}{(z^t)^2}(\rho_k^t + (\rho_k^t)^2 + \rho_k^t \sigma_k^t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (5.45)$$

Використовуючи формули (5.44), (5.45) з (5.42) отримуємо

$$\sigma_i^1 > \sigma_k^1, \quad \rho_i^1 > \rho_k^1.$$

За індукцією, аналогічні нерівності справджуються для усіх $t \geq 1$:

$$\sigma_i^t > \sigma_k^t, \quad \rho_i^t > \rho_k^t.$$

Тому відношення $\frac{\rho_k^t}{\rho_i^t}, \frac{\sigma_k^t}{\sigma_i^t}$ монотонно прямують до нуля при $t \rightarrow \infty$. Це означає, що обидві граничні координати p_k^∞ та r_k^∞ дорівнюють нулю. $\square$

Згідно останнього твердження, якщо умови

$$\sigma_{\max} = \sigma_i = p_i + r_i, \quad \rho_{\max} = \rho_i = p_i r_i$$

виконуються для єдиного i , то $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$ і $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$ для всіх $k \neq i$. Тобто, ці умови є достатніми для виникнення достовірної граничної події в позиції ω_i . Природно було б очікувати, що ці умови є і необхідними для $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$. Незважаючи на те, що таке припущення підтверджують численні комп'ютерні приклади, насправді виявляється це не так. Достовірна гранична подія в позиції ω_i може відбутися навіть тоді, коли в (5.43) умови з сумами замінити на протилежні. Таку ситуацію ілюструють приклади. В цій ситуації можна знайти іншу достатню умову (див. далі твердження 5.9 та теорему 5.13). Зокрема, вона ілюструє ситуацію, коли достовірна подія, $p_2^\infty = r_2^\infty = 1$ виникає в позиції ω_2 , в якій дві величини, ρ_2 та $\kappa_2 = \sigma_2 + 2\rho_2$ максимальні.

Твердження 5.9. Нехай для пари $i, k \in \overline{1, n}$ замість умов (5.43) виконуються такі нерівності:

$$\rho_i > \rho_k, \quad \sigma_i < \sigma_k, \quad (5.46)$$

та

$$\kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i \geq \sigma_k + 2\rho_k = \kappa_k. \quad (5.47)$$

Тоді $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$.

Доведення. Якщо показати, що

$$\sigma_k^1 \leq \sigma_i^1, \quad \rho_k^1 < \rho_i^1, \quad (5.48)$$

то $p_k^\infty = r_k^\infty = 0$ буде впливати з першого твердження. Переконаємося в справедливості (5.48). Дійсно, перша нерівність з (5.48) випливає прямо з (5.47) та (5.44). Тому потрібно довести лише нерівність $\rho_k^1 < \rho_i^1$. За допомогою простих маніпуляцій отримуємо

$$\rho_k^1 = \frac{1}{4z^2} (2z\sigma_k^1 + z^2\sigma_k^1 \cdot \sigma_k^1 - \sigma_k \cdot \sigma_k - 2\sigma_k),$$

де використано формулу

$$\rho_k = \frac{1}{2} (z\sigma_k^1 - \sigma_k)$$

Тепер, порівнюючи ρ_k^1 з ρ_i^1 і враховуючи, що $\sigma_k \leq \sigma_i$ та $\sigma_k^1 \leq \sigma_i^1$ отримуємо $\rho_k^1 < \rho_i^1$. $\square$

З наведених результатів можна було очікувати, що умова максимальності для добутку, $\rho_{\max} = \rho_i = p_i r_i$ в одній фіксованій позиції є необхідною для $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$. Це також підтверджують багато комп'ютерних прикладів. Але і таке припущення спростовується контрприкладом. Один з них ілюструє дві різні ситуації, коли достовірна подія відбувається в позиції, де ρ та σ одночасно не є максимальними. Більш за те, у іншій ситуації навіть максимальність величини κ не є визначальною, а тому умова максимальності κ у фіксованій позиції не є необхідною для достовірної події у цій позиції.

Неважко переконатися, що в загальному випадку, якщо координати граничних векторів не нульові, то вони обов'язково однакові.

Твердження 5.10. Для кожної пари координат з індексами $i, k \in \overline{1, n}$ можливий один з двох випадків:

(а) одна з пар координат p_i^t, r_i^t або p_k^t, r_k^t прямує до нуля:

$$p_i^\infty = r_i^\infty = 0, \quad \text{або} \quad p_k^\infty = r_k^\infty = 0, \quad (5.49)$$

(b) усі координати p_i^t, r_i^t та p_k^t, r_k^t збігаються до однакової границі (нульової або додатної),

$$p_i^\infty = r_i^\infty = p_k^\infty = r_k^\infty \geq 0. \quad (5.50)$$

Доведення. Оскільки відомо, що завжди різниці d_i^t, d_k^t прямують до нуля (див. (5.40)), то можливі лише два випадки. Існує таке T , що (5.42) виконується для всіх $t > T$. Тоді, з твердження 5.7 отримуємо (5.49). В іншому випадку, перетин $d_i^t \cap d_k^t$ завжди є не порожньою множиною. Звідси очевидно випливає, що виконується умова (5.50). $\square$

Таким чином, для кожної пари векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^{n-1}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \neq 0$, існує розклад множини Ω на дві підмножини

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_+,$$

де

$$\Omega_0 := \{\omega_k : p_k^\infty = r_k^\infty = 0\}, \quad \Omega_+ := \{\omega_i : p_i^\infty = r_i^\infty > 0\}. \quad (5.51)$$

Тепер з твердження 5.10 отримуємо наслідок, який формулюємо у вигляді наступної теореми.

Теорема 5.11. *Для довільної пари початкових не ортогональних стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ граничний стан динамічної системи (5.41) в термінах координат $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ має такий опис:*

$$p_k^\infty = r_k^\infty = 0, \quad \omega_k \in \Omega_0, \quad p_i^\infty = r_i^\infty = \frac{1}{|\Omega_+|} > 0, \quad \omega_i \in \Omega_+, \quad (5.52)$$

де $|\Omega_+|$ – потужність множини Ω_+ .

Теорема 5.12. *Кожна траєкторія динамічної системи (5.41) збігається до нерухомої точки $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$:*

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}^t, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}^t, \quad \mathbf{p}^\infty * \mathbf{r}^\infty = \mathbf{p}^\infty, \quad \mathbf{r}^\infty * \mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty.$$

При цьому, для довільної пари початкових стохастичних векторів $\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0 \in \Delta^{n-1}$, $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{r}^0$, граничні вектори є однаковими, $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$. Відповідна ω -гранична множина Γ_n динамічної системи (5.41) складається з $2^n - 1$ точок,

$$\Gamma_n = \bigcup_{m=1}^n \Gamma_{\binom{n}{m}}, \quad (5.53)$$

де $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \in \Gamma_{\binom{n}{m}}$, якщо виконується умова:

$$\|\mathbf{p}\|^2 = \frac{1}{m}, \quad p_i = \left\{0, \frac{1}{m}\right\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad 1 \leq m \leq n, \quad (5.54)$$

де $\|\cdot\|$ позначає норму в $\mathbb{R}^n$. ω -гранична множина Γ_n не містить періодичних орбіт. Підмножину $\Gamma_{\binom{n}{m=1}}$ утворюють стійкі нерухомі точки. Усі підмножини $\Gamma_{\binom{n}{m}}$, $2 \leq m \leq n$ складаються лише з нестійких нерухомих точок.

Доведення. Існування граничних нерухомих станів вигляду $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$ випливає прямо з (5.39) завдяки (5.40). Зокрема, умова (5.54) еквівалентна інваріантності граничних координат відносно відображення заданого формулами (5.39). Зокрема, для відмінних від нуля граничних координат виконується рівність:

$$p_i^\infty = r_i^\infty = \theta^\infty = \|\mathbf{p}^\infty\|^2.$$

Асимптотична стійкість станів з множини $\Gamma_{\binom{n}{m=1}}$ випливає з твердження 5.7. Дійсно, зафіксуємо $k \in \overline{1, n}$ і розглянемо стан з цієї множини, утворений вектором $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^n$ з координатами заданими символом Кронекера, $e_{ki} = \delta_{ik}$, $i = \overline{1, n}$. Тоді з твердження 5.7 випливає, що усі траєкторії (5.41), які стартують із станів $\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\}$, координати векторів яких задовольняють нерівностям $|p_i - \delta_{ik}| < \frac{1}{n}$, $|r_i - \delta_{ik}| < \frac{1}{n}$, з необхідністю збігаються до точки $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}$. Зрозуміло, що множина усіх таких початкових станів утворює деякий окіл точки $\{\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k\}$ в просторі $\Delta^{n-1} \times \Delta^{n-1}$.

Легко зрозуміти, що в будь-якому околі граничної точки з підмножини $\Gamma_{\binom{n}{m>1}}$ існують стани утворені векторами, деякі з координат яких задовольняють нерівності протилежні до (5.42). Тоді траєкторії з такими початковими станами будуть збігатися до іншої граничної точки. Це доводить нестійкість нерухомих точок з $\Gamma_{\binom{n}{m>1}}$.

Відсутність періодичних орбіт в ω -граничній множині Γ_n є наслідком того, що Γ_n складається лише з одноточкових нерухомих станів. $\square$

Зауважимо, що прямо з доведення теореми випливає відсутність нейтрально стійких нерухомих точок. Відзначимо також, що множина $\Gamma_{\binom{n}{m=n}}$ містить лише одну нерухому точку, яка утворена з пари однакових векторів з координатами $p_i = r_i = \frac{1}{n}$ для всіх $i \in \overline{1, n}$. З твердження 5.7 випливає, що ця точка є не стійкою, з її довільного околу траєкторіями (5.41) можна наблизитися до будь-якої точки з множини Γ_n .

Підкреслимо також, що з доведених вище теорем випливає відсутність різних ненульових граничних координат у фіксованого граничного стану. Тому одне з важливих питань полягає в тому, як в термінах початкової пари векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ здійснити розклад множини позицій Ω на підмножину Ω_0 , в якій усі граничні координати є нульовими, та Ω_+ , де усі граничні координати є строго додатними і однаковими? А основне питання зводиться до знаходження критерію виконання рівності $|\Omega_+| = 1$. Тобто, знаходження необхідних і достатніх умов на пару початкових векторів, коли на границі по часу виникає лише одна ненульова координата, $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$? Наведені вище результати є лише допоміжними для дослідження поставленої задачі. Опишемо найскладнішу ситуацію.

Нехай для деякої пари векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ виконується протилежні нерівності для сум та добутків: $\sigma_k > \sigma_i$, але $\rho_k < \rho_i$. Тоді з твердження 5.9 випливає, що $\omega_k \in \Omega_0$, якщо $\sigma_k + 2\rho_k = \kappa_k \leq \kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i$ (див. нерівність (5.47)). Але ця нерівність є тільки достатньою умовою для $\omega_k \in \Omega_0$. Тому, якщо припустити, що $\kappa_k > \kappa_i$, тоді $\sigma_k^1 > \sigma_i^1$, оскільки з (5.44) випливає, що $\sigma_k^1 = \kappa_k$, $\sigma_i^1 = \kappa_i$. І якщо при цьому $\rho_k^1 < \rho_i^1$, то ми не можемо визначити, до яких з множин Ω_0 чи Ω_+ належать позиції ω_k, ω_i . Звичайно, якщо $\rho_k^1 \geq \rho_i^1$, то все ясно. Але якщо зазначена вище невизначеність повторюється лише скінченну кількість разів і на якомусь кроці t_0 з'являються обидві нерівності $\sigma_k^{t_0} > \sigma_i^{t_0}$, $\rho_k^{t_0} > \rho_i^{t_0}$ (або протилежні до них), тоді можна зробити висновок, що $\omega_i \in \Omega_0$ (або $\omega_k \in \Omega_0$). Складність у тому, що в загальному випадку не ясно, чи існує таке t_0 , а якщо існує, то за яких умов?

Далі розглянуто ряд ситуацій, коли проблема достовірної події розв'язується в сторону достатності. Так, прямо з попередніх тверджень випливає справедливість такої теореми.

Теорема 5.13. *Якщо в початковий момент часу в просторі Ω існує єдина позиція ω_{i_0} , для якої*

$$p_{i_0}^{t=0} \equiv p_{i_0} = p_{\max} = \max_{i=1}^n \{p_i\}, \quad r_{i_0}^{t=0} \equiv r_{i_0} = r_{\max} = \max_{i=1}^n \{r_i\},$$

або

$$\sigma_{i_0}^{t=0} \equiv \sigma_{i_0} = \sigma_{\max} = \max_{i=1}^n \{\sigma_i\}, \quad \rho_{i_0}^{t=0} \equiv \rho_{i_0} = \rho_{\max} = \max_{i=1}^n \{\rho_i\},$$

то саме в ω_{i_0} граничні координати $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 1$, а усі інші дорівнюють нулю, $p_i^\infty = r_i^\infty = 0$, $i \neq i_0$.

Відзначимо, що твердження 5.9 не гарантує достовірної події в позиції ω_{i_0} навіть, якщо це єдина позиція, в якій

$$\kappa_{i_0} = \kappa_{\max} = \max_{i=1}^n \{\kappa_i\}, \quad (\kappa_i := \sigma_i + 2\rho_i),$$

бо при цьому координата p_{i_0} може бути досить малою і це приводить до $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 0$.

Розглянемо декілька випадків з умовами симетрії на початкові розподіли. Нехай для деякого i_0

$$p_{i_0} = r_{i_0} = p, \quad \sigma_j = \sigma_k, \quad j, k \neq i_0. \quad (5.55)$$

Твердження 5.14. Якщо виконується умова (5.55) і $p > \frac{1}{n}$, то $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 1$.

Доведення. Зараз усі $\sigma_k = \frac{2(1-p)}{n-1}, k \neq i_0$. Тому $\sigma_{i_0} > \frac{2}{n} > \sigma_k$. А також $\rho_{i_0} = \frac{1}{n^2} > \rho_k, \forall k \neq i_0$. Тепер справедливість твердження випливає з теореми 5.13. $\square$

Розглянемо випадок з умовою (5.55), при $p < \frac{1}{n}$. Тепер $\sigma_{i_0} < \sigma_k, \forall k \neq i_0$. Чи може при цьому виникнути достовірна подія в позиції ω_{i_0} , тобто $p_{i_0}^\infty = r_{i_0}^\infty = 1$? Виявляється так, але якщо усі ρ_k є достатньо малими, щоб виконувалася умова (5.47) при $i = i_0$ з твердження 5.9. Звичайно, цю умову неможливо задовольнити при будь-якому $p < \frac{1}{n}$. Існує мінімальний поріг λ для p , який визначається рівнянням $\kappa_{i_0} = \sigma_k$. Це рівняння, враховуючи, що $\sigma_k = 2\frac{(1-p)}{(n-1)}$ і покладаючи $p_{i_0} = p = \lambda$, має вигляд $2\lambda + \lambda^2 = \frac{2(1-\lambda)}{n-1}$. Отже, мінімальний поріг для $p_{i_0} = p$, коли можна скористатися умовою (5.47) є $\lambda = \frac{(n^2+4n-4)^{\frac{1}{2}}-n}{2(n-1)}$. Якщо $p < \lambda$, то при довільному $\rho_k > 0$ умова (5.47) не справджується. Таким чином справедливим є наступне твердження.

Твердження 5.15. Нехай виконуються умови (5.55) і $\lambda < p < \frac{1}{n}$. Тоді існують достатньо малі ρ_k такі, що $\kappa_{i_0} \geq \kappa_k$ для усіх $k \neq i_0$ і отже $p_{i_0}^\infty = 1$.

З наведених тверджень випливає, що для розмірності $n = 3$, тобто для $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$, і при умовах (5.55), коли

$$\begin{aligned} p_1 = r_1 = p, \quad p_2 = r_3 = \frac{1-p}{2} + \varepsilon, \\ p_3 = r_2 = \frac{1-p}{2} - \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1-p}{2} > 0, \end{aligned} \quad (5.56)$$

в позиції ω_1 відбувається достовірна подія, $p_1^\infty = r_1^\infty = 1$ у таких випадках:

1. $p \geq \frac{1}{3}, \quad p_2 = r_3 \neq \frac{1}{3}$
2. $p > 0, \quad p_2 = r_3 = 0$

3. $\lambda < p < \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$, але $\kappa_1 > \kappa_2$.

Далі наведено більш тонкі достатні умови достовірної події. Почнемо з розмірності $n = 3$, коли $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$.

Нехай $0 < p < \frac{1}{3}$ та $\sigma_2 = \sigma_3$. Тоді очевидно $\sigma_1 < \sigma_2$. З попередніх результатів відомо, що забезпечити на границі по часу рівність $p_1^\infty = r_1^\infty = 1$ можливо лише тоді, коли $\rho_2 = \rho_3$ є досить малим. Запишемо ρ_2 у формі

$$\begin{aligned} \rho_2 = \rho_3 = p_2 r_2 = p_3 r_3 &= \left(\frac{1-p}{2} + \varepsilon \right) \left(\frac{1-p}{2} - \varepsilon \right) = \left(\frac{1-p}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 = \\ &= \frac{1}{4} (1 - 2p + p^2 - 4\varepsilon^2), \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1-p}{2}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Звичайно, якщо ε є максимально великим, $\varepsilon = \frac{1-p}{2}$, тоді $r_2 = p_3 = 0$ і для довільного початкового p , одержуємо $p_2^t = r_3^t \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$, а $p_1^\infty = 1$. Але це крайній випадок. Навпаки, для нульового, або досить малого ε обидві координати p_2, p_3 близькі до $\frac{1}{3}$. Тоді для $p < \frac{1}{3}$ добуток ρ_2 перевищує ρ_1 та за твердженням $p_1^\infty = 0$, а $p_2^\infty = p_3^\infty = \frac{1}{2}$. Легко встановити, що таке відбувається завжди, коли ε задовольняє умову (5.58) з наступного твердження.

Твердження 5.16. Нехай координати векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$ задовольняють умови (5.56). Припустимо

$$p < \frac{1}{3}, \quad 0 \leq \varepsilon^2 \leq f(p), \quad f(p) := \frac{1}{4} - p - \frac{3}{4}p^2. \quad (5.58)$$

Тоді $p_2^\infty = p_3^\infty = \frac{1}{2}$ і $p_1^\infty = r_1^\infty = 0$.

Доведення. З умов (5.58) легко одержуємо: $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$, $\rho_1 \leq \rho_2 = \rho_3$. Тепер користуємося твердженням та теоремою 5.11. $\square$

Таким чином, для забезпечення достовірної події в ω_1 з початковою координатою $p_1 = p < \frac{1}{3}$ потрібно обмежити ε знизу.

Теорема 5.17. Нехай координати векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^2$ мають запис у вигляді (5.56). Припустимо додатково, що $\lambda \leq p \leq \frac{1}{3}$, де $\lambda = \frac{\sqrt{17}-3}{4}$, а $\varepsilon \leq \frac{1-p}{2}$ задовольняє оцінку знизу:

$$T(p) \leq \varepsilon^2, \quad T(p) = \frac{3}{4} - 2p - \frac{3}{4}p^2. \quad (5.59)$$

Тоді $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$.

Доведення. Покажемо, що вже на першому кроці $p_1^{t=1} = \frac{p(1+p)}{z} \geq \frac{1}{3}$. Дійсно, оскільки $z = 1 + p^2 + 2\rho_2$, то остання нерівність має еквівалентний запис у вигляді

$$3p(1+p) \geq 1 + p^2 + 2\rho_2,$$

де $\rho_2 = \rho_3 = p_2 p_3 = \left(\frac{1-p}{2}\right)^2 - \varepsilon^2$. Це означає, що нерівності $p_1^{t=1} \geq \frac{1}{3}$ та

$$\varepsilon^2 \geq \frac{1}{4}(3 - 8p - 3p^2) = T(p)$$

еквівалентні. Легко бачити, що функція $T(p)$ спадає на відрізку $[0, \frac{1}{3}]$ від $\frac{3}{4}$ до 0, причому $T(p) > \frac{(1-p)^2}{4}$ на $[0, \lambda)$. Це означає, що умова (5.59) може виконуватися тільки тоді, коли $\lambda \leq p$. Тепер з $p_1^1 = r_1^1 \geq \frac{1}{3}$ випливає, що $\sigma_1^1 \geq \sigma_2^1$. Очевидно також, що $\rho_1^1 > \rho_2^1$, оскільки $\varepsilon^1 = \frac{1}{2}(p_2^1 - p_3^1) > 0$. Отже, теорема справедлива. $\square$

Результат теореми 5.17 легко узагальнити на вищу розмірність.

Нехай $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^{n-1}$, $n > 2$ є непарним. Припустимо, для деякого i

$$p_i = r_i = p, \quad \sigma_l = \sigma_k, \quad \rho_l = \rho_k, \quad \forall l, k \neq i.$$

Тоді $\sigma_i = 2p$, $\rho_i = p^2$, $\sigma_k = \frac{2(1-p)}{n-1}$. Позначимо $\varepsilon := \frac{|p_k - r_k|}{2}$. В такому випадку, окрім $p_i = r_i = p$, маємо $\frac{n-1}{2}$ рівних координат $p_k = r_l = \frac{1-p}{n-1} + \varepsilon$ та $\frac{n-1}{2}$ рівних координат $p_l = r_k = \frac{1-p}{n-1} - \varepsilon$. При цьому усі

$$\rho_k = \rho_l = \left(\frac{1-p}{n-1} + \varepsilon\right) \cdot \left(\frac{1-p}{n-1} - \varepsilon\right) = \left(\frac{1-p}{n-1}\right)^2 - \varepsilon^2.$$

Введемо позначення:

$$f_n(p) := \frac{p(p-1)}{2} + \left(\frac{1-p}{n-1}\right)^2, \quad T_n(p) := \frac{1 - np + p^2(1-n)}{2} + \left(\frac{1-p}{n-1}\right)^2.$$

Очевидно $f_n(p) < T_n(p)$ для $p < \frac{1}{n}$.

Теорема 5.18. *Нехай координати векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \Delta^{n-1}$ задовольняють умови: для фіксованого i*

$$p_i = r_i = p, \quad \lambda_n \leq p \leq \frac{1}{n}, \quad \lambda_n = \frac{(n^2 + 4n - 4)^{1/2} - n}{2(n-1)},$$

а для всіх $l, k \neq i$,

$$p_k = r_l = \frac{1-p}{n-1} + \varepsilon, \quad p_l = r_k = \frac{1-p}{n-1} - \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{1-p}{n-1}.$$

Тоді

1) якщо $\varepsilon^2 < f_n(p)$, то $p_i^\infty = r_i^\infty = 0$, а $p_l^\infty = r_l^\infty = p_k^\infty = r_k^\infty = \frac{1}{n-1}$,

2) якщо

$$T_n(p) \leq \varepsilon^2, \quad (5.60)$$

то $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$.

Доведення. 1) Нехай $\varepsilon^2 < f_n(p)$. Тоді

$$\begin{aligned} p_i^1 - p_i &= \frac{p(1+p)}{z} - p = -\frac{2p}{z} \left(\frac{p(1-p)}{2} + \left(\frac{1-p}{n-1} \right)^2 - \varepsilon^2 \right) = \\ &= -\frac{2p}{z} (f_n(p) - \varepsilon^2) < 0, \end{aligned}$$

тобто $p^1 < p$, причому, очевидно, значення функції $f_n(\cdot)$ зростає, $f_n(p^1) > f_n(p)$. З першої нерівності випливає, що усі ρ_k^1 , $k \neq i$ також зростають. Тому $(\varepsilon^1)^2 < \varepsilon^2$, де, нагадаємо, $\varepsilon^1 = \frac{|p_k^1 - r_k^1|}{2}$ не залежить від k . Отже на першому кроці нерівність $(\varepsilon^1)^2 < f_n(p^1)$ посилюється. По індукції маємо

$$(\varepsilon^t)^2 < \dots < \varepsilon^2 < f_n(p) < \dots < f_n(p^t), \quad t \geq 1.$$

Отже, для всіх $t \geq 0$ виконується нерівність

$$(\varepsilon^t)^2 < f_n(p^t).$$

Це означає, що послідовність $\{p^t\}_{t=0}^\infty$ монотонно спадає і тому $p_i^\infty = r_i^\infty = 0$, а $p_l^\infty = r_l^\infty = p_k^\infty = r_k^\infty = \frac{1}{n-1}$.

2) Відзначимо, що аналогічно (5.59), нерівність (5.60) може виконуватися лише тоді, коли $\lambda_n \leq p \leq \frac{1}{n}$. Безпосередньо переконаємося, що ця нерівність рівносильна тому, що $p_i^1 = \frac{p(1+p)}{1+p^2+2\rho_k} \geq \frac{1}{n}$. Це означає, що $\rho_i^1 > \rho_k^1$ і $\sigma_i^1 > \sigma_k^1$ для усіх $k \neq i$. Тепер отримуємо $p_i^\infty = r_i^\infty = 1$. $\square$

Нами одержано ряд достатніх ознак існування достовірної події, або, іншими словами, встановлення консенсусу, при $t \rightarrow \infty$. Найпростіші з них зводяться до наявності у одній фіксованій позиції ω_i максимальних значень координат p_i, r_i , добутків цих координат $\rho_i = p_i r_i$, їхніх сум $\sigma_i = p_i + r_i$, або деяких комбінацій з $\kappa_i = \sigma_i + 2\rho_i$. Але чисельні комп'ютерні симуляції показують, що ці ознаки є далекими від необхідних. Зокрема, якщо згадані максимальні значення не зосереджені у фіксованій позиції, тобто досягаються для різних $i \neq k$, то достовірна подія може існувати, але її місце (позиція ω_{i_0} ,

де вона відбувається) передбачити досить складно. Питання про знаходження явного вигляду функціоналу $F_i(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, максимальне значення якого для єдиного фіксованого i_0 є критерієм виникнення достовірної події в ω_{i_0} є відкритим не тільки у ситуації довільних стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$, а навіть у розмірності $n = 3$ з умовами симетрії типу (5.55).

Варто підкреслити, що проблему достовірної події можна сформулювати і як динамічну задачу встановлення консенсусу між парою гравців A та B у прийнятті рішення щодо різних можливих варіантів поведінки відносно позицій $\omega_i, \overline{1, n}$. В початковий момент часу кожен гравець A (B) схильний до варіанту ω_i лише з деякою ймовірністю $\mathbf{P}^A(\omega_i) = p_i, (\mathbf{P}^B(\omega_i) = r_i)$, відповідно. З часом, $t = 1, 2, \dots$, погляди індивідів зближаються завдяки притягальній взаємодії за формулою (5.39). Треба знайти критерій консенсусу, $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i^t = 1 = \lim_{t \rightarrow \infty} r_i^t$, щодо якогось фіксованого варіанту поведінки ω_i в термінах початкових значень $p_i = p_i^0, r_i = r_i^0, i = \overline{1, n}$.

5.5 Виникнення точкового спектру в граничних розподілах динамічних систем конфлікту

В роботах [58] встановлено критерій виникнення точкового спектру для динамічних систем конфлікту з відштовхувальною взаємодією в просторі $\Omega = [0; 1]$. В роботі [64] цей результат узагальнено на випадок, коли простір конфлікту Ω є компактом метричного простору $\mathbb{R}^b$, а динамічні системи розглянуто з взаємодіями притягання та відштовхування. Далі буде досліджено виникнення точкового спектру в граничних розподілах динамічних систем з притяганням на просторах з фрактальним подрібленням.

Наведемо коротко основні поняття теорії динамічних систем конфлікту в термінах ймовірнісних мір. Детально ці поняття викладені в роботах.

Нехай Ω – компакт з метричного простору $\mathbb{R}^d, d \geq 1$. Борелівську σ -алгебра та міру Лебега позначимо через $\mathcal{B}$ та λ , відповідно. Компакт Ω розглядається як простір існування (простір життєвих ресурсів) для пари альтернативних сторін A та B , яких називаємо опонентами. Початковий розподіл опонентів A та B на Ω визначається ймовірнісними мірами $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Вважаємо, що їх перетин є непорожнім

$$\text{supp}(\mu) \cap \text{supp}(\nu) \neq \emptyset,$$

саме це є причиною для конфлікту A та B . Введемо некомутативне бінарне

відображення $\ast$ в класі ймовірнісних мір $\mathcal{M}(\Omega)$:

$$\mu \ast \nu = \mu^1, \quad \nu \ast \mu = \nu^1.$$

Перетворення $\ast$ з початковими мірами $\mu^0 = \mu$, $\nu^0 = \nu$ генерує траєкторію з дискретним часом:

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu^t \\ \nu^t \end{array} \right\} \xrightarrow{\ast} \left\{ \begin{array}{c} \mu^{t+1} \\ \nu^{t+1} \end{array} \right\}, \quad t = 0, 1, \dots \quad (5.61)$$

Всі такі траєкторії з фіксованим законом ітерації $\ast$ генерують динамічну систему, яка описує конфліктний перерозподіл простору Ω між опонентами A та B .

Побудовану динамічну систему називаємо *динамічною системою конфлікту* та позначаємо $\{X, \ast\}$, де $X = \mathcal{M}(\Omega) \times \mathcal{M}(\Omega)$, а відображення $\ast$ є перетворенням (ітерацією) конфлікту між опонентами.

Не втрачаючи загальності можна вважати, що $\Omega = [0, 1]$ або $\Omega = [0, 1]^d$, $d \geq 1$. $\mathcal{M}(\Omega)$ позначає деякий клас мір на Ω , які підходять для опису пріоритетів одного з опонентів над іншим.

Цікавими для дослідження є питання поведінки траєкторій μ^t , ν^t , $t = 0, 1, \dots$ та існування граничних мір $\mu^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^t$, $\nu^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu^t$. В попередніх роботах вже було доведено існування граничного (остаточного) перерозподілу простору існування Ω між опонентами при нескладному перетворення конфлікту $\ast$ для випадків притягальної та відштовхувальної взаємодії. Але для кожного конкретного перетворення $\ast$ потрібно доводити існування граничних мір μ^∞ , ν^∞ .

Далі досліджено питання: При яких умовах граничні міри μ_∞ , ν_∞ є чисто точковими ($\mu_\infty, \nu_\infty \in \mathcal{M}_{\text{pp}}(\Omega)$, pp – pure point) для випадку притягальної взаємодії? В якості $\mathcal{M}(\Omega)$ виберемо клас кусково рівномірно розподілених мір ($\mathcal{M}^{\text{put}}(\Omega)$, pud – piecewise uniformly distributed) або структурноподібних мір ($\mathcal{M}^{\text{ss}}(\Omega)$, ss – structural similarity).

Опишемо ітеративну побудову мір μ^k , ν^k , $k = 0, 1, \dots$. Ця конструкція залежить від фіксованої процедури фрактального подрібнення (регіоналізації) конфліктного простору Ω .

Припустимо, що Ω піддається ітераційній процедурі регіоналізації, яка збігається з типовою конструкцією фрактального подрібнення. Це означає,

що Ω допускає послідовне розбиття на подібні регіони

$$\Omega = \bigcup_{i_1=1}^n \Omega_{i_1}, \quad 2 \leq n < \infty,$$

$$\Omega_{i_1} = \bigcup_{i_2=1}^n \Omega_{i_1 i_2}, \quad \Omega = \bigcup_{i_1, i_2=1}^n \Omega_{i_1 i_2}, \dots$$

$$\Omega_{i_1 \dots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}, \quad \Omega = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}, \dots$$

з умовою: $|\Omega_{i_1 \dots i_k}| = \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}) \longrightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$

Більш загально описана вище процедура може буди побудована в термінах ітераційних функціональних систем (IFS). Нагадаємо, що сімейство стискаючих перетворень $K = \{K_i\}_{i=1}^n, \quad 2 \leq n < \infty$ в $\mathbb{R}^d$ називають *ітераційною функціональною системою (IFS)* на Ω , якщо виконуються наступні умови:

$$\forall i, \quad \Omega_i \subset \Omega, \quad \Omega_i := K_i \Omega,$$

та

$$\text{int}(\Omega_i) \cap \text{int}(\Omega_j) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Надалі будемо вважати, що

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i, \quad 0 < |\Omega_i| = q_i < 1, \quad \sum_{i=1}^n q_i = 1. \quad (5.62)$$

Таким чином, кожна IFS з умовою (5.62) визначає фрактальне подрібнення Ω :

$$\Omega = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}, \quad \Omega_{i_1 \dots i_k} := K_{i_1} \circ \dots \circ K_{i_k} \Omega.$$

Нехай дано деяку IFS та послідовність стохастичних векторів $P = \{\mathbf{p}^k\}_{k=1}^\infty, \quad \mathbf{p}^k \in \mathbb{R}^d$, де $\mathbf{p}^k = (p_i^k)_{i=1}^n, \quad \sum_i p_i^k = 1$. Послідовність кусково рівномірно розподілених мір μ^k на Ω асоціюємо з P :

$$\mu^k(\Omega_{i_1 i_2 \dots i_k}) = p_{i_1}^1 p_{i_2}^2 \dots p_{i_k}^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.63)$$

Згідно з попередніми роботами послідовність $\mu^k, \quad k = 1, 2, \dots$ слабо збігається до ймовірнісної міри

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^k.$$

Більше того, існує взаємооднозначна відповідність між вище описаними послідовностями P та класом структуроподібних мір $\mu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}(\Omega)$ при фіксованому IFS на Ω . Це означає, що міра μ є самоподібною, якщо всі вектори $\mathbf{p}^k$ є однаковими. В загальному випадку μ є структуроподібною. Звідси випливає, що відношення

$$\frac{\mu(\Omega_{i_1 \dots i_k})}{\mu(\Omega_{i_1 \dots i_{k-1}})} = p_{i_k}^k$$

задежить тільки від останнього індексу i_k .

Далі, використовуючи фрактальне подрібнення простору конфлікту Ω , на кожному кроці ітерації розглянемо більш детальну структуру початкових мір. Міру μ вважатимемо простою, якщо вона є кусково рівномірно розподіленою, тобто $\mu \in \mathcal{M}^{\text{put}}(\Omega)$. Зафіксуємо деяку IFS, $K = \{K_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді опонентам A та B в початковий момент співставляються відповідно міри $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ з однаковою структурою. Для задання конфлікту поставимо у відповідність заданим мірам μ, ν дві послідовності простих мір μ_k, ν_k , $k = 1, 2, \dots$

Кажуть, що ітераційна функціональна система K та міра μ є *узгодженими*, якщо існує звуження K на борелівську підмножину $\Omega^{\sharp} \subseteq \Omega$ (не обов'язково закрито), таке що всі властивості фрактального подрібнення виконуються в термінах $\Omega_{i_1 \dots i_k}^{\sharp} = \Omega_{i_1 \dots i_k} \cap \Omega^{\sharp}$, $\mu(\Omega^{\sharp}) = \mu(\Omega)$, причому

$$\mu(\Omega_{i_1 \dots i_k}^{\sharp} \cap \Omega_{j_1 \dots j_k}^{\sharp}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.64)$$

якщо $i_l \neq j_l$ хоча б для одного $1 \leq l \leq k$. Далі завжди припущено, що K та початкові міри μ, ν є одночасно узгодженими та можна замінити $\Omega_{i_1 \dots i_k}$ на $\Omega_{i_1 \dots i_k}^{\sharp}$ не змінюючи позначень.

На першому кроці апроксимації, $k = 1$, замінимо початкові міри $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ на їх "грубі" версії $\mu_1, \nu_1 \in \mathcal{M}^{\text{rud}}(\Omega)$, котрі визначені наступним чином

$$\mu_1(\Omega_{i_1}) = \mu(\Omega_{i_1}) := p_{i_1}, \quad \nu_1(\Omega_{i_1}) = \nu(\Omega_{i_1}) := r_{i_1}, \quad i_1 = \overline{1, n},$$

та рівномірно розподілені на Ω_{i_1} . Остання умова відрізняє μ_1, ν_1 від μ, ν відповідно. Два набори значень p_{i_1}, r_{i_1} , $i_1 = \overline{1, n}$ утворюють два стохастичні вектори $\mathbf{p}_1 = (p_1, \dots, p_n)$ та $\mathbf{r}_1 = (r_1, \dots, r_n)$. Тепер можна описати деяку "грубу" версію перерозподілу простору конфлікту Ω між опонентами A та B в термінах цих векторів.

Для детальнішого опису конфлікту зробимо другий крок апроксимації та замінимо μ, ν більш точними їх версіями $\mu_2, \nu_2 \in \mathcal{M}^{\text{rud}}(\Omega)$:

$$\mu_2(\Omega_{i_1 i_2}) = \mu(\Omega_{i_1 i_2}) := p_{i_1 i_2}, \quad \nu_2(\Omega_{i_1 i_2}) = \nu(\Omega_{i_1 i_2}) := r_{i_1 i_2}.$$

Мірам μ_2, ν_2 ставимо у відповідність нову пару стохастичних векторів $\mathbf{p}_2 = (p_{i_2})_{i_2=1}^n$, $\mathbf{r}_2 = (r_{i_2})_{i_2=1}^n$ з координатами

$$p_{i_2} := \frac{p_{i_1 i_2}}{p_{i_1}}, \quad r_{i_2} := \frac{r_{i_1 i_2}}{r_{i_1}}.$$

Повторивши процедуру k разів, отримаємо більш близькі версії $\mu_k, \nu_k \in \mathcal{M}^{\text{rud}}(\Omega)$ початкових мір μ, ν :

$$\mu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = \mu(\Omega_{i_1 \dots i_k}) := p_{i_1 \dots i_k}, \quad \nu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = \nu(\Omega_{i_1 \dots i_k}) := r_{i_1 \dots i_k}.$$

З μ_k, ν_k асоціюється пара стохастичних векторів $\mathbf{p}_k = (p_{i_k})_{i_k=1}^n$, $\mathbf{r}_k = (r_{i_k})_{i_k=1}^n$ з координатами

$$p_{i_k} := \frac{p_{i_1 \dots i_k}}{p_{i_1 \dots i_{k-1}}}, \quad r_{i_k} := \frac{r_{i_1 \dots i_k}}{r_{i_1 \dots i_{k-1}}}.$$

Таким чином, маючи послідовності векторів $P = \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^\infty$, $R = \{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^\infty$ можна вирішити проблему конфліктного перерозподілу простору Ω між опонентами A та B з довільною точністю в термінах векторів $\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k$ згідно теорії, розвинутої в попередніх роботах.

Навпаки, маючи дві послідовності стохастичних векторів $P = \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^\infty$, $R = \{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^\infty$, $\mathbf{p}_k = (p_{i_k})_{i_k=1}^n$, $\mathbf{r}_k = (r_{i_k})_{i_k=1}^n$, $\sum_{i=1}^n p_{i_k} = 1 = \sum_{i=1}^n r_{i_k}$, $p_{i_k}, r_{i_k} \geq 0$, $\forall k$, можна реконструювати дві послідовності кусково рівномірно розподілених ймовірнісних мір $\mu_k, \nu_k \in \mathcal{M}^{\text{rud}}(\Omega)$:

$$\mu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = p_{i_1} \cdots p_{i_k}, \quad \nu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = r_{i_1} \cdots r_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Згідно з вище описаним послідовності μ_k, ν_k мають слабкі границі μ, ν , які є структурноподібними мірами. Таким чином можна констатувати, що постановка задачі динаміки конфліктну опонентів, представленої структурними мірами $\mu, \nu \in \mathcal{M}(\Omega)$, допускає розгляд з довільною точністю в термінах простих мір $\mathcal{M}^{\text{rud}}(\Omega)$ або термінах стохастичних векторів.

Зауважимо, що в застосуванні величини $\mu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k}), \nu_k(\Omega_{i_1 \dots i_k})$ мають ймовірнісну інтерпретацію спостереження деякої властивості в регіоні $\Omega_{i_1 \dots i_k}$. Використовуючи ці величини для всіх $\Omega_{i_1 \dots i_k}$, $k \geq 1$ і враховуючи умови на IFS, можна вирахувати ймовірності знаходження цієї величини в борелівській множині $E \in \mathcal{B}$ з Ω . Більше того, фрактальна структура регіонального поділу Ω дозволяє дізнатися про спектаральні властивості мір μ та ν в процесі еволюції, викликаної конфліктною взаємодією між опонентами.

Опишемо яким чином міри μ_k, ν_k змінюються під дією конфліктної взаємодії між опонентами. Іншими словами, опишемо зміну станів динамічної системи (5.61) в термінах простих мір.

Нехай в початковий момент часу на задано Ω пару ймовірнісних структурноподібних мір, які узгоджені з деякою IFS.

В початковий момент часу, $t = 1$, парі мір $\mu^{t=1}, \nu^{t=1} \in \mathcal{M}^{\text{pud}}(\Omega)$ ставимо у відповідність стохастичні вектори $\mathbf{p}^1 = (p_{i_1}^1)$ та $\mathbf{r}^1 = (r_{i_1}^1)$, $i_1 = \overline{1, n}$, координати яких визначені наступним чином

$$p_{i_1}^1 = \frac{p_{i_1}(1 + r_{i_1})}{1 + \sum_{i_1} p_{i_1} r_{i_1}}, \quad r_{i_1}^1 = \frac{r_{i_1}(1 + p_{i_1})}{1 + \sum_{i_1} p_{i_1} r_{i_1}}. \quad (5.65)$$

де

$$p_{i_1} = \mu(\Omega_{i_1}), \quad r_{i_1} = \nu(\Omega_{i_1}). \quad (5.66)$$

В наступний момент часу, $t = 2$, можна визначити μ^2, ν^2 двома способами: використовуючи рівняння (5.65) з вище описаними величинами $p_{i_1 i_2}, r_{i_1 i_2}$ замість p_{i_1}, r_{i_1} , або ж іншим способом, обчисливши

$$p_{i_2}^2 = \frac{p_{i_2}^1(1 + r_{i_2}^1)}{1 + \sum_i p_i^1 r_i^1}, \quad r_{i_2}^2 = \frac{r_{i_2}^1(1 + p_{i_2}^1)}{1 + \sum_i p_i^1 r_i^1}, \quad (5.67)$$

визначити μ^2, ν^2 як

$$\mu^{t=2}(\Omega_{i_1 i_2}) = p_{i_1 i_2} := p_{i_1}^1 \cdot p_{i_2}^2, \quad \nu^{t=2}(\Omega_{i_1 i_2}) = r_{i_1 i_2} := r_{i_1}^1 \cdot r_{i_2}^2.$$

Надалі буде використано другий спосіб. Тоді, ітераційно визначимо

$$\begin{aligned} \mu^{t=k}(\Omega_{i_1 \dots i_k}) &= p_{i_1 \dots i_k} := p_{i_1}^1 \cdots p_{i_k}^k, \\ \nu^{t=k}(\Omega_{i_1 \dots i_k}) &= r_{i_1 \dots i_k} := r_{i_1}^1 \cdots r_{i_k}^k, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (5.68)$$

де

$$p_{i_k}^k = \frac{p_{i_{k-1}}^{k-1}(1 + r_{i_{k-1}}^{k-1})}{1 + \sum_i p_i^{k-1} r_i^{k-1}}, \quad r_{i_k}^k = \frac{r_{i_{k-1}}^{k-1}(1 + p_{i_{k-1}}^{k-1})}{1 + \sum_i p_i^{k-1} r_i^{k-1}}. \quad (5.69)$$

Таким чином, формули (5.65)–(5.69) описують ітераційну побудову станів динамічної системи конфлікту в термінах кусково рівномірно розподілених мір μ^t, ν^t , $t = 1, 2, \dots$. Цю конструкцію запишемо символічно як

$$\mu^t * \nu^t = \mu^{t+1}, \quad \nu^t * \mu^t = \nu^{t+1},$$

де відображення $*$ відповідає притягальній взаємодії між опонентами. Саме тому $\mu^{t=k}(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = \nu^{t=k}(\Omega_{i_1 \dots i_k})$ при $t \rightarrow \infty$. Обидві послідовності простих мір μ^t, ν^t , визначені рівністю (5.68), є слабо збіжними при $t \rightarrow \infty$. Звичайно, граничні міри μ^∞ є сингулярно неперервними, якщо $\lim_{t=k \rightarrow \infty} \mu^t(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = 0$ для всіх послідовностей $i_1, \dots, i_k, \dots$. Тим не менше, далі буде знайдено умови,

які забезпечать збіжність $\mu^{t=k}(\Omega_{i_1 \dots i_k})$ та $\nu^{t=k}(\Omega_{i_1 \dots i_k})$ до ненулових значень хоча б для деяких послідовностей $i_1, \dots, i_k, \dots$

Введемо позначення

$$\mu_{i_1 \dots i_k \dots} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{i_k}^k = \lim_{k \rightarrow \infty} p_{i_1 \dots i_k}, \quad \nu_{i_1 \dots i_k \dots} = \prod_{k=1}^{\infty} r_{i_k}^k = \lim_{k \rightarrow \infty} r_{i_1 \dots i_k}, \quad (5.70)$$

де

$$p_{i_1 \dots i_k} := p_{i_1}^1 \cdots p_{i_k}^k, \quad r_{i_1 \dots i_k} := r_{i_1}^1 \cdots r_{i_k}^k, \quad (5.71)$$

та $p_{i_k}^k, r_{i_k}^k$ визначаються (5.69). Нагадаємо, що кожна точка з Ω може бути представлена як

$$\Omega \ni \omega_{i_1 \dots i_k \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Omega_{i_1 \dots i_k}, \quad (5.72)$$

тобто їй відповідає деяка послідовність індексів $i_1, \dots, i_k, \dots$

Нагадаємо, що міра μ^∞ асоціюється з нескінченною матрицею

$$P = \{\mathbf{p}^k\}_{k=1}^{\infty} = (p_{i_k}^k)_{k=1, i_k=1}^{\infty, n}$$

(див. (5.68)) та є структуроподібною.

Означення 5.1. Послідовність елементів $p_{i_k}^k$, $k = 1, 2, \dots$ з матриці

$$P = (p_{i_k}^k)_{k=1, i_k=1}^{\infty, n}$$

називають 0-збіжною, якщо

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{i_k}^k < \infty.$$

Послідовність $p_{i_k}^k$, $k = 1, 2, \dots$ називають 1-збіжною, якщо

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_{i_k}^k > 0. \quad (5.73)$$

Умову (5.73) можна записати в аналогічному вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_{i_k}^k) < \infty.$$

В загальному випадку, вибір 1-збіжної послідовності елементів матриці P є нетривіальною задачею, оскільки всі вектори $\mathbf{p}^k$ є стохастичними, тобто $0 \leq p_{i_k}^k \leq 1$.

В теоремі 5.11 доведено існування граничного нерухомого стану $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty\}$. З цього факту випливає існування граничних інваріантних мір

$$\mu^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^t, \nu^\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \nu^t$$

. Далі знайдемо достатні умови для того, щоб $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_{\text{пр}}$.

Лема 5.1. *Якщо існує єдиний регіон $\Omega_{\mathbf{i}}$ такий, що*

$$p_{\mathbf{i}} = \max_{i=1}^n \{p_i\}, \quad r_{\mathbf{i}} = \max_{i=1}^n \{r_i\}, \quad (5.74)$$

або

$$\sigma_{\mathbf{i}} = \sigma_{\max} = \max_{i=1}^n \{\sigma_i\}, \quad \rho_{\mathbf{i}} = \rho_{\max} = \max_{i=1}^n \{\rho_i\}, \quad (5.75)$$

то послідовність $p_{\mathbf{i}}^t, r_{\mathbf{i}}^t, t = 1, 2, \dots$ є 1-збіжною, тобто

$$\prod_{t=1}^{\infty} p_{\mathbf{i}}^t > 0, \quad \prod_{t=1}^{\infty} r_{\mathbf{i}}^t > 0. \quad (5.76)$$

Доведення. Припустимо одна з умов (5.75) або (5.74) виконується для єдиного $\mathbf{i}$. Це означає, що для всіх $i \neq \mathbf{i}$

$$\sigma_i < \sigma_{\mathbf{i}}, \quad \rho_i < \rho_{\mathbf{i}}$$

або

$$p_i < p_{\mathbf{i}}, \quad r_i < r_{\mathbf{i}}.$$

Покажемо, що кожна з послідовностей $\{p_i^t\}_{t=1}^{\infty}, i \neq \mathbf{i}$, є 0-збіжною, тобто

$$\sum_{t=1}^{\infty} p_i^t < \infty. \quad (5.77)$$

З теореми 5.13 отримуємо, що при виконанні однієї з умов (5.74), (5.75), всі координати $p_i^t, r_i^t, i \neq \mathbf{i}$ прямують до нуля

$$p_i^t \rightarrow 0, \quad r_i^t \rightarrow 0, \quad \theta^t \rightarrow 1, \quad t \rightarrow \infty, \quad i \neq \mathbf{i}.$$

З (5.39) отримуємо

$$p_i^{t+1} = p_i^t \cdot c_i^t = p_i \prod_{t=0}^{\infty} c_i^t, \quad c_i^t = \frac{1 + r_i^t}{1 + \theta^t}. \quad (5.78)$$

У випадку $r_i^t < \theta^t$ отримуємо $c_i^{t+1} < c_i^t$. Навпаки, якщо $r_i^t > \theta^t$, то $c_i^{t+1} > c_i^t$. Оскільки $r_i^t \rightarrow 0$ і $\theta^t \rightarrow 1$, то починаючи з деякого T всі $c_i^t, t > T$ стають меншими за одиницю і монотонно спадають, тобто

$$0 < c_i^t \leq c < 1, \quad c := c_i$$

Нехай $T = 1$. Тоді ряд (5.77) можна порівняти з рядом геометричної прогресії $\sum_{l=1}^{\infty} p_i c^l$, оскільки кожен член першого ряду менший за відповідний член збіжного ряду. Очевидно цей ряд збігається завдяки знаменнику $c < 1$. Це доводить, що сума ряду (5.77) є скінченною. Якщо $T > 1$, то ряд (5.77) також є збіжним, оскільки часткова сума перших $T - 1$ членів цього ряду скінчена.

Таким чином вище доведено, що

$$\sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_{i \neq \mathbf{i}} p_i^t \right) = \sum_{t=1}^{\infty} (1 - p_{\mathbf{i}}^t) < \infty.$$

Більше того, послідовність $\{p_{\mathbf{i}}^t\}_{t=1}^{\infty}$ є 1-збіжною, тобто $\prod_{t=0}^{\infty} p_{\mathbf{i}}^t > 0$. $\square$

Нагадаємо, що за теоремою типу Джессена-Вінтнера, міри μ^{∞} , ν^{∞} є чисто точковими, якщо

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{i_1 \dots i_k} \mu^{\infty}(\Omega_{i_1 \dots i_k}) > 0, \quad \prod_{k=1}^{\infty} \max_{i_1 \dots i_k} \nu^{\infty}(\Omega_{i_1 \dots i_k}) > 0, \quad (5.79)$$

де потрібно розглядати $\Omega_{i_1 \dots i_k}^{\#}$ замість $\Omega_{i_1 \dots i_k}$ оскільки загалом $\mu^t(\Omega_{i_1 \dots i_k}) \neq \mu^{\infty}(\Omega_{i_1 \dots i_k})$ та $\nu^t(\Omega_{i_1 \dots i_k}) \neq \nu^{\infty}(\Omega_{i_1 \dots i_k})$.

Теорема 5.19. *Граничні міри μ^{∞} та ν^{∞} , побудовані відповідно до формул (5.66)–(5.69) є чисто точковими, $\mu^{\infty}, \nu^{\infty} \in \mathcal{M}_{\text{pp}}$, якщо існує єдиний регіон $\Omega_{\mathbf{i}}$ такий, що виконується одна з умов (5.74) або (5.75).*

Доведення. Зауважимо, що умови (5.76) та (5.79) еквівалентні. Тому доведення теореми впливає з леми 5.1. $\square$

Вище знайдено умови для початкових розподілів динамічних систем конфлікту з притягальною взаємодією, які гарантують виникнення чисто точкового спектру в граничних розподілах. Основний результат стверджує, що головна умова виду (5.79) з теореми типу Джессена-Вінтнера виконується тоді, і тільки тоді, коли обидва опоненти обирають стратегію найбільшого пріоритету в деякому єдиному регіоні ω_i , тобто стартові розподіли опонентів сконцентровані в єдиній локальній області (див. умови (5.74), (5.75)).

6 РІВНОВАЖНІ ПОТЕНЦІАЛИ ТА ЗАДАЧА МІНІМІЗАЦІЇ ЕНЕРГІЙ НА КОНДЕНСАТОРАХ З ДОТИЧНИМИ ПЛАСТИНАМИ

Вивчається задача мінімізації енергій при наявності зовнішніх полів для ядер α -Рісса $\kappa_\alpha(x, y) := |x - y|^{\alpha-n}$, $\alpha \in (0, 2]$, над класами знакозмінних мір Радона μ на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, асоційованими з *узагальненим конденсатором* $\mathbf{A} := (A_1, A_2)$, де додатна пластина A_1 — це відносно замкнена підмножина (відкритої, зв'язної) області $D \subset \mathbb{R}^n$, а від'ємна пластина A_2 — доповнення D до $\mathbb{R}^n$, тобто $A_2 := D^c := \mathbb{R}^n \setminus D$. Зауважимо, що оскільки A_1 та A_2 можуть дотикатися одна до іншої по множині $\Omega := A_2 \cap \text{Cl}_{\mathbb{R}^n} A_1$ як завгодно великої (навіть нескінченної) ємності,¹ цілком очікуваним є явище короткого замикання між протилежно зарядженими пластинами конденсатора.² Тим не менше, задача мінімізації енергій виявляється розв'язною (а коротке замикання — відсутнім), якщо допустимі розподіли задовольняють верхню крайову умову $\mu^+ \leq \xi$, де μ^+ — додатна частина міри μ в її канонічному розкладі $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $\mu^\pm \geq 0$, а ξ — належним чином визначена мажорантна міра. Показано непокращуваність достатніх умов розв'язності, виділено характеристичні властивості екстремалей, дано опис їхніх носіїв та потенціалів. Проведений аналіз базується на встановленому тісному взаємозв'язку між, з одного боку, задачею мінімізації α -ріссової енергії над класом знакозмінних мір, асоційованих з конденсатором (A_1, A_2) , та, з іншого боку, задачею мінімізації α -грінової енергії над класом додатних мір Радона, зосереджених на додатній пластині A_1 . Ефективний аналіз останньої ґрунтується на встановленому у звітний період факті узгодженості α -грінового ядра (термінологія Фугледі [81]), що зводиться до повноти конуса додатних мір у сильній α -гріновій топології. Згадані результати узагальнено на випадок векторних мір Радона³ та викладено в роботах [92], [95]–[103], [105, 106, 108, 109, 111, 115, 116, 118, 119].

¹Наприклад, відкрита куля $A_1 := \{x : |x| < 1\}$ та її доповнення $A_2 := \{x : |x| \geq 1\}$ утворюють узагальнений конденсатор $\mathbf{A}$, де множиною дотику Ω служить вся сфера $\{x : |x| = 1\}$. Див. приклад 6.3 належної мажорантної міри ξ , що гарантує відсутність короткого замикання між A_1 та A_2 .

²Така термінологія з електростатики є цілком доречною, оскільки при $n = 3$ та $\alpha = 2$ взаємодія між одиничними мірами Дірака ε_x та ε_y в точках $x, y \in \mathbb{R}^3$ визначається законом Кулона $1/|x - y|$.

³Для простоти формулювань всі викладки звіту наведено для скалярного випадку.

6.1 Позначення, означення, відомі факти

6.1.1 До теорії мір Радона на локально компактному просторі

Надалі X позначає локально компактний простір, що задовольняє аксіому віддільності Хаусдорфа, $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X)$ — лінійний простір усіх дійсних мір Радона μ на X , устаткований (сепарабельною) топологією *широкої* (*=грубої*) збіжності, тобто топологією поточної збіжності на класі $C_0(X)$ усіх неперервних функцій $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ з компактним носієм, а $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}^+(X)$ — опуклий, широко замкнений конус усіх додатних $\mu \in \mathfrak{M}$. Для наших цілей досить вважати, що X задовольняє другу аксіому зліченності; як показано в [121], тоді широка топологія на $\mathfrak{M}$ задовольняє першу аксіому зліченності, а тому може бути повністю описана в термінах збіжних послідовностей (а не фільтрів, як це було б у загальному випадку довільного X). Нехай μ^+ та μ^- позначає відповідно додатну та від’ємну частини міри μ в канонічному розкладі Хана–Жордана, $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ — її загальну варіацію, а $S(\mu) = S_X^\mu$ — її носій. Міра $\mu \in \mathfrak{M}$ називається *обмеженою*, якщо $|\mu|(X) < \infty$. (Ці та інші потрібні нам факти теорії мір Радона та інтегрування в X можна знайти, наприклад, у Бурбакі [73].)

Міра $\mu \in \mathfrak{M}^+$ називається *зосередженою* на множині $Q \subset X$, якщо доповненням $Q^c := X \setminus Q$ можна локально нехтувати; або еквівалентно, якщо Q є μ -вимірною і $\mu = \mu|_Q$, де $\mu|_Q := 1_Q \cdot \mu$ позначає звуження міри μ на Q [73, розділ V.5.3]. (Тут 1_Q — характеристична функція для Q .) Конус усіх $\mu \in \mathfrak{M}^+$, зосереджених на Q , позначимо символом $\mathfrak{M}^+(Q; X)$.⁴ Тоді для повної маси міри $\mu \in \mathfrak{M}^+(Q; X)$ маємо $\mu(X) = \mu_*(Q)$, де $\mu_*(\cdot)$ — *внутрішня міра* множини. Зауважимо також, що оскільки простір X задовольняє другу аксіому зліченності, то він є простором класу K_σ (див. [75, розділ IX.2, наслідок до твердження 16]), а отже μ належить до $\mathfrak{M}^+(Q; X)$ тоді і лише тоді, коли $\mu^*(Q^c) = 0$, де $\mu^*(\cdot)$ — *зовнішня міра* множини. Крім того, для кожної міри $\mu \in \mathfrak{M}^+$ і кожної μ -вимірної множини Q маємо $\mu|_Q \in \mathfrak{M}^+(Q; X)$.

Припустимо на хвилинку, що множина Q є *локально замкненою* в X . Згідно з [74, розділ I.3], це означає, що для кожного $x \in Q$ існує окіл V точки x в X такий, що $V \cap Q$ є замкненою підмножиною підпростору $V \subset X$. Тоді Q є неминуче універсально вимірною [74, розділ I.3, твердження 5], а тому $\mathfrak{M}^+(Q; X)$ складається з усіх звужень $\mu|_Q$, де μ пробігає сукупність $\mathfrak{M}^+$

⁴Зокрема, якщо множина Q замкнена, то $\mathfrak{M}^+(Q; X)$ складається з усіх $\mu \in \mathfrak{M}^+$ з $S(\mu) \subset Q$.

усіх додатних мір Радона на X . З іншого боку, локально замкнена множина Q сама може розглядатися як локально компактний підпростір простору X , див. [74, розділ I.9, твердження 13]. Тому $\mathfrak{M}^+(Q; X)$ може також трактуватися як клас усіх тих $\nu \in \mathfrak{M}^+(Q)$, для кожного з яких існує $\widehat{\nu} \in \mathfrak{M}^+(X)$ з властивістю

$$\widehat{\nu}(\varphi) = \int \varphi|_Q d\nu \quad \text{для всіх } \varphi \in C_0(X). \quad (6.1)$$

Ми кажемо, що така $\widehat{\nu} \in \mathfrak{M}^+(X)$ *продовжує* початкову міру $\nu \in \mathfrak{M}^+(Q)$ нулем назовні Q до всього X . Таке продовження існує, зокрема, якщо міра $\nu \in \mathfrak{M}^+(Q)$ є обмеженою, однак ця достатня умова існування продовження не є необхідною умовою.

6.1.2 До теорії потенціалів на локально компактному просторі

Для довільного топологічного простору Y позначимо через $\Phi(Y)$ множину всіх додатних напівніперервних знизу функцій $\psi : Y \rightarrow [0, \infty]$.

Під *ядром* теорії потенціалів на локально компактному просторі X надалі розуміється довільна фіксована функція $\kappa \in \Phi(X \times X)$. Якщо $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$, то *взаємна енергія* $E_\kappa(\mu, \nu)$ та *потенціал* $\kappa\mu$ (відносно ядра κ) визначаються відповідно рівностями

$$E_\kappa(\mu, \nu) := \int \kappa(x, y) d(\mu \otimes \nu)(x, y) \quad \text{та} \quad \kappa\mu := \int \kappa(\cdot, y) d\mu(y).$$

(Тут і надалі, вводячи позначення для чисельної величини, ми завжди вважаємо таку величину добре визначеною — як скінченне число або $\pm\infty$.)

Зауважимо, що потенціал $\kappa\mu$, $\mu \in \mathfrak{M}$, є добре визначеним в $x \in X$, якщо величина $\kappa\mu^+(x)$ або $\kappa\mu^-(x)$ є скінченною, і тоді $\kappa\mu(x) = \kappa\mu^+(x) - \kappa\mu^-(x)$. Зокрема, якщо $\mu \in \mathfrak{M}^+$, то потенціал $\kappa\mu$ є добре визначеним скрізь на X і є функцією класу $\Psi(X)$. Аналогічно, взаємна енергія $E_\kappa(\mu, \nu)$ для $\mu, \nu \in \mathfrak{M}$ є добре визначеною, якщо $E_\kappa(\mu^+, \nu^+) + E_\kappa(\mu^-, \nu^-)$ або $E_\kappa(\mu^+, \nu^-) + E_\kappa(\mu^-, \nu^+)$ має скінченне значення. При $\mu = \nu$, $E_\kappa(\mu) := E_\kappa(\mu, \mu)$ визначає *енергію* міри μ . Нехай $\mathcal{E}_\kappa = \mathcal{E}_\kappa(X)$ складається з усіх $\mu \in \mathfrak{M}$ зі скінченною енергією $E_\kappa(\mu)$, що еквівалентно $(|\mu| \otimes |\mu|)$ -інтегровності функції κ :

$$\mu \in \mathcal{E}_\kappa \iff E_\kappa(|\mu|) < \infty. \quad (6.2)$$

Позначимо $\mathcal{E}_\kappa^+ = \mathcal{E}_\kappa^+(X) := \mathcal{E}_\kappa \cap \mathfrak{M}^+$.

Ввівши тепер в розгляд зовнішнє поле $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, визначимо (поки що формально) f -ваговий потенціал $W_{\kappa,f}^\mu$ та f -вагову енергію $G_{\kappa,f}(\mu)$ міри $\mu \in \mathcal{E}_\kappa$ рівностями⁵

$$W_{\kappa,f}^\mu := \kappa\mu + f, \quad (6.3)$$

$$G_{\kappa,f}(\mu) := E_\kappa(\mu) + 2 \int f d\mu. \quad (6.4)$$

Позначимо через $\mathcal{E}_{\kappa,f} = \mathcal{E}_{\kappa,f}(X)$ клас усіх $\mu \in \mathcal{E}_\kappa$ зі скінченним інтегралом Гаусса $G_{\kappa,f}(\mu)$, що еквівалентно $|\mu|$ -інтегровності зовнішнього поля f .

Для довільних $Q \subset X$ і $q \in (0, \infty)$ позначимо

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\kappa^+(Q; X) &:= \mathcal{E}_\kappa \cap \mathfrak{M}^+(Q; X), \\ \mathfrak{M}^+(Q, q; X) &:= \{\mu \in \mathfrak{M}^+(Q; X) : \mu(Q) = q\}, \\ \mathcal{E}_\kappa^+(Q, q; X) &:= \mathcal{E}_\kappa \cap \mathfrak{M}^+(Q, q; X). \end{aligned}$$

Внутрішня ємність множини Q відносно ядра κ визначається рівністю (див. [81])

$$c_\kappa(Q) := \left[\inf_{\mu \in \mathcal{E}_\kappa^+(Q, 1; X)} E_\kappa(\mu) \right]^{-1}.$$

Кажуть, що твердження $\mathcal{T}(x)$, $x \in X$, виконується c_κ -приблизно всюди (c_κ -пр. вс.) на множині Q , якщо воно виконується всюди на Q за можливим винятком її підмножини нульової внутрішньої ємності. Міра $\mu \in \mathfrak{M}^+$ називається c_κ -абсолютно неперервною, якщо $\mu|_K = 0$ для кожної компактної множини $K \subset X$ з $c_\kappa(K) = 0$. Усі міри класу $\mathcal{E}_\kappa^+$ є c_κ -абсолютно неперервними, але не навпаки.

Надалі будемо вважати ядро κ строго додатно визначеним, що означає виконання наступних трьох умов: (а) $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$ для всіх $x, y \in X$; (б) $E_\kappa(\mu) \geq 0$ для всіх $\mu \in \mathfrak{M}$, — звісно, якщо значення $E_\kappa(\mu)$ є добре визначеним; (с) $E_\kappa(\mu) = 0 \iff \mu = 0$. Тоді множина $\mathcal{E}_\kappa$ утворює передгільбертовий простір з (енергетичними) скалярним добутком $\langle \mu, \nu \rangle_\kappa := E_\kappa(\mu, \nu)$ та нормою $\|\mu\|_\kappa := \sqrt{E_\kappa(\mu)}$ (див. [81]). (Сепарабельна) топологія на $\mathcal{E}_\kappa$, що визначається нормою $\|\cdot\|_\kappa$, називається *сильною*.

Означення 6.1 (див. Fuglede [81]). (Строго додатно визначене) ядро κ називається *довершеним*, якщо задовольняються наступні дві умови:

(P₁) Конус $\mathcal{E}_\kappa^+$ є повним в індукованій сильній топології.

⁵ f -вагова енергія $G_{\kappa,f}(\mu)$ відома в літературі також як *інтеграл Гаусса* (див., наприклад, [84, 85]), що обумовлено дослідженням цього функціоналу в піонерській роботі Гаусса [82].

(P_2) Сильна топологія на $\mathcal{E}_\kappa^+$ сильніша від індукованої широкої топології на $\mathcal{E}_\kappa^+$.

Приклад 6.1. Ньютонове ядро $\kappa_2(x, y) := |x - y|^{2-n}$ та, більш загально, α -ріссове ядро $\kappa_\alpha(x, y) := |x - y|^{\alpha-n}$ порядку $\alpha \in (0, n)$ на $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, є довершеним (див. [76, 77]). Узагальнене (2-)грінове ядро на плоскій гріновій множині є строго позитивно визначеним [79, розділ I.XIII.7] та довершеним [80]. Логарифмічне ядро $-\log |x - y|$ на замкненому диску в $\mathbb{R}^2$ радіуса < 1 є строго позитивно визначеним та задовольняє першому принципу максимуму [84, теореми 1.6, 1.16], а отже є довершеним внаслідок теореми 3.4.2 з [81]. Нарешті, у звітний період була доведена теорема про довершеність α -грінового ядра порядку $0 < \alpha \leq 2$ на довільній області в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ (див. розділ 6.2 нижче).

Зауваження 6.1. Як видно з означення 6.1, поняття довершених ядер є ефективним засобом дослідження екстремальних задач теорії потенціалу над класами додатних мір Радона. Дійсно, теорія внутрішніх ємностей довільних множин у локально компактному просторі була побудована В. Fuglede [81] саме для цих ядер. Ця теорія узагальнює та розвиває відповідну класичну теорію Н. Cartan [76] для ядра Ньютона в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Зауваження 6.2. Пізніше Н.В. Зорій було показано, що концепція довершених ядер є також ефективною в дослідженні задач мінімізації енергій над класом векторних мір Радона скінченної чи нескінченної розмірності, асоційованих з стандартним конденсатором, протилежно заряджені пластини якого не перетинаються, див. [88]– [91]. Підхід, розвинений в [88]– [91], ґрунтується на умові обмеженості ядра на декартовому добутку протилежно заряджених пластин конденсатора, яка дозволила узагальнити доведення Картана [76] сильної повноти конуса $\mathcal{E}_{\kappa_2}^+(\mathbb{R}^n)$ усіх додатних мір на $\mathbb{R}^n$ зі скінченною ньютонівською енергією на випадок довільного довершеного ядра κ на довільному локально компактному просторі X та належних класів *знакозмінних* мір $\mu \in \mathcal{E}_\kappa(X)$. Нагадаємо, що навіть у класичному ньютонівському випадку простір $\mathcal{E}_{\kappa_2}(\mathbb{R}^n)$ усіх мір на $\mathbb{R}^n$ зі скінченною енергією вже *не* є сильно повним, див. [84, теорема 1.19], тому згадана умова обмеженості ядра на декартовому добутку протилежно заряджених пластин конденсатора є *істотною* для підходу, розвиненого в [88]– [91]. Нарешті зауважимо, що дослідження Н.В. Зорій у звітний період стосуються якраз випадку, коли ця умова обмеженості не виконується, а отже методи, розроблені в [88]– [91], вже не є ефективними.

6.2 Теорія α -грінових потенціалів та α -ріссового вимітання

Зафіксуємо $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 2]$ та область $D \subset \mathbb{R}^n$ таку, що $c_{\kappa_\alpha}(D^c) > 0$. Всюди в розділах 6.2 та 6.3 в ролі ядра κ на локально компактному просторі X виступає або α -ріссове ядро κ_α на $X = \mathbb{R}^n$, або ж α -грінове ядро $g = g_D^\alpha$ на $X = D$ (щодо означення ядра g_D^α , див. [84, розділ IV.5], роботи [95, 105] за звітний період, а також текст звіту нижче). Будемо писати α замість κ_α , коли κ_α служить індексом, і будемо писати ‘пр. вс.’ замість ‘ c_α -пр. вс.’, якщо це не може привести до двояких тлумачень.

Говорячи про міру μ класу $\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$, будемо завжди вважати її потенціал $\kappa_\alpha \mu$ не рівним тотожно $+\infty$. Це рівносильно виконанню умови (див. [84, (1.3.10)])

$$\int_{|y|>1} \frac{d\mu(y)}{|y|^{n-\alpha}} < \infty, \quad (6.5)$$

і тоді потенціал $\kappa_\alpha \mu$ є насправді скінченним (c_α) -пр. вс. на $\mathbb{R}^n$ (див. [84, розділ III.1]).

Позначимо через $\check{\mathfrak{M}}(D)$ клас усіх $\nu \in \mathfrak{M}(D)$, для кожного з яких існують $\widehat{\nu}^+$ та $\widehat{\nu}^-$, що задовольняють (6.5) та продовжують ν^+ і, відповідно, ν^- нулем назовні D до всього $\mathbb{R}^n$, див. (6.1). Там, де це не може викликати двояких тлумачень, міра $\nu \in \check{\mathfrak{M}}(D)$ ототожнюється з її продовженням $\widehat{\nu} := \widehat{\nu}^+ - \widehat{\nu}^-$:

$$\nu = \widehat{\nu}.$$

Клас $\check{\mathfrak{M}}(D)$ складається з усіх звужень $\mu|_D$, де μ пробігає $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$. Зокрема, усі обмежені міри $\nu \in \mathfrak{M}(D)$ входять в $\check{\mathfrak{M}}(D)$. Також зауважимо рівність

$$\check{\mathfrak{M}}^+(D) = \mathfrak{M}^+(D; \mathbb{R}^n),$$

де $\check{\mathfrak{M}}^+(D)$ складається з усіх додатних мір класу $\check{\mathfrak{M}}(D)$.

α -грінове ядро $g = g_D^\alpha$ на області D визначається формулою (див. [72, 84, 105])

$$g_D^\alpha(x, y) = \kappa_\alpha \varepsilon_y(x) - \kappa_\alpha \varepsilon_y^{D^c}(x) \quad \text{для всіх } x, y \in D, \quad (6.6)$$

де $\varepsilon_y^{D^c}$ — α -ріссове вимітання міри Дірака ε_y на множину D^c . (Щодо α -ріссового вимітання, див. [72, 84], а також виконані у звітний період роботи [105, 116, 117, 119–121].)

Говорячи про α -ріссове вимітання міри $\mu \in \mathfrak{M}^+(D; \mathbb{R}^n)$ на D^c , будемо скорочено писати $\mu' := \mu^{D^c}$. Згідно з [105, Corollaries 3.19, 3.20], вимітання

μ' — єдина c_α -абсолютно неперервна міра класу $\mathfrak{M}^+(D^c; \mathbb{R}^n)$, що задовольняє умови

$$\begin{aligned}\kappa_\alpha \mu' &= \kappa_\alpha \mu \quad \text{пр. вс. на } D^c, \\ \kappa_\alpha \mu' &\leq \kappa_\alpha \mu \quad \text{всюди на } \mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Це твердження може, очевидно, слугувати одним з (еквівалентних) визначень вимітання μ' . Якщо ж міра μ має скінченну α -ріссову енергію, то μ' — суть ортогональна проекція μ в передгільбертовому просторі $\mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ на опуклий конус $\mathcal{E}_\alpha^+(D^c; \mathbb{R}^n)$:

$$\|\mu - \mu'\|_\alpha < \|\mu - \nu\|_\alpha \quad \text{для всіх } \nu \in \mathcal{E}_\alpha^+(D^c; \mathbb{R}^n), \nu \neq \mu'.$$

Корисним є наступне інтегральне зображення вимітання μ' :

$$\mu' = \int \varepsilon'_y d\mu(y)\tag{6.8}$$

(див. [105, Theorem 3.17] або, більш загально, [121, Theorem 5.1]).

Відсилаючи до [105, 117, 119, 120] за визначенням та детальним аналізом α -ріссового вимітання μ^Q довільної міри $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ на довільну множину $Q \subset \mathbb{R}^n$, обмежимося тут формулюванням наступних теорем, ключових для задач теорії конденсаторів.

Означення 6.2. Замкнена множина $Q \subset \mathbb{R}^n$ називається α -тонкою на нескінченності, якщо Q є компактною в $\mathbb{R}^n$, або ж якщо $x = 0 \in \alpha$ -іррегулярною граничною точкою для інверсії Q відносно сфери з центром в $x = 0$. (Тут α -іррегулярність визначається відомим критерієм Вінера — див., наприклад, [84].)

Зауваження 6.3. Множина Q , яка є α -нетонкою на нескінченності, має нескінченну α -ріссову ємність. Обернене до цього твердження не виконується. Див. [119, Remark 2.4] або [121, Section 2]; для ілюстрації, див. виноску 7 до прикладу 6.2 нижче по тексту.

Теорема 6.1 (див. [117, Theorems 8.6, 8.7]). D^c є α -тонкою на нескінченності тоді і лише тоді, коли для кожної ненульової обмеженої міри $\mu \in \mathfrak{M}^+(D)$ виконується⁶

$$\mu'(\mathbb{R}^n) < \mu(\mathbb{R}^n).$$

⁶Взагалі кажучи, $\mu'(\mathbb{R}^n) \leq \mu(\mathbb{R}^n)$ (див. [105, Theorem 3.11]).

Приклад 6.2. Нехай $n = 3$ і $\alpha = 2$. Розглянемо тіло обертання

$$Q_\varrho := \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x_1 < \infty, x_2^2 + x_3^2 \leq \varrho^2(x_1)\},$$

де ϱ визначається одною з наступних формул:

$$\varrho(x_1) = x_1^{-s} \quad \text{при } s \in [0, \infty), \quad (6.9)$$

$$\varrho(x_1) = \exp(-x_1^s) \quad \text{при } s \in (0, 1], \quad (6.10)$$

$$\varrho(x_1) = \exp(-x_1^s) \quad \text{при } s \in (1, \infty). \quad (6.11)$$

Множина Q_ϱ є 2-нетонкою на нескінченності, якщо ϱ визначається формулою (6.9), але вона буде 2-тонкою на нескінченності у інших двох випадках.⁷ Отже, внаслідок теореми 6.1 для кожної обмеженої, додатної, ненульової міри μ , зосередженої на $\mathbb{R}^3 \setminus Q_\varrho$, маємо $\mu'(\mathbb{R}^n) = \mu(\mathbb{R}^n)$ при умові (6.9), але вже $\mu'(\mathbb{R}^n) < \mu(\mathbb{R}^n)$ в інших двох випадках.

Наступна теорема 6.2 була раніше відомою лише в класичному ньютонівському випадку $\alpha = 2$ (див. [68, Theorem 5.1.11] та [79, Section I.V.10]).

Теорема 6.2 (див. [105, Theorem 4.6]). α -грінове ядро $g = g_D^\alpha$ задовольняє повному принципу максимуму. А саме, для довільних $\mu \in \mathcal{E}_g^+(D)$, $\nu \in \mathfrak{M}^+(D)$ та $q \in [0, \infty)$ таких, що

$$g\mu \leq g\nu + q \quad \mu\text{-майже всюди на } D,$$

ця ж нерівність виконується всюди на D .

Теорема 6.3 (див. [105, Theorems 4.9, 4.11]). Ядро $g = g_D^\alpha$ є строго додатно визначеним. Крім того, воно задовольняє умовам (P_1) та (P_2) , а отже є довершеним.

Зауваження 6.4. Теорема 6.3 про довершеність α -грінового ядра g_D^α при $D \neq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, є новою навіть в класичному ньютонівському випадку $\alpha = 2$. (Довершеність (2-)грінового ядра для плоскої грінової області $D \subset \mathbb{R}^2$, $D \neq \mathbb{R}^2$, доведена R. Edwards [80].) Якщо ж $D = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, то теорема 6.3 зводиться до твердження про довершеність α -ріссового ядра, доведеного H. Cartan [76] при $\alpha = 2$ та J. Deny [77] при $\alpha \in (0, 2)$.

Комбінуючи теореми 6.2 та 6.3 з [81, Theorem 4.1], отримаємо наступний результат про існування α -грінової рівноважної міри γ_F для кожної відносно замкненої множини $F \subset D$ з $c_g(F) < \infty$; див. також [116, Theorem 9.1], де дається опис її носія $S_D^{\gamma_F}$.

⁷При цьому $c_2(Q_\varrho) = \infty$, якщо виконується (6.10), однак $c_2(Q_\varrho) < \infty$ при умові (6.11).

Теорема 6.4 (див. [116, Theorem 3.2]). Для довільної відносно замкненої множини $F \subset D$ з $c_g(F) < \infty$ існує єдина α -грінова рівноважна міра $\gamma = \gamma_{F,g} \in \mathcal{E}_g^+(D)$ з наступними властивостями:⁸

$$\begin{aligned} E_g(\gamma) &= \gamma(D) = c_g(F), \\ g\gamma &= 1 \quad (c_g\text{-})\text{пр. вс. на } F, \\ g\gamma &\leq 1 \quad \text{всюди на } D. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Ця міра γ є розв'язком задачі мінімізації енергії $E_g(\nu)$ над класом Γ_F усіх (знакозмінних) мір $\nu \in \mathcal{E}_g(D)$ з властивістю $g\nu \geq 1$ (c_g -)пр. вс. на F , тобто маємо

$$c_g(F) = \|\gamma\|_g^2 = \min_{\nu \in \Gamma_F} \|\nu\|_g^2.$$

Співвідношення (6.12) може бути посилене наступним чином:

$$g\gamma = 1 \quad \text{всюди на } F \setminus I_{F,\alpha},$$

де $I_{F,\alpha}$ позначає множину всіх α -іррегулярних точок $x \in F$.

Зафіксуємо $\nu \in \check{\mathfrak{M}}(D)$. Інтегруючи (6.6) відносно $\nu^\pm$, з допомогою формули (6.8) та твердження 1 з [73, розділ V.3] отримаємо

$$g\nu = \kappa_\alpha \nu - \kappa_\alpha \nu' \quad \text{пр. вс. на } D, \tag{6.13}$$

де $\kappa_\alpha \nu$ та $\kappa_\alpha \nu'$ приймають скінченні значення пр. вс. на $\mathbb{R}^n$ внаслідок загальної умови (6.5). Щодо співвідношення між α -гріновою та α -ріссовою енергіями, див. леми 6.1 і 6.2.

Лема 6.1 (див. [119, Lemma 2.7]). Якщо міра $\nu \in \check{\mathfrak{M}}(D)$ обмежена і задовольняє умову

$$\inf_{x \in S_D^y, z \in D^c} |x - z| > 0, \tag{6.14}$$

то її α -грінова та α -ріссова енергії є одночасно скінченними або ж нескінченними.

Зауваження 6.5. Умова (6.14) є істотною для справедливості леми 6.1. Дійсно, в звітний період було побудовано приклад області D в $\mathbb{R}^3$ та обмеженої міри $\nu_0 \in \mathfrak{M}^+(D)$ таких, що $E_{g_D}^2(\nu_0) < \infty$, але при цьому $E_2(\nu_0) = \infty$

⁸Зауважимо, що для довільної множини $Q \subset D$ виконується (див. [92, Lemma 2.6])

$$c_g(Q) = 0 \iff c_\alpha(Q) = 0,$$

а тому висловлювання ' c_g -пр. вс. на Q ' та ' (c_α) -пр. вс. на Q ' рівносильні. Аналогічно, c_g -абсолютна неперервність міри $\mu \in \check{\mathfrak{M}}^+(D)$ рівносильна її c_α -абсолютній неперервності.

(див. [109, Example 10.1]). Цей приклад показує, що стандартне означення ньютонівської енергії знакозмінної міри є занадто обтяжливим для побудови теорії узагальнених конденсаторів, що спонукало нас до введення в аналіз альтернативної концепції α -ріссової енергії (див. розділ 7).

Лема 6.2 (див. [109, Lemma 3.5]). *Для кожної міри $\mu \in \mathfrak{M}(D)$ з $E_\alpha(\mu) < \infty$ маємо*

$$\|\mu\|_g^2 = \|\mu - \mu'\|_\alpha^2 = \|\mu\|_\alpha^2 - \|\mu'\|_\alpha^2.$$

6.3 Варіаційна задача Гаусса в мажорантній постановці

6.3.1 Мотивація

Ми продовжуємо працювати в припущеннях та позначеннях розділу 6.2. Як і на початку розділу 6, під (узагальненим) конденсатором $\mathbf{A}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, розуміється пара (A_1, A_2) , де A_1 — відносно замкнена підмножина області $D \subset \mathbb{R}^n$, а $A_2 := D^c$. Узагальнений конденсатор $\mathbf{A}$ назовемо *стандартним*, якщо виконана умова віддільності

$$\text{dist}(A_1, A_2) := \inf_{(x,y) \in A_1 \times A_2} |x - y| > 0. \quad (6.15)$$

Всюди, де не оговорено інше, $\mathbf{A}$ — узагальнений конденсатор. Тоді $A_2 \cap \text{Cl}_{\mathbb{R}^n} A_1$ може мати ненульову α -ріссову ємність (тут $\alpha \in (0, 2]$ фіксоване), і навіть співпадати з усім $\partial D = \partial_{\mathbb{R}^n} D$. Щоб уникнути тривіального випадку, всюди далі також вважаємо, що

$$c_\alpha(A_i) > 0 \quad \text{для } i = 1, 2. \quad (6.16)$$

Нехай $\mathfrak{M}(\mathbf{A}; \mathbb{R}^n)$ складається з усіх $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ таких, що μ^+ та μ^- зосереджені на A_1 та A_2 , відповідно, і нехай $\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}; \mathbb{R}^n) := \mathfrak{M}(\mathbf{A}; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Позначимо

$$\mathfrak{M}(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) := \{\mu \in \mathfrak{M}(\mathbf{A}; \mathbb{R}^n) : |\mu|(A_i) = 1 \text{ для } i = 1, 2\}, \quad (6.17)$$

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) := \mathfrak{M}(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n). \quad (6.18)$$

В силу (6.16) клас $\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ непорожній (див. [81, Lemma 2.3.1]), і тому має сенс задача про існування міри $\lambda_{\mathbf{A}, \alpha} \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ з мінімальною в цьому класі енергією:

$$\|\lambda_{\mathbf{A}, \alpha}\|_\alpha^2 = w_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}) := \inf_{\mu \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)} \|\mu\|_\alpha^2. \quad (6.19)$$

Для стандартного конденсатора варіаційну задачу (6.19) вдається розв'язати в рамках підходу, що ґрунтується на теоремі про сильну повноту конуса мір

$$\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}, \leq \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) := \{\mu \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}; \mathbb{R}^n) : |\mu|(A_i) \leq 1 \text{ для } i = 1, 2\}$$

(див. зауваження 6.2). Зокрема, розв'язок $\lambda_{\mathbf{A}, \alpha}$ задачі (6.19) існує, якщо множина A_2 є α -нетонкою на нескінченності, а $c_\alpha(A_1) < \infty$. Наступна теорема показує, що все це втрачає силу, якщо умова віддільності (6.15) не виконується.

Теорема 6.5 (див. [109, Theorem 4.3]). *Нехай множина A_2 є α -нетонкою на нескінченності і нехай $c_g(A_1) = \infty$, де $g := g_D^\alpha$. Тоді*

$$w_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}) = [c_g(A_1)]^{-1} = 0, \quad (6.20)$$

а отже, $w_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1})$ не може бути актуальним мінімумом.

Дійсно, у вказаних умовах існує послідовність мір $\nu_k \in \mathcal{E}_g^+(A_1, 1; D)$ з компактними носіями $S_D^{\nu_k}$ і таких, що $E_g(\nu_k) \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Застосовуючи теорему 6.1 і леми 6.1 та 6.2, маємо $\nu_k - \nu'_k \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ і $E_\alpha(\nu_k - \nu'_k) = E_g(\nu_k)$, звідки елементарно випливає (6.20).

Використовуючи термінологію з електростатики (що можливо при $\alpha = 2$ та $n = 3$), скажемо, що в припущеннях теореми 6.5 має місце електричний розряд між протилежно зарядженими пластинами конденсатора. Виникає наступне природне питання: *які додаткові умови, накладені на допустимі розподіли зарядів, могли б запобігти виникненню цього явища?*

6.3.2 Постановка задачі

В розділах 6.3.2–6.3.4 завжди вважаємо, що множина A_2 α -нетонка на нескінченності, а зовнішнє поле f (див. розділ 6.1.2) задовольняє одну з наступних умов:

($\mathcal{F}_1$) $f \in \Psi(\mathbb{R}^n)$ і, додатково,

$$f = 0 \text{ пр. вс. на } A_2; \quad (6.21)$$

($\mathcal{F}_2$) $f = \kappa_\alpha(\zeta - \zeta')$, де ζ належить класу $\check{\mathfrak{M}}^+(D)$ і має скінченну α -ріссову енергію.

Зауважимо, що рівність (6.21) має місце також при умові $(\mathcal{F}_1)$, див. (6.7). А оскільки множиною з нульовою ємністю можна завжди нехтувати при інтегруванні відносно міри зі скінченною α -ріссовою енергією [81, Lemma 2.3.1], f -вагова α -ріссова енергія $G_{\alpha,f}(\mu)$ міри $\mu \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}; \mathbb{R}^n)$ приймає вигляд

$$G_{\alpha,f}(\mu) := \|\mu\|_\alpha^2 + 2 \int f d\mu = \|\mu\|_\alpha^2 + 2 \int f d\mu^+,$$

див. (6.4). Отже,

$$G_{\alpha,f}(\mu) \geq -M > -\infty \quad \text{для всіх } \mu \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}; \mathbb{R}^n), \quad (6.22)$$

що очевидно виконується при умові $(\mathcal{F}_1)$, а при умові $(\mathcal{F}_2)$ випливає з співвідношення

$$\begin{aligned} \infty > G_{\alpha,f}(\mu) &= \|\mu\|_\alpha^2 + 2E_\alpha(\zeta - \zeta', \mu) \\ &= \|\mu + \zeta - \zeta'\|_\alpha^2 - \|\zeta - \zeta'\|_\alpha^2 \geq -\|\zeta - \zeta'\|_\alpha^2 > -\infty. \end{aligned}$$

Під *мажорантою* для мір класу $\mathfrak{M}^+(A_1, 1; \mathbb{R}^n)$ розуміємо довільну міру $\xi \in \mathcal{E}_\alpha^+(A_1; \mathbb{R}^n)$ з $\xi(A_1) > 1$. Множину всіх таких мажорант позначимо символом $\mathfrak{C}(A_1; \mathbb{R}^n)$. Позначимо

$$\mathcal{E}_\alpha^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) := \{\mu \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) : \mu^+ \leq \xi\},$$

де $\mu^+ \leq \xi$ означає, що $\xi - \mu^+ \geq 0$. Якщо

$$\mathcal{E}_{\alpha,f}^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) := \mathcal{E}_\alpha^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) \cap \mathcal{E}_{\alpha,f}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$$

(щодо визначення класу $\mathcal{E}_{\alpha,f}(\mathbb{R}^n)$, див. розділ 6.1.2), або, рівносильно, якщо⁹

$$G_{\alpha,f}^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) := \inf_{\mu \in \mathcal{E}_{\alpha,f}^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)} G_{\alpha,f}(\mu) < \infty, \quad (6.23)$$

тоді має сенс варіаційна задача Гаусса в наступній мажорантній постановці.

Задача 1. Чи існує $\lambda_{\mathbf{A}}^\xi \in \mathcal{E}_{\alpha,f}^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ з $G_{\alpha,f}(\lambda_{\mathbf{A}}^\xi) = G_{\alpha,f}^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$?

Умови, що забезпечують виконання (6.23), надаються наступною лемою 6.3.

Лема 6.3 ([109, Lemma 4.5]). *Нерівність (6.23) виконується при умові $(\mathcal{F}_2)$, або ж якщо*

$$\xi(A_1^\circ) > 1, \quad (6.24)$$

де $A_1^\circ := \{x \in A_1 : |f(x)| < \infty\}$.

⁹При умові (6.23) величина $G_{\alpha,f}^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ є насправді скінченною, див. (6.22).

Лема 6.4 ([109, Lemma 4.6]). Розв'язок $\lambda_{\mathbf{A}}^\xi$ задачі 1 є єдиним (якщо він існує).

Це доводиться стандартним методом, що базується на опуклості класу допустимих мір $\mathcal{E}_{\alpha,f}^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$, скінченності $G_{\alpha,f}^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ (див. виноску 9), правилі паралелограма в передгільбертовому просторі $\mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ та строгій додатній визначеності ядра Рісса.

Необхідні та достатні умови існування розв'язку $\lambda_{\mathbf{A}}^\xi$ задачі 1 наведено в розділі 6.3.4 (див. теореми 6.7 та 6.8). Там само дано повний опис його f -вагового потенціалу $W_{\alpha,f}^\lambda$ та носія $S(\lambda_{\mathbf{A}}^\xi)$ (див. теореми 6.10–6.12). (У нашому звіті ми обмежимося згаданими формулюваннями, відсилаючи до [99, 111, 112, 116, 118, 119] за іншими результатами з цих питань.)

6.3.3 Зведення задачі 1 до α -грінової задачі Гаусса на додатних мірах

Тут і в наступному розділі 6.3.4 ми зберігаємо всі умови на $\mathbf{A}$, f та ξ , сформульовані в розділах 6.3.1 та 6.3.2. Зауваживши, що мажоранта ξ є, по суті, мірою класу $\check{\mathfrak{M}}^+(D)$, зосередженою на A_1 , позначимо

$$\mathcal{E}_g^\xi(A_1, 1; D) := \{\mu \in \mathcal{E}_g^+(A_1, 1; D) : \mu \leq \xi\}.$$

Нехай $\mathcal{E}_{g,f}^\xi(A_1, 1; D)$ складається з усіх $\mu \in \mathcal{E}_g^\xi(A_1, 1; D)$, для яких функціонал Гаусса¹⁰

$$G_{g,f}(\mu) := G_{g,f|D}(\mu) = \|\mu\|_g^2 + 2 \int f|_D d\mu$$

є скінченним, див. (6.4). Якщо $\mathcal{E}_{g,f}^\xi(A_1, 1; D) \neq \emptyset$ або, рівносильно, якщо

$$G_{g,f}^\xi(A_1, 1; D) := \inf_{\mu \in \mathcal{E}_{g,f}^\xi(A_1, 1; D)} G_{g,f}(\mu) < \infty, \quad (6.25)$$

тоді має сенс наступна мажорантна задача Гаусса мінімізації α -грінових енергій.

Задача 2. Чи існує $\lambda_{A_1}^\xi \in \mathcal{E}_{g,f}^\xi(A_1, 1; D)$ з $G_{g,f}(\lambda_{A_1}^\xi) = G_{g,f}^\xi(A_1, 1; D)$?

Грунтуючись на строгій додатній визначеності ядра $g = g_D^\alpha$ (див. теорему 6.3), аналогічно як в лемі 6.4 бачимо, що розв'язок $\lambda_{A_1}^\xi$ задачі 2 є єдиним (див. [92, Lemma 4.1]).

¹⁰Зауважимо, що при умові $(\mathcal{F}_1)$ функціонал Гаусса $G_{g,f}(\mu)$ є широко напівнеперервним знизу на $\mathcal{E}_{g,f}^\xi(A_1, 1; D)$, а при умові $(\mathcal{F}_2)$ — неперервним в сильній топології, що визначається α -гріною енергетичною нормою. Це спостереження істотно використовується при доведенні наведеної нижче теореми 6.7.

Теорема 6.6 (див. [109, Theorem 5.2]). *В наших припущеннях має місце тотожність*

$$G_{\alpha,f}^{\xi}(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) = G_{g,f}^{\xi}(A_1, 1; D).$$

Якщо ж (6.23) або, еквівалентно, (6.25) має місце, то розв'язки задач 1 та 2 існують або не існують одночасно, і у випадку існування вони пов'язані між собою формулою

$$\lambda_{\mathbf{A}}^{\xi} = \lambda_{A_1}^{\xi} - (\lambda_{A_1}^{\xi})'. \quad (6.26)$$

Доведення теореми 6.6 ґрунтується на наведених в розділі 6.2 результатах про α -ріссове вимітання (зокрема, теоремі 6.1 про збереження повної маси міри при її вимітання на множину, α -нетонку на нескінченності) та лемах 6.1 та 6.2 про співвідношення між α -ріссовими та α -ґріновими енергіями.

Отже, (основна) задача 1 зводиться до (допоміжної) задачі 2 з допомогою формули (6.26). В свою чергу, аналіз задачі 2 ґрунтується на отриманих у звітний період властивостях α -ґрінового ядра (див. розділ 6.2) і, перш за все, теоремі 6.3 про його довершеність.

6.3.4 Про існування розв'язку задачі 1 та його властивості

Результати цього розділу наведено в [109, Section 6].

Нехай виконується нерівність (6.23); достатні умови для цього надані лемою 6.3. Наступні теореми 6.7 та 6.8 показують, що тоді обмеженість мажоранти є необхідною та достатньою умовою для розв'язності задачі 1 (а отже, і задачі 2, — див. теорему 6.6).

Теорема 6.7. *Нехай мажоранта $\xi \in \mathfrak{C}(A_1; \mathbb{R}^n)$ є обмеженою:*¹¹

$$\xi(A_1) < \infty. \quad (6.27)$$

Тоді задача 1 має (єдиний) розв'язок при кожній з умов $(\mathcal{F}_1)$ або $(\mathcal{F}_2)$.

Теорема 6.8. *Умова (6.27) є насправді не тільки достатньою, але й необхідною для розв'язності задачі 1. Дійсно, припустимо, що $c_{\alpha}(A_1) = \infty$ і виконується умова $(\mathcal{F}_2)$ з $\zeta \geq 0$. Тоді існує мажоранта $\xi \in \mathfrak{C}(A_1; \mathbb{R}^n)$ з $\xi(A_1) = \infty$ така, що*

$$G_{\alpha,f}^{\xi}(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) = 0;$$

а отже, $G_{\alpha,f}^{\xi}(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ не може бути актуальним мінімумом.

¹¹Іншого типу умови на мажоранту, що забезпечують розв'язність задачі Гаусса, отримано нами в [118] (див. там, наприклад, теорему 6.1); порівняй з [69]. Ми обмежимося тут формулюваннями з [109].

Приклад 6.3. Нехай $A_1 = D$ — відкрита куля $B_r := \{|x| < r\}$, $r \in (0, \infty)$, в $\mathbb{R}^3$, $A_2 := \{|x| \geq r\}$, $\alpha = 2$, $f = 0$. Розглянемо мажоранту $\xi := cm_3$, де m_3 — міра Лебега на $\mathbb{R}^3$, а константа c вибрана так, щоб $\xi(B_r) > 1$. Оскільки міра ξ є обмеженою і має скінченну енергію Кулона, в силу теореми 6.7 задача 1 має (єдиний) розв'язок. Отже, при наявності зазначеної мажоранти ξ між пластинами A_1 і A_2 конденсатора відсутній електричний розряд, хоча вони дотикаються одна до одної по всій сфері $\{|x| = r\}$.

Доведення теореми 6.7 ґрунтується на наступному твердженні про сильну повноту конуса $\mathcal{E}_g^\xi(A, 1; D)$ (див. [119, Лемма 6.1]), доведення якого в свою чергу істотно використовує теорему 6.3 про довершеність α -ґрінового ядра. (Див. також виноску 10.)

Теорема 6.9. *Нехай виконується умова (6.27). Тоді конус $\mathcal{E}_g^\xi(A, 1; D)$ є повним в індукованій сильній топології передґільбертового простору $\mathcal{E}_g(D)$, заданій нормою $\|\cdot\|_g$. Більш детально, кожна сильно фундаментальна послідовність $(\nu_j) \subset \mathcal{E}_g^\xi(A, 1; D)$ збігається одночасно сильно і широко до деякої єдиної міри $\nu_0 \in \mathcal{E}_g^\xi(A, 1; D)$.*

У наступних трьох теоремах надано опис f -вагового потенціалу $W_{\alpha, f}^{\lambda_A^\xi}$, див. (6.3), розв'язку $\lambda := \lambda_A^\xi$ задачі 1 та виділено його характеристичні властивості. Крім того, отримано опис носія $S_{\mathbb{R}^n}^{\lambda^\pm}$ — див. формули (6.31) та (6.34).

Теорема 6.10. *Нехай виконується умова (6.24), і нехай зовнішнє поле f обмежене знизу на A_1 . Зафіксуємо довільну допустиму міру $\lambda \in \mathcal{E}_{\alpha, f}^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$; така λ існує згідно з лемою 6.3. При кожній з умов $(\mathcal{F}_1)$ чи $(\mathcal{F}_2)$ наступні два твердження еквівалентні.¹²*

(i) λ — розв'язок задачі 1.

(ii) Виконується

$$W_{\alpha, f}^\lambda \geq c \quad (\xi - \lambda^+) \text{-майже всюди,} \quad (6.28)$$

$$W_{\alpha, f}^\lambda \leq c \quad \lambda^+ \text{-майже всюди,} \quad (6.29)$$

де $c \in \mathbb{R}$, а також

$$W_{\alpha, f}^\lambda = 0 \quad \text{пр. вс. на } A_2. \quad (6.30)$$

¹²При умові $(\mathcal{F}_1)$ вимога обмеженості знизу поля f на A_1 справджується автоматично. Крім того, при умові $(\mathcal{F}_1)$ твердження (6.29) еквівалентно такому: $W_{\alpha, f}^\lambda \leq c$ всюди на $S_D^{\lambda^+}$.

При умові $(\mathcal{F}_1)$ співвідношення (6.30) допускає таке уточнення:

$$W_{\alpha,f}^\lambda = 0 \quad \text{всюди на } A_2 \setminus I_{A_2,\alpha},$$

де $I_{A_2,\alpha}$ складається з усіх α -іррегулярних (граничних) точок множини A_2 .

Позначимо через $\check{A}_2$ κ_α -приведене ядро множини A_2 [84], тобто сукупність усіх $x \in A_2$ таких, що для кожного околу U_x точки x в $\mathbb{R}^n$ виконується $c_\alpha(U_x \cap A_2) > 0$. Теорема 6.11 та 6.12 даються в припущенні, що існує розв'язок $\lambda_{\mathbf{A}}^\xi = \lambda^+ - \lambda^-$ задачі 1. У теоремі 6.11 для простоти формулювання вважаємо, що при $\alpha = 2$ область D однозв'язна.

Теорема 6.11. *Виконуються рівності*

$$S_{\mathbb{R}^n}^{\lambda^-} = \begin{cases} \check{A}_2 & \text{при } \alpha < 2, \\ \partial D & \text{при } \alpha = 2. \end{cases} \quad (6.31)$$

Теорема 6.12. *Якщо $f = 0$, тоді*

$$W_{\alpha,f}^{\lambda_{\mathbf{A}}^\xi} = \kappa_\alpha \lambda_{\mathbf{A}}^\xi = \begin{cases} g_D^\alpha \lambda^+ & \text{пр. вс. на } D, \\ 0 & \text{всюди на } D^c \setminus I_{D^c,\alpha}, \end{cases}$$

а також виконується твердження (ii) теореми 6.10, де співвідношення (6.28) та (6.29) тепер приймають наступний вигляд з деякою константою $c \in (0, \infty)$:

$$\kappa_\alpha \lambda_{\mathbf{A}}^\xi = c \quad (\xi - \lambda^+)\text{-майже всюди}, \quad (6.32)$$

$$\kappa_\alpha \lambda_{\mathbf{A}}^\xi \leq c \quad \text{всюди на } \mathbb{R}^n. \quad (6.33)$$

Формули (6.32) та (6.33) разом з рівністю $\kappa_\alpha \lambda_{\mathbf{A}}^\xi = 0$ пр. вс. на D^c однозначно визначають розв'язок $\lambda_{\mathbf{A}}^\xi$ задачі 1 серед усіх допустимих мір $\mu \in \mathcal{E}_{\alpha,f}^\xi(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$. Крім того, при додатковій умові неперервності мажорантного потенціалу $\kappa_\alpha \xi$ маємо

$$\kappa_\alpha \lambda_{\mathbf{A}}^\xi = c \quad \text{всюди на } S_D^{\xi-\lambda^+},$$

$$c_{g_D^\alpha}(S_D^{\xi-\lambda^+}) < \infty.$$

Замість умови неперервності $\kappa_\alpha \xi$, припустимо тепер, що $\alpha < 2$ і $m_n(D^c) > 0$, де m_n позначає міру Лебега на $\mathbb{R}^n$. Тоді

$$S_D^{\lambda^+} = S_D^\xi, \quad (6.34)$$

$$\kappa_\alpha \lambda_{\mathbf{A}}^\xi < c \quad \text{всюди на } D \setminus S_D^\xi \quad \left(= D \setminus S_D^{\lambda^+} \right).$$

7 АЛЬТЕРНАТИВНА КОНЦЕПЦІЯ α -РІССОВОЇ ЕНЕРГІЇ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ НА УЗАГАЛЬНЕНИХ КОНДЕНСАТОРАХ

7.1 Мотивація

Як і в розділі 6, під (узагальненим) конденсатором $\mathbf{A}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, розуміємо пару (A_1, A_2) , де A_1 — відносно замкнена підмножина області $D \subset \mathbb{R}^n$, а $A_2 := D^c$. Конденсатор $\mathbf{A}$ називається стандартним, якщо виконана умова віддільності (6.15). Наприклад, пара (D, D^c) утворює узагальнений конденсатор (який, звісно, не є стандартним).

Зафіксуємо $\alpha \in (0, 2]$. Щоб уникнути тривіальності, вважаємо виконаною умову (6.16). Крім того, для зручності викладок вважаємо множину D^c α -нетонкою на нескінченності (див. розділ 6.2), — це виконується, наприклад, якщо область D обмежена.

Як впливає з результатів теорії α -ріссового вимітання та теорії α -грінових потенціалів, отриманих у звітний період і частково наведених вище у розділі 6.2, при умові віддільності (6.15) варіаційна задача (6.19) мінімізації (стандартних) α -ріссових енергій $E_\alpha(\mu)$, де μ пробігає клас $\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$, зводиться до задачі існування $\lambda_{A_1} \in \mathcal{E}_g^+(A_1, 1; D)$ з мінімальною в цьому класі α -гріновою енергією:¹³

$$E_g(\lambda_{A_1}) = \inf_{\nu \in \mathcal{E}_g^+(A_1, 1; D)} E_g(\nu). \quad (7.1)$$

В свою чергу, задача (7.1) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли $c_g(A_1) < \infty$, і розв'язок $\lambda_{\mathbf{A}, \alpha}$ задачі (6.19) допускає тоді зображення

$$\lambda_{\mathbf{A}, \alpha} = \frac{\gamma_{A_1, g} - \gamma'_{A_1, g}}{c_g(A_1)},$$

де $\gamma_{A_1, g}$ — α -грінова рівноважна міра на A_1 (див. розділ 6.2, теорему 6.4), а $\gamma'_{A_1, g}$ — її α -ріссове вимітання на D^c .

Однак умова віддільності (6.15) є істотною для справедливості результатів, наведених у попередньому абзаці. Дійсно, згідно з [116, Example 10.1],

¹³Як і раніше, $g := g_D^\alpha$.

існує область $D \subset \mathbb{R}^3$ і відносно замкнена множина $F \subset D$ з $\text{dist}(F, D^c) = 0$ і $c_g(F) < \infty$ така, що її (2-)ґрінова рівноважна міра $\gamma_{F,g}$ має нескінченну ньютонovu енергію:

$$E_2(\gamma_{F,g}) = \infty,$$

а отже ньютонova енергія знакозмінної міри $\gamma_{F,g} - \gamma'_{F,g}$ не є добре визначеною. Це показує, що стандартне визначення α -ріссової енергії знакозмінної міри, див. (6.2), є занадто обтяжливим у контексті задач на узагальнених конденсаторах, і мотивує нас до введення в аналіз альтернативної концепції α -ріссової енергії.

7.2 Слабка α -ріссова енергія

Означення 7.1. Скажемо, що міра $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ має скінченну *слабку α -ріссову енергію* $\dot{E}_\alpha(\mu)$, якщо $\kappa_{\alpha/2}\mu \in L^2(m_n)$, і в такому випадку визначимо¹⁴

$$\dot{E}_\alpha(\mu) := \|\kappa_{\alpha/2}\mu\|_{L^2(m_n)}^2 \quad \left(= \int (\kappa_{\alpha/2}\mu)^2 dm_n \right).$$

Нехай $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ позначає множину усіх $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ з $\dot{E}_\alpha(\mu) < \infty$, а $\dot{\mathcal{E}}_\alpha^+(\mathbb{R}^n)$ — множину $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n) \cap \mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$. Ґрунтуючись на законі Рісса декомпозиції ядер

$$\kappa_{\beta_1+\beta_2} = \kappa_{\beta_1} * \kappa_{\beta_2} \quad \text{при } \beta_1 + \beta_2 < n$$

(див. [86, Section 1, Eq. (12)]), бачимо, що $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ утворює передґільбертів простір зі (слабким) скалярним добутком (порівняй з розділом 6.1.2)

$$\langle \mu, \nu \rangle_\alpha := \langle \kappa_{\alpha/2}\mu, \kappa_{\alpha/2}\nu \rangle_{L^2(m_n)}, \quad \mu, \nu \in \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n),$$

і (слабкою енергетичною) нормою

$$\|\mu\|_\alpha := \sqrt{\dot{E}_\alpha(\mu)} = \|\kappa_{\alpha/2}\mu\|_{L^2(m_n)}.$$

Крім того, справедливі співвідношення

$$\mathcal{E}_\alpha^+(\mathbb{R}^n) = \dot{\mathcal{E}}_\alpha^+(\mathbb{R}^n), \quad \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n) \subset \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n),$$

а також

$$E_\alpha(\mu) = \dot{E}_\alpha(\mu) \quad \text{для всіх } \mu \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n).$$

¹⁴Як і раніше, m_n — міра Лебега на $\mathbb{R}^n$. Зауважимо, що для міри μ зі скінченною слабкою α -ріссовою енергією, взагалі кажучи, $\kappa_{\alpha/2}|\mu| \notin L^2(m_n)$. Дійсно, інакше ми би мали $E_\alpha(\mu) < \infty \iff \dot{E}_\alpha(\mu) < \infty$, а це не так, як випливає з згаданого вище прикладу 10.1 в [116], а також наведеної нижче теореми 7.1.

Інакше кажучи, концепції стандартної і слабкої α -ріссової енергії співпадають на множинах $\mathfrak{M}^+(\mathbb{R}^n)$ і $\mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Однак існує (неминуче знакозмінна) міра μ зі скінченною слабкою α -ріссовою енергією, яка не є елементом класу $\mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n)$:

$$\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n) \not\subset \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n),$$

— див. виноску 14. Цікаво зазначити, що $\mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, власний підпростір простору $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, є щільним в $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в топології, що визначається слабкою енергетичною нормою $\|\cdot\|_\alpha$, а також в індукованій широкій топології, — див. [110, Theorem 4.1].

Позначимо через S_α^* гільбертів простір усіх дійснозначних узагальнених функцій $T \in S^*$ на $\mathbb{R}^n$ повільного росту (див. [87]) зі скінченною енергією Дені–Шварца

$$\|T\|_{S_\alpha^*}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\mathcal{F}[T](y)|^2}{|y|^\alpha} dm_n(y),$$

де $\mathcal{F}[T]$ — перетворення Фур'є для $T \in S^*$. (Щодо енергії $\|T\|_{S_\alpha^*}^2$ і простору S_α^* , див. [77] або [84, розділ VI.1].) Як показано в [110, Theorem 4.2], кожна міра $\nu \in \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ може трактуватися як елемент простору S_α^* з нормою

$$\|\nu\|_{S_\alpha^*}^2 = C_{n,\alpha} \|\nu\|_\alpha^2$$

($C_{n,\alpha} \in (0, \infty)$) — універсальна константа, що залежить лише від n і α), а весь простір S_α^* є поповненням передгільбертового простору $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ в топології, що задається нормою $\|\cdot\|_{S_\alpha^*}$. (Такий результат з $\mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ замість $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ належить Дені [77].)

7.3 Співвідношення між α -гріновою і слабкою α -ріссовою енергіями

Наступна теорема (див. [110, Theorem 5.1]) є ключовою в застосуваннях слабкої α -ріссової енергії до задач на узагальнених конденсаторах.

Теорема 7.1. *Розглянемо $\mu \in \mathcal{E}_g(D) \cap \check{\mathfrak{M}}(D)$.¹⁵ Тоді $\mu - \mu'$ є (знакозмінною) мірою Радона на $\mathbb{R}^n$ зі скінченною слабкою α -ріссовою енергією $\dot{E}_\alpha(\mu - \mu')$, причому*

$$E_g(\mu) = \dot{E}_\alpha(\mu - \mu'). \quad (7.2)$$

¹⁵Нагадаємо, що $\check{\mathfrak{M}}(D)$ складається з усіх $\nu \in \mathfrak{M}(D)$ таких, що ν^+ і ν^- продовжуються нулем назовні D до всього $\mathbb{R}^n$ (див. розділ 6.2).

Якщо ж при цьому $\mu \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, тобто якщо продовження міри μ має скінченну стандартну α -ріссову енергію,¹⁶ тоді

$$E_g(\mu) = E_\alpha(\mu - \mu') = E_\alpha(\mu) - E_\alpha(\mu'). \quad (7.3)$$

Доведення теореми 7.1 істотно ґрунтується на теоремі 6.3 про довершеність α -ґрінового ядра, а також використовує співвідношення (6.13) та леми 6.1 і 6.2.

Зауваження 7.1. Як впливає з контрприкладу в [116] (див. там приклад 10.1), співвідношення (7.3) вже не має місця, якщо умова $\mu \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ не виконується. Оскільки при цьому рівність (7.2), тим не менше, залишається вірною, це демонструє перевагу використання слабкої α -ріссової енергії в задачах на узагальнених конденсаторах.

7.4 Приклад застосування концепції слабкої α -ріссової енергії до задач теорії узагальнених конденсаторів

Відсилаючи до робіт [116, 119] за іншими прикладами застосування концепції слабкої α -ріссової енергії до задач теорії узагальнених конденсаторів, ми обмежимося наведеними нижче теоремами 7.2 і 7.3, доведеними в [110].

Зафіксувавши (узагальнений) конденсатор $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$, позначимо

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) &:= \mathfrak{M}(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) \cap \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n), \\ \dot{\mathcal{E}}_\alpha^\circ(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) &:= \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n) \cap \text{Cl}_{\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n)} \mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n), \\ w_\alpha(\mathbf{A}) &:= \inf_{\nu \in \dot{\mathcal{E}}_\alpha^\circ(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)} \dot{E}_\alpha(\nu). \end{aligned}$$

Означення 7.2. $c_\alpha(\mathbf{A}) := 1/w_\alpha(\mathbf{A})$ та $\dot{c}_\alpha(\mathbf{A}) := 1/\dot{w}_\alpha(\mathbf{A})$ називаються *стандартною* та, відповідно, *слабкою α -ріссовими ємностями* конденсатора $\mathbf{A}$.

Щодо визначення класів $\mathfrak{M}(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ і величини $w_\alpha(\mathbf{A})$, див. (6.17), (6.18) і (6.19). Нагадаємо, що ми вважаємо множину D^c α -нетонкою на нескінченності. Тоді стандартна і слабка α -ріссові ємності конденсатора $\mathbf{A}$ виявляються рівними між собою; більш того, вони співпадають з g_D^α -ґріновою ємністю множини A_1 :

$$c_\alpha(\mathbf{A}) = \dot{c}_\alpha(\mathbf{A}) = c_{g_D^\alpha}(A_1)$$

¹⁶Це буде, наприклад, якщо міра μ обмежена і виконується умова $\text{dist}(S_D^\mu, D^c) > 0$, — див. лему 6.1.

(див. [110, Lemmas 6.1, 6.2]).

В силу умови (6.16) клас $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ непорожній, а тому має сенс варіаційна задача про існування міри $\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha} \in \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ з мінімальною в цьому класі слабкою енергією:

$$\dot{E}_\alpha(\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha}) = \dot{w}_\alpha(\mathbf{A}).$$

Зауважимо, що розв'язок $\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha}$ цієї задачі (якщо він існує) є єдиним; це випливає з опуклості класу $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbf{A}, \mathbf{1}; \mathbb{R}^n)$ з допомогою звичайних викладок, які ґрунтуються на передгільбертовій структурі простору $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mathbb{R}^n)$; назовемо $\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha}$ *слабкою α -ріссовою рівноважною мірою* конденсатора $\mathbf{A}$. Аналогічно, (єдиний) розв'язок $\lambda_{\mathbf{A},\alpha}$ задачі (6.19) назовемо *стандартною α -ріссовою рівноважною мірою* конденсатора $\mathbf{A}$.

Як показано наведеною нижче теоремою 7.2, слабка α -ріссова рівноважна міра $\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha}$ тісно пов'язана з так званою мірою конденсатора $\mathbf{A}$, що визначається наступним чином.

Означення 7.3. $\mu_{\mathbf{A},\alpha} \in \mathfrak{M}(\mathbf{A}; \mathbb{R}^n)$ називається *мірою узагальненого конденсатора $\mathbf{A}$ відносно α -ріссового ядра κ_α* , якщо її потенціал $\kappa_\alpha \mu_{\mathbf{A},\alpha}$ задовольняє співвідношення

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha \mu_{\mathbf{A},\alpha} &= \begin{cases} 1 & c_\alpha\text{-пр. вс. на } A_1, \\ 0 & c_\alpha\text{-пр. вс. на } A_2, \end{cases} \\ 0 \leq \kappa_\alpha \mu_{\mathbf{A},\alpha} &\leq 1 \quad c_\alpha\text{-пр. вс. на } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

У випадку, коли $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ — компактні віддільні множини, існування міри конденсатора встановлено Kishi [83], — навіть для вельми загального ядра κ на локально компактному просторі X . Див. також дослідження Beurling, Deny, Bliedtner і Berg в [78], [84], [71], [70], де міра конденсатора аналізувалася в контексті просторів Діріхле.

Теорема 7.2. *Наступні три твердження попарно еквівалентні:*

- (i) *Існує (єдина) слабка α -ріссова рівноважна міра $\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha}$ узагальненого конденсатора $\mathbf{A}$.*
- (ii) *Існує (єдина) обмежена c_α -абсолютно неперервна міра $\mu_{\mathbf{A},\alpha}$ узагальненого конденсатора $\mathbf{A}$.*
- (iii) $c_{g_D^\alpha}(A_1) < \infty$.

Якщо хоча б одне з тверджень (i)–(iii) виконується, тоді α -ріссова рівноважна міра $\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha}$ узагальненого конденсатора $\mathbf{A}$ допускає зображення

$$\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha} = \frac{\gamma_{A_1,g} - \gamma'_{A_1,g}}{c_g(A_1)},$$

де $\gamma_{A_1,g}$ — (єдина) α -грінова рівноважна міра на A_1 , а $\gamma'_{A_1,g}$ — її α -ріссове вимітання на A_2 . Крім того, міри $\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha}$ і $\mu_{\mathbf{A},\alpha}$ пов'язані між собою рівністю

$$\mu_{\mathbf{A},\alpha} = c_g(A_1) \cdot \dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha}.$$

Нарешті,

$$\dot{E}_\alpha(\mu_{\mathbf{A},\alpha}) = c_g(A_1) = c_\alpha(\mathbf{A}) = \dot{c}_\alpha(\mathbf{A}) < \infty.$$

Доведення теореми 7.2 істотно ґрунтується на наведеній вище теоремі 7.1 про співвідношення між α -гріновою і слабкою α -ріссовою енергіями, а також на отриманих у звітний період результатах теорії α -грінових потенціалів та теорії α -ріссового вимітання, частково наведених в розділі 6.2.

У випадку $\text{dist}(A_1, A_2) > 0$ теорема 7.2 допускає наступне уточнення.

Теорема 7.3. *Якщо $\mathbf{A}$ — стандартний конденсатор в $\mathbb{R}^n$, тоді кожне з (рівносильних) тверджень (i)–(iii) теореми 7.2 еквівалентне кожному з наступних тверджень:*

(iv) *Існує (єдина) стандартна α -ріссова рівноважна міра $\lambda_{\mathbf{A},\alpha}$ конденсатора $\mathbf{A}$.*

(v) $c_\alpha(A_1) < \infty$.

Якщо хоча б одне з цих (i)–(v) виконується, тоді міри $\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha}$ і $\mu_{\mathbf{A},\alpha}$ з тверджень (i) і (ii), відповідно, мають тепер скінченну стандартну α -ріссову енергію:

$$\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha}, \mu_{\mathbf{A},\alpha} \in \mathcal{E}_\alpha(\mathbb{R}^n).$$

Крім того, слабка і стандартна α -ріссова рівноважні міри співпадають:

$$\dot{\lambda}_{\mathbf{A},\alpha} = \lambda_{\mathbf{A},\alpha}.$$

Зауваження 7.2. У випадку $\text{dist}(A_1, A_2) = 0$ жодне з тверджень (i)–(iii) теореми 7.2 вже не є еквівалентним до (iv) чи (v), а задачі існування рівноважної міри чи міри конденсатора вже не є розв'язними в рамках стандартної концепції α -ріссової енергії. Це ще раз демонструє перевагу використання концепції слабкої α -ріссової енергії в теорії узагальнених конденсаторів. Щодо інших прикладів такої переваги, див. [116, 119].

ВИСНОВКИ

Протягом звітнього періоду співробітниками відділу було зроблено значний внесок у розвиток методів математичної фізики для дослідження складних систем, що описують неперервні та ґратчасті моделі теорії твердого тіла, статистичної механіки, моделі економічної, екологічної та біологічної еволюції, сконструйовані нові моделі таких систем та проведені комплексні дослідження їх властивостей. Отримані результати строго математично обґрунтовані і носять теоретичний характер. Наукові дослідження проведені на рівні світових досягнень сучасної математичної фізики та апробовані на міжнародних конференціях в Україні та за її кордонами.

В 2016-2017 роках О.Л.Ребенко проводив наукові дослідження та обговорював питання сучасної математичної фізики в Дублінському інституті перспективних досліджень (Dublin Institute for Advanced Studies). а Н.В.Зорій прочитала цикл лекцій на семінарах університетів Копенгагена (Данія) та Базеля (Швейцарія).

Наукові результати доповідались на міжнародних конференціях:

International Conference on Complex Analysis and Related Topics, Lviv, Україна, 2016 р. (Н.В.Зорій);

International Conference on Analytic Functions and Related Topics, Chelm, Poland, 2016, (Н.В.Зорій);

International Conference on Complex Analysis and Applications, Petrozavodsk, Russia, 2016, (Н.В.Зорій);

Social Simulation Conference, Рим, Італія, 19-23 вересня, 2016 (В.Д. Кошманенко, Т.В. Каратаєва, Н.В. Харченко);

13th Econophysics Colloquium (EC) and 9th Symposium of Physics in Economy and Social Sciences (FENS) Варшава, Польща, 5-7 липня, 2017 (В.Д. Кошманенко, Т.В. Каратаєва);

International Conference on Computational Methods in Function Theory, Lublin, Poland, 2017, (Н.В.Зорій);

Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації,⁸ Міжнародна наукова конференція, присвячена 100-річчю Національної академії наук та 100 Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнко, Кам'янець-Подільський, Україна, 18-20 квітня 2018 (В.Д. Кошманенко, Т.В. Каратаєва, Н.В. Харченко);

"Modern Stochastics: Theory and Applications, IV Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна, 24-26 травня 2018р. (О.Л.Ребенко, В.Д.Кошманенко, Т.В.Каратаєва, Н.В. Харченко);

Singular diffusions: analytic and stochastic approaches, Університет Подсдама, Німеччина, 1-3 квітня 2019р. (О.Л.Ребенко, пленарна доповідь);

5-th Conference on Statistical Physics: Modern Trends and Applications Dedicated to the 110th anniversary of the birth of М.М. Bogolyubov, Львів, Україна, 3-6 липня 2019 р. (О.Л.Ребенко, В.Д.Кошманенко);

Боголюбовська київська конференція «Проблеми теоретичної та математичної фізики» присвячена 110-річчю від дня народження видатного фізика-теоретика та математика академіка Миколи Миколайовича Боголюбова (21.08.1909 – 13.02.1992), Інститут теоретичної фізики ім. Миколи Боголюбова НАНУ/Інститут математики НАНУ, Київ, Україна, 24-26 вересня 2019 р. (О.Л. Ребенко, В.Д. Кошманенко, В.І. Скрипник).

Наукові результати неодноразово обговорювались на семінарі в інституті математики "Складні системи конфлікту: динаміка, моделі, спектральний аналіз"(керівник В.Д. Кошманенко) та доповідались на семінарах кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь НПУ імені М.П. Драгоманова(керівник - Григорій Торбін), міждисциплінарного науково-дослідного центру складних систем з фінансової математики(керівник – Ю.Г. Кондратьєв).

О.Л.Ребенко став лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки 2018 року (2019 р.) (за роботу "Якісні методи дослідження моделей математичної фізики"у складі наук. колективу: Кочубей А.Н., Фельдман Г.М., Щербина М.В., Ребенко О.Л., Микитюк І.В., Самойленко В.Г., Прикарпатський А.К.)

В.Д. Кошманенко у 2018 році отримав премію НАН України ім. М.О. Лаврентьєва.

Загалом за результатами дослідження було опубліковано 2 монографії, 38 статей, з них в іноземних фахових журналах– 21, у вітчизняних фахових журналах– 17, в препринтах– 13. В тезах конференцій опубліковано 15 рефератів(тез). Підготовлена до захисту 1 кандидатська дисертація.

Виконавці теми прочитали курси лекцій в Києво-Могилянській академії, в Національному Університеті ім. Т. Шевченка. В.Д. Кошманенко прийняв Участь у радіопередачі присвяченій лауреату Нобелівської премії Дж. Форбс

Нешшу, 2016, та у телепередачі, присвяченій лауреату Нобелівської премії
Кеннет Дж. Ерроу, 2018.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- [1] Albeverio S. Analysis and geometry on configuration spaces / Albeverio S., Kondratiev Yu.G., Röckner M. // J. Funct. Anal., – 1998. – **154**, № 2. – P. 444–500.
- [2] Conache D. Gibbs Measures on Marked Configuration Spaces: Existence and Uniqueness/Conache D., Daletskii A. Kondratiev Yu. Pasurek T.// Journal of Mathematical Physics. –2018.– 59. – 013507. – <https://doi.org/10.1063/1.5021464>
- [3] Bricmont J. First order phase transitions in lattice and continuous systems: Extension of Pirogov-Sinai theory /Bricmont J., Kuroda K. and Lebowitz J.L. // Commun. Math. Phys. –1985. – **101**. – P.501-538.
- [4] Добрушин Р.Л. Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности/ Добрушин Р.Л.// Теор. вер. и её применения. – 1968. – **13**, вып. 2. – С. 201–229.
- [5] Добрушин Р. Л. Динамические системы статистической механики/ Добрушин Р. Л., Синай Я.Г., Сухов Ю.М. // Итоги науки и техники / ВИНТИ. Сер. Совр. проблемы матем. Фунд. направления. – М.: Наука.– 1985. – Т. 2. – С.235–284.
- [6] Dorlas T. C. Correlation of clusters: partially truncated correlation functions and their decay/ Dorlas T. C., Rebenko A.L., Savoie B. // Journ. Math.Phys. – 2020. – v.61, No 3. – P. 033301-30
- [7] Dorlas T. C. A combinatorial identity [Електронний ресурс] / Dorlas T. C., Rebenko A. L. and Savoie B.– Режим доступа: e-print arXiv:1902.03470.
- [8] Duneau M. Decrease Properties of Truncated Correlation Functions and Analyticity Properties for Classical Lattices and Continuous Systems /Duneau M., Iagolnitzer D., Souillard B.// Commun. Math. Phys. –1973.– **31**. –P. 191–208.
- [9] Duneau M. Strong Cluster Properties for Classical Systems with Finite Range Interaction/Duneau M. Iagolnitzer D., Souillard B.// Commun. Math. Phys. –1974.– **35**. – P. 307–320.

- [10] Duneau M. Cluster Properties of Lattices and Continuous Systems/ Duneau M., Souillard B.// Commun. math. Phys. – 1976. – **47**.– P. 155–166.
- [11] Iagolnitzer D. On the Analyticity in the Potential in Classical Statistical Mechanics/ Iagolnitzer D. , Souillard B. // Commun. Math. Phys.– 1978.– **60**. – P.131–152.
- [12] Kondratiev Yu.G. Harmonic analysis on configuration spaces. I. General theory / Kondratiev Yu.G., Kuna T. // Infin. Dimens. Anal. Quantum. Probal. Relat. Top. – 2002. – **5**, № 2. – P. 201–233.
- [13] Kondratiev Y. On the metrical properties of the configuration space/ Kondratiev Y. and Kutoviy O.// Math. Nachr. –2006.– 279(7) – P.774–783.
- [14] Kondratiev Yu.G. Gibbs measures of continuous sydtems: an analitic approach /Kondratiev Yu.G., Pasurek T., Röckner M.// Reviews in Math. Phys. – 2012.– **24**, № 1. – P. 1250026-1–54.
- [15] Корнфельд И. П. Эргодическая теория /Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. – Москва.: Наука, 1980. — 384 с.
- [16] Lanford O.E. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics / Lanford O.E., Ruelle D.// Commun. in Math. Phys. – 1969.– **13**, № 3. – P.194–215.
- [17] Lebowitz J. L. Bounds on the Correlations and Analyticity Properties of Ferromagnetic Ising Spin Systems/ Lebowitz J. L. // Commun. math. Phys. – 1972. – **28**. – P.313–321.
- [18] Lenard A. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. I / Lenard A. // Arch. Rational Mech. Anal. – 1975. – **59**. – P.219–239.
- [19] Lenard A. States of classical statistical mechanical systems of infinitely many particles. II/ Lenard A. // Arch. Rational Mech. Anal. – 1975.– **59**. – P.241–256.
- [20] Минлос Р.А. Лекции по статистической физике / Минлос Р.А. // Успехи математических наук. – 1968.– **23**, №1. –С.133–190.

- [21] Penrose O. Convergence of Fugacity Expansions for Classical Systems / Penrose O. // Statistical mechanics: foundations and applications / A. Bak(ed), Benjamin: New York, 1967.
- [22] Minlos R. A. Estimates of Ursell functions, group functions, and their derivatives/ Minlos R. A. , Pogosyan S. K.// Theor. Math. Phys. –1977.– **31**, № 2,– P. 408–418.
- [23] Minlos R. Introduction to Mathematical Statistical Physics University Lecture Series Volume: 19 / Minlos R. – American Mathematical Soc., 2000. – 103 p.
- [24] Parthasarathy K.R. Probability Measure on Metric Spaces. Probability and Mathematical Statistics /Parthasarathy K.R. – Academic Press, New York and London, 1967.
- [25] Петрина Д.Я. Математические Основы Классической Статистической Механики/ Петрина Д.Я., Герасименко В.И., Малышев П.В. – Київ: Наукова думка, 1985.– 263 с. (Переклад: Petrina, D., Gerasimenko, V., Malyshev, P. *Mathematical Foundations of Classical Statistical Mechanics*. N.Y.: Gordon and Breach, 1995.)
- [26] Rebenko A.L. Cell gas model of classical statistical systems /Rebenko A.L. // Reviews in Math. Phys. – 2013.– **25**, № 4. – P. 1330006-1–28.
- [27] Rebenko A.L. Quasi-continuous approximation of statistical systems with strong superstable interactions / Rebenko A.L., Tertychnyi M.V.// Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2007.– **4**, №3.– P.172–182.
- [28] Rebenko A.L. On stability, superstability and strong superstability of classical systems of statistical mechanics /Rebenko A.L., Tertychnyi M.V.// Meth. Funct. Anal. and Topology. – 2008.– **14**, № 3. – P.287–296.
- [29] Rebenko A.L. Quasi-lattice approximation of statistical systems with strong superstable interactions. Correlation functions/ Rebenko A.L., Tertychnyi M.V.// Jour. Math. Phys. – 2009.– **50**, №3. –P.1–16.
- [30] Петренко С.М. Про квазінеперервну апроксимацію в класичній статистичній механіці /Петренко С.М., Ребенко О.Л., Тертичний М.В. // Укр. мат. журн. – 2011.– **63**, № 3. –С.369–384.

- [31] Ребенко О. Л. Властивість перемішування неперервних класичних систем з посилено надстійкою взаємодією. / Ребенко О. Л., Тертичний М.В. // Укр. мат. журн. – 2017.– т. 69, № 8. –С. 1084-1095.
- [32] Рюэль Д. Статистическая Механика. Строгие Результаты/ Рюэль Д. – М.: Мир, 1971.– 368 с.
- [33] Landau L. The classical theory of fields/ Landau L., Lifshitz E. – Pergamon Press, 1959.
- [34] Wittaker E.T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies/ Wittaker E.T. – Cambridge: University Press, 1927.
- [35] Kunze M. Slow motion of charges interacting through the Maxwell field/ Kunze M., Spohn H. // Commun. Math.Phys. – 2000.– **212**, №2. – С.437-467.(arXiv: math-physics/0001002v1, 3 January)
- [36] Spohn H. Dynamics of charged particles and their radiation field/ Spohn H. – Cambridge: University press, 2004.
- [37] Siegel C. Lectures on celestial mechanics/Siegel C., J.Moser J. – Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1971.
- [38] Skrypnik W. On holomorphic solutions of hamiltonian equations of motion of point charges/ Skrypnik W.//Ukrainian Math.Journ.– 2011.– **63**, No.2. – P. 270-280.
- [39] Skrypnik W. On holomorphic solutions of Darwin equation of motion of point charges/ Skrypnik W. // Ukrainian Math.Journ. – 2013. –**65**, № 4. – P.546-564.
- [40] Koddington E. Theory of ordinary differential equations/Koddington E., Levinson N. – Krieger Pub.Co., 1984.
- [41] Bochner S., Martin W.T. Several complex variables/ Bochner S., Martin W.T. – Princeton, 1948.
- [42] Фадеев Д.К. Лекции по алгебре/ Фадеев Д.К.– Москва: Наука, 1984.
- [43] Скрипник В. Про пост-Дарвінівське наближення рівнянь руху Максвелла-Лоренца точкових зарядів. Відсутність нейтральності/ Скрипник В.// Укр. мат. журн. –2019.– **71**, № 1. – С. 132-143.

- [44] Skrypnik W. Periodic and bounded solutions of the Coulomb equation of motion of two and three point charges with equilibrium on line/ Skrypnik W. – Ukr.Math.Journ. – 2014. – **66**, № 5. – P.668-682.
- [45] Скрипник В. Кулонівська динаміка двох та трьох рівних від'ємних зарядів на площині у полі фіксованих двох рівних додатніх зарядів/Скрипник В.// Укр. мат. журн. – 2016.– **68**, № 11. – С. 1528-1539.
- [46] Скрипник В. Кулонівська динаміка двох та трьох рівних від'ємних зарядів на площині у полі фіксованих двох рівних додатніх зарядів/ Скрипник В.// Укр. мат. журн. – 2016.– **68**, № 9. – С.1273-1285.
- [47] Skrypnik W. Coulomb dynamics of three equal negative charges in field of fixed two equal positive charges/ Skrypnik W. // Journal of geometry and physics. – 2018.– **127**. –P. 101-111.
- [48] Скрипник В. Періодична Кулонівська динаміка двох рівних від'ємних зарядів у полі фіксованих чотирьох рівних додатніх зарядів/ Скрипник В. // Укр. мат. журн. – 2020.– **72**, № 10. – С.1432-1442. – <https://doi.org/10.37867/umzh.v72i10.741>.
- [49] Skrypnik W. Periodic Coulomb dynamics of three equal negative charges in the field of equal positive charges fixed in octagon vertices/ Skrypnik W. //Advaces in mathematical physics. – 2020.– **2020**. 12 pages.– Article ID 3547136. – <https://doi.org/10.1155/2020/3547136>.
- [50] Skrypnik W. Coulomb planar periodic motion of equal charges in the field of equal positive charges fixed at a line and constant magnetic field/ Skrypnik W.// Advances in mathematical physics. – 2018.– **2018**. –10 pages.– Article ID 2548074. – <https://doi.org/10.1155/2548074>.
- [51] Skrypnik W. Mechanical systems with singular equilibria and the coulomb dynamics of three charges/ Skrypnik // Ukr.Math.Journ. – 2018.– **70**, № 4.– P. 597 - 613.
- [52] Skrypnik W. On regular polygon solutions of Coulomb equation of motion of $n + 2$ charges n of which are planar/ Skrypnik W. //Journ.Math.Phys. – 2016.– **57**.– P.2904-2910. – <https://doi.org/10.1063/1.4947421>.

- [53] Skrypnik W. Quasi-exact coulomb dynamics of $n + 1$ charges $n - 1$ of which are equal/ Skrypnik W.// Reports in mathematical physics. – 2017.– **80**, –P. 73-86.– [https://doi.org/10.1016/S0034-4877\(17\)30062-9](https://doi.org/10.1016/S0034-4877(17)30062-9).
- [54] Skrypnik W. Quasi-exact coulomb dynamics of n charges $n - 1$ of which are equal/Skrypnik W.// Advances in mathematical physics. –2017.– **2017**. Article ID 6751025. – <https://doi.org/10.1155/2017/6751025>.
- [55] Koshmanenko V. The method of rigged spaces in singular perturbation theory of self-adjoint operators, Operator Theory: Advances and Applications/ Koshmanenko V., Dudkin M.– Birkhauser, 2016. –257 p.– <https://doi.org/10.1007/978-3-319-29535-0>.
- [56] Кошманенко В.Д. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту/Кошманенко В.Д. – К.: Наук. Думка, 2016. – 288 с.– <http://www.nas.gov.ua/EN/Book/Pages/default.aspx?BookID=0000014621>.
- [57] Karataieva T. Mean field model of a game for power/ Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M.J., Kulakowski K.// Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2019.– 525. –P.535-547.– <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.110>.
- [58] Koshmanenko V.D. Limit Distributions for Conflict Dynamical System with Point Spectra/ Koshmanenko V.D., Voloshyna V.O. // Ukr.Math.Journ. – 2019.–**70**, № 12. –P.1861-1872 (Волошина В. О. Граничні розподіли динамічних систем конфлікту з точковим спектром/Волошина В. О., Кошманенко В. Д.// Укр. мат. журн. – 2018.– **70**, № 12. – С. 1615-1624.) – <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=1241>.
- [59] Koshmanenko V.D. Sure Event Problem in Multicomponent Dynamical Systems with Attractive Interaction/Koshmanenko V.D., Satur O.R.// Journal of Mathematical Sciences. – 2020.– **249**, № (4). – P. 629-646 (Кошманенко В. Д. Проблема достовірної події в багатокомпонентних динамічних системах з притягальною взаємодією/Кошманенко В. Д., Сатур О.Р.// Нелінійні коливання. – 2019. - **22**, № 2. – С. 220-234.)– <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04962-3>.
- [60] Karataeva T.V. Society, Mathematical Model of a Dynamical System of Conflict / Karataeva T.V., Koshmanenko V.D.// Journal of Mathemati-

- cal Sciences – 2020.–**247**. –Р. 291-313. (Каратаєва Т.В., Соціум, математична модель динамічної системи конфлікту/Каратаєва Т.В., Кошманенко В.Д. // Нелінійні коливання. – 2019.– **22**, № 1. – С. 66-85.)– <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04803-3>.
- [61] Karataeva T.V., Explicitly Solvable Models of Redistribution of the Conflict Space/Karataeva T.V., Koshmanenko V.D., Petrenko S.M. // Journal of Mathematical Sciences. – 2018.– **229**, № 4. – Р. 439-454. (Каратаєва Т. В. Явно розв’язувані моделі перерозподілу конфліктного простору/ Каратаєва Т. В., Кошманенко В. Д., Петренко С. М.// Нелінійні коливання. –2017.– **20**, № 1. – С. 98-112.) – <https://doi.org/10.1007/s10958-018-3688-1>.
- [62] Veryhina I.V. Problem of Optimal Strategy in the Models of Conflict Redistribution of the Resource Space/Veryhina I.V., Koshmanenko V.D.// Ukr. Math.Jour. – 2017.– **69**, № 7. –Р. 1051-1059. (Веригіна І. В. Задача про оптимальну стратегію в моделях конфліктного перерозподілу ресурсного простору/Веригіна І. В., Кошманенко В. Д.// Укр. мат. журн. – 2017.–**69**, № 7. – С. 905-911.)– <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1414-7>.
- [63] Koshmanenko V. Hahn-Jordan Decomposition as an Equilibrium State in the Conflict System/Koshmanenko V., Petrenko S.// Ukr. Math. Jour. – 2016.– **68** № 1. – Р. 67–82. (Кошманенко В. Д. Розклад Гана - Жордана як рівноважний стан системи конфлікту/Кошманенко В. Д., Петренко С. М. // Укр. мат. журн. –2016.– **68**, № 1. –С. 64-77.) – <https://doi.org/10.1007/s11253-016-1209-2>.
- [64] Koshmanenko V. Point spectrum in conflict dynamical systems with fractal partition/Koshmanenko V., Satur O., Voloshyna V.// Methods of Functional Analysis and Topology. – 2019.– **25**, № 4. Р. 324-338.– <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=1241>.
- [65] Koshmanenko V. Fixed points of complex systems with attractive interaction/Koshmanenko V., Kharchenko N.// Methods of Functional Analysis and Topology.– 2017.– **23**, № 2.–Р. 164-176.– <http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=970>.
- [66] Koshmanenko V. Dynamical systems of conflict in terms of structural measures/Koshmanenko V., Verygina I.// Methods of

- Functional Analysis and Topology. – 2016.– № 1. –P81-93. –
<http://mfat.imath.kiev.ua/article/?id=843>.
- [67] Сатур О. Р. Модель динамічної системи досягнення консенсусу/Сатур О. Р., Харченко Н. В. // Укр. мат. журн. – 2019.– **7**, N9. – С. 1271 - 1283.
- [68] Armitage D.H. Classical Potential Theory /Armitage D.H., Gardiner S.J. –Berlin: Springer,2001.
- [69] Beckermann B. Extremal rational functions on symmetric discrete sets and superlinear convergence of the ADI method / Beckermann B., Gryson A. // Constr. Approx. – 2010.–**32**. P.393–428.
- [70] Berg C. On the existence of condenser potentials/ Berg C.// Nagoya Math. J. –1978.–**70**.–P.157–165.
- [71] Bliedtner J. Dirichlet forms on regular functional spaces/Bliedtner J.// Lecture Notes in Math. –Berlin: Springer,1971.– vol. 226.
- [72] Bliednter J. Hansen W. Potential Theory: An Analytic and Probabilistic Approach to Balayage/ Bliednter J. Hansen W. –Berlin: Springer,1986.
- [73] Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер/ Бурбаки Н.– Москва: Наука, 1967.
- [74] Бурбаки Н. Общая топология. Главы 1–4/ Бурбаки Н. – Москва: Наука, 1968.
- [75] Bourbaki N. General Topology. Chapters 5–10/ Bourbaki N. –Berlin: Springer, 1989.
- [76] Cartan H. Théorie du potentiel Newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels/Cartan H.// Bull. Soc. Math. France –1945.– **73**. – P. 74–106.
- [77] Deny J. Les potentiels d'énergie finite/Deny J. // Acta Math. –1950.–**82**.– P. 107–183.
- [78] Deny J. Sur les espaces de Dirichlet/ Deny J.// Sémin. Théorie du potentiel. – 1957.– no. 5.
- [79] Doob J.L. Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart/Doob J.L.– Berlin: Springer, 1984.

- [80] Edwards R. Cartan's balayage theory for hyperbolic Riemann surfaces/ Edwards R.// Ann. Inst. Fourier. – 1958.– **8**.– P.263–272.
- [81] Fuglede B. On the theory of potentials in locally compact spaces/ Fuglede B.// Acta Math.–1960.– **103**.– P. 139–215.
- [82] Gauss C.F. Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte, (1839)/Gauss C.F.// Werke –1867.–**5**.–P. 197–244.
- [83] Kishi M. Sur l'existence des mesures des condensateurs/Kishi M.// Nagoya Math. J. –1967.–**30**. –P. 1–7.
- [84] Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала/Ландкоф Н.С. – Москва: Наука, 1966.
- [85] Ohtsuka M. On potentials in locally compact spaces/Ohtsuka M.// J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1. –1961.– **25**.– P. 135–352.
- [86] Riesz M. Intégrales de Riemann–Liouville et potentiels/ Riesz M.// Acta Szeged. –1938.– **9**.–P. 1–42.
- [87] Schwartz L. Théorie des Distributions, vol. I/Schwartz L. –Paris: Hermann, 1951.
- [88] Zorii N. Interior capacities of condensers in locally compact spaces/Zorii N.// Potential Anal.–2011.– **35**. –P. 103–143.
- [89] Zorii N. Constrained energy problems with external fields for vector measures/Zorii N.// Math. Nachr.–2012.– **285**. – P. 1144–1165.
- [90] Zorii N. Equilibrium problems for infinite dimensional vector potentials with external fields/Zorii N.// Potential Anal.–2013.– **38**.– P. 397–432.
- [91] Zorii N. Necessary and sufficient conditions for the solvability of the Gauss variational problem for infinite dimensional vector measures/ Zorii N.// Potential Anal.–2014.– **41**.– P. 81–115.
- [92] Zorii N. Minimum Riesz energy problems for a condenser with touching plates/ Zorii N., Dragnev P.D., Fuglede B., Hardin D.P., Saff E.B.// Potential Anal. –2016.– **44**.–P. 543–577.– <https://doi.org/10.1007/s11118-015-9519-9>.

- [93] Zorii N. Rapid solution of minimal Riesz energy problems/Zorii N., Harbrecht H., Wendland W.L.// Numer. Methods Partial Differ. Equ.– 2016.–**32**.– P. 1535–1552. – <https://doi.org/10.1002/num.22060>.
- [94] Zorii N. Minimal energy problems for strongly singular Riesz kernels/Zorii N., Harbrecht H., Wendland W.L.–2016.– arXiv:1602.08544.– 31 p.
- [95] Zorii N. Green kernels associated with Riesz kernels/ Zorii N., Fuglede B.– 2016.– arXiv:1610.00268.– 29 p.
- [96] N. Zorii, *Constrained and unconstrained Gauss variational problem for condensers with touching plates*, International Conference on Complex Analysis and Related Topics, Abstracts, Lviv, 2016.
- [97] Zorii N. Minimum Riesz energy problems for condensers with touching plates/Zorii N.// International Conference on Analytic Functions and Related Topics: Abstracts.– Chelm, 2016.
- [98] Zorii N. Minimum energy problems for condensers with touching plates/Zorii N. // International Conference on Complex Analysis and Applications: Abstracts.– Petrozavodsk, 2016.
- [99] Zorii N. Constrained Gauss variational problems for a condenser with intersecting plates/Zorii N., Fuglede B. // Ann. Polon. Math. –2017.– **120**.– P. 227–260. – <https://doi.org/10.4064/ap170619-2-12>.
- [100] Zorii N. Constrained minimum Riesz energy problems for a condenser with intersecting plates/Zorii N., Dragnev P.D., Fuglede B., Hardin D.P., Saff E.B.–2017.– arXiv:1710.01950.– 33 p.
- [101] Zorii N. Condensers with touching plates and constrained minimum Riesz and Green energy problems/Zorii N., Dragnev P.D., Fuglede B., Hardin D.P., Saff E.B. –2017.– arXiv:1711.05484.–30 p.
- [102] Zorii N. Constrained Gauss variational problems for vector measures associated with a condenser with intersecting plates/Zorii N.// International Conference on Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach: Abstracts.– Lviv, 2017.

- [103] Zorii N. Minimum Riesz energy problems for vector measures associated with a condenser with intersecting plates/Zorii N.// International Conference on Computational Methods in Function Theory: Abstracts.– Lublin, 2017.
- [104] Zorii N. Minimal energy problems for strongly singular Riesz kernels/Zorii N., Harbrecht H., Wendland W.L.// Math. Nachr.–2018.– **291**.– P. 55–85. – <https://doi.org/10.1002/mana.201600024>.
- [105] Zorii N. Green kernels associated with Riesz kernels/Zorii N., Fuglede B. //Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.–2018.– **43**.– P. 121–145. – <https://doi.org/10.5186/aasfm.2018.4305>.
- [106] Zorii N. Constrained minimum Riesz and Green energy problems for vector measures associated with a generalized condenser/Zorii N., Fuglede B.–2018.– arXiv:1802.07171.– 39 p.
- [107] Zorii N. An alternative concept of Riesz energy of measures with application to generalized condensers/Zorii N., Fuglede B.–2018.– arXiv:1803.11079–2018, 23 p.
- [108] Zorii N. Various concepts of Riesz energy of measures and application to condensers with touching plates/Zorii N., Fuglede B.–2018.– arXiv:1810.00791.–31 p.
- [109] Zorii N. Condensers with touching plates and constrained minimum Riesz and Green energy problems/Zorii, Dragnev P.D., Fuglede B., Hardin D.P., Saff E.B.// N. Constr. Appr.–2019.–**50**. – P. 369–401. – <https://doi.org/10.1007/s00365-019-09454-5>.
- [110] Zorii N. An alternative concept of Riesz energy of measures with application to generalized condensers/Zorii N., Fuglede B.// Potential Anal.– 2019.– **51**.–P. 197–217. – <https://doi.org/10.1007/s11118-018-9709-3>.
- [111] Zorii N. Constrained minimum Riesz and Green energy problems for vector measures associated with a generalized condenser/ Zorii N., Fuglede B.// Hiroshima Math. J.–2019.– **49**.– P. 399–437. – <https://doi.org/10.32917/hmj/1573787036>.
- [112] Zorii N. Condensers with infinitely many touching Borel plates and minimum energy problems/ Zorii N.// Bull. Pol. Acad. Sci. Math.–2019.– **67**. – P. 125–163.– <https://doi.org/10.4064/ba190414-29-11>.

- [113] Zorii N. Condensers with infinitely many touching Borel plates and minimum energy problems/Zorii N.–2019.– arXiv:1903.08917.–31 p.
- [114] Zorii N. A theory of inner Riesz balayage and its applications/Zorii N.–2019.– arXiv:1910.09946.–23 p.
- [115] Zorii N. A concept of weak Riesz energy with application to condensers with touching plates/ Zorii N.–2019.– arXiv:1911.12406.–26 p.
- [116] Zorii N. Various concepts of Riesz energy of measures and application to condensers with touching plates/ Zorii N.,Fuglede B.// Potential Anal.–2020.– **53**.– P. 1191–1223. – <https://doi.org/10.1007/s11118-019-09803-w>.
- [117] Zorii N. A theory of inner Riesz balayage and its applications/ Zorii N.// Bull. Pol. Acad. Sci. Math.–2020.– **68**.– P. 41–67.– <https://doi.org/10.4064/ba191104-31-1>.
- [118] Zorii N. Constrained minimum Riesz energy problems for a condenser with intersecting plates// Zorii N.,Dragnev P.D., Fuglede B., Hardin D.P., Saff E.B.// Journal d'Analyse Math. –2020.– 43 p. – <https://doi.org/10.1007/s11854-020-0091-x>.
- [119] Zorii N. A concept of weak Riesz energy with application to condensers with touching plates Zorii N. //Anal. Math. Phys.– 2020.– 33 p.– <https://doi.org/10.1007/s13324-020-00384-1>.
- [120] Zorii N. Harmonic measure, equilibrium measure, and thinness at infinity in the theory of Riesz potentials/ Zorii N.–2020.– arXiv:2006.12364.–23 p.
- [121] Zorii N. Balayage of measures on a locally compact space/ Zorii N.–2020.– arXiv:2010.07199.–21 p.