

УДК 517.95:517.958:517.928:512.81

КП XXXXXXXXX

№ держреєстрації 0116U003059 (КПКВК 6541030) Інв. №

№ держреєстрації 0119U001725 (КПКВК 6541230) Інв. №

Національна Академія наук України

Інститут математики

01024, м. Київ, Терещенківська, 3;

тел. (044) 234 51 50, факс 235 20 10

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор Інституту
математики НАН України
академік НАН України
А.М. Самойленко

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

**Симетрія, суперсиметрія та суперінтегровність
рівнянь математичної фізики**
(заклучний)

Керівник НДР

член-кореспондент НАН України

доктор фіз.-мат. наук

А.Г. Нікітін

Рукопис закінчено 9 грудня 2019 р.

Результати цієї роботи розглянуто Вченою Радою Інституту
математики НАН України, протокол від 10.12.2019 № 12

Київ–2019

Список авторів

Керівник проекту
чл.-кор. НАН України

д-р фіз.-мат. наук,
завідувач відділу

А.Г. Нікітін

д-р фіз.-мат. наук,
пров. наук. співр.

В.М. Бойко

д-р фіз.-мат. наук,
пров. наук. співр.

Р.О. Попович

д-р фіз.-мат. наук,
пров. наук. співр.

Р.М. Черніга

канд фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

О.О. Ванєєва

канд. фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

І.А. Єгорченко

канд фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

О.Ю. Жалій

канд фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

М.О. Нестеренко

канд. фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

С.В. Спічак

канд фіз.-мат. наук,
наук. співр.

В.В. Давидович

канд. фіз.-мат. наук,
мол. наук. співр.

О.А. Почекета

аспірант

В.І. Зіненко

аспірант

О.В. Локазюк

аспірант

В.Г. Морозова

аспірант

С.В. Опанасенко

гол. інженер-програміст

Е.Є. фон Діхтер

Реферат

Звіт про НДР: 8 розділів, 257 сторінок, 78 джерел.

Об'єкт дослідження: нелінійні моделі математичної та теоретичної фізики, хімії та біології.

Мета проекту: створення та обґрунтування сучасного математичного апарату для дослідження неперервних, дискретних та вищих симетрій рівнянь сучасної математичної фізики, а також його застосування для побудови моделей з фізично мотивованими групами симетрії та суперсиметрії, а також знаходження точних розв'язків деяких актуальних моделей математичної фізики.

Методи дослідження: сучасні методи групового аналізу диференціальних рівнянь, теорії алгебр та груп Лі.

Звіт містить основні результати НДР та список наукових робіт опублікованих в рамках цієї НДР. Зокрема, в рамках виконання проекту, розроблено нові методи дослідження симетрій диференціальних рівнянь, виконано групову класифікацію та побудовано точні розв'язки низки нелінійних моделей математичної та теоретичної фізики, математичної біології.

Ключові слова: симетрія, суперсиметрія, інтегровність, точні розв'язки, нелінійні моделі, алгебри та групи Лі.

Керівник НДР

член-кореспондент НАН України

доктор фіз.-мат. наук

А.Г. Нікітін

Зміст

1	Вступ	7
2	Основні наукові результати	8
3	Групова класифікація рівнянь Шрьодінгера зі змінним параметром маси	17
4	Сингулярні модулі редукції диференціальних рівнянь	31
4.1	Модулі редукції диференціальних рівнянь	35
4.2	Сингулярні модулі векторних полів для диференціальних функцій	44
4.3	Диференціальні функції, що допускають метасингулярні модулі	56
4.4	Сингулярні модулі векторних полів для диференціальних рівнянь	62
4.5	Сингулярність модулів редукції та порядок редукованих рівнянь	69
4.6	Модулі редукції максимальної розмірності	76
4.7	Мотивуючий приклад: еволюційні рівняння	81
4.8	Модулі редукції корозмірності 1 і копорядку сингулярності 1	87
4.9	Сингулярні модулі квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку	98
5	Групова класифікація та точні розв’язки диференціальних рівнянь	105
5.1	Групоїд еквівалентності та нормалізаційні властивості рівнянь Кортвега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами . .	105
5.2	Класифікація операторів редукції нелінійних рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля	118
5.3	Клас узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній	124

5.4	Групова класифікація класу нелінійних рівнянь Колмогорова	173
5.5	Симетрійний аналіз рівняння ціноутворення азійських опціонів і точні розв'язки	179
5.6	Редукція та розв'язки систем нелінійних рівнянь математичної фізики, та опис диференціальних інваріантів алгебр інваріантності таких рівнянь	183
5.7	Деякі нелінійні системи еволюційних рівнянь: симетрії, точні розв'язки та їхня біологічна інтерпретація	196
5.8	Симетрії Лі та точні розв'язки деяких нелінійних еволюційних систем та рівнянь з двома просторовими змінними	216
6	Теорія алгебр Лі	225
6.1	Реалізації, деформації та диференціальні інваріанти алгебр Галілея	225
6.2	Допустимі пари контракції шестивимірних нільпотентних алгебр Лі	232
6.3	Наближення функцій на некубічних решітках	236
6.4	Класифікація реалізацій скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на колі	242
7	Апробація результатів, участь в конференціях, наукове співробітництво тощо	245
8	Публікації	249

1 Вступ

Групова класифікація диференціальних рівнянь, основи якої створив Софус Лі ще у позаминулому сторіччі, переживає зараз другу молодість. Кількість і географія публікацій з цієї тематики дає всі підстави говорити саме ці слова. Групова класифікація — це опис нееквівалентних класів рівнянь, що володіють лієвськими (узагальненими, умовними і т.п.) симетріями. І якщо знаходження симетрій фіксованого (нехай і дуже складного) рівняння є досить рутинною працею, то для то для досить широкого класу рівнянь доводиться робити дуже нетривіальні викладки, а часом по суті створювати нові методи. Цікавими і важливими задачами симетрійного аналізу є дослідження різних видів узагальненої симетрії. Сюди відносяться вищі симетрії, суперсиметрія, проблеми знаходження систем координат, в яких існують розв'язки з відокремленими змінними, тощо. Наприклад, при дослідженні систем, інтегровних за Ліувілем, дуже ефективними є саме методи вищих симетрій. Саме класифікація важливих для застосувань рівнянь математичної фізики є основною складовою частиною задач представлених у цьому звіті. За звітний період запропоновано ряд нових алгоритмів для дослідження симетрійних властивостей складних нелінійних диференціальних рівнянь і ефективних методів побудови їх точних розв'язків.

За звітний період дослідження в рамках НДР були зосереджені у основному на таких взаємопов'язаних напрямках:

- 1) класифікація суперінтегровних та суперсиметричних систем квантової механіки, включаючи системи з довільним спіном і змінною масою, та побудова загальних розв'язків таких систем;
- 2) розвиток алгебраїчного підґрунтя групового аналізу, розширений симетрійний аналіз еволюційних та хвильових рівнянь, некласичні (умовні симетрії), задачі групової класифікації, закони збереження;
- 3) контракції, реалізації та інваріанти алгебр Лі.

Дослідження, що виконувалися в рамках даної НДР були пов'язані з різноманітними методами дослідження модельних нелінійних систем сучасної математичної фізики, хімії, біології та економіки.

Протягом звітнього періоду в рамках даного проекту виконавцями в вітчизняних та закордонних виданнях опубліковано 1 збірник наукових праць та 77 наукових робіт, захищені дві дисертаційні роботи.

Основні результати, що отримані в рамках даного проекту, відображено нижче.

Ряд з одержаних результатів мають пріоритетний характер у світі. Результати НДР доповідались на багатьох міжнародних конференціях.

У звіті розділи 1, 2 підготували А.Г. Нікітін та В.М. Бойко; 3 — А.Г. Нікітін; 4 — В.М. Бойко, Р.О. Попович; 5.1 — О.О. Ванєєва, О.Ю. Жалій; 5.2 — В.М. Бойко, О.О. Ванєєва, О.Ю. Жалій; 5.3 — Р.О. Попович, О.А. Почекета; 5.4–5.5 — С.В. Спічак; 5.6 — І.А. Єгорченко; 5.7 — В.В. Давидович, Р.М. Черніга; 5.8 — Р.М. Черніга; 6.1–6.3 — М.О. Нестеренко; 6.4 — С.В. Спічак; 7, 8 — В.М. Бойко, Е.Є. фон Діхтер.

2 Основні наукові результати

Наведені основні результати (див. нижче) та ряд інших результатів, що отримані виконавцями НДР, носять пріоритетний характер у світі та мають значні перспективи для подальших досліджень як співробітниками відділу так і іншими міжнародними науковими групами, що працюють в області симетрійного аналізу диференціальних рівнянь або алгебраїчних методів математичної фізики. Отримані результати є суттєвим внеском у груповий аналіз диференціальних рівнянь, а також можуть мати прикладні застосування в квантовій механіці, при дослідженні процесів дифузії, моделюванні атмосферних явищ, біології тощо.

Проведено повну групову класифікацію рівнянь узагальнених Шрьодінгера, що включають три незалежних змінних та два довільних еле-

мента: змінну масу та потенціал. Встановлено критерій еквівалентності таких рівнянь до рівняння з постійною масою. Побудовано загальний розв'язок одного з отриманих рівнянь у просторі L^2 . (чл.-кор. НАН України А.Г. Нікітін).

Створено теорію сингулярних модулів редукції диференціальних рівнянь з однією залежною і довільною кількістю незалежних змінних. Показано, що дослідження сингулярних модулів редукції є необхідних кроком у вивченні неklasичних симетрій диференціальних рівнянь. Особливі випадки у знаходженні модулів редукції пов'язано з пониженням порядку відповідних редукованих рівнянь. Як приклад, вивчено сингулярні модулі редукції для еволюційних рівнянь та квазілінійних рівнянь другого порядку. Все це дозволило пояснити і узагальнити існуючі результати щодо по-го випадків у вивченні неklasичних симетрій. (В.М. Бойко, Р.О. Попович)

Побудовано усі нееквівалентні реалізації алгебр Галілея розмірності не вище п'яти. Вивчено многовиди деформацій алгебр Галілея та знайдено реалізації для деформованих алгебр Галілея. Показано, що ряд фізично цікавих рівнянь та їх систем, а саме рівняння Кавахари, Кортевега де-Фріза, Бюргерса та реакції дифузії а також узагальнена система Єрмакова, задача про центральну силу та класична задача Кеплера, інваріантні відносно низько розмірних алгебр Галілея та їх деформацій. (О.О. Ванєєва, М.О. Нестеренко)

Виконано вичерпну групову класифікацію класу нелінійних рівнянь Колмогорова з довільною нелінійністю та коефіцієнтами, що залежать від змінної часу. Показано, що використання властивості нормалізованості класу у звичайному та узагальненому сенсах дозволяє оптимально відкалібрувати довільні елементи. Знайдено групоїд еквівалентності класу рівнянь Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами. Показано, що цей клас не нормалізований, але його можна представити у вигляді об'єднання нормалізованих підкласів, що не перетинаються. Ви-

конано групову класифікацію одного з виокремлених підкласів. З симетрійної точки зору досліджено клас рівнянь Бенджаміна–Бона–Махоні–Бюргера з коефіцієнтами, що залежать від змінної часу. Прокласифіковано допустимі перетворення в такому класі рівнянь. Групову класифікацію виконано із використанням методу перетворень між класами. (О.О. Ванєєва)

Вивчено нееквівалентні нільпотентні шестивимірні алгебри Лі над полем комплексних чисел і обчислено відповідні величини, що напівінваріантні відносно контракцій. Отримано повний перелік пар, що не допускають жодну невластну контракцію. (М.О. Нестеренко)

Проведена повна групову класифікація класу нелінійних рівнянь колмогорівського типу в тривимірному просторі-часі, який утворюється наявністю двох довільних функцій, що відповідає конвекції по одній із просторових змін, та джерелу. Отримані окремі інваріантні розв'язки які побудовані за допомогою двовимірних підалгебр алгебр інваріантності. (С.В. Спічак)

Виконано розширений симетрійний аналіз класу узагальнених рівнянь Бюргера, розширено і покращено всі попередні результати для цих рівнянь, включаючи повний опис допустимих перетворень, лієвських симетрій, лієвських і некласичних редукцій, законів збереження, потенціальних допустимих перетворень і потенціальних симетрій. (Р.О. Попович, О.А. Почекета)

Досліджено клас нелінійних еволюційних рівнянь з градієнтною дифузійною, який узагальнює низку відомих нелінійних математичних моделей, зокрема модель Перона–Маліка для опису процесів розпізнавання іміджів (образів) та стисливої рідини (газу) в пористому середовищі. Проведено класифікацію симетрій Лі з точністю до перетворень групи еквівалентності, окремо проаналізовано випадки важливі для застосувань. Побудовано низку точних розв'язків (зокрема, радіально-симетричних) шляхом застосування знайдених симетрій Лі. (Р.М. Черніга)

Проведено повну групову класифікацію $(1+3)$ -вимірних рівнянь Шрьодінгера зі змінним масовим параметром та довільним потенціалом і встановлено структуру відповідного групоїда еквівалентності. (чл.-кор. НАН України А.Г. Нікітін).

Проведено повну групову класифікацію класу загальних $(1+1)$ -вимірних рівнянь Бюргерса–Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами довільного фіксованого порядку і вичерпно описано допустимі точкові перетворення в цьому класі і його підкласах. Це дозволило побудувати класи диференціальних рівнянь з нетривіальними узагальненими групами еквівалентності, що розв’язує відкриту з середини 1990-х років проблему існування таких класів. (С.В. Опанасенко, Р.О. Попович)

Описано групоїд еквівалентності класу рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами. Виконано розбиття класу на шість нормалізованих підкласів, що не перетинаються, та запропоновано шляхи покращення трансформаційних властивостей підкласів, що є нормалізованими лише в узагальненому сенсі. У якості ілюстративного прикладу прокласифіковано один з підкласів. (О.О. Ванєєва)

Зроблено вичерпний опис симетрій Лі класичної системи Шіґесади–Кавасакі–Терамото, якою описуються процеси взаємодії популяцій з урахуванням так званої поперечної дифузії. Побудовано ліівські точні розв’язки та досліджено їх властивості (Р.М. Черніга, В.В. Давидович)

З використанням розвинутих класифікаційних методів виконано розширений симетрійний аналіз класу узагальнених рівнянь Бюргера. Це виправляє, покращує і узагальнює всі відомі в літературі результати щодо таких рівнянь, які отримано в рамках групового аналізу диференціальних рівнянь. Прокласифіковано ліівські симетрії, ліівські і неklasичні редукції, приховані симетрії, закони збереження, потенціальні допустимі перетворення і потенціальні симетрії. Побудовано широкі сім’ї точних розв’язків. Вирішальну роль в успішності і вичерпності розгляду відіграв той факт, що вивчений клас узагальнених рівнянь Бюргера є нормалізо-

ваним, причому його група еквівалентності скінченновимірна. (Р.О. Попович, О.А. Почекета)

Розв'язано проблему групової класифікації для класу $(1+1)$ -вимірних лінійних еволюційних рівнянь довільного фіксованого порядку. Показано, що відповідних максимально калібрований клас лінійних еволюційних рівнянь однорідно напівнормалізований відносно лінійної суперпозиції розв'язків, а тому його повну групову класифікацію можна виконати алгебраїчним методом. Також побудовано точні розв'язки рівнянь з цього класу за допомогою оригінального методу класифікації лівських редукцій та методів, спеціальних для лінійних рівнянь з частинними похідними. (Р.О. Попович)

Переглянуто означення еквівалентності реалізацій алгебр Лі та запропоновано величини стійкі відносно перетворень еквівалентності. Як результат сформульовано практичний алгоритм, що дозволяє встановити еквівалентність між заданими реалізаціями. (М.О. Нестеренко)

Знайдено всі реалізації скінченновимірних алгебр Лі гладких дотичних векторних полів на колі. Отримано комбінаторні формули для підрахунку кількості реалізацій некомутативних алгебр (С.В. Спічак).

Досліджено частковий випадок класичної системи Келер–Зеґель, яка застосовується для моделювання багатьох біологічних процесів. Встановлено, що відповідні початкові та крайові задачі у випадку двох просторових змінних та коректно вибраних крайових умов інваріантні відносно нескінченно-вимірних алгебр Лі. У випадку задачі Коші та крайових умов Ноймана проведена класифікація симетрій Лі для сім'ї відповідних задач. Отримані симетрії дозволили побудувати точні розв'язки відповідних крайових задач у випадку простих геометричних областей (таких як нескінченна смуга, круг, зовнішність круга на площині). (Р.М. Черніга)

Уточнено результати групової класифікації Боєра (1974) одночастинкових рівнянь Шрьодінгера з довільним потенціалом. Уперше пред-

ставлено вичерпний список нееквівалентних потенціалів, відповідних алгебр інваріантності та допустимих перетворень еквівалентності. (чл.-кор. НАН України А.Г. Нікітін).

Введено поняття рівномірно напівнормалізованих класів диференціальних рівнянь і доведено теорему про розщеплення груп точкових симетрій систем диференціальних рівнянь у таких класах. На основі цих результатів розширено область застосовності алгебраїчного методу групової класифікації, що проілюстровано груповою класифікацією $(1+1)$ -вимірних лінійних рівнянь Шрьодінгера з довільним комплекснозначним потенціалом. (Р.О. Попович)

Розв'язано задачу про класифікацію симетрій Лі для класу систем нелінійних рівнянь змішаного типу. На основі отриманих результатів встановлено інваріантність класу крайових задач з рухомою границею (задач типу Стефана), які моделюють процеси росту ракових пухлин. Отримані оператори симетрії Лі використаного для побудови розв'язків крайової задачі із рухомими границями та їхньої інтерпретації. (Р.М. Черніга, В.В. Давидович)

Здійснено опис симетрій Лі дифузійної системи Лотки–Вольтера з залежними від часу коефіцієнтами. Побудовано точні розв'язки досліджуваної системи для опису взаємодії популяцій типу хижак-жертва. (В.В. Давидович)

Запропоновано поняття локальної еквівалентності реалізацій алгебр Лі векторними полями і величини, стійкі відносно таких перетворень еквівалентності. Показано, що підалгебра, яка характеризує реалізацію, визначається ядром відповідного оператора в початку координат. Доведено лему про еквівалентність реалізації, яка є сумою двох, реалізації, що характеризується перетином відповідних підалгебр. Продемонстровано що ряд величин, стійких відносно перетворень еквівалентності, зокрема транзитивність реалізацій, простіше обчислюються в термінах груп Лі. (М.О. Нестеренко)

Запропоновано низку реалістичних моделей модифікованої квантової механіки, що є суперсиметричними та суперінтегровними. Побудовано точні розв'язки низки рівнянь Шрьодінгера зі змінним параметром маси. Показано, що суперсиметрія притаманна досить широкому класу фізичних систем, що зустрічаються у фізиці твердого тіла. (чл.-кор. НАН України А.Г. Нікітін)

Проведено розширений аналіз симетрії двовимірної системи Бюргерса. Повну групу точкової симетрії цієї системи знайдено за допомогою нової вдосконаленої версії алгебраїчного методу. Вичерпно і в оптимальний спосіб вивчено її лінійські редукції і побудовано нові інваріантні розв'язки. Доведено, що ця система не має локальних законів збереження, а також вивчено її приховані закони збереження, включаючи потенційні, і різні види прихованих симетрій (неперервні, дискретні та потенційні). Використовуючи метод диференціальних обмежень, який є особливо ефективним для системи Бюргерса, знайдено низку широких сімей її розв'язків, які виражаються через розв'язки $(1+1)$ -вимірного лінійного рівняння теплопровідності, хоча вони й не пов'язані з лінеаризованою підмножиною розв'язків системи Бюргерса. (Р.О. Попович)

Досліджено лінійські та неklasичні симетрії рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля з коефіцієнтами, що залежать від змінної часу. Прокласифіковано лінійські та неklasичні оператори редукції, а також допустимі перетворення та побудовано сім'ю точних розв'язків таких рівнянь. (В.М. Бойко, О.О. Ванєєва, О.Ю. Жалій)

Досліджено симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь типу реакції-дифузії, що моделює процес взаємодії первісних фермерів з мисливцями-збирачами. Отримані оператори застосовано для побудови інваріантних розв'язків. Досліджено властивості отриманих розв'язків та наведено їх біологічну інтерпретацію. (В.В. Давидович, Р.М. Черніга)

Знайдено повну (нескінченновимірну) групу еквівалентності класу $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь другого порядку. Метод еквіваріан-

тних рухомих реперів застосовано для побудови, в регулярному випадку процедури нормалізації, рухомого реперу для групи, пов'язаної з групою еквівалентності у контексті перетворень еквівалентності серед рівнянь розглянутого класу. Використовуючи побудований рухомий репер, описано алгебру диференціальних інваріантів цієї групи шляхом знаходження мінімального генеруючого набору диференціальних інваріантів і повного набору незалежних операторів інваріантного диференціювання. (Р.О. Попович)

Досліджено допустимі перетворення загального класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Побудовано ланцюжок вкладених нормалізованих підкласів цього класу. Для цих підкласів побудовано групоїди еквівалентності. Окремо розглянуто два ненормалізовані підкласи рівнянь типу реакції–конвекції–дифузії, що є цікавими для застосувань, і знайдено їх групи еквівалентності. (О.О. Ванеєва)

Запропоновано практичні обчислювальні методи для дискретного аналізу функцій означених на вагових решітках або модельних наборах напівпростих груп Лі. Ці методи теоретико-групові та базуються на скінчених групах та дуальних до них. Чисельні наближення апроксимують цільові функції однотипно на всьому нескінченному просторі. Розглянуто ряд прикладів. (М.О. Нестеренко)

Знайдено явний вигляд перетворень, що пов'язують нелінійні $(1+1)$ -вимірні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними семивимірними алгебрами ліівських симетрій. (В.М. Бойко, О.В. Локазюк)

Метод еквівалентності, а також метод перетворень між класами диференціальних рівнянь, застосовано для побудови точних розв'язків рівнянь Фішера з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної. (О.О. Ванеєва)

Наведено короткий огляд методу отримання загального розв'язку системи пов'язаних рівнянь ейконалу, що базується на використанні перетворень годографа та контактних перетворень. Використана процеду-

ра дозволила також знайти загальний розв'язок системи рівнянь ейконалу та Гамільтона–Якобі. (І.А. Єгорченко)

Отримано нові породжуючі реалізації конформної алгебри Лі та двох алгебр де Сіттера. Побудовано деформацію алгебри Пуанкаре до алгебр де Сіттера. (М.О. Нестеренко)

Досліджено модифікацію еволюційного рівняння Блека–Шоулза ціноутворення азійських опціонів, яке (окрім часу) залежить від двох “просторових” змінних. Знайдено максимальну алгебру інваріантності цього рівняння. За допомогою операторів цієї алгебри проведено симетрійну редукцію й побудовано широкі класи його точних розв'язків. (С.В. Спічак)

3 Групова класифікація рівнянь Шрьодінгера зі змінним параметром маси

Даний розділ присвячено дослідженню фундаментальних рівнянь квантової механіки. Один з важливих результатів у цій царині було отримано ще у 70-х роках минулого сторіччя. Добре відомо, що реальні фізичні проблеми квантової фізики як правило володіють досить широкою симетрією. Наприклад, атом водню у досить хорошому наближенні є інваріантним відносно групи обертань. І фізики добре вміли знаходити і використовувати ці симетрії. Але у роботах Нідерера, Боєра і деяких інших були повністю описані усі групи симетрії, які можуть існувати в задачах квантової механіки. Тим самим було створено теоретико-групове обґрунтування рівнянь квантової механіки. Зокрема, фізики дізналися, що деяким задачам квантової механіки притаманна конформна симетрія. Ці результати мали великий вплив і досить широко цитувалися. Але слід відмітити, що ці симетрії фактично відкрив ще Софус Лі при дослідженні рівняння теплопровідності.

Нижче викладаються результати, отриманні при класифікації рівнянь Шрьодінгера зі змінним параметром маси. Такі рівняння мають дуже широкий спектр застосувань, зокрема, у фізиці твердого тіла, напівпровідниках, сучасних задачах про квантові точки, квантові площин, тощо. Але на відміну від стандартного рівняння Шрьодінгера, симетрії таких рівнянь були досліджені тільки у для дуже обмеженого кола задач.

Основні визначення. У цьому розділі досліджуються рівняння типу Шрьодінгера, що мають наступний вигляд:

$$L\psi \equiv \left(i\frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi = 0, \quad (3.1)$$

де H — гамільтоніан зі змінним параметром маси

$$H = m^\rho p_a m^{-1-2\rho} p_a m^\rho + V. \quad (3.2)$$

Тут $p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, $m = m(\mathbf{x})$ та $V = V(\mathbf{x})$ маса та потенціал, що залежать від просторових змінних $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, за індексами, що повторюються, розуміємо сумування за значеннями $1, 2, \dots, n$.

В (3.2) використано фізично обгрунтоване представлення

$$m^\rho p_a m^{-1-2\rho} p_a m^\rho$$

для кінетичної енергії. З точністю до еквівалентності, гамільтоніан завжди можна представити у наступному вигляді:

$$H = p_a f p_a + \tilde{V} \quad (3.3)$$

та

$$H = \sqrt{f} p_a p_a \sqrt{f} + \hat{V},$$

де

$$f = m^{-1}, \quad \tilde{V} = V + (\rho^2 + 2\rho) \frac{m_a m_a}{m^3} - \frac{\rho m_{aa}}{m^2}$$

та

$$\hat{V} = \tilde{V} - \frac{1}{2} f_{nn} + \frac{1}{4f} f_a f_a.$$

Тут $m_a = \frac{\partial m}{\partial x_a}$ and $f_a = \frac{\partial f}{\partial x_a}$.

Саме таке представлення є зручним для дослідження симетрії.

Ми досліджуємо двовимірні потенціали, але використовуємо формалізм, що годиться для довільної розмірності n .

Визначальні рівняння для систем довільної розмірності. Для виводу визначальних рівнянь можна використати спрощений алгоритм, оскільки досліджуються лінійні системи. А саме, розглянемо диференціальний оператор першого порядку:

$$Q = \xi^0 \partial_t + \xi^a \partial_a + \tilde{\eta} \equiv \xi^0 \partial_t + \frac{1}{2} (\xi^a \partial_a + \partial_a \xi^a) + i\eta, \quad (3.4)$$

що асоціюється з генератором групи. У формулі (3.4) $\tilde{\eta} = \frac{1}{2}\xi_a^a + i\eta$, ξ^0 , ξ^a і η є функціями від незалежних змінних, які знаходяться з використанням наступного операторного рівняння

$$QL - LQ = \alpha L,$$

де α — ще одна невідома функція від t та $\mathbf{x}$.

Обраховуючи комутатор і збираючи коефіцієнти при однакових диференціалах, дістаємо наступну систему визначальних рівнянь:

$$\dot{\xi}^0 = -\alpha, \quad \xi_a^0 = 0, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{F}^{ab} \equiv (\xi_a^b + \xi_b^a) f - \delta^{ab} (\xi^i f_i - \alpha f) = 0, \quad (3.6)$$

$$-i\dot{\xi}^a + f\xi_{cc}^a - 2if\eta_a + \xi^b f_{ab} - \xi_b^a f_b - f\xi_{na}^n = \alpha f_a, \quad (3.7)$$

$$i(f\eta_a)_a + \xi^a V_a + \frac{1}{2}(f\xi_{ab}^a)_b + \left(\frac{i}{2}\dot{\xi}_a^a - \dot{\eta}\right) = \alpha V, \quad (3.8)$$

де δ^{ab} — символ Кронекера, а крапка та нижні індекси позначають похідні по часовій та просторових змінних: $\dot{\xi}^0 = \frac{\partial \xi^0}{\partial t}$, $f_a = \frac{\partial f}{\partial x_a}$, і так далі. Використовуючи різноманітні диференціальні наслідки рівнянь (3.6)–(3.8), цю систему можна привести до наступної більш зручної форми:

$$\xi_a^b + \xi_b^a - \frac{2}{n}\delta_{ab}\xi_i^i = 0, \quad (3.9)$$

$$\xi^i f_i - \alpha f = \frac{2}{n}f\xi_i^i, \quad (3.10)$$

$$\dot{\xi}^a + 2\eta_a f = 0, \quad (3.11)$$

$$\xi^a V_a + \frac{1}{2}\xi_{ba}^b f_a = \alpha V + \dot{\eta}. \quad (3.12)$$

Система (3.5), (3.9)–(3.12) визначена для довільного n , але ми будемо використовувати випадок $n = 2$.

Редукція до випадку $n = 2$ та відношення еквівалентності. Класифікаційна проблема у двовимірному просторі є досить специфічною. З одного боку, визначальні рівняння стають простішими, але з другого — сильно ускладнюється відношення еквівалентності.

Рівняння (3.9) для $n = 2$ зводиться к умовам Коші–Рімана для функцій $\xi^1 = u$ і $\xi^2 = v$:

$$u_1 = v_2, \quad u_2 = -v_1.$$

Відповідні оператори симетрії набувають вигляду (3.4) і їх можна переписати у вигляді:

$$Q = \xi^0 \partial_0 + u \partial_1 + v \partial_2 + u_1 + i \eta.$$

Інші рівняння (3.10)–(3.12) виглядають так

$$2f\eta_1 + \dot{u} = 0,$$

$$2f\eta_2 + \dot{v} = 0,$$

$$uf_1 + vf_2 - (\alpha + 2u_1)f = 0,$$

$$uV_1 + vV_2 + u_{11}f_1 + v_{22}f_2 = \alpha V + \dot{\eta}.$$

Відмітимо, що гамільтоніан (3.3) є форм-інваріантним відносно наступних трансформацій:

$$x_1 \rightarrow \tilde{u}(x_1, x_2), \quad x_2 \rightarrow \tilde{v}(x_1, x_2), \quad (3.13)$$

$$\psi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{R}}\psi, \quad H \rightarrow \frac{1}{\sqrt{R}}H\sqrt{R}, \quad (3.14)$$

де $\tilde{u}$ та $\tilde{v}$ — довільні аналітичні функції від $R = \sqrt{\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2}$. Дійсно, перетворення (3.13), (3.14) зберігають форму гамільтоніана, але міняють конкретний вигляд маси та потенціалу у (3.3).

Окрім того, рівняння (3.1) допускає зміну масштабу:

$$t \rightarrow \nu t + \mu, \quad (3.15)$$

де $\nu \neq 0$ та μ довільні константи.

Ми вважаємо два рівняння (3.1), (3.3) еквівалентними, якщо вони пов'язані перетвореннями (3.13)–(3.15).

Наведені перетворення еквівалентності є досить потужними. Наприклад, виходячи з гамільтоніана з постійною масою $\hbar f = 1$ і роблячи заміни (3.13) та (3.14) дістаємо

$$H = \tilde{p}_a \tilde{f} \tilde{p}_a + \tilde{V},$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= -i \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}, \quad \tilde{p}_2 = -i \frac{\partial}{\partial \tilde{v}}, \quad \tilde{V} = V(x_1(\tilde{u}, \tilde{v}), x_2(\tilde{u}, \tilde{v})), \\ \tilde{f} &= \tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 \equiv \tilde{u}_1^2 + \tilde{v}_1^2, \quad \tilde{u}_{11} + \tilde{u}_{22} = 0. \end{aligned}$$

Теорема 3.1. *Гамільтоніан (3.3) еквівалентний гамільтоніану з постійною масою тоді і тільки тоді, коли обернена маса f задовольняє наступне рівняння:*

$$(\log f)_{nn} = 0,$$

яке еквівалентне рівнянню

$$f f_{nn} = f_n f_n.$$

Класифікаційні результати. Ці результати наведені у наступних рівняннях:

$$\begin{aligned} H &= p_a f(r) p_a + V(r), \\ Q_1 &= J = x_1 p_2 - x_2 p_1; \\ H &= p_a (r^2 + 1)^2 p_a - 4r^2, \\ Q_1 &= J, \quad Q_2 = (x_2^2 - x_1^2 - 1) p_1 - 2x_1 x_2 p_2 + 2ix_1, \\ Q_3 &= (x_1^2 - x_2^2 - 1) p_2 - 2x_1 x_2 p_1 + 2ix_2; \\ H &= p_a (r^2 - 1)^2 p_a - 4r^2, \\ Q_1 &= J, \quad Q_4 = (x_2^2 - x_1^2 + 1) p_1 - 2x_1 x_2 p_2 + 2ix_1, \\ Q_5 &= (x_1^2 - x_2^2 + 1) p_2 - 2x_1 x_2 p_1 + 2ix_2; \\ H &= p_a r^{\alpha+2} F(\varphi) p_a + r^\alpha \hat{V}(\varphi), \\ Q_6 &= D = 2i\alpha t \partial_t + x_1 p_1 + x_2 p_2; \end{aligned}$$

$$H = p_a f(r) p_a + \nu \varphi + \hat{V}(r),$$

$$Q_7 = J + \nu t;$$

$$H = p_a x_1^{\alpha+2} p_a + \nu x_1^\alpha, \quad \alpha \neq 1;$$

$$Q_8 = p_2, \quad Q_9 = D;$$

$$H = p_a x_1^3 p_a + \mu x_1 + \nu x_2,$$

$$Q_{10} = p_2 + \nu t, \quad Q_{11} = it\partial_t + x_1 p_1 + x_2 p_2,$$

де $\varphi = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ and $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Крім того, $f(r)$, $F(\varphi)$, $\hat{V}(r)$ і $\hat{V}(\varphi)$ є довільними функціями аргументів, що наведені у дужках.

Симетрії $Q_1, Q_2, \dots, Q_5$ комутують з гамільтоніаном, тобто є інтегралами руху. Крім того, вони задовольняють наступним комутаційним співвідношенням:

$$[Q_1, Q_2] = iQ_3, \quad [Q_1, Q_3] = -iQ_2, \quad [Q_2, Q_3] = iQ_1$$

та

$$[Q_1, Q_4] = iQ_5, \quad [Q_1, Q_5] = -iQ_4, \quad [Q_4, Q_5] = -iQ_1,$$

що визначають алгебри $so(3)$ та $so(1, 2)$ відповідно.

Заклучні зауваження. Представлені результати можна інтерпретувати як створення своєрідного теоретико-групового підґрунтя для двовимірної квантової механіки зі змінним параметром маси. Априорне представлення усіх нееквівалентних груп симетрії може бути дуже корисним при побудові моделей з наперед заданою симетрією. Крім того, теорема про умови еквівалентності моделей зі змінним параметром маси до моделей з постійною масою має певну практичну цінність і дозволяє впізнати моделі, у яких масовий параметр змінний, але насправді це “прикрашені” моделі з постійною масою.

Групова класифікація тривимірних рівнянь Шрьодінгера зі змінним параметром маси. Прокласифіковано симетрії тривимірних рівнянь Шрьодінгера зі змінним параметром маси. Таких рівнянь існує

набагато більше, ніж у двовимірному випадку, і не тільки тому, що зростає кількість змінних. Насправді причиною є відносно бідні відношення еквівалентності порівнянно з двовимірним випадком. Показано, що існує 94 класів таких рівнянь, визначених з точністю до групи еквівалентності, і 70 класів визначених з точністю до групоїда еквівалентності. Максимально широка симетрія таких систем задається восьми параметричною групою Лі.

Оператори симетрії та відношення еквівалентності. Ми не будемо наводити відповідні означення та визначальні рівняння, для симетрій тривимірного рівняння, які зустрічалися вище для рівнянь довільної розмірності. Але наведемо загальний вираз оператора симетрії, який має наступну форму:

$$Q = \xi^0 \partial_0 + \lambda_i K_i + \theta_i L_i + \omega D + \nu_i P_i + \eta,$$

де

$$\begin{aligned} P_i &= p_i = -i \frac{\partial}{\partial x_i}, & L_i &= \varepsilon_{ijk} x_j p_k, \\ D &= x_n p_n - \frac{3i}{2}, & K_i &= x_n x_n p_i - 2x_i D. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Оператори (3.16) створюють базис алгебри $\mathfrak{c}(3)$, а відповідна група — це десятипараметрична конформна група у Евклідовому просторі. Ця група локально ізоморфна групі Лоренца у $(1 + 3)$ -вимірному просторі. І саме ця група є групою еквівалентності нашого рівняння.

Для побудови розв'язків визначальних рівнянь використовувався алгебраїчний метод. Важливим елементом цього методу є використання нееквівалентних підалгебр алгебри еквівалентності. Для алгебри Лі групи Лоренца у $(1 + 3)$ -вимірному просторі такі підалгебри відомі. Вони були знайдені канадськими математиками Патерою і Вінтерницем. І саме знання цих алгебр дозволяють ефективно розв'язати дуже складну систему визначальних рівнянь. Класифікаційні результати наведено нижче.

Класифікаційні результати. Ці результати дуже громіздкі, тому наведено лише їх частину. Допустимі фіксовані параметри маси наведено

у наступних формулах:

$$\begin{aligned} m &= \tilde{r}^{-2} = (x_1^2 + x_2^2)^{-1}, \\ m &= r^{-2}, \quad m = e^{-x_3}, \quad m = (r^2 \pm 1)^{-2} \\ m &= \tilde{r}^{-3}, \quad m = x_3^{-2}, \quad m = x_3^{-3}. \end{aligned}$$

Саме такі функції відповідають найбільш широкій симетрії.

Маси, що залежать від довільних параметрів, мають вигляд:

$$m = r^{-2(1+\sigma)}, \quad m = \tilde{r}^{-2}e^{-\sigma\Theta}, \quad m = \tilde{r}^{-2-\sigma}e^{-\nu\Theta},$$

де $\Theta = \arctan(\frac{x_2}{x_1})$, σ та ν — довільні дійсні параметри.

Ще існують 24 випадки маси, що залежить від довільної функції, які ми не наводимо. Приклади класифікаційних таблиць надано далі.

Для систем, що наведені у пунктах 1, 3, 5, 7, 9 та 2, 4, 6, 8, 10 відповідають алгебри симетрії $\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$ та $\mathfrak{s}_{3,1}$. У пунктах 11, 13, 15, 17, 19 та 21 наведено симетрії, що утворюють алгебри, ізоморфні до $\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$, якщо хоча б один з параметрів λ чи σ є ненулевим. Якщо усі ці параметри тривіальні, ці алгебри симетрії редукуються до прямих сум одновимірних алгебр.

Таким чином, знайдено усі гамільтоніани зі змінним параметром маси, що мають нееквівалентні симетрії. За браком місця ми представили тільки дві з шести таблиць з класифікаційними результатами. Решта результатів може бути знайдена у роботі [25].

Уточнення класичних результатів щодо симетрій стандартного рівняння Шрьодінгера. Звичайне рівняння Шрьодінгера є частковим випадком більш загальних рівнянь зі змінним параметром маси. Тому, класифікуючи його симетрії, ми дістаємо також список симетрійно нееквівалентних стандартних рівнянь Шрьодінгера. Оскільки отримані у такий спосіб результати не співпали з відомими результатами Бойєра, було проведено ревізію останніх. Виявилось, що загально прийнята класифікація є неповною.

Табл. 3.1: Системи зі степеневою функцією маси, $f = \tilde{r}^2 = x_1^2 + x_2^2$.

No	потенціал V	симетрії	алгебра інваріантності
1	$G(\tilde{r}, x_3) + \mu\Theta$, де $\Theta = \arctan(\frac{x_2}{x_1})$	$A_1^1 = t(L_3 + \frac{\mu t}{2}) - \Theta$, $A_2^1 = L_3 + \mu t$	$\mathfrak{n}_{4,1}$
2	$G(\tilde{r}) + \mu\Theta + \kappa x_3$	$A_1^1, A_2^1, P_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{5,4}$
3	$G(\frac{x_3}{\tilde{r}}) + \mu\Theta + \nu \ln(\tilde{r})$	$A_1^1, A_2^1, D + \nu t$	$\mathfrak{n}_{5,4}$
4	$G(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}) + \mu\Theta + \lambda\Phi$ де $\Phi = \arctan(\frac{r^2-1}{2x_3})$	$A_1^1, A_2^1, K_3 - P_3 - 2\lambda t$	$\mathfrak{n}_{5,4}$
5	$\mu\Theta + \nu \ln(\tilde{r})$	$A_1^1, A_2^1, D + \nu t, P_3$	$\mathfrak{s}_{6,91}$
6	$\mu\Theta$	$A_1^1, A_2^1, P_3, D, K_3$	$\mathfrak{n}_{4,1} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$
7	$G(\tilde{r}, x_3) + \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \mu\Theta$	$B_1^1 = \lambda \sin(\lambda t)L_3$ $-(\lambda^2\Theta + \mu) \cos(\lambda t)$, $B_2^1 = \lambda \cos(\lambda t)L_3$ $+(\lambda^2\Theta + \mu) \sin(\lambda t)$	$\mathfrak{s}_{4,7}$
8	$G(\tilde{r}) + \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \mu\Theta + \kappa x_3$	$B_1^1, B_2^1, P_3 + \kappa t$	$\mathfrak{s}_{5,16}$
9	$G(\frac{x_3}{\tilde{r}}) + \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \mu\Theta + \nu \ln(\tilde{r})$	$B_1^1, B_2^1, D + \nu t$	$\mathfrak{s}_{5,16}$
10	$G(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}) + \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \mu\Theta + \lambda\Phi$	$B_1^1, B_2^1, K_3 - P_3 - 2\lambda t$	$\mathfrak{s}_{5,16}$
11	$\frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \mu\Theta + \nu \ln(\tilde{r})$	$B_1^1, B_2^1, D + \nu t, P_3$	$\mathfrak{s}_{6,230}$
12	$\frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \mu\Theta$	$B_1^1, B_2^1, P_3, D, K_3$	$\mathfrak{s}_{4,7} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$
13	$G(\tilde{r}, x_3) - \mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2$	$C_1^1 = \lambda \sinh(\lambda t)L_3$ $+(\mu + \lambda^2\Theta) \cosh(\lambda t)$, $C_2^1 = \lambda \cosh(\lambda t)L_3$ $+(\mu + \lambda^2\Theta) \sinh(\lambda t)$	$\mathfrak{s}_{4,6}$
14	$G(\tilde{r}) - \mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \kappa x_3$	$C_1^1, C_2^1, P_3 + \kappa t$	$\mathfrak{s}_{5,15}$
15	$G(\frac{x_3}{\tilde{r}}) - \mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \nu \ln(\tilde{r})$	$C_1^1, C_2^1, D + \nu t$	$\mathfrak{s}_{5,15}$
16	$G(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}) - \mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \lambda\Phi$	$C_1^1, C_2^1, K_3 - P_3 - 2\lambda t$	$\mathfrak{s}_{5,16}$
17	$-\mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2 + \nu \ln(\tilde{r})$	$C_1^1, C_2^1, P_3, D + \nu t$	$\mathfrak{s}_{6,229}$
18	$-\mu\Theta - \frac{\lambda^2}{2}\Theta^2$	$C_1^1, C_2^1, P_3, D, K_3$	$\mathfrak{s}_{4,7} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

Виправлену класифікація симетрій рівняння Шрьодінгера з постійним масовим параметром можна знайти у роботі [48], де також дано чітке визначення відношень еквівалентності для таких гамільтоніанів і

Табл. 3.2: Системи з масою, що є довільною функцією просторових змінних.

No	обернена маса f	потенціал	симетрії
1	$F(x_1, x_2)e^{\lambda x_3}$	$G(x_1, x_2)e^{\lambda x_3}$	$P_3 + i\lambda t\partial_t$
2	$F(x_1, x_2)$	$G(x_1, x_2) + \lambda x_3$	$P_3 + \lambda t$
3	$F(\tilde{r}, x_3)e^{\sigma\Theta}$	$G(\tilde{r}, x_3)e^{\sigma\Theta}$	$L_3 + i\sigma t\partial_t$
4	$F(\tilde{r}, x_3)$	$G(\tilde{r}, x_3) + \lambda\Theta$	$L_3 + \lambda t$
5	$r^{\sigma+2}F(\frac{\tilde{r}}{r}, r^\lambda e^{-\Theta})$	$r^\sigma G(\frac{\tilde{r}}{r}, r^\lambda e^{-\Theta})$	$\lambda L_3 + D + i\sigma t\partial_t$
6	$r^2 F(\frac{\tilde{r}}{r}, r^\lambda e^{-\Theta})$	$G(\frac{\tilde{r}}{r}, r^\lambda e^{-\Theta}) + \sigma(\lambda\Theta + \ln(r))$	$\lambda L_3 + D + \sigma(1 + \lambda^2)t$
7	$F(\tilde{r}, x_3 - \Theta)e^{\sigma\Theta}$	$G(\tilde{r}, x_3 - \Theta)e^{\sigma\Theta}$	$P_3 + L_3 + i\sigma t\partial_t$
8	$F(\tilde{r}, x_3 - \Theta)$	$G(\tilde{r}, x_3 - \Theta) + \lambda\Theta$	$P_3 + L_3 + \lambda t$
9	$\tilde{r}^2 F\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \lambda\Phi + \Theta\right) e^{\sigma\Theta}$	$e^{\sigma\Theta} \left(\Psi D_2 F - \frac{3\tilde{r}}{2} D_1 F + G\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \lambda\Phi + \Theta\right) \right)$	$M_{43} + \lambda L_3 + i\sigma t\partial_t,$
10	$\tilde{r}^2 F\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \lambda\Phi + \Theta\right)$	$G\left(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}, \lambda\Phi + \Theta\right) + \sigma\Theta - \frac{3\tilde{r}}{2} D_1 F + \Psi D_2 F$	$M_{43} + \lambda L_3 + i\lambda\sigma t,$
11	$F(\tilde{r})e^{\sigma\Theta + \lambda x_3}$	$G(\tilde{r})e^{\sigma\Theta + \lambda x_3}$	$L_3 + \sigma t\partial_t, P_3 + i\lambda t\partial_t$
12	$F(\tilde{r})$	$G(\tilde{r}) + \sigma\Theta + \lambda x_3$	$L_3 + \sigma t, P_3 + \lambda t$
13	$\tilde{r}^{\sigma+2} e^{\lambda\Theta} F(\frac{\tilde{r}}{r})$	$\tilde{r}^\sigma e^{\mu\Theta} G(\frac{x_3}{\tilde{r}})$	$D + i\sigma t\partial_t, L_3 + i\lambda t\partial_t$
14	$\tilde{r}^2 F(\frac{\tilde{r}}{r})$	$G(\frac{\tilde{r}}{r}) + \sigma\Theta + \lambda \ln(r)$	$D + \lambda t, L_3 + \sigma t$
15	$e^{\sigma x_1} F(x_3)$	$e^{\sigma x_1} G(x_3)$	$P_1 + i\sigma t\partial_t, P_2$
16	$F(x_3)$	$G(x_3) + \lambda x_2$	$P_1, P_2 + \lambda t$
17	$e^{\sigma\Theta - \lambda\Phi} \tilde{r}^2 F(\frac{r^2+1}{\tilde{r}})$	$e^{\sigma\Theta - \lambda\Phi} \left(\frac{3}{2} \tilde{r} F' + G(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}) \right)$	$M_{43} + i\lambda t\partial_t, L_3 + i\sigma t\partial_t$
18	$\tilde{r}^2 F(\frac{r^2+1}{\tilde{r}})$	$\frac{3}{2} \tilde{r} F' + G(\frac{r^2+1}{\tilde{r}}) + \sigma\Theta - \lambda\Phi$	$M_{43} + \lambda t, L_3 + \sigma t$
19	$\tilde{r}^{\sigma+2} F(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta})$	$\tilde{r}^\sigma G(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta})$	$D + i\sigma t\partial_t + \nu L_3, P_3$
20	$\tilde{r}^3 F(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta})$	$\tilde{r} G(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta}) + \sigma x_3$	$D + i\sigma t\partial_t + \nu L_3, P_3 + \sigma t$
21	$\tilde{r}^2 F(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta})$	$\sigma \ln(\tilde{r}) + G(\tilde{r}^\nu e^{-\Theta})$	$D + \nu L_3 + \sigma t, P_3$
22	$F(x_3)$	$G(x_3)$	P_1, P_2, L_3
23	$F(r^2)$	$G(r^2)$	L_1, L_2, L_3
24	$x_3^2 F\left(\frac{r^2-1}{x_3}\right)$	$\frac{3}{2} x_3 F' + G\left(\frac{r^2-1}{x_3}\right)$	M_{01}, M_{02}, M_{12}

явне визначення відповідних алгебр інваріантності. Таблиці з класифікаційними результатами наведено далі.

Тут $G(\cdot)$ — довільні функції, μ , κ та ω_a — довільні параметри, ε_1 , ε_2 та ε_3 можуть приймати значення ± 1 , нижні індекси a and k приймають значення 1, 2, 3 та 1, 2 відповідно. Крім цього, ми позначили $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $\tilde{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ та $\varphi = \arctan(x_2/x_1)$.

Усі рівняння допускають симетрії $P_0 = \frac{\partial}{\partial t}$ та одиничний оператор. Додаткові симетрії наведено у третьому стовбчику, де

$$P_a = -i\partial_a, \quad M_{ab} = x_a P_b - x_b P_a,$$

$$D = 2tP_0 - x_a P_a + \frac{in}{2},$$

$$P_0 = i\partial_t, \quad G_a = tP_a - x_a, \quad A = tD - t^2 P_0 - \frac{x^2}{2},$$

$$A_1^+ = \frac{1}{\omega} \sin(2\omega t) P_0 - \cos(2\omega t) \left(x^a P_a - \frac{in}{2} \right) - \omega \sin(2\omega t) x^2,$$

$$A_2^+ = \frac{1}{\omega} \cos(2\omega t) P_0 + \sin(2\omega t) \left(x_a P_a - \frac{in}{2} \right) - \omega \cos(2\omega t) x^2,$$

$$B_a^+(\omega) = \sin(\omega t) P_a - \omega x_a \cos(\omega t),$$

$$\hat{B}_a^+(\omega) = \cos(\omega t) P_a + \omega x_a \sin(\omega t).$$

Відповідні алгебри симетрії вказано у четвертому стовбчику таблиці, де $\mathfrak{n}_{a,b}$ та $\mathfrak{s}_{a,b}$ є нільпотентні та розв'язні алгебри розмірності a відповідно, у позначеннях Шнобла та Вінтерніца.

Групою евівалентності для рівняння Шрьодінгера є розширена група Евкліда. Відповідний групоїд еквівалентності включає також наступні перетворення:

$$\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t \rightarrow \tilde{t} = \frac{1}{\omega} \arctan(t),$$

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = (1+t^2)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{-i\omega t \mathbf{x}^2}{2(1+t^2)}} \psi(t, \mathbf{x}),$$

$$\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \rightarrow \tilde{t} = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctanh}(t),$$

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{\psi}(\tilde{t}, \tilde{\mathbf{x}}) = (1-t^2)^{\frac{n}{4}} e^{\frac{i\omega t \mathbf{x}^2}{2(1-t^2)}} \psi(t, \mathbf{x})$$

Табл. 3.3: Нееквівалентні потенціали для 3-вимірного рівняння Шрьодінгера.

No	потенціал V	симетрії	алгебра інваріантності
1	$G(\tilde{r}, x_3) + \kappa\varphi$	$L_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{3,1}, \kappa \neq 0,$ $3\mathfrak{n}_{1,1}, \kappa = 0$
2	$G(\tilde{r}, x_3 - \varphi) + \kappa\varphi$	$L_3 + P_3 + \kappa t$	$\mathfrak{n}_{3,1}, \kappa \neq 0,$ $3\mathfrak{n}_{1,1}, \kappa = 0$
3	$\frac{1}{\tilde{r}^2}G(\frac{r}{\tilde{r}}, r^\kappa e^{-\varphi})$	$D + \kappa L_3$	$\mathfrak{s}_{2,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
4*	$G(x_1, x_2)$	G_3, P_3	$\mathfrak{n}_{4,1}$
5*	$\frac{1}{\tilde{r}^2}G(\varphi, \frac{\tilde{r}}{r})$	A, D	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
6*	$\frac{1}{\tilde{r}^2}G(\frac{\tilde{r}}{r})$	A, D, L_3	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$
7*	$G(\tilde{r}) + \kappa\varphi$	$L_3 + \kappa t, G_3, P_3$	$\mathfrak{s}_{5,14}, \kappa \neq 0,$ $\mathfrak{n}_{4,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}, \kappa = 0$
8	$\frac{1}{\tilde{r}^2}G(\tilde{r}^\kappa e^{-\varphi})$	$D + \kappa L_3, G_3, P_3$	$\mathfrak{s}_{5,38}$
9**	$\frac{1}{\tilde{r}^2}G(\varphi)$	A, D, G_3, P_3	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{n}_{3,1}$
10*	$G(x_1)$	G_3, P_3, P_2, G_2, L_1	$\mathfrak{g}(1, 2)$
11	$G(r)$	L_1, L_2, L_3	$\mathfrak{so}(3) \oplus 2\mathfrak{n}_{1,1}$
12*	$\frac{\kappa}{\tilde{r}^2}$	A, D, L_1, L_2, L_3	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
13**	$\frac{\kappa}{\tilde{r}^2}$	A, D, G_3, P_3, L_3	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathfrak{n}_{3,1} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}$
14**	$\frac{\kappa}{x_1^2}$	$A, D, G_2, G_3, P_2, P_3, L_1$	$\mathfrak{sch}\mathfrak{r}(1, 2)$
15	$\varepsilon \frac{\omega^2 x_3^2}{2} + G(x_1, x_2)$	$B_3^\varepsilon(\omega), \hat{B}_3^\varepsilon(\omega)$	$\mathfrak{s}_{4,9}, \varepsilon = 1,$ $\mathfrak{s}_{4,8}, \varepsilon = -1$
16	$\varepsilon \frac{\omega^2 x_3^2}{2} + G(\tilde{r}) + \mu\varphi$	$B_3^\varepsilon(\omega), \hat{B}_3^\varepsilon(\omega), L_3 + \mu t$	$\mathfrak{s}_{5,16}, \varepsilon = 1, \mu \neq 0$ $\mathfrak{s}_{5,15}, \varepsilon = -1, \mu \neq 0$ $\mathfrak{s}_{4,9} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}, \varepsilon = 1, \mu = 0,$ $\mathfrak{s}_{4,8} \oplus \mathfrak{n}_{1,1}, \varepsilon = -1, \mu = 0$
17*	$\varepsilon \frac{\omega^2 x_2^2}{2} + G(x_1)$	$B_2^\varepsilon(\omega), \hat{B}_2^\varepsilon(\omega), P_3, G_3$	$\mathfrak{s}_{6,160}, \varepsilon = -1,$ $\mathfrak{s}_{6,161}, \varepsilon = 1$
18	$\varepsilon_1 \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \varepsilon_2 \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2} + G(x_3)$	$B_k^{\varepsilon_k}(\omega_k), \hat{B}_k^{\varepsilon_k}(\omega_k), k = 1, 2$	$\mathfrak{s}_{6,162}, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1,$ $\mathfrak{s}_{6,164}, \varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1,$ $\mathfrak{s}_{6,166}, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$
19	$\varepsilon \frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2} + G(x_3)$	$B_k^\varepsilon(\omega), \hat{B}_k^\varepsilon(\omega), L_3$	$\mathfrak{s}_{6,162}, \varepsilon = -1,$ $\mathfrak{s}_{6,166}, \varepsilon = 1$
20	$\varepsilon_1 \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \varepsilon_2 \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2} + \varepsilon_3 \frac{\omega_3^2 x_3^2}{2}$	$B_a^{\varepsilon_a}(\omega_a), \hat{B}_a^{\varepsilon_a}(\omega_a), a = 1, 2, 3$	$\mathfrak{s}_{8,1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$
21*	$\varepsilon_1 \frac{\omega_1^2 x_1^2}{2} + \varepsilon_2 \frac{\omega_2^2 x_2^2}{2}$	$B_k^{\varepsilon_k}(\omega_k), \hat{B}_k^{\varepsilon_k}(\omega_k), P_3, G_3$	$\mathfrak{s}_{8,2}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
22	$\varepsilon \frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2} + \varepsilon_3 \frac{\omega_3^2 x_3^2}{2}$	$L_3, B_a^{\varepsilon_a}(\omega_a), \hat{B}_a^{\varepsilon_a}(\omega_a)$	$\mathfrak{s}_{9,1}(\varepsilon, \varepsilon_3)$
23*	$\varepsilon \frac{\omega^2 \tilde{r}^2}{2}$	$G_3, P_3, L_3, B_k^\varepsilon(\omega), \hat{B}_k^\varepsilon(\omega)$	$\mathfrak{s}_{9,2}(\varepsilon)$
24*	$\varepsilon \frac{\omega^2 x_3^2}{2}$	$B_3^\varepsilon(\omega), \hat{B}_3^\varepsilon(\omega), P_k, G_k, L_3$	$\mathfrak{s}_{9,3}(\varepsilon)$

та

$$x_a \rightarrow x'_a = x_a - \frac{1}{2}\kappa_a t^2, \quad t \rightarrow t' = t,$$

$$\psi(t, \mathbf{x}) \rightarrow \psi'(t', \mathbf{x}') = \exp\left(-it\kappa_a x_a + \frac{i}{3}\kappa^2 t^3\right) \psi(t, \mathbf{x}).$$

Таким чином, отримано повну класифікацію симетрій рівняння Шрьодінгера з постійним масовим параметром, яка включає чотири випадки, пропущені Бойєром.

Повні системи точних розв'язків для рівнянь Шрьодінгера зі змінним параметром маси. Якщо рівняння Шрьодінгера має досить високу симетрію, воно є інтегровним. Це правило виявляється чинним також для рівнянь зі змінним параметром маси. У роботі [77] показано, що усі такі рівняння є точно роз'язними, якщо розмірність їх алгебри симетрії є шість чи більше. Відповідні повні системи розв'язків побудовано у явному вигляді. Повний список мас і потенціалів, що відповідають таким рівнянням, наведено у наступній таблиці.

Нижче наведено один приклад побудови згаданих розв'язків. Відповідне рівняння має вигляд:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_a}r^2\frac{\partial}{\partial x_a} + \nu\ln(r) + \frac{\lambda^2}{2}\ln(r)^2\right)\psi.$$

Оскільки рівняння є інваріантним відносно групи обертань, його розв'язки досільно шукати у вигляді

$$\Psi = e^{-iEt}R_{lm}(r)Y_{lm}(\varphi, \theta),$$

φ та θ — кути Ейлера, $Y_{lm}(\varphi, \theta)$ — сферичні функції, тобто власні вектори квадрата кутового моменту. В результаті приходимо до наступних радіальних рівнянь:

$$\left(-r\frac{\partial R_{lm}}{\partial r}r\frac{\partial R_{lm}}{\partial r} - r\frac{\partial R_{lm}}{\partial r} + l(l+1) + \nu\ln(r) + \frac{\lambda^2}{2}\ln(r)^2\right)R_{lm} = 2ER_{lm}. \quad (3.17)$$

Табл. 3.4: Рівняння зі змінним параметром маси, що допускають алгебри симетрії розмірності 6 і вище.

No	обернена маса f	потенціал V	симетрії
1	$(r^2 + 1)^2$	$-3r^2$	$M_{41}, M_{42}, M_{43},$ M_{21}, M_{31}, M_{32}
2	$(r^2 - 1)^2$	$-3r^2$	$M_{01}, M_{02}, M_{03},$ M_{21}, M_{31}, M_{32}
3	x_3^2	$\nu \ln(x_3)$	$P_1, P_2, M_{12}, D + \nu t$
4	$\tilde{r}^3$	$\kappa x_3 + \lambda \tilde{r}$	$P_3 + \kappa t, D + i t \partial_t, M_{12}$
5	x_1^3	$\lambda x_1 + \kappa x_3$	$P_3 + \kappa t, P_2, D + i t \partial_t$
6	$x_3^{\sigma+2}$	κx_3^σ	$P_1, P_2, M_{12}, D + i \sigma t \partial_t,$ $\sigma \neq 0, 1, -2$
7	$\tilde{r}^{\sigma+2} e^{\lambda \varphi}$	$\kappa \tilde{r}^\sigma e^{\lambda \varphi}$	$M_{12} + i \lambda t \partial_t, P_3,$ $D + i \sigma t \partial_t, \sigma \neq 0$
8	$\tilde{r}^2$	$\frac{\lambda^2}{2} \varphi^2 + \mu \varphi + \nu \ln(\tilde{r})$	$B_1^1, B_2^1,$ $D + \nu t, P_3$
9	$\tilde{r}^2 e^{\sigma \varphi}$	$\kappa e^{\sigma \varphi} + \frac{\omega^2}{2} e^{-\sigma \varphi}$	$N_1^1, N_2^1, P_3, D, K_3$
10	r^2	$\nu \ln(r) + \frac{\lambda^2}{2} \ln(r)^2$	$B_1^2, B_2^2, L_1, L_2, L_3$
11	$r^{2+\sigma}$	$\kappa r^\sigma + \frac{\omega^2}{2} r^{-\sigma}$	$N_1^2, N_2^2, L_1, L_2, L_3$

Використовуючи нову змінну $y = \sqrt{2} \ln(r)$, рівняння (3.17) можна переписати у наступній формі:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + l(l+1) + \nu y + \frac{\lambda^2}{2} y^2 \right) R_{lm}(y) = \tilde{E} R_{lm}(y), \quad (3.18)$$

де $\tilde{E} = E - \frac{1}{4}$.

Нехай $\lambda \neq 0$, тоді рівняння (3.18) зводиться до 1-вимірного 1D лінійного осцилятора, але включає додатковий член $l(l+1)$. Допустимі власні значення $\tilde{E}$ мають наступний вигляд:

$$\tilde{E} = n + l(l+1),$$

де n — натуральне число. Відповідні власні вектори добре відомі.

У роботі [77] знайдено власні вектори і власні значення усіх гамільтоніанів, у які входять потенціали і маси, наведені у таблиці 3.4. При чому у деяких безпосередньо випадках використано теорію представлень алгебр Лі, утворених операторами симетрії, а в інших — методи суперсиметрії.

4 Сингулярні модулі редукції диференціальних рівнянь

“Некласичний” підхід до знаходження розв’язків диференціальних рівнянь у замкненому вигляді запропоновано Блуманом і Коле (1969) на прикладі $(1+1)$ -вимірного рівняння теплопровідності з метою розширити область застосувань симетрійних методів. Із кінця 1980-х років цей метод використано для дослідження багатьох диференціальних рівнянь, які моделюють реальні явища. Відповідні об’єкти, які подібні до підалгебр алгебр Лі симетрій, у літературі називають по-різному: некласичні, Q -умовні, умовні, часткові симетрії, або — у більш повній формі — інволютивні сім’ї/модулі операторів некласичної/умовної симетрії. Характерною рисою, яку некласичні симетрії успадковують від ліївських, є те, що вони дозволяють будувати анзаци для невідомої функції, які редукують відповідне диференціальне рівняння до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Ця риса пов’язує некласичні симетрії з прямим методом Кларксона–Крускала і загальним методом анзаців. Однак насправді властивості некласичних симетрій більш тісно пов’язані з теоріями диференціальних зв’язків і формальної сумісності систем диференціальних рівнянь. Саме тому надалі використовуємо термін “модулі редукції” (векторних полів) замість “інволютивні сім’ї операторів умовної симетрії” і кажемо, що інволютивний модуль векторних полів редукує диференціальне рівняння, якщо це рівняння можна редукувати за допомогою відповідного анзаца.

Включення умови інваріантної поверхні, асоційованої з модулем, у критерій умовної інваріантності призводить до кількох суттєвих ускладнень знаходження умовних симетрій порівняно з ліївськими. Для заданого диференціального рівняння $\mathcal{L}$ елементи його різних модулів редукції не утворюють об’єктів з гарною алгебраїчною або диференціальною структурою. Тому окремі оператори редукції не можна компонувати в

модулі редукції по аналогії з максимальною алгеброю ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}$ та її підалгебрами, які утворено векторними полями, асоційованими з однопараметричними псевдогрупами точкових симетрій Лі рівняння $\mathcal{L}$. У той час як системи визначальних рівнянь для ліївських симетрій завжди лінійні, аналогічні системи для модулів редукції нелінійні, причому — у випадку модулів розмірності більше одиниці — ці системи додатково потрібно доповнити умовою інволютивності, тобто вимагати замкненість модулів відносно операції комутування векторних полів. Більш того, навіть для заданого диференціального рівняння і фіксованої розмірності його модулів редукції єдиної системи визначальних рівнянь для таких модулів немає. Замість цього множина таких модулів розпадається на підмножини, асоційовані з суттєво різними системами визначальних рівнянь. Розв’язання деяких з цих систем може бути еквівалентно розв’язанню вихідного рівняння, що призводить до так званих “no-go” випадків при вивченні модулів редукції. Подібні “no-go” випадки відомі для окремих $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь, включаючи лінійне рівняння теплопровідності, рівняння Бюргерса та лінійні еволюційні рівняння другого порядку, а також для всього класу $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь, багатовимірних еволюційних рівнянь і навіть систем таких рівнянь. Зауважимо, що при дослідженні ліївських симетрій аналогічна “no-go” ситуація виникає для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Фактично, всі вказані вище “no-go” випадки операторів редукції є проявами певного “no-go” випадку, спільного для всіх еволюційних рівнянь, і ще одного випадку, специфічного для лінійних еволюційних рівнянь другого порядку. Причини, що породжують розбиття модулів редукції і “no-go” випадки для некласичних симетрій, до останнього часу не досліджували. Також було незрозуміло, як результати щодо “no-go” випадків для еволюційних рівнянь можна поширити на модулі редукції для інших — нееволюційних — рівнянь.

У роботі Кунзінгера і Поповича (2010) розбиття множини модулів

редукції диференціального рівняння пов'язано з пониженням порядку цього рівняння на многовидах, визначених умовами інваріантної поверхні для цих модулів у відповідному просторі струменів. У результаті, дослідження сингулярних модулів векторних полів, що понижують порядок рівняння, включено як початковий крок до процедури знаходження неklasичних симетрій. У цій статті розглянуто лише випадок окремого диференціального рівняння з частинними похідними від двох незалежних і однієї залежної змінних і одного оператора редукції. Також введено поняття сингулярних операторів редукції та показано, що копорядок слабкої сингулярності оператора редукції Q дорівнює суттєвому порядку відповідного редукованого рівняння і кількості суттєвих параметрів у сім'ї Q -інваріантних розв'язків. Там само отримано “no-go” твердження про сингулярні оператори редукції $(1+1)$ -вимірних еволюційних і хвильових рівнянь і доведено їх узагальнення для параметризованих сімей векторних полів, які редукують диференціальне рівняння з частинними похідними від двох незалежних змінних до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

У цьому розділі попередні результати розширено на випадок більшої кількості незалежних змінних. Після аналізу та переосмислення в § 4.1 основних понять і тверджень теорії неklasичних симетрій у § 4.2 запропоновано поняття сингулярних і метасингулярних модулів векторних полів для диференціальних функцій. Доведено, що на відміну від двовимірних метасингулярних модулів будь-який метасингулярний модуль розмірності вище 2 обов'язково є інволютивним. Основним результатом цього параграфу є теорема 4.2, яка з точністю до точкових перетворень описує диференціальні функції, що допускають метасингулярні модулі. Аналогічні поняття сильно і слабо сингулярних і метасингулярних модулів диференціальних рівнянь введено у § 4.4. Із теореми 4.3, яка характеризує диференціальні рівняння, що допускають слабо метасингулярні модулі, випливає, що замість таких модулів достатньо досліджувати

метасингулярні модулі відповідних диференціальних функцій. Зв'язок між копорядком слабкої сингулярності модулів редукції, суттєвим порядком відповідних редукованих рівнянь і — у випадку редукції до звичайних диференціальних рівнянь — кількістю параметрів у відповідних сім'ях інваріантних розв'язків вивчено в § 4.5. Показано, що зв'язок між редукцією диференціального рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою інволютивного модуля Q і формальною сумісністю об'єднаної системи, яку утворюють рівняння $\mathcal{L}$ і характеристична система, асоційована з модулем Q , суттєво залучає копорядок слабкої сингулярності модуля Q для диференціального рівняння $\mathcal{L}$. Переглядаючи результати Грюндланда та Тафеля (1995) з використанням поняття сингулярних модулів редукції, у § 4.6 вивчено особливий випадок модулів редукції розмірності, що співпадає з кількістю незалежних змінних; такі модулі призводять до редукції до алгебраїчних рівнянь. У § 4.7 “по-go” результати роботи Поповича (1998) переформульовано й розширено на модулі, що редукують багатовимірні еволюційні рівняння до звичайних диференціальних рівнянь з часом як єдиною незалежною змінною. Цим обґрунтовано розгляд модулів редукції з копорядком сингулярності 1 у § 4.8. За припущення, що диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ допускає n -вимірний метасингулярний модуль M з копорядком сингулярності 1, де n — кількість незалежних змінних у рівнянні $\mathcal{L}$, доведено “по-go” твердження, що встановлюють зв'язок між $(n-1)$ -вимірними модулями редукції рівняння $\mathcal{L}$, які містять модуль M , і розв'язками рівняння $\mathcal{L}$. Зокрема показано, що визначальні рівняння для таких модулів можна звести до початкового рівняння за допомогою композиції диференціальної підстановки та перетворення годографа. Заключний § 4.9 присвячено сингулярним модулям для квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, причому розмірність модулів вважаємо меншою за кількість незалежних змінних. Показано, що такі еліптичні рівняння не допускають сингулярних модулів. Будь-яке еволюційне рівняння другого порядку з невідродженою

матрицею коефіцієнтів при других похідних допускає лише сингулярні модулі, розглянуті в § 4.7 для загальних еволюційних рівнянь. Узагальнені хвильові рівняння є більш складними з цієї точки зору. Зокрема, вони можуть допускати сім'ї сингулярних модулів, які не мають інтерпретації в термінах метасингулярних модулів, що показує необхідність подальшого розвитку теорії сингулярних модулів.

Результати цього розділу опубліковано у роботах [1, 2].

4.1 Модулі редукції диференціальних рівнянь

У цьому параграфі коротко наведемо й уточнимо необхідні поняття і результати щодо некласичних (умовних) симетрій диференціальних рівнянь.

Нехай задано розшарований простір n незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$ і однієї залежної змінної u . Розглянемо скінченновимірний інволютивний модуль Q векторних полів, визначений у деякій області цього простору, і припустимо, що розмірність p модуля Q (над кільцем гладких функцій змінних (x, u)) не перевищує n , $0 < p \leq n$. Додатково вважаємо, що модуль Q задовольняє умову на ранг, тобто для кожного фіксованого значення (x, u) проекція на простір змінних x є p -вимірною. Атрибут “інволютивний” означає, що дужка Лі (комутатор) будь-яких двох векторних полів модуля Q належить Q . Очевидно, що будь-який одновимірний модуль є інволютивним. Тому у випадку $p = 1$ опускати-мемо атрибут “інволютивний” і говоритимемо лише про модулі.

Надалі вважаємо, що індекси i та j змінюються від 1 до n , індекс s змінюється від 1 до p , індекс σ змінюється від 1 до $n - p$, і за індексами, що повторюються, розумітимемо підсумовування. Дужки $\langle \dots \rangle$ використовуватимемо для позначення лінійної оболонки над кільцем гладких функцій змінних (x, u) . Нижні індекси функцій позначають диференціювання за відповідними змінними, $\partial_i = \partial/\partial x_i$ й $\partial_u = \partial/\partial u$. Будь-яка функція розглядається як її похідна нульового порядку. Весь розгляд

проведено в рамках локального підходу. Поняття функціональної незалежності розумітимемо в сенсі повної функціональної незалежності, тобто функціонально незалежні функції є функціонально незалежними на будь-якій підмножині їх спільної області визначення.

Нехай векторні поля

$$Q_s = \xi^{si}(x, u)\partial_i + \eta^s(x, u)\partial_u$$

утворюють базис модуля Q , тобто $Q = \langle Q_1, \dots, Q_p \rangle$. Тоді умова на ранг еквівалентна рівності $\text{rank}(\xi^{si}) = p$. Умова, що комутатор будь-якої пари базисних елементів належав модулю Q , $[Q_s, Q_{s'}] \in Q$, достатня для того, щоб модуль Q був інволютивним. Якщо векторні поля $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_p$ утворюють інший базис модуля Q , то існує невироджена $p \times p$ матрична функція $(\lambda^{ss'}(x, u))$ така, що $\tilde{Q}_s = \lambda^{ss'} Q_{s'}$.

Диференціальну функцію першого порядку

$$Q_s[u] := \eta^s(x, u) - \xi^{si}(x, u)u_i$$

називають *характеристикою* векторного поля Q_s . Внаслідок теореми Фробеніуса, інволютивність модуля Q еквівалентна тому, що характеристична система $\mathcal{Q}$: $Q[u] = 0$ диференціальних рівнянь з частинними похідними $Q_s[u] = 0$ (її також називають *умовою інваріантної поверхні*) має $n + 1 - p$ функціонально незалежних інтегралів $\omega^0(x, u), \dots, \omega^{n-p}(x, u)$. Тому загальний розв'язок цієї системи можна неявно представити у вигляді $F(\omega^0, \dots, \omega^{n-p}) = 0$, де F — довільна гладка функція своїх аргументів.

Диференціальною функцією $G = G[v]$ залежних змінних $v = (v^1, \dots, v^m)$, які у свою чергу є функціями незалежних змінних $y = (y_1, \dots, y_n)$, називають гладку функцію, що залежить від y і похідних функції v за змінними y . Більш формально, диференціальну функцію визначають як гладку функцію на області простору струменів $J^r = J^r(y|v)$ деякого порядку r з незалежними змінними y і залежними змінними v . Порядок $r = \text{ord } G$ диференціальної функції G дорівнює максимальному порядку

похідних (відповідно струменевих змінних), від яких функція G залежить суттєво. Зокрема, $\text{ord } G = -\infty$, якщо G залежить лише від y . Будь-яка множина диференціальних функцій фіксованого додатного порядку, як і множина диференціальних функцій недодатного порядку, інваріантна відносно точкових перетворень змінних (y, v) .

Використання іншого базису модуля Q призводить лише до іншого представлення характеристичної системи $\mathcal{Q}$ з тією самою множиною розв'язків. Тому характеристична система $\mathcal{Q}$ асоційована скоріше з модулем Q , ніж з фіксованим базисом модуля Q . І навпаки, будь-яка сім'я $n + 1 - p$ функціонально незалежних функцій змінних x та u є повною системою інтегралів характеристичної системи деякого p -вимірного інволютивного модуля. Отже, існує взаємно однозначна відповідність між множиною p -вимірних інволютивних модулів і множиною сімей $n + 1 - p$ функціонально незалежних функцій змінних x та u , які факторизовано щодо відповідної еквівалентності. (Дві сім'ї однакової кількості функціонально незалежних функцій тих самих аргументів вважаємо еквівалентними, якщо будь-яка функція однієї з сімей є функціонально залежною від функцій іншої сім'ї.)

Функцію $u = f(x)$ називають *інваріантом інволютивного модуля Q* (скорочено *Q -інваріантом*), якщо вона є розв'язком характеристичної системи $\mathcal{Q}$. Введення цього поняття обґрунтовано наступним. Внаслідок умови на ранг, можна вибрати базис модуля Q , породжений (над полем, що розглядається) p -вимірною (абелевою) алгеброю Лі $\mathfrak{g}$ векторних полів у просторі змінних (x, u) ¹. Графік кожного розв'язку характеристичної системи $\mathcal{Q}$ очевидно є інваріантним відносно p -параметричної групи локальних перетворень, породженої алгеброю $\mathfrak{g}$.

¹Щоб побудувати такий базис, вибираємо довільний базис модуля Q , утворений векторними полями $Q_s = \xi^{si}(x, u)\partial_i + \eta^s(x, u)\partial_u$. З точністю до заміни незалежних змінних і базисних елементів модуля Q , внаслідок умови на ранг можна вважати, що $\text{rank}(\xi^{ss'}) = p$, і звести базис до вигляду $(\hat{Q}_s = \partial_s + \hat{\xi}^{s\iota}\partial_\iota + \hat{\eta}^s\partial_u)$, де індекс ι змінюється від $p + 1$ до n та матриці $(\hat{\xi}^{s\iota})$ і $(\hat{\eta}^s)$ є добутками матриці $(\xi^{ss'})^{-1}$ і матриць $(\xi^{s\iota})$ і (η^s) відповідно. Оскільки модуль Q інволютивний, то векторні поля $\hat{Q}_1, \dots, \hat{Q}_p$ комутують.

Виберемо базис модуля Q з комутуючих векторних полів $Q_1, \dots, Q_p$ і для кожного фіксованого s розглянемо розв'язок системи $Q_{s'} J^s = \delta_{ss'}$, де $\delta_{ss'}$ — символ Кронекера. Оскільки функції $I^0, \dots, I^{n-p}, J^1, \dots, J^p$ змінних (x, u) функціонально незалежні, то можна зробити заміну змінних

$$\varphi = I^0(x, u), \quad \omega_\sigma = I^\sigma(x, u), \quad \omega'_s = J^s(x, u),$$

де $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-p})$ та $\omega' = (\omega'_1, \dots, \omega'_p)$ — нові незалежні змінні, а φ — нова залежна змінна. Змінні ω та φ називатимемо Q -інваріантними, а змінні ω' — параметричними для модуля Q . У нових змінних базисні елементи Q_s набувають вигляду $Q_s = \partial_{\omega'_s}$.

Розглянемо диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ порядку r вигляду $L(x, u_{(r)}) = 0$ для невідомої функції u незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тут через $u_{(r)}$ позначено набір усіх похідних функції u за змінними x порядку не вище r , включаючи u як похідну нульового порядку. Порядок r рівняння $\mathcal{L}$ вважаємо суттєвим, тобто мінімальним серед порядків рівнянь, еквівалентних рівнянню $\mathcal{L}$ з точністю до ненульових множників, які є диференціальними функціями від u . У рамках локального підходу рівняння $\mathcal{L}$ вважаємо алгебраїчним рівнянням у просторі струменів $J^r = J^r(x|u)$ порядку r і отождествлюємо його з многовидом $\{(x, u_{(r)}) \in J^r \mid L(x, u_{(r)}) = 0\}$ його розв'язків у J^r . Використовуємо символ $\mathcal{L}$ також для позначення цього многовиду, а $\mathcal{Q}_{(r)}$ — як для позначення многовиду, визначеного всіма диференціальними наслідками характеристичної системи $\mathcal{Q}$ до порядку r включно, так і для позначення многовиду, визначеного системою $\mathcal{Q}_{(r)}$ в J^r , тобто

$$\mathcal{Q}_{(r)} = \{(x, u_{(r)}) \in J^r \mid D^\alpha Q_s[u] = 0, |\alpha| < r\}.$$

Тут і надалі $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \partial_{x_i} + u_{\alpha+\delta_i} \partial_{u_\alpha}$ — оператор повної похідної за змінною x_i , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — довільний мультиіндекс, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, δ_i — мультиіндекс, i -та компонента якого дорівнює 1, а всі інші компоненти нульові. Змінна u_α простору струменів J^r відповідає похідній $\partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, а $u_i \equiv u_{\delta_i}$, $u_{ij} \equiv u_{\delta_i+\delta_j}$ і т. ін.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $F_{I^0} \neq 0$ у представленні $F(I^0, \dots, I^{n-p}) = 0$ загального розв'язку характеристичної системи $\mathcal{Q}$, і розв'язуємо рівняння $F(I^0, \dots, I^{n-p}) = 0$ відносно I^0 : $I^0 = \varphi(I^1, \dots, I^{n-p})$. Внаслідок умови на ранг отримаємо представлення (у загальному випадку неявне)

$$\mathcal{A}: \quad I^0(x, u) = \varphi(\omega), \quad \omega_\sigma = I^\sigma(x, u) \quad (4.1)$$

для розв'язків характеристичної системи $\mathcal{Q}$, де $\varphi = \varphi(\omega)$ — довільна гладка функція своїх аргументів, яке називають *анзацом* для функції u , що відповідає модулю Q .

Зафіксувавши анзац $\mathcal{A}$ для u , всі похідні від u можна виразити у термінах ω , ω' та похідних від φ і підставити всі співвідношення в $L[u]$, а решту змінних x замінити їх виразами у нових змінних. Або можна спочатку замінити змінні через $(\omega, \omega', \varphi)$ і далі врахувати співвідношення $\varphi_{\omega'_s} = 0$. Функцію, отриману внаслідок такої процедури, позначимо через $L|_{\mathcal{A}}$. Вона залежить щонайбільше від ω , ω' і $\varphi_{(r)}$, де $\varphi_{(r)}$ позначає набір похідних від φ за змінними ω до порядку r включно.

Означення 4.1. Анзац $\mathcal{A}$, побудований за модулем Q , *редукує* рівняння $\mathcal{L}$, якщо існують гладкі функції $\check{\lambda} = \check{\lambda}(\omega, \omega', \varphi_{(r)})$ та $\check{L} = \check{L}(\omega, \varphi_{(r)})$ такі, що функція $\check{\lambda}$ є ненульовою та

$$L|_{\mathcal{A}} = \check{\lambda}(\omega, \omega', \varphi_{(r)}) \check{L}(\omega, \varphi_{(r)}).$$

Тоді модуль Q називають *модулем редукції* рівняння $\mathcal{L}$, а рівняння

$$\check{L}(\omega, \varphi_{(r)}) = 0$$

— *редукованим рівнянням*, пов'язаним з анзацом $\mathcal{A}$.

Процедуру редукції потрібно додатково уточнити у випадку редукції до алгебраїчних рівнянь при $p < n$; див. доведення теореми 4.4.

Множину p -вимірних модулів редукції рівняння $\mathcal{L}$ будемо позначати як $\mathcal{R}^p(\mathcal{L})$.

Розглянемо умови на диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ (r -го порядку) та інволютивний модуль Q , що задовольняє умову на ранг:

(C1) Q є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$;

(C2) $V_{(r)}L[u] \in \langle L[u], D^\alpha Q_s[u], |\alpha| < r \rangle$ для всіх $V \in Q$;

(C3) $V_{(r)}L[u]|_{\mathcal{L} \cap \mathcal{Q}_{(r)}} = 0$ для всіх $V \in Q$.

Тут через $V_{(r)}$ позначено стандартне r -е продовження векторного поля $V = \xi^i(x, u)\partial_i + \eta(x, u)\partial_u$:

$$V_{(r)} = V + \sum_{0 < |\alpha| \leq r} \eta^\alpha \partial_{u_\alpha},$$

де $\eta^\alpha = D^\alpha V[u] + \xi^i u_{\alpha+\delta_i}$ і $V[u] = \eta - \xi^i u_i$. В умовах (C2) та (C3) достатньо вимагати, щоб векторне поле V пробігало базис $(Q_1, \dots, Q_p)$ модуля Q . Вибір базису для представлення характеристичної системи $\mathcal{Q}$ і перевірки умов (C2) та (C3) не є суттєвим.

Усі ці умови зберігаються при точкових перетвореннях змінних (x, u) .

Теорема 4.1. *Умови (C1) та (C2) є еквівалентними й із них випливає умова (C3). Якщо набір диференціальних функцій $(L[u], D^\alpha Q_s[u], |\alpha| < r)$ має максимальний ранг на $\mathcal{L} \cap \mathcal{Q}_{(r)}$, то з умови (C3) випливає умова (C2) (а отже, і умова (C1)).*

Окрім випадку максимальності рангу є інші, більш специфічні, випадки, коли умови (C1), (C2), (C3) задовольняються одночасно, наприклад, якщо $\mathcal{L} \cap \mathcal{Q}_{(r)} = \mathcal{Q}_{(r)}$.

Доведення теореми 4.1 спирається на таке твердження.

Лема 4.1. *Нехай гладкі функції $f, \Lambda^1, \dots, \Lambda^p$ і інволютивний модуль $Q = \langle Q_1, \dots, Q_p \rangle$ векторних полів, визначених в околі O_{z^0} деякої точки $z^0 \in \mathbb{R}^l$ для деякого $l \in \mathbb{N}$, задовольняють умови $Q_s f(z) = \Lambda^s(z) f(z)$ для всіх $z \in O_{z^0}$, $s = 1, \dots, p$, а $\dim Q|_{z^0} = p$. Тоді існує окіл $\check{O}_{z^0} \subset O_{z^0}$ точки z^0 і гладкі функції $\check{f}$ і λ , визначені в $\check{O}_{z^0}$, такі, що $\lambda(z) \neq 0$, $Q^s \check{f}(z) = 0$ і $f(z) = \lambda(z) \check{f}(z)$ для всіх $z \in \check{O}_{z^0}$.*

У попередніх роботах щодо модулів редукції використано досить різноманітну термінологію. Зазвичай умову (С3) розглядали як основну та називали *критерієм умовної інваріантності*, а диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ — *умовно інваріантним* відносно інволютивного модуля Q . При цьому модуль Q називали *інволютивним модулем операторів умовної симетрії* (або Q -умовною симетрією, або неklasичною симетрією тощо) для рівняння $\mathcal{L}$. Версію умови (С2) у випадку систем диференціальних рівнянь для декількох невідомих функцій вперше запропоновано у роботі Грюндланда та Тафеля (1995). На відміну від випадку одного диференціального рівняння з однією невідомою функцією, версія умови (С2) є достатньою, але не є необхідною для того, щоб анзац, побудований за допомогою модуля Q , редукував вихідну систему. Альтернативний підхід до умовної інваріантності вимагає, щоб об'єднана система $\mathcal{L}$ і $Q_{(r)}$ була формально сумісною у сенсі відсутності нетривіальних диференціальних наслідків. Але питання, яке саме представлення об'єднаної системи потрібно вибирати для дослідження формальної сумісності, є делікатним, див. § 4.5 нижче. Якщо критерій умовної інваріантності не виконується, але, незважаючи на це, рівняння $\mathcal{L}$ має Q -інваріантні розв'язки, то говорять про слабку інваріантність рівняння $\mathcal{L}$ відносно модуля.

Існують модулі редукції, що відповідають класичним ліївським симетріям. Нехай $\mathfrak{g}$ — p -вимірний алгебра ліївської інваріантності рівняння $\mathcal{L}$, базисні векторні поля якої $Q_1, \dots, Q_p$ задовольняють умову

$$\text{rank}(\xi^{si}) = \text{rank}(\xi^{si}, \eta^s) \quad (= p' \leq p).$$

Оболонка цих векторних полів над кільцем гладких функцій змінних (x, u) є p' -вимірним інволютивним модулем, який належить до $\mathcal{R}^{p'}(\mathcal{L})$. Модулі такого типу називатимемо *ліївськими модулями редукції*. Інші модулі редукції називатимемо *неліївськими*. Наступне твердження щодо модулів редукції є важливим для подальшого розгляду.

Лема 4.2. *Нехай задано диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ r -го порядку: $L[u] = 0$, p -вимірний ($0 < p \leq n$) інволютивний модуль Q , що задовольняє*

умову на ранг, і диференціальні функції $\tilde{L}[u]$ й $\lambda[u] \neq 0$ порядку не вище r такі, що $(L - \lambda\tilde{L})|_{Q_{(r)}} = 0$. Модуль Q є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли він є модулем редукції рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$: $\tilde{L}[u] = 0$. Анзац, побудований за модулем Q , редукує рівняння $\mathcal{L}$ і $\tilde{\mathcal{L}}$ до рівнянь, що відрізняються щонайбільше на ненульовий множник.

Класифікацію модулів редукції можна суттєво удосконалити й спростити шляхом використання лівських симетрій і перетворень еквівалентності (класів) диференціальних рівнянь.

Позначимо через $\mathfrak{M}^p$ множину p -вимірних модулів векторних полів у просторі змінних (x, u) . Будь-яке точкове перетворення змінних (x, u) індукує взаємно однозначне відображення $\mathfrak{M}^p$ у себе. А саме, перетворення

$$g: \quad \tilde{x}_i = X^i(x, u), \quad \tilde{u} = U(x, u)$$

генерує відображення $g_*: \mathfrak{M}^p \rightarrow \mathfrak{M}^p$ таке, що для будь-яких $Q \in \mathfrak{M}^p$ й $V \in Q$ векторне поле $V = \xi^i(x, u)\partial_i + \eta(x, u)\partial_u$ відображається у векторне поле $g_*V = \tilde{\xi}^i\partial_{\tilde{x}_i} + \tilde{\eta}\partial_{\tilde{u}}$, де $\tilde{\xi}^i(\tilde{x}, \tilde{u}) = VX^i(x, u)$, $\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{u}) = VU(x, u)$.

Нехай задано групу G точкових перетворень у просторі змінних (x, u) . Модулі Q та $\tilde{Q}$ (одної розмірності) називають *еквівалентними* відносно групи G , якщо існує таке перетворення $g \in G$, що $\tilde{Q} = g_*Q$.

Лема 4.3. *Нехай $Q \in \mathcal{R}^p(\mathcal{L})$, а точкове перетворення g відображає рівняння $\mathcal{L}$ у рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$ і образ g_*Q задовольняє умову на ранг. Тоді $g_*Q \in \mathcal{R}^p(\tilde{\mathcal{L}})$.*

Наслідок 4.1. *Нехай G — група точкових симетрій рівняння $\mathcal{L}$. Тоді еквівалентність p -вимірних модулів векторних полів відносно групи G породжує відношення еквівалентності в $\mathcal{R}^p(\mathcal{L})$.*

Розглянемо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ диференціальних рівнянь $\mathcal{L}_\theta: L(x, u_{(r)}, \theta_{(q)}) = 0$. Тут L — фіксована функція, що залежить від x , $u_{(r)}$ і $\theta_{(q)}$, де θ — набір довільних (параметричних) диференціальних функцій, який пробігає

множину $\mathcal{S}$ розв'язків допоміжної системи, а $\theta_{(q)}$ — набір усіх похідних функцій θ за змінними x і $u_{(r)}$ порядку не вище q . Допоміжна система містить диференціальні рівняння $S(x, u_{(r)}, \theta_{(q)}(x, u_{(r)})) = 0$ і диференціальні нерівності $\Sigma(x, u_{(r)}, \theta_{(q)}(x, u_{(r)})) \neq 0$ (> 0 , < 0 , $\dots$) на θ , де x та $u_{(r)}$ відіграють роль незалежних змінних. Надалі функції θ називатимемо довільними елементами. Позначення $G^\sim$ і $\mathcal{G}^\sim$ використовуємо відповідно для групи еквівалентності та групоїда еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Грубо кажучи, групу $G^\sim$ складають точкові перетворення у просторі $(x, u_{(r)}, \theta)$, що зберігають вигляд рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Групоїд $\mathcal{G}^\sim$ — це множина

$$\{(\theta, \tilde{\theta}, g) \mid \theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{S}, g \in T(\theta, \tilde{\theta})\},$$

на якій природно введено структуру групоїда за допомогою композиції перетворень. Тут $T(\theta, \tilde{\theta})$ — множина точкових перетворень змінних (x, u) , що відображають рівняння $\mathcal{L}_\theta$ у рівняння $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$.

Позначимо через P набір усіх пар вигляду $(\mathcal{L}_\theta, Q)$, де $\mathcal{L}_\theta$ — рівняння з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, а Q — модуль з $\mathcal{R}^p(\mathcal{L}_\theta)$. Із леми 4.3 випливає, що дія перетворень з групи еквівалентності $G^\sim$ або з групоїда еквівалентності $\mathcal{G}^\sim$ на $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і $\{\mathcal{R}^p(\mathcal{L}_\theta) \mid \theta \in \mathcal{S}\}$ індукує відношення еквівалентності на P .

Означення 4.2. Нехай $\theta, \theta' \in \mathcal{S}$, $Q \in \mathcal{R}^p(\mathcal{L}_\theta)$, $Q' \in \mathcal{R}^p(\mathcal{L}_{\theta'})$. Пари $(\mathcal{L}_\theta, Q)$, $(\mathcal{L}_{\theta'}, Q')$ назвемо $G^\sim$ -еквівалентними, якщо $Q' = (\mathcal{T}^\theta)_* Q$ для деякого перетворення $\mathcal{T} \in G^\sim$, що відображає рівняння $\mathcal{L}_\theta$ у рівняння $\mathcal{L}_{\theta'}$. Пари $(\mathcal{L}_\theta, Q)$, $(\mathcal{L}_{\theta'}, Q')$ назвемо $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентними (або *точково еквівалентними*), якщо $Q' = g_* Q$ для деякого перетворення $g \in T(\theta, \tilde{\theta})$.

Класифікацію операторів редукції відносно $G^\sim$ (або $\mathcal{G}^\sim$) інтерпретуємо як класифікацію в P відносно відповідного відношення еквівалентності, яку можна провести аналогічно до звичайної групової класифікації в класах диференціальних рівнянь. А саме, спочатку будуємо модулі редукції, що визначені для всіх значень довільних елементів θ , а потім класифікуємо відносно $G^\sim$ (або $\mathcal{G}^\sim$) значення θ , для яких рівняння $\mathcal{L}_\theta$ допускає додаткові модулі редукції.

4.2 Сингулярні модулі векторних полів для диференціальних функцій

Нехай $L = L[u]$ — диференціальна функція порядку $\text{ord } L = r > 0$ (тобто гладка функція незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$ і похідних від u за змінними x порядку не вище r), а Q — p -вимірний ($0 < p < n$) інволютивний модуль, породжений векторними полями $Q_s = \xi^{si}(x, u)\partial_i + \eta^s(x, u)\partial_u$, що визначені в просторі змінних (x, u) і задовольняють умову на ранг $\text{rank}(\xi^{si}) = p$.

Означення 4.3. Модуль Q назвемо *сингулярним* для диференціальної функції L , якщо існує диференціальна функція $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$ порядку, меншого за r , така, що $L|_{Q_{(r)}} = \tilde{L}|_{Q_{(r)}}$. В іншому випадку Q назвемо *регулярним* модулем для диференціальної функції L . Якщо мінімальний порядок диференціальних функцій, обмеження яких на $Q_{(r)}$ співпадає з $L|_{Q_{(r)}}$, дорівнює $k \in \{-\infty, 0, 1, \dots, r\}$, то модуль Q назвемо *сингулярним копорядку k* для диференціальної функції L . Модуль Q назвемо *ультрасингулярним* для диференціальної функції L , якщо $L|_{Q_{(r)}} \equiv 0$.

Зокрема, якщо модуль є регулярним для диференціальної функції L , то його копорядок сингулярності дорівнює $r = \text{ord } L$. Копорядок сингулярності модуля Q для диференціальної функції L позначатимемо через $\text{sc}_L Q$. Очевидно, що будь-яка диференціальна функція недодатного порядку не допускає сингулярних інволютивних модулів; це пояснює умову $\text{ord } L = r > 0$ в означенні 4.3.

Випадок $p = n$ є особливим. Розглянемо n -вимірний інволютивний модуль Q , породжений векторними полями, що задовольняють умову на ранг. Для будь-якої диференціальної функції $L = L[u]$ порядку r існує диференціальна функція $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$ недодатного порядку така, що $L|_{Q_{(r)}} = \tilde{L}|_{Q_{(r)}}$. Тому в цьому випадку природно вважати, що модуль Q є сингулярним для L тоді й лише тоді, коли $\text{sc}_L Q = -\infty$.

Покажемо, як алгоритмічно побудувати функцію $\tilde{L}$, що задовольняє

умови означення 4.3. Спершу зауважимо, що без обмеження загальності можна розглядати базис ($\hat{Q}_s = \partial_s + \hat{\xi}^{s\iota}\partial_\iota + \hat{\eta}^s\partial_u$), де індекс ι змінюється від $p+1$ до n (див. зноску 1). У рамках теорії сумісності Рік'є, розгляд такого базису можна інтерпретувати як виокремлення похідних від u , що містять диференціювання за змінними x_s (*головні похідні* для характеристичної системи $\mathcal{Q}$). Тоді на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ будь-яку $\mathcal{Q}$ -головну похідну порядку не вище r можна виразити лише через похідні функції u за змінними $x_{p+1}, \dots, x_n$ і коефіцієнти $\hat{\xi}^{s\iota}$ й $\hat{\eta}^s$. Наприклад, для похідних першого і другого порядку матимемо

$$\begin{aligned} u_s &= \hat{\eta}^s - \hat{\xi}^{s\iota}u_\iota, \\ u_{s\iota} &= \hat{\eta}_\iota^s - \hat{\xi}_\iota^{s\iota'}u_{\iota'} + \hat{\eta}_u^s u_\iota - \hat{\xi}_u^{s\iota'}u_{\iota'}u_\iota - \hat{\xi}^{s\iota'}u_{\iota\iota'}, \\ u_{ss'} &= \hat{\eta}_{s'}^s - \hat{\xi}_{s'}^{s\iota}u_\iota + (\hat{\eta}_u^s - \hat{\xi}_u^{s\iota}u_\iota)(\hat{\eta}^{s'} - \hat{\xi}^{s'\iota'}u_{\iota'}) \\ &\quad - \hat{\xi}^{s\iota}(\hat{\eta}_\iota^{s'} - \hat{\xi}_\iota^{s'\iota'}u_{\iota'} + \hat{\eta}_u^{s'}u_\iota - \hat{\xi}_u^{s'\iota'}u_{\iota'}u_\iota - \hat{\xi}^{s'\iota'}u_{\iota\iota'}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Підставляючи в L вирази для $\mathcal{Q}$ -головних похідних до порядку r включно, отримаємо диференціальну функцію $\hat{L}$, яка залежить лише від x , u і похідних від u за змінними $x_{p+1}, \dots, x_n$. Функцію $\hat{L}$ називаємо *диференціальною функцією, асоційованою з L на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$* . Модуль Q є сингулярним для диференціальної функції L тоді й лише тоді, коли порядок функції $\hat{L}$ менший за r . Копорядок сингулярності модуля Q дорівнює порядку функції $\hat{L}$. Модуль Q є ультрасингулярним тоді й лише тоді, коли $\hat{L} \equiv 0$. Отже, можна вибрати $\hat{L}$ як $\tilde{L}$. Це показує, що перевірка, чи є інволютивний модуль з умовою на ранг сингулярним для диференціальної функції, насправді виконується цілком алгоритмічно, а отже її можна легко реалізувати в рамках існуючих програм символьних обчислень симетрій.

Приклад 4.1. Нижче наведено приклади сингулярних модулів Q для диференціальних функцій (L), пов'язаних з фізично релевантними диференціальними рівняннями з частинними похідними ($L = 0$).

1. $n = 3, r = 2, L = u_1 - (f(u)u_2)_2 - (f(u)u_3)_3$ з $f \neq 0$, $(1+2)$ -вимірне

нелінійне ізотропне рівняння дифузії, $p = 2$, $Q = \langle \partial_2, \partial_3 \rangle$, $\hat{L} = u_1$, $\text{sc}_L Q = 1$.

2. $n = 2$, $r = 4$, $L = g(x_2)u_{11} - (f(x_2)u_{22})_{22}$ з $fg \neq 0$, рівняння Ейлера–Бернуллі для стрижня, $p = 1$, $Q = \langle \partial_2 \rangle$, $\hat{L} = g(x_2)u_{11}$, $\text{sc}_L Q = 2$.
3. $n = 4$, $r = 2$, $L = u_{11} - u_{22} - u_{33} - u_{44}$, $(1+3)$ -вимірне однорідне лінійне хвильове рівняння $p = 3$, $Q = \langle \partial_1 + \partial_4, \partial_2, \partial_3 \rangle$, $\hat{L} = 0$, $\text{sc}_L Q = -\infty$, і, більш того, Q є ультрасингулярним для L .
4. $n = 4$, $r = 2$, $L = u_{11} - u_{22} - u_{33} - u_{44} - u$, $(1+3)$ -вимірне рівняння Клейна–Гордона, $p = 3$, $Q = \langle \partial_1 + \partial_4, \partial_2, \partial_3 \rangle$, $\hat{L} = u$, $\text{sc}_L Q = 0$.
5. $n = 3$, $r = 2$, $L = u_1 - (f(u)u_2)_2 - g(u)u_3$ з $f \neq 0$, $(1+2)$ -вимірне вироджене нелінійне рівняння дифузії–конвекції,
 - а) $p = 1$, $Q = \langle \partial_2 \rangle$, $\hat{L} = u_1 - g(u)u_3$, $\text{sc}_L Q = 1$;
 - б) для $Q = \langle \partial_2, \partial_3 \rangle$ з $p = 2$, $\hat{L} = u_1$, а тому знову $\text{sc}_L Q = 1$;
 - с) $p = 2$, $Q = \langle \partial_2, \partial_1 - g(u)\partial_3 \rangle$, $\hat{L} = 0$, $\text{sc}_L Q = -\infty$, і, більш того, Q є ультрасингулярним для L .

Твердження 4.1. Нехай $L = L[u]$ — диференціальна функція змінних $u = u(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, а Q — інволютивний модуль векторних полів у просторі (x, u) , розмірність якого менша за n і який задовольняє умову на ранг. Тоді $\text{sc}_L Q \leq \text{sc}_L \check{Q}$ для будь-якого інволютивного підмодуля $\check{Q}$ модуля Q . Зокрема, модуль Q сингулярний для L , якщо він містить підмодуль, сингулярний для L .

Доведення. Якщо $\check{Q}$ є інволютивним підмодулем модуля Q , то для нього виконується умова на ранг і $\mathcal{Q}_{(r)} \subseteq \check{\mathcal{Q}}_{(r)}$, де $r = \text{ord } L$. Якщо диференціальна функція L співпадає з диференціальною функцією $\tilde{L}$ на многовиді $\check{\mathcal{Q}}_{(r)}$, то це справедливо і на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$. Отже, $\text{sc}_L Q \leq \text{sc}_L \check{Q}$. $\square$

Означення 4.4. $(p+1)$ -вимірний $(0 < p < n)$ модуль M назвемо *метасингулярним* для диференціальної функції L , якщо будь-який p -вимірний

інволютивний підмодуль модуля M , що задовольняє умову на ранг, є сингулярним для L і модуль M містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ таких підмодулів, параметризовану довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ усіх незалежних і залежних змінних. *Копорядок сингулярності* $\text{sco}_L M$ метасингулярного модуля M визначимо як максимум копорядків сингулярності його інволютивних p -вимірних підмодулів, що задовольняють умову на ранг.

Означення 4.5. $(p+1)$ -вимірний $(0 < p < n)$ модуль M назвемо *метарегулярним* для диференціальної функції L , якщо він містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ p -вимірних інволютивних підмодулів, регулярних для L , яку параметризовано довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ всіх незалежних і залежних змінних. Отже, $\text{sco}_L M = \text{ord } L$.

Тут та надалі під параметризацією довільною функцією розуміємо параметризацію по модулю розв'язків деякої системи диференціальних рівнянь на цю функції. *Копорядок сингулярності* сім'ї $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ також визначимо як максимум копорядків сингулярності її елементів і позначимо як $\text{sco}_L \mathfrak{M}$.

Для зручності вважаємо, що випадок копорядку сингулярності $-\infty$ включає параметризовані сім'ї ультрасингулярних модулів, а також метасингулярні модулі, інволютивні p -вимірні підмодулі яких є ультрасингулярними, якщо задовольняють умову на ранг. Як показано далі, цей випадок є неможливим; див. наслідок 4.3.

Приклад 4.2. Для кожної диференціальної функції L з прикладу 4.1, наведемо модуль M , метасингулярний для L , і відповідну сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$. Специфічний вигляд функціональних коефіцієнтів у Q^Φ вибраний з огляду на те, щоб гарантувати інволютивність Q^Φ .

1. $M = \langle \partial_2, \partial_3, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 - (\Phi_2/\Phi_u)\partial_u, \partial_3 - (\Phi_3/\Phi_u)\partial_u \rangle\}$, $\text{sco}_L M = 1$.
2. $M = \langle \partial_2, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 + \Phi\partial_u \rangle\}$, $\text{sco}_L M = 2$.

3. $M = \langle \partial_1 + \partial_4, \partial_2, \partial_3, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 + \partial_4 - ((\Phi_2 + \Phi_4)/\Phi_u)\partial_u, \partial_2 - (\Phi_2/\Phi_u)\partial_u, \partial_3 - (\Phi_3/\Phi_u)\partial_u \rangle\}$, $\text{sco}_L M = 1$.
4. $M = \langle \partial_1 + \partial_4, \partial_2, \partial_3, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 + \partial_4 - ((\Phi_2 + \Phi_4)/\Phi_u)\partial_u, \partial_2 - (\Phi_2/\Phi_u)\partial_u, \partial_3 - (\Phi_3/\Phi_u)\partial_u \rangle\}$, $\text{sco}_L M = 1$.
5. a) $M = \langle \partial_2, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 + \Phi\partial_u \rangle\}$, $\text{sco}_L M = 1$;
b) $M = \langle \partial_2, \partial_3, \partial_u \rangle$, $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_2 - (\Phi_2/\Phi_u)\partial_u, \partial_3 - (\Phi_3/\Phi_u)\partial_u \rangle\}$, $\text{sco}_L M = 1$.

Умова інволютивності модуля M не включена явно в означення 4.4 й 4.5. Згідно цих означень метасингулярний (або метарегулярний) модуль M має містити сім'ю p -вимірних інволютивних підмодулів, параметризованих функцією всіх змінних. Але у випадку $p \geq 2$ така вимога еквівалентна умові, що модуль M є інволютивним.

Твердження 4.2. $(p+1)$ -вимірний модуль M , $p \geq 2$, містить сім'ю p -вимірних інволютивних підмодулів, параметризованих довільною функцією всіх незалежних і залежних змінних, тоді й лише тоді, коли модуль M є інволютивним.

Доведення. Припустимо, що модуль M містить сім'ю $\mathfrak{M}$ p -вимірних інволютивних підмодулів, параметризованих довільною функцією всіх змінних по модулю функцій з меншою кількістю аргументів. Тоді базис $(Q_0, \dots, Q_p)$ модуля M можна вибрати таким чином, щоб векторні поля $Q_1, \dots, Q_p$ породжували інволютивний підмодуль модуля M з $\mathfrak{M}$ і, більш того, комутували. За допомогою деякої заміни змінних (x, u) зведемо ці векторні поля до операторів зсувів: $Q_s = \partial_s$. З точністю до додавання Q_s і множення на довільну ненульову функцію, векторне поле Q_0 можна вибрати у вигляді $Q_0 = \xi^{0\iota}(x, u)\partial_\iota + \eta^0(x, u)\partial_u$, де один із коефіцієнтів $\xi^{0\iota}$, $\iota = p+1, \dots, n$, чи η^0 дорівнює 1. Усю множину p -вимірних підмодулів модуля M розіб'ємо на підмножини

$$S_0 = \{Q^{\bar{\theta}} = \langle Q_s + \theta^s Q_0, s = 1, \dots, p \rangle\},$$

$$S_s = \{Q^{\bar{\theta}^s} = \langle Q_0, \dots, Q_{s-1}, Q_{s'} + \theta^{s'} Q_s, s' = s+1, \dots, p \rangle\},$$

де $\bar{\theta} = (\theta^1, \dots, \theta^p)$, $\bar{\theta}^s = (\theta^{s+1}, \dots, \theta^p)$, і всі θ належать множині гладких функцій змінних $(x, u)^2$. За побудовою, якщо $Q^{\bar{\theta}^s}$ є інволютивним модулем, то вибрані базисні елементи комутують. Це означає, що компоненти $\bar{\theta}^s$ задовольняють рівняння $Q_0 \theta^{s'} = 0, \dots, Q_{s-1} \theta^{s'} = 0, s' = s+1, \dots, p$, а тому їх можна виразити через функції щонайбільше $n+1-s$ аргументів. Таким чином, модуль M містить сім'ю $\mathfrak{M}$ p -вимірних інволютивних підмодулів, параметризованих довільною функцією всіх змінних за модулем функцій з меншою кількістю аргументів, тоді й лише тоді, коли така сім'я є підмножиною множини S_0 .

Якщо модуль $Q^{\bar{\theta}}$ з S_0 є інволютивним, то за теоремою Фробеніуса перевизначена система лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку $Q_s \Phi + \theta^s Q_0 \Phi = 0$ відносно невідомої функції $\Phi = \Phi(x, u)$ має розв'язок, причому $Q_0 \Phi \neq 0$, тобто функції-параметри θ^s можна представити у вигляді $\theta^s = -\Phi_s / Q_0 \Phi$. Оскільки базисні елементи $Q_s + \theta^s Q_0$ модуля $Q^{\bar{\theta}}$ мають комутувати, то

$$\begin{aligned} & [Q_s + \theta^s Q_0, Q_{s'} + \theta^{s'} Q_0] \\ &= (\theta^{s'} + \theta^s Q_0 \theta^{s'} - \theta_{s'}^s - \theta^{s'} Q_0 \theta^s) Q_0 + \theta^{s'} Q_{0,s} - \theta^s Q_{0,s'} \\ &= \frac{\Phi_{s'} Q_{0,s} \Phi - \Phi_s Q_{0,s'} \Phi}{(Q_0 \Phi)^2} Q_0 + \frac{\Phi_s}{Q_0 \Phi} Q_{0,s'} - \frac{\Phi_{s'}}{Q_0 \Phi} Q_{0,s} = 0, \end{aligned}$$

де $Q_{0,s} = [Q_s, Q_0] = \xi_s^{0\iota} \partial_\iota + \eta_s^0 \partial_u$.

Припустимо, що не всі векторні поля $Q_{0,s}$ є нульовими. Нехай векторні поля $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{\tilde{p}}$ утворюють базис модуля $\langle Q_{0,s} \rangle$. Тоді векторні

²Це можна зробити таким чином. Припустимо, що $R = \langle R_1, \dots, R_p \rangle$ — p -вимірний підмодуль модуля M , де $R_s = \sum_{k=0}^p \lambda^{sk} Q_k$, а λ^{sk} — гладкі функції змінних (x, u) . Покладемо $\Lambda := (\lambda^{sk})_{s=1, \dots, p}^{k=0, \dots, p}$ та $\Lambda' := (\lambda^{sk})_{s=1, \dots, p}^{k=1, \dots, p}$. Маємо, що $\text{rank } \Lambda = p$. Якщо $\text{rank } \Lambda' = p$, то за допомогою елементарних операцій з рядками можна побудувати базис R , що ідентифікує його як елемент з множини S_0 . Інакше матрицю Λ можна звести до вигляду, де $\lambda^{10} = 1$, а всі інші елементи першого стовпчика і першого рядка нульові. Застосовуючи аналогічні міркування до отриманої підматриці в нижньому правому кутку, отримаємо базис типу S_1 або знову спростуємо перший стовпчик і перший рядок цієї підматриці. Необхідне розбиття побудуємо, індуктивно повторюючи ці міркування.

поля $Q_0, \tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{\tilde{p}}$ лінійно незалежні, а тому $Q_{0,s} = \sum_{\tilde{s}=1}^{\tilde{p}} \lambda^{s\tilde{s}} \tilde{Q}_{\tilde{s}}$ з деякими гладкими функціями $\lambda^{s\tilde{s}} = \lambda^{s\tilde{s}}(x, u)$. Із наведених вище комутаційних співвідношень випливає система для функції Φ :

$$\Phi_{s'} Q_{0,s} \Phi - \Phi_s Q_{0,s'} \Phi = 0, \quad \lambda^{s'\tilde{s}} \Phi_s = \lambda^{s\tilde{s}} \Phi_{s'}, \quad \tilde{s} = 1, \dots, \tilde{p}.$$

Оскільки серед коефіцієнтів $\lambda^{s\tilde{s}}$ обов'язково є ненульові, то функція Φ пробігає щонайбільше множину розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Отже, кількість її аргументів насправді менша за $n + 1$. Це суперечить існуванню сім'ї p -вимірних інволютивних підмодулів модуля M , параметризованих довільною функцією всіх змінних за модулем функцій з меншою кількістю аргументів.

Отже, всі векторні поля $Q_{0,s} = [Q_s, Q_0]$ є нульовими, тобто модуль M є інволютивним.

Навпаки, якщо модуль M є інволютивним, виберемо базис утворений комутуючими векторними полями $Q_0, \dots, Q_p$. Кожен підмодуль $Q^\Phi = \langle Q_s - (Q_s \Phi) / (Q_0 \Phi) Q_0 \rangle$ є інволютивним і має розмірність p . Тут $\Phi = \Phi(x, u)$ пробігає множину функцій від змінних (x, u) з $Q_0 \Phi \neq 0$, тобто доповнення до множини розв'язків рівняння $Q_0 \Phi = 0$. Загальний розв'язок цього рівняння параметризований однією функцією від n аргументів. Модулі Q^Φ і $Q^{\tilde{\Phi}}$, що відповідають функціям Φ і $\tilde{\Phi}$, співпадають тоді й лише тоді, коли $(Q_0 \Phi) Q_s \tilde{\Phi} = (Q_s \Phi) Q_0 \tilde{\Phi}$. Назвемо такі функції Φ і $\tilde{\Phi}$ еквівалентними. Таким чином, множину, визначену функцією Φ , потрібно додатково факторизувати відносно цього відношення еквівалентності. Необхідною і достатньою умовою для еквівалентності функцій Φ і $\tilde{\Phi}$ є існування гладкої функції F від $n - p + 1$ аргументів, для якої $\tilde{\Phi} = F(\omega^1, \dots, \omega^{n-p}, \Phi)$, де $\omega^1, \dots, \omega^{n-p}$ утворюють повну множину функціонально незалежних розв'язків системи $Q_0 \omega = 0, Q_s \omega = 0$. Оскільки кількість аргументів функції F менша за $n + 1$, то факторизація не впливає на ступінь довільності функції Φ . $\square$

Зауваження 4.1. Сім'ї інволютивних підмодулів, що належать до множини S_0 , можна параметризувати різним чином. У доведенні твердження 4.2 ці підмодулі параметризовані за допомогою представлення коефіцієнтів θ^s у вигляді $\theta^s = -Q_s\Phi/Q_0\Phi$, а множину, визначену за допомогою функції $\Phi = \Phi(x, u)$, потрібно додатково факторизувати відносно деякого відношення еквівалентності. В якості параметризуючої функції замість Φ можна вибрати будь-яку функцію θ^s . Після того, як $\Psi^1 = \theta^1$ вибрана в якості такої функції, умова $[Q_1 + \theta^1 Q_0, Q_2 + \theta^2 Q_0] = 0$ призводить до лінійного диференціального рівняння першого порядку з частинними похідними $Q_1\theta^2 + \theta^1 Q_0\theta^2 = Q_2\theta^1 + \theta^2 Q_0\theta^1$ відносно функції θ^2 , загальний розв'язок якого параметризовано довільною функцією Ψ^2 від n змінних. Аналогічно, умова $[Q_i + \theta^i Q_0, Q_3 + \theta^3 Q_0] = 0$, $i = 1, 2$, призводить до системи двох лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з частинними похідними $Q_i\theta^3 + \theta^i Q_0\theta^3 = Q_3\theta^i + \theta^3 Q_0\theta^i$. Ця система відповідає модулю, породженому векторними полями $Q_i + \theta^i Q_0 + (Q_3\theta^i + \theta^3 Q_0\theta^i)\partial_{\theta^3}$, який є інволютивним, внаслідок рівняння для θ^2 . З теореми Фробеніуса випливає, що загальний розв'язок цієї системи параметризований довільною функцією Ψ^3 від $n - 1$ змінних. Повторюючи процедуру для кожного θ^s , взаємно однозначно параметризуємо інволютивні модулі з множини підмодулів S_0 набором $(\Psi^1, \dots, \Psi^p)$, де Ψ^s пробігає множину гладких функцій $n + 2 - s$ змінних.

Наслідок 4.2. *Будь-який $(p+1)$ -вимірний метасингулярний (або метарегулярний) модуль M для диференціальної функції L , де $p \geq 2$, є інволютивним.*

Твердження 4.3. *$(p+1)$ -вимірний модуль M з $p \geq 2$ є метасингулярним (або відповідно метарегулярним) для диференціальної функції L тоді й лише тоді, коли з точністю до точкових перетворень у просторі змінних (x, u) він містить сім'ю $\mathfrak{M}$ p -вимірних інволютивних підмодулів, сингулярних (або відповідно регулярних) для L , вигляду*

$$Q^\Phi = \langle \partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u, s = 1, \dots, p \rangle,$$

що параметризовані довільною гладкою функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ всіх незалежних і залежних змінних, $\Phi_u \neq 0$, причому копорядок сингулярності сім'ї $\mathfrak{M}$ для диференціальної функції L співпадає з копорядком сингулярності всього модуля M , $\text{sco}_L \mathfrak{M} = \text{sco}_L M$.

Доведення. Припустимо, що модуль M є метасингулярним (або метарегулярним) для диференціальної функції L . Оскільки модуль M інволютивний згідно наслідку 4.2, то можна вибрати його базис, утворений комутуючими векторними полями $Q_0, \dots, Q_p$, які задовольняють умову на ранг $\text{rank}(\xi^{si}) = p$. За допомогою заміни змінних (x, u) ці векторні поля можна звести до операторів зсувів: $Q_s = \partial_s$ і $Q_0 = \partial_u$. Підмодуль $Q^{\bar{\theta}} = \langle Q_s + \theta^s Q_0, s = 1, \dots, p \rangle$ модуля M буде інволютивним тоді й лише тоді, коли коефіцієнти θ^s можна представити у вигляді $\theta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ для деякої функції $\Phi = \Phi(x, u)$, $\Phi_u \neq 0$ (див. доведення твердження 4.2). Отже, сім'я

$$\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle \partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u, s = 1, \dots, p \rangle\},$$

що параметризована довільною функцією Φ , $\Phi_u \neq 0$, матиме необхідний вигляд.

Обернене твердження та рівність для копорядків сингулярності є очевидними у регулярному випадку, тому їх достатньо довести лише у сингулярному випадку.

Припустимо, що з точністю до точкових перетворень у просторі змінних (x, u) модуль M містить таку сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$, і нехай $\text{sco}_L \mathfrak{M} = k < r = \text{ord } L$. Звідси випливає, що $\text{sco}_L Q^\Phi \leq k$ для будь-якого допустимого значення параметр-функції Φ . У початкових змінних базисні елементи підмодуля Q^Φ мають вигляд $Q_s - (Q_s \Phi)/(Q_0 \Phi)Q_0$, де $Q_0, \dots, Q_p$ — комутуючі векторні поля. Достатньо довести, що будь-який p -вимірний інволютивний підмодуль P модуля M , який задовольняє умову на ранг і не належить сім'ї $\{Q^\Phi\}$, є сингулярним для L . З точністю до перестановки векторних полів $Q_1, \dots, Q_p$ базис підмодуля P містить векторні

поля Q_0 і $Q_{s'} + \theta^{s'} Q_1$, $s' = 2, \dots, p$, де коефіцієнти $\theta^{s'}$ — гладкі функції змінних (x, u) . Для зручності, за допомогою точкових перетворень змінних (x, u) , зводимо векторні поля $Q_0, Q_2, \dots, Q_p$ і Q_1 до операторів зсувів $\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_p$ і ∂_u відповідно. Оскільки підмодуль P інволютивний, то коефіцієнти $\theta^{s'}$ допускають представлення $\theta^{s'} = -\Psi_{s'}/\Psi_u$, де Ψ — гладка функція змінних $x_2, \dots, x_n$ і u , $\Psi_u \neq 0$. Розглянемо сім'ю інволютивних модулів вигляду

$$Q^\varepsilon = \langle Q_0 + \varepsilon Q_1, Q_{s'} + \theta^{s'\varepsilon} Q_1, s' = 2, \dots, p \rangle,$$

параметризованих малою сталою ε . Тут коефіцієнти $\theta^{s'\varepsilon}$ отримано за допомогою заміни в $\theta^{s'}$ аргументу u на $u - \varepsilon x_1$: $\theta^{s'\varepsilon} = \theta^{s'}(x_2, \dots, x_n, u - \varepsilon x_1)$. Для кожного ненульового значення ε модуль Q^ε належить сім'ї $\{Q^\Phi\}$. Це стає очевидним після переходу від вибраного базису до базису

$$(Q_1 + \varepsilon^{-1} Q_0, Q_{s'} - \varepsilon^{-1} \theta^{s'\varepsilon} Q_0, s' = 2, \dots, p).$$

Таким чином, будь-який модуль Q^ε з $\varepsilon \neq 0$ є сингулярним для диференціальної функції L . Розглянемо диференціальну функцію $\hat{L}^\varepsilon$, яка асоційована з L на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}^\varepsilon$ через виключення похідних u_α , $\alpha_1 + \dots + \alpha_p > 0$, з L , використовуючи рівняння $u_1 = \varepsilon$, $u_{s'} = \theta^{s'\varepsilon}$ та їхні диференціальні наслідки. Функція $\hat{L}^\varepsilon$ гладка за сукупністю параметра ε , змінних x та похідних від u за змінними $x_{p+1}, \dots, x_n$. Оскільки $\text{ord } \hat{L}^\varepsilon \leq k$ для будь-якого $\varepsilon \neq 0$, то внаслідок неперервності це вірно й для $\varepsilon = 0$. Це означає, що підмодуль $P = Q^\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ буде сингулярним для L , і $\text{sc}_L P \leq k = \text{sc}_L \mathfrak{M}$.

Очевидно, що $\text{sc}_L M \geq \text{sc}_L \mathfrak{M}$. Оскільки будь-який p -вимірний інволютивний підмодуль Q модуля M задовольняє нерівність $\text{sc}_L Q \leq \text{sc}_L \mathfrak{M}$, то отримаємо $\text{sc}_L M = \text{sc}_L \mathfrak{M}$. $\square$

Випадок двовимірних метасингулярних (або метарегулярних) модулів є особливим. Оскільки будь-який одновимірний модуль векторних полів інволютивний, то з метасингулярності (або метарегулярності) двовимірного модуля для диференціальної функції не впливає інволютивність цього модуля. Іншими словами, висновок твердження 4.2 невірний

у випадку $p = 1$. Тому редукована форма підмодулів двовимірного метасингулярного (або метарегулярного) модуля залежить від того, чи є цей модуль інволютивним.

Твердження 4.4. *Двовимірний модуль M є метасингулярним (або метарегулярним) для диференціальної функції L тоді й лише тоді, коли з точністю до точкових перетворень у просторі змінних (x, u) він містить сім'ю $\mathfrak{M}$ одновимірних підмодулів, сингулярних (або регулярних) для L , з базисними векторними полями в редукованій формі, параметризований довільною гладкою функцією $\theta = \theta(x, u)$. Редукована форма має вигляд*

$$\partial_1 + \theta \partial_u \quad \text{або} \quad \partial_1 + u \partial_2 + \xi^3 \partial_3 + \cdots + \xi^n \partial_n + \theta \partial_u$$

залежно від того, чи є модуль M інволютивним. Тут $\xi^i = \xi^i(x, u)$, $i = 3, \dots, n$ — фіксовані гладкі функції. Копорядок сингулярності сім'ї $\mathfrak{M}$ для диференціальної функції L співпадає з копорядком усього модуля M , $\text{sco}_L \mathfrak{M} = \text{sco}_L M$.

Щоб узгодити подальший розгляд для $p = 1$ із випадком $p \geq 2$, параметр-функцію θ можна представити у вигляді $\theta = -\Phi_1/\Phi_u$, де $\Phi = \Phi(x, u)$ — довільна гладка функція з $\Phi_u \neq 0$.

Доведення. Якщо модуль M інволютивний, то доведення аналогічне доведенню твердження 4.2. Тому нижче розглянемо лише випадок, коли модуль M не є неінволютивним.

Припустимо, що модуль M метасингулярний (або метарегулярний) для диференціальної функції L . Виберемо базис (Q_0, Q_1) модуля M так, щоб векторне поле Q_1 задовольняло умову на ранг $\text{rank}(\xi^{1i}) = 1$ і зведемо за допомогою точкової заміни змінних (x, u) векторне поле Q_0 до оператора зсуву відносно змінної u : $Q_0 = \partial_u$. З точністю до перестановки змінних $x_1, \dots, x_p$ можна вважати, що $\xi^{11} \neq 0$. Далі міняємо базисний елемент Q_1 на $(\xi^{11})^{-1}(Q_1 - \eta^1 Q_0)$ для того, щоб покласти $\eta^1 = 0$ і $\xi^{11} = 1$.

Оскільки модуль M неінволютивний, то комутатор $[Q_0, Q_1] = \xi_u^{12} \partial_2 + \dots + \xi_u^{1n} \partial_n$ не дорівнює нулю. Тому з точністю до перестановки змінних $x_2, \dots, x_p$ можна вважати, що $\xi_u^{12} \neq 0$. Заміна змінних $\tilde{x}^s = x^s$, $\tilde{u} = \xi^{12}(x, u)$ разом із одночасною заміною Q_0 на $(\xi_u^{12})^{-1} Q_0$ зводить базисні елементи модуля M до вигляду $Q_0 = \partial_u$ і $Q_1 = \partial_1 + u \partial_2 + \xi^3 \partial_3 + \dots + \xi^n \partial_n$. Тоді сім'я $\mathfrak{M} = \{\langle Q_1 + \theta Q_0 \rangle\}$ одновимірних підмодулів модуля M , сингулярних для функції L , де параметр $\theta = \theta(x, u)$ пробігає множину гладких функцій всіх незалежних і залежних функцій, є шуканою.

Обернене твердження та рівність для копорядків сингулярності знову є очевидними у регулярному випадку, тому їх достатньо довести лише у сингулярному випадку.

Нехай з точністю до точкових перетворень у просторі змінних (x, u) модуль M містить таку сім'ю $\mathfrak{M}$, причому $\text{sc}_L \mathfrak{M} = k < r = \text{ord } L$. Звідки випливає, що $\text{sc}_L \langle Q_1 + \theta Q_0 \rangle \leq k$ для будь-якого значення параметр-функції θ . Після повернення до початкових змінних достатньо довести, що підмодуль $\langle Q_0 \rangle$ модуля M є сингулярним для функції L , якщо вектор поле Q_0 також задовольняє умову на ранг у цих координатах. Для зручності, за допомогою заміни змінних зведемо Q_0 до оператора зсуву ∂_1 . Розглянемо сім'ю модулів вигляду $Q^\varepsilon = \langle Q_0 + \varepsilon(Q_1 - \xi^{11} Q_0) \rangle$, параметризованих малою сталою ε . Для кожного ненульового значення ε модуль Q^ε належить сім'ї $\mathfrak{M}$, оскільки в цьому випадку $Q^\varepsilon = \langle Q_1 + (\varepsilon^{-1} - \xi^{11}) Q_0 \rangle$. Таким чином, будь-який модуль Q^ε з $\varepsilon \neq 0$ є сингулярним для диференціальної функції L . Розглянемо диференціальну функцію $\hat{L}^\varepsilon$, що асоційована з функцією L на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}^\varepsilon$ через виключення похідних u_α , $\alpha_1 > 0$, з L , використовуючи рівняння $u_1 = \varepsilon(\eta^{11} - \xi^{12} u_2 - \dots - \xi^{1n} u_n)$ і його диференціальні наслідки. Функція $\hat{L}^\varepsilon$ є гладкою за сукупністю параметра ε , змінних x і похідних u за змінними $x_2, \dots, x_n$. Оскільки порядок $\hat{L}^\varepsilon$ не перевищує k для будь-якого ненульового ε , то внаслідок неперервності це твердження справедливе й для $\varepsilon = 0$. Це означає, що підмодуль $\langle Q_0 \rangle = Q^\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ сингулярний для функції L , причому

$$\text{sc}_L \langle Q_0 \rangle \leq k = \text{sc}_L \mathfrak{M}.$$

Множину одновимірних підмодулів модуля M вичерпують модуль $\langle Q_0 \rangle$ і елементи сім'ї $\mathfrak{M}$. Звідки $\text{sc}_L \mathfrak{M} = \text{sc}_L M$. $\square$

4.3 Диференціальні функції, що допускають метасингулярні модулі

З точністю до точкових перетворень можна описати загальний вигляд диференціальних функцій, що допускають метасингулярні модулі векторних полів.

Теорема 4.2. *Диференціальна функція L r -го порядку однієї залежної та n незалежних змінних допускає $(p+1)$ -вимірний метасингулярний модуль векторних полів копорядку сингулярності k ($0 \leq k < r$, $0 < p < n$) тоді й лише тоді, коли з точністю до точкових перетворень її можна представити у вигляді*

$$L = \bar{L}(x, \Omega_{r,k,p}), \quad (4.3)$$

де $\Omega_{r,k,p} = (\omega_\alpha, |\alpha| \leq r, \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_n \leq k)$, функція $\bar{L}$ суттєво залежить від деякого ω_α з $\alpha_{p+1} + \dots + \alpha_n = k$. Тут $\omega_\alpha = u_\alpha$ або, лише у випадку $p = 1$, $\omega_\alpha = D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} (D_1 + uD_2 + \xi^3 D_3 + \dots + \xi^n D_n)^{\alpha_1} u$ для деяких фіксованих гладких функцій $\xi^i = \xi^i(x, u)$, $i = 3, \dots, n$.

Доведення. Припустимо, що диференціальна функція L допускає $(p+1)$ -вимірний метасингулярний модуль M копорядку сингулярності k . З точністю до заміни базису та заміни змінних базис модуля M включає або векторні поля $Q_s = \partial_s$ і $Q_0 = \partial_u$, або, якщо $p = 1$ і модуль M неінволютивний, векторні поля $Q_1 = \partial_1 + u\partial_2 + \xi^3 \partial_3 + \dots + \xi^n \partial_n$ і $Q_0 = \partial_u$ (див. твердження 4.3 і 4.4). Хоча вигляд початкової диференціальної функції L також зміниться внаслідок заміни змінних, для спрощення викладок використовуватимемо старі позначення для всіх нових величин.

Виберемо сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle Q_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u, s = 1, \dots, p \rangle\}$ p -вимірних інволютивних підмодулів модуля M , параметризованих довільною

функцією $\Phi = \Phi(x, u)$. Зафіксуємо довільну точку $z^0 = (x^0, u_{(r)}^0) \in J^r$ і розглянемо такі значення параметр-функції Φ , для яких $z^0 \in \mathcal{Q}_{(r)}^\Phi$. (Тут $\mathcal{Q}_{(r)}^\Phi$ — многовид, визначений у просторі струменів J^r диференціальними наслідками характеристичної системи $\mathcal{Q}^\Phi$, що мають як рівняння порядок не вище, ніж r . Систему таких диференціальних наслідків позначимо тим самим символом $\mathcal{Q}_{(r)}^\Phi$, що й многовид.) З цієї умови на Φ випливає, що значення похідних функції Φ лише за змінними $x_1, \dots, x_n$ у точці (x^0, u^0) , які включають диференціювання за деякою змінною x_s , можна виразити через $u_{(r)}^0$ і значення похідних функції Φ у точці (x^0, u^0) , що включають диференціювання за змінною u . Останні значення є незв'язаними. Наприклад, якщо модуль M інволютивний, маємо

$$\begin{aligned}\Phi_s(x^0, u^0) &= -u_s^0 \Phi_u(x^0, u^0), \\ \Phi_{si}(x^0, u^0) &= -u_{si}^0 \Phi_u(x^0, u^0) - u_i^0 \Phi_{su}(x^0, u^0) \\ &\quad - u_s^0 \Phi_{iu}(x^0, u^0) - u_s^0 u_i^0 \Phi_{uu}(x^0, u^0), \quad \dots\end{aligned}$$

Введемо в J^r нові координати $(x_i, \omega_\alpha, |\alpha| \leq r)$ замість початкових координат $(x_i, u_\alpha, |\alpha| \leq r)$. Якщо модуль M інволютивний, то ця заміна — лише перепозначення координат, яку виконуємо для того, щоб гарантувати узгодженість з особливим випадком неінволютивних модулів з $p = 1$. Заміна координат у особливому випадку добре визначена, оскільки матриця Якобі $(\partial \omega_\alpha / \partial u_{\alpha'})$ невироджена: вона є трикутною матрицею з одиницями на діагоналі за умови, що мультиіндекси впорядковано за правилом

$$\begin{aligned}\alpha \prec \beta &\Leftrightarrow |\alpha| < |\beta| \vee (|\alpha| = |\beta| \wedge \alpha_1 < \beta_1) \\ &\vee (|\alpha| = |\beta| \wedge \alpha_1 = \beta_1 \wedge \alpha_2 < \beta_2) \vee \dots\end{aligned}$$

Позначимо через $\hat{L}$ диференціальну функцію, отриману з L за допомогою процедури виключення внаслідок системи $\mathcal{Q}_{(r)}^\Phi$ похідних функції u , що містять диференціювання за змінними x_s , і які вважаємо $\mathcal{Q}^\Phi$ -головними. Для мультиіндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ покладемо

$$\check{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p), \quad \hat{\alpha} = (\alpha_{p+1}, \dots, \alpha_n),$$

тобто $\alpha = (\check{\alpha}, \hat{\alpha})$. Через $\check{0}$ позначимо набір з p нулів. Оскільки Q^Φ — метасингулярний модуль для функції L копорядку сингулярності k , то функція $\hat{L}$ не залежить від похідних $u_{(\check{0}, \hat{\alpha})}$, $|\hat{\alpha}| = k + 1, \dots, r$. Використаємо цю умову крок за кроком, починаючи з найбільшого значення $|\hat{\alpha}|$ і переписуючи похідні в нових змінних простору струменів J^r і в термінах функції L . Під час виконання цієї процедури враховуємо рівність $\omega_\beta = \psi^\beta[u]$, що виконується на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}^\Phi$ для кожного мультиіндекса β з $|\beta| \leq r$. Диференціальну функцію $\psi^\beta = \psi^\beta[u]$ визначає рівність

$$\psi^\beta = D_{p+1}^{\beta_{p+1}} \cdots D_n^{\beta_n} (Q_1^\Phi)^{\beta_1} \cdots (Q_p^\Phi)^{\beta_p} u,$$

а тому її порядок дорівнює $|\hat{\beta}|$ і вона допускає представлення

$$\psi^\beta = (\partial_u (Q_1^\Phi)^{\beta_1} \cdots (Q_p^\Phi)^{\beta_p} u) u_{(\check{0}, \hat{\beta})} + \tilde{\psi}^\beta[u]$$

з деякою диференціальною функцією $\tilde{\psi}^\beta = \tilde{\psi}^\beta[u]$ порядку меншого за $|\hat{\beta}|$. Тому для кожного α з $\check{\alpha} = \check{0}$ і $|\hat{\alpha}| \leq r$ за ланцюговим правилом отримаємо

$$\hat{L}_{u_\alpha}^\Phi(z^0) = \sum_{\beta: |\beta| \leq r, |\hat{\beta}| \geq |\hat{\alpha}|} L_{\omega_\beta}(z^0) \psi_{u_\alpha}^\beta(z^0). \quad (4.4)$$

Отже, у нових змінних для кожного α з $\check{\alpha} = \check{0}$ і $|\hat{\alpha}| = r$ рівняння $\hat{L}_{u_\alpha}(z^0) = 0$ можна записати у вигляді $L_{\omega_\alpha}(z^0) = 0$. Дійсно, у цьому випадку маємо $\psi_{u_\alpha}^\beta = 1$, якщо $\beta = \alpha$, і $\psi_{u_\alpha}^\beta = 0$, якщо $\beta \neq \alpha$. Це завершує перший крок доведення.

На другому кроці фіксуємо значення α з $\check{\alpha} = \check{0}$ і $|\hat{\alpha}| = r - 1$. Оскільки $L_{\omega_\beta}(z^0) = 0$, якщо $\check{\beta} = \check{0}$ і $|\hat{\beta}| = r$, то мультиіндекс підсумовування в (4.4) з фіксованим α можна вважати таким, що пробігає множину

$$B_1 = \{\beta \mid |\check{\beta}| \leq 1, |\hat{\beta}| = r - 1\}.$$

Похідна $\psi_{u_\alpha}^\beta$ дорівнює 1, $\partial_u Q_s^\Phi u$ і 0 для $\beta = (\check{0}, \hat{\alpha})$, $\beta = (\delta_s, \hat{\alpha})$ і всіх інших значень β з B_1 відповідно. Тут δ_s — p -набір з 1 на s -му місці і 0 на всіх інших. Тому з рівняння $\hat{L}_{u_{(\check{0}, \hat{\alpha})}}(z^0) = 0$ отримаємо

$$L_{\omega_{(\check{0}, \hat{\alpha})}}(z^0) + L_{\omega_{(\delta_s, \hat{\alpha})}}(z^0) (\partial_u Q_s^\Phi u) \Big|_{(x,u)=(x^0,u^0)} = 0.$$

Зауважимо, що $\partial_u Q_s^\Phi u = -(\Phi_s/\Phi_u)_u$. Розщеплюючи за незв'язаними значеннями $\Phi_{su}(x^0, u^0)$ приходимо до рівнянь $L_{\omega_{(\check{0}, \hat{\alpha})}}(z^0) = 0$ і $L_{\omega_{(\delta_s, \check{\alpha})}}(z^0) = 0$.

Повторюючи цю процедуру, на μ -му кроці, $\mu \in \{3, \dots, r-k\}$, отримуємо рівняння $L_{\omega_\beta}(z^0) = 0$, де мультиіндекс β приймає значення, для яких $r - \mu + 2 \leq |\check{\beta}| \leq r$ та $|\check{\beta}| \leq r - |\hat{\beta}|$. Тоді для кожного фіксованого значення α з $\check{\alpha} = \check{0}$ і $|\hat{\alpha}| = r - \mu + 1$ мультиіндекс підсумовування β у (4.4) фактично пробігає множину $B_\mu = \{\beta \mid |\check{\beta}| \leq \mu - 1, |\hat{\beta}| = r - \mu + 1\}$. Для $\beta \in B_\mu$ похідна $\psi_{u_\alpha}^\beta$ дорівнює $\partial_u (Q_1^\Phi)^{\beta_1} \dots (Q_p^\Phi)^{\beta_p} u$, якщо $\hat{\beta} = \hat{\alpha}$, або 0 у протилежному випадку. Таким чином, з рівняння $\hat{L}_{u_{(\check{0}, \hat{\alpha})}}(z^0) = 0$ отримуємо умову

$$\sum_{|\check{\beta}| \leq \mu-1, \hat{\beta}=\hat{\alpha}} L_{\omega_\beta}(z^0) (\partial_u (Q_1^\Phi)^{\beta_1} \dots (Q_p^\Phi)^{\beta_p} u) \big|_{(x,u)=(x^0,u^0)} = 0.$$

Значення $(\partial_1^{\beta_1} \dots \partial_p^{\beta_p} \Phi_u)(x^0, u^0)$ з $|\check{\beta}| \leq \mu - 1$ є незв'язаними. Тому розщеплюючи за ними або, рівносильно, розщеплюючи за

$$(\partial_u (Q_1^\Phi)^{\beta_1} \dots (Q_p^\Phi)^{\beta_p} u) \big|_{(x,u)=(x^0,u^0)}, \quad 0 < |\check{\beta}| \leq \mu - 1,$$

отримаємо рівняння $L_{\omega_\beta}(z^0) = 0$, де $|\hat{\beta}| = r - \mu + 1$ та $|\check{\beta}| \leq \mu - 1$.

Після $(r-k)$ -го кроку отримуємо систему $L_{\omega_\alpha}(z^0) = 0$, де $|\hat{\alpha}| > k$ та $|\alpha| \leq r$, з якої випливає умова (4.3).

Навпаки, нехай диференціальна функція L r -го порядку має вигляд (4.3), можливо, після виконання деякого точкового перетворення. Для довільної гладкої функції $\Phi = \Phi(x, u)$ з $\Phi_u \neq 0$ розглянемо інволютивний модуль Q^Φ , породжений або векторними полями $Q_s^\Phi = \partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u$ у загальному випадку, або векторним полем

$$Q_1^\Phi = \partial_1 + u\partial_2 + \xi^3\partial_3 + \dots + \xi^n\partial_n - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u$$

у спеціальному випадку з $p = 1$. Використовуючи $\check{L}$ і Q^Φ , побудуємо диференціальну функцію $\tilde{L}^\Phi = \bar{L}(x, \tilde{\Omega}_{r,k,p})$, де

$$\tilde{\Omega}_{r,k,p} = (\omega_\alpha = D_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \dots D_n^{\alpha_n} (Q_1^\Phi)^{\alpha_1} \dots (Q_p^\Phi)^{\alpha_p} u, |\hat{\alpha}| \leq k, |\alpha| \leq r).$$

За побудовою, $\text{ord } \tilde{L}^\Phi \leq k$ для всіх значень параметр-функції Φ з $\Phi_u \neq 0$. Більш того, $\text{ord } \tilde{L}^\Phi = k$ майже для всіх значень цієї параметр-функції за виключенням тих, які задовольняють деякій системі диференціальних рівнянь. Оскільки $L|_{Q_{(r)}^\Phi} = \tilde{L}^\Phi|_{Q_{(r)}^\Phi}$, де Φ пробігає множину гладких функцій змінних (x, u) з ненульовою похідною за змінною u , то сім'я $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ є сингулярною сім'єю p -вимірних інволютивних модулів копорядку сингулярності k для диференціальної функції L у нових координатах. Далі повертаємося до старих координат. Внаслідок твердження 4.3, якщо $p \geq 2$, або твердження 4.4, якщо $p = 1$, модуль векторних полів, що містить сім'ю $\mathfrak{M}$, є метасингулярним $(p+1)$ -вимірним модулем копорядку сингулярності k для диференціальної функції L . $\square$

Виключаючи особливий випадок двовимірних неінволютивних метасингулярних модулів, результат теореми 4.2 можна сформулювати таким чином: диференціальна функція однієї залежної та n незалежних змінних допускає метасингулярний $(p+1)$ -вимірний інволютивний модуль M копорядку сингулярності k тоді й лише тоді, коли вона зводиться точковою заміною змінних до диференціальної функції, в аргументах якої диференціювання за $n - p$ фіксованими незалежними змінними для кожної похідної від залежної змінної серед (суттєвих) аргументів функції L мають сукупний порядок не вищий за k .

Наслідок 4.3. *Будь-яка диференціальна функція однієї залежної та n незалежних змінних додатного порядку не допускає метасингулярних $(p+1)$ -вимірних $(0 < p < n)$ модулів копорядку сингулярності $-\infty$.*

Доведення. Припустимо протилежне, тобто нехай існує диференціальна функція L порядку r ($r > 0$) однієї залежної та n незалежних змінних, яка допускає $(p+1)$ -вимірний $(0 < p < n)$ метасингулярний модуль M копорядку сингулярності $-\infty$. Аналогічно доведенню теореми 4.2 перекombінуємо базисні елементи модуля M і виконаємо заміну змінних для того, щоб звести вибраний базис модуля M до того ж самого каноні-

чного вигляду, як і в доведенні теореми. Виберемо сім'ю $\mathfrak{M}$ p -вимірних інволютивних підмодулів модуля M , параметризованих довільною функцією Φ змінних (x, u) . Повторення подальших кроків доведення призводить до висновку, що диференціальна функція L має вигляд (4.3) з $k = 0$. Оскільки $\text{ord } L = r$, то функція $\bar{L}$ у цьому представленні суттєво залежить від деякого ω_α з $|\alpha| = r$. Для кожного α з $|\alpha| = r$ вираз для ω_α внаслідок системи $\mathcal{Q}_{(r)}^\Phi$ включає похідну Φ_α , а аналогічні вирази для решти ω цю похідну не містять. Таким чином, диференціальна функція $\hat{L}^\Phi$ має порядок 0 для всіх значень параметр-функції Φ , крім розв'язків рівняння $\hat{L}_u^\Phi = 0$, яке розглядаємо як диференціальне рівняння порядку $r + 1$ на параметр-функцію Φ . Ця властивість зберігається при точкових перетвореннях у силу довільності параметр-функції Φ . Тому в початкових змінних також маємо $\text{sc}_L M \geq 0$, що суперечить припущенню. $\square$

Зауваження 4.2. Очевидно, що метасингулярний (або метарегулярний) $(p+1)$ -вимірний модуль M для диференціальної функції L може містити p -вимірні інволютивні модулі, копорядки сингулярності яких менші за копорядок сингулярності $\text{sc}_L M =: k$ модуля M . Розглянемо сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle Q_s - (\Phi_s/\Phi_u)Q^0, s = 1, \dots, p \rangle\}$ p -вимірних інволютивних підмодулів модуля M , параметризованих довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$, і вважаємо, що $\text{sc}_L \mathfrak{M} = k$. Також вважаємо, що базисні векторні поля Q_s і Q^0 модуля M мають вигляд, наведений на початку доведення теореми 4.2. Тоді значення параметр-функції Φ , для яких $\text{sc}_L Q^\Phi < k$, є розв'язками системи

$$\sum_{|\hat{\alpha}| \leq r-k} \bar{L}_{\omega_\alpha}(x, \tilde{\Omega}_{r,k,p})(\partial_u(Q_1^\Phi)^{\alpha_1} \dots (Q_p^\Phi)^{\alpha_p} u) = 0, \quad |\hat{\alpha}| = k,$$

де $\tilde{L}$ і $\tilde{\Omega}_{r,k,p}$ визначено в теоремі 4.2 і в її доведенні відповідно. Іншими словами, регулярні значення параметр-функції Φ , асоційовані з підмодулями максимального копорядку сингулярності k у $\mathfrak{M}$, задовольняють

нерівність для деякого α з $|\hat{\alpha}| = k$

$$\sum_{|\hat{\alpha}| \leq r-k} \bar{L}_{\omega_\alpha}(x, \tilde{\Omega}_{r,k,p})(\partial_u(Q_1^\Phi)^{\alpha_1} \cdots (Q_p^\Phi)^{\alpha_p} u) \neq 0.$$

Зауваження 4.3. Загалом, диференціальна функція (порядку $r > 0$) допускає нескінченну кількість метарегулярних модулів різних розмірностей. Дійсно, нехай у точці $z^0 = (x^0, u_{(r)}^0)$ простору струменів J^r порядку r диференціальна функція L має нехарактеристичний напрямок $(c_1, \dots, c_n)$, тобто

$$C := \sum_{|\alpha|=r} L_{u_\alpha}(x^0, u_{(r)}^0) c_1^{\alpha_1} \cdots c_n^{\alpha_n} \neq 0.$$

Виконаємо заміну незалежних змінних x , $\tilde{x}_i = X^i(x)$ з $X_i^1(x^0) = c_i$ в околі x^0 і покладемо $\tilde{u} = u$, що індукує точкову заміну координат у просторі струменів J^r . Позначимо через $\tilde{z}^0$ нові координати точки z^0 . У нових координатах похідна $L_{\tilde{u}_{r\delta_1}}$ співпадає з C в точці $\tilde{z}^0$, а тому не дорівнює нулю в околі цієї точки. Тоді будь-який модуль $M = \langle Q^0, \dots, Q^p \rangle$ з $0 < p < n$, де $Q^0 = \partial_{\tilde{u}}$ і $\langle Q^1, \dots, Q^p \rangle$ — підмодуль модуля $\langle \partial_{\tilde{x}_2}, \dots, \partial_{\tilde{x}_n} \rangle$, є метарегулярним модулем для диференціальної функції L . Підняття елементів модуля M оберненою заміною координат дає метарегулярний модуль для диференціальної функції L у початкових змінних (x, u) . Завдяки функціональній свободі у виборі функції X^1 і — додатково при $p < n - 1$ — у виборі p -вимірних підмодулів у $\langle \partial_{\tilde{x}_2}, \dots, \partial_{\tilde{x}_n} \rangle$ диференціальна функція L допускає нескінченну кількість метарегулярних модулів будь-якої розмірності p з $0 < p < n$.

4.4 Сингулярні модулі векторних полів для диференціальних рівнянь

Інволютивний модуль Q , що задовольняє умову на ранг, назовемо (*сильно*) *сингулярним для диференціального рівняння $\mathcal{L}$* , якщо він сингулярний для диференціальної функції $L[u]$, яка є лівою частиною канонічного представлення $L[u] = 0$ рівняння $\mathcal{L}$. Сильно регулярні модулі

визначаємо аналогічно. Як правило, атрибут “сильний” надалі опускаємо. Оскільки ліві частини диференціальних рівнянь визначено з точністю до множників, які є ненульовими диференціальними функціями, то при розгляді диференціальних рівнянь умови означення 4.3 можна послабити.

Означення 4.6. p -вимірний ($0 < p < n$) інволютивний модуль Q , що задовольняє умову на ранг, назовемо *слабо сингулярним* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ суттєвого порядку $r > 0$, якщо існують диференціальна функція $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$ порядку, нижчого за r , і ненульова диференціальна функція $\lambda = \lambda[u]$ порядку, не вищого за r , такі, що $L|_{Q_{(r)}} = (\lambda\tilde{L})|_{Q_{(r)}}$. В іншому випадку назовемо Q *слабо регулярним* модулем для диференціального рівняння $\mathcal{L}$. Якщо мінімальний порядок диференціальної функції, обмеження якої на $Q_{(r)}$ співпадає з точністю до ненульових функціональних множників з $L|_{Q_{(r)}}$, дорівнює $k \in \{-\infty, 0, 1, \dots, r\}$, то модуль Q назовемо *слабо сингулярним копорядку k* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$.

Зокрема, як і у випадку сильної регулярності, слабо регулярні модулі для диференціального рівняння $\mathcal{L}$ мають копорядок слабкої сингулярності $r = \text{ord } L$. Інволютивний модуль Q є слабо ультрасингулярним для диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$, якщо він є сильно ультрасингулярним для $\mathcal{L}$. Копорядок слабкої сингулярності модуля Q для рівняння $\mathcal{L}$ позначатимемо $\text{wscor}_{\mathcal{L}} Q$.

З сильної сингулярності випливає слабка сингулярність, і тому з слабкої регулярності випливає сильна регулярність. Копорядок слабкої сингулярності є завжди меншим або рівним і може бути строго меншим за копорядок сильної сингулярності. Отже, сильно регулярні модулі можуть бути сингулярними в слабкому сенсі.

Приклад 4.3. Для ілюстрації зв'язку між сильною та слабкою сингулярністю розглянемо рівняння $x_2 u_{111} + x_1 u_{222} = e^{u_{33}}(u_3 + u)$. Воно допускає двовимірний сингулярний модуль $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle$, копорядки сильної та

слабкої сингулярності якого дорівнюють відповідно 2 і 1. Цей же модуль $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle$ є сильно регулярним і слабо сингулярним копорядку 1 для рівняння $x_2 u_{11} + x_1 u_{22} = e^{u_{33}}(u_3 + u)$.

Нехай $\hat{L}$ — диференціальна функція, асоційована з L на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ через виключення $\mathcal{Q}$ -головних похідних. Без обмеження загальності, диференціальні функції λ і $\tilde{L}$ в означенні 4.6 можна замінити диференціальними функціями, асоційованими з ними на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$. Тоді рівність $L = \lambda \tilde{L}$, що виконується на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$, еквівалентна представленню $\hat{L} = \lambda \tilde{L}$. Припустимо, що $\hat{L}$ є максимального рангу відносно похідної u_α найвищого порядку k , від якої ця диференціальна функція залежить суттєво, тобто $\hat{L}_{u_{(\hat{\alpha})}} \neq 0$ для деякого $\hat{\alpha}$ з $|\hat{\alpha}| = k$ на многовиді розв'язків рівняння $\hat{L} = 0$ (див. позначення в теоремі 4.2). Тоді можна покласти $\tilde{L} = \hat{L}$ і $\lambda = 1$. Це означає, що копорядок слабкої сингулярності модуля Q для рівняння $\mathcal{L}$: $L = 0$ дорівнює порядку k диференціальної функції $\hat{L}$, а тому є порядком сильної сингулярності модуля Q для цього рівняння. Отже, у цьому випадку існує цілком алгоритмічна процедура для перевірки, чи є інволютивний модуль слабо сингулярним для диференціального рівняння з частинними похідними.

Твердження 4.5. *Диференціальне рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ однієї залежної та n незалежних змінних допускає слабо сингулярний p -вимірний модуль векторних полів ($0 < p \leq n$) копорядку сингулярності k тоді й лише тоді, коли цей модуль є сильно сингулярним для $\mathcal{L}$ копорядку k (можливо в представленні, що відрізняється від $L[u] = 0$ на ненульовий множник, який диференціальною функцією від u).*

Доведення. У позначеннях означення 4.6 рівняння $L = 0$ еквівалентне рівнянню $\tilde{L} = 0$, причому $\text{scor}_{\tilde{L}} Q = k$. $\square$

Приклад 4.4. Домножуючи рівняння з прикладу 4.3 на ненульову диференціальну функцію $e^{-u_{33}}$, отримаємо відповідно рівняння $e^{-u_{33}}(x_2 u_{111} + x_1 u_{222}) = u_3 + u$ та $e^{-u_{33}}(x_2 u_{11} + x_1 u_{22}) = u_3 + u$. Тоді модуль $\langle \partial_1, \partial_2 \rangle$

одночасно буде і слабо, і сильно сингулярним копорядку 1 для цих рівнянь.

Аналогічно твердженню 4.1 доводимо таке твердження.

Твердження 4.6. *Нехай $\mathcal{L}$ — диференціальне рівняння на невідому функцію u від n незалежних змінних x , Q — інволютивний модуль векторних полів у просторі змінних (x, u) , що має розмірність меншу за n і задовольняє умову на ранг. Тоді $\text{wscoc}_{\mathcal{L}} Q \leq \text{wscoc}_{\mathcal{L}} \tilde{Q}$ для будь-якого інволютивного підмодуля $\tilde{Q}$ модуля Q . Зокрема, модуль Q є слабо сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, якщо він містить підмодуль, слабо сингулярний для $\mathcal{L}$.*

Поняття модулів, метасингулярних (метарегулярних) для диференціальних рівнянь у сильному сенсі, визначаємо аналогічно до сильно сингулярних (регулярних) модулів.

Означення 4.7. $(p+1)$ -вимірний $(0 < p < n)$ модуль M назвемо *метасингулярним* (або *метарегулярним*) для диференціального рівняння $\mathcal{L}$ у сильному сенсі, якщо він є метасингулярним (або метарегулярним) для диференціальної функції $L[u]$, яка є лівою частиною канонічного представлення $L[u] = 0$ рівняння $\mathcal{L}$.

Поняття модулів, метасингулярних для диференціальних рівнянь у слабкому сенсі, визначаємо аналогічно випадку диференціальних функцій.

Означення 4.8. $(p+1)$ -вимірний $(0 < p < n)$ модуль M назвемо *метасингулярним у слабкому сенсі* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$: $L = 0$, якщо будь-який p -вимірний інволютивний підмодуль модуля M , що задовольняє умову на ранг, слабо сингулярний для рівняння $\mathcal{L}$, причому модуль M містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ таких підмодулів, параметризовану довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ всіх незалежних і залежних змінних.

Копорядок слабкої сингулярності метасингулярного модуля M для рівняння $\mathcal{L}$, який позначаємо через $\text{wsc}_\mathcal{L} M$, співпадає з максимумом копорядків слабкої сингулярності його p -вимірних інволютивних підмодулів, які задовольняють умову на ранг.

Означення 4.9. $(p+1)$ -вимірний $(0 < p < n)$ модуль M назовемо *метарегулярним у слабкому сенсі* для диференціального рівняння $\mathcal{L}$, якщо модуль M містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ p -вимірних інволютивних підмодулів, які слабо регулярні для рівняння $\mathcal{L}$ і параметризовані довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ всіх незалежних і залежних змінних, а тому

$$\text{sco}_L M = \text{ord } L.$$

Теорема 4.3. Диференціальне рівняння $\mathcal{L}: L[u] = 0$ r -го порядку і максимального рангу з однією залежною та n незалежними змінними допускає слабо метасингулярний $(p+1)$ -вимірний модуль M векторних полів копорядку сингулярності k тоді й лише тоді, коли з точністю до точкових перетворень диференціальну функцію L можна представити у вигляді

$$L = \bar{\lambda}[u] \bar{L}(x, \Omega_{r,k,p}), \quad (4.5)$$

де $\bar{\lambda}$ — ненульова диференціальна функція порядку не вище r , $\bar{L}$ — гладка функція від x і $\Omega_{r,k,p} = (\omega_\alpha, |\alpha| \leq r, \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_n \leq k)$, що суттєво залежить від деякого ω_α з $\alpha_{p+1} + \dots + \alpha_n = k$. Тут $\omega_\alpha = u_\alpha$ або, лише у випадку $p = 1$,

$$\omega_\alpha = D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n} (D_1 + uD_2 + \xi^3 D_3 + \cdots + \xi^n D_n)^{\alpha_1} u$$

для деяких фіксованих гладких функцій $\xi^i = \xi^i(x, u)$, $i = 3, \dots, n$. Значення k має бути мінімальним серед усіх можливих представлень вигляду (4.5) для диференціальної функції L . Тоді модуль M є строго метасингулярним копорядку k для рівняння $\bar{L}(x, \Omega_{r,k,p}) = 0$, яке еквівалентне $\mathcal{L}$.

Доведення. Використаємо позначення й означення з доведення теореми 4.2. Спочатку припускаємо, що диференціальне рівняння $\mathcal{L}: L[u] = 0$ максимального рангу й допускає слабо метасингулярний $(p+1)$ -вимірний модуль векторних полів копорядку сингулярності k . З точністю до точкових перетворень і замін базису модуля достатньо розглянути лише сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi = \langle Q_s - (\Phi_s/\Phi_u)Q^0, s = 1, \dots, p \rangle\}$ p -вимірних інволютивних підмодулів модуля M , параметризованих довільною функцією $\Phi = \Phi(x, u)$. Тут векторне поле Q^0 зведено до оператора зсуву ∂_u , а векторні поля Q^s мають вигляд $Q_s = \partial_s$ або, якщо $p = 1$ і модуль неінволютивний, $Q_1 = \partial_1 + u\partial_2 + \xi^3\partial_3 + \dots + \xi^n\partial_n$.

Для будь-якої точки $z^0 = (x^0, u^0_{(r)}) \in \mathcal{L} \subset J^r$ виберемо модулі з $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$, для яких $z^0 \in \mathcal{Q}^\Phi_{(r)}$. З цього випливає, що значення похідних функції Φ лише за змінними $x_1, \dots, x_n$ у точці (x^0, u^0) , які включають диференціювання за деякою змінною x_s , можна виразити через $u^0_{(r)}$ і значення похідних функції Φ у точці (x^0, u^0) , що містять диференціювання за змінною u . Останні значення є незв'язаними.

З лівої частини рівняння $\mathcal{L}$ отримаємо диференціальну функцію $\hat{L}^\Phi$, асоційовану з L на многовиді $\mathcal{Q}^\Phi_{(r)}$ через виключення $\mathcal{Q}^\Phi$ -головних похідних функції u . (Такі похідні містять диференціювання за змінною x_s .) Властивість, що для будь-якої функції Φ з $\Phi_u \neq 0$ модуль Q^Φ є слабо сингулярним щонайбільше копорядку k для рівняння $\mathcal{L}$, призводить до умови

$$\hat{L}^\Phi_{u_{(\hat{0}, \hat{\alpha})}}(z_0) = 0, \quad |\hat{\alpha}| = k + 1, \dots, r.$$

Як і при доведенні теореми 4.2, ітеративно використаємо цю умову, починаючи з найвищого значення r для $|\hat{\alpha}|$ і переписуючи похідні в нових координатах $(x_i, \omega_\alpha, |\alpha| \leq r)$ простору струменів J^r і в термінах функції L . У такий спосіб виведемо рівняння

$$L_{\omega_\alpha}(z^0) = 0, \quad |\hat{\alpha}| > k, \quad |\alpha| \leq r,$$

що виконуються для всіх $z^0 \in \mathcal{L}$. Застосовуючи лему Адамара до кожного

го з цих рівнянь і скориставшись лемою 4.1, отримаємо (4.5).

Навпаки, припустимо, що диференціальна функція L порядку r має вигляд (4.5), можливо, після виконання деякого точкового перетворення. Для довільної гладкої функції $\Phi = \Phi(x, u)$ з $\Phi_u \neq 0$ розглянемо інволютивний модуль Q^Φ , породжений або векторними полями

$$Q_s^\Phi = \partial_s - \frac{\Phi_s}{\Phi_u} \partial_u$$

у загальному випадку, або векторним полем

$$Q_1^\Phi = \partial_1 + u\partial_2 + \xi^3\partial_3 + \cdots + \xi^n\partial_n - \frac{\Phi_s}{\Phi_u}\partial_u$$

у спеціальному випадку з $p = 1$. Використовуючи $\bar{L}$ і Q^Φ , побудуємо диференціальну функцію $\tilde{L}^\Phi = \bar{L}(x, \tilde{\Omega}_{r,k,p})$, де

$$\tilde{\Omega}_{r,k,p} = (\omega_\alpha = D_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \cdots D_n^{\alpha_n} (Q_1^\Phi)^{\alpha_1} \cdots (Q_p^\Phi)^{\alpha_p} u, |\hat{\alpha}| \leq k, |\alpha| \leq r).$$

За побудовою порядок диференціальної функції $\tilde{L}^\Phi$ не вищий k для всіх допустимих значень параметр-функції Φ . Більш того, $\text{ord } \tilde{L}^\Phi = k$ для майже всіх значень цієї параметр-функції за виключенням тих, які задовольняють систему диференціальних рівнянь. Оскільки

$$L|_{Q_{(r)}^\Phi} = (\bar{\lambda}\bar{L})|_{Q_{(r)}^\Phi} = (\bar{\lambda}\tilde{L}^\Phi)|_{Q_{(r)}^\Phi},$$

де Φ пробігає множину гладких функцій змінних (x, u) з ненульовими похідними за змінною u , то сім'я $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ є сім'єю p -вимірних інволютивних модулів, слабо сингулярних копорядку k для диференціального рівняння $\mathcal{L}$ у нових координатах. Після повернення до старих координат внаслідок твердження 4.3 для $p \geq 2$ або твердження 4.4 для $p = 1$, модуль M векторних полів, породжений сім'єю $\mathfrak{M}$, є метасингулярним $(p+1)$ -вимірним модулем копорядку сингулярності k для диференціальної функції L/Λ . Отже, цей модуль є слабо метасингулярним $(p+1)$ -вимірним модулем копорядку сингулярності k для диференціального рівняння $\mathcal{L}$. $\square$

Зауваження 4.4. З теореми 4.3 випливає, що з точністю до домноження рівнянь на ненульові диференціальні функції немає потреби уточнювати, який тип метасингулярності диференціальних рівнянь — слабкий чи сильний — маємо на увазі.

4.5 Сингулярність модулів редукції та порядок редукованих рівнянь

Означення 4.10. Інволютивний модуль Q назовемо *сингулярним модулем редукції* диференціального рівняння $\mathcal{L}$, якщо Q є і модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$, і слабо сингулярним модулем рівняння $\mathcal{L}$.

Нагадаємо, що диференціальні рівняння є еквівалентними, якщо вони відрізняються на ненульовий множник, який є диференціальною функцією. Суттєвим порядком диференціального рівняння $\mathcal{L}$ є мінімальний порядок рівнянь у класі еквівалентності, якому належить рівняння $\mathcal{L}$.

Прямим узагальненням відповідних результатів для $n = 2$ роботи Кунзінгера та Поповича (2010) отримаємо такі твердження.

Теорема 4.4. *Нехай Q — p -вимірний модуль редукції ($0 < p \leq n$) рівняння $\mathcal{L}$. Тоді копорядок слабкої сингулярності модуля Q для рівняння $\mathcal{L}$ співпадає з суттєвим порядком відповідного редукованого диференціального рівняння.*

Доведення. Нехай $p < n$ і $k := \text{wsc}_\mathcal{L} Q > 0$. Тоді при будь-якому точковому перетворенні значення $\text{wsc}_\mathcal{L} Q$ не змінюється. За допомогою точкового перетворення локально можна домогтися ситуації, що в нових змінних модуль Q матиме базис ($Q_s = \partial_s$, $s = 1, \dots, p$). (Знову використовуємо одні й ті самі позначення для старих і нових змінних.) Тоді анзац, побудований за модулем Q , можна вибрати у вигляді $u = \varphi(\omega)$, де $\varphi = \varphi(\omega)$ — нова невідома функція, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{n-p})$ і $\omega_1 = x_{p+1}, \dots, \omega_{n-p} = x_n$ — інваріантні незалежні змінні. Систему $\mathcal{Q}_{(r)}$ утворюють

рівняння $u_\alpha = 0$, де мультиіндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ задовольняє умови

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_p > 0, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq r = \text{ord } L.$$

Оскільки $Q \in \mathcal{R}^p(\mathcal{L})$, то існують диференціальні функції $\check{\lambda} = \check{\lambda}[\varphi]$ і $\check{L} = \check{L}[\varphi]$ порядку не вище r такі, що $L|_{\mathcal{A}} = \check{\lambda}\check{L}$. Функція $\check{\lambda}$ ненульова й може залежати від змінних x_s як параметрів. Із точністю до еквівалентності, породженої ненульовими множниками, можна вважати, що функція $\check{L}$ має мінімальний порядок $\check{r}$. Тоді редуковане рівняння $\check{\mathcal{L}}$: $\check{L} = 0$ має суттєвий порядок $\check{r}$.

Оскільки $\text{wsc}_{\mathcal{L}} Q = k$, то існують диференціальна функція $\tilde{L} = \tilde{L}[u]$ точно порядку k і ненульова диференціальна функція $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}[u]$ порядку не вище r , які залежать щонайменше від x і похідних від u за змінними $x_{p+1}, \dots, x_n$, такі, що $(L - \tilde{\lambda}\tilde{L})|_{\mathcal{Q}(r)} = 0$.

Припустимо спочатку, що $\check{r}$ менше за k . У цьому випадку можна використати $\check{\lambda}_{\text{new}} = \check{\lambda}|_{u \rightsquigarrow \varphi}$ і $\check{L}_{\text{new}} = \check{L}|_{u \rightsquigarrow \varphi}$ в означенні слабкої сингулярності, що призводить до суперечності $\text{wsc}_{\mathcal{L}} Q \leq \text{ord } \check{L}_{\text{new}} = \check{r} < k$. Тому $\check{r} \geq k$. (Тут “ $u \rightsquigarrow \varphi$ ” означає, що похідні $\partial_{p+1}^{\alpha_{p+1}} \dots \partial_n^{\alpha_n} u$ потрібно підставити замість похідних $\partial_{\omega_{p+1}}^{\alpha_{p+1}} \dots \partial_{\omega_n}^{\alpha_n} \varphi$.)

З іншого боку, якщо $\check{r} > k$, то $\check{\lambda}\check{L} = (\tilde{\lambda}\tilde{L})|_{\mathcal{A}}$, де змінні x_s відіграють роль параметрів. Фіксуємо значення x_s^0 змінних x_s для кожного s , отримаємо представлення

$$\check{L} = \frac{\check{\lambda}|_{\mathcal{A}}}{\check{\lambda}} \bigg|_{x_s=x_s^0} \tilde{L} \bigg|_{\mathcal{A}, x_s=x_s^0}.$$

Але оскільки $\text{ord } \tilde{L}|_{\mathcal{A}, x_s=x_s^0} \leq k < \check{r}$, то це представлення суперечить умові, що $\check{r}$ — суттєвий порядок редукованого рівняння $\check{\mathcal{L}}$.

Отже, $\check{r} = k > 0$. Тоді значення $\check{r}$ не залежить від вибору анзаца серед тих, що можна побудувати за модулем Q . Обернена заміна змінних зберігає зазначену властивість.

Розглянемо тепер випадок $k := \text{wsc}_{\mathcal{L}} Q \leq 0$. Загалом значення $k = -\infty$ і $k = 0$ не є інваріантними відносно точкових перетворень,

оскільки їх можна відобразити одне в інше такими перетвореннями. Це означає, що суттєвий порядок відповідного редукованого рівняння може залежати від вибору анзаца серед множини анзаців, побудованих за модулем Q . Тому спрямлення векторних полів Q_s і вибір анзаца потрібно узгодити зі структурою обмеження диференціальної функції L на многовид $\mathcal{Q}_{(r)}$, щоб забезпечити коректність процедури редукції. Внаслідок умови $k \leq 0$ існують гладка функція $\tilde{L} = \tilde{L}(x, u)$ з $\text{ord } \tilde{L} = k$ і ненульова диференціальна функція $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}[u]$ порядку не вище r , такі, що $L = \tilde{\lambda}\tilde{L}$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$. З леми 4.2 випливає, що Q є модулем редукції рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$: $\tilde{L} = 0$, а тому $Q_s\tilde{L} = \Lambda^s\tilde{L}$ для деякої гладкої функції $\Lambda^s = \Lambda^s(x, u)$. З леми 4.1 отримаємо представлення $\tilde{L} = \check{\lambda}\check{L}$, де $\check{\lambda}$ — ненульова гладка функція змінних (x, u) , а гладка функція $\check{L} = \check{L}(x, u)$ задовольняє систему $Q_s\check{L} = 0$. Отже, функція $\check{L}$ є інваріантом модуля Q і тому її можна представити як функцію базисних інваріантів $I^0, \dots, I^{n-p}$, $\check{L} = \zeta(I^0, \dots, I^{n-p})$, де ζ — деяка гладка функція своїх аргументів. Зауважимо, що $k \leq \text{ord } \check{L} \leq 0$, оскільки $L = \check{\lambda}\check{\lambda}\check{L}$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$, а $\check{\lambda}\check{\lambda}$ — ненульова диференціальна функція від u .

Якщо $k = 0$, то $\text{ord } \check{L} = 0$, а тому функція ζ суттєво залежить щонайменше від одного базисного інваріанта. З точністю до перестановки базисних інваріантів можна вважати, що цим інваріантом є I^0 . Тоді анзац (4.1) редукує $\mathcal{L}$ до рівняння $\zeta(\varphi, \omega) = 0$, а порядок редукованого рівняння як рівняння на φ дорівнює 0.

Нехай тепер $k = -\infty$. З умови на ранг для модуля Q випливає, що існує елемент базису $(I^0, \dots, I^{n-p})$ Q -інваріантів, який має ненульову похідну за змінною u . З точністю до перестановки базису можна вважати, що цим інваріантом є I^0 . Виконаємо заміну змінних (x, u) : $y_0 = I^0(x, u)$, $y_\sigma = I^\sigma(x, u)$, $z_s = J^s(x, u)$, де, як і в § 4.1, кожна функція $J^s = J^s(x, u)$ є розв'язком системи $Q_{s'}J^s = \delta_{ss'}$. Тут $\delta_{ss'}$ позначає символ Кронекера. Нехай $y = (y_0, \dots, y_{n-p})$ і $z = (z_1, \dots, z_p)$. Використовуючи представлення

$\tilde{L} = \check{\lambda}(y, z)\zeta(y)$, рівність $\tilde{L}_u = 0$ можна записати як

$$\zeta_{y_0} + \frac{I_u^\sigma}{I_u^0}\zeta_{y_\sigma} = -\frac{\lambda_u}{\lambda I_u^0}\zeta,$$

де коефіцієнти ζ_{y_σ} і ζ — гладкі функції, які потрібно виразити у координатах (y, z) . Зафіксуємо значення $z = z^0$ у цих коефіцієнтах й модифікуємо координати y з метою спрямлення векторного поля $\partial_{y_0} + (I_u^\sigma/I_u^0)|_{z=z^0}\partial_{y_\sigma}$ до ∂_{y_0} . Відповідним чином модифікуємо і функціональний базис Q -інваріантів. Із леми 4.1 випливає представлення $\zeta = \check{\lambda}\check{\zeta}$, де $\check{\lambda}$ — ненульова гладка функція від y , а гладка функція $\check{\zeta}$ від y не залежить від y_0 . Тоді анзац (4.1) редукує рівняння $\mathcal{L}$ до рівняння $\check{\zeta}(\omega) = 0$, що має порядок $-\infty$ як диференціальне рівняння відносно φ . $\square$

Доведення для випадку $p = n$ також наведено у § 4.6 перед твердженням 4.9. Особливістю цього випадку порівняно з випадком $\text{wscoc } Q \leq 0$, де $p < n$, є відсутність значної свободи у виборі інваріантної залежної змінної, оскільки з огляду на розмірність n модуля Q є лише один функціонально незалежний Q -інваріант.

Неультрасингулярні p -вимірні модулі редукції ($0 < p \leq n$) з порядком слабкої сингулярності $-\infty$ призводять до несумісних редукованих рівнянь.

Властивості ультрасингулярних модулів векторних полів як модулів редукції є очевидними. Вибір анзаців для них не потрібен.

Твердження 4.7. 1) *Будь-який p -вимірний модуль Q векторних полів ($0 < p \leq n$), ультрасингулярний для диференціального рівняння $\mathcal{L}$, є модулем редукції цього рівняння. Анзац, побудований за модулем Q , редукує рівняння $\mathcal{L}$ до тотожності. Тому сім'ю Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ параметризовано довільною гладкою функцією $(n - p)$ Q -інваріантних змінних.*

2) *Якщо Q — p -вимірний інволютивний модуль векторних полів, а сім'ю Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ параметризовано довіль-*

ною гладкою функцією $(n - p)$ Q -інваріантних змінних, то модуль Q є ультрасингулярним модулем для рівняння $\mathcal{L}$.

Для заданого диференціального рівняння з частинними похідними $\mathcal{L}$ розглянемо модуль редукції Q розмірності $n - 1$, тобто $p = n - 1$. Такий модуль з $\text{wscoc}_{\mathcal{L}} Q > 0$ редукує рівняння $\mathcal{L}$ до звичайного диференціального рівняння, суттєвий порядок якого внаслідок теореми 4.4 дорівнює $\text{wscoc}_{\mathcal{L}} Q$. Якщо $\text{wscoc}_{\mathcal{L}} Q = 0$, редуковане рівняння є алгебраїчним. Це дозволяє пов'язати $\text{wscoc}_{\mathcal{L}} Q$ з максимальним числом параметрів у сім'ях Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Виключним є випадок $\text{wscoc}_{\mathcal{L}} Q = -\infty$, коли або модуль Q редукує рівняння $\mathcal{L}$ до тотожності, якщо він ультрасингулярний для $\mathcal{L}$, або відповідне редуковане рівняння несуттєвим.

Твердження 4.8. *Нехай задано $(n-1)$ -вимірний інволютивний модуль Q векторних полів і диференціальна функція $L[u]$, причому рівняння $\hat{L} = 0$ з диференціальною функцією $\hat{L} = \hat{L}[u]$ найнижчого порядку, асоційованою з $L[u]$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ ($r = \text{ord } L$) з точністю до ненульового множника, можна розв'язати відносно похідної найвищого порядку від u , яку містить це рівняння. Тоді з будь-яких двох таких властивостей випливає третя:*

- 1) Q — модуль редукції рівняння $\mathcal{L}$: $L = 0$;
- 2) копорядок слабкої сингулярності модуля Q для рівняння $\mathcal{L}$ дорівнює l , де $0 \leq l \leq r$;
- 3) рівняння $\mathcal{L}$ допускає l -параметричну сім'ю Q -інваріантних розв'язків, причому будь-який Q -інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ належить цій сім'ї.

Доведення. Якщо Q — $(n-1)$ -вимірний модуль редукції рівняння $\mathcal{L}$ з $\text{wscoc}_{\mathcal{L}} Q \geq 0$, то копорядок слабкої сингулярності модуля Q для рівняння $\mathcal{L}$ дорівнює максимальній кількості $N_{\mathcal{L},Q}$ суттєвих неперервних параметрів у сім'ї Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Дійсно, копорядок слабкої сингулярності модуля Q для рівняння $\mathcal{L}$ співпадає з суттєвим

порядком $\check{r}$ редукованого звичайного диференціального рівняння $\check{\mathcal{L}}$, асоційованого з модулем Q : $\check{r} = \text{wsc}_\mathcal{L} Q$. Максимальна кількість суттєвих неперервних параметрів у розв'язках рівняння $\check{\mathcal{L}}$ також дорівнює $\check{r}$. Підстановка цих розв'язків у відповідний анзац дає параметричні сім'ї Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, причому всі Q -інваріантні розв'язки рівняння $\mathcal{L}$ можна отримати цим шляхом. Отже, $N_{\mathcal{L},Q} = \check{r}$.

Внаслідок умов твердження щодо $\hat{L}$, рівняння $\check{\mathcal{L}}$ можна записати в нормальній формі, а тому воно має $\check{r}$ -параметричний загальний розв'язок, який включає всі розв'язки рівняння $\check{\mathcal{L}}$. Після підстановки у відповідний анзац цей розв'язок дає $\check{r}$ -параметричну сім'ю Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Інших Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ немає. Отже, умови 2 і 3 еквівалентні, якщо виконується умова 1.

Для будь-якого $(n-1)$ -вимірної інволютивного модуля Q векторних полів маємо $N_{\mathcal{L},Q} \leq k$, де через k позначено $\text{wsc}_\mathcal{L} Q$. Доведемо, що Q є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$, якщо $N_{\mathcal{L},Q} = k$.

Точкові перетворення змінних зберігають заявлену властивість при $k > 0$, а тому можна використати змінні та позначення з доведення теореми 4.4. Для анзаца $\mathcal{A}$: $u = \varphi(\omega)$, побудованого за модулем Q у нових змінних, розглянемо диференціальну функцію $\check{L}[\varphi] = \hat{L}|_{\mathcal{A}}$, яка залежить від змінних x_s як параметрів, причому $\text{ord } \check{L} = k$. З огляду на припущення щодо $\hat{L}$, рівняння $\check{L} = 0$ можна розв'язати відносно похідної найвищого порядку $\varphi^{(k)}$: $\varphi^{(k)} = R[\varphi]$, де $\text{ord } R < k$. Якщо $R_{x_s} \neq 0$ для деякого s , то, розщеплюючи за x_s у розв'язаному рівнянні, отримаємо звичайне диференціальне рівняння $\tilde{R}[\varphi] = 0$ порядку меншого за k . Будь-який Q -інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ має вигляд $u = \varphi(\omega)$, де функція φ задовольняє, зокрема, і рівняння $\tilde{R}[\varphi] = 0$. Це суперечить умові $N_{\mathcal{L},Q} = k$. Отже, $R_{x_s} = 0$, тобто рівняння $\varphi^{(k)} = R[\varphi]$ — редуковане рівняння, отримане з рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою анзаца $u = \varphi(\omega)$, побудованого за модулем Q , тобто Q є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$.

Умова $k = 0$ означає, що $\hat{L}$ є функцією від (x, u) . Внаслідок припу-

щення щодо $\hat{L}$ рівняння $\hat{\mathcal{L}}$: $\hat{L} = 0$ можна розв'язати відносно u . Це дає функцію $u = f(x)$, яка є єдиним можливим розв'язком об'єднаної системи $\hat{\mathcal{L}}$ і $\mathcal{Q}$. Водночас, згідно умови 3 рівняння $\mathcal{L}$ (або, рівносильно, $\hat{\mathcal{L}}$), допускає Q -інваріантні розв'язки. Отже, функція $u = f(x)$ є єдиним розв'язком рівняння $\hat{L} = 0$, і цей розв'язок є Q -інваріантним. Саме тому з точністю до ненульового множника, який залежить щонайбільше від (x, u) , рівняння $\hat{L} = 0$ еквівалентне рівнянню, яке можна записати в термінах Q -інваріантів, а це означає, що Q є модулем редукції рівняння $\hat{\mathcal{L}}$, і — згідно леми 4.2 — рівняння $\mathcal{L}$. $\square$

Точне співвідношення між редукованістю рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою модуля Q і формальною сумісністю об'єднаної системи $\mathcal{L}$ і $\mathcal{Q}$ насправді не таке просте, як можна було б сподіватися. Вибір системи, формальну сумісність якої потрібно перевірити, залежить від $\text{wsoc}_{\mathcal{L}} Q$ і від того, яке означення формальної сумісності використовуємо. Розглянемо, наприклад, означення, наведене в роботі Сейлера (2010)ю Нехай $\mathcal{E}_\rho$ — система κ диференціальних рівнянь $E^1[u] = 0, \dots, E^\kappa[u] = 0$, яка містить похідні від u до порядку ρ включно. Систему $\mathcal{E}_\rho$ можна інтерпретувати як систему алгебраїчних рівнянь у просторі струменів J^ρ , і вона визначає многовид у J^ρ , який також позначаємо як $\mathcal{E}_\rho$. Продовження $\mathcal{E}_{\rho+\varsigma}$ порядку ς , $\varsigma \in \mathbb{N}$, системи $\mathcal{E}_\rho$ — це система в $J^{\rho+\varsigma}$, утворена рівняннями $D^\alpha E^\nu[u] = 0$, $\nu = 1, \dots, \kappa$, $|\alpha| \leq \varsigma$. Проекцію відповідного многовиду на $J^{\rho+\varsigma-\varsigma'}$, де $\varsigma' \in \mathbb{N}$ і $\varsigma' \leq \varsigma$, позначаємо як $\mathcal{E}_{\rho+\varsigma-\varsigma'}^{(\varsigma')}$. Систему $\mathcal{E}_\rho$ назовемо *формально інтегрованою* (або *формально сумісною*), якщо $\mathcal{E}_{\rho+\varsigma}^{(1)} = \mathcal{E}_{\rho+\varsigma}$ для будь-якого $\varsigma \in \mathbb{N}$.

Є дві перешкоди для узгодження цього означення формальної сумісності й означення модуля редукції. Перша перешкода пов'язана (у загальній ситуації) з різними порядками рівняння $\mathcal{L}$: $L[u] = 0$ і характеристичної системи $\mathcal{Q}$: $Q_s[u] = 0$. Її можна подолати приєднанням диференціальних наслідків характеристичної системи $\mathcal{Q}$ до об'єднаної системи $\mathcal{L}$ і $\mathcal{Q}$ перед тим, як перевіряти її сумісність. Друга перешкода

пов'язана з пониженням порядку рівняння $L[u]$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$, якщо Q є сингулярним модулем редукції для рівняння $L[u] = 0$. Тому замість рівняння $\mathcal{L}$ потрібно використовувати рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$: $\tilde{L}[u] = 0$, де $\tilde{L}$ — диференціальна функція така, що $L = \tilde{\lambda}\tilde{L}$ на $\mathcal{Q}_{(r)}$ для деякої ненульової диференціальної функції λ від u , причому $\text{ord } \tilde{L} = \text{wsc}_{\mathcal{L}} Q$. Модуль Q редукує диференціальне рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли

- система $\tilde{L}[u] = 0$, $D^\alpha Q_s[u] = 0$, $|\alpha| < \text{wsc}_{\mathcal{L}} Q$, або
- система $\tilde{L}[u] = 0$, $D_\iota \tilde{L}[u] = 0$, $Q_s[u] = 0$

відповідно у випадку $\text{wsc}_{\mathcal{L}} Q > 0$ або $\text{wsc}_{\mathcal{L}} Q = 0$ є формально сумісною. Тут індекс ι пробігає підмножину $\{\iota_1, \dots, \iota_{n-p}\}$ множини $\{1, \dots, n\}$ таку, що модуль $\langle Q_1, \dots, Q_p, \partial_{\iota_1}, \dots, \partial_{\iota_{n-p}} \rangle$ задовольняє умову на ранг.

Випадок $\text{wsc}_{\mathcal{L}} Q = -\infty$, де $\tilde{L}$ не дорівнює нулю тотожно, є не релевантним у рамках формальної сумісності, оскільки у цьому випадку рівняння $\tilde{\mathcal{L}}$ саме по собі несумісне як рівняння відносно u . Якщо Q є ультрасингулярним модулем для рівняння $\mathcal{L}$, тобто $\tilde{L} \equiv 0$, то “формальна сумісність” об'єднаної системи $\mathcal{L}$ і Q є тривіально еквівалентною інволютивності модуля Q .

4.6 Модулі редукції максимальної розмірності

Як зазначено в § 4.2, випадок, коли розмірність модулів векторних полів співпадає з кількістю незалежних змінних ($p = n$), є особливим для модулів, сингулярних для диференціальних функцій. Цей випадок також є особливим для редукції диференціальних рівнянь. На відміну від модулів редукції менших розмірностей, n -вимірні модулі редукції будь-якого диференціального рівняння $\mathcal{L}$ з n незалежними змінними редукують це рівняння щонайбільше до алгебраїчних рівнянь, а не до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Більш того, лише в цьому випадку регулярні та сингулярні модулі редукції можна вивчити в рамках єдиного підходу.

Нехай Q — інволютивний модуль розмірності $p = n$, який задовольняє умову на ранг. Тоді можна вибрати його базис, утворений векторними полями $Q_s = \partial_s + \eta^s(x, u)\partial_u$. Оскільки модуль Q інволютивний, то базисні елементи Q_s комутують, а тому коефіцієнти $\eta^s = \eta^s(x, u)$ задовольняють систему рівнянь

$$\eta_{s'}^s + \eta^{s'}\eta_u^s = \eta_s^{s'} + \eta^s\eta_u^{s'}. \quad (4.6)$$

Згідно теореми Фробеніуса, система $Q_s\Phi = \Phi_s + \eta^s\Phi_u = 0$ відносно функції $\Phi = \Phi(x, u)$ має єдиний функціонально незалежний розв'язок, що не є сталою. Іншими словами, коефіцієнти η^s можна представити у вигляді $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, де $\Phi = \Phi(x, u)$ — деяка гладка функція з $\Phi_u \neq 0$. Неявний анзац, побудований для u за допомогою модуля Q , має вигляд $\Phi(x, u) = \varphi$, де φ — нова невідома функція. Вона є нуль-арною, оскільки розмірність p модуля Q дорівнює кількості n незалежних змінних x .

Припустимо, що Q є модулем редукції диференціального рівняння $\mathcal{L}: L[u] = 0$ порядку r . На многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ усі похідні від функції u за змінними x від 1-го до r -го порядку включно можна виразити через змінні (x, u) :

$$u_\alpha = h^\alpha(x, u) := (\partial_1 + \eta^1\partial_u)^{\alpha_1} \cdots (\partial_n + \eta^n\partial_u)^{\alpha_n} u, \quad 1 \leq |\alpha| \leq r.$$

Оскільки векторні поля Q_s комутують, то таке представлення для похідних u_α добре визначене, оскільки не залежить від порядку операторів у правих частинах виразів. Використовуючи ці вирази для виключення відповідних похідних u_α в L , отримуємо диференціальну функцію $\hat{L} = \hat{L}[u]$ недодатного порядку, тобто функцію від (x, u) . Варіюючи η^s , отриману функцію можна проінтерпретувати як диференціальну функцію незалежних змінних x, u та залежних змінних η^s . Таким чином, той факт, що Q є модулем редукції для рівняння $\mathcal{L}$, внаслідок леми 4.2 еквівалентний умові $Q_s\hat{L} = \Lambda^s\hat{L}$ для деяких гладких функцій $\Lambda^s = \Lambda^s(x, u)$, яка виконується на відповідній відкритій підмножині простору струменів нульового порядку. Ця умова разом з рівняннями (4.6) утворює повну

систему визначальних рівнянь для коефіцієнтів η^s . Внаслідок представлення $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ для розв'язків рівнянь (4.6), її можна проінтерпретувати як умову на функцію Φ , де $L^\Phi = \hat{L}|_{-\Phi_s/\Phi_u \sim \eta^s}$ розглядаємо як диференціальну функцію незалежних змінних x, u та залежної змінної Φ .

Для зручного використання умови $Q_s \hat{L} = \Lambda^s \hat{L}$ у випадку, коли рівняння $\hat{L} = 0$ є максимального рангу, його можна розв'язати відносно однієї змінної (або відносно однієї з незалежних змінних, або відносно залежної змінної u) і виключити цю змінну з рівняння $Q_s \hat{L} = 0$ за допомогою отриманого виразу. Оскільки функції $\hat{L}$ і η^s (або відповідно Φ) залежать від тих самих аргументів, ця процедура не призводить до диференціального рівняння.

Застосуємо інший, більш зручніший підхід. Згідно леми 4.1, з умови $Q_s \hat{L} = \Lambda^s \hat{L}$ випливає, що існують ненульова гладка функція $\lambda = \lambda(x, u)$ і гладка функція $\check{L} = \check{L}(x, u)$ такі, що $\hat{L} = \lambda \check{L}$ і $Q_s \check{L} = 0$. Остання умова означає, що $\check{L} = \zeta(\Phi)$ для деякої гладкої функції ζ одного аргументу. Тоді рівняння $\hat{L} = \lambda \check{L}$ у термінах функції Φ набуває вигляду $L^\Phi = \tilde{\lambda} \zeta(\Phi)$.

Насправді це рівняння співпадає з умовою редукції рівняння $\mathcal{L}$ за допомогою анзаца $\Phi(x, u) = \varphi$, побудованого з модулем Q . Дійсно, якщо функцію $u = u(x)$ явно визначено цим анзацом, то похідні від u (ненульового порядку) знаходимо з диференціальних наслідків рівнянь $u_s = -\Phi_s/\Phi_u$. Тому підстановка анзаца в рівняння $\mathcal{L}$ призводить до рівняння $\hat{L}|_{\Phi(x,u)=\varphi} = 0$, яке внаслідок умови редукції є еквівалентним алгебраїчному рівнянню $\zeta(\varphi) = 0$ відносно сталої φ .

Очевидно, що суттєвий порядок редукованого рівняння співпадає з $\text{wscoc}_\mathcal{L} Q \in \{-\infty, 0\}$. Модуль Q є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли функція ζ тотожно дорівнює нулю. Якщо $\text{wscoc}_\mathcal{L} Q = -\infty$ і модуль Q не є ультрасингулярним, то відповідне редуковане алгебраїчне рівняння не є сумісним відносно φ .

Підсумовуючи викладені результати, отримаємо таке твердження.

Твердження 4.9. *n -вимірний модуль Q є модулем редукції диференці-*

ального рівняння $\mathcal{L}: L[u] = 0$ з n незалежними змінними x тоді й лише тоді, коли цей модуль породжено векторними полями $\partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u$, $s = 1, \dots, n$, де функція $\Phi = \Phi(x, u)$ задовольняє рівняння $L^\Phi = \tilde{\lambda}\zeta(\Phi)$ для деякої гладкої функції ζ одного аргументу і деякої ненульової функції $\tilde{\lambda}$ змінних (x, u) , а диференціальну функцію $L^\Phi = L^\Phi[\Phi]$ отримано з $L[u]$ виключенням похідних від u , використовуючи диференціальні наслідки рівнянь $u_s = -\Phi_s/\Phi_u$. При цьому анзац $\Phi(x, u) = \varphi$ редукує рівняння $\mathcal{L}$ до алгебраїчного рівняння $\zeta(\varphi) = 0$ відносно сталої φ і суттєвий порядок редукованого рівняння співпадає з $\text{wscoc}_\mathcal{L} Q \in \{-\infty, 0\}$.

Теорема 4.5. Для будь-якого диференціального рівняння $\mathcal{L}$ однієї невідомої функції від n незалежних змінних з точністю до еквівалентності сімей розв'язків існує взаємно однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями його розв'язків і його n -вимірними ультрасингулярними модулями редукції. А саме, кожен модуль вказаного типу відповідає сім'ї розв'язків, інваріантних відносно цього модуля. Проблеми побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ і вичерпного опису його n -вимірних ультрасингулярних модулів редукції повністю еквівалентні.

Доведення. Нехай Q — n -вимірний ультрасингулярний модуль редукції рівняння $\mathcal{L}$. Із твердження 4.9 випливає, що анзац $\Phi(x, u) = \varphi$, побудований за допомогою модуля Q , редукує рівняння $\mathcal{L}$ до тотожності. Іншими словами, для кожного значення сталої φ цей анзац неявним чином визначає розв'язок рівняння $\mathcal{L}$.

Навпаки, нехай $\mathcal{F} = \{u = f(x, \varkappa)\}$ — сім'я розв'язків рівняння $\mathcal{L}$, параметризована одним параметром $\varkappa$. Оскільки цей параметр суттєвий, а тому похідна $f_\varkappa$ є ненульовою, то параметр $\varkappa$ можна виразити із рівності $u = f(x, \varkappa)$. Звідки отримаємо, що $\varkappa = \Phi(x, u)$ для деякої функції $\Phi = \Phi(x, u)$ з $\Phi_u \neq 0$. Розглянемо модуль $Q = \langle Q_1, \dots, Q_n \rangle$, де $Q_s = \partial_s + \eta^s \partial_u$, причому коефіцієнти $\eta^s = \eta^s(x, u)$ визначено як $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$. Це n -вимірний інволютивний модуль і $Q[u] = 0$ для будь-

якого елемента множини $\mathcal{F}$. Анзац $u = f(x, \varphi)$, побудований за допомогою модуля Q , де φ — нова невідома (нуль-арна) функція, редукує рівняння $\mathcal{L}$ до тотожності. Це означає, що Q є ультрасингулярним модулем для рівняння $\mathcal{L}$.

Однопараметричні сім'ї $\mathcal{F} = \{u = f(x, \varkappa)\}$ і $\tilde{\mathcal{F}} = \{u = \tilde{f}(x, \tilde{\varkappa})\}$ назвемо еквівалентними, якщо вони складаються з тих самих функцій і відрізняються лише параметризаціями, тобто, якщо існує функція $\zeta = \zeta(\varkappa)$ така, що $\zeta_{\varkappa} \neq 0$ і $\tilde{f}(x, \zeta(\varkappa)) = f(x, \varkappa)$. Це справедливо тоді й лише тоді, коли функції $\Phi = \Phi(x, u)$ і $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(x, u)$, асоційовані відповідно з сім'ями $\mathcal{F}$ і $\tilde{\mathcal{F}}$, є функціонально залежними. Більш точно, $\tilde{\Phi} = \zeta(\Phi)$. Оскільки $\Phi_u \tilde{\Phi}_u \neq 0$, то функціональна залежність Φ і $\tilde{\Phi}$ еквівалентна співвідношенню $\Phi_s/\Phi_u = \tilde{\Phi}_s/\tilde{\Phi}_u$. Отже, еквівалентні однопараметричні сім'ї розв'язків відповідають одному й тому самому ультрасингулярному модулю редукції Q рівняння $\mathcal{L}$ і, навпаки, будь-які однопараметричні сім'ї Q -інваріантних розв'язків є еквівалентними. $\square$

Наслідок 4.4. Систему визначальних рівнянь на коефіцієнти ультрасингулярних n -вимірних модулів редукції рівняння $\mathcal{L}$, яку утворюють рівняння (4.6) і рівняння $\tilde{L} = 0$, за допомогою композиції нелокальної підстановки $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, де Φ — функція змінних (x, u) , та перетворення годографа

$$\text{нові незалежні змінні:} \quad \tilde{x}_i = x_i, \quad \varkappa = \Phi,$$

$$\text{нова залежна змінна:} \quad \tilde{u} = u$$

можна звести до початкового рівняння $\mathcal{L}$ від функції $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \varkappa)$, де $\varkappa$ відіграє роль параметра.

Зауважимо, що редукцію диференціальних рівнянь до алгебраїчних із використанням некласичних симетрій розглянуто в роботі Грюндланда та Тафеля (1995), де отримано твердження, аналогічне теоремі 4.5. Поняття сингулярних операторів редукції дає можливість сформулювати теорему 4.5 більш точно.

4.7 Мотивуючий приклад: еволюційні рівняння

Вивчимо n -вимірні сингулярні модулі редукції $(1+n)$ -вимірних еволюційних рівнянь загального вигляду

$$u_t = H(t, x, u_{(r,x)}) \quad (4.7)$$

для невідомої функції u , яка залежить від змінних $t = x_0$ і $x = (x_1, \dots, x_n)$. (Для зручності вважаємо, що кількість незалежних змінних становить $n + 1$ замість n , і додатково, виокремлюємо змінну x_0 .) Тут через $u_{(r,x)}$ позначено множину всіх похідних від функції u за просторовими змінними x порядку не вище r , включаючи u як похідну нульового порядку. Також $u_t = \partial u / \partial t$ і $r = \max\{|\alpha| \mid H_{u_\alpha} \neq 0\} \geq 2$, тобто вважаємо, що порядок розглядуваних рівнянь не менший двох.

Фіксуємо довільне рівняння $\mathcal{L}$ вигляду (4.7). n -вимірний модуль редукції рівняння $\mathcal{L}$ редукує рівняння $\mathcal{L}$ до звичайного диференціального рівняння. Такий модуль Q породжено n векторними полями вигляду

$$Q_s = \tau^s(t, x, u) \partial_t + \xi^{si}(t, x, u) \partial_i + \eta^s(t, x, u) \partial_u,$$

причому $\text{rank}(\tau^s, \xi^{si}) = n$. (Використовуємо ті самі домовленості щодо індексів, як і в усьому розділі, тобто індекси i, j змінюються від 1 до n , а індекс s змінюється від 1 до p . Зауважимо, що тут p співпадає з n .)

Систематичне вивчення сингулярних модулів редукції еволюційних рівнянь розпочато у роботі Фущича зі співавторами (1992), де показано, що система визначальних рівнянь для сингулярних модулів редукції $(1+1)$ -вимірного лінійного рівняння теплопровідності містить єдине $(1+2)$ -вимірне еволюційне рівняння, яке можна звести нелокальним перетворенням до початкового рівняння з додатковою неявною незалежною змінною в якості параметра. Пізніше це “no-go” твердження узагальнено на ширший клас $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь, а також на загальні $(1+1)$ -вимірні еволюційні і багатовимірні еволюційні рівняння. Водночас, обчислення всіх одновимірних модулів редукції для $(1+n)$ -вимірного

рівняння теплопровідності при $n > 2$ у явній формі показало, що існування таких “no-go” випадків не пояснюється лише нульовим значенням t -компонент векторних полів відповідних модулів редукції. Обґрунтуємо ці результати в рамках теорії сингулярних модулів редукції.

На відміну від особливого випадку $n = 1$, для довільних значень n можна повністю описати сингулярні n -вимірні модулі рівняння $\mathcal{L}$ лише після уточнення вигляду його правої частини H . Водночас, через пряме узагальнення результатів для випадку $n = 1$ можна легко знайти сім’ю таких модулів для будь-якого рівняння вигляду (4.7).

Твердження 4.10. *Якщо t -компонента будь-якого векторного поля з n -вимірного інволютивного модуля Q дорівнює нулю, то Q є сингулярним модулем для диференціальної функції $L = u_t - H(t, x, u_{(r,x)})$. Копорядок сингулярності модуля Q дорівнює 1, $\text{scor}_\mathcal{L} Q = 1$.*

Доведення. Нехай $\tau^s = 0$. Тоді $\text{rank}(\xi^{si}) = n$, і з точністю до заміни базису модуля Q можна покласти

$$Q_s = \partial_s + \eta^s(t, x, u)\partial_u. \quad (4.8)$$

Усі похідні від u за x від порядку 1 до порядку r можна виразити на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ через t, x, u :

$$u_\alpha = h^\alpha(t, x, u) := (\partial_1 + \eta^1\partial_u)^{\alpha_1} \cdots (\partial_n + \eta^n\partial_u)^{\alpha_n} u.$$

Тут і надалі $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, $1 \leq |\alpha| \leq r$ і $\alpha_0 = 0$. Внаслідок інволютивності модуля Q векторні поля Q_s комутують. (Більш того, $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ для деякої гладкої функції $\Phi = \Phi(x, u)$ з $\Phi_u \neq 0$.) Тому наведене вище представлення для u_α добре визначене, оскільки воно не залежить від послідовності операторів у правій частині виразу. Використовуючи ці вирази для виключення відповідних похідних u_α з рівняння L , отримаємо диференціальну функцію $\tilde{L} = u_t - \tilde{H}(t, x, u)$, де $\tilde{H} = \tilde{H}(t, x, u)$ — функція, побудована з H за допомогою підстановки h^α замість u_α . Порядок диференціальної функції $\tilde{L}$ дорівнює 1. Отже, модуль Q є сингулярним

для диференціальної функції L , причому його копорядок сингулярності дорівнює 1. $\square$

Наслідок 4.5. *Модуль $M = \langle \partial_1, \dots, \partial_n, \partial_u \rangle$ є сильно метасингулярним $(n+1)$ -вимірним модулем копорядку сингулярності 1 для будь-якого $(1+n)$ -вимірного еволюційного рівняння.*

Доведення. n -вимірний інволютивний підмодуль Q модуля M задовольняє умову на ранг тоді й лише тоді, коли він породжений векторними полями $\partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u$ для деякої гладкої функції $\Phi = \Phi(x, u)$. З твердження 4.10 випливає, що модуль Q є сильно сингулярним копорядку 1 для будь-якого еволюційного рівняння вигляду (4.7). Варіюючи параметр-функцію Φ , отримаємо сім'ю таких підмодулів, параметризовану довільною функцією всіх незалежних і залежних змінних. $\square$

Векторні поля ∂_s і ∂_u , що породжують метасингулярний модуль M , комутують і диференціальна функція L включає диференціювання за t лише першого порядку, а саме, у вигляді похідної u_t). Це повністю узгоджено з теоремою 4.2.

Позначимо через $\mathcal{R}_0^n(\mathcal{L})$ множину n -вимірних модулів редукції рівняння $\mathcal{L}$, що є підмодулями модуля M . Розглянемо модуль Q з $\mathcal{R}_0^n(\mathcal{L})$ і виберемо його базис з векторних полів Q^s вигляду (4.8). Систему $\text{DE}_0(\mathcal{L})$ визначальних рівнянь на коефіцієнти η^s природним чином можна розбити на дві підсистеми. Першу підсистему

$$\eta_{s'}^s + \eta^{s'} \eta_u^s = \eta_s^{s'} + \eta^s \eta_u^{s'} \quad (4.9)$$

отримаємо з умови, що модуль Q інволютивний і тому базисні елементи Q^s комутують. Другу підсистему

$$\eta_t^s + \tilde{H} \eta_u^s = \tilde{H}_s + \eta^s \tilde{H}_u \quad (4.10)$$

отримаємо як результат застосування критерію умовної інваріантності до рівняння $\mathcal{L}$ і модуля Q . Функцію $\tilde{H} = \tilde{H}(t, x, u)$ визначено в доведенні твердження 4.10. Вона співпадає з H на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$. Загальна

кількість рівнянь об'єднаної системи $\text{DE}_0(\mathcal{L})$ з (4.9) і (4.10) дорівнює $n(n+1)/2$, а тому вона більше кількості невідомих функцій η^s , якщо $n > 1$. У зв'язку з цим, система $\text{DE}_0(\mathcal{L})$ виглядає сильно перевизначеною в багатовимірному випадку. Насправді ж, рівняння підсистем добре узгоджені одне з одним. Підсистема (4.9) дає представлення $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ для η^s з однією довільною функцією $\Phi = \Phi(t, x, u)$. Підставляючи це представлення в підсистему (4.10), отримаємо систему n диференціальних рівнянь з частинними похідними на одну функцію Φ :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_s + \eta^s \tilde{H}_u - \eta_n^s - \eta_u^s \tilde{H} &= H_s^\Phi - \frac{\Phi_s}{\Phi_u} H_u^\Phi + \left(\frac{\Phi_s}{\Phi_u} \right)_n + \left(\frac{\Phi_s}{\Phi_u} \right)_u H^\Phi \\ &= \frac{1}{\Phi_u} \left(\partial_s - \frac{\Phi_s}{\Phi_u} \partial_u \right) (\Phi_n + \Phi_u H^\Phi) = 0, \end{aligned}$$

яка еквівалентна одному рівнянню на Φ , а саме, $\Phi_t + \Phi_u H^\Phi = \chi(t, \Phi)$. Тут χ — довільна гладка функція своїх аргументів і H^Φ співпадає з $\tilde{H}$ при підстановці $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$. Функцію Φ , асоційовану з фіксованим модулем Q , визначено з точністю до перетворення $\tilde{\Phi} = \theta(t, \Phi)$ з $\theta_\Phi \neq 0$. Оскільки $\tilde{\eta}^s = -\tilde{\Phi}_s/\tilde{\Phi}_u = -\Phi_s/\Phi_u = \eta^s$, то функції H^Φ і $H^{\tilde{\Phi}}$ співпадають. Водночас, якщо вибрати θ , що задовольняє рівняння $\theta_t + \chi\theta_\Phi = 0$, то $\tilde{\Phi}_t + \tilde{\Phi}_u H^{\tilde{\Phi}} = 0$. Таким чином, з точністю до еквівалентності на множині функцій, які параметризують сингулярні модулі, можна вважати, що функція Φ є розв'язком рівняння $\Phi_t + \Phi_u H^\Phi = 0$.

Підсумовуючи наведені аргументи, отримаємо таке твердження.

Твердження 4.11. *Систему $\text{DE}_0(\mathcal{L})$ визначальних рівнянь (4.9) і (4.10) за допомогою композиції нелокальної підстановки $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, де Φ — функція змінних (t, x, u) , і перетворення годографа*

$$\begin{aligned} \text{нові незалежні змінні:} \quad \tilde{t} &= t, \quad \tilde{x}_i = x_i, \quad \varkappa = \Phi, \\ \text{нова залежна змінна:} \quad \tilde{u} &= u \end{aligned}$$

можна звести до початкового рівняння $\mathcal{L}$ на функцію $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \varkappa)$, де $\varkappa$ відіграє роль параметра.

Доведення. З підсистеми (4.9) випливає існування функції $\Phi = \Phi(t, x, u)$ з $\Phi_u \neq 0$ такої, що $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$. З точністю до еквівалентності на множині, яку пробігає параметр-функція Φ з наведеного вище представлення для η^s , усю систему $DE_0(\mathcal{L})$ можна звести до одного рівняння $\Phi_t + \Phi_u H^\Phi = 0$. Перетворення годографа відображає це рівняння у початкове рівняння $\mathcal{L}$ на функцію $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{x})$. Це безпосередньо впливає з означення функції H^Φ і правила перерахунку похідних при перетворенні годографа, $\tilde{u}_{\tilde{x}_i} = -\Phi_i/\Phi_u$ і т. ін. $\square$

Твердження 4.12. *Для будь-якого рівняння $\mathcal{L}$ вигляду (4.7) такі твердження еквівалентні:*

- 1) оболонка $Q = \langle Q_s = \partial_s + \eta^s(t, x, u)\partial_u, s = 1, \dots, n \rangle$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$;
- 2) модуль $\tilde{Q} = \langle \tilde{Q}_0, Q_1, \dots, Q_n \rangle$, де $\tilde{Q}_0 = \partial_t + \tilde{H}\partial_u$ і функція $\tilde{H} = \tilde{H}(t, x, u)$ співпадає з H на многовиді $Q_{(r)}$, є інволютивним;
- 3) існує векторне поле $\hat{Q}_0 = \partial_t + \eta^0(t, x, u)\partial_u$ таке, що модуль $\hat{Q} = \langle \hat{Q}_0, Q_1, \dots, Q_n \rangle$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$.

Більш того, за цих еквівалентних умов коефіцієнт η^0 визначено єдиним чином як $\eta^0 = \tilde{H}$, тобто обов'язково $\hat{Q}_0 = \tilde{Q}_0$.

Доведення. Умови 1 та 2 еквівалентні внаслідок того, що коефіцієнти η^s задовольняють систему $DE_0(\mathcal{L})$, утворену рівняннями (4.9) і (4.10). Модуль $\hat{Q}$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли $\eta^0 = \tilde{H}$, тобто модуль $\hat{Q}$ співпадає з модулем $\tilde{Q}$, і цей модуль є інволютивним. $\square$

Теорема 4.6. *З точністю до еквівалентності сімей розв'язків для будь-якого рівняння вигляду (4.7) існує взаємно однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями його розв'язків і його n -вимірними модулями редукції, утвореними векторними полями з нульовими t -компонентами. А саме, кожному модулю вказаного типу відповідає*

сім'я розв'язків, інваріантна відносно цього модуля. Проблеми побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння (4.7) і вичерпного опису його n -вимірних модулів редукції, утворених векторними полями з нульовими t -компонентами, повністю еквівалентні.

Доведення. Нехай $\mathcal{L}$ — рівняння з класу (4.7), а $Q = \langle Q_1, \dots, Q_n \rangle \in \mathcal{R}_0^n(\mathcal{L})$, тобто $Q_s = \partial_s + \eta^s \partial_u$, де коефіцієнти $\eta^s = \eta^s(t, x, u)$ задовольняють систему $\text{DE}_0(\mathcal{L})$. Анзац, побудований за модулем Q , має вигляд $u = f(t, x, \varphi(\omega))$, де $f = f(t, x, \varphi)$ — задана функція з $f_\varphi \neq 0$, $\varphi = \varphi(\omega)$ — нова невідома функція, $\omega = t$ — інваріантна незалежна змінна. Цей анзац редукує рівняння $\mathcal{L}$ до звичайного диференціального рівняння першого порядку $\mathcal{L}'$ на φ , яке є розв'язним відносно φ_ω . Загальний розв'язок редукovanого рівняння $\mathcal{L}'$ можна представити у вигляді $\varphi = \varphi(\omega, \kappa)$, де $\varphi_\kappa \neq 0$ і κ — довільна стала. Вигляд загального розв'язку визначено з точністю до перетворень $\tilde{\kappa} = \zeta(\kappa)$ параметра κ . Підстановка цього розв'язку в анзац дає однопараметричну сім'ю $\mathcal{F}$ розв'язків $u = \tilde{f}(t, x, \kappa)$ рівняння $\mathcal{L}$ з $\tilde{f} = f(t, x, \varphi(t, \kappa))$, причому будь-який Q -інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ належить цій сім'ї. Виражаючи параметр κ з рівності $u = \tilde{f}(t, x, \kappa)$, отримаємо, що $\kappa = \Phi(t, x, u)$, де $\Phi_u \neq 0$. Тоді $\eta^s = u_s = -\Phi_s/\Phi_u$ для будь-якого $u \in \mathcal{F}$, тобто будь-якого допустимого значення (t, x, κ) . З цього випливає, що $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$ для будь-якого допустимого значення (t, x, u) .

Доведення оберненого твердження аналогічне доведенню теореми 4.5. Розглянемо однопараметричну сім'ю $\mathcal{F} = \{u = f(t, x, \kappa)\}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. Похідна f_κ ненульова, оскільки параметр κ є суттєвим. Ви-
ражаємо κ з рівності $u = f(t, x, \kappa)$: $\kappa = \Phi(t, x, u)$ для деякої функції $\Phi = \Phi(t, x, u)$ з $\Phi_u \neq 0$. Оболонка $Q = \langle Q_1, \dots, Q_n \rangle$, де $Q_s = \partial_s + \eta^s \partial_u$ і коефіцієнти $\eta^s = \eta^s(t, x, u)$ визначено як $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, є n -вимірним інволютивним модулем. Для будь-якого $u \in \mathcal{F}$ маємо $Q_s[u] = 0$. Анзац $u = f(t, x, \varphi(\omega))$ з $\omega = t$, асоційований з модулем Q , редукує рівняння $\mathcal{L}$ до рівняння $\varphi_\omega = 0$. Тому за означенням 4.1 $Q \in \mathcal{R}_0^n(\mathcal{L})$.

Однопараметричні сім'ї $\mathcal{F} = \{u = f(t, x, \varkappa)\}$ та $\tilde{\mathcal{F}} = \{u = \tilde{f}(t, x, \tilde{\varkappa})\}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ еквівалентні тоді й лише тоді, коли асоційовані функції $\Phi = \Phi(t, x, u)$ та $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(t, x, u)$ задовольняють умову

$$\frac{\Phi_s}{\Phi_u} = \frac{\tilde{\Phi}_s}{\tilde{\Phi}_u}.$$

Отже, еквівалентні однопараметричні сім'ї розв'язків відповідають одному й тому самому модулю Q з $\mathcal{R}_0^n(\mathcal{L})$ і, навпаки, будь-які однопараметричні сім'ї Q -інваріантних розв'язків еквівалентні. $\square$

Зауваження 4.5. Тривіальність зазначеного анзаца та редукованого рівняння зумовлена спеціальним представленням розв'язків визначального рівняння. У цьому підході складнощі в побудові анзаців та інтегруванні редукованих рівняння підмінені складністю отримання представлення для компонент базисних елементів модулів редукції.

Зауваження 4.6. Теорема 4.6 насправді є наслідком теореми 4.5 і твердження 4.11. Це спостереження надає універсальне обґрунтування щодо “no-go” результатів для модулів редукції. Достатньо зауважити, що будь-який Q -інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L} \in \hat{Q}$ -інваріантним, де модулі Q і $\hat{Q}$ визначено в твердженні 4.11. Наведене пряме доведення забезпечує глибше розуміння редукції еволюційних рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

4.8 Модулі редукції корозмірності 1 і копорядку сингулярності 1

Спираючись на приклад еволюційних рівнянь як модельний випадок, розглянемо $(n-1)$ -вимірні сингулярні модулі редукції копорядку сингулярності 1 для загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними однієї залежної та n незалежних змінних. Під час вивчення окремих модулів такого типу можна отримати лише твердження, аналогічне твердженню 4.12.

Твердження 4.13. Нехай $\mathcal{L}: L[u] = 0$ — диференціальне рівняння з частинними похідними однієї залежної та n незалежних змінних, а Q — $(n-1)$ -вимірний інволютивний модуль векторних полів у просторі (x, u) , який задовольняє умову на ранг, причому $\text{wscoc } Q = 1$. Також припустимо, що диференціальна функція першого порядку $\hat{L}$, асоційована з L на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}$ (де $r = \text{ord } L$) з точністю до ненульового множника, має максимальний ранг відносно єдиної похідної першого порядку від u , від якої залежить $\hat{L}$. Тоді Q є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли існує (єдиний) n -вимірний модуль $\hat{Q}$, який є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ і містить модуль Q .

Доведення. За цих припущень існує векторне поле Q_0 таке, що рівняння $\hat{L} = 0$ еквівалентне рівнянню $Q_0[u] = 0$, де $Q_0[u]$ — характеристика векторного поля Q_0 . Розглянемо модуль $\hat{Q}$, породжений Q і Q_0 . Він n -вимірний і задовольняє умову на ранг. З леми 4.2 випливає, що Q є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли він є модулем редукції рівняння $\hat{L} = 0$. Остання умова еквівалентна інволютивності модуля $\hat{Q}$, і тоді рівняння $\mathcal{L}$ є тотожністю на добре визначеному многовиді $\hat{\mathcal{Q}}_{(r)}$, тобто модуль $\hat{Q}$ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$. Умови, що n -вимірний модуль $\hat{Q}$ є ультрасингулярним для $\mathcal{L}$ і містить модуль Q , однозначно визначають $\hat{Q}$. $\square$

Зауваження 4.7. Припущення, що диференціальна функція $\hat{L}$ має максимальний ранг відносно єдиної похідної першого порядку від u , від якої ця функція залежить, можна замінити слабшим припущенням, що рівняння $\hat{L} = 0$ еквівалентне рівнянню $\check{L} = 0$, де диференціальна функція $\check{L}$ задовольняє умові максимальності рангу.

Для того, щоб побудувати більш змістовну теорію, розглянемо сім'ю $(n-1)$ -вимірних модулів редукції копорядку сингулярності 1, параметризованих довільною функцією. Нехай $\mathcal{L}: L = 0$ — диференціальне рівняння з частинними похідними з диференціальною функцією $L = L[u]$

порядку $r \geq 1$. Вважаємо, що функція L допускає n -вимірний метасингулярний модуль M векторних полів копорядку сингулярності 1; див. зауваження 4.4. Оскільки особливий випадок двох незалежних змінних, коли метасингулярні модулі можуть бути неінволютивними, надалі додатково вимагаємо, що модуль M є інволютивним.

Зауваження 4.8. Для диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку інволютивні модулі копорядку сингулярності 1 є регулярними. Результати цього параграфу є вірними також і для таких рівнянь, якщо замінити атрибути “сингулярний копорядку сингулярності 1” й “метасингулярний копорядку сингулярності 1” відповідно на “регулярний” і “метарегулярний”.

З точністю до заміни змінних можна припустити, що модуль M містить сім'ю $\mathfrak{M} = \{Q^\Phi\}$ $(n-1)$ -вимірних модулів копорядку сингулярності 1, яка у зведеній формі параметризована довільною гладкою функцією Φ змінних (x, u) , тобто $Q^\Phi = \langle \partial_s + \eta^s \partial_u \rangle$, де $\eta^s = -\Phi_s / \Phi_u$, а індекс s пробігає від 1 до $p = n - 1$. Надалі всюди використовуємо це представлення для η^s .

Згідно теореми 4.2 диференціальну функцію L можна записати у вигляді $L = \check{L}(x, \Omega_{r,1,n-1})$, де $\Omega_{r,1,n-1} = (u_\alpha, \alpha_n \leq 1, |\alpha| \leq r)$, а $\check{L}$ суттєво залежить від деякого u_α з $\alpha_n = 1$. У цьому випадку обмеження L на $\mathcal{Q}_{(r)}^\Phi$ співпадає з обмеженням на той же многовид $\mathcal{Q}_{(r)}^\Phi$ функції $\tilde{L}^\Phi = \check{L}(x, \tilde{\Omega}_{r,1,n-1})$, де

$$\tilde{\Omega}_{r,1,n-1} = (D_n^{\alpha_n} (Q_1^\Phi)^{\alpha_1} \cdots (Q_{n-1}^\Phi)^{\alpha_{n-1}} u, \alpha_n \leq 1, |\alpha| \leq r).$$

Отже, вигляд функції $\tilde{L}^\Phi$ визначено виглядом L і вибраним значенням параметр-функції Φ . Залежно від значення параметр-функції Φ диференціальна функція $\tilde{L}^\Phi$ може або тотожно дорівнювати нулю, або мати порядок не більший за 1. Тому модуль Q^Φ буде або ультрасингулярним для L , або $\text{sco}_L Q^\Phi \leq 0$ з $\tilde{L}^\Phi$, не рівною тотожно нулю, або $\text{sco}_L Q^\Phi = 1$. Проаналізуємо кожен з цих випадків окремо. Додатково припускаємо,

що рівняння $\tilde{L}^\Phi = 0$ можна розв'язати відносно u , якщо $\text{scol}_L Q^\Phi = 0$, або відносно u_n , якщо $\text{scol}_L Q^\Phi = 1$.

Умова $\tilde{L}^\Phi \equiv 0$, де u і u_n розглядаємо як незалежні змінні, визначає такі значення параметр-функції Φ , за яких модуль Q^Φ є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$. Після розщеплення цієї умови за u_n отримаємо систему $\mathcal{S}_{\text{ultra}}$ диференціальних рівнянь з частинними похідними для Φ порядку не вище r , яка у загальному випадку може бути несумісною. Несумісність тут означає, що сім'я $\mathfrak{M}$ не містить ультрасингулярних модулів. Наприклад, еволюційні рівняння порядку вищого за 1 не мають ультрасингулярних модулів, породжених векторними полями загального вигляду (4.8); див. § 4.7. Якщо параметр-функція Φ задовольняє умову ультрасингулярності $\mathcal{S}_{\text{ultra}}$, то це гарантує, що $Q^\Phi \in \mathcal{R}^{n-1}(\mathcal{L})$ і сім'я Q^Φ -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ параметризована довільною функцією однієї Q^Φ -інваріантної змінної x_n .

За припущення $\text{scol}_L Q^\Phi \leq 0$ з $\tilde{L}^\Phi \neq 0$ параметр-функція Φ задовольняє умову $\tilde{L}_{u_n}^\Phi \equiv 0$, де u і u_n знову вважаємо незалежними змінними, яка є слабшою за умову ультрасингулярності. У цьому випадку відповідна система $\mathcal{S}_0$ диференціальних рівнянь з частинними похідними для Φ порядку не вище r , отримана після розщеплення за u_n умови сингулярності копорядку 0, є сумісною з більшою ймовірністю, ніж $\mathcal{S}_{\text{ultra}}$.

Наведемо деякі достатні умови сумісності системи $\mathcal{S}_0$. Якщо $\tilde{L}_{u_n} = 0$, то система $\mathcal{S}_0$ сумісна, оскільки її розв'язком є будь-яка параметр-функція Φ з $(\Phi_s/\Phi_u)_u = 0$. З точністю до еквівалентності функцій, які параметризують модулі з сім'ї $\mathfrak{M}$, можна припустити, що $\Phi = u - \zeta(x)$ і $\eta^s = \zeta_s$, тобто $Q^{u-\zeta} = \langle \partial_s + \zeta_s \partial_u \rangle$. Іншими словами, $\text{scol}_L Q^{u-\zeta} \leq 0$ для будь-якої $\zeta = \zeta(x)$.

Якщо додатково $\tilde{L}_u = 0$, то умова $\tilde{L}^{u-\zeta} = 0$ за припущення $\zeta = \zeta(x)$ дає лише єдине диференціальне рівняння з частинними похідними на ζ . Будь-який його розв'язок є розв'язком системи $\mathcal{S}_{\text{ultra}}$ і тому відповідний модуль $Q^{u-\zeta}$ ультрасингулярний для рівняння L .

У протилежному випадку маємо $\text{scol } Q^{u-\zeta} = 0$, і рівняння $\mathcal{L}$ можемо розв'язати відносно u як змінної відповідного простору струменів. Іншими словами, представимо це рівняння у вигляді $u = K[u]$. Тут $K[u]$ — диференціальна функція, яка залежить щонайбільше від змінних x і u_α , де $0 < |\alpha| \leq r$, $\alpha_n \leq 1$ і (якщо $\alpha_n = 1$) $|\alpha| > 1$. Рівняння $\tilde{L}^{u-\zeta} = 0$ можна отримати заміною $u_{\alpha+\delta_s}$ на $\zeta_{\alpha+\delta_s}(x)$ для всіх α з $|\alpha| < r$ у рівнянні $\mathcal{L}$; див. позначення на с. 38. Тому його можна представити у вигляді $u = G^\zeta(x)$, де $G^\zeta(x) = K[u]|_{u=\zeta(x)}$. Отже, вираз для функції G^ζ включає похідні від параметр-функції $\zeta = \zeta(x)$ до порядку r включно. Умовна інваріантність рівняння $\mathcal{L}$ відносно модуля $Q^{u-\zeta}$ еквівалентна сумісності системи $u = G^\zeta$, $u_s = \zeta_s$ відносно u і тому призводить до системи $n - 1$ диференціальних рівнянь з частинними похідними $\zeta_s = G_s^\zeta$ на ζ . Тут G^ζ вважаємо диференціальною функцією від $\zeta = \zeta(x)$. Тоді G_s^ζ — повна похідна функції G^ζ за x_s . Оскільки для фіксованого модуля параметр-функцію ζ визначено з точністю до сталих доданків, то зазначена система еквівалентна одному диференціальному рівнянню з частинними похідними $\zeta = G^\zeta$. Це означає, що $Q^{u-\zeta}$ є модулем редукції для рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли з точністю до зсувів залежної змінної параметр-функція ζ є розв'язком цього рівняння. Анзац, побудований за модулем $Q^{u-\zeta}$, можна вибрати у вигляді $u = \varphi(\omega) + \zeta(x)$, де $\varphi = \varphi(\omega)$ — нова невідома функція, а $\omega = x_n$ — інваріантна незалежна змінна. Цей анзац редукує початкове рівняння $\mathcal{L}$ до тривіального алгебраїчного рівняння $\varphi = 0$, тобто функція $u = \zeta(x)$ є єдиним $Q^{u-\zeta}$ -інваріантним розв'язком рівняння $\mathcal{L}$. Навпаки, фіксуємо розв'язок $u = \zeta(x)$ рівняння $\mathcal{L}$. Тоді $\zeta = G^\zeta(x)$, звідки $\zeta_s = G_s^\zeta$, що еквівалентно критерію умовної інваріантності для випадку модуля $Q^{u-\zeta} = \langle \partial_s + \zeta_s \partial_u \rangle$ і рівняння $\mathcal{L}$, тобто $Q^{u-\zeta}$ є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$, причому $\zeta_u = 0$. Розв'язок $u = \zeta(x)$ інваріантний відносно $Q^{u-\zeta}$ за побудовою.

Отже, отримаємо таке твердження.

Теорема 4.7. *Припустимо, що рівняння $\mathcal{L}: L = 0$ допускає сім'ю $\mathfrak{M} =$*

$\{Q^\Phi\}$ $(n-1)$ -вимірних модулів копорядку сингулярності 1 у зведений формі $Q^\Phi = \langle \partial_s - (\Phi_s/\Phi_u)\partial_u \rangle$, параметризований довільною гладкою функцією Φ змінних (x, u) , тобто ліву частину L цього рівняння можна представити у вигляді $L = \check{L}(x, \Omega_{r,1,n-1})$, де $\Omega_{r,1,n-1} = (u_\alpha, \alpha_n \leq 1, |\alpha| \leq r)$, $\check{L}_{u_\alpha} \neq 0$ для деякої u_α з $\alpha_n = 1$, і додатково $\check{L}_{u_n} = 0$, $\check{L}_u \neq 0$. Тоді існує взаємно однозначна відповідність між розв'язками рівняння $\mathcal{L}$ і модулями редукції з $\mathfrak{M}$, для яких $\Phi = u - \zeta(x)$. А саме, кожен такий модуль має копорядок сингулярності 0 і відповідає єдиному розв'язку, який інваріантний відносно цього модуля. Проблеми розв'язання рівняння $\mathcal{L}$ і вичерпного опису його модулів редукції зазначеного типу є повністю еквівалентними.

Повертаємося до аналізу регулярних значень параметр-функцій Φ , для яких копорядок сингулярності відповідних модулів Q^Φ співпадає з копорядком сингулярності всієї сім'ї $\mathfrak{M}$ (і дорівнює 1). Якщо $\text{sc}_L Q^\Phi = 1$, то параметр-функція Φ задовольняє умову регулярності $\check{L}_{u_n}^\Phi \neq 0$. Таким чином, рівняння $\check{L}^\Phi = 0$, еквівалентне рівнянню $\mathcal{L}$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(r)}^\Phi$, можна розв'язати відносно u_n : $u_n = G^\Phi(x, u)$. Тут вираз для функції G^Φ залежить від похідних параметр-функції Φ до порядку r включно. Застосовуючи критерій умовної інваріантності до рівняння $\mathcal{L}$ і модуля Q^Φ , отримаємо систему

$$\eta_n^s + \eta_u^s G^\Phi = G_s^\Phi + \eta^s G_u^\Phi \quad (4.11)$$

відносно функції Φ (нагадаємо, що $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$). Ця система співпадає з умовою формальної сумісності рівнянь $u_n = G^\Phi$ і $u_s = \eta^s$ відносно u . Оскільки функцію G^Φ також можна виразити безпосередньо у термінах коефіцієнтів η^s , то систему (4.11), доповнену умовою інволютивності $\eta_{s'}^s + \eta_u^{s'} = \eta_s^{s'} + \eta_u^s \eta_u^{s'}$ відповідного модуля, можна проінтерпретувати як систему відносно η^s ; див. § 4.7. Оскільки

$$G_s^\Phi + \eta^s G_u^\Phi - \eta_n^s - \eta_u^s G^\Phi = G_s^\Phi - \frac{\Phi_s}{\Phi_u} G_u^\Phi + \left(\frac{\Phi_s}{\Phi_u} \right)_n + \left(\frac{\Phi_s}{\Phi_u} \right)_u G^\Phi$$

$$= \frac{1}{\Phi_u} \left(\partial_s - \frac{\Phi_s}{\Phi_u} \partial_u \right) (\Phi_n + \Phi_u G^\Phi) = 0,$$

то система (4.11) еквівалентна рівнянню $\Phi_n + \Phi_u G^\Phi = \chi(x_n, \Phi)$ на функцію Φ , де параметр-функція χ — довільна гладка функція своїх аргументів. Значення параметр-функції Φ , асоційованої з фіксованим модулем Q^Φ , визначається з точністю до перетворень $\tilde{\Phi} = \theta(x_n, \Phi)$. Оскільки $\tilde{\eta}^s = -\tilde{\Phi}_s/\tilde{\Phi}_u = -\Phi_s/\Phi_u = \eta^s$, то функції G^Φ і $G^{\tilde{\Phi}}$ співпадають. Водночас, якщо вибрати θ , що задовольняє рівняння $\theta_n + \chi\theta_\Phi = 0$, то $\tilde{\Phi}_n + \tilde{\Phi}_u G^{\tilde{\Phi}} = 0$. Отже, з точністю до еквівалентності на множині функцій, які параметризують модулі сім'ї $\mathfrak{M}$, можна вважати, що функція Φ є розв'язком рівняння $\Phi_n + \Phi_u G^\Phi = 0$.

Порядок кожного рівняння системи (4.11) відносно Φ дорівнює $r + 1$ і тому більший за порядок системи $\mathcal{S}_0$. За деяких припущень щодо гладкості (наприклад, за аналітичності) це означає, що рівняння (4.11) має розв'язки, які не є розв'язками $\mathcal{S}_0$. Отже, рівняння $\mathcal{L}$ обов'язково допускає модулі редукції копорядку сингулярності 1, які належать $\mathfrak{M}$.

Твердження 4.14. *Нехай будь-який $(n-1)$ -вимірний інволютивний модуль у зведеній формі $Q = \langle \partial_s + \eta^s \partial_u \rangle$ є модулем копорядку сингулярності 1 для рівняння $\mathcal{L}$. Тоді систему визначальних рівнянь на значення η^s , які відповідають модулям редукції рівняння $\mathcal{L}$, за допомогою композиції нелокальної підстановки $\eta^s = -\Phi_s/\Phi_u$, де Φ — гладка функція від (x, u) з $\Phi_u \neq 0$, і перетворення гогографа*

$$\text{нові незалежні змінні:} \quad \tilde{x}_i = x_i, \quad \varkappa = \Phi,$$

$$\text{нова залежна змінна:} \quad \tilde{u} = u$$

можна звести до початкового рівняння $\mathcal{L}$ на функцію $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \varkappa)$, де $\varkappa$ відіграє роль параметра.

Доведення. Можливість представлення η^s у вигляді Φ_s/Φ_u з деякою функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ впливає з умови інволютивності $\eta_s^s + \eta^{s'} \eta_u^s = \eta_s^{s'} + \eta^s \eta_u^{s'}$

для модуля Q . За такого представлення система визначальних рівнянь на значення η^s , які відповідають модулям редукції рівняння $\mathcal{L}$, матиме вигляд (4.11) і з точністю до еквівалентності на множині, яку пробігає параметр-функція Φ , буде еквівалентною одному рівнянню $\Phi_n + \Phi_u G^\Phi = 0$. Внаслідок означення функції G^Φ і виразів для похідних при перетворенні годографа ($\tilde{u}_{\tilde{x}_i} = -\Phi_i/\Phi_u$ і т. ін.) це перетворення відображає рівняння $\Phi_n + \Phi_u G^\Phi = 0$ у початкове рівняння $\mathcal{L}$ на функцію $\tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}, \varkappa)$. $\square$

У твердженні 4.14 йдеться про зведення системи визначальних рівнянь (4.11) до початкового рівняння $\mathcal{L}$, а тому це так званий “no-go” результат. Його можна переформулювати в термінах співвідношення між однопараметричними сім’ями розв’язків і $(n-1)$ -вимірними модулями редукції копорядку сингулярності 1. Результати § 4.5 означають, що для кожного $(n-1)$ -вимірного модуля редукції Q копорядку сингулярності 1 рівняння $\mathcal{L}$ існує однопараметрична сім’я Q -інваріантних розв’язків цього рівняння. Якщо рівняння $\mathcal{L}$ допускає n -вимірний метасингулярний модуль з копорядком сингулярності 1, то обернене твердження також справедливе. Зручно довести це твердження без використання зведеної форми метасингулярного модуля.

Теорема 4.8. *Нехай рівняння $\mathcal{L}$ допускає n -вимірний метасингулярний модуль M копорядку сингулярності 1. Тоді для будь-якої однопараметричної сім’ї $\mathcal{F}$ розв’язків рівняння $\mathcal{L}$ існує $(n-1)$ -вимірний інволютивний підмодуль Q модуля M , що є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$, і для якого кожний розв’язок із $\mathcal{F}$ є Q -інваріантним.*

Доведення. Нехай $\mathcal{F} = \{u = f(x, \varkappa)\}$ — однопараметрична сім’я розв’язків рівняння $\mathcal{L}$. Похідна $f_\varkappa$ ненульова, оскільки параметр $\varkappa$ є суттєвим. Розв’язуючи рівняння $u = f(x, \varkappa)$ відносно $\varkappa$, отримуємо, що $\varkappa = \Phi(x, u)$ для деякою функцією $\Phi = \Phi(x, u)$ з $\Phi_u \neq 0$.

Нехай $(Q_0, \dots, Q_p)$ з $p = n - 1$ — комутативний базис модуля M . Припустимо, що існує $\sigma \in \{0, \dots, p\}$ таке, що $Q_\sigma \Phi \neq 0$. З точністю

до перестановки базисних елементів можна вважати, що $Q_0\Phi \neq 0$. Тоді покладемо

$$\tilde{Q}_s = Q_s - \frac{Q_s\Phi}{Q_0\Phi}Q_0.$$

Якщо $Q_\sigma\Phi = 0$ для всіх $\sigma \in \{0, \dots, p\}$, то покладемо $\tilde{Q}_s = Q_s$.

Розглянемо підмодуль Q , породжений векторними полями $\tilde{Q}_s$. Цей підмодуль інволютивний, задовольняє умову на ранг і має розмірність $p = n - 1$. Звідки $\text{scol}_L Q^\Phi \leq 1$. Також очевидно, що $\tilde{Q}_s\Phi = 0$. Оскільки $f_i = -(\Phi_i/\Phi_u)|_{u=f}$, то це означає, що будь-який розв'язок із сім'ї $\mathcal{F}$ є Q -інваріантним. Випадок $\text{scol}_L Q \leq 0$ з $L|_{Q(r)} \neq 0$ неможливий, оскільки інакше рівняння $\mathcal{L}$ не мало б однопараметричної сім'ї Q -інваріантних розв'язків. Таким чином, або Q є ультрасингулярним модулем для L , або $\text{scol}_L Q = 1$. Будь-який ультрасингулярний модуль для L є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$. Якщо $\text{scol}_L Q = 1$, то згідно з твердженням 4.8 Q є модулем редукції рівняння $\mathcal{L}$. $\square$

Для того, щоб відповідність між однопараметричними сім'ями розв'язків та $(n-1)$ -вимірними модулями редукції була взаємно однозначною, відповідний метасингулярний модуль має задовольняти додаткові обмеження.

Теорема 4.9. *Припустимо, що рівняння $\mathcal{L}$ r -го порядку: $L[u] = 0$ допускає n -вимірний метасингулярний модуль M копорядку сингулярності 1, причому весь модуль M не є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, а будь-який $(n-1)$ -вимірний підмодуль Q модуля M має копорядок сингулярності 1 для $\mathcal{L}$. Також нехай диференціальне рівняння $\hat{L} = 0$ з диференціальною функцією $\hat{L} = \hat{L}[u]$ першого порядку, асоційованою з $L[u]$ на многовиді $Q_{(r)}$ з точністю до ненульового множника, можна розв'язати відносно похідної від u першого порядку, яку включає це рівняння. Тоді з точністю до еквівалентності сімей розв'язків існує взаємно однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями*

розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ і його $(n-1)$ -вимірними модулями редукції з M . А саме, кожному модулю вказаного типу відповідає сім'я розв'язків, інваріантних відносно нього.

Іншими словами, проблеми побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ і вичерпного опису його модулів редукції вказаного вище типу повністю еквівалентні.

Доведення. Якщо $(n-1)$ -вимірний модуль редукції Q рівняння $\mathcal{L}$ є підмодулем модуля M , то $\text{scoc } Q = 1$. Тому згідно з твердженням 4.8 рівняння $\mathcal{L}$ допускає однопараметричну сім'ю $\mathcal{F}$ Q -інваріантних розв'язків, причому будь-який Q -інваріантний розв'язок рівняння $\mathcal{L}$ належить цій сім'ї. Кожну однопараметричну сім'ю Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ можна отримати з $\mathcal{F}$ за допомогою репараметризації.

Навпаки, розглянемо однопараметричну сім'ю $\mathcal{F} = \{u = f(x, \kappa)\}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}$. З теореми 4.8 випливає, що існує модуль $Q \in \mathcal{R}^{n-1}(\mathcal{L})$, який є підмодулем M , причому будь-який розв'язок з $\mathcal{F}$ є Q -інваріантним. Доведемо, що такий модуль Q єдиний. Припустимо, що існує інший $(n-1)$ -вимірний інволютивний підмодуль $\tilde{Q}$ модуля M такий, що будь-який розв'язок з $\mathcal{F}$ є $\tilde{Q}$ -інваріантним. Це означає, що сім'я $\mathcal{F}$ утворена розв'язками, інваріантними відносно всього модуля M .

Тому модуль M задовольняє умову на ранг. Щоб показати це, фіксуємо базис $(Q_0, \dots, Q_p)$ модуля M , де $Q_\sigma = \xi^{\sigma i}(x, u)\partial_i + \eta^\sigma(x, u)\partial_u$, $\sigma = 0, \dots, n$. Функція Φ , визначена в доведенні теореми 4.8, є інваріантом для всіх Q_σ , тобто $Q_\sigma \Phi = 0$. Оскільки $\Phi_u \neq 0$, то $\text{rank}(\xi^{\sigma i}) = n$.

Отже, M є n -вимірним інволютивним модулем, що задовольняє умову на ранг, а сім'я $\mathcal{F}$, утворена M -інваріантними розв'язками рівняння $\mathcal{L}$, однопараметрична. Тому з твердження 4.7 випливає, що модуль M є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, а це суперечить умовам теореми. Таким чином, модуль Q єдиний. $\square$

Бієкція з теореми 4.9, взагалі кажучи, порушується за наявності

$(n-1)$ -вимірних підмодулів копорядку сингулярності, меншого за 1, або ультрасингулярності всього метасингулярного модуля. Справді, якщо $(n-1)$ -вимірний інволютивний модуль Q є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, то сім'ю Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ можна параметризувати довільною функцією одного аргументу; див. твердження 4.7. У випадку $\text{sc}_L Q = -\infty$ з $L|_{Q(r)} \neq 0$ рівняння $\mathcal{L}$ не має Q -інваріантних розв'язків. Якщо є модулі редукції рівняння $\mathcal{L}$ серед $(n-1)$ -вимірних підмодулів модуля M копорядку сингулярності 0, то множина інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}$ для цих модулів редукції є дискретною. Якщо весь n -вимірний модуль M є ультрасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, то це рівняння допускає однопараметричну сім'ю $\mathcal{F}$ M -інваріантних розв'язків. Тоді будь-який розв'язок із сім'ї $\mathcal{F}$ інваріантний відносно будь-якого $(n-1)$ -вимірного інволютивного підмодуля модуля M .

Копорядок сингулярності 1 модулів редукції також є суттєвим для справедливості твердження 4.14 і теореми 4.9. Наприклад, єдиним метасингулярним модулем лінійного рівняння стрижня $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$ є модуль $M = \langle \partial_x, \partial_u \rangle$, і його копорядок сингулярності дорівнює 2; див. пункт 2 у прикладі 4.1. Одновимірні сингулярні модулі редукції цього рівняння знайдено в явному вигляді. Вони не підпадають під “no-go” випадок, оскільки всі вони мають копорядок сингулярності 2 і відповідні сім'ї інваріантних розв'язків є двопараметричними.

Зауваження 4.9. Модулі редукції корозмірності 1 і копорядку сингулярності 1 не вичерпують можливі “no-go” випадки знаходження модулів редукції. Зокрема, система визначальних рівнянь для знаходження регулярних операторів редукції для будь-якого $(1+1)$ -вимірного лінійного еволюційного рівняння другого порядку $\mathcal{L}$ зводиться нелокальним перетворенням до системи трьох копій цього рівняння. Отже, регулярні оператори редукції рівняння $\mathcal{L}$ утворюють “no-go” випадок, відмінний від “no-go” випадку сингулярних операторів редукції, що є характерним для всіх $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь. Аналогічна ситуація бу-

де й для рівняння Бюргерса $u_t + uu_x - \mu u_{xx} = 0$, де “no-go” випадок з’являється для регулярних операторів редукції вигляду

$$\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u \quad \text{з} \quad \xi_u = 1/2.$$

Скоріше за все, подібні “no-go” випадки породжує поєднання декількох властивостей відповідних рівнянь таких, як еволюційність, другий порядок, лінійність або лінеаризованість. Вивчення модулів редукції для класу диференціальних рівнянь може призводити до “no-go” випадків через появу у відповідних визначальних рівняннях довільних елементів, що параметризують рівняння класу. Як приклад такої ситуації, можна навести опис одновимірних регулярних модулів редукції, породжених векторними полями вигляду

$$\partial_t + \xi(t, x)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u \quad \text{з} \quad \xi_{xx} \neq 0,$$

для класу узагальнених рівнянь Бюргерса $u_t + uu_x + f(t, x)u_{xx} = 0$.

4.9 Сингулярні модулі квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

Для деяких класів диференціальних рівнянь можна вичерпно описати відповідні сингулярні модулі. Вивчимо з цієї точки зору квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку. Природно розрізняти еліптичні, еволюційні та узагальнені хвильові рівняння. В усіх випадках Q є інволютивним модулем векторних полів, який визначено у відповідному просторі незалежних і залежних змінних і який задовольняє умову на ранг, причому розмірність Q менша за кількість незалежних змінних.

Еліптичні рівняння. Розглянемо рівняння $\mathcal{L}$ на одну невідому функцію u незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$, що має загальний вигляд

$$L[u] := a^{ij}(x, u_{(1)})u_{ij} + b(x, u_{(1)}) = 0,$$

де коефіцієнти a^{ij} і b визначено на одній і тій самій області Ω простору струменів першого порядку, $a^{ij} = a^{ji}$, причому матрична функція (a^{ij}) додатно визначена в кожній точці області Ω . Доведемо, що рівняння $\mathcal{L}$ не допускає сингулярних модулів розмірності менше за n .

Позначимо $\dim Q$ через p ; $0 < p < n$. З точністю до заміни змінних x можна локально вибрати базис Q , утворений векторними полями вигляду $\hat{Q}_s = \partial_s + \hat{\xi}^{s\iota}(x, u)\partial_\iota + \hat{\eta}^s(x, u)\partial_u$ (див. § 4.2). Тут і далі індекс ι змінюється від $p+1$ до n . Тоді будь-яку похідну функції u першого або другого порядку можна виразити на многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$ лише через похідні функції u за змінними $x_{p+1}, \dots, x_n$ і коефіцієнти $\hat{\xi}^{s\iota}$ і $\hat{\eta}^s$ (див. рівняння (4.2)). Оскільки у виразах для похідних другого порядку функції u суттєвими є лише члени цього ж порядку, то використовуємо представлення

$$u_{s\iota} = -\hat{\xi}^{s\iota'} u_{\iota'\iota} + R^{s\iota}(x, u_{(1)}), \quad u_{ss'} = \hat{\xi}^{s\iota} \hat{\xi}^{s'\iota'} u_{\iota'\iota} + R^{ss'}(x, u_{(1)}),$$

де через R^{si} позначено члени, що не містять похідних другого порядку, причому $R^{ss'} = R^{s's}$. Підставляючи ці вирази для похідних u_{si} в $L[u]$, отримаємо диференціальну функцію $\hat{L}[u] := \hat{a}^{\iota'\iota} u_{\iota'\iota} + \hat{b}$, що асоційована з $L[u]$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$. Тут

$$\begin{aligned} \hat{a}^{\iota'\iota} &= a^{\iota'\iota} - a^{s\iota} \hat{\xi}^{s\iota'} - a^{s'\iota} \hat{\xi}^{s\iota} + a^{ss'} \hat{\xi}^{s\iota} \hat{\xi}^{s'\iota'}, \\ \hat{b} &= b + 2a^{s\iota} R^{s\iota} + a^{ss'} R^{ss'}. \end{aligned}$$

Іншими словами, для кожного фіксованого ι і $\iota' = \iota$ коефіцієнт $\hat{a}^{\iota'\iota}$ співпадає зі значенням квадратичної форми з матрицею (a^{ij}) на наборі $(z^1, \dots, z^n)$, де $z^s = -\hat{\xi}^{s\iota}$, $z^\iota = 1$, а інші z -компоненти — нульові. Оскільки матриця (a^{ij}) додатно визначена, то коефіцієнт $\hat{a}^{\iota'\iota}$ ненульовий і, більш того, додатний. Це означає, що навіть з точністю до ненульового множника диференціальна функція $L[u]$ не може співпадати на многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$ з диференціальною функцією порядку, меншого за 2. Отже, $\text{wsc}_\mathcal{L} Q = \text{sc}_\mathcal{L} Q = 2$.

Еволюційні рівняння. Аналогічно § 4.7, для цього й наступного класу рівнянь покладемо кількість незалежних змінних рівною $n+1$ замість n і додатково виокремимо змінну $t = x_0$, тобто невідома функція u залежить від змінних t та $x = (x_1, \dots, x_n)$. Розглянемо квазілінійні еволюційні рівняння другого порядку $\mathcal{L}$ загального вигляду

$$u_t = H[u] := a^{ij}(t, x, u_{(1,x)})u_{ij} + b(t, x, u_{(1,x)}), \quad (4.12)$$

де $u_{(1,x)} = (u, u_1, \dots, u_n)$, коефіцієнти a^{ij} і b визначено на тій самій області Ω простору струменів першого порядку, а матрична функція (a^{ij}) — симетрична й додатно визначена у кожній точці Ω . Із точністю до заміни змінних x_i будь-який інволютивний модуль Q векторних полів у просторі змінних (t, x, u) , що задовольняє умову на ранг і для якого $\dim Q < n + 1$, локально можна вважати породженим векторними полями $\partial_t + \xi^{0\iota}\partial_\iota + \eta^0\partial_u$, $\partial_s + \xi^{s\iota}\partial_\iota + \eta^s\partial_u$ з $p = \dim Q - 1$ або векторними полями $\partial_s + \xi^{s\iota}\partial_\iota + \eta^s\partial_u$ з $p = \dim Q$. Тут $\xi^{0\iota}$, η^0 , $\xi^{s\iota}$ і η^s — гладкі функції змінних (t, x, u) . Аналогічно розгляду еліптичних рівнянь можна показати, що у другому випадку з $p = n$ і лише у ньому модуль Q є сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, причому $\text{wsc}_\mathcal{L} Q = \text{sc}_\mathcal{L} Q = 1$. Тоді базисні елементи модуля Q набувають вигляду $Q^s = \partial_s + \eta^s\partial_u$. Це випадок вивчено в § 4.7. На відміну від загальних еволюційних рівнянь (див. наслідок 4.5) можна гарантувати, що $M = \langle \partial_1, \dots, \partial_n, \partial_u \rangle$ є єдиним метасингулярним модулем для рівняння $\mathcal{L}$.

Узагальнені хвильові рівняння. Розглянемо рівняння $\mathcal{L}$: $u_{tt} = H[u]$ на одну невідому функцію u незалежних змінних t та $x = (x_1, \dots, x_n)$, де диференціальну функцію $H = H[u]$ визначено аналогічно до (4.12), але коефіцієнти a^{ij} і b можуть додатково залежати від u_t . Розіб'ємо множину відповідних інволютивних модулів іншим чином ніж у випадку еволюційних рівнянь. Із точністю до заміни змінних x будь-який інволютивний модуль Q векторних полів, визначений у просторі (t, x, u) , що задовольняє умову на ранг і для якого $\dim Q < n + 1$, локально можна вважати

породженим векторними полями $\partial_t + \eta^0 \partial_u$, $\partial_s + \xi^{s'} \partial_t + \eta^s \partial_u$ з $p = \dim Q - 1$ або векторними полями $\partial_s + \tau^s \partial_t + \xi^{s'} \partial_t + \eta^s \partial_u$ з $p = \dim Q$. Тут η^0 , τ^s , $\xi^{s'}$, η^s — гладкі функції змінних (t, x, u) . Лише у другому випадку з $p = n$ модуль може бути сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$. Розглянемо цей випадок детально.

Якщо $p = n$, то базисні елементи модуля Q набувають вигляд $Q^s = \partial_s + \tau^s \partial_t + \eta^s \partial_u$. На многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$ маємо $u_s = \eta^s - \xi^s u_t$, $u_{ss'} = \tau^s \tau^{s'} u_{tt} + R^{ss'}$, де через $R^{ss'}$ позначено відповідну сукупність членів, що залежать щонайбільше від t , x , u і u_t . Підставляючи ці вирази для похідних функції u за змінними x у диференціальну функцію $L[u] = u_{tt} - H[u]$, побудуємо диференціальну функцію

$$\hat{L}[u] := (1 - \hat{a}^{ij} \tau^i \tau^j) u_{tt} + \hat{b}(t, x, u, u_t),$$

асоційовану з $L[u]$ на многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$, яка залежить щонайбільше від t , x , u , u_t і u_{tt} . Тут коефіцієнти $\hat{a}^{ij} = \hat{a}^{ij}(t, x, u, u_t)$ отримано з a^{ij} підстановкою $u_s = \eta^s - \xi^s u_t$, а явний вигляд коефіцієнта $\hat{b} = \hat{b}(t, x, u, u_t)$ несуттєвий. Модуль Q є сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли $\text{ord } \hat{L}[u] < 2$, тобто коефіцієнти $\tau^s = \tau^s(t, x, u)$ задовольняють рівняння $\hat{a}^{ij} \tau^i \tau^j = 1$. Якщо деякі з коефіцієнтів $\hat{a}^{ij}$ залежать від u_t , то це рівняння треба розщепити за цією похідною, а тому воно може бути несумісним.

Оскільки модуль Q інволютивний, то векторні поля Q^s комутують, тобто коефіцієнти τ^s і η^s задовольняють систему

$$Q^s \tau^{s'} = Q^{s'} \tau^s, \quad Q^s \eta^{s'} = Q^{s'} \eta^s,$$

розгорнутим виглядом якої є

$$\begin{aligned} \tau_s^{s'} + \tau^s \tau_t^{s'} + \eta^s \tau_u^{s'} &= \tau_{s'}^s + \tau^{s'} \tau_t^s + \eta^{s'} \tau_u^s, \\ \eta_s^{s'} + \tau^s \eta_t^{s'} + \eta^s \eta_u^{s'} &= \eta_{s'}^s + \tau^{s'} \eta_t^s + \eta^{s'} \eta_u^s. \end{aligned}$$

З цього внаслідок теореми Фробеніуса випливає, що система $Q^s \Phi = 0$ відносно невідомої функції $\Phi = \Phi(t, x, u)$ допускає розв'язки Φ^l , $l = 1, 2$,

з $\Phi_t^1 \Phi_u^2 - \Phi_u^1 \Phi_t^2 \neq 0$. Розв'язуючи пару рівнянь $\Phi_s^l + \tau^s \Phi_t^l + \eta^s \Phi_u^l = 0$ для кожного фіксованого s як систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно (τ^s, η^s) , отримаємо представлення

$$\tau^s = -\frac{\Phi_s^1 \Phi_u^2 - \Phi_s^2 \Phi_u^1}{\Phi_t^1 \Phi_u^2 - \Phi_t^2 \Phi_u^1}, \quad \eta^s = -\frac{\Phi_t^1 \Phi_s^2 - \Phi_t^2 \Phi_s^1}{\Phi_t^1 \Phi_u^2 - \Phi_t^2 \Phi_u^1}. \quad (4.13)$$

Навпаки, можна перевірити прямим обчисленням, що для довільних функцій Φ^1 і Φ^2 з $\Phi_t^1 \Phi_u^2 - \Phi_u^1 \Phi_t^2 \neq 0$ модуль Q , породжений векторними полями $Q^s = \partial_s + \tau^s \partial_t + \eta^s \partial_u$ з коефіцієнтами (4.13), є інволютивним. З точністю до функціональної залежності пар функцій Φ^1 і Φ^2 з $\Phi_t^1 \Phi_u^2 - \Phi_u^1 \Phi_t^2 \neq 0$ існує взаємно однозначна відповідність між такими парами й інволютивними модулями, породженими n векторними полями вигляду $Q^s = \partial_s + \tau^s \partial_t + \eta^s \partial_u$.

Якщо коефіцієнти $\hat{a}^{ij}$ не залежать від u_t (наприклад, якщо $a^{ij} = a^{ij}(t, x, u)$, звідки $\hat{a}^{ij} = a^{ij}$), то підстановка виразів (4.13) для τ^s у рівняння $\hat{a}^{ij} \tau^i \tau^j = 1$ дає одне рівняння на дві невідомі функції Φ^1 та Φ^2 . Кожен розв'язок цього рівняння пов'язаний з сингулярним модулем Q рівняння $\mathcal{L}$. Взагалі кажучи, у багатовимірному випадку $n > 1$ коефіцієнти τ^s і η^s відповідних базисних елементів Q^s пов'язані нелокальним і нелінійним чином. З цієї причини *неможливо вичерпно описати сингулярні модулі багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь за допомогою метасингулярних модулів*. Водночас, за додаткових умов на коефіцієнти a^{ij} нелінійні хвильові рівняння допускають сім'ї сингулярних модулів, які добре вписуються в конструкцію метасингулярних модулів.

Отже, нехай коефіцієнти $\hat{a}^{ij}$ залежать лише від t і x . Розглянемо сингулярні модулі для рівняння $\mathcal{L}$, для яких відповідні коефіцієнти τ^s також не залежать від u . Достатньо розглянути пари функцій Φ^1 і Φ^2 з $\Phi_u^1 = 0$, а тому $\Phi_t^1 \Phi_u^2 \neq 0$. Тоді вирази (4.13) для τ^s можна звести до вигляду $\tau^s = -\Phi_s^1 / \Phi_t^1$. Рівняння $a^{ij} \tau^i \tau^j = 1$ еквівалентне рівнянню

$$(\Phi_t^1)^2 = a^{ij} \Phi_i^1 \Phi_j^1,$$

яке є рівнянням ейконала, пов'язаним з хвильовим рівнянням $\mathcal{L}$. Зафі-

ксуємо розв'язок $\Psi = \Psi(t, x)$ рівняння ейконала з $\Psi_t \neq 0$ і розглянемо модуль M^Ψ , породжений векторний полями $\Psi_t \partial_s - \Psi_s \partial_t$, $s = 1, \dots, n$, і ∂_u . Модуль M^Ψ є метасингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ і $\text{sco}_{\mathcal{L}} M^\Psi \leq 1$ для кожного Ψ . Тому результати § 4.8 релевантні у цьому випадку. Кількість таких метасингулярних модулів з копорядком сингулярності 1 є нескінченною, оскільки вони параметризовані функцією Φ , яка пробігає множину розв'язків зазначеного рівняння ейконала, з $\Phi_t \neq 0$.

Приклад 4.5. Опишемо сингулярні одновимірні модулі для $(1+1)$ -вимірного нелінійного хвильового рівняння загального вигляду

$$u_{tt} - (G(u)u_x)_x - F(u) = 0,$$

де F і G — довільні гладкі функції змінної u з $G > 0$. Для зручності використаємо специфічні позначення для змінних: $t = x_0$, $x = x_1$. Випадок $G = \text{const}$ у характеристичних змінних вичерпно розглянуто Кунзінгером і Поповичем (2010).

Позначимо нелінійне хвильове рівняння з фіксованими F і G через $\mathcal{L}$. Нехай векторне поле $Q_1 = \tau \partial_t + \xi \partial_x + \eta \partial_u$, де компоненти τ , ξ , η — гладкі функції змінних (t, x, u) , причому $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$, породжує одновимірний модуль Q . Модуль Q є сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$ тоді й лише тоді, коли він є строго сингулярним для рівняння $\mathcal{L}$, тобто $\text{sco}_{\mathcal{L}} Q \leq 1$. Тоді обидві компоненти τ і ξ з необхідністю є ненульовими. Змінивши базис Q , можна покласти $\tau = 1$. У новому базисі умова $\text{sco}_{\mathcal{L}} Q \leq 1$ є еквівалентною такому обмеженню на компоненту ξ :

$$\xi = \pm g(u), \quad \text{де} \quad g := \sqrt{G}.$$

Це означає, що рівняння $\mathcal{L}$ допускає рівно два двовимірні метасингулярні модулі $M_\pm = \langle \partial_t \pm g \partial_x, \partial_u \rangle$ з $\text{sco}_{\mathcal{L}} M_\pm = 1$, а тому результати § 4.8 тут є релевантними.

Копорядок сингулярності модуля Q для рівняння $\mathcal{L}$ є недодатним, тобто $(w)\text{sco}_{\mathcal{L}} Q \leq 0$, тоді й лише тоді, коли компонента η додатково

задовольняє рівняння

$$(\sqrt{g}\eta)_u = 0, \quad \text{тобто} \quad \eta = \frac{\alpha(t, x)}{\sqrt{g}}$$

з деякою гладкою функцією α змінних (t, x) . Якщо вибрати похідну u_t головною в характеристичному рівнянні $Q_1[u] = 0$, то ліва частина рівняння $\mathcal{L}$ асоційована на многовиді $\mathcal{Q}_{(2)}$ з функцією

$$\hat{L} = \frac{\alpha_t - g\alpha_x}{\sqrt{g}} - \frac{\alpha^2 g_u}{2g^2} - F,$$

яка залежить лише від (t, x, u) . Якщо рівняння $\hat{L} = 0$ можна розв'язати відносно u , то $\text{wscoc}_{\mathcal{L}} Q = 0$; інакше $\text{wscoc}_{\mathcal{L}} Q = -\infty$. Умовою виокремлення ультрасингулярних модулів серед модулів з недодатним копорядком сингулярності є $\hat{L} \equiv 0$. У випадку $g_u \neq 0$ це означає, що існують сталі b , a_0 і a_1 такі, що $F = bg_u/(2g^2)$, $\alpha = \alpha(z)$, де $z = a_0 t + a_1 x$ і $\alpha_z = \alpha^2 + b$. Нестале значення параметр-функції α можливе лише для g , що задовольняє рівняння $g_u = 2g^{3/2}(a_0 - a_1 g)$.

Для $\alpha = \text{const}$ умов на g немає. Тому для будь-якої невід'ємної гладкої функції $g = g(u)$ і будь-якої сталої α кожне векторне поле $Q_{\pm} = \partial_t \pm g\partial_x + \alpha g^{-1/2}\partial_u$ породжує ультрасингулярний модуль редукції рівняння $u_{tt} = (g^2 u_x)_x - \alpha^2 g_u/(2g^2)$, яке допускає факторизацію

$$u_{tt} - (g^2 u_x)_x + \frac{\alpha^2 g_u}{2g^2} = \left(D_t \mp D_x \circ g - \frac{\alpha g_u}{2g^{3/2}} \right) \left(u_t \pm g u_x - \frac{\alpha}{g^{1/2}} \right).$$

Для $g = 1/u$ цю факторизацію отримано Манганаро і Павловим (2014) у термінах “редукцій першого порядку”. Інтерпретація і розвиток результатів прикладу 4.5 для $(1+1)$ -вимірних хвильових рівнянь, аналогічно тому, як це зроблено у частинному випадку $G = \text{const}$, потребують подальших досліджень.

5 Групова класифікація та точні розв'язки диференціальних рівнянь

5.1 Групоїд еквівалентності та нормалізаційні властивості рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами

Допустимим перетворенням у класі диференціальних рівнянь називають впорядковану трійку, що складається з двох рівнянь заданого класу та невідродженого точкового перетворення, що переводить перше з цих рівнянь у друге. Множина допустимих перетворень має структуру групоїда відносно бінарної операції композиції перетворень та називається групоїдом еквівалентності. Клас диференціальних рівнянь, групоїд еквівалентності якого породжено відповідною групою еквівалентності, називають нормалізованим. Такі класи є найбільш зручними для дослідження [Popovych R.O., Bihlo A., Symmetry preserving parameterization schemes, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 073102, 36 pp]. Допустимі перетворення дозволяють суттєво спростити класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь, зокрема, класифікації різних типів симетрій, пошуку локальних законів збереження і точних розв'язків, а також дослідження інтегровності [Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Equivalence transformations in the study of integrability, *Phys. Scr.* **89**, № 3, (2014), 038003, 9 pp]. Отже, важливою задачею є пошук групоїдів еквівалентності для класів рівнянь, що є цікавими для застосувань, та дослідження їх на нормалізованість.

У роботі [19] знайдено групоїд еквівалентності класу рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\mathcal{L}: \quad u_t + f(t, x)uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0, \quad fg \neq 0. \quad (5.1)$$

5.1.1 Допустимі перетворення

Добре відомо, що будь яке точкове перетворення $\mathcal{T}$, що пов'язує два фіксованих $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівняння має вигляд $\tilde{t} = T(t)$,

$\tilde{x} = X(t, x, u)$, $\tilde{u} = U(t, x, u)$, причому виконується умова невиродженості $T_t(X_x U_u - X_u U_x) \neq 0$. Частинні похідні, що входять у рівняння (5.1) перетворюються таким чином:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{\tilde{t}} &= \frac{1}{T_t} \left(D_t U - \frac{D_t X}{D_x X} D_x U \right), \quad \tilde{u}_{\tilde{x}} = \frac{D_x U}{D_x X}, \\ \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} &= \frac{1}{D_x X} D_x \left(\frac{1}{D_x X} D_x \left(\frac{D_x U}{D_x X} \right) \right),\end{aligned}$$

де $D_t = \partial_t + u_t \partial_u + u_{tt} \partial_{u_t} + u_{tx} \partial_{u_x} + \dots$ і $D_x = \partial_x + u_x \partial_u + u_{tx} \partial_{u_t} + u_{xx} \partial_{u_x} + \dots$ — оператори повного диференціювання за змінними t і x , відповідно. Тут і надалі нижні індекси позначають частинні похідні за відповідними змінними. Підставляючи ці вирази в рівняння $\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}) \tilde{u} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) \tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} = 0$, отримуємо рівняння в змінних t, x , та u . Для того, щоб пов'язати отримане рівняння з многовидом, визначеним рівнянням (5.1) у просторі джетів третього порядку з незалежними змінними (t, x) та залежною змінною u , підставимо в нього вираз $u_t = -f(t, x)u u_x - g(t, x)u_{xx}$. Розщеплюємо отриманий вираз, що тотожно дорівнює нулю, за частинними похідними функції u , в результаті отримуємо визначальні рівняння на функції T, X , та U . Коефіцієнт при u_{xxx} має вигляд $(\tilde{g}T_t - g(X_x + X_u u_x)^3)(X_x U_u - X_u U_x)$. Прирівнюємо цей вираз до нуля і берем до уваги умову невиродженості $T_t(X_x U_u - X_u U_x) \neq 0$, отже $\tilde{g}T_t - g(X_x + X_u u_x)^3 = 0$. Далі розщеплюємо за похідною u_x , що призводить до умов $X_u = 0$ та $\tilde{g}T_t = gX_x^3$. Отже, $X = X(t, x)$. Умова $X_u = 0$ призводить до суттєвого спрощення визначальних рівнянь, в результаті отримуємо подальші обмеження на вигляд коефіцієнтів X та U : $U_{uu} = U_{xu} = X_{xx} = 0$. Отже, компоненти перетворень для незалежних та залежних змінних мають вигляд

$$\tilde{t} = \theta(t), \quad \tilde{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \quad \tilde{u} = \varphi(t)u + \psi(t, x),$$

де $\theta, \alpha, \beta, \varphi$ та ψ — довільні гладкі функції своїх змінних, причому $\dot{\theta}\alpha\varphi \neq 0$.

Формули

$$\tilde{f} = \frac{\alpha}{\dot{\theta}\varphi} f, \quad \tilde{g} = \frac{\alpha^3}{\dot{\theta}} g \quad (5.2)$$

встановлюють зв'язок між довільними елементами вихідного та кінцевого рівнянь.

Класифікуючі умови, що містять функції θ , α , β , φ , ψ довільні елементи класу f і g , мають вигляд

$$f\psi_x + \dot{\varphi} = 0, \quad (5.3)$$

$$f\alpha\psi = \varphi(\dot{\alpha}x + \dot{\beta}), \quad (5.4)$$

$$\psi_t + g\psi_{xxx} = 0. \quad (5.5)$$

Для того, щоб знайти групу еквівалентності класу (5.1), розщеплюємо рівняння (5.3)–(5.5) за довільними елементами класу f і g . В результаті отримуємо рівняння

$$\dot{\alpha} = \dot{\beta} = \dot{\varphi} = \psi = 0.$$

Справедливе твердження.

Теорема 5.1. *Клас $\mathcal{L}$ рівнянь (5.1) допускає звичайну групу еквівалентності $G^\sim$, що складається з перетворень:*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3 u, \\ \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{\delta_1}{\delta_3 \dot{\theta}(t)} f(t, x), \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , причому $\dot{\theta} \neq 0$, δ_j , $j = 1, 2, 3$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Клас $\mathcal{L}$ не є нормалізованим, проте існують підкласи цього класу, що виокремлюються умовами на довільні елементи f і g , що допускають ширші групи еквівалентності ніж група $G^\sim$. Ці підкласи і відповідні *максимальні умовні групи еквівалентності* можна знайти, досліджуючи систему рівнянь (5.3)–(5.5).

З рівняння (5.3) випливає, що $\psi = \frac{1}{f} \frac{\varphi}{\alpha} (\dot{\alpha}x + \dot{\beta})$, тоді рівняння (5.4) набуває вигляду

$$\left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} x + \frac{\dot{\beta}}{\alpha} \right) f_x = \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right) f.$$

Існує три можливих випадки: I. $f = f(t) \neq 0$; II. $f = p(t)e^{q(t)x}$, $pq \neq 0$, III. $f = p(t)(x + q(t))^{r(t)}$, $pr \neq 0$. Розглянемо кожен із цих випадків окремо.

I. Нехай $f = f(t) \neq 0$. Якщо функція f не залежить від просторової змінної, то з рівнянь (5.3)–(5.5) випливають умови $\psi_t = \psi_{xx} = 0$, а отже $\psi = c_1x + c_2$, де c_1 і c_2 — довільні сталі. Рівняння (5.5) стає тотожністю, отже обмежень на вигляд функції g немає і вона може бути довільною гладкою функцією. З рівнянь (5.3), (5.4) отримуємо умови на функції α , β , φ : $\dot{\varphi} = -c_1f$, $\varphi\dot{\alpha} = c_1f\alpha$, і $\varphi\dot{\beta} = c_2f\alpha$. Загальний розв'язок цієї системи і формули (5.2) дають повний опис допустимих перетворень підкласу класу (5.1) з $f_x = 0$. Після перепозначення сталих $c_1 = -\delta_3$, $c_2 = -\delta_2\delta_3/\delta_1$ формулюємо твердження.

Теорема 5.2. *Розширена узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_1^\sim$ класу*

$$\mathcal{L}_1 : \quad u_t + f(t)uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0, \quad (5.6)$$

складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \frac{\delta_1 x + \delta_2}{\delta_3 \int f(t) dt + \delta_4} + \delta_5, \\ \tilde{u} &= \left(\delta_3 \int f(t) dt + \delta_4 \right) u - \delta_3 x - \frac{\delta_2 \delta_3}{\delta_1}, \\ \tilde{f}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_1}{\dot{\theta}(t)(\delta_3 \int f(t) dt + \delta_4)^2} f(t), \\ \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{\delta_1^3}{\dot{\theta}(t)(\delta_3 \int f(t) dt + \delta_4)^3} g(t, x), \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t з $\dot{\theta} \neq 0$, δ_j , $j = 1, 2, 3, 4, 5$, — довільні сталі, що задовольняють умови $\delta_1(\delta_3^2 + \delta_4^2) \neq 0$.

Звичайна група еквівалентності класу (5.6) співпадає з групою еквівалентності $G^\sim$ його надкласу (5.1).

II. Нехай $f = p(t)e^{q(t)x}$, де $pq \neq 0$. В цьому випадку ми фактично маємо репараметризацію класу, оскільки замість довільного елементу $f(t, x)$ маємо два нові довільні елементи $p(t)$ і $q(t)$. Відношення еквівалентності для них задано формулами $\tilde{q} = \frac{q}{\alpha}$, $\tilde{p} = \frac{p\alpha}{\varphi\dot{\theta}} \exp(-q\beta/\alpha)$. З рівнянь (5.3)–(5.5) випливають умови $\psi = \frac{\dot{\varphi}}{pq} e^{-qx}$, $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = \frac{\dot{\varphi}\alpha}{\varphi q}$. Функція g має вигляд $g = \frac{s(t) - \dot{q}x}{q^3}$ з додатковою функцією $s(t)$, що задовольняє формулу $s = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} - \frac{\dot{p}}{p} - \frac{\dot{q}}{q}$. Функцію g тепер також репараметризовано і функція s є новим довільним елементом. Допустимі перетворення у виокремленому підкласі описано у твердженні.

Теорема 5.3. *Клас рівнянь*

$$\mathcal{L}_2: \quad u_t + p(t)e^{q(t)x}uu_x + \frac{s(t) - \dot{q}(t)x}{q(t)^3}u_{xxx} = 0$$

допускає розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_2^\sim$, що складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \beta(t), \quad \tilde{u} = \varphi(t)u + \frac{\dot{\varphi}(t)}{p(t)q(t)}e^{-q(t)x}, \\ \tilde{p}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_1}{\dot{\theta}(t)\varphi(t)}e^{-\frac{1}{\delta_1}\beta(t)q(t)}p(t), \quad \tilde{q}(\tilde{t}) = \frac{q(t)}{\delta_1}, \\ \tilde{s}(\tilde{t}) &= \frac{1}{\delta_1\dot{\theta}(t)}(\delta_1 s(t) + \dot{q}(t)\beta(t)), \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , причому $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\beta(t) = \delta_1 \delta_3 \int \frac{p(t)e^{\int s(t) dt}}{\varphi(t)} dt + \delta_2, \quad \varphi(t) = \delta_3 \int p(t)q(t)e^{\int s(t) dt} dt + \delta_4.$$

Тут δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1(\delta_3^2 + \delta_4^2) \neq 0$.

III. Нехай $f = p(t)(x + q(t))^{r(t)}$ з $pr \neq 0$. У цьому випадку з рівняння (5.4) випливає $\psi = \frac{\varphi(\dot{\alpha}x + \dot{\beta})}{\alpha p(x + q)^r}$, тоді (5.3) призводить до умов $\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} = (r-1)\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$, $\dot{\beta} = q\dot{\alpha}$. Функцію ψ можна переписати як $\psi = \frac{\varphi}{p} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} (x+q)^{1-r}$. Тоді рівняння (5.5) набуває вигляду

$$r(r^2 - 1)g = (x + q)^3 \left(s - \dot{r} \ln(x + q) + \frac{(1 - r)\dot{q}}{x + q} \right),$$

де функція s , яку вважатимемо новим довільним елементом, задовольняє рівняння $s \frac{\varphi}{p} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\varphi}{p} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \right)$.

У спеціальних випадках $r = 1$ і $r = -1$ функція g залишається довільною. Розглянемо випадки $r \neq \pm 1$, $r = 1$ і $r = -1$ окремо. Загальний розв'язок визначальних рівнянь у кожному з цих випадків призводить до повного опису допустимих перетворень у відповідному підкласі класу (5.1). Результати сформульовано у трьох теоремах нижче. Якщо c — довільна стала, введемо додаткову репараметризацію $k = 1/p$, тоді f набуває вигляду $f = k(t)/(x + c)$.

Теорема 5.4. *Розширена узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_3^\sim$ класу*

$$\mathcal{L}_3: \quad u_t + p(t)(x + q(t))^{r(t)} u u_x + \frac{(x + q(t))^3}{r(t)(r(t)^2 - 1)} \left(s(t) - \dot{r}(t) \ln(x + q(t)) + \frac{(1 - r(t))\dot{q}(t)}{x + q(t)} \right) u_{xxx} = 0,$$

$r \neq 0, \pm 1$, складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \quad \tilde{u} = \varphi(t)u + \delta_1 e^{\int s(t) dt} (x + q(t))^{1-r(t)}, \\ \tilde{p}(\tilde{t}) &= \frac{\alpha(t)^{1-r(t)}}{\phi(t)\dot{\theta}(t)} p(t), \quad \tilde{q}(\tilde{t}) = q(t)\alpha(t) - \beta(t), \\ \tilde{s}(\tilde{t}) &= \frac{1}{\dot{\theta}(t)} (s(t) + \dot{r}(t) \ln \alpha(t)), \quad \tilde{r}(\tilde{t}) = r(t), \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , причому $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\varphi(t) = \delta_1 \int p(t)(r(t) - 1) e^{\int s(t) dt} dt + \delta_2,$$

$$\alpha(t) = \delta_3 \exp \left[\delta_1 \int \frac{p(t)}{\varphi(t)} e^{\int s(t) dt} dt \right], \quad \beta(t) = \int q(t) \dot{\alpha}(t) dt + \delta_4.$$

Тут $\delta_j, j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_3(\delta_1^2 + \delta_2^2) \neq 0$.

Зауваження 5.1. Якщо $r \neq 0, \pm 1$ — стала, то коефіцієнт α можна спростити до вигляду $\alpha(t) = \delta_3 \varphi(t)^{\frac{1}{r-1}}$.

Теорема 5.5. Клас рівнянь вигляду

$$\mathcal{L}_4: \quad u_t + (p(t)x + q(t))uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$$

допускає розширену узагальнену групу еквівалентності $\hat{G}_4^\sim$, що складається з перетворень:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \quad \tilde{u} = \delta_1(u + \delta_2), \\ \tilde{p}(\tilde{t}) &= \frac{p(t)}{\delta_1 \dot{\theta}(t)}, \quad \tilde{q}(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta_1 \dot{\theta}(t)}(\alpha(t)q(t) - \beta(t)p(t)), \\ \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{\alpha(t)^3}{\dot{\theta}(t)}g(t, x), \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , причому $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\alpha(t) = \delta_3 e^{\delta_2 \int p(t) dt}, \quad \beta(t) = \delta_2 \delta_3 \int q(t) e^{\delta_2 \int p(t) dt} dt + \delta_4.$$

Тут $\delta_j, j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Теорема 5.6. Розширена узагальнена група еквівалентності $\hat{G}_5^\sim$ класу рівнянь

$$\mathcal{L}_5: \quad u_t + \frac{k(t)}{x+c}uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$$

складається з перетворень

$$\tilde{t} = \theta(t), \quad \tilde{x} = \alpha(t)(x+c) + \delta_2, \quad \tilde{u} = \frac{\delta_1}{\alpha(t)^2}u - \frac{1}{2}\delta_1\delta_3(x+c)^2,$$

$$\tilde{k}(\tilde{t}) = \frac{\alpha(t)^4}{\delta_1 \dot{\theta}(t)} k(t), \quad \tilde{c} = -\delta_2, \quad \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\alpha(t)^3}{\dot{\theta}(t)} g(t, x),$$

де θ — довільна функція змінної t , причому $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\alpha(t) = \pm \left(\delta_3 \int k(t) dt + \delta_4 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

і δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1(\delta_3^2 + \delta_4^2) \neq 0$.

Теорема 5.7. Класи $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$ є нормалізованими в розширеному узагальненому сенсі, їхні групоїди еквівалентності породжено перетвореннями з відповідних розширених узагальнених груп еквівалентності $\hat{G}_i^\sim$, $i = 1, \dots, 5$.

Теорема 5.8. Підклас $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \setminus \bigcup_{i=1}^5 \mathcal{L}_i$, що є доповненням до об'єднання підкласів $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, 5$, в класі $\mathcal{L}$ є нормалізованим у звичайному сенсі. Його група еквівалентності співпадає зі звичайною групою еквівалентності $G^\sim$ всього класу $\mathcal{L}$.

5.1.2 Групи еквівалентності підкласів $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_5$

Використаємо перетворення зі знайдених груп еквівалентності для калібрування довільних елементів, що залежать від змінної t , в кожному підкласі $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_5$ класу $\mathcal{L}$ до сталих значень, а отже для зменшення кількості довільних елементів. Розглянемо кожен випадок окремо.

$\mathcal{L}_1$. Перетворення еквівалентності $\tilde{t} = \int f(t) dt$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$ з групи $\hat{G}_1^\sim$, редукує кожне рівняння з класу (5.6) до рівняння з того ж класу з $\tilde{f} = 1$. Отже, не втрачаючи загальності можна обмежитись розглядом підкласу класу (5.6) вигляду

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 : \quad u_t + uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0.$$

Оскільки клас $\mathcal{L}_1$ є нормалізованим, легко знайти групу еквівалентності його підкласу $\tilde{\mathcal{L}}_1$. Покладемо $\tilde{f} = f = 1$ в перетвореннях з групи $\hat{G}_1^\sim$

і отримаємо рівняння на θ вигляду $\dot{\theta} = \delta_1/(\delta_3 t + \delta_4)^2$. Також для того, щоб об'єднати обидва випадки $\delta_3 = 0$ і $\delta_3 \neq 0$, перепозначимо сталі. Отримуємо твердження.

Наслідок 5.1. *Звичайна група еквівалентності класу $\check{\mathcal{L}}_1$ складається з перетворень*

$$\tilde{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{u} = \frac{\kappa(\gamma t + \delta) - \kappa\gamma x + \mu_1\delta - \mu_0\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

$$\tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\kappa^3}{\alpha\delta - \beta\gamma} \frac{g(t, x)}{\gamma t + \delta},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \mu_1, \mu_0$ — сталі, які визначено з точністю до ненульового сталого множника, причому $\kappa(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$.

$\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_4$. Кожне рівняння з класів $\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4$, можна звести до рівнянь з тих самих класів з $\tilde{p} = 1$ перетвореннями еквівалентності $\tilde{t} = \int p(t) dt$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{u} = u$. Групи еквівалентності підкласів наведено у таких твердженнях

Наслідок 5.2. *Розширена узагальнена група еквівалентності $\check{G}_2^\sim$ класу*

$$\check{\mathcal{L}}_2: \quad u_t + e^{q(t)x} u u_x + \frac{s(t) - \dot{q}(t)x}{q(t)^3} u_{xxx} = 0$$

складається з перетворень

$$\tilde{t} = \delta_1 \int \frac{1}{\varphi(t)} e^{-\frac{1}{\delta_1} \beta(t) q(t)} dt + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \beta(t),$$

$$\tilde{u} = \varphi(t) u + \delta_3 e^{-q(t)x + \int s(t) dt},$$

$$\tilde{q}(\tilde{t}) = \frac{q(t)}{\delta_1}, \quad \tilde{s}(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta_1^2} \varphi(t) e^{\frac{1}{\delta_1} \beta(t) q(t)} (\delta_1 s(t) + \dot{q}(t) \beta(t)),$$

де δ_j , $j = 0, 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, причому $\delta_1(\delta_3^2 + \delta_4^2) \neq 0$,

$$\beta(t) = \delta_1 \delta_3 \int \frac{e^{\int s(t) dt}}{\varphi(t)} dt + \delta_2, \quad \varphi(t) = \delta_3 \int q(t) e^{\int s(t) dt} dt + \delta_4.$$

Наслідок 5.3. Розширена узагальнена група еквівалентності $\check{G}_3^\sim$ класу

$$\check{\mathcal{L}}_3: \quad u_t + (x + q(t))^{r(t)} u u_x + \frac{(x + q(t))^3}{r(t)(r(t)^2 - 1)} \left(s(t) - \dot{r}(t) \ln(x + q(t)) + \frac{(1 - r(t))\dot{q}(t)}{x + q(t)} \right) u_{xxx} = 0,$$

складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \alpha(t)x + \beta(t), \\ \tilde{u} &= \varphi(t)u + \delta_1 e^{\int s(t) dt} (x + q(t))^{1-r(t)}, \quad \tilde{q}(\tilde{t}) = q(t)\alpha(t) - \beta(t), \\ \tilde{s}(\tilde{t}) &= \alpha(t)^{r(t)-1} \varphi(t) (s(t) + \dot{r}(t) \ln \alpha(t)), \quad \tilde{r}(\tilde{t}) = r(t), \end{aligned}$$

де θ — довільна функція змінної t , причому $\dot{\theta} \neq 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \delta_1 \int (r(t) - 1) e^{\int s(t) dt} dt + \delta_2, \\ \alpha(t) &= \delta_3 \exp \left[\delta_1 \int \frac{e^{\int s(t) dt}}{\varphi(t)} dt \right], \quad \beta(t) = \int q(t) \dot{\alpha}(t) dt + \delta_4. \end{aligned}$$

Тут δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, що задовольняють умову $(\delta_1^2 + \delta_2^2)\delta_3 \neq 0$.

Наслідок 5.4. Розширена узагальнена група еквівалентності $\check{G}_4^\sim$ класу

$$\check{\mathcal{L}}_4: \quad u_t + (x + q(t)) u u_x + g(t, x) u_{xxx} = 0. \quad (5.7)$$

складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{1}{\delta_1} t + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_3 e^{\delta_2 t} x + \delta_2 \delta_3 \int q(t) e^{\delta_2 t} dt + \delta_4, \quad \tilde{u} = \delta_1 (u + \delta_2), \\ \tilde{q}(\tilde{t}) &= \delta_3 e^{\delta_2 t} q(t) - \delta_2 \delta_3 \int q(t) e^{\delta_2 t} dt - \delta_4, \quad \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \delta_1 \delta_3^3 e^{3\delta_2 t} g(t, x), \end{aligned}$$

де δ_j , $j = 0, 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

$\mathcal{L}_5$. У випадку підкласу $\mathcal{L}_5$ класу (5.1) можна відкалібрувати одразу два довільні елементи, а саме функцію $k(t)$ можна звести до одиниці, а сталу c до нуля. Це калібрування можна зробити перетворенням

еквівалентності $\tilde{t} = \int k(t) dt$, $\tilde{x} = x + c$, $\tilde{u} = u$. Групу еквівалентності відкаліброваного класу

$$\check{\mathcal{L}}_5 : \quad u_t + \frac{1}{x}uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$$

наведено у твердженні.

Наслідок 5.5. *Звичайну групу еквівалентності $\check{G}_5$ класу $\check{\mathcal{L}}_5$ складають перетворення*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = (\gamma t + \delta)^{-\frac{1}{2}}x, \quad \tilde{u} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \left((\gamma t + \delta)u - \frac{1}{2}\gamma x^2 \right), \\ \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \frac{(\gamma t + \delta)^{\frac{1}{2}}}{\alpha\delta - \beta\gamma} g(t, x), \end{aligned}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — довільні сталі, які визначено з точністю до ненульового множника, причому $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Всі відкалібровані підкласи залишаються нормалізованими, їхні групи еквівалентності генеруються відповідними групами еквівалентності, наведеними вище. Справедливе твердження.

Теорема 5.9. *Класи $\check{\mathcal{L}}_1$ і $\check{\mathcal{L}}_5$ — нормалізовані у звичайному сенсі. Класи $\check{\mathcal{L}}_2, \check{\mathcal{L}}_3, \check{\mathcal{L}}_4$ — нормалізовані в узагальненому розширеному сенсі.*

З цього випливає, що трансформаційні властивості класів $\check{\mathcal{L}}_1$ і $\check{\mathcal{L}}_5$ кращі за подібні властивості їх надкласів $\mathcal{L}_1$ і $\mathcal{L}_5$. Ці класи вже зручно досліджувати з симетрійної точки зору. Класи $\check{\mathcal{L}}_2, \check{\mathcal{L}}_3, \check{\mathcal{L}}_4$ залишаються нормалізованими в розширеному узагальненому сенсі, що викликає складності при їх дослідженні. Шляхи покращення запропоновано у наступному підрозділі.

5.1.3 Покращення трансформаційних властивостей класів методом перетворень між класами

Класи диференціальних рівнянь, що допускають розширені узагальнені групи еквівалентності, є більш складними для дослідження, тому ви-

користаємо метод перетворень між класами, запропонований у роботі [Vaneeva O.O., Porovych R.O., Sophocleous C., *Acta Appl. Math.* **106** (2009), 1–46]. Цей метод особливо ефективний для задач групового аналізу диференціальних рівнянь. Розглянемо підклас $\check{\mathcal{L}}_4$ класу (5.1). Цей клас можна відобразити у клас

$$u_t + x u u_x + h(t) u_x + g(t, x) u_{xxx} = 0 \quad (5.8)$$

сім'єю точкових перетворень

$$\hat{t} = t, \quad \hat{x} = x + q(t), \quad \hat{u} = u, \quad (5.9)$$

параметризованою довільним елементом q класу $\check{\mathcal{L}}_4$. Довільний елемент h класу-образу пов'язаний із довільним елементом q у вихідному класі за формулою $h(t) = \dot{q}(t)$. Отже, випадок $q = \text{const}$ відповідає випадку $h = 0$. На відміну від класу $\check{\mathcal{L}}_4$, що є нормалізованим у розширеному узагальненому сенсі, клас (5.8) — нормалізований у звичайному сенсі. Групоїд еквівалентності класу (5.8) породжено перетвореннями з його звичайної групи еквівалентності $G_4^\sim$:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_3 e^{\delta_4 t} x, \quad \tilde{u} = \frac{1}{\delta_1} (u + \delta_4), \\ \tilde{h}(\tilde{t}) &= \frac{\delta_3}{\delta_1} e^{\delta_4 t} h(t), \quad \tilde{g}(\tilde{t}, \tilde{x}) = \frac{\delta_3^3}{\delta_1} e^{3\delta_4 t} g(t, x), \end{aligned}$$

де δ_j , $j = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Групову класифікацію класу (5.9) виконано класичним методом Лі–Овсяннікова, що базується на інтегруванні визначальних рівнянь та розгляді лише нееквівалентних з точністю до перетворень з групи $G_4^\sim$ випадків. Результати групової класифікації класу (5.9) з $h \neq 0$ та $h = 0$ представлено у табл. 5.1 і табл. 5.2, відповідно.

Групова класифікація рівнянь (5.7) з $q \neq \text{const}$ можна відновити з результатів класифікації, отриманих для класу equations (5.8) з $h \neq 0$, використовуючи перетворення (5.9). Результати наведено у табл. 5.3.

Табл. 5.1: Групова класифікація класу $u_t + xuu_x + h(t)u_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$, $hg \neq 0$.

№	$h(t)$	$g(t, x)$	Умови	Базис $A^{\max}$
1	t^{m-1}	$t^{3m-1}\Phi(x/t^m)$	$\Phi(z) \neq \lambda z^2$ для $m = 1$	$t\partial_t + mx\partial_x - u\partial_u$
2	$e^{\frac{\varepsilon}{2}t^2}$	$e^{\frac{3\varepsilon}{2}t^2}\Phi\left(xe^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}\right)$		$\partial_t + \varepsilon tx\partial_x + \varepsilon\partial_u$
3	1	$\Phi(x)$	$\Phi(x) \neq \lambda x^2$	∂_t
4	1	λx^2		$\partial_t, t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$

Тут $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_4^\sim$, λ і m — довільні сталі, $\lambda \neq 0$.

Табл. 5.2: Групова класифікація класу $u_t + xuu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$, $g \neq 0$.

№	$g(t, x)$	Умови	Базис $A^{\max}$
1	$\Phi(x)$	$\Phi(x) \neq \lambda x^m$	∂_t
2	$t^{3m-1}\Phi(x/t^m)$	$\Phi(z) \neq \lambda z^3, \lambda z^{\frac{3m-1}{m}}$	$t\partial_t + mx\partial_x - u\partial_u$
3	$e^{\frac{3\varepsilon}{2}t^2}\Phi\left(xe^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}\right)$	$\Phi(z) \neq \lambda z^3$	$\partial_t + \varepsilon tx\partial_x + \varepsilon\partial_u$
4	x^m	$m \neq 3$	$\partial_t, t\partial_t + \frac{1}{3-m}x\partial_x - u\partial_u$
5	$\Phi(t)x^3$	$\Phi(t) \neq \lambda, \frac{1}{\lambda t + \nu}$	$x\partial_x, tx\partial_x + \partial_u$
6	x^3		$\partial_t, x\partial_x, tx\partial_x + \partial_u$
7	$\lambda \frac{x^3}{t}$		$x\partial_x, t\partial_t - u\partial_u, tx\partial_x + \partial_u$

Тут $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_4^\sim$, m , λ і ν — довільні сталі, $\lambda \neq 0$.

Групова класифікація класу (5.7) з $q = \text{const}$ співпадає з класифікацією, отриманою для класу (5.8) з $h = 0$, а отже її результати наведено у табл. 2.

Підсумуємо, що в роботі [19] вичерпно досліджено допустимі перетворення в класі рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами s (5.1). Будь-яке контактне допустиме перетворення між двома рівняннями з класу (5.1) є першим продовженням точкового перетворення між

Табл. 5.3: Групова класифікація класу $u_t + (x + q(t))uu_x + g(t, x)u_{xxx} = 0$, $\dot{q}g \neq 0$.

№	$q(t)$	$g(t, x)$	Умови	Basis of $A^{\max}$
1	t^m	$t^{3m-1}\Phi\left(\frac{x}{t^m}\right)$	$\Phi(z) \neq \lambda(z+1)^2$ для $m = 1$	$t\partial_t + mx\partial_x - u\partial_u$
2	$\ln t$	$t^{-1}\Phi(x + \ln t)$		$t\partial_t - \partial_x - u\partial_u$
3	$\int e^{\frac{\varepsilon}{2}t^2} dt$	$e^{\frac{3\varepsilon}{2}t^2}\Phi\left((x+q)e^{-\frac{\varepsilon}{2}t^2}\right)$		$\partial_t + \left(\varepsilon t\omega - e^{\frac{\varepsilon}{2}t^2}\right)\partial_x + \varepsilon\partial_u$
4	t	$\Phi(x+t)$	$\Phi(z) \neq \lambda z^2$	$\partial_t - \partial_x$
5	t	$\lambda(x+t)^2$		$\partial_t - \partial_x, t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$

Тут $\varepsilon = \pm 1 \bmod \tilde{G}_4$, λ і m — довільні ненульові сталі.

цими рівняннями [Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C., Equivalence transformations in the study of integrability, *Physica Scripta*, **89(3)** (2014), 038003, 9 pp]. Отже, знання точкового групоїду еквівалентності дає вичерпний опис контактного групоїду еквівалентності в цьому класі. Доведено, що клас (5.1) не є нормалізованим. Групоїд еквівалентності цього класу має складну структуру, а саме клас (5.1) можна розбити на шість нормалізованих підкласів, що не перетинаються.

5.2 Класифікація операторів редукції нелінійних рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля

Оператором редукції (1+1)-вимірного диференціального рівняння з частинними похідними з незалежними змінними t, x і залежною змінною u є такий лінійний диференціальний оператор $Q = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u$, $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$, що відповідна умова інваріантної поверхні $Q[u] := \tau u_t + \xi u_x - \eta = 0$ дозволяє побудувати анзац, що редукує кількість незалежних змінних на одну. Таким чином такий оператор дозволяє редукувати (1+1)-вимірне диференціального рівняння з частинними похідними до звичайного диференціального рівняння.

У роботі [65] прокласифіковано ліївські та регулярні некласичні оператори редукції рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами, що належать до класу

$$u_t = a^2(t)u_{xx} + b(t)u - c(t)u^3, \quad (5.10)$$

де $a(t)$, $b(t)$ та $c(t)$ — довільні гладкі функції змінної t , $ac \neq 0$.

Для того щоб спростити класифікаційну задачу та зменшити кількість довільних елементів у класі, спочатку досліджено допустимі перетворення в цьому класі. Використовуючи прямий метод, доведено, що групоїд еквівалентності класу (5.10) породжено невивірженими точковими перетвореннями зі звичайної групи еквівалентності цього класу. Отже, клас (5.10) є нормалізованим у звичайному сенсі. Доведено твердження.

Теорема 5.10. *Звичайну групу еквівалентності $G^\sim$ класу (5.10) складають перетворення*

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \theta(t), \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \varphi(t)u, \\ \tilde{a}^2(\tilde{t}) &= \frac{\delta_1^2}{\theta_t} a^2(t), \quad \tilde{b}(\tilde{t}) = \frac{1}{\varphi \theta_t} (\varphi b(t) + \varphi_t), \quad \tilde{c}(\tilde{t}) = \frac{1}{\varphi^2 \theta_t} c(t), \end{aligned}$$

де δ_1 та δ_2 — довільні сталі, що задовольняють умову $\delta_1 \neq 0$, а функції $\theta(t)$ та $\varphi(t)$ — довільні гладкі функції, причому $\theta_t \varphi \neq 0$.

Клас (5.10) є нормалізованим у звичайному сенсі.

Використовуючи теорему 5.10, знайдено умови на коефіцієнти a , b та c , для яких рівняння Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами зводяться точковими перетвореннями до рівнянь з цього ж класу зі сталими коефіцієнтами.

Теорема 5.11. *Рівняння Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами (5.10) зводяться точковим перетворенням до рівняння з цього ж класу зі сталими коефіцієнтами тоді і тільки тоді, коли для*

деякої сталої λ відповідні коефіцієнти $a(t)$, $b(t)$ та $c(t)$ задовольняють умову

$$\frac{b}{a^2} + \frac{1}{2} \frac{(c/a^2)_t}{c} = \lambda.$$

Перетворення еквівалентності дозволяють суттєво спростити досліджуваний клас. Довільний елемент $b(t)$ можна звести до нуля, а $a(t)$ до ненульової сталої, наприклад, до одиниці. Дійсно, перетворення

$$\tilde{t} = \int a^2(t) dt, \quad \tilde{x} = x, \quad \tilde{u} = e^{-\int b(t) dt} u \quad (5.11)$$

відображає клас (5.10) в його підклас

$$u_t = u_{xx} - c(t)u^3. \quad (5.12)$$

Допустимі перетворення класу (5.12) можна знайти з теореми 5.10, де в формулах перетворень довільних елементів покладаємо $\tilde{a}^2 = a^2 = 1$ та $\tilde{b} = b = 0$. Це гарантує повноту результату, оскільки надклас (5.10) класу (5.12) є нормалізованим. Справделиве таке твердження.

Теорема 5.12. *Клас (5.12) є нормалізованим. Групоїд еквівалентності класу (5.12) генерується перетвореннями з його звичайної групи еквівалентності $G_1^\sim$:*

$$\tilde{t} = \delta_1^2 t + \delta_0, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_2, \quad \tilde{u} = \delta_3 u, \quad \tilde{c}(\tilde{t}) = \frac{1}{\delta_1^2 \delta_3^2} c(t),$$

де δ_i , $i = 0, 1, 2, 3$, — довільні сталі з $\delta_1 \delta_3 \neq 0$.

Отже, задача класифікації операторів редукції для класу (5.10) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності зводиться до подібної задачі для класу (5.12) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності.

Групову класифікацію класу (5.12) виконано зі використанням стандартного підходу Лі–Овсяннікова. Шукаються оператори вигляду

$$X = \tau(t, x, u) \partial_t + \xi(t, x, u) \partial_x + \eta(t, x, u) \partial_u, \quad (5.13)$$

що генерують однопараметричні групи Лі точкових перетворень для рівнянь з класу (5.12). Критерій лівської інваріантності вимагає виконання тотожності

$$X^{(2)} \{u_t - u_{xx} + c(t)u^3\} = 0$$

на многовиді рівнянь (5.12), де $X^{(2)}$ — друге продовження оператора X . Доведено теорему.

Теорема 5.13. *Ядром максимальних алгебр лівської інваріантності рівнянь з класу (5.12) є одновимірна алгебра $\langle \partial_x \rangle$. Список $G^\sim$ -нееквівалентних розширень лівської симетрії рівнянь з класу (5.12) вичерпується випадками 1–3 таблиці 5.4.*

Таблиця 5.4 представляє також результати групової класифікації для класу (5.10) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. У всіх випадках $a^2(t) = 1 \bmod G^\sim$, $b(t) = 0 \bmod G^\sim$.

Для подальшого застосування корисно також мати список випадків розширення лівської симетрії без спрощення рівнянь перетвореннями еквівалентності. Для того, щоб отримати такий список, використаємо алгоритм, запропонований у роботі Ванєєвої (2012). Спочатку випишемо найбільш загальні форми функції $c(t)$, для яких відповідні рівняння з класу (5.12) допускають розширення лівської симетрії. Ці коефіцієнти мають вигляд:

- 1) $c(t) = \mu(\gamma t + \delta)^\rho$: $A^{\max} = \langle \partial_x, 2(\gamma t + \delta)\partial_t + \gamma x\partial_x - \gamma(\rho + 1)u\partial_u \rangle$;
- 2) $c(t) = \mu e^{\sigma t}$: $A^{\max} = \langle \partial_x, 2\partial_t - \sigma u\partial_u \rangle$;
- 3) $c(t) = \mu$: $A^{\max} = \langle \partial_x, \partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u \rangle$.

Тут μ , γ , ρ та σ — довільні ненульові сталі, а δ — довільна стала.

Використовуючи перетворення (5.11) і наведений класифікаційний список для класу (5.10), отримуємо класифікацію рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами, де довільні елементи не спрощені перетвореннями еквівалентності. Результати наведено у табл. 5.6.

Табл. 5.4: Групова класифікація класу (5.12) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності.

№	$c(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	∂_x
1	εt^ρ	$\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - (\rho + 1)u\partial_u$
2	$\varepsilon e^{\pm t}$	$\partial_x, 2\partial_t \mp u\partial_u$
3	ε	$\partial_x, \partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u$

Тут ρ — довільна ненульова стала, $\varepsilon = \pm 1 \bmod G_1^\sim$.

Табл. 5.5: Групова класифікація класу (5.10).

№	$c(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	∂_x
1	$\mu a^2 e^{-2 \int b dt} (\gamma T + \delta)^\rho$	∂_x $\frac{2}{a^2} (\gamma T + \delta) \partial_t + \gamma x \partial_x + \left(\frac{2}{a^2} (\gamma T + \delta) b - (\rho + 1) \gamma \right) u \partial_u$
2	$\mu a^2 e^{\sigma T - 2 \int b dt}$	$\partial_x, \frac{2}{a^2} \partial_t + \left(\frac{2b}{a^2} - \sigma \right) u \partial_u$
3	$\mu a^2 e^{-2 \int b dt}$	$\partial_x, \frac{1}{a^2} (\partial_t + b u \partial_u), \frac{2}{a^2} \partial_t + x \partial_x + \left(\frac{2b}{a^2} - 1 \right) u \partial_u$

Тут $a = a(t)$ та $b = b(t)$ — довільні ненульові гладкі функції, $T = \int a^2(t) dt$; μ, σ, δ та ρ — довільні сталі; $\mu \sigma \rho \neq 0$.

Отже, з класу (5.10) виокремлено ті рівняння Ньюела–Вайтхеда–Сегеля, що володіють більш широкими ліївськими симетріями та потенціально є більш цікавими для застосувань. Це також необхідно для дослідження некласичних операторів редукції для того, щоб знайти дійсно нетривіальні оператори редукції, які нееквівалентні ліївським.

Для (1+1)-вимірних еволюційних рівнянь з незалежними змінними t та x та залежною змінною u , оператори редукції мають загальний вигляд (5.13) with $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$. Оператори редукції (5.13) з ненульовими

Табл. 5.6: Некласичні регулярні оператори редукції рівнянь (5.12).

№	$c(t)$	Оператори редукції
1	$e^{\pm t}$	$\partial_t + \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{\pm \frac{1}{2}t}u\partial_x - \frac{1}{2}(3e^{\pm t}u^2 \mp \frac{1}{2})u\partial_u$
	εe^t	$\partial_t - \frac{3}{2}\tanh\left(\frac{1}{2}x\right)\partial_x - \frac{3}{4}(\tanh^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{3})u\partial_u$
		$\partial_t - \frac{3}{2}\coth\left(\frac{1}{2}x\right)\partial_x - \frac{3}{4}(\coth^2\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{3})u\partial_u$
	εe^{-t}	$\partial_t + \frac{3}{2}\tan\left(\frac{1}{2}x\right)\partial_x - \frac{3}{4}(\tan^2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{3})u\partial_u$
2	ε	$\partial_t - \frac{3}{x}\partial_x - \frac{3}{x^2}u\partial_u$

коефіцієнтами при ∂_t є регулярними, а оператори з нульовими коефіцієнтами при ∂_t є сингулярними [1]. Сингулярний випадок $\tau = 0$ вичерпно досліджено в роботах [Kunzinger M., Popovych R.O., *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41** (2008), 505201, 24 pp; Zhdanov R.Z., Lahno V.I., *Phys. D* **122** (1998), 178–186].

Розглянемо випадок $\tau \neq 0$. З точністю до звичайної еквівалентності операторів редукції можна покласти $\tau = 1$. Це відношення еквівалентності означає, що оператори X та $\tilde{X}$ є еквівалентними, якщо $\tilde{X} = \Lambda(t, x, u)X$, де $\Lambda(t, x, u)$ — ненульова гладка функція своїх аргументів.

Критерій неklasичної інваріантності призводить до таких визначальних рівнянь на коефіцієнти ξ та η , а також довільного елемента c :

$$\begin{aligned}\xi_{uu} &= 0, \quad \eta_{uu} = 2(\xi_{xu} - \xi\xi_u), \\ \eta_t - \eta_{xx} + 2\xi_x\eta + (2\xi_x - \eta_u)cu^3 + 3\eta cu^2 + c_tu^3 &= 0, \\ \xi_t - \xi_{xx} + 2\xi\xi_x - 2\xi_u\eta + 2\eta_{xu} - 3\xi_u cu^3 &= 0.\end{aligned}$$

Результати класифікації неklasичних операторів редукції для рівнянь (5.12) з точністю до $G_1^\sim$ -еквівалентності наведено в таблиці 5.6. У всіх випадках цієї таблиці $\varepsilon = \pm 1$. Ця ж таблиця представляє результати класифікації неklasичних операторів редукції рівнянь (5.10) з

точністю до $G^\sim$ -еквівалентності (в цьому випадку $a(t) = 1 \bmod G^\sim$ та $b(t) = 0 \bmod G^\sim$).

5.3 Клас узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній

У цій секції проведено розширений симетрійний аналіз класу $\mathcal{L}|_S$ узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній

$$\mathcal{L}_f: \quad u_t + uu_x + f(t, x)u_{xx} = 0 \quad (5.14)$$

з довільним елементом f , що є ненульовою гладкою функцією від t та x . Цей клас нормалізований, а його група еквівалентності $G^\sim$, є скінченновимірною. Обидва ці факти мають неабияке значення для спрощення всього процесу групової класифікації класу $\mathcal{L}|_S$, а також для проведення редукцій рівнянь з цього класу — як ліівських, так і некласичних.

Параграф 5.3.1 присвячено опису структури алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$ класу $\mathcal{L}|_S$ та алгебри $\mathfrak{g}$, що є проекцією алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ на простір змінних (t, x, u) . У п. 5.3.2 алгебраїчним методом розв'язано задачу групової класифікації для класу $\mathcal{L}|_S$. Процедура класифікації ґрунтується на складенні списку $G^\sim$ -нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$, придатних як максимальні алгебри ліівської інваріантності деяких рівнянь з класу $\mathcal{L}|_S$. Побудові інваріантних розв'язків рівнянь з класу $\mathcal{L}|_S$ присвячено п. 5.3.5, де також прокласифіковано приховані симетрії таких рівнянь, що виникають з ліівських редукцій до звичайних диференціальних рівнянь. У п. 5.3.6 вичерпно описано оператори редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}|_S$. Нагадаємо, що оскільки ці рівняння є еволюційними, множина їхніх операторів редукції природним чином розбивається на дві підмножини — сингулярних та регулярних операторів редукції — залежно від того, чи дорівнює нулю компонента, що відповідає часовій змінній. Більш цікавими для класу $\mathcal{L}|_S$ є регулярні оператори редукції, вивченню яких і

присвячено основну частину п. 5.3.6. Предметом дослідження у п. 5.3.7 є закони збереження, потенціальні допустимі перетворення, потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

5.3.1 Аналіз структури алгебри еквівалентності

Клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, тобто будь-яке допустиме перетворення цього класу породжується перетворенням з його групи еквівалентності $G^{\sim}$.

В якості базисних елементів алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ виберемо векторні поля

$$\begin{aligned}\tilde{P}^t &= \partial_t, & \tilde{P}^x &= \partial_x, & \tilde{D}^t &= t\partial_t - u\partial_u - f\partial_f, & \tilde{D}^x &= x\partial_x + u\partial_u + 2f\partial_f, \\ \tilde{\Gamma} &= t\partial_x + \partial_u, & \tilde{\Pi} &= t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u.\end{aligned}$$

Їм відповідають наступні однопараметричні перетворення з групи еквівалентності $G^{\sim}$:

$$\begin{aligned}\hat{P}^t(\beta): & \quad \tilde{t} = t + \beta, & \tilde{x} &= x, & \tilde{u} &= u, & \tilde{f} &= f, \\ \hat{P}^x(\mu_0): & \quad \tilde{t} = t, & \tilde{x} &= x + \mu_0, & \tilde{u} &= u, & \tilde{f} &= f, \\ \hat{D}^t(\alpha): & \quad \tilde{t} = \alpha t, & \tilde{x} &= x, & \tilde{u} &= \frac{1}{\alpha}u, & \tilde{f} &= \frac{1}{\alpha}f, \\ \hat{D}^x(\kappa): & \quad \tilde{t} = t, & \tilde{x} &= \kappa x, & \tilde{u} &= \kappa u, & \tilde{f} &= \kappa^2 f, \\ \hat{\Gamma}(\mu_1): & \quad \tilde{t} = t, & \tilde{x} &= x + \mu_1 t, & \tilde{u} &= u + \mu_1, & \tilde{f} &= f, \\ \hat{\Pi}(\gamma): & \quad \tilde{t} = \frac{t}{1 + \gamma t}, & \tilde{x} &= \frac{x}{1 + \gamma t}, & \tilde{u} &= (1 + \gamma t)u - \gamma x, & \tilde{f} &= f.\end{aligned}$$

Алгебру еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ можна знайти безпосередньо інфінітезимальним методом Лі — у такий же спосіб, що й оператори ліівської симетрії окремого диференціального рівняння. Але насправді в цьому немає потреби, оскільки, знаючи повну групу еквівалентності $G^{\sim}$, алгебру $\mathfrak{g}^{\sim}$ можна побудувати як множину інфінітезимальних генераторів однопараметричних підгруп групи еквівалентності $G^{\sim}$.

Проекція $\mathfrak{g}$ алгебри $\mathfrak{g}^\sim$ на простір (t, x, u) є лінійною оболонкою базисних елементів

$$\begin{aligned} P^t &= \partial_t, & P^x &= \partial_x, & D^t &= t\partial_t - u\partial_u, & D^x &= x\partial_x + u\partial_u, \\ \Gamma &= t\partial_x + \partial_u, & \Pi &= t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u. \end{aligned}$$

Кожна з алгебр $\mathfrak{g}^\sim$ і $\mathfrak{g}$ є реалізацією так званої редукованої повної алгебри Галілея з нульовим центром у просторі розмірності 1, яка ізоморфна афінній алгебрі Лі $\text{aff}(2, \mathbb{R})$, тобто $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^\sim$. Ненульові комутаційні співвідношення в $\mathfrak{g}$ такі:

$$\begin{aligned} [P^t, D^t] &= P^t, & [D^t, \Pi] &= \Pi, & [P^t, \Pi] &= 2D^t + D^x, \\ [P^x, D^x] &= P^x, & [D^t, \Gamma] &= \Gamma, & [\Gamma, D^x] &= \Gamma, \\ [P^t, \Gamma] &= P^x, & [P^x, \Pi] &= \Gamma. \end{aligned}$$

Розклад Леві алгебри $\mathfrak{g}$ є очевидним:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \in \mathfrak{r}, \quad \text{де} \quad \mathfrak{f} = \langle P^t, D^t + \tfrac{1}{2}D^x, \Pi \rangle, \quad \mathfrak{r} = \langle D^x, P^x, \Gamma \rangle.$$

Підалгебра $\mathfrak{f}$ є фактором Леві алгебри $\mathfrak{g}$; з іншого боку, $\mathfrak{f}$ є реалізацією добре відомої алгебри $\text{sl}(2, \mathbb{R})$. Радикал $\mathfrak{r}$ алгебри $\mathfrak{g}$ є реалізацією алгебри $A_{3,3}$ за класифікацією Мубаракзянова низьковимірних дійсних алгебр. Це майже абелева алгебра, пов'язана з одиничною матрицею розмірності 2×2 . Більш точно, $\mathfrak{r} = \mathfrak{c} \in \mathfrak{n}$, де $\mathfrak{n} = \langle P^x, \Gamma \rangle$, є нільрадикалом (а також максимальним абелевим ідеалом) обох алгебр $\mathfrak{r}$ та $\mathfrak{g}$, а лінійна оболонка $\mathfrak{c} = \langle D^x \rangle$ є підалгеброю Картана алгебри $\mathfrak{r}$. Символами $\text{pr}_{\mathfrak{f}}$ та $\text{pr}_{\mathfrak{c}}$ позначатимемо проектори, визначені розкладом $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} \in (\mathfrak{c} \in \mathfrak{n})$.

Оскільки клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, алгебра $\mathfrak{g}$ містить об'єднання алгебр ліівської інваріантності всіх рівнянь $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Більш того, алгебра $\mathfrak{g}$ співпадає з цим об'єднанням, що показано в наступному підрозділі. Це є ознакою сильної нормалізованості класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ в інфінітезимальному сенсі.

5.3.2 Ліівські симетрії

Для знаходження максимальних алгебр ліівської інваріантності рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ після розв'язання визначальних рівнянь та отримання класифікуючої умови застосуємо алгебраїчний метод.

Визначальні рівняння для ліівських симетрій Векторне поле, що породжує (нетривіальну) однопараметричну групу ліівських симетрій рівняння

$$\mathcal{L}_f: \quad L_f[u] \equiv u_t + uu_x + f(t, x)u_{xx} = 0$$

з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, має вигляд

$$Q = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u, \quad (\tau, \xi, \eta) \neq (0, 0, 0),$$

і задовольняє інфінітезимальний критерій інваріантності

$$Q_{(2)}L_f \Big|_{\mathcal{L}_{(2)}} \equiv \left(\eta^t + \eta u_x + \eta^x u + \xi f_x u_{xx} + \tau f_t u_{xx} + \eta^{xx} f \right) \Big|_{L_f[u]=0} = 0. \quad (5.15)$$

З рівняння $\mathcal{L}_f$ отримуємо вираз $u_t = -uu_x - fu_{xx}$ для u_t , який підставляємо в (5.15), після чого розщеплюємо результат за u_{tx} , u_{xx} , u_x та u . Спрощена система визначальних рівнянь на коефіцієнти τ , ξ та η має вигляд

$$\tau_x = 0, \quad \tau_u = 0, \quad \xi_u = 0, \quad \eta_{uu} = 0, \quad \eta_x^1 = 0, \quad (5.16)$$

$$\eta^0 - \xi_t = 0, \quad \eta^1 + \tau_t - \xi_x = 0, \quad \eta_t^1 = -\eta_x^0, \quad \eta_t^0 = 0, \quad (5.17)$$

$$\tau f_t + \xi f_x + (\tau_t - 2\xi_x)f = 0. \quad (5.18)$$

З рівнянь (5.16) випливає, що $\tau = \tau(t)$, $\xi = \xi(t, x)$ та $\eta = \eta^1(t)u + \eta^0(t, x)$. Використовуючи рівняння (5.17), уточнюємо вигляд коефіцієнтів оператора Q :

$$\tau = c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \quad \xi = (c_2 t + c_3)x + c_4 t + c_5,$$

$$\eta = (-c_2 t + c_3 - c_1)u + c_2 x + c_4,$$

де $c_0, \dots, c_5$ — довільні сталі.

Рівняння (5.18) є єдиною *класифікуючою умовою* для ліівських симетрій рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. В залежності від значення довільного елемента f класифікуюча умова накладає додаткові обмеження на сталі $c_0, \dots, c_5$.

Варіюючи довільний елемент f , розщепимо рівняння (5.18) за f, f_t та f_x , звідки $c_0 = \dots = c_5 = 0$. Таким чином, *ядро алгебр інваріантності* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, тобто перетин максимальних алгебр інваріантності всіх рівнянь з цього класу, нульове: $\mathfrak{g}^{\cap} = \{0\}$.

5.3.3 Придатні підалгебри

Оскільки клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований і його алгебра еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ є скінченновимірною, групову класифікацію цього класу зручно провести алгебраїчним методом. Нагадаємо, що нормалізованість класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ має два наслідки:

- максимальна алгебра ліівської інваріантності кожного рівняння з цього класу міститься у проекції $\mathfrak{g}$ його алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^{\sim}$ на простір (t, x, u) ;
- рівняння $\mathcal{L}_f$ та $\mathcal{L}_{\tilde{f}}$ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ подібні відносно точкових перетворень тоді і тільки тоді, якщо вони $G^{\sim}$ -еквівалентні.

Отже, для того щоб виконати вичерпну групову класифікацію класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, достатньо скласти перелік таких нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$, кожна з яких є максимальною алгеброю ліівської інваріантності деякого рівняння з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, а потім знайти відповідні значення довільного елемента f для кожної підалгебри з цього списку. Такі підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$ будемо називати *придатними* (для групової класифікації).

Означення 5.1. Підалгебра $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$ називається *придатною*, якщо $\mathfrak{s}$ є максимальною алгеброю ліівської інваріантності для деякого рівняння $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Таким чином, підалгебра $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}$ увійде до класифікаційного списку лише тоді, якщо існує значення f^0 довільного елемента f , таке що:

- 1) компоненти кожного $Q \in \mathfrak{s}$ задовольняють класифікуючу умову (5.18) з $f = f^0$, тобто f^0 є інваріантом підалгебри $\tilde{\mathfrak{s}} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$, проєкція якої на простір змінних (t, x, u) співпадає з $\mathfrak{s}$;
- 2) алгебра $\mathfrak{s}$ є максимальною серед усіх алгебр ліівської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_{f^0}$.

Придатні підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$ класифікуємо з точністю до відношення еквівалентності, породженого індукованою приєднаною дією групи еквівалентності $G^\sim$ на $\mathfrak{g}$. Результат приєднаної дії елементарних перетворень еквівалентності на базисні векторні поля алгебри $\mathfrak{g}$ наступний:

Ad	P^t	P^x	D^t	D^x	Γ	Π
$\hat{P}^t(\beta)$	P^t	P^x	$D^t - \beta P^t$	D^x	$\Gamma - \beta P^x$	$\Pi - \beta(2D^t + D^x) + \beta^2 P^t$
$\hat{P}^x(\mu_0)$	P^t	P^x	D^t	$D^x - \mu_0 P^x$	Γ	$\Pi - \mu_0 \Gamma$
$\hat{D}^t(\alpha)$	αP^t	P^x	D^t	D^x	$\alpha^{-1} \Gamma$	$\alpha^{-1} \Pi$
$\hat{D}^x(\kappa)$	P^t	κP^x	D^t	D^x	$\kappa \Gamma$	Π
$\hat{\Gamma}(\mu_1)$	$P^t + \mu_1 P^x$	P^x	$D^t + \mu_1 \Gamma$	$D^x - \mu_1 \Gamma$	Γ	Π
$\hat{\Pi}(\gamma)$	$P^t - \gamma(2D^t + D^x) + \gamma^2 \Pi$	$P^x - \gamma \Gamma$	$D^t - \gamma \Pi$	D^x	Γ	Π

Радикал $\mathfrak{r}$ та нільрадикал $\mathfrak{n}$ є мегаідеалами (тобто повністю характеристичними ідеалами) алгебри $\mathfrak{g}$, а отже вони $G^\sim$ -інваріантні. Для будь-якої підалгебри $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}$ розглянемо $G^\sim$ -інваріантні величини $\dim \mathfrak{s} \cap \mathfrak{r}$, $\dim \mathfrak{s} \cap \mathfrak{n}$, $\dim \text{pr}_{\mathfrak{r}} \mathfrak{s}$ та $\dim \text{pr}_{\mathfrak{r}} \mathfrak{s}$, які використаємо для характеристики класифікаційних випадків.

Для класифікації придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ розглянемо їхні проєкції на фактор Леві $\mathfrak{f}$. Ці проєкції, очевидно, є підалгебрами алгебри $\mathfrak{f}$. Крім того, проєкції еквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ еквівалентні

як підалгебри алгебри $\mathfrak{f}$. Повний список нееквівалентних підалгебр алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ добре відомий. В термінах реалізації $\mathfrak{f}$, він вичерпується підалгебрами

$$\{0\}, \quad \langle P^t \rangle, \quad \langle D^t + \tfrac{1}{2}D^x \rangle, \quad \langle P^t + \Pi \rangle, \quad \langle P^t, D^t + \tfrac{1}{2}D^x \rangle \quad \text{та} \quad \text{власне} \quad \mathfrak{f}.$$

Розглядаючи кожен з перерахованих підалгебр алгебри $\mathfrak{f}$ як проекцію придатної підалгебри, будемо додавати до базисних елементів цієї підалгебри всі можливі елементи радикала $\mathfrak{r}$, а також доповнювати її базис елементами з радикала.

Нехай $\mathfrak{s}$ — придатна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}$. Доведемо властивості придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$, що безпосередньо впливають з класифікуючої умови (5.18) і корисні для їх класифікації.

Лема 5.1. *Якщо $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{n} \neq \{0\}$, то $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{n}$.*

Доведення. З умови $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{n} \neq \{0\}$ випливає, що алгебра $\mathfrak{s}$ містить хоча б одне векторне поле $a\Gamma + bP^x$, для якого $(a, b) \neq (0, 0)$. Підставивши значення $\tau = 0$ та $\xi = at + b$, що відповідають векторному полю $a\Gamma + bP^x$, у рівняння (5.18), маємо $f_x = 0$. Для таких f обидві пари

$$(\tau, \xi) = (0, 1) \quad \text{та} \quad (\tau, \xi) = (0, t)$$

є розв'язками класифікуючої умови (5.18), а пара $(\tau, \xi) = (0, x)$ не є розв'язком, оскільки $f \neq 0$. Отже, алгебра $\mathfrak{s}$ містить одночасно P^x та Γ , але не містить D^x . $\square$

Наслідок 5.6. $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} \in \{\{0\}, \mathfrak{c}, \mathfrak{n}\}$.

Лема 5.2. *Якщо $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{c}$, то $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{c}$ та $\dim \mathfrak{s} \leq 2$.*

Доведення. Припустимо, що $\mathfrak{s} \not\subset \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{c}$. Тоді $\mathfrak{s} \setminus (\mathfrak{f} \oplus \mathfrak{c}) \neq \emptyset$. Кожен елемент з різниці цих множин має вигляд

$$Q = a_0P^t + a_1D^t + a_2\Pi + a_3D^x + a_4\Gamma + a_5P^x, \quad \text{де} \quad (a_4, a_5) \neq (0, 0).$$

Оскільки $D^x, Q \in \mathfrak{s}$, маємо $[Q, D^x] = a_4\Gamma + a_5P^x \in \mathfrak{s}$. Тоді з леми 5.1 випливає, що $D^x \notin \mathfrak{s}$, що суперечить припущенню. Отже, $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{c}$.

Якщо $\dim \mathfrak{s} > 2$, то $\dim \mathfrak{s} \cap \mathfrak{f} \geq 2$, а отже, з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, $\mathfrak{s} \supseteq \langle P^t, D^t + \frac{1}{2}D^x, D^x \rangle$. Тому $\mathfrak{s} \supseteq \langle P^t, D^t \rangle$. Підставивши у (5.18) значення $(\tau, \xi) = (1, 0)$ та $(\tau, \xi) = (t, 0)$, які відповідають векторним полям P^t та D^t відповідно, матимемо систему рівнянь на f , несумісну з умовою $f \neq 0$ для довільних f . Отримана суперечність означає, що $\dim \mathfrak{s} \leq 2$, а отже $\dim \mathfrak{s} \cap \mathfrak{f} \leq 1$. $\square$

Наслідок 5.7. *Якщо $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{c}$, то*

$$\mathfrak{s} \in \{ \langle D^x \rangle, \langle D^x, P^t \rangle, \langle D^x, D^t + \frac{1}{2}D^x \rangle, \langle D^x, P^t + \Pi \rangle \} \bmod G^\sim.$$

Тут перераховано відповідно підалгебри $\mathfrak{g}^{1.1}$, $\mathfrak{g}^{2.2}$ – $\mathfrak{g}^{2.4}$ з таблиці 5.7.

Лема 5.3. *Якщо $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{n}$, то або $\dim \mathfrak{s} \leq 3$ та $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{f} = \{0\}$, або $\mathfrak{s} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{n}$.*

Доведення. Припустимо, що $\dim \mathfrak{s} > 3$. Тоді $\dim \text{pr}_{\mathfrak{f}} \mathfrak{s} \geq 2$, тобто з точністю до відношення $G^\sim$ -еквівалентності, алгебра $\mathfrak{s}$ містить векторні поля $Q^1 = P^t + aD^x$ та $Q^2 = D^t + bD^x$ з деякими сталими a та b . Отже, комутатор $[Q^1, Q^2] = P^t$ також належить підалгебрі $\mathfrak{s}$, і з класифікуючої умови (5.18), якщо підставити у неї компоненти векторних полів P^x та P^t , випливає, що $f = \text{const}$.

Аналогічно отримуємо умову $f = \text{const}$ у випадку $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{f} \neq \{0\}$, оскільки підстановка коефіцієнтів векторного поля P^x та будь-якого ненульового елемента алгебри $\mathfrak{f}$ у (5.18) дає рівняння $f_x = 0$ та $f_t = 0$.

Залишається зауважити, що максимальною алгеброю ліівської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_f$ з $f = \text{const}$ (тобто класичного рівняння Бюргерса) є п'ятивимірна алгебра $\mathfrak{s} = \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{n}$. $\square$

Наслідок 5.8. *Якщо $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{\mathfrak{f}} \in \mathfrak{n}$, де*

$$\mathfrak{s}_{\mathfrak{f}} \in \{ \{0\}, \langle P^t + \frac{1}{2}D^x \rangle, \langle D^t + aD^x \rangle, \langle P^t + \Pi + aD^x \rangle, \mathfrak{f} \} \bmod G^\sim,$$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, до того ж $a > 0 \bmod G^\sim$.

З переліку, представленого у наслідку 5.8, отримаємо підалгебри $\mathfrak{g}^{2.1}$, $\mathfrak{g}^{3.1}$, $\mathfrak{g}_a^{3.2}$ $\mathfrak{g}_a^{3.3}$ та $\mathfrak{g}^5$ з таблиці 5.7.

Наслідок 5.9. *Будь-яка додатна підалгебра алгебри $\mathfrak{g}$ не більш ніж n -ятивимірна.*

Розглянемо тепер останню можливість для $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r}$, де $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = \{0\}$. Тоді очевидно $\dim \mathfrak{s} \leq 3$. Але насправді верхню границю $\dim \mathfrak{s}$ у цьому випадку можна обмежити ще сильніше.

Лема 5.4. *Якщо $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = \{0\}$, то $\dim \mathfrak{s} \leq 2$. Більш того, якщо $\dim \mathfrak{s} = 2$, то $\text{pr}_{\mathfrak{c}} \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$ та $\mathfrak{s} \neq \langle P^t, D^t \rangle \bmod G^\sim$.*

Доведення. Припустимо, що $\dim \mathfrak{s} \geq 2$ та $\text{pr}_{\mathfrak{c}} \mathfrak{s} = \{0\}$. З точністю до $G^\sim$ -еквівалентності можна вважати, що $\text{pr}_{\mathfrak{f}} \mathfrak{s} \supseteq \langle P^t, D^t + \frac{1}{2}D^x \rangle$. З огляду на класифікуючу умову (5.18), з інваріантності рівняння $\mathcal{L}_f$ відносно алгебри $\mathfrak{s}$ випливає, що $f = \text{const}$. Нагадаємо, що максимальна алгебра лівської інваріантності рівняння $\mathcal{L}_f$ для будь-якої сталої $f \neq 0$ містить $\mathfrak{n}$, що суперечить умові $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{r} = \{0\}$. Отже, $\text{pr}_{\mathfrak{c}} \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$, якщо $\dim \mathfrak{s} \geq 2$.

Припустимо, що $\dim \mathfrak{s} = 3$. Отже, $\text{pr}_{\mathfrak{f}} \mathfrak{s} = \mathfrak{f}$, а тому $\mathfrak{s} \simeq \text{sl}(2, \mathbb{R})$, тобто $\mathfrak{s}$ є фактором Леві алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді за теоремою Леві–Мальцева (хоча це можна довести і безпосереднім обчисленням комутаційних співвідношень алгебри $\mathfrak{s}$) $\text{pr}_{\mathfrak{c}} \mathfrak{s} = \{0\}$. Це суперечить попередньому висновку про те, що $\text{pr}_{\mathfrak{c}} \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$, якщо $\dim \mathfrak{s} \geq 2$.

Аналогічно до леми 5.2 з умови $\mathfrak{s} \supseteq \langle P^t, D^t \rangle$ випливає, що $f = 0$, а це суперечить обмеженню $\mathcal{S}$ для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. $\square$

Якщо $\dim \mathfrak{s} = 1$, то $\mathfrak{s} = \langle Q_{\mathfrak{f}} + a_3 D^x + a_4 \Gamma + a_5 P^x \rangle$ з деякими сталими a_3 , a_4 та a_5 , де невизначене поки що векторне поле $Q_{\mathfrak{f}}$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності належить множині $\{P^t, D^t, P^t + \Pi\}$.

Розглянемо випадок, коли $Q_{\mathfrak{f}} = P^t$. Спочатку припустимо, що $\text{pr}_{\mathfrak{c}} \mathfrak{s} = \{0\}$, а тому $a_3 = 0$. Приєднаною дією $\hat{\Gamma}(-a_5)$ коефіцієнт a_5 приводиться до нуля. Можна також вважати, що $a_4 \in \{0, 1\}$, оскільки при $a_4 \neq 0$

цей сталий параметр можна відмасштабувати приєднаною дією $\hat{D}^t(a_4^{-1})$. Якщо $\text{pr}_{\mathfrak{s}} \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$, тобто $a_3 \neq 0$, відмасштабуємо a_3 до 1 приєднаною дією $\hat{D}^t(a_3)$ та наступним масштабуванням всього базисного векторного поля. Тоді приєднаними діями $\hat{\Gamma}(a_4)$ та $\hat{P}^x(a_4 + a_5)$ досягаємо $a_4 = a_5 = 0$.

Інші два $G^\sim$ -нееквівалентні значення $Q_{\mathfrak{f}}$ розглядаються аналогічно. Для коефіцієнта a_3 можна лише змінювати знак сталої $a_3 - \frac{1}{2}$ (для $Q_{\mathfrak{f}} = D^t$) чи a_3 (якщо $Q_{\mathfrak{f}} = P^t + \Pi$). Коефіцієнти a_4 та a_5 можна зробити нульовими за допомогою приєднаних дій $\hat{\Gamma}(\mu_1)$ та $\hat{P}^x(\mu_0)$ з деякими сталими μ^1 та μ^0 , крім випадку $Q_{\mathfrak{f}} = D^t$ та $a_3 \in \{0, 1\}$, коли ненульові значення a_5 (відповідно a_4) можна лише відмасштабувати до одиниці при умові $a_3 = 0$ (відповідно $a_3 = 1$).

В результаті маємо підалгебри $\mathfrak{g}^{1.2} - \mathfrak{g}_a^{1.8}$.

У випадку $\dim \mathfrak{s} = 2$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності маємо, що підалгебра $\mathfrak{s}$ породжується двома векторними полями вигляду

$$Q^1 = P^t + b_3 D^x + b_4 \Gamma + b_5 P^x \quad \text{та} \quad Q^2 = D^t + a_3 D^x + a_4 \Gamma + a_5 P^x$$

з деякими сталими a_3, a_4, a_5, b_3, b_4 та b_5 . Комутаційне співвідношення для базисних елементів алгебри $\mathfrak{s}$ має вигляд $[Q^1, Q^2] = Q^1$. Підставивши у нього вирази для Q^1 і Q^2 та зібравши коефіцієнти при D^x , виведемо умову $b^3 = 0$, а тому $a_3 \neq \frac{1}{2}$, оскільки $\text{pr}_{\mathfrak{s}} \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$. Збираючи коефіцієнти при Γ та P^x , отримаємо рівняння $(a_3 - 2)b_4 = 0$ та $(a_3 - 1)b_5 + a_4 = 0$ відповідно. За допомогою приєднаної дії $\hat{\Gamma}(-b_5)$ можна досягти $b_5 = 0$, з чого випливає $a_4 = 0$. Коефіцієнт b_4 нульовий при $a_3 \neq 2$; якщо ж він ненульовий, його можна масштабувати до одиниці. У випадку $a_3 \neq 0$ можна покласти $a_5 = 0$ приєднаною дією $\hat{P}^x(-a_5/a_3)$, а при $a_3 = 0$ ненульове значення a_5 можна масштабувати до одиниці. Одночасна рівність $a_3 = a_5 = 0$ неможлива з огляду на лему 5.4. Отже, в цьому випадку отримаємо підалгебри $\mathfrak{g}^{2.5} - \mathfrak{g}^{2.7}$.

Таким чином, повний список $G^\sim$ -нееквівалентних додатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ побудовано.

Таблиця 5.7. Групова класифікація класу $\mathcal{L}|_S$

$\mathfrak{s}$	Базис	$f(t, x)$	ω	Умови максимальності
$\mathfrak{g}^{1.1}$	D^x	$x^2 h(\omega)$	t	$((\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma)h)_\omega \neq 0 \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma) \neq \bar{0}$
$\mathfrak{g}^{1.2}$	P^t	$h(\omega)$	x	$(\alpha\omega + \beta)h_\omega \neq \gamma h \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma) \neq \bar{0}$
$\mathfrak{g}^{1.3}$	$P^t + \Gamma$	$h(\omega)$	$x - \frac{t^2}{2}$	$(\alpha\omega + \beta)h_\omega \neq \gamma h \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma) \neq \bar{0}$
$\mathfrak{g}^{1.4}$	$P^t + D^x$	$e^{2t}h(\omega)$	$e^{-t}x$	$h_\omega \neq 0, \quad \omega h_\omega \neq 2h$
$\mathfrak{g}^{1.5}$	$D^t + P^x$	$\frac{1}{t}h(\omega)$	$x - \ln t $	$h_\omega \neq 0, \quad h_\omega \neq -h$
$\mathfrak{g}_a^{1.6}$	$D^t + aD^x$	$\frac{ t ^{2a}}{t}h(\omega)$	$ t ^{-a}x$	$h_\omega \neq 0, \quad h: \Xi, \quad a \geq \frac{1}{2} \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{1.7}$	$D^t + D^x + \Gamma$	$t h(\omega)$	$\frac{x}{t} - \ln t $	$h_\omega \neq 0, \quad h_\omega \neq -h$
$\mathfrak{g}_a^{1.8}$	$P^t + \Pi + aD^x$	$e^{2a \arctan t} h(\omega)$	$\frac{e^{-a \arctan t}}{\sqrt{t^2 + 1}} x$	$\omega h_\omega \neq 2h, \quad a \geq 0 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{2.1}$	$P^x, \quad \Gamma$	$h(\omega)$	t	$(\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma)h_\omega \neq \delta h \quad \forall(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq \bar{0}$
$\mathfrak{g}^{2.2}$	$D^x, \quad P^t$	x^2		
$\mathfrak{g}^{2.3}$	$D^x, \quad D^t$	$\varkappa \frac{x^2}{t}$		$\varkappa \neq 0, \quad \varkappa > 0 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{2.4}$	$D^x, \quad P^t + \Pi$	$\frac{\varkappa x^2}{t^2 + 1}$		$\varkappa \neq 0, \quad \varkappa > 0 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{2.5}$	$P^t, \quad D^t + P^x$	e^{-x}		
$\mathfrak{g}_a^{2.6}$	$P^t, \quad D^t + aD^x$	$ x ^{2-1/a}$		$a \neq 0, \quad a \neq \frac{1}{2}$
$\mathfrak{g}^{2.7}$	$P^t + \Gamma, \quad D^t + 2D^x$	$\varkappa \left x - \frac{t^2}{2} \right ^{3/2}$		$\varkappa \neq 0, \quad \varkappa > 0 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^{3.1}$	$P^x, \quad \Gamma, \quad P^t + \frac{1}{2}D^x$	εe^t		
$\mathfrak{g}_a^{3.2}$	$P^x, \quad \Gamma, \quad D^t + aD^x$	$\varepsilon t ^{2a-1}$		$a \neq \frac{1}{2}, \quad a > \frac{1}{2} \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}_a^{3.3}$	$P^x, \quad \Gamma, \quad P^t + \Pi + aD^x$	$\varepsilon e^{2a \arctan t}$		$a \neq 0, \quad a > 0 \bmod G^\sim$
$\mathfrak{g}^5$	$P^x, \Gamma, P^t, D^t + \frac{1}{2}D^x, \Pi$	1		

5.3.4 Результат класифікації

Для того, щоб обчислити вигляд довільного елемента f , що відповідає кожній підалгебрі $\mathfrak{s}$ алгебри $\mathfrak{g}$ з отриманого списку, підставляємо коефіцієнти τ та ξ базисних векторних полів відповідної алгебри $\mathfrak{s}$ у класи-

фікуючу умову (5.18) і розв'язуємо отриману систему диференціальних рівнянь на f . Ця система обов'язково має розв'язки; більш того, принаймні для деякої підмножини її розв'язків $\mathfrak{s}$ є максимальною алгеброю ліївської інваріантності для відповідних рівнянь $\mathcal{L}_f$. Це означає, що набір властивостей придатних підалгебр, наведений у п. 5.3.3 у вигляді лем, є необхідною і достатньою умовою того, що $\mathfrak{s}$ придатна.

Повний список нееквівалентний придатних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ та відповідних значень довільного елемента f наведено у таблиці 5.7. Оскільки клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, ця групову класифікація є вичерпною.

У кожному випадку таблиці 5.7, де виникають сталі параметри a та $\varkappa$ і (ненульова) параметр-функція h , ці параметри повинні задовольняти зазначені в останньому стовпчику умови для того, щоб відповідна алгебра $\mathfrak{s}$ була максимальною алгеброю ліївської інваріантності для наведеного значення f , тобто $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}_f$. $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$. Умова Ξ для $\mathfrak{g}_a^{1.6}$ означає

$$\begin{aligned} a(\omega + \alpha)h_\omega &\neq (2a - 1)h, & \text{якщо} & \quad (a - 2)(a - 1)\alpha = 0, \\ (\omega + \beta)h_\omega &\neq 2h, & \text{якщо} & \quad (a - 1)a\beta = 0, \\ (a - 1)(\omega + \gamma)h_\omega &\neq (2a - 1)h, & \text{якщо} & \quad a(a + 1)\gamma = 0. \end{aligned}$$

5.3.5 Класичні інваріантні розв'язки

З метою оптимізації процесу проведення редукцій для рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ застосуємо дві спеціальні техніки.

Першу з них можна використати завдяки тому, що клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований. А саме — замість того, щоб класифікувати ліївські редукції відносно груп ліївських симетрій окремих рівнянь, прокласифікуємо їх відносно групи еквівалентності $G^\sim$ всього класу. Ця техніка пов'язана з алгебраїчним методом групової класифікації. Оскільки клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, проекція групи еквівалентності $G^\sim$ на простір залежної і незалежних змінних містить групи точкових симетрій усіх рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, а отже максимальними алгебрами ліївської інваріантності цих

рівнянь є підалгебри проекції $\mathfrak{g}$ алгебри еквівалентності $\mathfrak{g}^\sim$.

Нагадаємо, що рівняння $\mathcal{L}_f$ та $\mathcal{L}_{\tilde{f}}$ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ подібні відносно точкового перетворення тоді і тільки тоді, якщо вони $G^\sim$ -еквівалентні. З подібності рівнянь $\mathcal{L}_f$ та $\mathcal{L}_{\tilde{f}}$ випливає еквівалентність їхніх максимальних алгебр ліівської інваріантності $\mathfrak{g}_f$ та $\mathfrak{g}_{\tilde{f}}$. Підалгебри алгебр $\mathfrak{g}_f$ та $\mathfrak{g}_{\tilde{f}}$ є, очевидно, підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}$. Таким чином, достатньо прокласифікувати нееквівалентні підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$ (див. п. 5.3.3), що є придатними для ліівської редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Цей підхід дозволяє уникнути окремого застосування процедури ліівської редукції для кожного з 19 класифікаційних випадків, наведених у таблиці 5.8.

Таблиця 5.8. Ліівські редукції за одновимірними підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}$, $\varphi = \varphi(\omega)$

$\subset \mathfrak{g}$	Basis	Анзац	ω	Редуковане рівняння
$\mathfrak{g}^{1.0}$	P^x	$u = \varphi$	t	$\varphi_\omega = 0$
$\mathfrak{g}^{1.1}$	D^x	$u = x\varphi$	t	$\varphi_\omega + \varphi^2 = 0$
$\mathfrak{g}^{1.2}$	P^t	$u = \varphi$	x	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega} + \varphi\varphi_\omega = 0$
$\mathfrak{g}^{1.3}$	$P^t + \Gamma$	$u = \varphi + t$	$x - \frac{t^2}{2}$	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega} + \varphi\varphi_\omega + 1 = 0$
$\mathfrak{g}^{1.4}$	$P^t + D^x$	$u = e^t\varphi$	$e^{-t}x$	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega} + \varphi\varphi_\omega - \omega\varphi_\omega + \varphi = 0$
$\mathfrak{g}^{1.5}$	$D^t + P^x$	$u = t^{-1}\varphi$	$x - \ln t $	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega} + \varphi\varphi_\omega - \varphi_\omega - \varphi = 0$
$\mathfrak{g}_a^{1.6}$	$D^t + aD^x$	$u = t ^a t^{-1}\varphi$	$ t ^{-a}x$	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega} + \varphi\varphi_\omega - \omega\varphi_\omega + (a-1)\varphi = 0$
$\mathfrak{g}^{1.7}$	$D^t + D^x + \Gamma$	$u = \varphi + \ln t $	$\frac{x}{t} - \ln t $	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega} + \varphi\varphi_\omega - (\omega+1)\varphi_\omega + 1 = 0$
$\mathfrak{g}_a^{1.8}$	$P^t + \Pi + aD^x$	$u = \frac{e^{a \arctan t}}{\sqrt{t^2+1}}\varphi + \frac{t+a}{t^2+1}x$	$\frac{e^{-a \arctan t}}{\sqrt{t^2+1}}x$	$h(\omega)\varphi_{\omega\omega} + \varphi\varphi_\omega + 2a\varphi + (a^2+1)\omega = 0$

Друга техніка, полягає в тому, щоб будувати анзаци у такий спосіб, щоб редуковані рівняння мали найпростіший та одноманітний вигляд. Алгебри $\mathfrak{g}^{1.0}$ та $\mathfrak{g}^{1.1}$ дають тривіальні звичайні диференціальні рівняння першого порядку; редуковані рівняння, побудовані за алгебрами $\mathfrak{g}^{1.2}$ – $\mathfrak{g}_a^{1.8}$, є диференціальними рівняннями другого порядку. Для всіх цих алгебр

незалежну інваріантну змінну ω обрано лінійною за x зі сталими або залежними лише від t коефіцієнтами, а анзаци мають загальний вигляд $u = F(t)\varphi(\omega) + G(t, x)$, де $G_{xx} = 0$. Тим самим редуковані рівняння приведено до спільного загального вигляду (5.19). У деяких випадках знадобилася додаткова заміна залежної інваріантної змінної φ .

З точністю до $G^\sim$ -еквівалентності, розширення ліївських симетрій у цьому підкласі вичерпуються алгебрами $\mathfrak{g}^{2.1}$, $\mathfrak{g}^{3.1}$, $\mathfrak{g}_a^{3.2}$, $\mathfrak{g}_a^{3.3}$ та $\mathfrak{g}^5$ з таблиці 5.7. Редуковані рівняння для всіх можливих $G^\sim$ -нееквівалентних одновимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}$ наведено у таблиці 5.8. Випадок $\mathfrak{g}^{1.0}$ у цій таблиці відповідає випадку $\mathfrak{g}^{2.1}$ у таблиці 5.7 (див. лему 5.1).

Щоб розв'язати редуковані рівняння другого порядку з таблиці 5.8, розглянемо надклас звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$h(\omega)\phi_{\omega\omega} + \phi\phi_{\omega} + \alpha\phi + \beta\omega + \gamma = 0, \quad \text{де} \quad h(\omega) \neq 0, \quad (5.19)$$

який містить усі редуковані рівняння (крім звичайних диференціальних рівнянь, що відповідають алгебрам $\mathfrak{g}^{1.0}$ та $\mathfrak{g}^{1.1}$). Значення сталих α , β та γ і заміна змінної φ (якщо потрібна) для них наступні:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{1.2} : \quad & \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \varphi = \phi; \\ \mathfrak{g}^{1.3} : \quad & \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \varphi = \phi; \\ \mathfrak{g}^{1.4} : \quad & \alpha = 2, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \text{заміна} \quad \varphi = \phi + \omega; \\ \mathfrak{g}^{1.5} : \quad & \alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -1, \quad \text{заміна} \quad \varphi = \phi + 1; \\ \mathfrak{g}_a^{1.6} : \quad & \alpha = a, \quad \beta = a - 1, \quad \gamma = 0, \quad \text{заміна} \quad \varphi = \phi + \omega; \\ \mathfrak{g}^{1.7} : \quad & \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1, \quad \text{заміна} \quad \varphi = \phi + \omega + 1; \\ \mathfrak{g}_a^{1.8} : \quad & \alpha = 2a, \quad \beta = a^2 + 1, \quad \gamma = 0, \quad \varphi = \phi. \end{aligned}$$

Лінійні розв'язки редукованих рівняння (5.19), так само як і всі розв'язки редукованих рівнянь для $\mathfrak{g}^{1.0}$ та $\mathfrak{g}^{1.1}$, дають розв'язки рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, що є лінійними за x . Розв'язки, лінійні за x — спільні для всіх рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і вичерпуються двома сім'ями: $u = c_0$ та $u = (x + c_1)/(t + c_2)$, де c_0 , c_1 та c_2 — довільні сталі. Їх наведено у підрозділі 5.3.6, при описі операторів редукції.

Знайдемо ліівські симетрії звичайних диференціальних рівнянь з класу (5.19) та використаємо їх для розв'язання редукованих рівнянь, що відповідають підалгебрам $\mathfrak{g}^{1.2}-\mathfrak{g}_a^{1.8}$ (таблиця 5.8). Щоб знайдені симетрії були дійсно симетріями редукованих рівнянь, перетворення еквівалентності між рівняннями з класу (5.19) не використовуються.

Твердження 5.1. *Значення довільного елемента $(h(\omega), \alpha, \beta, \gamma)$, що відповідають рівнянням з класу (5.19) з ненульовими максимальними алгебрами ліівської інваріантності $\mathfrak{h}$, вичерпуються наступними:*

1. $h = h_0(\omega + \frac{\gamma}{\beta})^2, \beta \neq 0: \mathfrak{h} = \langle (\omega + \frac{\gamma}{\beta})\partial_\omega + \phi\partial_\phi \rangle;$
2. $h = h_0, \beta = 0, \gamma \neq 0: \mathfrak{h} = \langle \partial_\omega \rangle;$
3. $h = h_0|\omega + \mu|^{3/2}, \alpha = \beta = 0, \gamma \neq 0: \mathfrak{h} = \langle 2(\omega + \mu)\partial_\omega + \phi\partial_\phi \rangle;$
4. $h = -\frac{\alpha}{2}\omega^2 + \mu\omega + \nu, \beta = \gamma = 0:$
 $\mathfrak{h} = \langle h\partial_\omega - \alpha h\partial_\phi, -(h\int \frac{d\omega}{h})\partial_\omega + (\phi + \alpha h\int \frac{d\omega}{h} + \alpha\omega - \mu)\partial_\phi \rangle;$
5. $h_{\omega\omega} = \frac{\kappa}{h} - \alpha, \beta = \gamma = 0: \mathfrak{h} = \langle h\partial_\omega + (\kappa - \alpha h)\partial_\phi \rangle;$
6. $\frac{h_{\omega\omega} + \alpha}{(h_\omega + \alpha\omega + \mu)^2} = \frac{\kappa}{h}, \beta = \gamma = 0: \mathfrak{h} = \langle \xi\partial_\omega + (\phi - \alpha\xi + \alpha\omega + \mu)\partial_\phi \rangle.$

Тут $h_0 \neq 0, \mu, \nu$ та $\kappa \neq 0$ — довільні сталі, функція $h(\omega)$ є розв'язком наведеного диференціального рівняння, а функцію ξ визначено формулою

$$\xi = \frac{h_\omega + \alpha\omega + \mu}{h_{\omega\omega} + \alpha}.$$

Доведення. Будь-який оператор ліівської симетрії довільного рівняння з класу (5.19) має загальний вигляд

$$\xi(\omega)\partial_\omega + [c_1\phi - \alpha\xi(\omega) + \alpha c_1\omega + c_0]\partial_\phi,$$

де c_1 та c_0 — довільні сталі, а коефіцієнт $\xi = \xi(\omega)$ задовольняє класифікуючі умови

$$(\xi_\omega - 2c_1)(\beta\omega + \gamma) + \beta\xi = 0, \tag{5.20}$$

$$\xi_\omega - \frac{h_\omega}{h}\xi = -c_1. \quad (5.21)$$

З рівняння

$$h\xi_{\omega\omega} = -\alpha\xi + c_1\alpha\omega + c_0 \quad (5.22)$$

за умови (5.21) безпосередньо випливає

$$(h_{\omega\omega} + \alpha)\xi = c_1h_\omega + c_1\alpha\omega + c_0. \quad (5.23)$$

Щоб розв'язати систему рівнянь (5.20), (5.21), (5.23) спочатку проінтегруємо рівняння (5.20), розглядаючи випадки $\beta = 0$ та $\beta \neq 0$ окремо.

При $\beta \neq 0$ з рівняння (5.20) маємо

$$\xi = \frac{c_1(\beta\omega + \gamma)}{\beta} + \frac{b}{\beta\omega + \gamma}.$$

Тут і нижче b є сталою інтегрування. Припущення $b \neq 0$ веде до суперечності. Отже, $b = 0$, тобто $\xi = c_1(\omega + \frac{\gamma}{\beta})$, звідки $\xi_{\omega\omega} = 0$. З рівняння (5.22) отримуємо $c_0 = c_1\frac{\alpha\gamma}{\beta}$. Оскільки алгебра $\mathfrak{h}$ повинна бути ненульовою, вона обов'язково містить векторне поле з ненульовим значенням c_1 . Отже, з (5.21) отримуємо $(\omega + \frac{\gamma}{\beta})h_\omega = 2h$, що дає пункт 1 твердження.

Якщо $\beta = 0$ та $\gamma \neq 0$, то з (5.20) отримуємо $\xi = 2c_1\omega + b$ і розщеплюємо (5.22) за ω . Маємо $\alpha c_1 = 0$ та $c_0 = \alpha b$. Тоді використаємо (5.21), щоб отримати пункт 2 (якщо $c_1 = 0$ для всіх елементів алгебри $\mathfrak{h}$) та пункт 3 (інакше).

Рівняння (5.20) з $\beta = \gamma = 0$ є тотожністю. Розглянемо окремо підвипадки $h_{\omega\omega} + \alpha = 0$ та $h_{\omega\omega} + \alpha \neq 0$.

Якщо $h_{\omega\omega} + \alpha = 0$, проінтегрувавши (5.21) маємо $\xi = bh - c_1h \int \frac{d\omega}{h}$. Це дає пункт 4.

При $h_{\omega\omega} + \alpha \neq 0$ з рівняння (5.23) маємо

$$\xi = \frac{h_\omega + \alpha\omega}{h_{\omega\omega} + \alpha}c_1 + \frac{1}{h_{\omega\omega} + \alpha}c_0.$$

Тоді рівняння (5.21) можна подати у вигляді $K^1c_1 + K^0c_0 = 0$, де

$$K^0 = \left[\frac{1}{h(h_{\omega\omega} + \alpha)} \right]_\omega h \quad \text{та} \quad K^1 = 2 + (h_\omega + \alpha\omega)K^0.$$

Якщо $K^0 = 0$, то $K^1 = 2$, $c_1 = 0$ та $\kappa := h(h_{\omega\omega} + \alpha) = \text{const}$. Звідси отримуємо пункт 5. Тепер припустимо, що $K^0 \neq 0$. K^1 та K^0 — лінійно залежні, інакше $c_1 = c_0 = 0$, що відповідає тривіальній алгебрі. Отже, $\mu := -K^1/K^0 = \text{const}$, звідки $c_0 = \mu c_1$. Після першого інтегрування рівняння (5.21) маємо

$$\frac{h}{h_{\omega} + \alpha\omega + \mu} \left[\frac{(h_{\omega} + \alpha\omega + \mu)^2}{h(h_{\omega\omega} + \alpha)} \right]_{\omega} = 0,$$

або, що те саме,

$$\frac{h_{\omega\omega} + \alpha}{(h_{\omega} + \alpha\omega + \mu)^2} = \frac{\kappa}{h},$$

де κ — стала інтегрування. Таким чином отримуємо пункт 6.

Для двох останніх пунктів $\kappa \neq 0$, оскільки $h_{\omega\omega} + \alpha \neq 0$. □

Рівняння (5.19) з $h = -\frac{\alpha}{2}\omega^2 + \mu\omega + \nu$ та $\beta = \gamma = 0$ (пункт 4 доведеного твердження) допускає найширшу (двовимірну) алгебру симетрій. У цьому випадку рівняння (5.19) у змінних

$$\tilde{\omega} = \int \frac{d\omega}{-\frac{\alpha}{2}\omega^2 + \mu\omega + \nu}, \quad \tilde{\phi} = \phi + \alpha\omega - \mu$$

можна один раз проінтегрувати й отримати $2\tilde{\phi}_{\tilde{\omega}} = c_0 - \tilde{\phi}^2$. Розв'язок проінтегрованого рівняння залежить від знаку сталої інтегрування c_0 :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &= -\varkappa \operatorname{tg} \left(\frac{\varkappa}{2} \tilde{\omega} + c_1 \right), & \text{якщо} \quad c_0 < 0, \quad \varkappa &:= \sqrt{-c_0}, \\ \tilde{\phi} &= \frac{2}{\tilde{\omega} + c_1} \quad \text{або} \quad \tilde{\phi} = 0, & \text{якщо} \quad c_0 = 0, \\ \tilde{\phi} &= \varkappa \frac{c_1 e^{\varkappa \tilde{\omega}} - 1}{c_1 e^{\varkappa \tilde{\omega}} + 1} \quad \text{або} \quad \tilde{\phi} = \varkappa, & \text{якщо} \quad c_0 > 0, \quad \varkappa &:= \sqrt{c_0}, \end{aligned}$$

де c_1 — ще одна стала інтегрування. Вигляд $\tilde{\omega}$ залежить від знаку $D =$

$\mu^2 + 2\alpha\nu$ та від сталих α , μ і ν , а саме:

$$\tilde{\omega} = \begin{cases} \frac{\omega}{\nu}, & \alpha = 0, \mu = 0, \nu \neq 0, \\ \frac{1}{\mu} \ln \left| \omega + \frac{\nu}{\mu} \right|, & \alpha = 0, \mu \neq 0, \\ -\frac{2}{\sqrt{-D}} \arctan \frac{\alpha\omega - \mu}{\sqrt{-D}}, & \alpha \neq 0, D < 0, \\ \frac{2}{\alpha\omega - \mu}, & \alpha \neq 0, D = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \left| \frac{\alpha\omega - \mu + \sqrt{D}}{\alpha\omega - \mu - \sqrt{D}} \right|, & \alpha \neq 0, D > 0. \end{cases}$$

Отже, підставляючи вирази для $\tilde{\phi}$ та $\tilde{\omega}$ у рівняння $\phi = \tilde{\phi}(\tilde{\omega}) - \alpha\omega + \mu$, отримуємо 15 різних виразів для розв'язків рівняння (5.19) з функцією h , квадратичною за ω , та $\beta = \gamma = 0$. Цей результат можна застосувати до редукованих рівнянь, що відповідають підалгебрам $\mathfrak{g}^{1.2}$ та $\mathfrak{g}_1^{1.6}$ (таблиця 5.8), де $\alpha = 0$ та $\alpha = 1$ відповідно.

Якщо диференціальне рівняння для h у пункті 5 твердження 5.1 домножити на $2h_\omega$ та один раз проінтегрувати, отримаємо $h_\omega^2 = 2\nu \ln |h| - 2\alpha h + c_1$, де c_1 — довільна стала. Після другого інтегрування отримаємо неявний вигляд загального розв'язку

$$\pm \int \frac{dh}{\sqrt{2\nu \ln |h| - 2\alpha h + c_1}} = \omega + c_2.$$

Для деяких пунктів твердження 5.1 можна побудувати принаймні часткові розв'язки відповідних рівнянь вигляду (5.19) з окремими значеннями параметрів. Використаємо, наприклад, ліівські редукції рівнянь з класу (5.19) до алгебраїчних рівнянь.

Алгебра симетрій у пункті 3 дає анзац $\phi = c\sqrt{|\omega + \mu|}$. Тут стала $c \in \mathbb{R}$ розв'язком редукованого алгебраїчного рівняння $2\varepsilon c^2 - h_0 c + 4\gamma = 0$, де $\varepsilon = \text{sign}(\omega + \mu)$, що дає

$$c = \frac{1}{4\varepsilon} \left(h_0 \pm \sqrt{h_0^2 - 32\varepsilon\gamma} \right).$$

Таким чином, при $\gamma = 1$ можна використати цей розв'язок ϕ редукованого рівняння, що відповідає підалгебрі $\mathfrak{g}^{1.3}$ з таблиці 5.8, і отримати розв'язок

$$u(t, x) = c \sqrt{\left| x - \frac{t^2}{2} + \mu \right|} + t \quad (5.24)$$

узагальнених рівнянь Бюргерса $\mathcal{L}_{f^0}$, де $f^0 = h_0 \left| x - \frac{t^2}{2} + \mu \right|^{3/2}$, а $\mu = 0$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності.

Якщо покласти $\alpha = \mu = 0$ у пункті 6, то рівняння $h_{\omega\omega}/h_\omega = \kappa h_\omega/h$ для h можна проінтегрувати:

$$\begin{aligned} h &= h_0 |\omega + \lambda|^{\frac{1}{1-\kappa}} \quad \text{якщо} \quad \kappa \neq 1, \\ h &= h_0 e^{\lambda\omega}, \quad \text{якщо} \quad \kappa = 1. \end{aligned}$$

Відповідна алгебра лівських симетрій дасть анзац $\phi = c(h/h_0)^\kappa$. Тут h_0 та λ — сталі інтегрування. Побудований анзац зводить рівняння (5.19) до квадратного рівняння на c , яке має два розв'язки: $c = 0$ та

$$\begin{aligned} c &= \text{sign}(\omega + \lambda) \frac{1 - 2\kappa}{1 - \kappa} h_0^{1-\kappa}, \quad \text{якщо} \quad \kappa \neq 1, \\ c &= -\lambda, \quad \text{якщо} \quad \kappa = 1, \end{aligned}$$

Використавши цей результат для редукованого рівняння, що відповідає алгебрі $\mathfrak{g}^{1.2}$ з таблиці 5.8, отримаємо стаціонарні розв'язки вигляду $u(t, x) = c h_0^\kappa |x + \lambda|^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}$ та $u(t, x) = -\lambda h_0 e^{\lambda x}$ для узагальнених рівнянь Бюргерса $u_t + uu_x + h_0 |x + \lambda|^{\frac{1}{1-\kappa}} u_{xx} = 0$ та $u_t + uu_x + h_0 e^{\lambda x} u_{xx} = 0$ відповідно.

Зауваження 5.2. Якщо редуковане рівняння допускає лівські симетрії що не індукуються лівськими симетріями вихідного рівняння, то кажуть, що вихідне рівняння має *приховані* (або *додаткові* симетрії відносно відповідної редукції). Лівські редукції відповідних рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ за алгебрами $\mathfrak{g}^{1.0}$ та $\mathfrak{g}^{1.1}$ призводять до редукованих рівнянь першого порядку. Отже, відповідні вихідні рівняння допускають нескінченновимірні сім'ї прихованих симетрій відносно вищезгаданих редукцій,

але ці симетрії несуттєві для розгляду, оскільки вони не дають нових розв'язків. Інші алгебри з таблиці 5.8 приводять до редукованих рівнянь другого порядку загального вигляду (5.19). Серед ліївських симетрій таких редукованих рівнянь є як індуковані, так і приховані симетрії. А саме, у пунктах 1–3 твердження 5.1 всі симетрії відповідних редукованих рівнянь, (які побудовано за алгебрами $\mathfrak{g}^{1.4}$, $\mathfrak{g}_a^{1.6}$, де $a \neq 1$, $\mathfrak{g}_a^{1.8}$; $\mathfrak{g}^{1.3}$, $\mathfrak{g}^{1.5}$, $\mathfrak{g}^{1.7}$; $\mathfrak{g}^{1.3}$ відповідно) індукуються ліївськими симетріями відповідних вихідних рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Умова $\beta = \gamma = 0$ у пунктах 4–6 виконується тільки для редукованих рівнянь, отриманих з використанням алгебр $\mathfrak{g}^{1.2}$ та $\mathfrak{g}_1^{1.6}$. У пункті 4 перший базисний оператор є індукованим тільки якщо $f = x$ для редукції за $\mathfrak{g}^{1.2}$, а другий — тільки якщо $f = t(\omega + \bar{\nu})^2$, де $\omega = x/t$ для редукції за $\mathfrak{g}_1^{1.6}$. Усі інші ліївські симетрії редукованих рівнянь, представлених у пунктах 4–6, є прихованими симетріями відповідних вихідних рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Розглянемо можливі редукції за двовимірними нееквівалентними підалгебрами алгебри $\mathfrak{g}$. Для цього для кожного базисного векторного поля підалгебри запишемо характеристику рівняння і отримаємо систему з двох диференціальних рівнянь. Якщо система сумісна, то її розв'язок дає анзац, що зводить відповідні рівняння з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ до алгебраїчних рівнянь.

Система, отримана для $\mathfrak{g}^{2.1}$, є несумісною, отже ця підалгебра не дозволяє побудувати анзац. За підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.4}$ можна побудувати анзац $u = (t + c)x/(t^2 + 1)$, але відповідне редуковане рівняння $c^2 + 1 = 0$, де c — стала, не має розв'язків.

Наступні підалгебри дозволяють побудувати деякі прості розв'язки: $u = 0$ за підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.2}$, $u = 0$ та $u = \frac{x}{t}$ за підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.3}$, $u = 0$ та $u = e^{-x}$ за підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.5}$, $u = a^{-1}x|x|^{-1/a}$ за підалгеброю $\mathfrak{g}_a^{2.6}$, а за підалгеброю $\mathfrak{g}^{2.7}$ переотримуємо розв'язок (5.24) з $\mu = 0$ та $h_0 = \kappa$.

Усі інші двовимірні підалгебри алгебри $\mathfrak{g}$ містять (з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності) векторне поле P^x , а тому можуть дати щонайбільше

сталі розв'язки рівнянь з класу (5.14).

Зауважимо, що будь-який ліівський розв'язок рівняння Бюргерса можна отримати з ліівського розв'язку лінійного рівняння теплопровідності через перетворення Коула–Хопфа. Перед тим, як подати відповідне твердження, згадаємо, що максимальна алгебра ліівської інваріантності $\mathfrak{g}^h$ лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$ породжується векторними полями

$$\begin{aligned}\hat{P}_t &= \partial_t, & \hat{D} &= 2t\partial_t + x\partial_x, & \hat{K} &= t^2\partial_t + tx\partial_x + \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}t\right)v\partial_v, \\ \hat{P}_x &= \partial_x, & \hat{G} &= t\partial_x + \frac{1}{2}xv\partial_v, & \hat{I} &= v\partial_v, & h(t, x)\partial_v,\end{aligned}$$

де $h(t, x)$ пробігає множину розв'язків цього рівняння. Будь-якому векторному полю $Q = c_0P_t + c_1D + c_2K + c_3P_x + c_4\Gamma$ з максимальної алгебри ліівської інваріантності $\mathfrak{g}_1$ рівняння L_1 поставимо у відповідність векторне поле $\hat{Q} = c_0\hat{P}_t + c_1\hat{D} + c_2\hat{K} + c_3\hat{P}_x + c_4\hat{G}$ з алгебри $\mathfrak{g}^h$.

Твердження 5.2. *Розв'язок u рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$ є інваріантним за векторним полем Q з алгебри $\mathfrak{g}_{-1}$ тоді і тільки тоді, коли $u = 2v_x/v$ для деякого $\hat{Q}_\mu$ -інваріантного розв'язку v лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$, де $\mu = \text{const}$ та $\hat{Q}_\mu = \hat{Q} - \mu\hat{I} \in \mathfrak{g}^h$.*

Доведення. Якщо гладкі функції u та v , що залежать від t та x , пов'язані між собою перетворенням Коула–Хопфа $u = 2v_x/v$, то

$$Q[u] = Q[2v_x/v] = 2(\hat{Q}[v]/v)_x.$$

Нехай $u \in Q$ -інваріантним розв'язком рівняння $\mathcal{L}_1$. Тоді функцію v можна розглядати як деякий розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$, тому $(\hat{Q}[v]/v)_x = Q[u]/2 = 0$, тобто $\hat{Q}[v] = \mu v$ для деякої гладкої функції $\mu(t)$. Подіємо оператором $\mathcal{T} = D_t + D_{xx}$ на обидві частини отриманого рівняння:

$$\mathcal{T}\hat{Q}[v] = \hat{Q}[\mathcal{T}v] - 2(c_2t + c_1)\mathcal{T}v = \mu_tv + \mu\mathcal{T}v.$$

З огляду на те, що $\mathcal{T}v = 0$ та $\mathcal{T}\hat{Q}[v] = 0$, звідси випливає, що $\mu_t = 0$, тобто μ є сталою. А оскільки $\hat{Q}[v] - \mu v = \hat{Q}_\mu[v] = 0$, функція $v \in \hat{Q}_\mu$ -інваріантною.

Навпаки, якщо для деякої сталої μ функція $v \in \hat{Q}_\mu$ -інваріантним розв'язком лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$, то функція $u = 2v_x/v$ є розв'язком рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$ і

$$Q[u] = Q[2v_x/v] = 2(\hat{Q}[v]/v)_x = 2(\hat{Q}_\mu[v]/v)_x = 0,$$

тобто, функція $u \in Q$ -інваріантним. $\square$

5.3.6 Оператори редукції

Задача знаходження сингулярних операторів редукції рівнянь $\mathcal{L}_f \in$ «по-го» задачею. Справді, поклавши $\xi = 1$ і застосувавши критерій умовної інваріантності, легко переконатися, що для рівняння $\mathcal{L}_f$ визначальне рівняння на єдиний невідомий коефіцієнт $\eta = \eta(t, x, u)$ має вигляд

$$\eta_t + u\eta_x + \eta^2 + f_x(\eta_x + \eta\eta_u) + f(\eta_{xx} + 2\eta\eta_{xu} + \eta^2\eta_{uu}) = 0.$$

Це рівняння можна звести до рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_f$ суперпозицією диференціальної підстановки $\eta = -\Phi_x/\Phi_u$, де Φ — деяка гладка функція від (t, x, u) , $\Phi_u \neq 0$, та перетворення годографа, де новими незалежними змінними будуть $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x$ та $\varkappa = \Phi$, а новими залежними — $\tilde{u} = u$ ($\varkappa$ відіграватиме роль параметра).

Більш того, з точністю до відношень еквівалентності операторів редукції і сімей розв'язків, існує взаємно однозначна відповідність між операторами редукції рівняння $\mathcal{L}_f$ з нульовим коефіцієнтом при ∂_t та однопараметричними сім'ями розв'язків цього рівняння, які інваріантні відносно цього оператора. Задача побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння $\mathcal{L}_f$ повністю еквівалентна задачі вичерпного опису його операторів редукції з нульовим коефіцієнтом при ∂_t .

Якщо дано сім'ю $\mathcal{F} = \{u = F(t, x, \varkappa)\}$ розв'язків рівняння $\mathcal{L}_f$, параметризовану одним суттєвим параметром $\varkappa$, то відповідний сингуляр-

ний оператор редукції має вигляд $Q = \partial_x - (\Phi_x/\Phi_u)\partial_u$, де функція Φ є розв'язком рівняння $u = F(t, x, \varkappa)$ відносно $\varkappa$, тобто $\varkappa = \Phi(t, x, u)$. Побудований за допомогою оператора Q анзац $u = F(t, x, \varphi(\omega))$, де $\omega = t$, редукує рівняння $\mathcal{L}_f$ до $\varphi_\omega = 0$. Таке спрощення редукованого рівняння пояснюється тим, що знаючи однопараметричну сім'ю $\mathcal{F}$ розв'язків, можна вибрати конкретний анзац.

Регулярні оператори редукції рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ мають (з точністю до відношення еквівалентності, що існує на множині операторів редукції) загальний вигляд $Q = \partial_t + \xi(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u$ і задовольняють умовний критерій інваріантності

$$Q_{(2)}L_f|_{\mathcal{L}_{(2)} \cap \mathcal{Q}_{(2)}} = 0. \quad (5.25)$$

Тут многовид $\mathcal{Q}_{(2)}$ у просторі струменів другого порядку визначено умовою інваріантності поверхні $Q[u] := \eta - u_t - \xi u_x = 0$ та її диференціальними наслідками $D_t Q[u] = 0$ та $D_x Q[u] = 0$ (останні не використовуються у розрахунках, оскільки внаслідок нормування коефіцієнт τ оператора Q до одиниці вираз $Q_{(2)}L_f[u]$ не містить похідних u_{tt} та u_{tx}). Отже, рівність (5.25) має вигляд

$$\eta^t + \eta u_x + \eta^x u + (f_t + \xi f_x)u_{xx} + \eta^{xx} f \Big|_{\{u_t + u u_x + f u_{xx} = 0, u_t + \xi u_x = \eta\}} = 0.$$

Підставивши $u_t = \eta - \xi u_x$ та $u_{xx} = (\xi u_x - u u_x - \eta)/f$ і розщепивши результат за u_x , отримуємо систему визначальних рівнянь

$$\begin{aligned} \xi_{uu} &= 0, \quad \eta_{uu} = \frac{2}{f}\xi_u(\xi - u) + 2\xi_{xu}, \\ (2\xi_u + 1)\eta + \left(\frac{f_t}{f} + \frac{f_x}{f}\xi\right)(\xi - u) + 2f\eta_{xu} - \xi_t - 2\xi_x\xi + u\xi_x - f\xi_{xx} &= 0, \\ \eta_t + u\eta_x + f\eta_{xx} - \left(\frac{f_t}{f} + \frac{f_x}{f}\xi\right)\eta + 2\xi_x\eta &= 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Інтегруючи два перших рівняння, отримуємо вирази для ξ та η :

$$\xi = \xi^1(t, x)u + \xi^0(t, x),$$

$$\eta = \frac{\xi^1 (\xi^1 - 1)}{3f} u^3 + \left(\xi_x^1 + \frac{\xi^1 \xi^0}{f} \right) u^2 + \eta^1(t, x)u + \eta^0(t, x),$$

де коефіцієнти ξ^1 , ξ^0 , η^1 та η^0 — нові невідомі функції. Підставляємо їх у всі визначальні рівняння, крім (5.26):

$$\begin{aligned} \xi^1(\xi^1 - 1)(2\xi^1 + 1) &= 0, \\ \xi^1(2\xi^1 + 1)\xi^0 - \xi^1(\xi^1 - 1)f_x &= 0, \\ (\xi^1 - 1)f_t + (2\xi^1 + 1)(f\eta^1 + f\xi_x^0 - f_x\xi^0) &= 0, \\ (2\xi^1 + 1)\eta^0 + \left(\frac{f_t}{f} + \frac{f_x}{f}\xi^0 \right) \xi^0 + 2f\eta_x^1 - \xi_t^0 - 2\xi^0\xi_{xx}^0 - f\xi_{xx}^0 &= 0. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Подальше розв'язання системи визначальних рівнянь проведено в окремих пунктах цього підрозділу. Воно залежить від вибору одного з трьох можливих розв'язків першого рівняння: $\xi^1 = 1$, $\xi^1 = -\frac{1}{2}$ або $\xi^1 = 0$ (решту рівнянь системи (5.27) наведено вже з врахуванням того факту, що ξ^1 — стала). Розгляд випадку $\xi^1 = 0$, в свою чергу, розділено на два підвипадки: $\xi_{xx}^0 = 0$ та $\xi_{xx}^0 \neq 0$. Наголосимо, що визначальне рівняння (5.26) буде переписано в термінах ξ^1 , ξ^0 , η^1 і η^0 та розщеплено за u для кожного значення ξ^1 .

Слід зауважити, що розбиття операторів редукції рівнянь з класу (5.14) (а точніше — пар «рівняння, його оператор редукції») на сингулярні та регулярні, а також подальше розбиття регулярних операторів редукції на перераховані підвипадки, є інваріантним відносно перетворень з групи $G^\sim$.

Таким чином, оператори редукції прокласифіковано з точністю до відношення еквівалентності на множині операторів редукції (домноження на ненульову функцію), а також з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності (або, що те саме, $\mathcal{G}^\sim$ -еквівалентності внаслідок нормалізованості класу $\mathcal{L}|_S$). Справедлива наступна теорема.

Теорема 5.14. *З точністю до відношення еквівалентності операторів редукції всі регулярні оператори редукції рівнянь $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}|_S$ вичерпуються чотирма підмножинами:*

- 1) $Q^1 = \partial_t + u\partial_x$ для кожного рівняння $\mathcal{L}_f$ з класу $\mathcal{L}|_S$;
- 2) оператори лівської симетрії з ненульовими коефіцієнтами при ∂_t ;
- 3) $Q^\theta = \partial_t - (\theta_t/\theta_x)\partial_x$ для рівнянь $\mathcal{L}_{f^\theta}$, де $f^\theta = -1/\theta_x$, де $\theta = \theta(t, x)$ — довільний (несталий) розв'язок рівняння

$$\theta_t = \frac{\theta_{xx}}{\theta_x} + h(\theta)\theta_x,$$

h — довільна гладка функція від θ ;

- 4) $Q^{\xi^0\eta^1\eta^0} = \partial_t + (-\frac{1}{2}u + \xi^0)\partial_x + (\frac{1}{4}u^3 - \frac{1}{2}\xi^0u^2 + \eta^1u + \eta^0)\partial_u$ для класичного рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$ (а завдяки перетворенням з $G^\sim$ — і для всіх рівнянь $\mathcal{L}_c$, $c = \text{const}$), де

$$\xi^0 = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & u^1 & z^1 \\ 1 & u^2 & z^2 \\ 1 & u^3 & z^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u^1 & y^1 \\ 1 & u^2 & y^2 \\ 1 & u^3 & y^3 \end{vmatrix}}, \quad \eta^1 = \frac{1}{4} \frac{\begin{vmatrix} 1 & y^1 & z^1 \\ 1 & y^2 & z^2 \\ 1 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u^1 & y^1 \\ 1 & u^2 & y^2 \\ 1 & u^3 & y^3 \end{vmatrix}}, \quad \eta^0 = -\frac{1}{4} \frac{\begin{vmatrix} u^1 & y^1 & z^1 \\ u^2 & y^2 & z^2 \\ u^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & u^1 & y^1 \\ 1 & u^2 & y^2 \\ 1 & u^3 & y^3 \end{vmatrix}},$$

u^i — розв'язки рівняння $\mathcal{L}_1$, для яких визначник у знаменниках не дорівнює нулю, $y^i = 2u_x^i + (u^i)^2$, $z^i = 4u_{xx}^i + 6u^i u_x^i + (u^i)^3$, $i = 1, 2, 3$.

Два наступних пункти присвячено доведенню теореми для випадків $\xi^1 = 1$ та $\xi^1 = -\frac{1}{2}$, а випадок $\xi^1 = 0$ буде розбито на два підвипадки залежно від того, чи дорівнює нулю коефіцієнт ξ_{xx}^0 , кожний з яких розглянуто в окремих пунктах.

Тривіальний випадок $\xi^1 = 1$ Випадок $\xi^1 = 1$ описано в Аріго (1993) та Пуччі (1992). З визначальних рівнянь маємо

$$\xi^0 = 0, \quad \eta^1 = 0, \quad \eta^0 = 0,$$

що доводить *пункт 1* теореми 5.14. Векторне поле $Q^1 = \partial_t + u\partial_x$ є єдиним спільним оператором редукції для всіх рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Він дозволяє отримати двопараметричну сім'ю нетривіальних Q^1 -інваріантних розв'язків $u(t, x) = (x + c_1)/(t + c_2)$, де c_1 і c_2 — довільні сталі, а також сім'ю сталих розв'язків $u = \text{const}$.

Всі ці розв'язки є лівськи інваріантними (отримані за допомогою лівських редукцій), див. підрозділ 5.3.5. До того ж, це єдині спільні розв'язки для всіх рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Зауваження 5.3. Найкращий спосіб побудови Q^1 -інваріантних розв'язків рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1: L_1[u] \equiv u_t + uu_x + u_{xx} = 0$ — проінтегрувати спочатку рівняння $L_1[u] + Q^1[u] = u_{xx} = 0$, звідки отримаємо вираз $u = \alpha(t)x + \beta(t)$, де α і β — деякі гладкі функції від t . Узагальнене векторне поле $\hat{Q} = (L_1[u] + Q^1[u])\partial_u = u_{xx}\partial_u$ еквівалентне еволюційному представнику $Q^1[u]\partial_u$ оператора Q^1 на множині розв'язків рівняння $\mathcal{L}_1$, отже це — узагальнена умовна симетрія рівняння $\mathcal{L}_1$. Тому відповідний анзац $u = \alpha(t)x + \beta(t)$ зводить рівняння $\mathcal{L}_1$ до системи з двох звичайних диференціальних рівнянь на функції α і β :

$$\alpha_t + \alpha^2 = 0, \quad \beta_t + \alpha\beta = 0.$$

Повний набір функціонально незалежних інтегралів рівняння $Q^1[u] = 0$ складають $x - ut$ та u . Отже, безпосередньо за допомогою Q^1 будуюмо неявний анзац $u = \varphi(\omega)$, де $\omega = x - ut$ (відповідно $x - ut = \varphi(\omega)$, де $\omega = u$) для Q^1 -інваріантних розв'язків $x - ut \neq \text{const}$ (відповідно $u \neq \text{const}$). Для обох анзаців пов'язані з ними редуковані рівняння мають вигляд $\varphi_{\omega\omega} = 0$.

«No-go» випадок $\xi^1 = -\frac{1}{2}$ Випадок $\xi^1 = -\frac{1}{2}$ можливий тільки якщо $f = \text{const}$, тобто приходимо до задачі відшукування операторів редукції для класичного рівняння Бюргерса. Оскільки група еквівалентності класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ містить перетворення масштабування довільного елемента, $f =$

$1 \bmod G^\sim$, тому достатньо розглянути класичне рівняння Бюргерса $L_1 \equiv u_t + uu_x + u_{xx} = 0$.

Задача опису операторів редукції в цьому випадку зводиться до розв'язання системи з трьох диференціальних рівнянь на три невідомі функції ξ^0 , η^0 і η^1 , яка еквівалентна системі з трьох екземплярів лінійного рівняння теплопровідності (а це «по-го» задача). Такі оператори редукції мають вигляд

$$Q = \partial_t + \left(-\frac{1}{2}u + \xi^0\right) \partial_x + \left(\frac{1}{4}u^3 - \frac{\xi^0}{2}u^2 + \eta^1u + \eta^0\right) \partial_u, \quad (5.28)$$

де коефіцієнти $\xi^0 = \xi^0(t, x)$, $\eta^1 = \eta^1(t, x)$ та $\eta^0 = \eta^0(t, x)$ — гладкі функції від t та x , що задовольняють систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \xi_t^0 + 2\xi^0\xi_x^0 + \xi_{xx}^0 - 2\eta_x^1 &= 0, \\ \eta_t^1 + 2\xi_x^0\eta^1 + \eta_{xx}^1 + \eta_x^0 &= 0, \\ \eta_t^0 + 2\xi_x^0\eta^0 + \eta_{xx}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Оскільки певною диференціальною підстановкою систему (5.29) можна звести до системи з трьох незачеплених копій лінійного рівняння теплопровідності, загальний розв'язок рівняння (5.29) не можна зобразити у явному вигляді. Отже, випадок $\xi^1 = -\frac{1}{2}$ є «по-го» випадком.

Використовуючи техніку, розвинуту Поповичем (2008), можна показати, що цей факт безпосередньо впливає з того, що Q є оператором редукції рівняння $\mathcal{L}_1$. Більш того, покажемо, що розв'язки системи (5.29) можна представити через розв'язки системи з трьох незачеплених копій рівняння Бюргерса. Зауважимо, що в доведеннях Мансфельд (1999) та Аріго (2002) не використано зв'язок системи рівнянь (5.29) з операторами редукції.

Лема 5.5. *Будь-який розв'язок системи визначальних рівнянь (5.29) на коефіцієнти операторів редукції вигляду (5.28) можна записати у вигляді*

$$\xi^0 = \frac{(W(\bar{v}))_x}{W(\bar{v})}, \quad \eta^1 = \frac{|\bar{v}, \bar{v}_{xx}, \bar{v}_{xxx}|}{W(\bar{v})}, \quad \eta^0 = -2\frac{W(\bar{v}_x)}{W(\bar{v})}, \quad (5.30)$$

де $\bar{v} = (v^1, v^2, v^3)$ — трійка лінійно незалежних розв'язків рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$, $|\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}|$ — визначник матриці, побудованої з вектор-стовпчиків $\bar{p}$, $\bar{q}$ та $\bar{r}$, а $W(\bar{v}) = |\bar{v}, \bar{v}_x, \bar{v}_{xx}|$ та $W(\bar{v}_x) = |\bar{v}_x, \bar{v}_{xx}, \bar{v}_{xxx}|$ — визначники Вронського цієї трійки розв'язків та трійки похідних цих розв'язків за x відповідно.

Навпаки, будь-яка трійка функцій (ξ^0, η^1, η^0) , що допускає представлення (5.30), задовольняє систему (5.29).

Доведення. Доведення леми базується на властивостях операторів редукції. Зафіксуємо деякий оператор Q вигляду (5.28). Множина Q -інваріантних розв'язків рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1: L_1[u] = 0$, що відповідають оператору Q , співпадає з множиною розв'язків системи рівнянь $L_1[u] = 0$, $Q[u] = 0$, до того ж вона параметризована двома довільними сталими, оскільки Q — регулярний оператор редукції рівняння Бюргерса.

Для зручності перейдемо до розгляду саме системи рівнянь $L_1[u] = 0$, $L_1[u] + Q[u] = 0$. Перетворення Коула–Хопфа $u = 2v_x/v$, застосоване до цієї системи, дасть систему лінійних рівнянь

$$v_t + v_{xx} = 0, \quad v_{xxx} - \xi^0 v_{xx} + \eta^1 v_x + \frac{1}{2} \eta^0 v = 0. \quad (5.31)$$

Нехай тепер для деякого цілого n функції $v^1, \dots, v^n$ від t та x — лінійно незалежні розв'язки системи (5.31). Тоді рівняння

$$u = 2 \frac{c_1 v_x^1 + \dots + c_n v_x^n}{c_1 v^1 + \dots + c_n v^n} \quad (5.32)$$

де $c_1, \dots, c_n$ — довільні сталі, одночасно не рівні нулю, визначає сім'ю Q -інваріантних розв'язків рівняння Бюргерса, параметризовану n сталими, серед яких лише $n - 1$ суттєвих. Отже, $n \leq 3$ (як кількість таких параметрів) не може перевищувати 2. Інакше кажучи, розмірність простору V розв'язків системи (5.31) не перевищує 3. Ця розмірність не може також бути менше, ніж 3. Справді, розглянемо тепер деякі функції $v^1, \dots, v^n$ від t та x , що утворюють базис простору V , де $n = \dim V$. Тоді вираз (5.32) є загальним розв'язком системи рівнянь $L_1[u] = 0$ та $Q[u] = 0$,

і цей загальний розв'язок містить $n - 1$ суттєвих сталих параметрів. Таким чином, $n - 1 = 2$, тобто $n = 3$.

Розглянемо базис $\{v^1, v^2, v^3\}$ простору V . За означенням елементи V — це розв'язки рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$, яке є лінійним і еволюційним. Отже, із звичайної лінійної незалежності цих розв'язків випливає їхня лінійна незалежність над кільцем гладких функцій від t , тобто визначник Вронського $W(\bar{v})$ функцій v^1, v^2 та v^3 за x не дорівнює нулю. Підставляючи елементи базису у друге рівняння (5.31), отримаємо добре (коректно) визначену систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$v_{xxx}^i - \xi^0 v_{xx}^i + \eta^1 v_x^i + \frac{1}{2} \eta^0 v^i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

на коефіцієнти ξ^0, η^1, η^0 , або, що те саме, але у матричній формі:

$$M\bar{q} = \bar{v}_{xxx}, \quad \text{де}$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} v^1 & v_x^1 & v_{xx}^1 \\ v^2 & v_x^2 & v_{xx}^2 \\ v^3 & v_x^3 & v_{xx}^3 \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\eta^0 \\ -\eta^1 \\ \xi^0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язавши цю систему відносно ξ^0, η^1 та η^0 , отримаємо вирази (5.30).

Оскільки всі міркування можна провести у зворотному порядку, обернене твердження також має місце. $\square$

Наслідок 5.10. *Коефіцієнти оператора редукції (5.28) рівняння Бюргерса можна записати у вигляді*

$$\xi^0 = \frac{1}{2} \frac{|\bar{e}, \bar{u}, \bar{z}|}{|\bar{e}, \bar{u}, \bar{y}|}, \quad \eta^1 = \frac{1}{4} \frac{|\bar{e}, \bar{y}, \bar{z}|}{|\bar{e}, \bar{u}, \bar{y}|}, \quad \eta^0 = -\frac{1}{4} \frac{|\bar{u}, \bar{y}, \bar{z}|}{|\bar{e}, \bar{u}, \bar{y}|}, \quad (5.33)$$

де вектор-стовпчики $\bar{e}, \bar{y}$ та $\bar{z}$ складаються з трьох одиниць, виразів $y^i = 2u_x^i + (u^i)^2$ та $z^i = 4u_{xx}^i + 6u^i u_x^i + (u^i)^3$ відповідно ($i = 1, 2, 3$), а $\bar{u}$ є вектором з трьох розв'язків рівняння Бюргерса, причому $|\bar{e}, \bar{u}, \bar{y}| \neq 0$.

Доведення. Зв'язок між розв'язками рівняння теплопровідності та рівняння Бюргерса за допомогою перетворення Коула–Хопфа $2v_x^i/v^i = u^i$

дає рівності

$$\frac{v_{xx}^i}{v^i} = \frac{1}{2}u_x^i + \frac{1}{4}(u^i)^2, \quad \frac{v_{xxx}^i}{v^i} = \frac{3}{4}u^i u_x^i + \frac{1}{8}(u^i)^3 + \frac{1}{2}u_{xx}^i, \quad i = 1, 2, 3,$$

підстановка яких у (5.30) доводить наслідок. Зауважимо, що визначник $|\bar{e}, \bar{u}, \bar{y}| \neq 0$, так само як і визначник Вронського $W(\bar{v})$. $\square$

Наслідок 5.11. *Представлення (5.30) та (5.32), де $n = 3$, явним чином встановлюють взаємно однозначну відповідність між операторами редукції вигляду (5.28) та сім'ями розв'язків рівняння Бюргерса, що є інваріантними за цими операторами.*

Побудова явного вигляду анзацу для u шляхом безпосереднього інтегрування умови інваріантності поверхні, що відповідає оператору вигляду (5.28), у випадку довільного розв'язку системи (5.29), виглядає досить складною задачею. Навіть для простого розв'язку системи (5.29), проведення відповідної редукції рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$ є нетривіальним.

Дещо кращий спосіб використання оператора вигляду (5.28) для редукції рівняння Бюргерса — це розглянути замість Q узагальнене векторне поле

$$\hat{Q} = (L_1[u] + Q[u])\partial_u,$$

яке еквівалентне еволюційному представнику $Q[u]\partial_u$ оператора Q і є узагальненою умовною симетрією рівняння $\mathcal{L}_1$. Насправді редукція рівняння $\mathcal{L}_1$ за узагальненим векторним полем $\hat{Q}$ у певному сенсі представлена в доведенні леми 5.5, а наслідок 5.11 вичерпно описує сім'ю Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}_1$.

Разом з тим, використавши представлення (5.32) для Q -інваріантних розв'язків рівняння $\mathcal{L}_1$, де $n = 3$, можна побудувати анзац для u , що відповідає оператору Q , і провести редукцію рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$ за допомогою цього анзацу. Поклавши $c_1 = 1$ та $c_2 = 0$ (відповідно $c_1 = 0$ та $c_2 = 1$) і вважаючи c_3 довільною сталою, ми отримаємо два інтеграли

рівняння $Q[u] = 0$:

$$\zeta = \frac{v^1 u - 2v_x^1}{v^3 u - 2v_x^3}, \quad \omega = \frac{v^2 u - 2v_x^2}{v^3 u - 2v_x^3}.$$

Вони коректно визначені для $u \neq 2v_x^3/v^3$ (завжди можна вважати, що ця умова виконана для конкретного розв'язку u з точністю до перейменування функцій v^1 , v^2 та v^3). Таким чином, загальний розв'язок рівняння $Q[u] = 0$ можна представити неявним чином у вигляді $F(\zeta, \omega) = 0$, де F є довільною несталою функцією своїх аргументів. З точністю до перейменування ζ і ω похідну F_ζ можна вважати ненульовою. Отже, з рівності $F(\zeta, \omega) = 0$ випливає неявний анзац $\zeta = \varphi(\omega)$ для невідомої функції $u = u(t, x)$, де ζ та ω — нові залежна та незалежна змінні відповідно. Стандартний спосіб виведення відповідного редукованого рівняння шляхом обчислення виразів для похідних u_t , u_x та u_{xx} , що можуть бути отримані з анзацу, і наступною їх підстановкою у рівняння $\mathcal{L}_1$, є занадто громіздким. Замість цього подіємо на анзац $\zeta = \varphi(\omega)$ оператором $D_t + D_{xx}$ і після цього зробимо підстановку $u_t + u_{xx} = -u u_x$ та $v_t^i + v_{xx}^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). В результаті отримуємо рівняння $\varphi_{\omega\omega} D_x \omega = 0$.

Для розв'язків рівняння $\mathcal{L}_1$, які неявно задані виразом $\zeta = \varphi(\omega)$ для деяких гладких функцій φ від ω , диференціальна функція $D_x \omega$ ненульова. Справді, припустимо, що $D_x \omega = 0$ (тобто $\omega = \omega^0(t)$) для деякого розв'язку $u = u^0(t, x)$. Тоді $u^0 = 2(v_x^2 - \omega^0 v_x^3)/(v^2 - \omega^0 v^3)$, звідки випливає, що для деякої ненульової гладкої функції χ від t вираз $(v^2 + \omega^0 v^3)\chi$ дасть розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $v_t + v_{xx} = 0$. Оскільки функції v^2 та v^3 — лінійно незалежні розв'язки одного і того ж рівняння, це можливо тільки тоді, коли ω^0 є сталою. Таким чином, підстановка $u = u^0(t, x)$ у ζ дає стаке значення $\zeta^0 = \varphi(\omega^0)$, а отже $u^0 = 2(v_x^1 - \zeta^0 v_x^3)/(v^1 - \zeta^0 v^3)$. Порівнюючи два вирази для розв'язку $u = u^0(t, x)$, робимо висновок, що функції v^1 , v^2 та v^3 лінійно залежні, цим самим приходимо до суперечності.

Оскільки $D_x \omega \neq 0$, редуковане рівняння набуває вигляду $\varphi_{\omega\omega} = 0$.

Його загальний розв'язок $\varphi = \tilde{c}_1\omega + \tilde{c}_2$, що повністю узгоджується з представленням (5.32) і анзацу $\zeta = \varphi(\omega)$. Це редуковане рівняння отримано для довільного оператора Q вигляду (5.28), і воно простіше, ніж ті окремі випадки редукованих рівнянь, що виведені раніше Аріго (1993) та Піччі (1992). Цей факт пояснюється тим, що анзац $\zeta = \varphi(\omega)$, побудова якого базується на представленні (5.32) для Q -інваріантних розв'язків рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_1$, краще узгоджується зі структурою цього рівняння, ніж часткові випадки анзаців, які наведено Аріго (1993) та Піччі (1992).

Випадок $\xi^1 = 0$, $\xi_{xx}^0 = 0$, що пов'язаний з лівськими симетріями Підставивши $\xi^1 = 0$ у систему рівнянь (5.26)–(5.27), де $\xi = \xi^0(t, x)$ та $\eta = \eta^1(t, x)u + \eta^0(t, x)$, і розщепивши (5.26) за u , отримуємо визначальні рівняння $\eta_x^1 = 0$, звідки $\eta^1 = \eta^1(t)$, а також

$$\eta_x^0 + \eta^1 \xi_x^0 = (\eta^1)^2 - \eta_t^1, \quad (5.34)$$

$$f_t + f_x \xi^0 - f(\eta^1 + \xi_x^0) = 0, \quad (5.35)$$

$$\xi_t^0 + \xi^0 \xi_x^0 + f \xi_{xx}^0 = \eta^0 + \eta^1 \xi^0, \quad (5.36)$$

$$\eta_t^0 + \eta^0 \xi_x^0 + f \eta_{xx}^0 = \eta^1 \eta^0. \quad (5.37)$$

Доведемо, що всі оператори редукції з нульовими значеннями ξ^1 та ξ_{xx}^0 еквівалентні операторам лівської симетрії. За умови $\xi_{xx}^0 = 0$ з рівняння (5.34) отримуємо $\eta_{xx}^0 = 0$. Отже,

$$\xi(t, x) = \xi^0(t, x) = \xi^{01}(t)x + \xi^{00}(t),$$

$$\eta(t, x) = \eta^1(t)u + \eta^{01}(t)x + \eta^{00}(t).$$

Тоді в термінах невідомих функцій ξ^{01} , ξ^{00} , η^1 , η^{01} та η^{00} визначальні рівняння набувають вигляду

$$\xi_t^{01} = (\eta^1 - \xi^{01})\xi^{01} + \eta^{01}, \quad (5.38)$$

$$\xi_t^{00} = (\eta^1 - \xi^{01})\xi^{00} + \eta^{00}, \quad (5.39)$$

$$\eta_t^1 = (\eta^1 - \xi^{01})\eta^1 - \eta^{01}, \quad (5.40)$$

$$\eta_t^{01} = (\eta^1 - \xi^{01})\eta^{01}, \quad (5.41)$$

$$\eta_t^{00} = (\eta^1 - \xi^{01})\eta^{00}, \quad (5.42)$$

$$\eta^1 = \frac{f_t}{f} + \frac{f_x}{f} (\xi^{01}x + \xi^{00}) - \xi^{01}. \quad (5.43)$$

Для розв'язання цієї системи визначальних рівнянь використаємо підстановку $\xi^{01} = \varphi_t/\varphi$ та $\eta^1 = -\psi_t/\psi$, де φ та ψ є гладкими функціями від t , причому $\varphi\psi \neq 0$. Зокрема, з (5.41) маємо рівняння

$$\frac{\eta_t^{01}}{\eta^{01}} + \frac{\varphi_t}{\varphi} + \frac{\psi_t}{\psi} = 0,$$

яке можна проінтегрувати за умови $\eta^{01}\varphi\psi = a_0 = \text{const}$, що дає

$$\eta^{01} = \frac{a_0}{\varphi\psi}. \quad (5.44)$$

Підставивши вираз (5.44) для η^{01} у модифіковані рівняння (5.38) та (5.40), отримуємо $\varphi_{tt}\psi + \varphi_t\psi_t = a_0$ та $\varphi\psi_{tt} + \varphi_t\psi_t = a_0$, або, після інтегрування,

$$\varphi_t\psi = a_0t + a_1, \quad \varphi\psi_t = a_0t + a_2, \quad (5.45)$$

відповідно. Інтегруючи суму рівнянь (5.45), маємо

$$\varphi\psi = a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3, \quad (5.46)$$

де a_1 , a_2 та a_3 — довільні сталі, причому $(a_0, a_1 + a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ оскільки $\varphi\psi \neq 0$. Тоді з рівняння (5.44) маємо

$$\eta^{01} = \frac{a_0}{a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3}.$$

Поділивши кожне з рівнянь (5.45) на (5.46), отримуємо

$$\xi^{01} = \frac{\varphi_t}{\varphi} = \frac{a_0t + a_1}{a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3},$$

$$\eta^1 = -\frac{\psi_t}{\psi} = -\frac{a_0t + a_2}{a_0t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3}.$$

Послідовно інтегруючи ще не використані рівняння (5.42) та (5.39), маємо

$$\eta^{00} = \frac{a_4}{a_0 t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3}, \quad \xi^{00} = \frac{a_4 t + a_5}{a_0 t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3},$$

де a_4 та a_5 — також сталі інтегрування.

З огляду на отримані вирази для ξ та η , маємо сім'ю векторних полів

$$Q^a = \partial_t + \frac{(a_0 t + a_1)x + a_4 t + a_5}{a_0 t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3} \partial_x + \frac{-(a_0 t + a_2)u + a_0 x + a_4}{a_0 t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3} \partial_u,$$

де $a = (a_0 \dots a_5)$ — вектор з довільних сталих, визначених з точністю до спільного ненульового множника, і $(a_0, a_1 + a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$. Кожен з операторів редукції Q^a еквівалентний (з точністю до множення на ненульову функцію) оператору лівської симетрії

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^a = & (a_0 t^2 + (a_1 + a_2)t + a_3) \partial_t + ((a_0 t + a_1)x + a_4 t + a_5) \partial_x + \\ & + (-(a_0 t + a_2)u + a_0 x + a_4) \partial_u. \end{aligned}$$

Щоб Q^a був оператором редукції рівняння $\mathcal{L}_f$ з певним f , його коефіцієнти повинні додатково задовольняти рівняння (5.43). Це рівносильно тому факту, що коефіцієнти $\tilde{Q}^a$ задовольняють класифікуючу умову (5.18) з цим самим f . Інакше кажучи, векторне поле Q^a є оператором редукції деякого рівняння $\mathcal{L}_f$ тоді і тільки тоді, якщо еквівалентне векторне поле $\tilde{Q}^a$ — генератор лівської симетрії цього ж рівняння, що дає пункт 2 теореми 5.14. Лівські редукції та лівські розв'язки рівнянь з класу $\mathcal{L}|_S$ розглянуто у підрозділі 5.3.5.

Випадок $\xi^1 = 0$, $\xi_{xx}^0 \neq 0$ Для цього підвипадку справедлива система визначальних рівнянь (5.34)–(5.37) та $\eta_x^1 = 0$, звідки $\eta^1 = \eta^1(t)$, а також наступна лема.

Лема 5.6. *При $\xi^1 = 0$, $\xi_{xx}^0 \neq 0$ з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності коефіцієнт η дорівнює нулю.*

Доведення. Для зручності введемо позначення $\alpha := (\eta^1)^2 - \eta_t^1$. Рівняння (5.34) проінтегруємо за x :

$$\eta^0 + \eta^1 \xi^0 = \alpha x + \beta, \quad (5.47)$$

де $\beta = \beta(t)$ — довільна функція. Виразивши змінну η^0 з рівняння (5.47), виключаємо її разом з її похідними з визначальних рівнянь. Після спрощень рівняння (5.36) та (5.37) набувають вигляду

$$\xi_t^0 + \xi^0 \xi_x^0 + f \xi_{xx}^0 = \alpha x + \beta, \quad (5.48)$$

$$((\alpha x + \beta) \xi^0)_x = 2\eta^1(\alpha x + \beta) - (\alpha_t x + \beta_t). \quad (5.49)$$

Доведемо, що для будь-якого розв'язку системи рівнянь (5.34)–(5.37) з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності $\alpha = 0$ та $\beta = 0$. Справді, припустимо, що $\alpha \neq 0$. Інтегруючи (5.49) за x , отримуємо

$$\xi^0 = \frac{(\alpha \eta^1 - \frac{1}{2} \alpha_t) x^2 + (2\eta^1 \beta - \beta_t) x + \delta}{\alpha x + \beta} = \gamma^1 x + \gamma^0 + \frac{\mu}{\alpha x + \beta},$$

де δ — довільна функція від t що виникає в процесі інтегрування,

$$\begin{aligned} \gamma^1 &= \eta^1 - \frac{\alpha_t}{2\alpha}, \quad \gamma^0 = \frac{\eta^1 \beta - \beta_t}{\alpha} + \frac{\alpha_t \beta}{2\alpha^2}, \\ \mu &= \delta + \frac{\beta}{\alpha}(\beta_t - \eta^1 \beta) - \frac{\alpha_t \beta^2}{2\alpha^2}. \end{aligned}$$

Тоді з рівняння (5.48) маємо вираз для f :

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2\mu\alpha^2}(\alpha x + \beta)^4 - \frac{\gamma^1(\gamma^1 x + \gamma^0) + \gamma_t^1 x + \gamma_t^0}{2\mu\alpha^2}(\alpha x + \beta)^3 - \\ &\quad - \frac{\mu_t + \mu\gamma^1}{2\mu\alpha^2}(\alpha x + \beta)^2 + \frac{\alpha_t x + \beta_t + (\gamma^1 x + \gamma^0)\alpha}{2\alpha^2}(\alpha x + \beta) + \frac{\mu}{2\alpha}, \end{aligned}$$

який є многочленом від $(\alpha x + \beta)$ з коефіцієнтом $\mu/(2\alpha)$ при нульовому степені.

Підставивши ξ^0 та f у рівняння (5.35), отримаємо деякий многочлен вже від $(\alpha x + \beta)$ та $(\alpha x + \beta)^{-1}$ з коефіцієнтами, також залежними від t , який тотожно дорівнює нулю. Це означає, що всі коефіцієнти цього

многочлена дорівнюють нулю, зокрема коефіцієнт $\mu^2/2$ при $(\alpha x + \beta)^{-2}$. Отже, $\mu = 0$ і $\xi^0 = \gamma^1 x + \gamma^0$, а це суперечить припущенню $\xi_{xx}^0 \neq 0$.

Використовуючи щойно доведений факт, що $\alpha = 0$, диференціюємо рівняння (5.49) за x і отримуємо $\beta \xi_{xx}^0 = 0$. Отже, $\beta = 0$ з огляду на припущення $\xi_{xx}^0 \neq 0$.

З огляду на означення α та рівняння (5.47) з умови $\alpha = \beta = 0$ випливає, що $\eta_t^1 = (\eta^1)^2$, $\eta^0 = -\eta^1 \xi^0$. Розв'язками рівняння $\eta_t^1 = (\eta^1)^2$ є $\eta^1 = 0$ та $\eta^1 = -(t + c)^{-1}$, де c — стала інтегрування. Друге значення η^1 можна зробити нульовим, використавши перетворення еквівалентності $\tilde{t} = -(t + c)^{-1}$, $\tilde{x} = x(t + c)^{-1}$, $\tilde{u} = (t + c)u - x$, $\tilde{f} = f$. $\square$

За умови $\eta = 0$ система визначальних рівнянь (5.34)–(5.37) зводиться до добре визначеної системи

$$f_t + \xi f_x - \xi_x f = 0, \quad (5.50)$$

$$\xi_t + \xi \xi_x + f \xi_{xx} = 0 \quad (5.51)$$

на функції $f(t, x)$ і $\xi(t, x)$. Крім того, ця система записана у формі Ковалевської, отже вона не має нетривіальних диференціальних наслідків. Її загальний розв'язок знайти неможливо, тому не вдасться і вичерпно описати оператори редукції класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, для яких $\xi_u = 0$. Але можна знайти деякі часткові розв'язки цієї системи, які дадуть змогу отримати нові точні розв'язки рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з відповідними значеннями довільного елемента f .

Точні розв'язки, отримані через зв'язок з потенціальним рівнянням швидкої дифузії Запишемо рівняння (5.50) у збережній формі: $(1/f)_t + (\xi/f)_x = 0$. Введемо потенціал $\theta = \theta(t, x)$, визначений умовами $\theta_t = \xi/f$ і $\theta_x = -1/f$, звідки

$$f = -\frac{1}{\theta_x}, \quad \xi = -\frac{\theta_t}{\theta_x}. \quad (5.52)$$

Використовуючи ці вирази, рівняння (5.51) можна записати у вигляді

$$(\theta_x \partial_t - \theta_t \partial_x) \left(\frac{\theta_t}{\theta_x} - \frac{\theta_{xx}}{(\theta_x)^2} \right) = 0. \quad (5.53)$$

Проінтегрувавши його і домноживши результат на θ_x , дістанемо

$$\theta_t = \frac{\theta_{xx}}{\theta_x} + h(\theta) \theta_x, \quad (5.54)$$

де h — довільна гладка функція. Для кожного розв'язку θ рівняння (5.54) існує оператор редукції $Q^\theta = \partial_t - (\theta_t/\theta_x) \partial_x$, для узагальнених рівнянь Бюргерса рівняння $\mathcal{L}_{-1/\theta_x}$.

Анзац $u = \varphi(\omega)$, $\omega = \theta(t, x)$, побудований за оператором редукції Q^θ , редукує рівняння $\mathcal{L}_{-1/\theta_x}$ до звичайного диференціального рівняння $\varphi_{\omega\omega} - \varphi\varphi_\omega - h(\omega)\varphi_\omega = 0$, яке вдається проінтегрувати у частковому випадку $h = \mu = \text{const}$. Маємо рівняння Ріккаті $\varphi_\omega = \frac{1}{2}\varphi^2 + \mu\varphi + 2\nu$, де ν — стала інтегрування.

Але насправді $\mu = 0 \bmod G^\sim$. Перетворення $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x + \mu t$, $\tilde{u} = u + \mu$, $\tilde{f} = f$ з групи еквівалентності $G^\sim$ відображає рівняння (5.54) з $h = \mu = \text{const}$ у потенціальне рівняння швидкої дифузії

$$\theta_{\tilde{t}} = \frac{\theta_{\tilde{x}\tilde{x}}}{\theta_{\tilde{x}}}, \quad (5.55)$$

а відповідне рівняння Ріккаті набуває вигляду $\varphi_\omega = \frac{1}{2}\varphi^2 + 2\nu$ та інтегрується з використанням підстановки $\varphi = -2\psi_\omega/\psi$. Результат інтегрування залежить від знаку ν . Знаючи низку точних розв'язків $\theta(t, x)$ рівняння (5.55), використаємо їх для обчислення відповідних значень довільного елемента f і коефіцієнта ξ оператора редукції Q^θ (таблиця 5.9). Таким чином, для кожної функції f з таблиці узагальнене рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_f: u_t + uu_x + f(t, x)u_{xx} = 0$ має розв'язки

$$u(t, x) = \begin{cases} 2k \frac{c_1 \sin k\theta - c_2 \cos k\theta}{c_1 \cos k\theta + c_2 \sin k\theta}, & \nu > 0, \\ -\frac{2c_2}{c_1 + c_2\theta}, & \nu = 0, \\ -2\chi \frac{c_1 e^{\chi\theta} - c_2 e^{-\chi\theta}}{c_1 e^{\chi\theta} + c_2 e^{-\chi\theta}}, & \nu < 0. \end{cases}$$

Таблиця 5.9. Значення f , ξ і θ , пов'язані формулами (5.52)

№	$f(t, x)$	$\xi(t, x)$	$\theta(t, x)$
1	$1 + e^{-t-x}$	e^{t+x}	$-\ln(e^t + e^{-x})$
2	-1	0	x
3	$1 - e^{-t-x}$	$-e^{t+x}$	$-\ln e^t - e^{-x} $
4	$-e^{-x}$	$-e^{-x}$	$e^x + t$
5	$t - x - \lambda t e^{-x/t}$	$1 - \lambda e^{-x/t}$	$\ln t + \int \frac{dw}{w - 1 + \lambda e^{-w}} \Big _{w=x/t}, \lambda = \text{const}$
6	$-\frac{t^2 - x^2}{2t}$	$\frac{x}{t}$	$\ln \left \frac{x - t}{x + t} \right $
7	$-\frac{x^2}{2t}$	$\frac{x}{t}$	$-\frac{2t}{x}$
8	$-\frac{t^2 + x^2}{2t}$	$\frac{x}{t}$	$2 \arctan \frac{x}{t}$
9	$-\frac{\cos^2 x}{2t}$	$-\frac{\sin 2x}{2t}$	$2t \operatorname{tg} x$
10	$\frac{\cosh^2 x}{2t}$	$-\frac{\sinh 2x}{2t}$	$-2t \operatorname{th} x$
11	$-\frac{\sinh^2 x}{2t}$	$\frac{\sinh 2x}{2t}$	$-2t \operatorname{coth} x$
12	$\frac{\cos 2x - \cos 2t}{2 \sin 2t}$	$\frac{\sin 2x}{\sin 2t}$	$\ln \left \frac{\sin(x - t)}{\sin(x + t)} \right $
13	$\frac{\cosh 2t - \cosh 2x}{2 \sinh 2t}$	$\frac{\sinh 2x}{\sinh 2t}$	$\ln \left \frac{\sinh(x - t)}{\sinh(x + t)} \right $
14	$\frac{\sinh 2t - \sinh 2x}{2 \cosh 2t}$	$\frac{\cosh 2x}{\cosh 2t}$	$\ln \left \frac{\sinh(x - t)}{\cosh(x + t)} \right $
15	$\frac{\cosh 2t + \cosh 2x}{2 \sinh 2t}$	$-\frac{\sinh 2x}{\sinh 2t}$	$\ln \left \frac{\cosh(x - t)}{\cosh(x + t)} \right $
16	$\frac{\cos 2t - \cosh 2x}{2 \sin 2t}$	$\frac{\sinh 2x}{\sin 2t}$	$2 \arctan(\operatorname{ctg} t \operatorname{th} x)$
17	$\frac{\cosh 2t - \cos 2x}{2 \sinh 2t}$	$\frac{\sin 2x}{\sinh 2t}$	$2 \arctan(\operatorname{coth} t \operatorname{tg} x)$

Тут $k = \sqrt{\nu}$, $\varkappa = \sqrt{-\nu}$; для довільних сталих c_1 , c_2 суттєве лише їх відношення.

Зауваження 5.4. З огляду на рівняння (5.51) функція $\xi = -\theta_t/\theta_x$ є також розв'язком узагальненого рівняння Бюргерса $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з відповідним f .

Більш того, сім'ї розв'язків, побудовані таким чином, можна розширити до розв'язків інших рівнянь з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ перетвореннями з групи еквівалентності $G^{\sim}$ цього класу.

5.3.7 Закони збереження і потенціальні допустимі перетворення

Оскільки рівняння $\mathcal{L}_f$ є квазілінійним еволюційним рівнянням другого порядку, шукаємо характеристики його (локальних) законів збереження у вигляді $\lambda = \lambda(t, x, u)$.

З того, що характеристика λ закону збереження рівняння $\mathcal{L}_f$ є його косиметрією, випливає рівність

$$-D_t \lambda + D_x^2(f\lambda) + u_x \lambda - D_x(u\lambda) = 0,$$

що виконується для всіх розв'язків рівняння $\mathcal{L}_f$. Підставивши у цю рівність $u_t = -uu_x - fu_{xx}$ і розщепивши результат за u_{xx} , дістанемо визначальні рівняння $\lambda_u = 0$ та $-\lambda_t + (f\lambda)_{xx} - u\lambda_x = 0$. Подальше розщеплення за u дасть $\lambda_x = 0$ та $f_{xx}\lambda = \lambda_t$. Отже, $f_{xxx}\lambda = 0$.

Це означає, що рівняння $\mathcal{L}_f$ має нетривіальні закони збереження тоді і тільки тоді, коли $f_{xxx} = 0$, тобто

$$f = f^2(t)x^2 + f^1(t)x + f^0(t), \quad (5.56)$$

де коефіцієнти f^2 , f^1 та f^0 є гладкими функціями від t , що одночасно не дорівнюють нулю. Тоді

$$\lambda = \lambda(t) = e^{\int f_{xx} dt}$$

є єдиною лінійно незалежною характеристикою рівняння $\mathcal{L}_f$. Тут і далі інтеграл за t означає деяку фіксовану первісну. Інакше кажучи, простір законів збереження рівняння $\mathcal{L}_f$ одновимірний. Домноживши рівняння $\mathcal{L}_f$ на λ , запишемо його у збережній формі:

$$D_t(\lambda u) + \lambda D_x \left(\frac{1}{2}u^2 + fu_x - f_x u \right) = 0.$$

Використовуючи цю форму рівняння $\mathcal{L}_f$, введемо потенціал $v = v(t, x)$ рівняння $\mathcal{L}_f$, визначений рівностями

$$\mathcal{R}_{f,\lambda}: \quad v_x = \lambda u, \quad v_t = -\lambda \left(\frac{1}{2} u^2 + f u_x - f_x u \right).$$

Система $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ називається *системою для потенціалів* рівняння $\mathcal{L}_f$. Виключивши з неї залежну змінну u , отримуємо *рівняння для потенціалу*, що відповідає рівнянню $\mathcal{L}_f$:

$$\mathcal{P}_{f,\lambda}: \quad v_t + \frac{1}{2\lambda} v_x^2 + f v_{xx} - f_x v_x = 0.$$

Зауваження 5.5. Існує ізоморфізм між просторами законів збереження рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ та системи рівнянь $\mathcal{R}_{f,\lambda}$.

Опишемо тепер *потенціальні закони збереження* рівняння $\mathcal{L}_f$, які є локальними законами збереження відповідної системи $\mathcal{R}_{f,\lambda}$, або, що те саме, рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$. Нехай μ — найпростіша характеристика локального закону збереження для рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$. Тоді $\mu = \mu(t, x, v)$. Записуємо визначальне рівняння

$$-D_t \mu + D_x^2(f\mu) - D_x \left(\left(\frac{1}{\lambda} v_x - f_x \right) \mu \right) = 0,$$

що виконується для всіх розв'язків рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$, і розв'язуємо його відносно μ , що дає лише нульові розв'язки. В результаті отримуємо, що рівняння $\mathcal{L}_f$, де $f \neq \text{const}$, не має ненульових потенціальних законів збереження, отже, $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ — єдина канонічна система для потенціалів для $\mathcal{L}_f$. Класичне рівняння Бюргерса (з $f = \text{const}$) має потенціальні закони збереження, які є локальними законами збереження відповідного рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ з редукованими характеристиками вигляду $\mu = \psi(t, x) e^{\frac{v}{2f}}$, де $\psi(t, x)$ — довільний розв'язок лінійного рівняння теплопровідності $\psi_t = f \psi_{xx}$. Оскільки рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ з $f = \text{const}$ подібне до лінійного рівняння теплопровідності, класичне рівняння Бюргерса не допускає потенціальних законів збереження вищого порядку.

Отже, підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}, f_{xxx}=0}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з квадратичною за x функцією f можна природним чином розбити на підкласи:

$$\mathcal{L}^1 = \{\mathcal{L}_f \mid f = \text{const}\} \quad \text{та} \quad \mathcal{L}^2 = \{\mathcal{L}_f \mid f_{xxx} = 0, f \neq \text{const}\}.$$

Обидва ці підкласи замкнені відносно групи еквівалентності $G^\sim$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, а отже, є нормалізованими, як і клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Оскільки неможливо вибрати канонічного представника з (одновимірного) простору характеристик законів збереження рівняння $\mathcal{L}_f$ з підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}, f_{xxx}=0}$, при розгляді класу систем для потенціалів $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ та класу рівнянь для потенціалів $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ необхідно розширити довільний елемент класу, включивши в нього параметр-функцію λ . Відповідно, множину $\check{\mathcal{S}}$, яку пробігає розширений довільний елемент (f, λ) , задано допоміжною системою

$$\check{\mathcal{S}}: \quad f_{xxx} = 0, \quad \lambda_t = f_{xx}\lambda, \quad f\lambda \neq 0.$$

Системи для потенціалів $\mathcal{R}_{f,\lambda^1}$ та $\mathcal{R}_{f,\lambda^2}$ (або рівняння для потенціалів $\mathcal{P}_{f,\lambda^1}$ та $\mathcal{P}_{f,\lambda^2}$) з лінійно залежними λ^1 і λ^2 , які асоційовані з лінійно залежними законами збереження рівняння $\mathcal{L}_f$, вважаємо калібрувально еквівалентними в сенсі потенціальних систем (потенціальних рівнянь). Позначимо клас систем для потенціалів $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ та клас рівнянь для потенціалів $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ відповідно через $\check{\mathcal{R}}|_{\check{\mathcal{S}}}$ та $\check{\mathcal{P}}|_{\check{\mathcal{S}}}$.

Допустимі перетворення та групоїд еквівалентності класу $\check{\mathcal{R}}|_{\check{\mathcal{S}}}$ можна назвати *потенціальними допустимими перетвореннями* і *потенціальним групоїдом еквівалентності* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}, f_{xxx}=0}$ відповідно.

Лема 5.7. *Групоїди еквівалентності класів $\check{\mathcal{R}}|_{\check{\mathcal{S}}}$ та $\check{\mathcal{P}}|_{\check{\mathcal{S}}}$ ізоморфні.*

Доведення. Зафіксуємо будь-які два значення (f^1, λ^1) та (f^2, λ^2) довільного елемента (f, λ) з множини $\check{\mathcal{S}}$. Кожне точкове перетворення між рівняннями $\mathcal{P}_{f^1,\lambda^1}$ та $\mathcal{P}_{f^2,\lambda^2}$ продовжується на u згідно рівності $u = v_x/\lambda$, що дає точкове перетворення між системами $\mathcal{R}_{f^1,\lambda^1}$ та $\mathcal{R}_{f^2,\lambda^2}$. Навпаки,

нехай φ — точкове перетворення між системами $\mathcal{R}_{f^1, \lambda^1}$ та $\mathcal{R}_{f^2, \lambda^2}$:

$$\varphi: \tilde{t}=T(t, x, u, v), \quad \tilde{x}=X(t, x, u, v), \quad \tilde{u}=U(t, x, u, v), \quad \tilde{v}=V(t, x, u, v).$$

Підставивши $u = v_x/\lambda$ у T , X та V і відкидаючи компонент перетворення φ для u , отримуємо контактне перетворення між $\mathcal{P}_{f^1, \lambda^1}$ та $\mathcal{P}_{f^2, \lambda^2}$, яке індуковане точковим перетворенням, оскільки обидва рівняння $\mathcal{P}_{f^1, \lambda^1}$ та $\mathcal{P}_{f^2, \lambda^2}$ є еволюційними рівняннями другого порядку, лінійними за похідною u_{xx} . $\square$

З огляду на лему 5.7 можна працювати з класом $\check{\mathcal{P}}|_{\check{\mathcal{S}}}$ замість класу $\check{\mathcal{R}}|_{\check{\mathcal{S}}}$, вивчаючи потенціальні допустимі перетворення класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}, f_{xxx}=0}$.

Наслідок 5.12. *Для кожного значення довільного елемента (f, λ) з множини $\check{\mathcal{S}}$ існує ізоморфізм між максимальними алгебрами лівської інваріантності рівняння $\mathcal{P}_{f, \lambda}$ та системи $\mathcal{R}_{f, \lambda}$.*

Цей ізоморфізм встановлюється проектуванням алгебри лівської інваріантності системи $\mathcal{R}_{f, \lambda}$ на простір змінних (t, x, v) (щоб отримати алгебру лівської інваріантності рівняння $\mathcal{P}_{f, \lambda}$) і продовженням, яке відповідає рівності $u = v_x/\lambda$ (навпаки).

Для того, щоб знайти групоїд еквівалентності класу $\check{\mathcal{P}}|_{\check{\mathcal{S}}}$, зручно репараметризувати цей клас, вважаючи коефіцієнти f^2 , f^1 та f^0 параметр-функції f у (5.56) компонентами довільного елемента замість f . Використовуватимемо обидві параметризації.

Згадане вище розбиття класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}, f_{xxx}=0}$ на підкласи $\mathcal{L}^1$ та $\mathcal{L}^2$ пов'язане з розбиттям класу $\check{\mathcal{P}}|_{\check{\mathcal{S}}}$ на підкласи

$$\hat{\mathcal{P}}^1 = \{\mathcal{P}_{f, \lambda} \mid f = \text{const}\} \quad \text{та} \quad \hat{\mathcal{P}}^2 = \{\mathcal{P}_{f, \lambda} \mid f \neq \text{const}\}$$

відповідно, але їхні трансформаційні властивості суттєво відрізняються.

Твердження 5.3. *Підклас $\hat{\mathcal{P}}^2$ нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Його розширена узагальнена група еквівалентності скла-*

дається з перетворень

$$\begin{aligned}
\tilde{t} &= \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, & \tilde{x} &= \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta}, \\
\tilde{v} &= c_0 \left(v - \frac{\gamma \lambda(t)}{2(\gamma t + \delta)} x^2 + \frac{(\delta \mu_1 - \gamma \mu_0) \lambda(t)}{\kappa(\gamma t + \delta)} x + V^0(t) \right), \\
\tilde{f}^2 &= \frac{(\gamma t + \delta)^2}{\Delta} f^2, & \tilde{f}^1 &= \frac{(\gamma t + \delta)}{\Delta} (\kappa f^1 - 2(\mu_1 t + \mu_0) f^2), \\
\tilde{f}^0 &= \frac{1}{\Delta} ((\mu_1 t + \mu_0)^2 f^2 - \kappa(\mu_1 t + \mu_0) f^1 + \kappa^2 f^0), \\
\text{тобто} \quad \tilde{f} &= \frac{\kappa^2}{\Delta} f, & \tilde{\lambda} &= c_0 \frac{\Delta}{\kappa^2} \lambda, \\
\text{де} \quad V^0 &= \int \left(\frac{(\delta \mu_1 - \gamma \mu_0)^2}{2\kappa^2(\gamma t + \delta)^2} + \frac{\delta \mu_1 - \gamma \mu_0}{\kappa(\gamma t + \delta)} f^1(t) + \frac{\gamma}{\gamma t + \delta} f^0(t) \right) \lambda(t) dt + \sigma,
\end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \mu_0, \mu_1$ та κ — довільні сталі, визначені з точністю до ненульового множника, причому $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ та $\kappa \neq 0$, а σ і c_0 — повністю довільні сталі.

Доведення. Кожне рівняння для потенціалів $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ можна відобразити точковим перетворенням

$$\psi_{f,\lambda}: \quad \tilde{t} = \frac{1}{2} \int \lambda dt, \quad \tilde{x} = \lambda x + \int f^1 \lambda dt, \quad \tilde{v} = v, \quad (5.57)$$

параметризованим функціями f (точніше, функціями f^2 та f^1) та λ , у рівняння $\check{\mathcal{P}}_{\check{f}}$: $\check{v}_{\check{t}} + \check{v}_{\check{x}}^2 + \check{f} \check{v}_{\check{x}\check{x}} = 0$, де $\check{f}_{\check{x}\check{x}\check{x}} = 0$, $\check{f} \neq 0$, з класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$. Образ функції f при цьому відображенні обчислюємо за формулою $\check{f}(\check{t}, \check{x}) = 2\lambda(t)f(t, x)$. Аналогічно можна обчислити образи коефіцієнтів функції f . Підкласи $\hat{\mathcal{P}}^1$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$ класу $\check{\mathcal{P}}|_{\mathcal{S}}$ рівнянь для потенціалів можна відобразити у підкласи

$$\check{\mathcal{P}}^1 = \{\check{\mathcal{P}}_{\check{f}} \mid \check{f} = \text{const}\} \quad \text{та} \quad \check{\mathcal{P}}^2 = \{\check{\mathcal{P}}_{\check{f}} \mid \check{f}_{\check{x}\check{x}\check{x}} = 0, \check{f} \neq \text{const}\}$$

класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$ відповідно. Трансформаційні властивості підкласу $\check{\mathcal{P}}^2$ суттєво відрізняються від відповідних властивостей підкласу $\check{\mathcal{P}}^1$, причому між рівняннями з різних підкласів немає точкових перетворень (зауважимо,

що позначення підкласів в цьому підрозділі дещо відрізняються). Кожне допустиме перетворення у підкласі $\check{\mathcal{P}}^2$ має такі властивості:

- компонента перетворення для $\check{t}$ залежить тільки від $\check{t}$,
- компонента перетворення для $\check{x}$ залежить тільки від $(\check{t}, \check{x})$ та лінійна за $\check{x}$,
- компонента перетворення для $\check{v}$ лінійна за $\check{v}$ (більш того, зі сталим коефіцієнтом при $\check{v}$) і квадратична за $\check{x}$.

Розглянемо довільне допустиме перетворення $(f, \varphi, \tilde{f})$ у підкласі $\hat{\mathcal{P}}^2$. Позначимо $\check{f} := \psi_{f,\lambda} f$, $\tilde{\check{f}} := \psi_{f,\lambda} \tilde{f}$ та $\check{\varphi} := \psi_{\tilde{f},\tilde{\lambda}} \varphi \psi_{\tilde{f},\tilde{\lambda}}^{-1}$. Тоді $\varphi = \psi_{\tilde{f},\tilde{\lambda}}^{-1} \check{\varphi} \psi_{f,\lambda}$, а трійка $(\check{f}, \check{\varphi}, \tilde{\check{f}})$ є допустимим перетворенням для підкласу $\check{\mathcal{P}}^2$, і його компонента $\check{\varphi}$ має зазначені властивості. З огляду на (5.57) та взаємозв'язок між φ та $\check{\varphi}$ точкове перетворення φ має ті ж самі властивості, тобто

$$\begin{aligned} \varphi: \quad & \tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X^1(t)x + X^0(t), \\ & \tilde{v} = c_0(v + V^2(t)x^2 + V^1(t)x + V^0(t)), \end{aligned}$$

де $T_t X^1 c_0 \neq 0$. Підставляємо вирази для змінних та функцій з хвильками через вирази без хвильок, враховуючи похідні

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\tilde{t}} &= \frac{c_0}{T_t} \left(v_t + V_t^2 x^2 + V_t^1 x + V_t^0 - \frac{X_t^1 x + X_t^0}{X^1} (v_x + 2V^2 x + V^1) \right), \\ \tilde{v}_{\tilde{x}} &= c_0 \frac{v_x + 2V^2 x + V^1}{X^1}, \quad \tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} = c_0 \frac{v_{xx} + 2V^2}{(X^1)^2}, \end{aligned}$$

а також $v_t = -\frac{1}{2\lambda} v_x^2 - f v_{xx} + f_x v_x$ у $\mathcal{P}_{\tilde{f}}$, після чого розщеплюємо отримане рівняння за v_{xx} , v_x та x . Після спрощень отримаємо

$$\tilde{f} = \frac{(X^1)^2}{T_t} f, \quad \tilde{\lambda} = \frac{c_0 T_t}{(X^1)^2} \lambda, \quad V^2 = \frac{c_0}{2} \frac{X_t^1}{X^1} \lambda, \quad V^1 = c_0 \frac{X_t^0}{X^1} \lambda, \quad (5.58)$$

$$\left(\frac{X_t^1}{(X^1)^2} \right)_t = 0, \quad \left(\frac{X_t^0}{(X^1)^2} \right)_t = 0, \quad (5.59)$$

$$V_t^0 = c_0 \lambda \left(\frac{1}{2} \left(\frac{X_t^0}{X^1} \right)^2 + \frac{X_t^0}{X^1} f^1 - \frac{X_t^1}{X^1} f^0 \right). \quad (5.60)$$

З першого рівняння (5.58) маємо вирази для перетворень f^2 , f^1 та f^0 :

$$\begin{aligned}\tilde{f}^2 &= \frac{1}{T_t} f^2, \quad \tilde{f}^1 = \frac{X^1}{T_t} f^1 - 2 \frac{X^0}{T_t} f^2, \\ \tilde{f}^0 &= \frac{(X^1)^2}{T_t} f^0 - \frac{X^0 X^1}{T_t} f^1 + \frac{(X^0)^2}{T_t} f^2.\end{aligned}\tag{5.61}$$

Оскільки $\lambda = e^{\int f^2 dt}$, $\tilde{\lambda} = e^{\int \tilde{f}^2 d\tilde{t}}$ та $T_t \tilde{f}^2 = f^2$, отримаємо

$$\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} \right)_t = 2 \left(T_t \tilde{f}^2 - f^2 \right) \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = 0, \quad \text{тобто} \quad \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda} = \text{const.}$$

Отже, друге рівняння (5.58) дає $T_t/(X^1)^2 = \tilde{\lambda}/(c_0 \lambda) = \text{const.}$ Перше рівняння (5.59) можна записати як $(1/X^1)_{tt} = 0$, звідки $1/X^1$ — лінійна функція від t . Тоді із співвідношення $T_t = \text{const} \cdot (X^1)^2$ випливає, що T є дробово-лінійною функцією від t . В результаті

$$T = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad X^1 = \frac{\kappa}{\gamma t + \delta}, \quad X^0 = \frac{\mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta},$$

де вираз для X^0 отримано з другого рівняння (5.59). Інтегрування рівняння (5.60) за t дає вираз для V^0 . Нарешті, з (5.61) отримуємо перетворення для f^2 , f^1 та f^0 . $\square$

Наслідок 5.13. *Між рівняннями, одне з яких належить класу $\hat{\mathcal{P}}^1$, а інше — класу $\hat{\mathcal{P}}^2$, точкових перетворень не існує.*

Порівнюючи компоненти перетворення у твердженні 5.3, а також беручи до уваги співвідношення $\mathcal{R}_{f,\lambda}$ між u та v , робимо висновок, що групоїди еквівалентності підкласів $\mathcal{L}^2$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$ ізоморфні з точністю до зсувів та масштабних перетворень потенціалу v . Те ж саме справедливо і для груп еквівалентності підкласів $\mathcal{L}^2$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$, хоча ці групи еквівалентності мають різні типи. З цього також випливає, що для кожної функції f такої, що $f_{xxx} \neq 0$, групи лівських симетрій рівнянь $\mathcal{L}_f$ та $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ ізоморфні з точністю до зсувів v (які належать перетину груп симетрій усіх рівнянь з класу $\hat{\mathcal{P}}^2$), а тому групові класифікації класів $\mathcal{L}^2$ та $\hat{\mathcal{P}}^2$ еквівалентні.

Оскільки клас $\mathcal{L}^2$ замкнений відносно дії $G^\sim$, його групову класифікацію можна легко виділити з групової класифікації всього класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, яку наведено у таблиці 5.7.

Твердження 5.4. *Потенціальні допустимі перетворення підкласу $\mathcal{L}^2$ індуковано його звичайними допустимими перетвореннями. Рівняння з цього класу не мають нетривіальних потенціальних симетрій.*

Розглянемо «потенціальний відповідник» $\hat{\mathcal{P}}^1$ класу $\mathcal{L}^1$. Для сталих значень f перетворення (5.57) вироджується у масштабування t . Отже, підклас $\hat{\mathcal{P}}^1$ насправді співпадає (з точністю до масштабного перетворення $\tilde{t} = \frac{1}{2}t$) з підкласом $\check{\mathcal{P}}^1$ класу $\mathcal{P}|_{\mathcal{S}}$.

Наступне твердження є переформулюванням твердження про групоїд еквівалентності класу $\check{\mathcal{P}}^1$ з точністю до множника $\frac{1}{2}$ перед v_x^2 та множника κ у перетворенні для X^0 .

Твердження 5.5. *Підклас $\hat{\mathcal{P}}^1 = \{\mathcal{P}_{f,\lambda} \mid f = \text{const}\}$ класу $\check{\mathcal{P}}|_{\mathcal{S}}$ рівнянь для потенціалів нормалізований в узагальненому сенсі. Його узагальнена група еквівалентності складається з перетворень*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad \tilde{x} = \frac{\kappa x + \mu_1 t + \mu_0}{\gamma t + \delta}, \\ \tilde{v} &= \frac{2\kappa^2 f}{\Delta} \ln \left| F^1 \left(e^{\frac{v}{2f}} + F^0 \right) \right|, \quad \tilde{f} = \frac{\kappa^2}{\Delta} f,\end{aligned}$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa, \mu_1, \mu_0$ — довільні сталі, $\Delta := \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $\kappa \neq 0$, набір $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \kappa)$ визначений з точністю до ненульового множника,

$$F^1 = \begin{cases} k \sqrt{|\gamma t + \delta|} \exp \left(-\frac{(\gamma \kappa x - \mu_1 \delta + \mu_0 \gamma)^2}{4f \kappa^2 \gamma (\gamma t + \delta)} \right), & \gamma \neq 0, \\ k \exp \frac{2\kappa \mu_1 x + \mu_1^2 t}{4\kappa^2 f}, & \gamma = 0, \end{cases}$$

стала $k \neq 0$, а функція F^0 є розв'язком лінійного рівняння $F_t^0 + f F_{xx}^0 = 0$.

Твердження 5.5 досить очевидне, оскільки клас $\hat{\mathcal{P}}^1$ є орбітою будь-якого рівняння з нього під дією групи масштабних перетворень. Складний вигляд допустимих перетворень у класі $\hat{\mathcal{P}}^1$ є наслідком того факту,

що будь-яке рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ з $f = \text{const}$ можна лінеаризувати до рівняння теплопровідності $w_t + fw_{xx} = 0$ заміною $w = e^{v/(2f)}$, а тому загальні перетворення симетрії рівняння $\mathcal{P}_{f,\lambda}$ мають складну структуру і включають довільний розв'язок рівняння теплопровідності. Потенціальні симетрії класичного рівняння Бюргерса добре відомі. З точністю до лінійних комбінацій нетривіальні потенціальні симетрії рівняння $\mathcal{L}_f$, пов'язані з локальними законами збереження, вичерпуються образами симетрій лінійної суперпозиції відповідних рівнянь теплопровідності $w_t + fw_{xx} = 0$ під дією відображення $v = 2f \ln w$ та продовження на u за законом $u = v_x$.

Твердження 5.3 та 5.5 разом з наслідком 5.13 повністю описують групоїд еквівалентності класу $\check{\mathcal{P}}|_{\mathcal{S}}$.

5.3.8 Висновки

Таким чином, повністю розв'язано задачу групової класифікації класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Завдяки властивості нормалізованості (у звичайному сенсі) групову класифікацію цього класу було зручно провести за допомогою алгебраїчного методу. Ліївські редукції виконано з використанням двох спеціальних технік. По-перше, замість класифікації одно- та двовимірних підалгебр у кожному з нееквівалентних випадків розширення максимальної алгебри ліївської інваріантності (19 випадків) прокласифіковано нееквівалентні підалгебри такої ж розмірності алгебри $\mathfrak{g}$. По-друге, вигляд анзаців підібрано таким чином, щоб усі редуковані рівняння (крім двох, які відповідають сингулярним ліївським редукціям і дають лише тривіальні розв'язки) належали певному класу рівнянь простого вигляду. Виконана оптимізація дозволила повністю вивчити приховані симетрії рівнянь з цього класу та побудувати точні розв'язки таких рівнянь.

Також вичерпно описано оператори редукції узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній та проведено всі можливі некласичні редукції цих рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь.

Множина операторів редукції узагальнених рівнянь Бюргерса зі змінним коефіцієнтом при другій похідній природним чином ділиться на дві підмножини, а саме — множини сингулярних та регулярних операторів редукції. Цей поділ є інваріантним відносно групи еквівалентності.

Основні властивості сингулярних операторів редукції (у тому числі й та, що коефіцієнт при ∂_t такого оператора дорівнює нулю) подібні для всіх $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь. Основна з цих властивостей — існування взаємно однозначної відповідності між класами еквівалентності сингулярних операторів редукції та однопараметричними сім'ями розв'язків, що відрізняються з точністю до репараметризації. Таким чином, при розгляді сингулярних операторів редукції класу $\mathcal{L}|_S$ виникає перший тип «по-go» випадків: він пов'язаний з пониженням в процесі редукції порядку диференціального рівняння до 1. Аналогічні «по-go» результати можна отримати для будь-якого $(1+1)$ -вимірного диференціального рівняння з частинними похідними, що допускає сім'ю сингулярних векторних полів копорядку сингулярності 1, параметризованих довільною гладкою функцією всіх незалежних і залежної змінних. Система визначальних рівнянь на оператори редукції з кожної такої сім'ї складається з одного диференціального рівняння з частинними похідними на функцію, що є параметром цієї сім'ї, і це рівняння нелокальною заміною зводиться до початкового рівняння. Ці результати можна поширити також і на багатовимірні диференціальні рівняння з частинними похідними.

Підмножина регулярних операторів редукції класу $\mathcal{L}|_S$ має специфічну структуру. Її вичерпно описано в теоремі 5.14.

При розгляді регулярних операторів редукції з $\tau = 1$ та $\xi_u = -\frac{1}{2}$ (а такі оператори редукції існують тільки для класичного рівняння Бюргерса $\mathcal{L}_c$, $c = \text{const}$) виникає другий тип «по-go» випадків. Він, безумовно, пов'язаний з тим фактом, що рівняння Бюргерса лінеаризується перетворенням Коула–Хопфа до лінійного рівняння теплопровід-

ності. Відповідна система визначальних рівнянь — це система з трьох $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь, яка редукується диференціальними підстановками до системи з трьох незачеплених копій лінійного рівняння теплопровідності, більш того — до системи з трьох незачеплених копій рівняння Бюргерса. У дисертаційній роботі запропоновано нове доведення лінеаризованості системи (5.29) визначальних рівнянь для випадку $\xi_u = -\frac{1}{2}$ (див. підрозділ 5.3.6) і вперше показано, що розв'язки цієї системи виражаються через трійки розв'язків рівняння Бюргерса. Крім рівняння Бюргерса, подібні «по-го» результати щодо регулярних операторів редукції відомі тільки для лінійних $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь другого порядку. Зауважимо, що регулярні оператори редукції з коефіцієнтом $\tau = 1$ дають істинно неklasичну редукцію рівняння Бюргерса тільки при $\xi_u \in \{1, -\frac{1}{2}\}$, причому всі відповіді анзаци неявні, тобто їх не можна було б побудувати методом Кларксона і Крускала.

У випадку, коли відповідна система визначальних рівнянь на невідомі функціональні параметри коефіцієнтів операторів редукції і довільного елемента класу не перевизначена, знайти всі значення довільного елемента, для яких рівняння з цього класу мають нетривіальні оператори редукції, неможливо. В той же час, як тільки значення довільного елемента зафіксовано, відповідну множину операторів редукції можна виписати в явному вигляді. Подібна ситуація, яку теж можна назвати окремим типом «по-го» випадків, виникла і для узагальнених рівнянь Бюргерса з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Векторне поле вигляду з $\tau = 1$, $\xi_u = 0$ і $\eta = 0$ є оператором редукції рівняння з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ тоді і тільки тоді, коли коефіцієнт ξ і довільний елемент f задовольняють добре визначену систему (5.50)–(5.51). Загальний розв'язок цієї системи знайти неможливо. Але цю обставину вдалося частково подолати за допомогою знайденого зв'язку між системою (5.50)–(5.51) і потенціальним рівнянням швидкої дифузії (5.55): для кожного відомого розв'язку θ рівняння (5.55) можна побудувати принаймні три сім'ї розв'язків рівняння $\mathcal{L}_{-1/\theta_x}$.

Ненульові локальні закони збереження існують лише для рівнянь $\mathcal{L}_f$ з значеннями довільного елемента f , що є квадратичними за x з коефіцієнтами, залежними від t , а нетривіальні потенціальні закони збереження — тільки для класичного рівняння Бюргерса.

На прикладі класу $\mathcal{L}|_S$ запропоновано новий підхід до опису потенціальних симетрій у класах диференціальних рівнянь, який ґрунтується на дослідженні потенціальних допустимих перетворень. Тому виявилось доцільним ввести поняття *потенціального групоїда еквівалентності* класу диференціальних рівнянь.

5.4 Групова класифікація класу нелінійних рівнянь Колмогорова

Було вивчено клас узагальнених нелінійних рівнянь типу Колмогорова

$$u_t - u_{xx} + f^1(u)u_y = f^2(u), \quad (5.62)$$

де $u = u(t, x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $f^1(u)$, $f^2(u)$ — довільні гладкі функції своїх змінних, а $f^1 \neq \text{const}$. Якщо $f^1 = \text{const}$, то рівняння (5.62) можна звести до просторово-одновимірного нелінійного ($f^1 = 0$) за допомогою відповідного перетворення Галілея. Групова класифікація таких рівнянь була проведена, зокрема, Дородніциним [*USSR Comput. Math. Math. Phys.* **22** (1982), 115–122].

Рівняння (5.62) виникає в задачах фінансової математики та при вивченні фізичних нелінійних явищ, таких як комбіновані ефекти дифузії та конвекції речовини. Широке застосування рівняння (5.62) викликає безперечний інтерес щодо пошуку розв’язків. Один з найпотужніших методів побудови точних розв’язків нелінійних PDE є класичний метод Лі та його різноманітні узагальнення та модифікації.

Поширеним методом розв’язання нелінійних диференціальних рівнянь є метод Лі, який заснований на принципі симетрії. С. Лі був першим, хто використав алгебру інваріантності диференціальних рівнянь

для зменшення кількості незалежних змінних та для пошуку точних розв'язків. Теоретико-групові методи дозволяють інтегрувати диференціальні рівняння, які допускають нетривіальну групу інваріантності. Ось чому важливим завданням є повна групова класифікація класу диференціальних рівнянь з довільними функціями, що дозволяє виділяти рівняння з широкими симетрійними властивостями із заданого класу рівнянь.

Задача групової класифікації рівняння (5.62) для випадку $f^2(u) = 0$ була розв'язана в [Demetriou E., Christou M.A., Sophocleous C., *J. Appl. Math. Comp.* **187** (2007), 1333–1350] для довільної функції $f^1(u)$, і, зокрема, показано, що нелінійне рівняння Колмогорова

$$u_t - u_{xx} - uu_y = 0$$

допускає 6-параметрична група локальних перетворень і, використовуючи метод симетрійної редукції, побудуванні точні розв'язки цього рівняння. Перш за все були отримані наступні попередні результати, які використовуються у подальших дослідженнях.

Теорема 5.15. *Група інваріантності рівняння (5.62) генерується інфінітезимальним оператором*

$$X = \xi^0(t, x, y, u) \partial_t + \xi^1(t, x, y, u) \partial_x + \xi^2(t, x, y, u) \partial_y + \eta(t, x, y, u) \partial_u,$$

де функції ξ^0 , ξ^1 , ξ^2 , η задовольняють таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 2c_1 t + c_0, & \xi^1 &= c_1 x + c_2, \\ \xi^2 &= \xi^2(t, y), & \eta &= \alpha(t, y)u + \beta(t, y), \end{aligned}$$

де c_0 , c_1 , c_2 — константи. А класифікуючі рівняння мають вигляд

$$(\alpha u + \beta) \dot{f}^1 = (\xi_y^2 - 2c_1) f^1 + \xi_t^2, \quad (5.63)$$

$$(\alpha u + \beta) \dot{f}^2 = (\alpha - 2c_1) f^2 + (\alpha_y u + \beta_y) f^1 + \alpha_t u + \beta_t. \quad (5.64)$$

Групову класифікацію рівняння (5.62) здійснюємо з точністю до перетворень з групи еквівалентності цього рівняння.

Теорема 5.16. *Групою неперервних перетворень еквівалентності рівнянь (5.62) задається перетвореннями*

$$\begin{aligned}\bar{t} &= T(t, x, y, u), & \bar{x} &= X(t, x, y, u), \\ \bar{y} &= Y(t, x, y, u), & \bar{u} &= U(t, x, y, u),\end{aligned}$$

з коректно-визначеними гладкими функціями T, X, Y, U , і Якобіаном $J(t, x, y, u) = \frac{\partial(T, X, Y, U)}{\partial(t, x, y, u)} \neq 0$, якщо ці функції мають вигляд

$$\begin{aligned}\bar{t} &= a_1^2 t + a_2, & \bar{x} &= a_1 x + a_3, & \bar{y} &= Y(t, y), \\ \bar{u} &= \theta(t, y)u + \nu(t, y),\end{aligned}\tag{5.65}$$

і наступні співвідношення мають місце:

$$Y_t + Y_y f^1(u) = a_1^2 F^1(\bar{u}),\tag{5.66}$$

$$\theta_t u + \nu_t + (\theta_y u + \nu_y) f^1(u) + \theta f^2(u) = a_1^2 F^2(\bar{u}),\tag{5.67}$$

де a_1, a_2, a_3 — дійсні довільні константи, $a_1 \neq 0, Y_y \neq 0, \theta(t, y) \neq 0$.

З (5.65)–(5.67) отримуємо множину перетворень еквівалентності, що є групою G^{equiv} локальних перетворень, які зберігають вигляд рівнянь (5.62).

Теорема 5.17. *Група G^{equiv} рівняння (5.62) містить наступні не неперервні наступні перетворення:*

$$\begin{aligned}\bar{t} &= a_1^2 t + a_2, & \bar{x} &= a_1 x + a_3, & \bar{y} &= a_4 y + a_5 t + a_6, & \bar{u} &= a_7 u + a_8, \\ F^1 &= \frac{a_4}{a_1^2} f^1 + \frac{a_5}{a_1^2}, & F^2 &= \frac{a_7}{a_1^2} f^2,\end{aligned}\tag{5.68}$$

де $a_i, i \in \{1, \dots, 8\}$ — довільні константи, $a_1 a_4 a_7 \neq 0$.

Проблема групової класифікації полягає у знаходженні всіх таких можливих нееквівалентних випадків, коли розв'язки системи (5.63), (5.64) визначають алгебру інваріантності Лі A^{max} , що задовольняє умові

$$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_y \rangle = A^{\text{ker}} \subset A^{\text{max}},$$

тобто алгебру Лі чотири і більш високою розмірності. Подальший аналіз цієї системи рівнянь призводить до наступного результату.

Теорема 5.18. *Якщо рівняння з класу (5.62) допускає “нетривіальну” алгебру симетрії $A^{\max}$, то за допомогою перетворень еквівалентності (5.68), воно зводиться до такого рівняння, де функції $f^1(u)$ і $f^2(u)$ мають один з наступних видів:*

1. $f^1(u)$ – довільна функція, $f^2(u) \equiv 0$;
2. $f^1(u) = e^u$, $f^2(u) = \varepsilon_1 e^u + \varepsilon_2$ або $f^2(u) = \tilde{\varepsilon}_1 e^{mu}$;
3. $f^1(u) = \ln u$, $f^2(u) = \tilde{\varepsilon}_1 u^m$ або $f^2(u) = \varepsilon_1 u \ln u$;
4. $f^1(u) = u^m$, $m \neq 0, 1$, $f^2(u) = \tilde{\varepsilon}_1 u^n$ або $f^2(u) = \varepsilon_1 u^{m+1} + \varepsilon_2 u$;
5. $f^1(u) = u$, $f^2(u) = \varepsilon_1 e^u$ або $f^2(u) = \varepsilon_1 u^m$ ($m \neq 0, 1, 2, 3$) або
 $f^2(u) = \varepsilon_1 u^3$ або $f^2(u) = u^2 + \tilde{\varepsilon}_1$ або $f^2(u) = \varepsilon_1 u$ або $f^2(u) = \tilde{\varepsilon}_1$

Тут $\varepsilon_i = \pm 1$, $\tilde{\varepsilon}_1 \in \{-1, 0, 1\}$, $i \in \{1, 2\}$.

Далі був проведений симетрійний аналіз всіх можливих випадків рівнянь, описаних в теоремі 5.18. Виявилось, що з точністю до основної групи перетворень еквівалентності (5.68) кожне рівняння з класу (5.62) можна звести до одного із 22 нееквівалентних рівнянь з “нетривіальними” алгебрами симетрії розмірності 4, 5 або 6. Знайдено відповідні оператори алгебри симетрії.

Наступний крок класифікації полягав у тому, щоб знайти так звані додаткові перетворення еквівалентності, тобто такі перетворення, які не належать групі перетворень (5.68), але можуть встановлювати еквівалентність між окремими представниками класів еквівалентності відносно основної групи перетворень. Способи знаходження додаткових перетворень еквівалентності ґрунтуються на тому, що еквівалентні рівняння мають однакові розмірності їх інваріантних алгебр $A^{\max}$. Були знайдені всі такі додаткові перетворення. В результаті, знайдені 22 рівняння, які описані в теоремі 5.18, були зведені до одного з 14 “канонічних” рівнянь, які не еквівалентні між собою. Це можна сформулювати в наступній теоремі.

Теорема 5.19. Усі можливі рівняння з класу (5.62), що допускають алгебри інваріантності Li $A^{\max} \supset A^{\ker}$ зводяться до одного з 14 “канонічних” рівнянь. У наведеному нижче списку перші два вирази означають функції $f^1(u)$ і $f^2(u)$, відповідно, а решта – оператори алгебри інваріантності, які належать розширенню основної алгебри $A^{\ker}$.

1. $\forall \neq \text{const}, 0; t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + y\partial_y$
2. $e^u, \varepsilon_1 e^{mu} (m \neq 0, 1); t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{m-1}{m}y\partial_y - \frac{1}{m}\partial_u$
3. $e^u, \varepsilon_1; y\partial_y + \partial_u$
4. $e^u, 0; t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + y\partial_y, y\partial_y + \partial_u$
5. $\ln u, \varepsilon_1 u^m (m \neq 1); t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + (y - \frac{t}{m-1}\partial_y) - \frac{u}{m-1}\partial_u$
6. $\ln u, \varepsilon_1 u \ln u; e^{\varepsilon_1 t}(\partial_y + \varepsilon_1 u \partial_u)$
7. $\ln u, 0; t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + y\partial_y, t\partial_y + u\partial_u$
8. $u^m (m \neq 0, 1), \varepsilon_1 u^n (n \neq m+1);$
 $(n-1)t\partial_t + \frac{1}{2}(n-1)x\partial_x + (n-m-1)y\partial_y$
9. $u^m (m \neq 0, 1), 0; t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + y\partial_y, y\partial_y + \frac{1}{m}u\partial_u$
10. $u, \varepsilon_1 e^u; t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + (y-t)\partial_y - \partial_u$
11. $u, \varepsilon_1 u^m (m \neq 0, 1, 2); t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + \frac{m-2}{m-1}y\partial_y - \frac{u}{m-1}\partial_u$
12. $u, u^2 + 1; e^y(\sin t\partial_y + (\cos t + u \sin t)\partial_u),$
 $e^y(\cos t\partial_y - (\sin t - u \cos t)\partial_u)$
13. $u, \varepsilon_1 u; y\partial_y + u\partial_u, e^{\varepsilon_1 t}(\partial_y + \varepsilon_1 \partial_u)$
14. $u, 0; t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + y\partial_y, t\partial_y + \partial_u, y\partial_y + u\partial_u$

Точні розв’язки нелінійних рівнянь Колмогорова. Було розглянуто рівняння

$$u_t - u_{xx} - uu_y = 0, \quad (5.69)$$

що зустрічається у багатьох проблемах фінансової математики. Рівняння (5.69) є інваріантним відносно шестивимірної алгебри інваріантності (див. теорему 5.19) оператори яких мають вигляд:

$$\begin{aligned} P_0 &= \partial_t, & P_1 &= \partial_x, & P_2 &= \partial_y, & D_1 &= t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x + y\partial_y, \\ D_2 &= y\partial_y + u\partial_u, & G &= t\partial_y - \partial_u. \end{aligned}$$

Розглянемо алгебру із базисними операторами

$$\begin{aligned} X_1 &= D_1 - D_2 = t\partial_t + \frac{1}{2}x\partial_x - u\partial_u, \\ X_2 &= P_0 = \partial_t, & X_3 &= D_2 = y\partial_y + u\partial_u, \\ X_4 &= P_2 = \partial_y, & X_5 &= G = t\partial_y - \partial_u, & X_6 &= P_1 = \partial_x, \end{aligned} \tag{5.70}$$

які задовольняють наступні ненульові комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -X_2, & [X_1, X_5] &= X_5, & [X_1, X_6] &= -\frac{1}{2}X_6, \\ [X_3, X_5] &= -X_5, & [X_2, X_5] &= X_4, & [X_3, X_4] &= -X_4. \end{aligned}$$

Було прокласифіковано всі одновимірні та двовимірні подалгебри алгебри Лі (5.70) відносно дії групи перетворень внутрішніх автоморфізмів. С точністю до такої дії одновимірні подалгебри вичерпуються такими:

$$\begin{aligned} \langle X_1 \rangle, & \quad \langle X_2 \rangle, \quad \langle X_3 \rangle, \quad \langle X_4 \rangle, \quad \langle X_5 \rangle, \quad \langle X_6 \rangle, \quad \langle X_1 \pm X_4 \rangle, \\ \langle X_1 + X_3 \pm X_5 \rangle, & \quad \langle X_1 + \alpha X_3 \rangle, \quad \langle X_2 \pm X_3 \rangle, \quad \langle X_3 + X_6 \rangle, \\ \langle X_2 \pm X_3 \pm X_6 \rangle, & \quad \langle X_2 \pm X_5 + \alpha X_6 \rangle, \quad \langle X_2 + X_6 \rangle, \quad \langle X_2 \pm X_5 \rangle, \\ \langle X_5 + X_6 \rangle, & \quad \langle X_4 + X_6 \rangle, \quad (\alpha \neq 0). \end{aligned}$$

Наприклад, якщо розглянути останній оператор з цього списку

$$\langle X_4 + X_6 \rangle = \partial_x + \partial_y, \tag{5.71}$$

то отримуємо такий відповідний анзац:

$$u = \varphi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = t, \quad \omega_2 = y - x,$$

де функція $\varphi(\omega_1, \omega_2)$ задовольняє добре відоме рівняння Бюргерса

$$\varphi_{\omega_1} - \varphi_{\omega_2\omega_2} - \varphi\varphi_{\omega_2} = 0.$$

В роботі (Pascucci, A. and Polidoro, S., On the Cauchy problem for a nonlinear Kolmogorov equation // SIAM J. Math. Anal. — 2003. — 35, 579) була розглянуто задача Коші для рівняння (5.69):

$$u_t - u_{xx} - uu_y = 0, \quad u(0, x, y) = g(x, y). \quad (5.72)$$

Якщо вимагати, щоб розв'язок рівняння (5.69) було інваріантним щодо оператора (5.71), і $g = g(\omega_2)$, то розв'язок задачі Коші

$$\varphi_{\omega_1} - \varphi_{\omega_2\omega_2} - \varphi\varphi_{\omega_2} = 0, \quad \varphi(0, \omega_2) = g(\omega_2),$$

має вигляд

$$\varphi(\omega_1, \omega_2) = 2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} \ln G(\omega_1, \omega_2),$$

де

$$G(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(\omega_2 - \xi)^2}{4\omega_1} - \frac{1}{2} \int_0^{\xi} g(\tau) d\tau \right] d\xi.$$

Також знайдені відповідні двовимірні підалгебри алгебри (5.70), і отримані сімейства відповідних інваріантних розв'язків.

5.5 Симетрійний аналіз рівняння ціноутворення азійських опціонів і точні розв'язки

Традиційною моделлю в теорії фінансових ринків є модель Блека–Шоулза, яка описується лінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними [Black F., Scholes M., *J. Political Economy* **81** (1973), 637–659]. Однак практичні дослідження вказують на те, що ця модель відповідно до зроблених припущень далека від адекватності реальним процесам, які відбуваються на фінансових ринках. Тому в останні десятиліття дослідники перейшли до більш складних моделей динаміки фінансових ринків, які описуються рівняннями з більшою кількістю незалежних змінних. Перші дослідження групових властивостей лінійного рівняння Блека–Шоулза було проведено

в роботі [Gazizov R.K., Ibragimov N.H., *Nonlinear Dynamics* **17** (1998), 387–407].

Нами було проведено симетрійний аналіз та побудовані точні розв’язки лінійного рівняння ціноутворення азійських опціонів в неперервному часі $\tau \in [0; T]$ [Barucci E., Polidoro S., Vespri V., *Math. Models Methods Appl. Sci.* **11** (2001), 475–497]:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + S \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \quad (5.73)$$

де T — термін дії контракту; $V = V(\tau, S, A)$ — функція вартості опціону; S — вартість базового активу; A — усереднене значення всіх наявних цін базових активів S до моменту часу τ ; r і σ — сталі, що описують безризикову процентну ставку і волатильність акції відповідно.

Рівняння (5.73) за допомогою заміни

$$V(\tau, S, A) = f(\tau, S, A)u(t(\tau, S, A), x(\tau, S, A), y(\tau, S, A)), \quad (5.74)$$

де функція $f(\tau, S, A)$ і нові незалежні змінні t, x, y визначаються, відповідно, формулами

$$\begin{aligned} f &= s^{-m} e^{-\frac{q\sigma^2}{2}(T-\tau)}, \quad t = \frac{\sigma^2}{2}(T - \tau), \quad x = S, \\ y &= \frac{\sigma^2}{2}A, \quad m = \frac{r}{\sigma^2}, \quad q = m^2 + m, \end{aligned} \quad (5.75)$$

зводиться до рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5.76)$$

де $u = u(t, x, y)$.

1. Симетрійні властивості.

Для дослідження симетрійних властивостей рівняння (5.76) використаємо класичний метод Лі–Овсяннікова. У результаті отримаємо такий результат.

Теорема 5.20. *Максимальна алгебра Лі інваріантності рівняння (5.76) генерується такими диференціальними операторами:*

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_t, X_2 = \partial_y, X_3 = u\partial_u, X_4 = x\partial_x + y\partial_y, \\ X_5 &= xy\partial_x + \frac{1}{2}y^2\partial_y + \frac{1}{2}xu\partial_u, X_\infty = \beta(t, x, y)\partial_u, \end{aligned}$$

де функція $\beta(t, x, y)$ є довільним розв'язком рівняння (5.76).

Далі не враховуватимемо оператор симетрії $X_\infty = \beta(t, x, y)\partial_u$, який притаманний лінійним рівнянням і обумовлює принцип суперпозиції. Задача опису таких операторів еквівалентна пошуку загального розв'язку таких рівнянь.

Алгебра $L_5 = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$ ізоморфна алгебрі

$$A_5 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \oplus \langle e_4, e_5 \rangle = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus 2A_1,$$

яка є прямою сумою підалгебр $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ та $\langle e_4, e_5 \rangle = 2A_1$.

Ізоморфізм між алгебрами L_5 і A_5 встановлюється лінійними перетвореннями:

$$\begin{aligned} e_1 &= 2X_4 = 2x\partial_x + 2y\partial_y, \quad e_2 = -2X_5 = -2xy\partial_x - y^2\partial_y - xu\partial_u, \\ e_3 &= X_2 = \partial_y, \quad e_4 = X_1 = \partial_t, \quad e_5 = X_3 = u\partial_u. \end{aligned}$$

2. Симетрійна редукція і точні розв'язки.

Для того, щоб використати можливі редукції рівняння (5.76), необхідно знайти нееквівалентні підалгебри алгебри A_5 . У роботі [Олвер П., Мир, Москва, 1989] наведено метод класифікації підалгебр дійсних алгебр Лі з точністю до перетворень, які визначають групи внутрішніх автоморфізмів цих алгебр Лі. Згідно з цим методом одновимірні підалгебри алгебри A_5 вичерпуються алгебрами

$$\begin{aligned} &\langle e_4 + \alpha e_5 \rangle, \quad \langle e_5 \rangle, \quad \langle e_1 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle, \\ &\langle e_2 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle, \quad \langle e_2 - e_3 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle, \end{aligned} \tag{5.77}$$

а двовимірні підалгебри — такими алгебрами:

$$\begin{aligned}
&\langle e_4, e_5 \rangle, \langle e_1 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5 \rangle, \\
&\langle e_2 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5 \rangle, \langle e_1 + \alpha e_4 + \beta e_5, e_2 \rangle, \\
&\langle e_2 - e_3 + \alpha e_4, e_5 \rangle, \langle e_2 + \alpha e_4, e_5 \rangle, \\
&\langle e_2 - e_3 + \alpha e_5, e_4 + \beta e_5 \rangle, \langle e_1 + \alpha e_4, e_5 \rangle,
\end{aligned} \tag{5.78}$$

де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Оператори підалгебр (5.77) і (5.78) було використано для побудови точних розв'язків рівняння (5.76). Одновимірним підалгебрам (5.77) буде відповідати редукція рівняння (5.76) до рівняння з частинними похідними від двох незалежних змінних, а двовимірним — редукція до звичайного диференціального рівняння.

Наприклад, одновимірної підалгебри $\langle e_2 + \alpha e_4 + \beta e_5 \rangle$ відповідає редукзоване рівняння

$$\omega_2^2 f_{\omega_2 \omega_2} + (\alpha \omega_2 - 1) f_{\omega_1} - \beta \omega_2 f = 0.$$

Якщо $\alpha = \beta = 0$, рівняння має вигляд

$$\omega_2^2 f_{\omega_2 \omega_2} - f_{\omega_1} = 0,$$

частинними розв'язками якого будуть функції

$$\begin{aligned}
f(\omega_1, \omega_2) &= (C_1 \ln \omega_2 + C_2) \sqrt{\omega_2} \exp\left(-\frac{\omega_1}{4}\right), \\
f(\omega_1, \omega_2) &= (2\omega_1 + \ln^2 \omega_2) \sqrt{\omega_2} \exp\left(-\frac{\omega_1}{4}\right), \\
f(\omega_1, \omega_2) &= \omega_2^\mu \exp((\mu^2 - \mu)\omega_1),
\end{aligned}$$

де $C_1, C_2, \mu \in \mathbb{R}$.

Підставляючи ці функції у відповідний анзац для залежної змінної u , отримаємо розв'язки рівняння (5.76):

$$u = \left(C_1 \ln \frac{x}{y^2} + C_2\right) \frac{\sqrt{x}}{y} \exp\left(\frac{x}{y} - \frac{t}{4}\right),$$

$$\begin{aligned}
u &= \left(2t + \ln^2 \frac{x}{y^2}\right) \frac{\sqrt{x}}{y} \exp\left(\frac{x}{y} - \frac{t}{4}\right), \\
u &= \left(\frac{x}{y^2}\right)^\mu \exp\left(\frac{x}{y} + (\mu^2 - \mu)t\right).
\end{aligned} \tag{5.79}$$

Використовуючи заміну змінних (5.74), (5.75) для функцій (5.79) отримаємо точні розв'язки рівняння (5.73):

$$\begin{aligned}
V(\tau, S, A) &= \left(C_1 \ln \frac{4S}{\sigma^4 A^2} + C_2\right) \frac{2S^{-r\sigma^{-2}} \sqrt{S}}{\sigma^2 A} \times \\
&\times \exp\left(\frac{2S}{\sigma^2 A} - \frac{\sigma^2(T - \tau)}{8} + (r^2\sigma^{-2} + r)\frac{(\tau - T)}{2}\right), \\
V(\tau, S, A) &= \left(\sigma^2(T - \tau) + \ln^2 \frac{4S}{\sigma^4 A^2}\right) \frac{2S^{-r\sigma^{-2}} \sqrt{S}}{\sigma^2 A} \times \\
&\times \exp\left(\frac{2S}{\sigma^2 A} - \frac{\sigma^2(T - \tau)}{8} + (r^2\sigma^{-2} + r)\frac{(\tau - T)}{2}\right), \\
V(\tau, S, A) &= S^{-r\sigma^{-2}} \left(\frac{4S}{\sigma^4 A^2}\right)^\mu \times \\
&\times \exp\left(\frac{2S}{\sigma^2 A} + (\mu^2 - \mu)\frac{\sigma^2(T - \tau)}{2} + (r^2\sigma^{-2} + r)\frac{(\tau - T)}{2}\right).
\end{aligned}$$

5.6 Редукція та розв'язки систем нелінійних рівнянь математичної фізики, та опис диференціальних інваріантів алгебр інваріантності таких рівнянь

Ми розглядаємо перевизначену систему, яка складається з двох рівнянь ейконалу для двох функцій від $(1+n)$ незалежних змінних, та ще одного рівняння, що пов'язує ці дві функції [66]:

$$u_\mu u_\mu = 0, \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad u_\mu v_\mu = 1, \tag{5.80}$$

де $u = u(x_0, x_1, \dots, x_n)$, $v = v(x_0, x_1, \dots, x_n)$.

Якщо не зазначено інше, індекси у незалежних змінних x_μ можуть приймати значення від 0 до n , $\mu = 0, 1, \dots, n$; нижні індекси у залежних змінних означають похідні за відповідними змінними x_μ , і пара індексів,

що повторюються, означає підсумовування за цими індексами від 0 до n в просторі Мінковського:

$$x_\mu x_\mu = x_0 x_0 - x_1 x_1 - \cdots - x_n x_n.$$

Ми також будемо вважати, що всі функції, які ми розглядаємо, є достатньо гладкими для існування та неперервності всіх потрібних похідних, та що всі залежні та незалежні змінні приймають значення у просторі дійсних чисел.

Відзначимо, що система (5.80) є спеціальним випадком більш загальної системи пов'язаних рівнянь ейконалу

$$u_\mu u_\mu = 0, \quad v_\mu v_\mu = 0, \quad u_\mu v_\mu = h(u, v) \quad (5.81)$$

з довільною функцією $h(u, v)$.

Система (5.81) може бути отримана в результаті локальних перетворень системи

$$u_\mu u_\mu = \rho(u, v), \quad v_\mu v_\mu = \sigma(u, v), \quad u_\mu v_\mu = \tau(u, v) \quad (5.82)$$

з довільними функціями ρ , σ та τ , де $\rho\sigma - \tau^2 < 0$. Така система виникла в нашій роботі (Yehorchenko I.A., Reduction of non-linear d'Alembert equations to two-dimensional equations, in Proceedings of the 4th Workshop "Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems" (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus), University of Cyprus, Nicosia, 2009, 243–253) як частина умов редукції багатовимірного нелінійного хвильового рівняння $\square\phi = F(\phi)$ з застосуванням анзацу з двома новими незалежними змінними $\phi = \phi(\omega_1, \omega_2)$.

Загальний вигляд системи типу (5.82), яка може бути редукована до системи вигляду (5.80), є наступним

$$\begin{aligned} u_\mu u_\mu &= 2A_a(a, b)A_b(a, b), \\ v_\mu v_\mu &= 2B_a(a, b)B_b(a, b), \\ u_\mu v_\mu &= A_a(a, b)B_b(a, b) + B_a(a, b)A_b(a, b), \end{aligned}$$

де $a = a(u, v)$, $b = b(u, v)$ — це довільні достатньо гладкі функції.

Прикладом системи такого вигляду є

$$u_\mu u_\mu = 1, \quad v_\mu v_\mu = -1, \quad u_\mu v_\mu = 0.$$

Проте, системи пов'язаних рівнянь ейконалу є цікавими і з точки зору безпосереднього практичного застосування у геометричній оптиці, розпізнаванні образів, механіці суцільного середовища та інших галузях.

Найменша розмірність, коли для системи (5.80) можна отримати нетривіальні розв'язки — це $n = 2$, тобто це буде система з однією часовою та двома просторовими змінними. У випадку однієї просторової змінної ми матимемо лише тривіальний лінійний розв'язок $u = a(x_0 \pm x_1) + c_1$, $v = 1/2a(x_0 \mp x_1) + c_2$, де $a = \text{const} \neq 0$, c_1 та c_2 — довільні дійсні сталі.

У роботі [arXiv:1712.01948] нами був знайдений параметричний загальний розв'язок для системи (5.80) та двох просторових змінних (ми виключали спеціальні випадки в процесі знаходження)

$$\begin{aligned} u &= \frac{x_1 + \frac{x_2 z}{\sqrt{1-z^2}} - k'(z)}{g'(z)}, \\ v &= \frac{g x_2}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{p(z)}{g'(z)} \left[x_1 + \frac{x_2 z}{\sqrt{1-z^2}} - k'(z) \right] + r(z), \\ 0 &= x_0 - x_1 z + x_2 \sqrt{1-z^2} \\ &\quad + \frac{g(z)}{g'(z)} \left(x_1 + \frac{x_2 z}{\sqrt{1-z^2}} - k'(z) \right) - k(z). \end{aligned}$$

Тут

$$r' = -k''(zg + (1-z^2)g'), \quad p = \frac{1}{2}(-g'^2 + (g - zg')^2).$$

Метод, який ми використовуємо, був розроблений на основі ідей, представлених в роботах Р.З. Жданова, І.В. Ревенка та В.І. Фуцича [Препрінт 90.39, Ін-т математики АН УРСР, Київ, 1990, 65 с.] та [*J. Math. Phys.* **36** (1995), 7109–7127] щодо загального розв'язку системи д'Аламбера–Гамільтона.

Перший етап процедури знаходження точних розв'язків — це застосування перетворень годографа. Розглянемо лише частковий випадок $n = 2$, і функції

$$u = u(x_0, x_1, x_2), \quad v = v(x_0, x_1, x_2) \quad (5.83)$$

та будемо вважати, що $u_{x_0} \neq 0$ (в іншому випадку перше рівняння системи (5.80) матиме лише сталі розв'язки).

Ми переходимо від початкової пари (5.83) до нової пари залежних змінних w та v , та нових незалежних змінних y_0, y_1, y_2 :

$$u = y_0, \quad x_0 = w, \quad x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2. \quad (5.84)$$

Вирази для похідних початкової пари функцій:

$$\begin{aligned} u_{x_0} &= \frac{1}{w_{y_0}}, & u_{x_1} &= -\frac{w_{y_1}}{w_{y_0}}, & u_{x_2} &= -\frac{w_{y_2}}{w_{y_0}}, \\ v_{x_0} &= \frac{v_{y_0}}{w_{y_0}}, & v_{x_1} &= v_{y_1} - v_{y_0} \frac{w_{y_1}}{w_{y_0}}, & v_{x_2} &= v_{y_2} - v_{y_0} \frac{w_{y_2}}{w_{y_0}}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Зазначимо, що у нових рівняннях, отриманих після застосування перетворення годографа, ми будемо позначати похідні за змінними y_μ як v_{y_μ} та w_{y_μ} .

Підстановка формул для похідних (5.85) до першого рівняння системи (5.80) дає наступні вирази:

$$-\frac{w_{y_1}^2}{w_{y_0}^2} - \frac{w_{y_2}^2}{w_{y_0}^2} + \frac{1}{w_{y_0}^2} = 0.$$

Ми використовуємо припущення $w_{y_0} \neq 0$, і тому знайдене рівняння є еквівалентним наступному:

$$w_{y_1}^2 + w_{y_2}^2 = 1.$$

Підстановка формул для похідних до другого рівняння системи (5.80) дає

$$v_{y_1}^2 + v_{y_0}^2 \frac{w_{y_1}^2}{w_{y_0}^2} - 2 \frac{v_{y_0} v_{y_1} w_{y_1}}{w_{y_0}} + v_{y_2}^2 + v_{y_0}^2 \frac{w_{y_2}^2}{w_{y_0}^2} - 2 \frac{v_{y_0} v_{y_2} w_{y_2}}{w_{y_0}} = \frac{v_{y_0}^2}{w_{y_0}^2},$$

і в результаті отримуємо

$$v_{y_1}^2 + v_{y_2}^2 - 2(v_{y_1}w_{y_1} + v_{y_2}w_{y_2})\frac{v_{y_0}}{w_{y_0}} = 0. \quad (5.86)$$

Підстановка до третього рівняння (5.80) дає

$$\frac{v_{y_0}}{w_{y_0}^2} + \frac{w_{y_1}}{w_{y_0}} \left(v_{y_1} + v_{y_0} \frac{w_{y_1}}{w_{y_0}} \right) + \frac{w_{y_2}}{w_{y_0}} \left(v_{y_2} + v_{y_0} \frac{w_{y_2}}{w_{y_0}} \right) = 1.$$

Враховуючи, що $w_{y_0} \neq 0$, ми приходимо до виразу

$$v_{y_1}w_{y_1} + v_{y_2}w_{y_2} = w_{y_0}.$$

Рівняння (5.86) перетворюється на наступне:

$$v_{y_1}^2 + v_{y_2}^2 = 2v_{y_0}.$$

У результаті перетворень отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} w_{y_1}^2 + w_{y_2}^2 &= 1, \\ v_{y_1}^2 + v_{y_2}^2 &= 2v_{y_0}, \\ v_{y_1}w_{y_1} + v_{y_2}w_{y_2} &= w_{y_0}. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Зазначимо, що система (5.87) включає рівняння ейконалу та рівняння Гамільтона–Якобі, подібні до умов редукції для рівняння Шрьодінгера, які розглядались в нашій роботі щодо редукції нелінійного рівняння Шрьодінгера [arXiv:1412.1889].

Для застосування контактних перетворень, розглядаємо наступний набір нових незалежних змінних $z_0 = y_0$, $z_1 = w_{y_1}$, $z_2 = y_2$.

Розглянемо нові залежні змінні

$$H(z_0, z_1, z_2) = y_1w_{y_1} - w, \quad v = v(z_0, z_1, z_2)$$

та випишемо співвідношення для похідних за новими незалежними змінними:

$$H_{z_0} = -w_{y_0}, \quad H_{z_1} = y_1, \quad H_{z_2} = -w_{y_2},$$

$$\begin{aligned}
v_{y_0} &= v_{z_0} + v_{z_1} w_{y_0 y_1}, & v_{y_1} &= v_{z_1} + w_{y_1 y_1}, & v_{y_2} &= v_{z_2} + v_{z_1} w_{y_1 y_2}, \\
w_{y_1 y_1} &= \frac{1}{H_{z_1 z_1}}, & w_{y_1 y_2} &= -\frac{H_{z_1 z_2}}{H_{z_1 z_1}}, & w_{y_0 y_1} &= -\frac{H_{z_0 z_1}}{H_{z_1 z_1}}, \\
w_{y_0 y_2} &= -\frac{\begin{vmatrix} H_{z_1 z_1} & H_{z_1 z_2} \\ H_{z_0 z_1} & H_{z_0 z_2} \end{vmatrix}}{H_{z_1 z_1}}.
\end{aligned}$$

Після відповідної підстановки у систему (5.87) приходимо до наступної системи рівнянь:

$$z_1^2 + H_{z_2}^2 = 1, \quad (5.88)$$

$$\left(\frac{v_{z_1}}{H_{z_1 z_1}} \right)^2 + \left(v_{z_2} - v_{z_1} \frac{H_{z_1 z_2}}{H_{z_1 z_1}} \right)^2 = 2 \left(v_{z_0} - v_{z_1} \frac{H_{z_1 z_2}}{H_{z_1 z_1}} \right), \quad (5.89)$$

$$v_{z_1} \frac{z_1}{H_{z_1 z_1}} - H_{z_2} \left(v_{z_2} - v_{z_1} \frac{H_{z_1 z_2}}{H_{z_1 z_1}} \right) = -H_{z_0}. \quad (5.90)$$

Перше рівняння (5.88) цієї системи має загальний розв'язок для функції H :

$$H = z_2 \sqrt{1 - z_1^2} + G(z_0, z_1), \quad (5.91)$$

де G — функція своїх аргументів, явний вигляд якої ми знайдемо нижче з інших рівнянь цієї системи.

Випадок

$$z_1 = w_{y_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_0}} = \pm 1$$

— це спеціальний випадок, який дає тривіальний розв'язок, і ми будемо його розглядати окремо.

З виразу для функції H (5.91) ми отримуємо, що

$$\begin{aligned}
H_{z_0} &= G_{z_0}, & H_{z_1} &= -\frac{z_1 z_2}{\sqrt{1 - z_1^2}}, & H_{z_2} &= \sqrt{1 - z_1^2}, \\
H_{z_0 z_1} &= G_{z_0 z_1}, & H_{z_1 z_2} &= -\frac{z_1}{\sqrt{1 - z_1^2}},
\end{aligned} \quad (5.92)$$

$$H_{z_1 z_1} = -\frac{z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} - \frac{z_1^2 z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} + G_{z_1 z_1} = -\frac{z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} + G_{z_1 z_1}.$$

Далі, підстановка виразу для контактних перетворень (5.92) та виразу для похідних функції H у рівняння (5.89) дає

$$\begin{aligned} & v_{z_1} z_1 + \left(G_{z_1 z_1} - \frac{z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(G_{z_0} - v_{z_2} \sqrt{1-z_1^2} \right) \\ & + v_{z_1} \sqrt{1-z_1^2} \left(-\frac{z_1}{\sqrt{1-z_1^2}} \right) \\ & = \left(G_{z_1 z_1} - \frac{z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(G_{z_0} - v_{z_2} \sqrt{1-z_1^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$G_{z_1 z_1} - \frac{z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \neq 0,$$

отримуємо

$$G_{z_0} - v_{z_2} \sqrt{1-z_1^2} = 0,$$

що дає нам вираз для функції v :

$$v = \frac{G_{z_0} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + P(z_0, z_1), \quad (5.93)$$

де $P(z_0, z_1)$ — це деяка функція від своїх аргументів, яка має бути знайдена нижче.

З (5.93) ми обчислюємо вирази для похідних функції v :

$$\begin{aligned} v_{z_0} &= \frac{G_{z_0 z_0} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + P_{z_0}, & v_{z_1} &= \frac{G_{z_0 z_1} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0} z_1 z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} + P_{z_1}, \\ v_{z_2} &= \frac{G_{z_0}}{\sqrt{1-z_1^2}}. \end{aligned} \quad (5.94)$$

Підстановка (5.92), (5.93), (5.94) у (5.89) дає

$$v_{z_1}^2 + (v_{z_2} H_{z_1 z_1} - v_{z_1} H_{z_1 z_2})^2 = 2H_{z_1 z_1} (v_{z_0} H_{z_1 z_1} - v_{z_1} H_{z_0 z_1}),$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{G_{z_0 z_1} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0 z_1} z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} P_{z_1} \right)^2 + \left(\frac{G_{z_0}}{\sqrt{1-z_1^2}} \left(G_{z_1 z_1} - \frac{z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{z_1}{\sqrt{1-z_1^2}} \left(P_{z_1} + \frac{G_{z_0 z_1} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0 z_1} z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right)^2 \\
& = 2 \left(G_{z_1 z_1} - \frac{z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
& \quad \times \left(\left(G_{z_1 z_1} - \frac{z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\frac{G_{z_0 z_0} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + P_{z_0} \right) \right. \\
& \quad \left. - G_{z_0 z_1} \left(\frac{G_{z_0 z_1} z_2}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0 z_1} z_2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} + P_{z_1} \right) \right). \tag{5.95}
\end{aligned}$$

Далі ми можемо розкласти ці вирази за степенями змінної z_2 . З вимоги рівності нулю суми коефіцієнтів при z_2^3 ми отримуємо умову

$$-2 \frac{G_{z_0 z_0}}{(1-z_1^2)^{\frac{7}{2}}} = 0, \tag{5.96}$$

звідки можна зробити висновок, що $G_{z_0 z_0} = 0$. З вимоги рівності нулю суми коефіцієнтів при z_2^2 ми отримуємо умови

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{G_{z_0 z_1}}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0 z_1}}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 \\
& \quad + \left(-\frac{G_{z_0}}{(1-z_1^2)^2} + \frac{G_{z_0 z_1} z_1}{1-z_1^2} + \frac{G_{z_0 z_1}^2}{(1-z_1^2)^2} \right)^2 \\
& = -\frac{2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-\frac{P_{z_0}}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} - G_{z_0 z_1} \left(\frac{G_{z_0 z_1}}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0 z_1}^2}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right), \\
& G_{z_0 z_1}^2 (1-z_1^2)^2 + 2G_{z_0 z_1} G_{z_0 z_1} (1-z_1^2) + G_{z_0 z_1}^2 z_1^2 \\
& \quad + (1-z_1^2)(z_1^2 G_{z_0 z_1}^2 - 2z_1 G_{z_0 z_1} G_{z_0} + G_{z_0}^2) \\
& = 2(P_{z_0} + G_{z_0 z_1}^2 (1-z_1^2) + G_{z_0 z_1} G_{z_0 z_1}), \\
& (G_{z_0} - z_1 G_{z_0 z_1})^2 = 2P_{z_0} + G_{z_0 z_1}^2. \tag{5.97}
\end{aligned}$$

З вимоги рівності нулю суми коефіцієнтів при z_2 ми отримуємо умови

$$\begin{aligned}
& P_{z_1} \left(\frac{G_{z_0 z_1}}{\sqrt{1-z_1^2}} + \frac{G_{z_0} z_1}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \left(\frac{G_{z_0} G_{z_1 z_1} + z_1 P_{z_1}}{\sqrt{1-z_1^2}} \right) \\
& \quad \times \left(-\frac{G_{z_0}}{(1-z_1^2)^2} + \frac{G_{z_0 z_1} z_1}{1-z_1^2} + \frac{G_{z_0} z_1^2}{(1-z_1^2)^2} \right) \\
& = G_{z_1 z_1} \left(-\frac{P_{z_0} + G_{z_0 z_1} G_{z_0} z_1}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{G_{z_0 z_1}^2}{\sqrt{1-z_1^2}} \right) \\
& \quad - \frac{P_{z_0} G_{z_1 z_1} - G_{z_0 z_1} P_{z_1}}{(1-z_1^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
& P_{z_1} (G_{z_0 z_1} (1-z_1^2) + G_{z_0} z_1) + (G_{z_0} G_{z_1 z_1} + z_1 P_{z_1}) (G_{z_0 z_1} z_1 - G_{z_0}) \\
& \quad + G_{z_1 z_1} G_{z_0 z_1}^2 (1-z_1^2) + G_{z_1 z_1} (P_{z_0} + G_{z_0 z_1} G_{z_0} z_1) + P_{z_0} G_{z_1 z_1} \\
& \quad - G_{z_0 z_1} P_{z_1} = 0, \\
& G_{z_1 z_1} (G_{z_0} (G_{z_0 z_1} z_1 - G_{z_0}) + G_{z_0 z_1}^2 (1-z_1^2) \\
& \quad + 2P_{z_0} + G_{z_0 z_1} G_{z_0} z_1) = 0. \tag{5.98}
\end{aligned}$$

З умови (5.98) знаходимо, що

$$G_{z_1 z_1} [2P_{z_0} + G_{z_0 z_1}^2 - (G_{z_0} - G_{z_0 z_1} z_1)^2] = 0. \tag{5.99}$$

Рівність нулю виразу у квадратних дужках рівняння (5.99) еквівалентна умові, яка була визначена в результаті збирання коефіцієнтів при z_2^2 (5.97). Таким чином, з коефіцієнтів при z_2 ми не отримали ніяких нових умов.

З вимоги рівності нулю суми коефіцієнтів при z_2^0 отримуємо

$$\begin{aligned}
& P_{z_1}^2 + \frac{(G_{z_0} G_{z_1 z_1} + z_1 P_{z_1})^2}{1-z_1^2} = 2G_{z_1 z_1} (P_{z_0} G_{z_1 z_1} - G_{z_0 z_1} P_{z_1}), \\
& P_{z_1}^2 (1-z_1^2) + (G_{z_0}^2 G_{z_1 z_1}^2 + 2z_1 P_{z_1} G_{z_0} G_{z_1 z_1} + z_1^2 P_{z_1}^2) \\
& \quad = 2G_{z_1 z_1} (P_{z_0} G_{z_1 z_1} - G_{z_0 z_1} P_{z_1}) \\
& \quad \quad - 2z_1^2 (P_{z_0} G_{z_1 z_1}^2 - G_{z_0 z_1} G_{z_1 z_1} P_{z_1}), \\
& P_{z_1}^2 + G_{z_0}^2 G_{z_1 z_1}^2 + 2z_1 P_{z_1} G_{z_0} G_{z_1 z_1}
\end{aligned}$$

$$= 2(1 - z_1^2)G_{z_1 z_1}(P_{z_0}G_{z_1 z_1} - P_{z_1}G_{z_0 z_1}). \quad (5.100)$$

З (5.95) випливає, що $G_{z_0 z_0} = 0$, з (5.97) робимо висновок, що $P_{z_0 z_0} = 0$.

Таким чином, шукані функції G та P повинні мати наступну форму

$$G = g(z_1)z_0 + k(z_1), \quad P = p(z_1)z_0 + r(z_1), \quad (5.101)$$

де g, k, p, r — певні функції від змінної z_1 , умови на які будуть знайдені далі.

Після підстановки (5.101) у (5.97) ми отримали

$$2p + g'^2 = (g - z_1 g')^2. \quad (5.102)$$

Після підстановки (5.101) у (5.100) ми приходимо до рівняння

$$\begin{aligned} (p'z_0 + r')^2 + g^2(g''z_0 + k'')^2 + 2z_1(p'z_0 + r')g(g''z_0 + k'') \\ = 2(1 - z_1^2)(g''z_0 + k'')(p(g''z_0 + k'') - g'(p'z_0 + r')). \end{aligned} \quad (5.103)$$

Далі ми групуємо коефіцієнти біля степенів z_0 . При z_0^2 отримуємо

$$p'^2 + g^2 g''^2 + 2z_1 p' g g'' = 2(1 - z_1^2)(g''^2 p - g'' g' p'). \quad (5.104)$$

З рівняння (5.102) ми можемо знайти вираз для функції p через функцію g :

$$p = \frac{1}{2}(g^2 - 2z_1 g g' + (z_1^2 - 1)g'^2). \quad (5.105)$$

Звідси

$$p' = g''((z_1^2 - 1)g' - z_1 g). \quad (5.106)$$

Після підстановки виразів для p та p' до (5.104) ми отримуємо, що

$$\begin{aligned} g''^2 [((z_1^2 - 1)g' - z_1 g)^2 + g^2 g''^2 + 2z_1 g((z_1^2 - 1)g' - z_1 g) \\ - (1 - z_1^2)((g^2 - 2z_1 g g' + (z_1^2 - 1)g'^2) \\ - g'((z_1^2 - 1)g' - z_1 g))] = 0. \end{aligned} \quad (5.107)$$

У квадратних дужках рівняння (5.107) ми маємо тотожний нуль, тому нові умови на функції G та P можна знайти лише з коефіцієнтів при z_0^2 .

Групування коефіцієнтів при z_0 дає наступну умову:

$$\begin{aligned} & 2p'r' + 2g^2g''k'' + 2z_1g(p'k'' + r'g'') \\ & = 2(1 - z_1^2)(g''(pk'' - r'g') + k''(pg'' - p'g')). \end{aligned}$$

Підстановка виразів (5.105) та (5.106) для p та p' призводить до виразів

$$\begin{aligned} & 2g''[(r' + z_1gk'')((z_1^2 - 1)g' - z_1g) + (r'z_1g + k''g^2)] \\ & = 2(1 - z_1^2)g''[k''(g^2 - 2z_1gg' + (z_1^2 - 1)g'^2) - r'g' \\ & \quad - k''g'((z_1^2 - 1)g' - z_1g)], \end{aligned}$$

які дають тотожну рівність, тобто ми знову не отримуємо нових умов порівняно зі знайденими раніше.

З вимоги рівності нулю суми коефіцієнтів при z_0^0 ми маємо, що

$$\begin{aligned} & r'^2 + g^2k''^2 + 2z_1r'gk'' - 2(1 - z_1^2)k''(pk'' - g'r') \\ & = (r' - k''((z_1^2 - 1)g' - z_1g))^2 = 0, \end{aligned} \tag{5.108}$$

та з (5.108) випливає, що

$$r' = k''((z_1^2 - 1)g' - z_1g),$$

і тоді, якщо $g'' \neq 0$, це буде еквівалентне умові

$$r'g'' - p'k'' = 0.$$

Таким чином, ми знайшли явний вигляд функцій G та P :

$$G = g(z_1)z_0 + k(z_1), \quad P = p(z_1)z_0 + r(z_1), \tag{5.109}$$

де

$$p = \frac{1}{2}(g^2 - 2z_1gg' + (z_1^2 - 1)g'^2),$$

$$r' = k''((z_1^2 - 1)g' - z_1g). \quad (5.110)$$

Розглянемо застосування обернених контактних перетворень та перетворень годографа. Функція H має вигляд

$$H = z_2\sqrt{1 - z_1^2} + G(z_0, z_1),$$

де $G(z_0, z_1)$ має вигляд (5.109) з довільними g та k , та

$$v = \frac{G_{z_0}z_2}{\sqrt{1 - z_1^2}} + P(z_0, z_1),$$

де $P(z_0, z_1)$ має вигляд (5.109), де функції p та r знаходяться у відповідності до (5.110).

Функція w може бути визначена з виразу для H шляхом використання перетворень, обернених до (5.84) та (5.85):

$$w = z_1H_{z_1} - H.$$

Далі ми можемо знову перепозначити z_1 як z , таким чином, ми отримуємо параметричний загальний розв'язок для системи (5.87), $n = 2$:

$$\begin{aligned} v &= \frac{G_{z_0}z_2}{\sqrt{1 - z^2}} + p(z)z_0 + r(z), \\ w &= y_1z - y_2\sqrt{1 - z^2} - g(z)y_0 - k(z), \\ 0 &= y_1 + \frac{y_2z}{\sqrt{1 - z^2}} - g'(z)y_0 - k'(z). \end{aligned}$$

Застосування перетворень, обернених до (5.84) та (5.85), дає можливість знайти параметричний загальний розв'язок для системи пов'язаних рівнянь ейконалу (5.80) для початкових функцій u та v та $n = 2$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{x_1 + \frac{x_2z}{\sqrt{1 - z^2}} - k'(z)}{g'(z)}, \\ v &= \frac{gx_2}{\sqrt{1 - z^2}} + \frac{p(z)}{g'(z)} \left[x_1 + \frac{x_2z}{\sqrt{1 - z^2}} - k'(z) \right] + r(z), \\ 0 &= x_0 - x_1z + x_2\sqrt{1 - z^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{g(z)}{g'(z)} \left\{ x_1 + \frac{x_2 z}{\sqrt{1-z^2}} - k'(z) \right\} - k(z),$$

де

$$r' = -k''(zg + (1-z^2)g'), \quad p = \frac{1}{2}(-g'^2 + (g - zg')^2),$$

де g та k — довільні функції.

Опишемо особливі випадки, які можуть виникати на різних етапах процедури. Ми розглядали знаходження загального параметричного розв'язку системи (5.80) для $n = 2$ з припущеннями, що $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, $w_{y_0} \neq 0$. Остання умова у відповідності до визначення змінних (5.84) буде виконуватися завжди і не становитиме спеціального випадку для початкової системи.

У випадку, якщо $u_0 = 0$, перше рівняння системи (5.80) матиме вигляд $-u_1^2 - u_2^2 = 0$, звідки $u_1 = u_2 = 0$, тобто тоді функція u буде сталою, а відповідний розв'язок системи (5.80) буде тривіальним.

Ще один особливий випадок

$$z_1 = w_{y_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_0}} = \pm 1,$$

тобто $u_{x_1} \pm 1u_{x_0} = 0$, $u = u(x_0 \pm x_1, x_2)$, і початкова система зводиться до системи з двома незалежними змінними та тривіальними розв'язками.

Ми навели огляд процедури, яка дозволяє побудувати загальні розв'язки системи (5.80) для загального та особливих випадків. Ці результати дозволяють, зокрема, описати всі анзаци, які редукують багатовимірне рівняння ейконалу до рівнянь з меншим числом просторових змінних, що дасть можливість узагальнити результати, отримані в роботі В.І. Фушича та М.І. Серова (Fushchych W.I., Serov N.I., The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **16** (1983), 3645–3656) та в книзі В.І. Фушича, В.М. Штеленя та М.І. Серова (Фушич В.І., Штеленя В.М., Серов Н.І. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики, Наукова думка, Київ, 1989, 339 с.

5.7 Деякі нелінійні системи еволюційних рівнянь: симетрії, точні розв'язки та їхня біологічна інтерпретація

5.7.1 Симетрії Лі та точні розв'язки класу систем рівнянь для моделювання процесів росту злоякісних пухлин

В роботі [54] досліджується загальний клас систем рівнянь вигляду

$$\begin{aligned}U_t &= (D(U)U_x)_x + F(U, V), \\0 &= V_{xx} + G(U, V),\end{aligned}\tag{5.111}$$

де $U(t, x)$ та $V(t, x)$ — невідомі функції, невід'ємна гладка функція $D(U)$ — коефіцієнт дифузії, F та G — довільні гладкі функції, які описують взаємодію між функціями $U(t, x)$ та $V(t, x)$.

Клас систем (5.111) узагальнює відому базову модель для математичного моделювання процесу розвитку пухлин, яка була запропонована у роботі [Byrne H., King J.R., McElwain D.L.S., Preziosi L., Appl. Math. Letters. 16 (2003), P: 567–573]. У випадку (5.111) з заданими функціями D , F та G , і відповідними крайовими умовами на невідомій межі $R(t)$ функція $\alpha(t, x)$ описує концентрацію ракових клітин, а $c(t, x)$ — концентрацію поживних речовин (також це може бути концентрація лікувальних препаратів). У системі (5.111) для зручності введено позначення $U(t, x) = \alpha(t, x) - \alpha^*$, $V(t, x) = c_\infty - c(t, x)$, де α^* і c_∞ — деякі сталі.

Оскільки система (5.111) містить три довільні функції (D , F та G), то для вичерпного опису симетрій Лі необхідно розв'язати складну класифікаційну задачу. З цією метою було спочатку встановлено множину формо-зберігаючих (допустимих) перетворень для класу систем (5.111), з якої виділено групу перетворень еквівалентності (див. теорему 1 та наслідок 1 в [54]). Використовуючи цей результат було встановлено основну теорему про існування 35 нееквівалентних систем вигляду (5.111), які допускають нетривіальні алгебри інваріантності. Оскільки 21 система виникає при $FG = 0$ (див. таблицю 2 в [54]), то важливими для потенційного застосування є лише 14 систем. Нижче наведена відповідна теорема.

Теорема 5.21. *Всі максимальні алгебри інваріантності (розмірності три і вище) систем вигляду (5.111) з $FG \neq 0$ та $D \neq \text{const}$ та відповідні системи наведені в таблиці 5.10. Кожна інша система з нетривіальною симетрією Лі за допомогою відповідних формо-зберігаючих перетворень зводиться до однієї з поданих у цій таблиці.*

В нашій роботі [54] здійснено ідентифікацію всіх систем з класу (5.111), які зводяться до систем наведених у наведеній вище теоремі (див. таблиці 3 та 4 в [54]).

Для того, щоб проілюструвати застосування отриманих симетрій було досліджено симетрії Лі відповідної крайової задачі. Розгляньмо крайову задачу (КЗ) з рухомою границею:

$$\begin{aligned} U_t &= ((U + \alpha_*)^m U_x)_x + S(U + \alpha_*, c_\infty - V), \\ 0 &= V_{xx} + Q(U + \alpha_*, c_\infty - V), \\ x = 0 : \quad U_x &= V_x = 0, \\ x = R(t) : \quad U &= V = 0, \\ x = R(t) : \quad \dot{R} &= -\alpha_*^{m-1} U_x, \end{aligned} \tag{5.112}$$

де концентрації $U(t, x)$ та $V(t, x)$ та рухома границя $R(t)$ є шуканими невідомими функціями, S та Q — деякі задані гладкі функції, m , α_* and c_∞ — невід’ємні сталі. Наведені тут крайові умови взяті з роботи [Byrne H., King J.R., McElwain D.L.S., Preziosi L., Appl. Math. Letters. 16 (2003), P: 567–573].

Легко помітити, що базові рівняння КЗ (5.112) з функціями $S = f(U)V^{-\beta}$ та $Q = g(U)V^{-\beta+1}$ є частинним випадком системи з випадку 2 таблиці 5.10. Таким чином, вони інваріантні відносно оператора

$$X = 2\beta t \partial_t + \beta x \partial_x + 2V \partial_V. \tag{5.113}$$

Використавши означення інваріантності КЗ з рухомою границею (див. [Cherniha R., Kovalenko S., *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011), 485202]), можна довести теорему:

Табл. 5.10: Симетрії Лі системи (5.111) у випадку $F_V G_U \neq 0$

Система	Базисні оператори МАІ
1. $U_t = (D(U)U_x)_x + e^V f(U)$ $0 = V_{xx} + e^V g(U)$	$\partial_t, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - 2\partial_V$
2. $U_t = (D(U)U_x)_x + V^\beta f(U)$ $0 = V_{xx} + V^{\beta+1}g(U)$	$\partial_t, \partial_x, 2\beta t\partial_t + \beta x\partial_x - 2V\partial_V$
3. $U_t = (U^k U_x)_x + U^{\gamma+1} f(e^V U^\alpha)$ $0 = V_{xx} + U^{\gamma-k} g(e^V U^\alpha)$	$\partial_t, \partial_x,$ $2\gamma t\partial_t + (\gamma - k)x\partial_x - 2U\partial_U + 2\alpha\partial_V$
4. $U_t = (U^k U_x)_x + U^{\gamma+1} f(VU^\beta)$ $0 = V_{xx} + VU^{\gamma-k} g(VU^\beta)$	$\partial_t, \partial_x,$ $2\gamma t\partial_t + (\gamma - k)x\partial_x - 2U\partial_U + 2\beta V\partial_V$
5. $U_t = (U^k U_x)_x + \alpha_1 e^V U^{\gamma+1}$ $0 = V_{xx} + \alpha_2 e^V U^{\gamma-k}$	$\partial_t, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - 2\partial_V,$ $kt\partial_t - U\partial_U + (\gamma - k)\partial_V$
6. $U_t = (U^k U_x)_x + \alpha_1 V^\beta U^{\gamma+1}$ $0 = V_{xx} + \alpha_2 V^{\beta+1} U^{\gamma-k}$	$\partial_t, \partial_x, 2\beta t\partial_t + \beta x\partial_x - 2V\partial_V,$ $k\beta t\partial_t - \beta U\partial_U + (\gamma - k)V\partial_V$
7. $U_t = (U^k U_x)_x + \alpha_1 U^{k+1} + UV$ $0 = V_{xx} + \alpha_2 U^k$	$\partial_t, \partial_x, -k\varphi(t)\partial_t + \dot{\varphi}(t)U\partial_U +$ $(k\dot{\varphi}(t)V + (k+1)\ddot{\varphi}(t))\partial_V$
8. $U_t = (U^{-4/3} U_x)_x + U f(UV^3)$ $0 = V_{xx} + U g(UV^3)$	$\partial_t, \partial_x, 2x\partial_x - 3U\partial_U + V\partial_V,$ $x^2\partial_x - 3xU\partial_U + xV\partial_V$
9. $U_t = (U^{-4/3} U_x)_x + \alpha_1 U^{1+\gamma} V^{3\gamma}$ $0 = V_{xx} + \alpha_2 U^{4/3+\gamma} V^{3\gamma+1}$	$\partial_t, \partial_x, 2x\partial_x - 3U\partial_U + V\partial_V,$ $x^2\partial_x - 3xU\partial_U + xV\partial_V,$ $4\gamma t\partial_t + 3\gamma U\partial_U - (4/3 + \gamma)V\partial_V$
10. $U_t = (e^U U_x)_x + e^{(\gamma+1)U} f(V + \alpha U)$ $0 = V_{xx} + e^{\gamma U} g(V + \alpha U)$	$\partial_t, \partial_x,$ $2(\gamma + 1)t\partial_t + \gamma x\partial_x - 2\partial_U + 2\alpha\partial_V$
11. $U_t = (e^U U_x)_x + e^{(\gamma+1)U} f(Ve^{\beta U})$ $0 = V_{xx} + Ve^{\gamma U} g(Ve^{\beta U})$	$\partial_t, \partial_x,$ $2(\gamma + 1)t\partial_t + \gamma x\partial_x - 2\partial_U + 2\beta V\partial_V$
12. $U_t = (e^U U_x)_x + \alpha_1 \exp((\gamma + 1)U + V)$ $0 = V_{xx} + \alpha_2 \exp(\gamma U + V)$	$\partial_t, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - 2\partial_V,$ $t\partial_t - \partial_U + \gamma\partial_V$
13. $U_t = (e^U U_x)_x + \alpha_1 e^{(\gamma+1)U} V^\beta$ $0 = V_{xx} + \alpha_2 e^{\gamma U} V^{\beta+1}$	$\partial_t, \partial_x, 2\beta t\partial_t + \beta x\partial_x - 2V\partial_V,$ $\beta t\partial_t - \beta\partial_U + \gamma V\partial_V$
14. $U_t = (e^U U_x)_x + \alpha_1 e^U + V$ $0 = V_{xx} + \alpha_2 e^U$	$\partial_x, \varphi(t)\partial_t - \dot{\varphi}(t)\partial_U -$ $(\dot{\varphi}(t)V + \ddot{\varphi}(t))\partial_V$

В таблиці 5.10, $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$ та k — довільні сталі, $k\beta((\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2) \neq 0$; D, f, g та φ — довільні гладкі функції.

Теорема 5.22. *Нелінійна КЗ (5.112) з $S = f(U)V^{-\beta}$ та $Q = g(U)V^{-\beta+1}$ інваріантна відносно двовимірної МАІ з базисними операторами ∂_t та (5.113).*

Застосуємо результат теореми 5.22 для побудови розв'язків КЗ (5.112). Оскільки оператор ∂_t веде до вимоги $R(t) = \text{const}$, яка не передбачає рухомої границі, то для проведення редукції КЗ (5.112) було використано оператор (5.113). Застосувавши оператор (5.113), знаходимо анзац

$$U = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad V = t^{\frac{1}{\beta}} \psi(\omega), \quad (5.114)$$

та вигляд функції $R(t) = \omega_0 \sqrt{t}$, де $\omega_0 > 0$ — довільна стала. Редукована КЗ має вигляд

$$\begin{aligned} (\varphi + \alpha_*)^m \varphi'' + m(\varphi + \alpha_*)^{m-1} (\varphi')^2 + \frac{\omega}{2} \varphi' + f(\varphi) \psi^{-\beta} &= 0, \\ \psi'' + g(\varphi) \psi^{-\beta+1} &= 0, \\ \omega = 0: \quad \varphi' = \psi' &= 0, \\ \omega = \omega_0: \quad \varphi = \psi = 0, \quad \varphi' &= -\frac{\alpha_*^{1-m} \omega_0}{2}. \end{aligned} \quad (5.115)$$

Нелінійна КЗ (5.115) є складною для аналітичного розв'язання в загальному випадку. Розглянемо цю задачу з $\beta = 1$:

$$\begin{aligned} (\varphi + \alpha_*)^m \varphi'' + m(\varphi + \alpha_*)^{m-1} (\varphi')^2 + \frac{\omega}{2} \varphi' + f(\varphi) \psi^{-1} &= 0, \\ \psi'' + g(\varphi) &= 0, \\ \omega = 0: \quad \varphi' = \psi' &= 0, \\ \omega = \omega_0: \quad \varphi = \psi = 0, \quad \varphi' &= \frac{\alpha_*^{1-m} \omega_0}{2}. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Розв'язок КЗ (5.116) для довільної сталої m та функцій $f(\varphi)$ і $g(\varphi)$

$$\begin{aligned} g &= q_0 \varphi, \quad q_0 > 0, \\ f &= \frac{q_0 \alpha_*^{m-1}}{3} \varphi (\varphi + \alpha_*^{1-m} \omega_0^2) \left(m + \frac{1}{2} \right) \alpha_*^{1-m} (\varphi + \alpha_*)^m \\ &\quad - \frac{m \alpha_*^{2-m}}{4} (\alpha_*^{-m} \omega_0^2 + 4) (\varphi + \alpha_*)^{m-1} - \varphi + \frac{\alpha_*^{1-m}}{4} \omega_0^2 \end{aligned}$$

має вигляд

$$\varphi = \frac{\alpha_*^{1-m}}{4} (\omega_0^2 - \omega^2), \quad \omega < \omega_0,$$

$$\psi = \frac{\alpha_*^{1-m} q_0}{48} (\omega_0^2 - \omega^2) (5\omega_0^2 - \omega^2), \quad \omega < \omega_0.$$

Підставивши знайдені функції φ та ψ в анзац (5.114) отримуємо розв'язок КЗ (5.112) з зазначеними вище коефіцієнтами S і Q . Після повернення до оригінальних змінних він набуває вигляду

$$\alpha(t, x) = \alpha_* + \frac{\alpha_*^{1-m}}{4} \left(\omega_0^2 - \frac{x^2}{t} \right), \quad x < \omega_0 \sqrt{t},$$

$$c(t, x) = c_\infty - \frac{\alpha_*^{1-m} q_0}{48} t \left(\omega_0^2 - \frac{x^2}{t} \right) \left(5\omega_0^2 - \frac{x^2}{t} \right), \quad x < \omega_0 \sqrt{t},$$

$$R(t) = \omega_0 \sqrt{t}.$$

В нашій роботі побудовано графіки цього розв'язку та наведена відповідна біологічна інтерпретація.

5.7.2 Система Шігесади–Кавасаки–Терамото

Розглянемо систему нелінійних еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t = [(d_1 + d_{11}u + d_{12}v)u]_{xx} + u(a_1 - b_1u - c_1v),$$

$$v_t = [(d_2 + d_{21}u + d_{22}v)v]_{xx} + v(a_2 - b_2u - c_2v). \quad (5.117)$$

Система (5.117) була запропонована в роботі [Shigesada N., Kawasaki K., Teramoto E., *J. Theoret. Biol.* **79** (1979), 83–99] для опису процесу взаємодії двох видів. В системі (5.117) невідомі функції u and v змінних t та x описують щільність популяцій двох видів; d_1 та d_2 — коефіцієнти дифузії; доданки $d_{12}v$ та $d_{21}u$ відповідають за поперечно-дифузійний тиск, доданки $d_{11}u$ та $d_{22}v$ — внутрішньодифузійний тиск; a_1 та a_2 — коефіцієнти природного приросту видів; b_1 та c_2 — коефіцієнти внутрішньовидової конкуренції; b_2 та c_1 — коефіцієнти міжвидової конкуренції. Сталі d_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2$) є довільними дійсними числами, такими, що

$d_{12}^2 + d_{21}^2 \neq 0$. Тобто, ми досліджуємо лише системи вигляду (5.117) з поперечною дифузією. Крім того, розглядаємо лише такі системи ШКТ, в яких кожне рівняння є рівнянням другого порядку.

В залежності від знаків сталих a_k , b_k та c_k ($k = 1, 2$), система ШКТ (5.117) може описувати взаємодію різних типів (змагання, мутуалізм та взаємодію типу хижак–жертва).

Застосувавши алгоритм Лі до системи (5.117), ми отримали СВР для знаходження операторів симетрії Лі. Результат інтегрування отриманої системи суттєво залежить від значення довільних параметрів системи ШКТ (див. теореми 1, 2 та 3 [28]). Наведемо лише деякі з отриманих результатів.

Теорема 5.23. *Всі можливі (з точністю до перетворень (5.119)) МАІ системи ШКТ вигляду*

$$\begin{aligned} u_t &= [uv]_{xx} + u(a_1 - b_1u - c_1v), \\ v_t &= [uv]_{xx} + v(a_2 - b_2u - c_2v), \end{aligned} \quad (5.118)$$

з ненульовими реакційними доданками представлено в таблиці 5.11. Будь-яка інша система вигляду (5.118), яка інваріантна відносно алгебр Лі розмірності 3 і вище, зводиться до систем з таблиці 5.11 за допомогою перетворень

$$\begin{aligned} 1. \quad t^* &= \frac{1}{a} e^{at}, \quad u^* = e^{-at}u, \quad v^* = e^{-at}v; \\ 2. \quad t^* &= bt, \quad x^* = \sqrt{b}x, \quad b > 0. \end{aligned} \quad (5.119)$$

(тут a та b — довільні ненульові сталі).

В таблиці 5.11 використано позначення:

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x, \quad P_t = \frac{\partial}{\partial t} \equiv \partial_t; \\ D_1 &= t\partial_t - (u\partial_u + v\partial_v), \quad D_2 = x\partial_x + 2(u\partial_u + v\partial_v); \\ Z_1 &= \frac{e^x}{u-v} (\partial_u - \partial_v), \quad Z_2 = \frac{e^{-x}}{u-v} (\partial_u - \partial_v); \end{aligned}$$

Табл. 5.11: МАІ системи ШКТ (5.118)

	Системи	Обмеження	Базисні оператори МАІ	Перетворення з (5.119)
1.	$u_t = [uv]_{xx} - u(b_1u + c_1v)$ $v_t = [uv]_{xx} - v(b_2u + c_2v)$	$b_1^2 + c_2^2 \neq 0$	P_t, P_x, D_1	1
2.	$u_t = [uv]_{xx} + a_1u$ $v_t = [uv]_{xx} + a_2v$	$a_1 \neq a_2$	P_t, P_x, D_2	
3.	$u_t = [uv]_{xx} - uv$ $v_t = [uv]_{xx} - uv$		$P_t, P_x, D_1,$ Z_1, Z_2	1, 2
4.	$u_t = [uv]_{xx} + uv$ $v_t = [uv]_{xx} + uv$		$P_t, P_x, D_1,$ Z_3, Z_4	1, 2

$$Z_3 = \frac{\cos x}{u - v} (\partial_u - \partial_v), \quad Z_4 = \frac{\sin x}{u - v} (\partial_u - \partial_v).$$

Оператори D_1 та D_2 є типовими для багатьох систем рівнянь реакції-дифузії, оскільки вони є лінійними відносно залежних змінних u та v . Наявність операторів Z_i ($i = 1, 2, 3, 4$), які є нелінійними відносно змінних u та v , є новим нетривіальним фактом, оскільки у випадку стандартних систем реакції-дифузії такі симетрії Лі відсутні (див. [R.Cherniha, JR King, J. Phys.A, 36 (2003), 405-425] та цитовану там літературу). Очевидно, що оператори Z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) пов'язані з наявністю поперечної дифузії в системі ШКТ (5.118).

Нами побудовані точні розв'язки систем ШКТ з таблиці 5.11, використовуючи отримані симетрії Лі. Для прикладу розглянемо системи з випадків 3 та 4, МАІ яких містять найбільш нетривіальні оператори Z_i . Отже, розглянемо системи

$$\begin{aligned} u_t &= [uv]_{xx} - uv, \\ v_t &= [uv]_{xx} - uv \end{aligned} \tag{5.120}$$

та

$$u_t = [uv]_{xx} + uv,$$

$$v_t = [uv]_{xx} + uv. \quad (5.121)$$

Точні розв'язки систем (5.120) та (5.121) будемо шукати, використовуючи відповідно оператори $X_1 = \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2$ та $X_2 = \lambda_1 Z_3 + \lambda_2 Z_4$ (тут λ_1 та λ_2 — довільні сталі, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$). При цьому, ми продемонструємо два способи побудови точних розв'язків з використанням симетрій Лі.

Як відомо, оператори симетрії Лі дозволяють генерувати нові складніші розв'язки з відомих простіших. Розглянемо детальніше систему (5.120) і відповідний їй оператор X_1 . Даний оператор породжує однопараметричну групу Лі:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u+v}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(u-v)^2 + 4p(\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x})}, \\ v^* &= \frac{u+v}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(u-v)^2 + 4p(\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x})}, \end{aligned} \quad (5.122)$$

для $u \geq v$,

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u+v}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(u-v)^2 + 4p(\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x})}, \\ v^* &= \frac{u+v}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(u-v)^2 + 4p(\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x})}, \end{aligned} \quad (5.123)$$

для $u \leq v$ (тут p є довільним параметром).

Для побудови нетривіальних розв'язків системи (5.120), необхідно спочатку знайти деякий її простий розв'язок. Зокрема, поклавши $u_x = v_x = 0$, отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)

$$u_t = -uv,$$

$$v_t = -uv,$$

загальних розв'язок якої має вигляд

$$\begin{aligned} u &= \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 t}}{\alpha_2 + e^{\alpha_1 t}}, \\ v &= -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_2 + e^{\alpha_1 t}}, \end{aligned} \quad (5.124)$$

де α_1 та α_2 — довільні сталі. Застосувавши до розв'язку (5.124) перетворення (5.122)–(5.123), отримуємо багатопараметричні сім'ї точних розв'язків системи (5.120):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_2 + e^{\alpha_1 t})} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1^2 + 4p(\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x})}, \\ v(t, x) &= \frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 \alpha_2}{2(\alpha_2 + e^{\alpha_1 t})} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1^2 + 4p(\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x})}. \end{aligned}$$

Аналогічним чином можна отримати розв'язки системи (5.121):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 e^{\alpha_1 t}}{2(1 - \alpha_2 e^{\alpha_1 t})} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1^2 + 4p(\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x)}, \\ v(t, x) &= \frac{\alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 e^{\alpha_1 t}}{2(1 - \alpha_2 e^{\alpha_1 t})} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_1^2 + 4p(\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x)}. \end{aligned} \quad (5.125)$$

Розв'язок (5.125) з $\lambda_2 = 0$ задовольняє нульові умови Ноймана

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad v_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 0, \quad v_x|_{x=\pi} = 0$$

на інтервалі $(0, \pi)$. Ця властивість є важливою для інтерпретації отриманого розв'язку, оскільки нульовий потік на границі є типовою вимогою в біологічно вмотивованих моделях.

Розглянемо ще один спосіб побудови точних розв'язків з використанням симетрій Лі, а саме: метод симетрійної редукції. Використовуючи лінійну комбінацію операторів P_x , Z_3 та Z_4 системи (5.121), тобто оператор

$$X = \partial_x + \frac{\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x}{u - v} (\partial_u - \partial_v),$$

можна побудувати анзац

$$\begin{aligned} u &= \frac{\varphi_1(t) \pm \sqrt{\varphi_1^2(t) + 4\varphi_2 + 4(\lambda_1 \sin x - \lambda_2 \cos x)}}{2}, \\ v &= \frac{\varphi_1(t) \mp \sqrt{\varphi_1^2(t) + 4\varphi_2 + 4(\lambda_1 \sin x - \lambda_2 \cos x)}}{2} \end{aligned} \quad (5.126)$$

(тут $\varphi_1(t)$ та $\varphi_2(t)$ — нові невідомі функції), який зводить систему ДРЧП (5.121) до системи ЗДР

$$\begin{aligned}\varphi_1' + 2\varphi_2 &= 0, \\ \varphi_1\varphi_1' + 2\varphi_2' &= 0.\end{aligned}\tag{5.127}$$

Система (5.127) еквівалентна до системи

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= -\frac{1}{2}\varphi_1', \\ \varphi_1' &= \frac{1}{2}\varphi_1^2 + \beta,\end{aligned}\tag{5.128}$$

де β — довільна стала. Проінтегрувавши систему (5.128) в залежності від значення сталої β та підставивши отриманий результат в анзац (5.126), отримуємо такі розв'язки системи (5.121):

$$\begin{aligned}u &= -\frac{1}{t} \pm \sqrt{\lambda_1 \sin x - \lambda_2 \cos x}, \\ v &= -\frac{1}{t} \mp \sqrt{\lambda_1 \sin x - \lambda_2 \cos x}, \\ u &= \alpha_1 \tan(\alpha_1 t) \pm \sqrt{\lambda_1 \sin x - \lambda_2 \cos x - \alpha_1^2}, \\ v &= \alpha_1 \tan(\alpha_1 t) \mp \sqrt{\lambda_1 \sin x - \lambda_2 \cos x - \alpha_1^2}, \\ u &= \alpha_1 \frac{1 + e^{2\alpha_1 t}}{1 - e^{2\alpha_1 t}} \pm \sqrt{\lambda_1 \sin x - \lambda_2 \cos x + \alpha_1^2}, \\ v &= \alpha_1 \frac{1 + e^{2\alpha_1 t}}{1 - e^{2\alpha_1 t}} \mp \sqrt{\lambda_1 \sin x - \lambda_2 \cos x + \alpha_1^2},\end{aligned}$$

де $\alpha_1 \pm \sqrt{\frac{|\beta|}{2}}$.

5.7.3 Дифузійна системи Лотки–Вольтера

Розглянемо узагальнення класичної системи Лотки–Вольтера для випадку взаємодії двох видів з урахуванням дифузії в одновимірному просторі та умові, що всі коефіцієнти системи залежать від часу, тобто будемо досліджувати систему вигляду:

$$U_\tau = D_1(\tau)U_{xx} + U(F_1(\tau) + G_1(\tau)U + H_1(\tau)V),$$

$$V_\tau = D_2(\tau)V_{xx} + V(F_2(\tau) + G_2(\tau)U + H_2(\tau)V). \quad (5.129)$$

В системі (5.129), F_i , G_i , H_i та D_i — довільні гладкі функції ($H_1^2 + G_2^2 \neq 0$, $D_1 D_2 \neq 0$). Оскільки симетрії Лі системи (5.129) у випадку, коли всі коефіцієнти є сталими, відомі [Черніга Р.М., Дутка В.А., *Укр. мат. журн.* **56** (2004), 1395–1404], то накладемо додаткове обмеження: хоча б один коефіцієнт системи (5.129) не є сталим.

Перед тим як почати дослідження системи (5.129), зменшимо кількість довільних параметрів за допомогою перетворень змінних. Зокрема, ДСЛВ (5.129) зводиться до системи

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(b_1(t)u + c_1(t)v), \\ v_t &= d(t)v_{xx} + v(b_2(t)u + c_2(t)v) \end{aligned} \quad (5.130)$$

перетвореннями вигляду

$$\begin{aligned} t &= \int D_1(\tau) d\tau, \quad u = U \exp\left(-\int F_1(\tau) d\tau\right), \\ v &= V \exp\left(-\int F_2(\tau) d\tau\right), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \tau &= \left(\int D_1(t) dt\right)^{-1}, \quad d(t) = \frac{D_2(\tau)}{D_1(\tau)}, \\ b_i(t) &= \frac{G_i(\tau)}{D_1(\tau)} \exp\left(\int F_1(\tau) d\tau\right), \\ c_i(t) &= \frac{H_i(\tau)}{D_1(\tau)} \exp\left(\int F_2(\tau) d\tau\right), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

(верхній індекс -1 означає обернену функцію).

Застосувавши алгоритм Лі до системи (5.130), ми отримали СВР для знаходження лівських симетрій.

Теорема 5.24. *Оператор симетрії Лі системи (5.130) має вигляд:*

$$X = \xi^0(t)\partial_t + \xi^1(t, x)\partial_x + (r^1(t, x)u + q^1(t)v + p^1(t, x))\partial_u$$

$$+ (r^2(t, x)v + q^2(t)u + p^2(t, x)) \partial_v, \quad (5.131)$$

$\partial_e \xi^0, \xi^1, r^i, q^i$ та p^i ($i = 1, 2$) — невідомі гладкі функції, які є розв'язком СБР

$$\begin{aligned} (1-d)q^1 &= 0, \quad (1-d)q^2 = 0, \quad d'(t)\xi^0 = 0, \\ (c_1 - c_2)q^1 &= 0, \quad (b_1 - b_2)q^2 = 0, \\ \xi_t^0 - 2\xi_x^1 &= 0, \quad \xi_t^1 + 2r_x^1 = 0, \quad \xi_t^1 + 2dr_x^2 = 0, \\ b_1(r^1 + \xi_t^0) + c_1q^2 + \xi^0 b'_1 &= 0, \\ b_2(r^1 + \xi_t^0) + (2c_2 - c_1)q^2 + \xi^0 b'_2 &= 0, \\ c_1(r^2 + \xi_t^0) + (2b_1 - b_2)q^1 + \xi^0 c'_1 &= 0, \\ c_2(r^2 + \xi_t^0) + b_2q^1 + \xi^0 c'_2 &= 0, \\ r_t^1 - r_{xx}^1 - 2b_1p^1 - c_1p^2 &= 0, \quad r_t^2 - dr_{xx}^2 - b_2p^1 - 2c_2p^2 = 0, \\ p_t^1 - p_{xx}^1 &= 0, \quad p_t^2 - dp_{xx}^2 = 0, \quad q_t^1 - c_1p^1 = 0, \quad q_t^2 - b_2p^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Легко переконатися, що $\xi^1 = \alpha$ (α — довільна стала) є єдиною ненульовою функцією з розв'язку системи (5.132) у випадку, коли всі коефіцієнти системи (5.130) є довільними. Це означає, що ДСЛВ (5.130) в загальному випадку допускає одновимірну алгебру Лі з базисним оператором ∂_x . Таким чином, при інтегруванні СБР нам необхідно знайти всі можливі (з точністю до деяких перетворень) значення коефіцієнтів системи (5.130), при яких ця система допускає алгебри Лі розмірності 2 і вище. При цьому ми виключимо з розгляду ті системи вигляду (5.130), які зводяться до ДСЛВ зі сталими коефіцієнтами, а також системи, які еквівалентні до систем рівнянь реакції-дифузії з тривіальною алгеброю Лі $\langle P_t, P_x \rangle$.

Розв'язок системи (5.132) суттєво залежить від коефіцієнта дифузії d . У випадку, коли параметр d є довільним (довільна функція чи стала) з перших рівнянь СБР (5.132) отримуємо $q^1 = q^2 = 0$. В цьому випадку результат інтегрування системи (5.132) подаємо у вигляді теореми:

Теорема 5.25. *ДСЛВ (5.130) допускає нетривіальні оператори симетрії Лі вигляду (5.131) з $q^1 = q^2 = 0$ лише у випадках, представлених*

в таблиці 5.12. Будь-яка система вигляду

$$\begin{aligned} U_\tau &= U_{yy} + U (G_1(\tau)U + H_1(\tau)V), \\ V_\tau &= D(\tau)V_{yy} + V (G_2(\tau)U + H_2(\tau)V), \end{aligned} \quad (5.133)$$

яка допускає нетривіальну алгебру Лі, зводиться, або до систем з таблиці 5.12, або до ДСЛВ зі сталими коефіцієнтами, або до систем рівнянь реакції-дифузії з тривіальною алгеброю Лі $\langle P_t, P_x \rangle$, перетвореннями вигляду

$$\begin{aligned} t &= \alpha_1^2 \tau + \alpha_2, \quad x = \alpha_1 y + \alpha_3, \\ u &= \alpha_4 e^{\alpha_5 t} f^{\alpha_6} g^{\alpha_7} U + \alpha_8 V + \alpha_9 e^{\alpha_{10} t} f^{\alpha_{11}} g^{\alpha_{12}}, \\ v &= \alpha_{13} \exp(\alpha_{14} t + \alpha_{15} e^{\alpha_{16} t}) f^{\alpha_{17}} g^{\alpha_{18}} V + \alpha_{19} e^{\alpha_{20} t} f^{\alpha_{21}} g^{\alpha_{22}} U + \alpha_{23} f^{\alpha_{24}} g^{\alpha_{25}}, \end{aligned}$$

де функції f та g можуть приймати такі значення:

$$\tau, \sin(\tau + \alpha_{26}), \sinh(\alpha_{27} \ln \tau + \alpha_{28} \tau), \cosh(\alpha_{29} \ln \tau + \alpha_{30} \tau),$$

а довільні сталі α з індексами визначаються в залежності від вигляду системи (5.133).

Результат інтегрування СВР (5.132) у випадку $d = 1$ представлено в таблиці 2 [38].

Перейдемо до побудови точних розв'язків ДСЛВ. З систем, представлених в таблиці 5.12, найбільш загальною є система з випадку 3. Припустивши $\beta_2 \gamma_1 \neq 0$ і застосувавши перетворення $\beta_2 u \rightarrow u$, $\gamma_1 v \rightarrow v$ до системи з випадку 3, отримуємо ДСЛВ

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u (\beta t^k u + t^l v), \\ v_t &= d_0 v_{xx} + v (t^k u + \gamma t^l v) \end{aligned} \quad (5.134)$$

і відповідний їй оператор

$$X = 2t\partial_t + x\partial_x - 2(k+1)u\partial_u - 2(l+1)v\partial_v. \quad (5.135)$$

Табл. 5.12: Симетрії Лі ДСЛВ (5.130)

d	Реакційні доданки	Базисні оператори МАІ
1. $\forall$	$b_1(t)u^2$ $b_2(t)uv$	$\partial_x, v\partial_v$
2. $\forall$	0 $b(t)uv$	$\partial_x, v\partial_v, \partial_u + \int b(t)dt v\partial_v$
3. d_0	$u(\beta_1 t^k u + \gamma_1 t^l v)$ $v(\beta_2 t^k u + \gamma_2 t^l v)$	$\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - 2(k+1)u\partial_u -$ $2(l+1)v\partial_v$
4. d_0	$\beta t^k u^2$ $t^k uv$	$\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - 2(k+1)u\partial_u, v\partial_v$
5. d_0	0 $t^k uv$	$\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x - 2(k+1)u\partial_u, v\partial_v,$ $\partial_u + \int t^k dt v\partial_v$
6. d_0	0 $v(t^k u + t^l \exp(\beta t^{k+1})v)$	$\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x -$ $2((k+1)u + \beta(k+1)^2)\partial_u -$ $2(l+1 + \beta(k+1)t^{k+1})v\partial_v$
7. d_0	0 $v(t^{-1}u + t^l \exp(\beta \ln^2 t)v)$	$\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x -$ $4\beta\partial_u - 2(l+1 + 2\beta \ln t)v\partial_v$
8. d_0	$t^{-1} \cos^{-2}(k \ln t) u^2$ $v\left(\frac{\beta t^{-1}}{\cos^2(k \ln t)} u + \frac{t^l}{\cos^\beta(k \ln t)} v\right)$	$2t\partial_t + x\partial_x - 2k(k+2 \tan(k \ln t)u)\partial_u -$ $2(l+1 + k\beta \tan(k \ln t))v\partial_v, \partial_x$
9. d_0	$t^{-1} \cos^{-2}(k \ln t) u^2$ $\beta t^{-1} \cos^{-2}(k \ln t) uv$	$2t\partial_t + x\partial_x - 2k(k+2 \tan(k \ln t)u)\partial_u -$ $2k\beta \tan(k \ln t)v\partial_v, \partial_x, v\partial_v$
10. d_0	$t^{-1} \cosh^{-2}(k \ln t) u^2$ $v\left(\frac{\beta t^{-1}}{\cosh^2(k \ln t)} u + \frac{t^l}{\cosh^\beta(k \ln t)} v\right)$	$2t\partial_t + x\partial_x + 2k(k+2 \tanh(k \ln t)u)\partial_u -$ $2(l+1 - k\beta \tanh(k \ln t))v\partial_v, \partial_x$
11. d_0	$t^{-1} \cosh^{-2}(k \ln t) u^2$ $\beta t^{-1} \cosh^{-2}(k \ln t) uv$	$2t\partial_t + x\partial_x + 2k(k+2 \tanh(k \ln t)u)\partial_u +$ $2k\beta \tanh(k \ln t)v\partial_v, \partial_x, v\partial_v$
12. d_0	$t^{-1} \ln^{-2} t u^2$ $v(\beta t^{-1} \ln^{-2} t u + t^l \ln^{-\beta} t v)$	$\partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + 2(-1 + 2 \ln^{-1} t u)\partial_u +$ $2(\beta \ln^{-1} t - l - 1)v\partial_v$
13. d_0	$t^{-1} \ln^{-2} t u^2$ $\beta t^{-1} \ln^{-2} t uv$	$\partial_x, v\partial_v, 2t\partial_t + x\partial_x +$ $2(-1 + 2 \ln^{-1} t u)\partial_u + 2\beta \ln^{-1} t v\partial_v$

У таблиці 5.12, $\beta \neq 0$, β_i, γ_i ($i = 1, 2$), $d_0 > 0$, k та l — довільні сталі, $b(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ та $d(t)$ — довільні гладкі функції; $k \neq -1$ у випадку 6 таблиці 5.12.

Використавши оператор (5.135), побудували анзац

$$u = \frac{\varphi(\omega)}{t^{k+1}}, \quad v = \frac{\psi(\omega)}{t^{l+1}}, \quad \omega = \frac{x^2}{t}, \quad (5.136)$$

де $\varphi(\omega)$ та $\psi(\omega)$ — нові невідомі функції. Підставивши анзац (5.136) в систему (5.134), отримуємо таку систему ЗДР:

$$\begin{aligned} 4\omega\varphi'' + (2 + \omega)\varphi' + \varphi(1 + k + \beta\varphi + \psi) &= 0, \\ 4d_0\omega\psi'' + (2d_0 + \omega)\psi' + \psi(1 + l + \varphi + \gamma\psi) &= 0. \end{aligned} \quad (5.137)$$

Проінтегрувати систему (5.137) в загальному випадку не вдається. Зробивши припущення, що функції φ та ψ є лінійно залежними, та виконавши відповідні обчислення, маємо розв'язок

$$u = \frac{1}{x^2 t^k}, \quad v = -kt^{-k\gamma} - \frac{kt^{1-k\gamma}}{(1 + k\gamma)x^2}, \quad (5.138)$$

ДСЛВ (5.134) при виконанні додаткових обмежень

$$l = -1 + k\gamma, \quad \beta = -6 + \frac{k}{1 + k\gamma}, \quad d_0 = -\frac{1}{6(1 + k\gamma)} > 0.$$

Для інтерпретації отриманого розв'язку застосуємо перетворення $U = e^{\alpha_1 t} u$, $V = -e^{-\alpha_2 t} v$ до системи (5.134) та її розв'язку (5.138). Отже, маємо систему

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx} + U(\alpha_1 - \beta e^{-\alpha_1 t} t^k U - e^{\alpha_2 t} t^l V), \\ V_t &= d_0 V_{xx} + V(-\alpha_2 + e^{-\alpha_1 t} t^k U - \gamma e^{\alpha_2 t} t^l V) \end{aligned} \quad (5.139)$$

(тут $\beta = 6 - k/(1 + k\gamma)$, α_1 та α_2 — довільні сталі) та розв'язок

$$U = \frac{e^{\alpha_1 t}}{x^2 t^k}, \quad V = kt^{-k\gamma} \left(1 - 6d_0 \frac{t}{x^2}\right) e^{-\alpha_2 t}. \quad (5.140)$$

ДСЛВ (5.139) з невід'ємними сталими α_1 , α_2 , β та γ є узагальненням класичної системи Лотки–Вольтера

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \\ v_t &= d_2 v_{xx} + v(-a_2 + b_2 u - c_2 v), \end{aligned} \quad (5.141)$$

яка описує взаємодію видів типу хижак–жертва. Дослідженню систем вигляду (5.141) з залежними від часу коефіцієнтами присвячено багато

робіт (див., наприклад, [Nie L., Teng Z., Hu L., Peng J., *Comput. Math. Appl.* **58** (2009), 436–448] та цитовану там літературу).

Компоненти розв’язку (5.140) при коректно вибраних значеннях сталих є невід’ємними та обмеженими в заданій області. Зокрема, функції U та V розв’язку (5.140) з $k < -\frac{1}{\gamma}$ є невід’ємними та обмеженими в області $\left\{ (t, x) \in \left(\frac{1}{6d_0}, t_0 \right) \times (x_0, 1) \right\}$, де $t_0 > \frac{1}{6d_0}$ та $x_0 > 0$ — довільні сталі. Таким чином, розв’язок (5.140) може описувати процес взаємодії двох видів типу хижак–жертва, оскільки задовольняє біологічно вмотивовані обмеження.

5.7.4 Симетрії Лі нелінійної трикомпонентної системи еволюційних рівнянь

В роботі [Aoki K., Shida M., Shigesada N., *Theor. Popul. Biol.* **50** (1996), 1–17] запропоновано систему нелінійних еволюційних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} F_t &= DF_{xx} + r_f F (1 - (F + C)/K), \\ C_t &= DC_{xx} + r_c C (1 - (F + C)/K) + e(F + C)H, \\ H_t &= DH_{xx} + r_h H (1 - H/L) - e(F + C)H, \end{aligned} \quad (5.142)$$

для опису процесу взаємодії первісних фермерів з мисливцями-збирачами. У системі (5.142), $F(t, x)$, $C(t, x)$ та $H(t, x)$ — довільні гладкі функції, всі інші параметри системи є довільними додатними сталими. Функція $F(t, x)$ — концентрація популяції первісних фермерів, $C(t, x)$ — концентрація популяції оцілівізованих фермерів (converted farmers), $H(t, x)$ — концентрація популяції мисливців-збирачів. Стала D є коефіцієнтом дифузії; сталі r_f , r_c , та r_h — коефіцієнти, що відповідають за природній приріст; K та L — коефіцієнти, що відповідають за максимальну кількість фермерів та мисливців-збирачів, які проживають на обмеженій території; коефіцієнт e відповідає за перехід мисливців-збирачів до фермерів.

Систему (5.142) можна узагальнити, припустивши, що коефіцієнти дифузії є різними для трьох популяцій (дане припущення є природнім),

та ввівши нові параметри e_1 і e_2 замість сталої e . Отримана система (див. (1) [80]) після спрощення має вигляд

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + u(1 - u - a_1 v), \\ v_t &= d_2 v_{xx} + a_2 v(1 - u - a_1 v) + uw + a_1 vw, \\ w_t &= d_3 w_{xx} + a_3 w(1 - w) - a_4 uw - a_5 vw. \end{aligned} \quad (5.143)$$

Для позначення систем вигляду (5.143) вживатимемо позначення ФМЗ (фермери–мисливці–збирачі). Дослідженню системи ФМЗ (5.143) присвячено роботу [80]. Зокрема, в статті [80] було здійснено опис симетрії Лі системи ФМЗ, побудовано її точні розв’язку (в тому числі плоскохвильові) та досліджено їх властивості. В системі (5.143), параметри d_1 , d_2 , d_3 та a_4 є додатними числами, всі інші параметри припускаються невід’ємними. Шляхом симетрійного аналізу системи (5.143), отримано теорему:

Теорема 5.26. *Система ФМЗ (5.143) допускає нетривіальну алгебру Лі лише у випадках, представлених в таблиці 5.13.*

Для побудови точних розв’язків системи ФМЗ використаємо результат з випадку 4 таблиці 5.13. Отже, маємо систему

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(1 - u - a_1 v), \quad a_1 \neq 0, \\ v_t &= v_{xx} + v(1 - u - a_1 v) + uw + a_1 vw, \\ w_t &= dw_{xx} + a_3 w(1 - w) - a_4 uw - a_1 a_4 vw, \end{aligned} \quad (5.144)$$

та її МАІ $\langle \partial_t, \partial_x, -a_1 u \partial_u + u \partial_v \rangle$. Розгляне дві суттєво різні лінійні комбінації операторів симетрії Лі системи (5.144):

$$X = \partial_t + \alpha \partial_x - \beta a_1 u \partial_u + \beta u \partial_v \quad (5.145)$$

та

$$X = \partial_x - \beta a_1 u \partial_u + \beta u \partial_v, \quad (5.146)$$

де α та $\beta \neq 0$ — довільні сталі.

Табл. 5.13: Симетрії Лі системи ФМЗ (5.143)

Реакційні доданки	Обмеження	Базисні оператори МАІ
1. $u(1-u)$ $a_2v(1-u) + uw$ $-a_4uw$	$a_2 \neq 0$	$\partial_t, \partial_x, I = v\partial_v + w\partial_w$
2. $u(1-u)$ uw $a_3w(1-w) - a_4uw$	$a_3 \neq 0$	$\partial_t, \partial_x,$ $X^\infty = P(t, x)\partial_v,$ $P_t = d_2P_{xx}$
3. $u(1-u)$ uw $-a_4uw$		$\partial_t, \partial_x, I, X^\infty$
4. $u(1-u-a_1v)$ $v(1-u-a_1v) + uw + a_1vw$ $a_3w(1-w) - a_4uw - a_1a_4vw$	$d_1 = d_2$ $a_1 \neq 0$	$\partial_t, \partial_x,$ $Q_1 = -a_1u\partial_u + u\partial_v$
5. $u(1-u)$ $v(1-u) + uw$ $a_3w(1-w) - a_4uw$	$d_1 = d_2$ $a_3 \neq 0$	$\partial_t, \partial_x,$ $u\partial_v, Q_2 = e^t(u-1)\partial_v$
6. $u(1-u)$ $v(1-u) + uw$ $-a_4uw$	$d_1 = d_2$	$\partial_t, \partial_x, u\partial_v, I, Q_2$
7. $u(1-u)$ $a_4v(1-u) + uw$ $-a_4uw$	$d_2 = d_3$	$\partial_t, \partial_x, e^{a_4t}w\partial_v, I$
8. $u(1-u)$ uw $-a_4uw$	$d_2 = d_3$	$\partial_t, \partial_x,$ $w\partial_v - a_4w\partial_w, I, X^\infty$

Продовження таблиці 5.13

Reaction terms	Restrictions	Lie symmetries
9. $u(1 - u - a_1v)$ $v(1 - u - a_1v) + uw + a_1vw$ $-a_4uw - a_1a_4vw$	$d_1 = d_2 = d_3$ $a_1 \neq 0$	$\partial_t, \partial_x, Q_1,$ $e^t \left(\frac{a_4-1}{a_1} u + (a_4 - 1)v + \right.$ $\left. w + \frac{1-a_4}{a_1} \right) \left(\partial_u - \frac{1}{a_1} \partial_v \right)$
10. $u(1 - u)$ $a_2v(1 - u) + uw$ $-uw$	$d_1 = d_2 = d_3$ $a_2 \neq 0, a_2 \neq 1$	$\partial_t, \partial_x, I,$ $u\partial_v + (a_2 - 1)(u - 1)\partial_w$
11. $u(1 - u)$ $v(1 - u) + uw$ $-uw$	$d_1 = d_2 = d_3$	$\partial_t, \partial_x,$ $u\partial_v, we^t\partial_v, I, Q_2$
12. $u(1 - u)$ uw $-uw$	$d_1 = d_2 = d_3$	$\partial_t, \partial_x, w\partial_v - w\partial_w,$ $u\partial_v + (1 - u)\partial_w,$ $ue^{-t}(\partial_v - \partial_w), I, X^\infty$

Анзац, який відповідає оператору (5.145), має вигляд

$$\begin{aligned} u &= e^{-\beta a_1 t} U(\omega), \quad \omega = x - \alpha t, \\ v &= V(\omega) - \frac{1}{a_1} e^{-\beta a_1 t} U(\omega), \\ w &= W(\omega), \end{aligned} \tag{5.147}$$

де U, V та W — нові шукані функції. Підставивши анзац (5.147) в систему (5.144), отримуємо систему ЗДР

$$\begin{aligned} U'' + \alpha U' + U(1 + a_1\beta - a_1V) &= 0, \\ V'' + \alpha V' + V(1 - a_1V + a_1W) &= 0, \\ dW'' + \alpha W' + a_3W(1 - W) - a_1a_4VW &= 0. \end{aligned} \tag{5.148}$$

Анзац, що відповідає оператору (5.146), і редукована система ЗДР мають вигляд

$$u = U(t)e^{-\beta a_1 x}, \quad v = V(t) - \frac{e^{-\beta a_1 x}}{a_1} U(t), \quad w = W(t) \tag{5.149}$$

та

$$\begin{aligned} U' + U(a_1V - 1 - \beta^2 a_1^2) &= 0, \\ V' + V(a_1V - a_1W - 1) &= 0, \\ W' + W(a_3W + a_1a_4V - a_3) &= 0. \end{aligned} \quad (5.150)$$

В загальному випадку проінтегрувати системи (5.148) та (5.150) не вдається. Проте ми знайшли розв'язки цих систем при виконанні додаткових припущень. Наведено деякі з них.

Система (5.144) з $d = 1$, $a_4 = 1 + a_1 + a_3$, $a_3 \neq 0$ має розв'язок

$$\begin{aligned} u &= e^{-\beta a_1 t} U(\omega), \quad \omega = x - \frac{5\sqrt{1+a_1}}{\sqrt{6}} t, \\ v &= \frac{1}{4a_1} \left(1 - \tanh \left[\frac{\sqrt{1+a_1}}{2\sqrt{6}} \omega \right] \right)^2 - \frac{1}{a_1} e^{-\beta a_1 t} U(\omega), \\ w &= 1 - \frac{1}{4} \left(1 - \tanh \frac{\sqrt{1+a_1}}{2\sqrt{6}} \omega \right)^2, \end{aligned}$$

де функція U є довільним розв'язком лінійного ЗДР

$$U'' + \alpha U' + U \left(1 + a_1 \beta - \frac{1}{4} \left(1 - \tanh \left[\frac{\sqrt{1+a_1}}{2\sqrt{6}} \omega \right] \right)^2 \right) = 0. \quad (5.151)$$

Загальний розв'язок рівняння (5.151) можна подати у вигляді лінійної комбінації гіпергеометричних функцій. Зазначимо, що розв'язок (5.151) отримано з використанням анзацу (5.147).

Розв'язок системи ФМЗ (5.144) з $a_3 = 1$, який відповідає анзацу (5.149), має вигляд

$$\begin{aligned} u &= \frac{\delta_2 \exp((1 + \beta^2 a_1^2)t - \beta a_1 x)}{(1 - \delta_1 + \delta_1 e^t)^{\frac{1+a_1}{1+a_1 a_4}}}, \\ v &= \frac{1 + a_1}{a_1(1 + a_1 a_4)} \frac{\delta_1 e^t}{1 - \delta_1 + \delta_1 e^t} - \frac{\delta_2 \exp((1 + \beta^2 a_1^2)t - \beta a_1 x)}{a_1 (1 - \delta_1 + \delta_1 e^t)^{\frac{1+a_1}{1+a_1 a_4}}}, \\ w &= \frac{1 - a_4}{1 + a_1 a_4} \frac{\delta_1 e^t}{1 - \delta_1 + \delta_1 e^t}. \end{aligned} \quad (5.152)$$

Компоненти розв'язку (5.152) є невід'ємними на інтервалі $x \in (0, +\infty)$ при виконанні обмежень

$$\beta = \sqrt{\frac{1 - a_4}{a_1(1 + a_1a_4)}}, \quad a_4 < 1, \quad \delta_1 > 1, \quad \delta_2 < \frac{1 + a_1}{1 + a_1a_4},$$

та мають таку асимптотичну поведінку

$$u \rightarrow \delta_2 \delta_1^{-\frac{1+a_1}{1+a_1a_4}} e^{-\beta a_1 x}, \quad v \rightarrow \frac{1 + a_1}{a_1(1 + a_1a_4)} - \frac{\delta_2}{a_1} \delta_1^{-\frac{1+a_1}{1+a_1a_4}} e^{-\beta a_1 x},$$

$$w \rightarrow \frac{1 - a_4}{1 + a_1a_4}$$

при $t \rightarrow \infty$.

Таким чином, розв'язок (5.152) описує випадок, коли всі три популяції співіснують, при цьому, розподіл двох популяцій є неоднорідним.

5.8 Симетрії Лі та точні розв'язки деяких нелінійних еволюційних систем та рівнянь з двома просторовими змінними

5.8.1 Симетрії Лі та точні розв'язки деяких крайових задач базованих на рівняннях хемотаксису

В 1970 році була опублікована робота [Keller E.F., Segel L.A., *J. Theor. Biol.* **26** (1970), 399–415], яка поклала початок активному дослідженню нового типу нелінійних систем ДРЧП в математиці. Ці системи в літературі називаються системами хемотаксису або моделями Келер–Зеґель (за прізвищами авторів). На сьогоднішній день є велика кількість таких систем. Тут ми розглядаємо один з частинних випадків, який розглядався в низці робіт починаючи з роботи [Nagai T., *Adv. Math. Sci. Appl.* **5** (1995), 581–601]

$$N_t(t, x, y) = d_1 \Delta N(t, x, y) - \chi_0 \nabla \cdot (N(t, x, y) \nabla P(t, x, y)),$$

$$0 = \Delta P(t, x, y) + \alpha N(t, x, y) - \beta P(t, x, y).$$

Тут $N(t, x, y)$ та $P(t, x, y)$ є шуканими функціями (щільність або густини популяцій, клітин, хімічних речовин тощо), d_1 — відомий додатній коефіцієнти дифузії, α та β характеризують кінетику процесу (наприклад, хімічної реакції), χ_0 — коефіцієнт хемотаксичної чутливості (часто — це додатна стала, але може бути ненульова функція). Наголосимо, що такі системи не мають лінійних аналогів, оскільки $\chi_0 \neq 0$, також введено стандартні позначення $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$.

Можна легко показати, що масштабними перетвореннями ця система зводиться до системи, яка містить лише один параметр. Більше того, якщо $\beta d_1 / \alpha = \varepsilon \ll 1$, то членом βP можна знехтувати. У такому випадку отримана нелінійна система

$$\begin{aligned}\rho_t(t, x, y) &= \Delta \rho(t, x, y) - \nabla(\rho(t, x, y) \nabla S(t, x, y)), \\ 0 &= \Delta S(t, x, y) + \rho(t, x, y)\end{aligned}$$

допускає нескінченно-вимірну алгебру Лі породжену операторами

$$\begin{aligned}G_1^\infty &= f_1(t) \frac{\partial}{\partial x} + x f_1'(t) \frac{\partial}{\partial S}, & G_2^\infty &= f_2(t) \frac{\partial}{\partial y} + y f_2'(t) \frac{\partial}{\partial S}, \\ X_S^\infty &= g(t) \frac{\partial}{\partial S}, & P_t &= \frac{\partial}{\partial t}, & J_{12} &= -x \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial x}, \\ D &= 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} - 2\rho \frac{\partial}{\partial \rho},\end{aligned}$$

де $f_1(t)$, $f_2(t)$ та $g(t)$ — довільні гладкі функції.

В роботі [29], беручи все це до уваги, ми розглянули відповідні початкові та крайові задачі, для яких встановили умови, коли ці задачі допускають нескінченно-вимірні максимальні алгебри інваріантності (MAI).

Теорема 5.27. *Всеможливі MAI, які допускає задача Коші*

$$\begin{aligned}\rho_t &= \Delta \rho - \nabla(\rho \nabla S), \\ 0 &= \Delta S + \rho, \\ t = 0: \quad S &= \phi, \quad \rho = -\phi_{xx}(x),\end{aligned}\tag{5.153}$$

Табл. 5.14: МАІ задачі Коші (5.153).

$\phi(x)$		МАІ
1	$\forall$	$G_1^\infty, \quad f_1(0) = f_1'(0) = 0,$ $G_2^\infty, \quad f_2'(0) = 0,$ $X_S^\infty, \quad g(0) = 0$
2	0	$G_1^\infty, \quad f_1'(0) = 0,$ $G_2^\infty, \quad f_2'(0) = 0,$ $X_S^\infty, \quad g(0) = 0,$ J_{12}, D
3	$\lambda_1 x,$ $\lambda_1 \neq 0$	$G_1^\infty + b_6 D, \quad f_1(0) = 0, f_1'(0) = b_6 \lambda_1,$ $G_2^\infty + b_5 J_{12}, \quad f_2'(0) = b_5 \lambda_1,$ $b_1 G_1^\infty + X_S^\infty + b_1 a_6 D, \quad g(0) = b_1 \lambda_1 f_1(0),$ $f_1(0) \neq 0, f_1'(0) = a_6 \lambda_1$
4	$\lambda_2 x^2 + \lambda_0,$ $\lambda_2 \neq 0$	$G_1^\infty, \quad f_1'(0) = 2\lambda_2 f_1(0),$ $G_2^\infty, \quad f_2'(0) = 0,$ $X_S^\infty, \quad g(0) = 0$

в залежності від вигляду функції $\phi(x)$ (з точністю до зсувів відносно змінної x) наведені у таблиці 5.14.

Очевидно, що у випадку $f_2(t) = \text{const} \neq 0$, тобто $G_2^\infty = \partial_y$, задача Коші (5.153) редукується до одновимірної

$$\begin{aligned}
 \rho_t &= \rho_{xx} - (\rho S_x)_x, \\
 0 &= S_{xx} + \rho, \\
 t = 0: \quad \rho &= -\phi_{xx}(x), S = \phi(x).
 \end{aligned} \tag{5.154}$$

Для цієї задачі було встановлено аналог теореми про роз'язок задачі Коші для класичного лінійного рівняння дифузії.

Теорема 5.28. *Точний роз'язок задачі Коші (5.154) у випадку двічі диференційованої функції $\phi(x)$ з властивістю $\phi(x) = o(x^2)$, $x \rightarrow \infty$ має*

вигляд

$$\begin{aligned}
S(t, x) &= -2 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) e^{-\frac{(x-j(t)-\xi)^2}{4t}} d\xi \right) \\
&\quad + x \cdot \int_0^t \theta(\tau) d\tau + A(t), \\
\rho(t, x) &= -\frac{1}{t} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p'(\xi)(x-j(t)-\xi) e^{-\frac{(x-j(t)-\xi)^2}{4t}} d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) e^{-\frac{(x-j(t)-\xi)^2}{4t}} d\xi} \\
&\quad - \frac{1}{2t^2} \cdot \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)(x-j(t)-\xi) e^{-\frac{(x-j(t)-\xi)^2}{4t}} d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) e^{-\frac{(x-j(t)-\xi)^2}{4t}} d\xi} \right)^2,
\end{aligned}$$

$$de p(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\phi(\xi)}, A(0) = 0.$$

Оскільки наведений вище розв'язок містить функції $\theta(t)$ та $A(t)$, то виникає питання щодо його єдиності. Виявляється, що для цього достатньо накласти біологічно вмотивовані умови про його обмеженість та умову $\int_{-\infty}^{+\infty} |S(t, x)| dx < 0$ при $\forall t > 0$, яка означає обмеженість ресурсів. У цьому випадку розв'язок стає єдиним

$$\begin{aligned}
S(t, x) &= -2 \ln \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \right), \\
\rho(t, x) &= -\frac{1}{t} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p'(\xi)(x-\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi} \\
&\quad - \frac{1}{2t^2} \cdot \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi)(x-\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi} \right)^2.
\end{aligned}$$

У роботі [29] наведено приклад початкової умови, коли вищенаведені формули ведуть до розв'язку в елементарних функціях та проведено аналіз цього розв'язку. Також розглянуто випадок більш складної редукції задачі Коші (5.153).

Розгляньмо задачу Ноймана в області $\Omega = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, 0 < y < \pi\}$ вигляду

$$\rho_t(t, x, y) = \Delta \rho(t, x, y) - \nabla(\rho(t, x, y) \nabla S(t, x, y)),$$

$$\begin{aligned}
0 &= \Delta S(t, x, y) + \rho(t, x, y), \\
t = 0: \quad S &= \varphi(x, y), \quad \rho = -\Delta \varphi(x, y), \\
y = 0: \quad \rho_y &= q_1(t), \quad S_y = q_2(t), \\
y = \pi: \quad \rho_y &= 0, \quad S_y = 0,
\end{aligned} \tag{5.155}$$

де $\varphi(x, y)$, $q_1(t)$ та $q_2(t)$ — довільні гладкі функції.

Теорема 5.29. *МАІ задачі Ноймана (5.155) не залежить від вигляду функцій $q_1(t)$ та $q_2(t)$. Якщо початковий профіль $\varphi(x, y)$ є довільною гладкою функцією, то задача допускає нескінченно-вимірну МАІ порожену операторами*

$$G_1^\infty = f_1(t) \frac{\partial}{\partial x} + x f_1'(t) \frac{\partial}{\partial S}, \quad X_S^\infty = g(t) \frac{\partial}{\partial S}, \tag{5.156}$$

де $f_1(0) = f_1'(0) = 0$ та $g(0) = 0$. Якщо початковий профіль

$$\varphi(x, y) = \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x + \mu(y),$$

де $\mu(y)$ — довільна гладка функція, то вищенаведена алгебра Лі розширяється оператором

$$G_1^\infty + b X_S^\infty,$$

де $\frac{f_1'(0)}{2f_1(0)} = \lambda_2$, $b \frac{g(0)}{f_1(0)} = \lambda_1$, $f_1(0) \neq 0$.

Не існує інших виглядів функції $\varphi(x, y)$, які ведуть до розширення МАІ (5.156) задачі Ноймана (5.155).

У роботі [29] також розглянуто задачу Ноймана на крузі та кільці, які є типовими прикладами обмеженої області, та зовнішнього круга. Встановлено, що для всіх цих областей ця задача при довільній функції $\varphi(x, y)$ допускає нескінченно-вимірну МАІ. Також ідентифіковане особливий випадок

$$\varphi(x, y) = \psi(x^2 + y^2) + h_0 \arctan \frac{y}{x},$$

коли відповідна МАІ допускає подальше розширення. Для доведення відповідних теорем було використано критерій інваріантності запропонований в роботі [Cherniha R., King J.R., *Symmetry* **7** (2015), 1410–1435].

Використовуючи знайдені симетрії Лі наведено приклади редукції задач Ноймана та точних розв’язків цих задач для окремих випадків крайових умов.

5.8.2 Симетрії Лі та точні розв’язки для рівнянь з градієнтною дифузиею

У відомій роботі [Perona P, Malik J., *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **12** (1990), 629–639] було запропоновано математичну модель, яка моделює процес розпізнавання іміджів (образів). Модель базується на $(1+2)$ -му нелінійному рівнянні дифузії з коефіцієнтом дифузії, який залежить від градієнту шуканої функції. У роботі [15] нами розглянуто клас рівнянь з градієнтною дифузиею

$$u_t = \nabla \cdot (D(\Omega) \nabla u) + Q(u), \quad (5.157)$$

$\Omega = |\nabla u|^2$, а D, Q є довільними гладкими функціями. Зокрема у випадку $Q = 0$ та

$$D(\Omega) = \exp\left(-\frac{\Omega}{D_0}\right), \quad D(\Omega) = \left(1 + \frac{\Omega}{D_0}\right)^{-1}$$

отримуємо рівняння з цитованої вище статті (тут D_0 — додатна стала). Зауважимо, що модель є суттєво двовимірною за просторовими змінними, оскільки будь-який образ є щонайменше двовимірний.

Рівняння (5.157) містить довільні функції (D та Q), то для вичерпного опису симетрій Лі необхідно розв’язати складну класифікаційну задачу. З цією метою було спочатку встановлено групу перетворень еквівалентності $\mathcal{E}$ (див. теорему 4 в [15]). Зауважимо, що відразу було встановлено, що випадок рівнянь вигляду (5.157) при $Q(u) = \text{const}$ є особливим, тому розглядався окремо. Використовуючи ці перетворення та відомий алгоритм для розв’язання таких задач, було доведено такі теореми.

Табл. 5.15: МАІ рівнянь вигляду (5.157): $D \neq \Omega^{-1}$. Кожна МАІ породжена операторами основної алгебри $ALie_4$ та поданими в останній колонці таблиці.

	$D(\Omega)$	$Q(u)$	Обмеження	Ліівські оператори
1.	$\forall$	u^{-1}		$X_5 = 2t\partial_t + x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + u\partial_u$
2.	$\forall$	u		$X_5 = e^t\partial_u$
3.	Ω^k	$\varepsilon_1 e^{-u}$		$X_5 = 2(k+1)t\partial_t + x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + 2(k+1)\partial_u$
4.	Ω^k	$\varepsilon_1 u^m$	$m \neq 0, 1, 2$	$X_5 = 2t\partial_t + \frac{m-2k-1}{m-2k-1+k(m+1)} \times (x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}) - \frac{2(k+1)}{m-2k-1+k(m+1)} u\partial_u$
5.	Ω^k	$\varepsilon_1 u^{2k+1} + \varepsilon_2 u$	$k \neq -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$X_5 = e^{-2k\varepsilon_2 t}(\partial_t + \varepsilon_2 u\partial_u)$
6.	$\Omega^{\frac{1}{2}}$	$\varepsilon_1 u^2$		$X_5 = t\partial_t - u\partial_u, X_6 = t^2\partial_t - (2tu + \varepsilon_1)\partial_u$
7.	$\Omega^{\frac{1}{2}}$	$\varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2$	$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = -1$	$X_5 = e^{-2t}(\partial_t + 2(u - \varepsilon_1)\partial_u),$ $X_6 = e^{2t}(\partial_t - 2(u + \varepsilon_1)\partial_u)$
8.	$\Omega^{\frac{1}{2}}$	$\varepsilon_1 u^2 + \varepsilon_2$	$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$	$X_5 = \cos(2t)\partial_t + 2(\sin(2t)u + \varepsilon_1 \cos(2t))\partial_u,$ $X_6 = \sin(2t)\partial_t - 2(\cos(2t)u - \varepsilon_1 \sin(2t))\partial_u$
9.	Ω^k	$\varepsilon_2 u$		$X_5 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + (1 + \frac{1}{k})u\partial_u,$ $X_6 = e^{-2k\varepsilon_2 t}(\partial_t + \varepsilon_2 u\partial_u), X_7 = e^{\varepsilon_2 t}\partial_u$

Теорема 5.30. Основна алгебра інваріантності для класу рівнянь (5.157) при $Q(u) \neq \text{const}$ є 4-вимірною алгеброю Лі з базовими операторами

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_{x_1}, \quad X_3 = \partial_{x_2}, \quad X_4 = x_2\partial_{x_1} - x_1\partial_{x_2}.$$

Теорема 5.31. Всі максимальні алгебри інваріантності (розмірності 5 і вище) рівнянь вигляду (5.157) (при $Q(u) \neq \text{const}$) та відповідні пари функцій (D, Q) наведені в таблицях 5.15 та 5.16. Кожне інше рівняння з нетривіальною симетрією Лі за допомогою відповідних перетворень з $\mathcal{E}$ зводиться до одного з поданих у цих таблицях. У таблицях введено позначення $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1$ та $k \neq 0, \lambda \neq 0, m$ для довільних сталих.

Зауваження. Можна помітити, що перетворення

$$\tau = \frac{1}{2\varepsilon_2 k} e^{2\varepsilon_2 k t}, \quad x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad w = e^{-\varepsilon_2 t} u, \quad (5.158)$$

Табл. 5.16: МАІ рівнянь вигляду (5.157): $D = \Omega^{-1}$. Кожна МАІ породжена операторами основної алгебри $ALie_4$ та поданими в останній колонці таблиці.

	$Q(u)$	МАІ
1.	$\forall$	$X_5 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}$
2.	$\lambda u^{-1} + \varepsilon_2 u$	$X_5 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}, X_6 = e^{2\varepsilon_2 t}(\partial_t + \varepsilon_2 u\partial_u)$
3.	λu^{-1}	$X_5 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}, X_6 = 2t\partial_t + u\partial_u$
4.	λu	$X_5 = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}$ $X_6 = e^{2\lambda t}(\partial_t + \lambda u\partial_u), X_7 = e^{\lambda t}\partial_u$

яке не належить до групи $\mathcal{E}$, зводить рівняння (5.157) з нелінійностями поданими у випадках 5 та 9 відповідно до рівняння, що виникає у випадку 4 таблиці 5.15 при $m = 2k + 1$ та до рівняння з нульовим реактивним членом $w_\tau = \nabla \cdot (|\nabla w|^{2k} \nabla w)$. Також локальна заміна (5.158) при $k = -1$ зводить рівняння (5.157) з нелінійностями поданими у випадках 2 і 4 останньої таблиці відповідно до рівняння, що виникає у випадку 3 та до рівняння з нульовим реактивним членом $w_\tau = \nabla \cdot (|\nabla w|^{-2} \nabla w)$.

В роботі також було окремо розглянуто рівняння (5.157) при $Q(u) = 0$, яке є найважливішим з точки зору застосувань. Зокрема було встановлено, що випадок рівняння Перона–Маліка для моделювання процесів розпізнавання образів веде до 6-вимірної МАІ з базовими операторами

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 = \partial_u, X_6 = 2t\partial_t + x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + u\partial_u.$$

Також окремо розглянуто рівняння

$$u_t = \nabla \cdot (|\nabla u|^{2k} \nabla u), \quad (5.159)$$

яке також важливе для застосувань (зокрема, при $k = -1$ є граничним випадком рівняння Перона–Маліка). Для рівняння (5.159) побудовано низку точних роз’язків (радіально-симетричних) шляхом застосування знайдених симетрій Лі. Наприклад, при довільному $k \neq -1, -1/3$ рів-

няння (5.159) має розв'язок

$$u = \int \left(\frac{-k\omega^2 + C_1\omega^{-2k/(2k+1)}}{2(k+1)(3k+1)} \right)^{\frac{1}{2k}} d\omega + C_2, \quad \omega = t^{-\frac{1}{2(k+1)}} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Очевидно, що інтеграл у правій частині може бути явно обчислений при сталій $C_1 = 0$, а у випадку $C_1 \neq 0$ тоді, коли k набуває певних значень. Зокрема, можна ідентифікувати відомі в літературі розв'язки при певних значеннях $k \neq -1, -1/3$.

Зауважимо, що при $k = -1/3$ нами встановлено, що рівняння (5.159) має розв'язок з іншою структурою

$$u = \pm \frac{2}{\sqrt{C_2 e^{-\frac{2t}{3\lambda}} - 2(3\lambda)^{-3}(x_1^2 + x_2^2)^2}}.$$

Також встановлено цікавий факт для цього рівняння при $k = -1$, тобто

$$u_t = \nabla \cdot (|\nabla u|^{-2} \nabla u). \quad (5.160)$$

Отже, з будь-якого розв'язку лінійного $(1+1)$ -вимірному рівняння теплопровідності можна побудувати радіально-симетричний розв'язок $u(t, r)$ (тут $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$) рівняння (5.160) (принаймні у неявному вигляді).

6 Теорія алгебр Лі

6.1 Реалізації, деформації та диференціальні інваріанти алгебр Галілея

Позначимо через $\mathfrak{g}$ n -вимірну алгебру Лі над полем $\mathbb{R}$. Відкриту множину в $\mathbb{R}^m$ позначимо як M , а алгебру Лі векторних полів, що діють на цій множині позначимо $\text{Vect}(M)$. У координатній формі векторні поля мають вигляд лінійних диференціальних операторів першого порядку з аналітичними коефіцієнтами, а добуток Лі задається їх комутатором. Повну групу автоморфізмів алгебри $\mathfrak{g}$ позначимо $\text{Aut}(\mathfrak{g})$, а внутрішні автоморфізми позначимо $\text{Int}(\mathfrak{g})$.

На відміну від зображення алгебри Лі, поняття реалізації визначається наступним чином.

Реалізацією алгебри Лі $\mathfrak{g}$ векторними полями на M називається гомоморфізм $R: \mathfrak{g} \rightarrow \text{Vect}(M)$. Реалізація називається *точною*, якщо $\ker R = \{0\}$.

Зазвичай прямий метод класифікації реалізацій алгебри Лі вимагає розв'язання складних нелінійних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними та вивчення нееквівалентності отриманих реалізацій.

Для знаходження реалізацій алгебри Галілея було застосовано принципово інший алгебричний підхід запропонований Широковим з співавторами [*SIGMA* **11** (2015), 066, 17 pp.], що оснований на відповідності підалгебри та транзитивної реалізації даної алгебри Лі.

Коефіцієнти $\xi_k^i(x)$ *породжуючої* реалізації алгебри Лі, що відповідає регулярній дії відповідної локальної групи Лі відновлюються з компонент диференціальних 1-форм використовуючи дуальність векторних полів та диференціальних форм $\omega_i^j(x)\xi_k^i(x) = \delta_k^j$.

В свою чергу, компоненти диференціальних 1-форм $\omega_i^j(x)$ обчислю-

ються наступним чином:

$$\omega_i^j(x) = (A^{(1)}(x^1)A^{(2)}(x^2) \cdots A^{(i-1)}(x^{i-1}))_i^j, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad \omega_1^j = \delta_1^j.$$

Необхідні матриці $A^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, n$ є розв'язками системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{A}^{(l)}(t) = -\text{ade}_l A^{(l)}(t), \\ A^{(l)}(0) = I. \end{cases}$$

Решта нееквівалентних реалізацій заданої алгебри Лі не відповідають регулярній дії локальної групи та будуються за допомогою проєкції породжуючої реалізації на підпростір координат, які відповідають лінійному доповненню до деякої $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ -нееквівалентної підалгебри.

Позначимо через $\mathfrak{h} = \langle e_{m+1}, \dots, e_n \rangle$ деяку підалгебру алгебри $\mathfrak{g} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$, та комплементарний простір до неї $\{e_1, \dots, e_m\}$, тоді для кожного $i = 1, \dots, n$ ми отримаємо базисні елементи у вигляді

$$\begin{aligned} e_i = & \xi_i^1(x_1, x_2, \dots, x_m) \partial_1 + \xi_i^2(x_1, x_2, \dots, x_m) \partial_2 + \cdots \\ & + \xi_i^m(x_1, x_2, \dots, x_m) \partial_m + \xi_i^{m+1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \partial_{m+1} \\ & + \xi_i^{m+2}(x_1, x_2, \dots, x_n) \partial_{m+2} + \cdots + \xi_i^n(x_1, x_2, \dots, x_n) \partial_n. \end{aligned}$$

Реалізація спроектована на простір координат $x_1, x_2, \dots, x_m$ добре визначена та має вигляд

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\mathfrak{h}}(e_i) = & \xi_i^1(x_1, x_2, \dots, x_m) \partial_1 + \xi_i^2(x_1, x_2, \dots, x_m) \partial_2 + \cdots \\ & + \xi_i^m(x_1, x_2, \dots, x_m) \partial_m. \end{aligned}$$

Кількість необхідних змінних $m = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{h})$ співпадає з розмірністю простору лінійного доповнення до $\mathfrak{h}$ а спроектована реалізація $R(\mathfrak{h})$ називається *реалізацією, що відповідає підалгебрі $\mathfrak{h}$* . Зокрема, це означає, що породжуюча реалізація відповідає нульовій підалгебрі $\mathfrak{h}_0 = \langle 0 \rangle$ та $R(\mathfrak{h}_0)$ завжди реалізується за допомогою $n = \dim(\mathfrak{g})$ змінних. Реалізації, що відповідають нетранзитивній дії групи Лі будуються

з транзитивних методом заміни довільного параметра, що параметризує відповідну підалгебру, довільною функцією додаткової змінної.

Розглянемо повну алгебру Галілея, що задається комутаційними співвідношеннями: $[J_{ij}, J_{kl}] = \delta_{il}J_{jk} + \delta_{jk}J_{il} - \delta_{ik}J_{jl} - \delta_{jl}J_{ik}$, $i, j, k, l = 1, 2, \dots, n$; $[P_i, J_{jk}] = \delta_{ij}P_k - \delta_{ik}P_j$; $[T, G_i] = -P_i$; $[G_i, J_{jk}] = \delta_{ij}G_k - \delta_{ik}G_j$; $[D, G_i] = G_i$; $[D, P_i] = -P_i$; $[D, T] = -2T$; $[S, P_i] = G_i$; $[D, S] = 2S$; $[T, S] = D$; $[Z, G_i] = -G_i$; $[Z, P_i] = -P_i$; $[G_i, P_j] = \delta_{ij}M$; $[Z, M] = -2M$.

Найменшими можливими алгебрами Галілея є наступні:

- тривимірна алгебра Лі редукованої класичної групи Галілея одновимірного простору $A\bar{G}_1(1)$;
- чотиривимірна алгебра Лі класичної групи Галілея $AG_1(1)$ з оператором маси M ;
- чотиривимірна алгебра Лі редукованої розширеної групи Галілея одновимірного простору $A\bar{G}_2(1)$.

Наступні підалгебри алгебри $A\bar{G}_1(1)$ нееквівалентні відносно внутрішніх автоморфізмів: $\langle 0 \rangle$, $\langle P \rangle$, $\langle G \rangle$, $\langle T \rangle$, $\langle T + \alpha G \rangle$, $\langle P, G \rangle$, $\langle P, T \rangle$, $\langle P, T + \alpha G \rangle$, $\langle P, G, T \rangle$ ($\alpha > 0$).

Зовнішній автоморфізм $\tilde{G} = T$, $\tilde{T} = G$, $\tilde{P} = -P$, задає еквівалентність пар $(\langle T \rangle, \langle G \rangle)$ і $(\langle P, T \rangle, \langle P, G \rangle)$.

В таблиці 6.1 наведено реалізації $R_{\mathfrak{h}_{k,p}}$ алгебри $A\bar{G}_1(1)$, що відповідають підалгебрам $\mathfrak{h}_{k,p}$, разом з відповідними комплементарними просторами.

Оскільки підалгебри $h_{1,2}^\alpha$ та h_2^α параметризовані, то ми маємо дві додаткові нетранзитивні реалізації

$$R_{\mathfrak{h}_{1,2}^{x_3}}: P = \partial_1, \quad G = \partial_2, \quad T = x_2\partial_1 - x_3\partial_2;$$

$$R_{\mathfrak{h}_2^{x_2}}: P = 0, \quad G = \partial_1, \quad T = -x_2\partial_1.$$

Аналогічним чином будуюмо реалізації решти алгебр Галілея, а саме чотиривимірних та п'ятивимірних. Результат класифікацій реалізацій чотиривимірних алгебр Лі наведено у таблицях 6.2 та 6.3. Класифікація реалізацій п'ятивимірних алгебр Галілея наведена у роботі [8].

Комплементарний базис	Реалізація
$\{P, T, G\}$	$R(\mathfrak{h}_0): P = \partial_1, G = -x_2\partial_1 + \partial_3, T = \partial_2$
$\{G, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.1}}: P = 0, G = \partial_1, T = \partial_2$
$\{P, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.2}^\alpha}: P = \partial_1, G = \partial_2, T = x_2\partial_1 - \alpha\partial_2$
	$R_{\mathfrak{h}_{1.2}^{x_3}}: P = \partial_1, G = \partial_2, T = x_2\partial_1 - x_3\partial_2$
$\{G\}$	$R_{\mathfrak{h}_2^\alpha}: P = 0, G = \partial_1, T = -\alpha\partial_1$
	$R_{\mathfrak{h}_2^{x_2}}: P = 0, G = \partial_1, T = -x_2\partial_1$

Табл. 6.1: Реалізації алгебри $A\bar{G}_1(1)$.

Деформації алгебр Лі виникають в математичних теоріях коли необхідна класифікація неізоморфних структур або введення аналітичної структури на многовиді таких структур. У фізиці деформації застосовуються для квантування або об'єднання теорій з різними симетріями в одну модель.

Використовуємо поняття однопараметричної деформації введене Герстенхабером у 1964 році. Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$ над векторним простором V , її деформацією є однопараметрична сім'я алгебр Лі $\mathfrak{g}_t = (V, [\cdot, \cdot]_t)$, $t \in \mathbb{R}$, де $[x, y]_t = [x, y] + t\varphi_1(x, y) + t^2\varphi_2(x, y) + \dots$, $\varphi_i: V \times V \rightarrow V$ — білінійне, антисиметричне та задовольняє тотожності Якобі.

Задача побудови всіх можливих деформацій заданої алгебри Лі вимагає вивчення відповідної алгебри когомологій. Але для алгебри Галілея цього можна уникнути скориставшись ізоморфізмом алгебр Галілея та відомих низькорозмірних алгебр, а також відовими контракціями низькорозмірних алгебр і алгебр Галілея та Пуанкаре.

Використовуючи контракцію Іньюн–Вігнера з алгебри $A_{3.4}^\alpha$ до $A_{3.1}$ задану матрицею $\begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$, де q — параметр контракції, ми можемо отримати деформацію алгебри Галілея $A\bar{G}_1^q(1) = \langle P, G, T \rangle$ з новим q -параметризованим добутком $[\cdot, \cdot]_q$ $[P, T]_q = qP$, $[G, T]_q = P + \alpha qG$, $q \in \mathbb{R}$.

Аналогічно будується деформація $A\bar{G}_1^{\tilde{q}}(1)$ з добутком $[\cdot, \cdot]_{\tilde{q}}$ визначе-

Комплементарний базис	Реалізація
--------------------------	------------

$\{M, P, T, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_0}: M = \partial_1, P = -\partial_2, T = \partial_3, G = x_2\partial_1 + x_3\partial_2 + \partial_4$
$\{M, T, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.1}}: M = \partial_1, P = x_3\partial_1, T = \partial_2, G = -x_2x_3\partial_1 + \partial_3$
$\{M, P, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.2}^\alpha}: M = \partial_1, P = \partial_2, T = \partial_3, G = -x_2\partial_1 - x_3\partial_2 - \alpha\partial_3$
	$R_{\mathfrak{h}_{1.2}^{x_4}}: M = \partial_1, P = \partial_2, T = \partial_3, G = -x_2\partial_1 - x_3\partial_2 - x_4\partial_3$
$\{M, P, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.3}^\beta}: M = \partial_1, P = -\partial_2, T = -(\frac{1}{2}x_3^2 + \beta)\partial_1 - x_3\partial_2, G = x_2\partial_1 + \partial_3$
	$R_{\mathfrak{h}_{1.3}^{x_4}}: M = \partial_1, P = -\partial_2, T = -(\frac{1}{2}x_3^2 + x_4)\partial_1 - x_3\partial_2, G = x_2\partial_1 + \partial_3$
$\{P, T, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.4}}: M = 0, P = -\partial_1, T = \partial_2, G = x_2\partial_1 + \partial_3$
$\{T, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.1}}: M = 0, P = 0, T = \partial_1, G = \partial_2$
$\{P, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.2}}: M = 0, P = -\partial_1, T = \partial_2, G = x_2\partial_1$
$\{P, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.3}^\alpha}: M = 0, P = -\partial_1, T = -x_2\partial_1 - \alpha\partial_2, G = \partial_2$
	$R_{\mathfrak{h}_{2.3}^{x_3}}: M = 0, P = -\partial_1, T = -x_2\partial_1 - x_3\partial_2, G = \partial_2$
$\{M, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.4}^\beta}: M = \partial_1, P = x_2\partial_1, T = (\frac{1}{2}x_2^2 - \beta)\partial_1, G = \partial_2$
	$R_{\mathfrak{h}_{2.4}^{x_3}}: M = \partial_1, P = x_2\partial_1, T = (\frac{1}{2}x_2^2 - x_3)\partial_1, G = \partial_2$
$\{T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.1}}: M = 0, P = 0, T = \partial_1, G = 0$
$\{G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.2}^\alpha}: M = 0, P = 0, T = -\alpha\partial_1, G = \partial_1$
	$R_{\mathfrak{h}_{3.2}^{x_2}}: M = 0, P = 0, T = -x_2\partial_1, G = \partial_1$

Табл. 6.2: Реалізації класичної алгебри Галілея $AG_1(1)$.

ним співвідношеннями $[P, G]_{\tilde{q}} = -2\tilde{q}G$, $[P, T]_{\tilde{q}} = 2\tilde{q}T$, $[G, T]_{\tilde{q}} = P$, $\tilde{q} \in \mathbb{R}$.

Використовуючи контракцію, що пов'язує пару алгебр $A_{2.1} \oplus A_1$ і $A_{3.1}$ можна побудувати деформацію $AG_1^{\tilde{q}}(1)$ алгебри Галілея $A\bar{G}_1(1)$ з $\hat{q}$ -параметризованим добутком $[\cdot, \cdot]_{\hat{q}}$, що визначається наступним чином $[P, G]_{\hat{q}} = \hat{q}P$, $[G, T]_{\hat{q}} = P$, $\hat{q} \in \mathbb{R}$.

Цей підхід та вкладення алгебр Галілея у параметризовані серії дозволив побудувати ряд нових деформацій, у тому числі деформації алгебр Галілея скінченої але не фіксованої розмірності [8].

Зауважимо, що аналізуючи отримані реалізації низькорозмірних алгебр Галілея та їх деформації було показано, що ряд фізично цікавих рівнянь та їх систем, таких як рівняння Кавахари, Кортвега де-Фріза, Бюргерса та реакції дифузії а також узагальнена система Єрмакова, за-

Комплементарний базис	Реалізація
$\{P, T, G, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_0}: P = \partial_1, T = \partial_2, G = -x_2\partial_1 + \partial_3, D = x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 - x_3\partial_3 + \partial_4$
$\{T, G, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.1}}: P = 0, T = \partial_1, G = \partial_2, D = 2x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + \partial_3$
$\{P, G, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.2}}: P = \partial_1, T = x_2\partial_1, G = \partial_2, D = x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + \partial_3$
$\{P, T, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.3}}: P = \partial_1, T = \partial_2, G = -x_2\partial_1, D = x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 + \partial_3$
$\{P, T, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.4}}: P = \partial_1, T = \partial_2, G = -x_2\partial_1 + \partial_3, D = x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 - x_3\partial_3$
$\{P, T, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{1.5}}: P = \partial_1, T = \partial_2, G = -x_2\partial_1 - e^{3x_3}\partial_2, D = x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2 + \partial_3$
$\{G, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.1}}: P = 0, T = 0, G = \partial_1, D = -x_1\partial_1 + \partial_2$
$\{T, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.2}}: P = 0, T = \partial_1, G = 0, D = 2x_1\partial_1 + \partial_2$
$\{T, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.3}}: P = 0, T = \partial_1, G = \partial_2, D = 2x_1\partial_1 - x_2\partial_2$
$\{T, D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.4}}: P = 0, T = \partial_1, G = -e^{3x_2}\partial_1, D = 2x_1\partial_1 + \partial_2$
$\{P, G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.5}}: P = \partial_1, T = x_2\partial_1, G = \partial_2, D = x_1\partial_1 - x_2\partial_2$
$\{P, T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{2.6}}: P = \partial_1, T = \partial_2, G = -x_2\partial_1, D = x_1\partial_1 + 2x_2\partial_2$
$\{D\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.1}}: P = 0, T = 0, G = 0, D = \partial_1$
$\{G\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.2}}: P = 0, T = 0, G = \partial_1, D = -x_1\partial_1$
$\{T\}$	$R_{\mathfrak{h}_{3.3}}: P = 0, T = \partial_1, G = 0, D = 2x_1\partial_1$

Табл. 6.3: Реалізації редукованої розширеної алгебри Галілея $A\bar{G}_2(1)$.

дача про центральну силу та класична задача Кеплера, інваріантні відносно низько розмірних алгебр Галілея або їх деформацій, детальніша інформація міститься у роботі [8].

Розглянемо класичну редуковану алгебру Галілея $A\bar{G}_1(1)$ одновимірного простору, що породжена операторами P, G та T з ненульовими комутаційним співвідношенням $[G, T] = P$, її реалізації наведено нижче у таблиці.

	Підалгебра	Реалізація
$\{P, T, G\}$	$\mathfrak{h}_0 = \langle 0 \rangle$	$R_{\mathfrak{h}_0}: P = \partial_1, G = -x_2\partial_1 + \partial_3, T = \partial_2$
$\{G, T\}$	$\mathfrak{h}_{1.1} = \langle P \rangle$	$R_{\mathfrak{h}_{1.1}}: P = 0, G = \partial_1, T = \partial_2$
$\{P, G\}$	$\mathfrak{h}_{1.2}^{\alpha=0} = \langle T + \alpha G \rangle$	$R_{\mathfrak{h}_{1.2}^0}: P = \partial_1, G = \partial_2, T = x_2\partial_1$
	$\mathfrak{h}_{1.2}^{\alpha=x_3} = \langle T + \alpha G \rangle$	$R_{\mathfrak{h}_{1.2}^{x_3}}: P = \partial_1, G = \partial_2, T = x_2\partial_1 - x_3\partial_2$
$\{G\}$	$\mathfrak{h}_2^{\alpha \geq 0} = \langle P, T + \alpha G \rangle$	$R_{\mathfrak{h}_2^\alpha}: P = 0, G = \partial_1, T = -\alpha\partial_1$
	$\mathfrak{h}_2^{\alpha=x_2} = \langle P, T + \alpha G \rangle$	$R_{\mathfrak{h}_2^{x_2}}: P = 0, G = \partial_1, T = -x_2\partial_1$

Для опису деформацій цієї алгебри ми користуємось взаємною обер-

неністю контракцій та деформацій. Алгебра $A\bar{G}_1(1)$ належить замиканню орбіт усіх тривимірних алгебр за винятком Абелевої та алгебри $A_{3.3}$. Таким чином ми можемо сконструювати породжуючі реалізації деформованих алгебр.

Алгебра	Реалізація
$A\bar{G}_1^q(1)$	$P=\partial_1, G=\partial_2, T=(qx_1+x_2)\partial_1+\alpha qx_2\partial_2+\partial_3$
$A\bar{G}_1^{q_1}(1)$	$P=2q_1x_1\partial_1+\partial_2, G=\partial_1, T=q_1x_1^2\partial_1+x_1\partial_2+e^{2q_1x_2}\partial_3$
$A\bar{G}_1^{q_2}(1)$	$P=-q_2\cos(q_2x_1)\tan(q_2x_2)\partial_1+q_2\sin(q_2x_1)\partial_2+\frac{\cos q_2x_1}{\cos q_2x_2}\partial_3,$ $G=\sin(q_2x_1)\tan(q_2x_2)\partial_1+\cos(q_2x_1)\partial_2-\frac{\sin q_2x_1}{q_2\cos q_2x_2}\partial_3,$ $T=\partial_1$
$A\bar{G}_1^{q_3}(1)$	$P=\partial_1, G=(q_3x_1-x_2)\partial_1+\partial_3, T=\partial_2$
$A\bar{G}_1^{q_4}(1)$	$P=\partial_1, G=\partial_2, T=(q_4x_1+x_2)\partial_1+q_4x_2\partial_2+\partial_3$
$A\bar{G}_1^{q_5}(1)$	$P=\partial_1, G=\partial_2, T=(bq_5x_1+x_2)\partial_1+q_5(bx_2-q_5x_1)\partial_2+\partial_3$

Для опису диференціальних інваріантів вважаємо, що набір змінних $\{x_1, x_2, x_3\}$ містить одну незалежну змінну t та дві залежні змінні $\{u_1, u_2\}$. Оскільки усі реалізації породжуючі, то інваріантів нульового порядку не існує (окрім визначників Лі $L_{\det}$), а базис диференціальних інваріантів може бути обраний як універсальний інваріант порядку один I_1 . Оператор інваріантного диференціювання має вигляд $D = \lambda(t, u_1, u_2) \frac{d}{dt}$, де коефіцієнт λ знаходимо у неявній формі $\varphi(t, u_1, u_2, \lambda) = 0$, де φ — інваріант продовжених векторних полів P, T і G .

У таблиці $f(\dot{u}_1) = \operatorname{arctanh} \frac{2\dot{u}_1+bq+q^2}{\gamma}$ та $\gamma = \sqrt{4bq + (bq + q^2)^2}$. Детальніше дана алгебра розглянута у роботі [43].

Також було отримано нові породжуючі реалізації та деформації фізично важливих конформної алгебри та двох алгебр де Сіттера, ці результати опубліковано у роботі [73].

Важливою для застосувань є задача встановлення еквівалентності реалізації тієї самої алгебри Лі, це питання детально досліджено у роботах [44, 45].

Алгебра	Базис диф. інваріантів	D	$L_{\det}$
$A\bar{G}_1^q(1)$	$\frac{(\alpha-1)q-\dot{u}_1}{(\alpha-1)^2q^2-\dot{u}_2}, \frac{(\alpha-1)q\dot{u}_2e^{(\alpha-1)qu_2}}{\dot{u}_1}$	$e^{(q+\dot{u}_1)u_2} \frac{d}{dt}$	tu_1u_2
$A\bar{G}_1^{q_1}(1)$	$\dot{u}_1e^{2q_1u_1}-u_2, q_1u_2^2+e^{2q_1u_1}(\dot{u}_2-2q_1\dot{u}_1u_2)$	$e^{2q_1u_1} \frac{d}{dt}$	$e^{2q_1u_1}$
$A\bar{G}_1^{q_2}(1)$	$\frac{1}{q_2^2} \arctan(\frac{\dot{u}_1}{\cos(q_2u_1)}) - u_2, \frac{q_2\dot{u}_2+\sin(q_2u_1)}{q_2\sqrt{\dot{u}_1^2+\cos^2(q_2u_1)}}$	$\frac{d}{dt}$	$\frac{-1}{\cos(q_1u_2)}$
$A\bar{G}_1^{q_3}(1)$	$\frac{q_3\dot{u}_2}{\dot{u}_1}, \frac{(q_3-\dot{u}_1)e^{-q_3u_2}}{q_3\dot{u}_1}$	$e^{q_3u_2} \frac{d}{dt}$	-1
$A\bar{G}_1^{q_4}(1)$	$\frac{2u_2\dot{u}_1-1}{\dot{u}_1}, \frac{\dot{u}_2^2e^{2q_4u_2}}{\dot{u}_1}$	$e^{q_4u_2} \frac{d}{dt}$	1
$A\bar{G}_1^{q_5}(1)$	$-\gamma u_2 + 2f(\dot{u}_1), \frac{(\dot{u}_1+\dot{u}_2+bq+q^2)e^{-\frac{(bq+q^2)f(\dot{u}_1)}{\gamma}}}{\sqrt{-bq+(bq+q^2)\dot{u}_1+\dot{u}_1^2}}$	$e^{bq_5u_2} \frac{d}{dt}$	1

6.2 Допустимі пари контракції шестивимірних нільпотентних алгебр Лі

Розглянемо n -вимірний векторний простір V над полем комплексних чисел та множину $\mathcal{L}_n$ всіх можливих дужок Лі на V . Ототожнимо $\mu \in \mathcal{L}_n$ з алгеброю Лі $g = (V, \mu)$. $\mathcal{L}_n$ є алгебричною підмножиною многовиду $V^* \otimes V^* \otimes V$ білінійних перетворень з $V \times V$ у V . Група $GL(V)$ діє на $\mathcal{L}_n$ наступним чином:

$$(U \cdot \mu)(x, y) = U(\mu(U^{-1}x, U^{-1}y)) \quad \forall U \in GL(V), \mu \in \mathcal{L}_n, x, y \in V.$$

Позначимо орбіту $\mu \in \mathcal{L}_n$ під дією $GL(V)$ через $\mathcal{O}(\mu)$ та її замикання у топології Заріського на $\mathcal{L}_n$ через $\overline{\mathcal{O}(\mu)}$.

Алгебра Лі $g_0 = (V, \mu_0)$ називається *контракцією* алгебри Лі $g = (V, \mu)$, якщо $\mu_0 \in \overline{\mathcal{O}(\mu)}$.

Для явних обчислень та застосувань контракцій зафіксуємо базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ простору V та скористаємося взаємно однозначною відповідністю між дужкою Лі $\mu \in \mathcal{L}_n$ та тензором структурних сталих (c_{ij}^k) . У цьому випадку поняття матриці контракції U_ε ($U: (0, 1] \rightarrow GL(V)$) та параметризований набір нових дужок Лі $[x, y]_\varepsilon$ визначається наступним чином

$$[x, y]_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y] \quad \text{for all } \varepsilon \in (0, 1], x, y \in V,$$

і контракція визначається так:

Якщо границя $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [x, y]_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} U_\varepsilon^{-1} [U_\varepsilon x, U_\varepsilon y] =: [x, y]_0$ існує для усіх $x, y \in V$, тоді $[\cdot, \cdot]_0$ добре визначена дужка Лі і $g_0 = (V, [\cdot, \cdot]_0)$ називається *контракцією* алгебри Лі g .

Для доведення відсутності контракції від фіксованої алгебри g до алгебри Лі g_0 використовуються необхідні умови контракції, а саме набір величин, які обчислюються однозначно та є напівінваріантними відносно контракцій. Набір таких величин досить великий, але частина з них не працює у випадку нільпотентних алгебр Лі. Наведемо перелік необхідних умов, який є достатнім для шестивимірних нільпотентних алгебр Лі.

Теорема 6.1. *Якщо алгебра Лі g_0 є контракцією алгебри Лі g , то виконуються умови:*

- 1) $\dim \mathcal{O}(g_0) < \dim \mathcal{O}(g)$, де $\mathcal{O}(g)$ орбіта під дією групи $GL(V)$ на многовиді $\mathcal{L}_n$;
- 2) $n_{\text{Ai}}(g_0) \geq n_{\text{Ai}}(g)$, де $n_{\text{Ai}}(g)$ максимальна розмірність Абелевого ідеалу;
- 3) $\dim g_0^l \leq \dim g^l$, $l = 1, 2, 3$, де $g^1 = [g, g]$, $g^2 = [g^1, g]$, $g^3 = [g^2, g]$;
- 4) $\dim Z(g_0) \geq \dim Z(g)$, де $Z(g)$ позначає центр g ;
- 5) $\dim C_g(g') \leq \dim C_g(g'_0)$, тут $C_g(g')$ є централізатором похідної алгебри;
- 6) якщо $s(g)$ є підалгеброю g , то існує підалгебра $s(g_0)$ в g_0 такої самої розмірності, така що $s(g_0)$ є контракцією $s(g)$;
- 7) нехай g задається структурою s , що належить до стійкої за Борелем замкненої підмножини S , тоді g_0 також повинна задаватися структурою в S .

Якщо даний набір умов задовольняється парою комплексних нільпотентних шестивимірних алгебр Лі, то така пара напевне допускає контракцію.

В даній роботі було використано класифікацію та нумерацію комплексних нільпотентних шестивимірних алгебр Лі отриману Магніним [*J. Geom. Phys.* **3** (1986), 119–144].

Найпотужнішою необхідною умовою теореми 6.1 є перша (розмірність орбіти), оскільки саме її застосування доводить відсутність контракцій для більше ніж половини пар. Розмірність орбіти задає наступний порядок на многовиді комплексних шестивимірних алгебр Лі:

$$\begin{aligned}
28 &= \dim \mathcal{O}(g_{6.20}); \\
27 &= \dim \mathcal{O}(g_{6.19}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.18}); \\
26 &= \dim \mathcal{O}(g_{6.17}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.15}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.13}); \\
25 &= \dim \mathcal{O}(g_{6.16}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.14}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.12}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.9}); \\
24 &= \dim \mathcal{O}(g_{6.11}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.10}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.5}) = \dim \mathcal{O}(g_{5.6} \oplus g_1); \\
23 &= \dim \mathcal{O}(g_{6.8}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.4}) = \dim \mathcal{O}(g_{5.5} \oplus g_1); \\
22 &= \dim \mathcal{O}(g_{6.7}) = \dim \mathcal{O}(g_{6.2}); \\
21 &= \dim \mathcal{O}(g_{6.6}) = \dim \mathcal{O}(g_{5.4} \oplus g_1) = \dim \mathcal{O}(g_{5.3} \oplus g_1); \\
20 &= \dim \mathcal{O}(g_3 \oplus g_3); \\
19 &= \dim \mathcal{O}(g_{6.1}) = \dim \mathcal{O}(g_4 \oplus 2g_1); \\
18 &= \dim \mathcal{O}(g_{6.3}); \\
17 &= \dim \mathcal{O}(g_{5.2} \oplus g_1); \\
15 &= \dim \mathcal{O}(g_{5.1} \oplus g_1); \\
12 &= \dim \mathcal{O}(g_3 \oplus 3g_1).
\end{aligned}$$

Розглянемо розмірності максимальних абелевих ідеалів для алгебр Лі, що залишились після застосування першої необхідної умови, отримаємо:

$$\begin{aligned}
n_{Ai} &= 4 \text{ для алгебр } g_{6.19}, g_{6.17}, g_{6.15}, g_{6.14}, g_{6.13}, g_{6.12}, g_{6.11}, g_{6.10}, g_{6.9}, \\
&g_{6.8}, g_{6.7}, g_{6.5}, g_{6.4}, g_{6.3}, g_{6.2}, g_{6.1}, g_{5.6} \oplus g_1, g_{5.4} \oplus g_1, g_{5.3} \oplus g_1, g_{5.1} \oplus g_1, g_3 \oplus g_3; \\
n_{Ai} &= 5 \text{ для алгебр } g_{6.16}, g_{6.6}, g_{5.5} \oplus g_1, g_{5.2} \oplus g_1, g_4 \oplus 2g_1, g_3 \oplus 3g_1.
\end{aligned}$$

Далі обчислимо розмірності перших трьох членів нижнього цен-

тального ряду для алгебр які все ще потребують додаткового дослідження, отримуємо:

$$\dim g^1 = 4 \text{ для алгебр } g_{6.16} \text{ і } g_{6.14};$$

$$\dim g^1 = 3 \text{ для алгебр } g_{6.13}, g_{6.6} \text{ і } g_{6.3};$$

$$\dim g^1 = 2 \text{ для алгебр } g_{6.2}, g_{6.1}, g_{5.3} \oplus g_1 \text{ і } g_3 \oplus g_3.$$

$$\dim g^2 = 2 \text{ для алгебр } g_{6.11}, g_{6.8}, g_{6.5}, g_{5.6} \oplus g_1, g_{5.5} \oplus g_1 \text{ і } g_{5.4} \oplus g_1;$$

$$\dim g^2 = 1 \text{ для алгебр } g_{6.10}, g_{6.9} \text{ і } g_4 \oplus 2g_1;$$

$$\dim g_3 \oplus g_3^2 = 0;$$

$$\dim g_{6.15}^3 = 1 \text{ і } \dim g_{6.16}^3 = 2;$$

$$\dim g_{6.5}^3 = 0 \text{ і } \dim g_{g_{5.5} \oplus g_1}^3 = 1.$$

Наступний крок з визначення допустимих пар алгебр виконаємо обчислюючи розмірності центрів, отримуємо:

$$\dim Z = 1 \text{ для алгебр } g_{6.11}, g_{6.10} \text{ і } g_{6.2};$$

$$\dim Z = 2 \text{ для алгебр } g_{6.14}, g_{6.8}, g_{6.5}, g_{6.4}, g_{6.1}, g_{5.6} \oplus g_1, g_{5.3} \oplus g_1, g_{5.1} \oplus g_1 \text{ і } g_3 \oplus g_3;$$

$$\dim Z = 3 \text{ для алгебр } g_{6.3}, g_{5.4} \oplus g_1 \text{ і } g_{5.2} \oplus g_1.$$

Обчислимо розмірності централізаторів похідних алгебр:

$$\dim C_g(g') = 5 \text{ для алгебр } g_{6.11}, g_{6.7}, g_{6.4} \text{ і } g_{6.2};$$

$$\dim C_g(g') = 4 \text{ для алгебр } g_{6.8} \text{ і } g_{5.4} \oplus g_1.$$

Необхідна умова пов'язана з підалгебрами застосовується у трьох випадках, а саме для пар $(g_{6.18}, g_{6.15})$, $(g_{6.18}, g_{6.13})$ та $(g_{6.17}, g_{6.9})$. Для доведення скористаємося п'ятивимірною підалгеброю $\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$ алгебри $g_{6.18}$. Ця підалгебра ізоморфна $g_{5.1}$ та контрагує до абелевої алгебри або алгебри $g_3 \oplus 2g_1$, але жодна з цих трьох підалгебр не є підалгеброю $g_{6.15}$ або $g_{6.13}$. Аналогічно і для підалгебри $\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$ алгебри $g_{6.17}$, що ізоморфна $g_3 \oplus 2g_1$ та контрагує до Абелевої алгебри, але $g_{6.9}$ не має підалгебр $g_3 \oplus 2g_1$ або $5g_1$.

Критерій, що стосується структур стійких за Борелем застосовується до наступних пар: $(g_{6.17}, g_{6.12})$, $(g_{5.6} \oplus g_1, g_{6.4})$, $(g_{5.6} \oplus g_1, g_3 \oplus g_3)$, $(g_{6.8}, g_3 \oplus g_3)$, $(g_{6.7}, g_3 \oplus g_3)$, $(g_{5.3} \oplus g_1, g_3 \oplus g_3)$. Зауважимо, що у випад-

ку групи GL_n борелівські підгрупи утворюються за допомогою ниньо- або верхньо-трикутних матриць. Наведемо всі необхідні для доведення структури стійкі за Борелем.

Для $g_{6.17}$ розглянемо структуру $[\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle, \langle e_4, e_5, e_6 \rangle] \subseteq \langle 0 \rangle$, для $g_{6.12}$ ми отримаємо $[\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle, \langle e_4, e_5, e_6 \rangle] \subseteq \langle e_6 \rangle \neq \langle 0 \rangle$.

Ті самі структури підходять і для випадків $(g_{5.3} \oplus g_1, g_3 \oplus g_3)$ та $(g_{5.6} \oplus g_1, g_{6.4})$.

Для пар $(g_{5.6} \oplus g_1, g_3 \oplus g_3)$ і $(g_{6.7}, g_3 \oplus g_3)$ перша структура та сама, але друга для $g_3 \oplus g_3$ має вигляд $[\langle e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle, \langle e_3, e_5, e_6 \rangle] \subseteq \langle e_6 \rangle \neq \langle 0 \rangle$.

Остаточно, відсутність контракції у парі $(g_{6.8}, g_3 \oplus g_3)$ доводиться структурою $[\langle e_1, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle, \langle e_3, e_5, e_6 \rangle] \subseteq \langle 0 \rangle$ для $g_{6.8}$.

Загальний результат досліджень оформлено у вигляді двох таблиць, які наведено у роботі [7].

6.3 Наближення функцій на некубічних решітках

Основною метою є розробка необхідного інструментарію для аналогу дискретного перетворення Фур'є але не з повною системою експонент на кубічних решітках, а з орбіт-функціями (C -, S - та E -) на некубічних решітках породжених фундаментальними областями напівпростих груп.

Існує сім компактних напівпростих груп рангу три $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$, $SU(3) \times SU(2)$, $O(5) \times SU(2)$, $G(2) \times SU(2)$, $SU(4)$, $O(7)$ та $Sp(6)$ з відповідними алгебрами Лі $A_1 \times A_1 \times A_1$, $A_2 \times A_1$, $C_2 \times A_1$, $G_2 \times A_1$, A_3 , B_3 та C_3 .

Для означення C -, S - та E -функцій розглянемо дійсний евклідів простір $\mathbb{R}^n$ натягнутий на прості корені α простої групи/алгебри Лі G . Зручно також ввести базис фундаментальних ваг: ω -базис.

Решіткою ваг P є усі можливі лінійні комбінації ω -базису з цілими коефіцієнтами. У решітці P визначаємо конус головних ваг P^+ та строго додатніх ваг P^{++}

$$P \supset P^+ = \mathbb{Z}^{\geq 0} \omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}^{\geq 0} \omega_n \supset P^{++} = \mathbb{Z}^{> 0} \omega_1 + \cdots + \mathbb{Z}^{> 0} \omega_n.$$

Групою Вейля $W(G)$ простої групи Лі G є скінчена група в $\mathbb{R}^n$ породжена дзеркальними відображеннями відносно $(n-1)$ -вимірних гіперплощин, що ортогональні до простих коренів і містять початок координат

$$r_i x = r_{\alpha_i} x = x - \frac{2\langle x, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i = x - \langle x, \check{\alpha}_i \rangle \alpha_i, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді орбіт-функції можна визначити наступним чином:

S -функція $C_\lambda(x)$, $\lambda \in P^+$ визначається як

$$C_\lambda(x) := \sum_{\mu \in W_\lambda} e^{2\pi i \langle \mu, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (6.1)$$

де W_λ орбіта групи Вейля, породжена точкою λ .

Якщо у (6.1) ми обмежимося орбітою парної підгрупи $W_{e\lambda}$ (підгрупа парної кількості відображень), то ми отримаємо означення E -функції $E_\lambda(x)$, $\lambda \in P_e = P^+ \cup r_i P^+$

$$E_\lambda(x) := \sum_{\mu \in W_{e\lambda}} e^{2\pi i \langle \mu, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Означення S -функції $S_\lambda(x)$, $\lambda \in P^{++}$ майже таке саме, але знак кожного з доданків визначається кількістю відображень $p(\mu)$ необхідних щоб отримати μ з λ

$$S_\lambda(x) := \sum_{\mu \in W_\lambda} (-1)^{p(\mu)} e^{2\pi i \langle \mu, x \rangle} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Звичайно ж μ можна отримати з λ не єдиним чином, проте парність кількості необхідних відображень зберігається і означення є коректним.

Для довільних комплексних квадратично інтегровних функцій $\phi(x)$ та $\psi(x)$ означимо неперервний скалярний добуток

$$\langle \phi(x), \psi(x) \rangle := \int_F \phi(x) \overline{\psi(x)} dx.$$

$\langle C_\lambda(x), C_{\lambda'}(x) \rangle = |W_\lambda| \cdot |F| \cdot \delta_{\lambda\lambda'}$, $\langle S_\lambda(x), S_{\lambda'}(x) \rangle = |W| \cdot |F| \cdot \delta_{\lambda\lambda'}$, тут $|W|$ позначає порядок групи Вейля, $|W_\lambda|$ розмірність орбіти, а $|F|$ —

об'єм фундаментальної області. Аналогічне співвідношення має місце і для E -функцій.

Таким чином, кожен набір орбіт функцій утворює ортогональний базис у Гільбертовому просторі двічі інтегровних функцій $\mathcal{L}^2(F)$, а функції задані на F можуть бути розкладені у лінійні комбінації C -, S - або E -функцій.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\lambda \in P^+} c_\lambda C_\lambda(x), & c_\lambda &= |W_\lambda|^{-1} |F|^{-1} \langle f(x), C_\lambda(x) \rangle; \\ f(x) &= \sum_{\lambda \in P^{++}} c_\lambda S_\lambda(x), & c_\lambda &= |W|^{-1} |F|^{-1} \langle f(x), S_\lambda(x) \rangle; \\ f(x) &= \sum_{\lambda \in P_e} c_\lambda E_\lambda(x), & c_\lambda &= |W_e|^{-1} |F_e|^{-1} \langle f(x), E_\lambda(x) \rangle. \end{aligned}$$

Відповідні дискретні перетворення можуть бути застосовані для неперервної інтерполяції значень функції $f(x)$ між заданими значеннями на деякій решітці. Існують однотипні шляхи побудови решіток на фундаментальних областях усіх напівпростих алгебр Лі, а саме: решітка $F_M \subset F$ залежить від натурального числа M та складається з точок

$$F_M = \left\{ \frac{s_1}{M} \check{\omega}_1 + \dots + \frac{s_n}{M} \check{\omega}_n \mid s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \sum_{i=1}^n s_i m_i \leq M \right\}.$$

Важливою властивістю також є те, що орбіт-функції $C_\lambda(x)$, $E_\lambda(x)$ і $S_\lambda(x)$ є власними функціями оператора Лапласа у відповідних координатах.

Розглянемо аналог дискретного Фур'є аналізу для функцій, що задані на аперіодичних решітках з віддаленим порядком (квазікристалах).

Позначимо через R^d дійсний Евклідов простір скінченної розмірності d , а через $D_r(R^d)$ усі набори точок $\Lambda \subset R^d$ для яких відстань між точками $|x - y| \geq r > 0 \ \forall x, y \in \Lambda$.

Означимо на $D_r(R^d)$ локальну топологію. Два набори Λ_1 і Λ_2 з $D_r(R^d)$ є 'близькими' якщо, для якогось великого R та малого ϵ , має місце $\Lambda_1 \cap B_R \subset \Lambda_2 + B_\epsilon$, та $\Lambda_2 \cap B_R \subset \Lambda_1 + B_\epsilon$.

Для множини $\Lambda \in D_r(R^d)$ її локальна оболонка це

$$X(\Lambda) = \overline{\{t + \Lambda : t \in R^d\}} \subset D_r(R^d),$$

тобто усі зсуви Λ та їх замикання у локальній топології.

Дії зсувів Λ на елементах з простору R^d піднімаються до зсувів на $\text{op } X(\Lambda)$. Локальна оболонка $X(\Lambda)$ – компактна і R^d -дія на ній неперервна.

Розглянемо функцію $F: X(\Lambda) \rightarrow C$. З неї означимо функцію $f: R^d \rightarrow C$ де $f(t) = F(t + \Lambda)$.

Якщо F неперервна, то позначимо для усіх $t_1, t_2 \in R^d$, $t_1 + \Lambda$ і $t_2 + \Lambda$ – близькі $\implies F(t_1 + \Lambda)$ і $F(t_2 + \Lambda)$ – близькі $\implies f(t_1)$ і $f(t_2)$ – близькі. Тобто неперервність F породжує неперервність f .

Функція $f: R^d \rightarrow C$ називається *локальною відносно набору точок* $\Lambda \in D_r(R^d)$ або Λ -*локальною*, якщо для усіх $\epsilon' > 0$ існує R та ϵ , такі, що, якщо $t_1, t_2 \in R^d$ задовольняють умову, що $t_1 + \Lambda$ і $t_2 + \Lambda \in (R, \epsilon)$ -близькими, тоді $|f(t_1) - f(t_2)| < \epsilon'$.

Завдяки локальності обернене теж виконується.

Нехай $\Lambda \in D_r(R^d)$ і $f: R^d \rightarrow C$ є локальною відносно Λ . Означимо $F: \{t + \Lambda : t \in R^d\} \rightarrow C$ (так, що F це функція на частині $D_r(R^d)$) коли $F(t + \Lambda) = f(t)$. Тоді F неперервна на $\{t + \Lambda : t \in R^d\}$ відносно локальної топології.

Для кожної Λ -локальної функції f існує єдина неперервна функція F на локальній оболонці, чиє обмеження до орбіти $\Lambda \in f$. Кожна неперервна функція на локальній оболонці Λ виникає саме таким чином.

Якщо на $X(\Lambda)$ задано R^d -інваріантну ймовірнісну міру μ , то дія R^d на $X(\Lambda)$ породжує унітарну дію T з R^d на $L^2(X(\Lambda), \mu)$. А саме, для усіх $F \in L^2(X(\Lambda), \mu)$ і усіх $t \in R^d$, $T_t F$ – функція, що визначається $T_t F(\Gamma) = F(-t + \Gamma)$ та $\langle F | G \rangle := \int_{X(\Lambda)} F \bar{G} d\mu$ ми також маємо $\langle T_t F | T_t G \rangle = \langle F | G \rangle$.

$$\begin{array}{ccc} R^d & \longleftarrow (||) & R^d \times R^d & (\perp) \longrightarrow & R^d \\ & & \cup & & \\ & \longleftarrow (1 - 1) & \tilde{L} & (\text{dense image}) \longrightarrow & \end{array}$$

Де $\tilde{L}$ решітка у $R^d \times R^d$ орієнтовна так, що проекції на R^d є $1 - 1$ та щільна відповідно.

Ліворуч R^d це *фізичний простір* (до якого належить Λ).

Праворуч R^d це *внутрішній простір* (використовується для контролю проекції $\tilde{L}$ на фізичний простір).

L позначає образ $\tilde{L}$ після проекції на фізичний простір. Оскільки ця проекція взаємно однозначна, то L і $\tilde{L}$ подібні групи, отже L є вільною Абелевою групою рангу $2d$, тобто має Z -базис з $2d$ елементів.

Оберемо підпростір Ω у внутрішньому просторі. Це вікно має бути компактным, співпадати із замиканням внутрішньої частини та мати границю міри нуль. Використовуючи це ми означаємо

$$\Lambda = \Lambda(\Omega) = \{x : \tilde{x} \in \tilde{L}, x' \in \Omega\}.$$

Множини вигляду $t + \Lambda(\Omega)$, $t \in R^d$, називаються *множинами перерізів та проекцій* або *модельними множинами*. Зокрема, для кожного $(x, y) \in R^d \times R^d$ ми визначаємо $\Lambda_{(x,y)} = x + \Lambda(-y + \Omega)$.

Якщо $(x, y) = (x', y') \bmod \tilde{L}$, то $x + \Lambda(-y + \Omega) = x' + \Lambda(-y' + \Omega)$. Отже ці модельні множини параметризовані тором розмірності $2d$ ($R^d \times R^d$)/ $\tilde{L} =: T$.

Позначимо через $(x, y)_L$ клас конгруентності $(x, y) \bmod \tilde{L}$.

Існує природня міра Хаара на θ_T on T інваріантна відносно R^d -дії.

Нехай f — Λ -локальна функція, а її розширення $F \in L^2(X(\Lambda), \mu)$ — неперервне. Ми отримаємо $\tilde{F} \in L^2(T, \theta)$, де $\tilde{F}((t, 0)_L) = \tilde{F}(\beta(t + \Lambda)) = F(t + \Lambda) = f(t)$, та можемо записати

$$\tilde{F}(\cdot) = \sum_{k \in L^\circ} a_k e^{2\pi i \langle \tilde{k} | \cdot \rangle}, \text{ де } L^\circ \text{ дуальний до } L.$$

Розкладом Фур'є локальної функції f є

$$f(t) = F(t + \Lambda) = \tilde{F}((t, 0)_L) = \sum_{k \in L^\circ} a_k e^{2\pi i \langle \tilde{k} | (t, 0) \rangle} = \sum_{k \in L^\circ} a_k e^{2\pi i \langle k | t \rangle}.$$

На жаль, ми не контролюємо всю функцію $\tilde{F}$, оскільки вона відома нам лише на $(R^d, 0)_L$. Щоб обчислити a_k , виходячи лише з f , ми використовуємо аналог ергодичної теореми Біргкофа для неперервних функцій $\tilde{G}$ на T , $\int_T \tilde{G}(x) d\theta_T(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol } B_R} \int_{B_R} \tilde{G}((t, 0)_L) dt$.

Отже

$$a_k = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol} B_R} \int_{B_R} e^{-2\pi i \langle \tilde{k} | (t, 0) \rangle} \tilde{F}((t, 0)_L) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol} B_R} \int_{B_R} e^{-2\pi i \langle k | t \rangle} f(t) dt.$$

Використовуємо $F((t, 0)_L) = f(t)$ і $\tilde{k} = (k, k')$, тобто $\langle \tilde{k} | (t, 0) \rangle = \langle k, t \rangle + \langle k', 0 \rangle = \langle k, t \rangle$.

Для дискретизації почнемо з тору T та зауважимо природне розширення перетворення $(\cdot)'$ до раціональної лінійної оболонки L :

$$\begin{array}{ccccc} QL & \longleftarrow (1-1) & Q\tilde{L} & \longrightarrow & QL' \\ x & \longleftarrow & \tilde{x} = (x, x') & \longrightarrow & x' \end{array}$$

Вважаємо що у R^{2d} задано стандартний скалярний добуток $\langle \cdot | \cdot \rangle$ та означимо дуальну решітку: $\tilde{L}^\circ = \{Y \in R^d \times R^d : \langle Y | \tilde{x} \rangle \in Z \text{ для всіх } \tilde{x} \in \tilde{L}\}$.

Тоді $\tilde{L}^\circ$ є Z -модулем того ж рангу що і $\tilde{L}$, а саме $2d$. Розглянемо схему перерізів та проєкцій у якій $\tilde{L}^\circ$ є решіткою:

$$\begin{array}{ccccc} R^d & \longleftarrow (||) & R^d \times R^d & (\perp) \longrightarrow & R^d \\ & & \cup & & \\ L^\circ & \longleftarrow (1-1) & \tilde{L}^\circ & (\text{dense image}) \longrightarrow & (L^\circ)' . \end{array}$$

Точки даних з R^d в яких обчислюється наша функція отримуються проєкцією на фізичний простір підходячого набору представників з копростору $\tilde{L}_N$ за модулем $\tilde{L}$. Відповідні частоти k обираються з дуальної решітки L° . Вибір значень k для яких обчислюються коефіцієнти a_k походить з вибору підходячих представників $\tilde{L}^\circ$ за модулем $\tilde{L}_N^\circ$. Ключовою є дуальність $\langle \cdot, \cdot \rangle : \tilde{L}^\circ / \tilde{L}_N^\circ \times \tilde{L}_N / \tilde{L} \longrightarrow \frac{1}{N} Z / Z$.

Основні зусилля потрібно докласти до побудови точок даних, але якщо це зроблено один раз, то ті самі точки та частоти працюватимуть для усіх майжеперіодичних функцій для даного квазікристалу. Побудовані апроксиманти не лише локально наближують функцію, вони також є глобальними апроксимантами для f на усьому просторі R^d .

Більше деталей та приклади наведено у роботі [74].

6.4 Класифікація реалізацій скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на колі

Розглянуто скінченномірні підалгебри в алгебрі Лі гладких дотичних векторних полів на колі і кусочно-гладкі глобальні перетворення кола на себе. Знайдений канонічний вид всіх скінченновимірних реалізацій алгебр. Показано, що всі інші реалізації гладких векторних полів зводиться до них за допомогою зазначених перетворень.

На колі S^1 введемо параметр $\theta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Тоді дотичні векторні поля на S^1 можна представити у вигляді $v(\theta)\frac{d}{d\theta}$, де $v(\theta)$ — гладка дійсна функція на колі [Прессли А., Сигал Г., Мир, Москва, 1990]. Інакше, можна вважати, що $\theta \in \mathbb{R}$, а $v(\theta)$ — гладка 2π -періодична функція на прямої. Будемо розглядати поля класу $\mathbb{C}^1$ (з неперервно-диференційовними функціями $v(\theta)$).

Введемо також клас перетворень $f: S^1 \rightarrow S^1$, який визначається наступними властивостями:

- воно є взаємно-однозначне відображення кола на себе;
- $f(\theta)$ неперервна в будь-якій точці $\theta \in S^1$;
- неперервно-диференціюються у всіх точках, за винятком скінченного їх числа;
- в точках розриву похідної $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} f'(\theta) = \pm\infty$;
- при переході до нової координаті $\tilde{\theta} = f(\theta)$ оператор з класу $\mathbb{C}^1$ переходить в оператор з того ж класу.

Такі перетворення назвемо *перетворенням еквівалентності* полів. Реалізації алгебр векторними полями назвемо *нееквівалентними*, якщо не можна за допомогою композицій перетворень f звести одну реалізацію в іншу.

Очевидно, без обмеження загальності, можна покласти, що $f(0) = 0$. Неважко зрозуміти, що $f(\theta)$ монотонна на всьому проміжку $0 \leq \theta < 2\pi$,

і, залежно від ступеня відображення $\deg f = \pm 1$, монотонно убиває або зростає.

Нас цікавлять всі нееквівалентні реалізації скінченновимірних алгебр Лі дотичними векторними полями з функціями $v(\theta) \in \mathcal{C}$.

В роботі [Strigunova M.S., *Tr. MIAN.* **236** (2002), 338–342.] доводиться, що (з точністю до ізоморфізму) є всього три алгебри — одновимірна, двовимірна некомутативну і тривимірна, яка ізоморфна $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, що складаються з аналітичних векторних полів на колі. Там наведені реалізації відповідних алгебр.

Нами побудовані всі нееквівалентні реалізації алгебр. При цьому, ми не обмежуємося вимогою аналітичності, як це має місце в даній роботі.

1. Реалізації розв’язних алгебр. Спочатку описується структура двовимірних комутативний алгебр. Для цього весь відрізок $[0, 2\pi]$ розбивається на інтервали з кінцевими виродженими точками, на яких функція $w(\theta)$ пропорційна функції $v(\theta)$ з ненульовими різними коефіцієнти пропорційності. Будемо і далі таке співвідношення реалізацій двох одновимірних комутативний алгебр позначати як $\langle e_1 \rangle \sim \langle e_2 \rangle$. Якщо кількість вироджених точок функції $v(\theta)$ нескінченно, то число нееквівалентних реалізацій векторного поля W нескінченно.

Далі знаходяться реалізації двовимірної некомутативної алгебри векторними полями вигляду

$$x = v(\theta) \frac{d}{d\theta}, \quad y = w(\theta) \frac{d}{d\theta}.$$

Базисні елементи цієї алгебри x, y задовольняють комутаційному співвідношенню $[x, y] = y$. По-перше, доводиться, що кількість особливих точок θ_n функції $w(\theta)$ скінчена кількість. Неважко показати, що композиціями перетворень еквівалентності і обертання кола можна домогтися того, щоб $\theta_k = \frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Розглянемо інтервал $\Delta_k = (\theta_k, \theta_{k+1})$. Тоді має місце

Теорема 6.2. Будь-яка реалізація двовимірної некоммутативної алгебри $A_{2,2}$ векторних полів на колі еквівалентна формі

$$A_{2,2}^n = \left\langle \sigma^n(\theta)(1 - \cos(n\theta)) \frac{d}{d\theta}, \frac{1}{n} \sin(n\theta) \frac{d}{d\theta} \right\rangle, \quad (6.2)$$

де функція $\sigma^n(\theta)$ дорівнює або 1 або -1 на напіввідкритих інтервалах $\left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n} \right)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Аналіз, стосовно для інших розв'язних алгебр призводить до наступного результату.

Теорема 6.3. Існують наступні реалізації розв'язних алгебр Лі $A_{k,i} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ векторних полів на колі ($k \leq 5$):

$A_{3,1} = 3A_1$, де $e_1 \sim e_2 \sim e_3$;

$A_{3,5}$, де $e_2 \sim e_1$, $\langle e_1, e_3 \rangle$ утворюють реалізації $A_{2,2}^n$ алгебри $A_{2,2}$ в теоремі 6.2;

$4A_1$, де $e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim e_4$;

$A_{4,5}$ ($q = p = 1$), де $e_2 \sim e_1$, $e_3 \sim e_1$, $\langle e_1, e_4 \rangle = A_{2,2}^n$;

$5A_1$, де $e_1 \sim e_2 \sim e_3 \sim e_4 \sim e_5$;

$A_{5,7}$ ($q = p = r = 1$), де $e_2 \sim e_1$, $e_3 \sim e_1$, $e_4 \sim e_1$, $\langle e_1, e_5 \rangle = A_{2,2}^n$

2. Реалізації алгебр з ненульовим фактором Леві.

Стосовно алгебр з ненульовим фактором Леві, отримано такий результат.

Теорема 6.4. Всі можливі реалізації алгебр з ненульовим фактором Леві вичерпуються наступними реалізаціями алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ векторних полів на колі:

$$\left\langle \sigma^n(\theta)(1 - \cos(n\theta)) \frac{d}{d\theta}, \frac{1}{n} \sin(n\theta) \frac{d}{d\theta}, \frac{\sigma^n(\theta)}{n^2} (1 + \cos(n\theta)) \frac{d}{d\theta} \right\rangle. \quad (6.3)$$

де $\sigma^n(\theta) = \pm 1$ - константи на напіввідкритих інтервалах $\left[\frac{2\pi k}{n}, \frac{2\pi(k+1)}{n} \right)$, $k = 0, \dots, n-1$.

Знайдено рекурентні і явні комбінаторні формули для підрахунку кількості реалізацій алгебр (6.2) і (6.3) для кожного натурального числа n .

7 Апробація результатів, участь в конференціях, наукове співробітництво тощо

Результати, що ввійшли в підсумковий звіт доповідались виконавцями проекту на ряді міжнародних конференціях. Загалом, за 2016–2019 роки виконавцями зроблено понад 80 наукових доповідей на міжнародних конференціях. Щодо цілої низки висвітлених тут досягнень проводиться тісне наукове співробітництво з науковцями світу (зокрема, Австрії, Англії, Канади, Кіпру, Польщі, Чехії та ін.).

За звітний період проведено два міжнародних семінари “Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики” (Київ, 2016, 2018). Спільно з факультетом математики і статистики Університету Кіпру проведено 8-й та 9-й міжнародні семінари “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (Ларнака, Кіпр, 2016, 2018).

Спільні договори про наукове співробітництво

- 1) з Інститутом фізики Чеської академією наук, Прага, Чехія;
- 2) з факультетом математики та статистики університету Кіпру, Нікосія, Кіпр;
- 3) з факультетом фізики та астрономії університету Палермо, Палермо, Італія;
- 4) з факультетом математики університету Відня, Відень, Австрія;
- 5) з центром математичних досліджень та нелінійних явищ, Новий Сад, Сербія;
- 6) з центром математичних досліджень університету Монреалю, Монреаль, Канада;
- 7) з факультетом математики та статистики університету Саскачевану, Саскатун, Канада;
- 8) з кафедрою математики Чеського технічного університету;

- 9) з Інститутом біокібернетики ПАН, Польща;
- 10) з Ноттінгемським університетом, Великобританія.

У рамках цих договорів співробітниками відділу здійснено низку короткотермінових візитів у зазначені наукові центри.

Короткотермінові наукові візити

1. Інститут фізики Чеської академії наук, Прага, Чеська Республіка (А.Г. Нікітін, короткотермінові візити протягом 2016–2019).
2. Чеський технічний університет у Празі, Чеська Республіка (М.О. Нестеренко, А.Г. Нікітін, короткотермінові візити протягом 2016–2019).
3. Університет Кіпру, Нікосія, Кіпр (О.О. Ванєєва, Р.О. Попович, короткотермінові візити протягом 2016–2019).
4. Університет м. Опава, Чехія (Р.О. Попович, короткотермінові візити протягом 2016–2019).
5. Інститут біокібернетики ПАН, Польща (Р.М. Черніга, короткотермінові поїздки протягом 2016–2019).
6. Університет Лінчюпінгу, Швеція (Р.О. Попович, 2016, 2017).
7. Монреальський університет, Канада (М.О. Нестеренко, 2017).
8. Остравський університет, Чехія (Р.О. Попович, 2017, 2018).
9. Ноттінгемський університет, Великобританія (Р.М. Черніга, 2017).
10. Швейцарський федеральний технічний інститут (Р.М. Черніга, 2017).
11. Міжнародний цент теоретичної фізики, Трієст, Італія (Р.О. Попович, 2019).
12. Університет Цзілінь, Китай (А.Г. Нікітін, 2019).

Міжнародні та національні відзнаки, гранти, стипендії, тощо

1. Караджов Ю.А. отримав премію Президента України для молодих вчених (2016)
2. Черніга Р.М. отримував Грант № 912563 FP7-PEOPLE-2012-IIF (фаза повернення), 7 рамкова програма ЄС “Редукція та точні розв’язки граничних задач з рухомими межами методами, базованими на симетриях (BVPsymmetry)” (2016–2017)
3. Ванєєва О.О. отримала Премія для жінок в науці від Лореаль (2018).

Педагогічна діяльність

У 2019 році В.М. Бойко розробив і прочитав курс “Програмування: мова розмітки $\text{\LaTeX}$ ” (3 кредити, 90 годин, фіз.-мат. факультет КПІ). Керівництво науковою роботою 4 студентів 2-го курсу.

Випускниця Київського університету імені Бориса Грінченка О.В. Локазюк (у даний момент аспірантка відділу) — переможець Всеукраїнського конкурсу студентських наукових робіт, 2018 (науковий консультант В.М. Бойко).

10 студентів Київського університету імені Бориса Грінченка у 2018–2019 роках проходили виробничу практику в Інституті математики (відповідальний В.М. Бойко).

В.М. Бойко у 2018–2019 роках член ДЕК (111 Математика) факультету інформаційних технологій та управління Київського університету імені Бориса Грінченка. Керівництво курсовими роботами 3 студентів.

У 2019 році В.М. Бойко — член журі МАН (Київське відділення), керівник секція математики при Київському відділенні МАН.

**Підготовка кадрів
канд. фіз.-мат. наук**

Почекета О.А. Розширений груповий аналіз 2016
узагальнених рівнянь Бюргерса
наук. кер. Р.О. Попович

д-р фіз.-мат. наук

Бойко В.М. Узагальнені оператори Казіміра, 2018
сингулярні модулі редукції
та симетрії диференціальних рівнянь
наук. конс. Р.О. Попович

Видавнича діяльність, журнал SIGMA

З 2005 року видається міжнародний електронний журнал відкритого доступу: Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA), <https://www.emis.de/journals/SIGMA/>. На сьогодні імпакт-фактор журналу згідно Web of Sciences — 1,088, SJR згідно SCOPUS — 0,513 (найвищі показники серед часописів, що видаються в Україні).

Суттєво розширено електронний архів Українського математичного журналу, де на сьогодні вже розміщено онлайн архів журналу за 60 років (виконавець Е.Є. фон Діхтер), (див. <http://umj.imath.kiev.ua/>)

8 Публікації

У рамках проекту підготовлено 1 збірник наукових праць [57], захищені дві дисертації [12, 30] та опубліковано 77 наукових робіт. Перелік публікацій додається.

- [1] Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, *J. Math. Phys.* **57** (2016), 101503, 34 pp., arXiv:1201.3223.
- [2] Boyko V.M., Kunzinger M., Popovych R.O., Singular reduction modules of differential equations, Abstract of International workshop in honor of Wilhelm Fushchych “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 17–20, 2016), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016.
- [3] Boyko V.M., Popovych R.O. Algebraic approach and group classification of classes of linear ordinary differential equations, Book of Abstracts of 8th International Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (Larnaca, Cyprus, June 12–17, 2016), Nicosia, University of Cyprus, 2016, p. 18.
- [4] Vaneeva O., Karadzhov Yu., Sophocleous C., Group classification of variable coefficient nonlinear Kolmogorov equations, Book of abstracts of the 8th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”, (June 12–17, 2016, Larnaca, Cyprus), Nicosia, University of Cyprus, 2016, P. 37.
- [5] Vaneeva O., Karadzhov Yu., Sophocleous C., Group analysis of a class of nonlinear Kolmogorov equations, V. Dobrev (ed.), Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 191, XI International Workshop “Lie Theory and Its Application in Physics”, Springer, 2016, 349–360.
- [6] Єгорченко І.А., Відносні диференціальні інваріанти для дво- та тривимірних алгебр, Abstract of International workshop in honor of Wilhelm Fushchych “Symmetry and Integrability of Equations of

- Mathematical Physics” (Kyiv, December 17–20, 2016), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016.
- [7] Nesterenko M., Pošta S., Contraction admissible pairs of complex six-dimensional nilpotent Lie algebras, *Lie Theory and Its Applications in Physics* (June 2015, Varna, Bulgaria), Editor V. Dobrev, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 191, Springer, Berlin, 2016, 8 pages.
 - [8] Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2016), 115203, 22 pages.
 - [9] Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., On realizations of Galilei algebras, Book of abstracts of the 8th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”, (June 12–17, 2016, Larnaca, Cyprus), Nicosia, University of Cyprus, 2016, P. 30.
 - [10] Nesterenko M., Pošta S., Vaneeva O., Realizations of Galilei algebras, Abstract of International workshop in honor of Wilhelm Fushchych “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 17–20, 2016), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2016.
 - [11] Nikitin A.G., Zasadko T.M., Group classification of Schrödinger equations with position dependent mass, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2016), 365204, 17 pp.
 - [12] Почекета О.А., Розширений груповий аналіз узагальнених рівнянь Бюргерса, Дис. ... канд. фіз.-мат. наук, Київ, Інститут математики НАН України, 2016, 159 с.
 - [13] Спічак С.В., Стогній В.І., Групова класифікація нелінійного рівняння Колмогорова, Труди Міжн. конференції, присв. 80-річчю М.П. Ленюка, Чернівці, 2016, 230–231.
 - [14] Cherniha R., Gozak K., Waniewski J., Exact and numerical solutions of a spatially-distributed mathematical model for fluid and solute transport in peritoneal dialysis, *Symmetry* **8** (2016), 50 pp.

- [15] Cherniha R., King J.R., Kovalenko S., Lie symmetry properties of nonlinear reaction-diffusion equations with gradient-dependent diffusivity, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **36** (2016), 98–108.
- [16] Bihlo A., Popovych R.O., Group classification of linear evolution equations, *J. Math. Anal. Appl.* **448** (2017), 982–1005, arXiv:1605.09251.
- [17] Ванеєва О.О., Класифікація диференціальних рівнянь за симетрійними властивостями, *Вісник НАН України* (2017), no. 9, 33–40.
- [18] Ванеєва О.О., Жалій О.Ю., Ліївські та некласичні оператори редукції узагальнених рівнянь Фішера, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків (2017, 7–10 червня, Київ, Україна), 2017, С. 79.
- [19] Vaneeva O., Pošta S., Equivalence groupoid of a class of variable coefficient Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 101504, 12 pp.
- [20] Vaneeva O., Pošta S., Sophocleous C., Enhanced group classification of Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Appl. Math. Lett.* **65** (2017), 19–25.
- [21] Єгорченко І.А., General solution for coupled system of eikonal equations, Proceedings of 15th Conference “Mathematics in Technical and Natural Sciences”, Koscielisko, Poland, 2017.
- [22] Єгорченко І.А., Relative differential invariants and invariant equations, Тези Міжнародної конференції з диференціальних рівнянь, математичної фізики та застосувань, Черкаси, 2017.
- [23] Pocheketa O.A., Popovych R.O., Extended symmetry analysis of generalized Burgers equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 101501, 28 pp., arXiv:1603.09377.
- [24] Opanasenko S., Bihlo A., Popovych R.O., Group analysis of general Burgers–Korteweg–de Vries equations, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 081511, 37 pp., arXiv:1703.06932.

- [25] Nikitin A.G., Kinematical invariance groups of the 3d Schrödinger equations with position dependent masses, *J. Math. Phys.* **58** (2017), 083508, 16 pp.
- [26] Спичак С.В., Стогний В.И., Копась И.Н. Групповая классификация одного класса обобщенных нелинейных уравнений Колмогорова, Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования, Санкт-Петербург, РГПУ им. Герцена, 2017, 102–104.
- [27] Spichak S.V., Classification of realizations of lie algebras of vector fields on a circle, Proceedings of 15th Conference “Mathematics in Technical and Natural Sciences”, Koscielisko, Poland, 2017.
- [28] Cherniha R., Davydovych V., Muzyka L., Lie symmetries of the Shigesada–Kawasaki–Teramoto system, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **45** (2017), 81–92.
- [29] Cherniha R., Didovych M., A $(1 + 2)$ -dimensional simplified Keller–Segel model: Lie symmetry and exact solutions. II, *Symmetry* **98** (2017), 13 pp.
- [30] Бойко В.М., Узагальнені оператори Казіміра сингулярні модулі редукції та симетрії диференціальних рівнянь, Дис. ... док. фіз.-мат. наук, Київ, Інститут математики НАН України, 2018, 338 с.
- [31] Boyko V.M., Extended generalized equivalence groups of classes of linear ordinary differential equations, Book of Abstracts of the 9th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (June 10–14, 2018, Larnaca, Cyprus), Nicosia, University of Cyprus, p. 18.
- [32] Boyko V.M., Popovych R.O., Extended generalized equivalence groups of classes of linear ordinary differential equations, Abstract of International workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 21–24, 2018), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2018.
- [33] Ванєєва О.О., Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку, Сучасні проблеми механіки та мате-

- матики: збірник наукових праць у 3-х т. / за заг. ред. А.М. Самойленка та Р.М. Кушніра, Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2018, Т. 3, 97–98.
- [34] Vaneeva O., Equivalence groupoids of classes of evolution equations, Abstract of International workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 21–24, 2018), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2018.
- [35] Ванеєва О.О., Бойко В.М., Жалій О.Ю., Точні розв’язки рівнянь Ньюела–Вайтхеда–Сегеля зі змінними коефіцієнтами, Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” (21–22 червня 2018 р.), НУХТ, Київ, 2018, с. 14.
- [36] Vaneeva O., Boyko V., Zhaliy A., Sophocleous C., Classification of Lie and nonclassical reduction operators for a class of generalized Newell–Whitehead–Segel equations, Book of abstracts of the 9th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (June 10–14, 2018, Larnaca, Cyprus), Nicosia, University of Cyprus, p. 39.
- [37] Vaneeva O., Zhaliy A., Magda O., Group analysis of a class of generalized Kawahara equations, Abstract of International workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 21–24, 2018), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2018.
- [38] Davydovych V., Lie symmetry of the diffusive Lotka–Volterra system with time-dependent coefficients, *Symmetry* **10** (2018), 15 pp.
- [39] Yehorchenko I., Conditional differential invariants and equations reducible by means of subalgebras of the Poincaré algebra, Abstract of International workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 21–24, 2018), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2018.

- [40] Zinenko V.I., Classification of low-dimensional Lie algebras, Abstract of International workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 21–24, 2018), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2018.
- [41] Kurujiyibwami C., Basarab-Horwath P., Popovych R.O., Algebraic method for group classification of $(1+1)$ -dimensional linear Schrödinger equations, *Acta Appl. Math.* **157** (2018), 171–203, arXiv:1607.04118.
- [42] Lokazyuk O.V., Group classification and exact solutions of equations of the type of nonlinear thermal conductivity, Abstract of International workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 21–24, 2018), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2018.
- [43] Nesterenko M., Pošta S., Differential invariants and realizations of the deformed smallest Galilei algebra, *Physics Particles Nuclei* **49** (2018), 949–951.
- [44] Nesterenko M., Pošta S., Comparison of realizations of Lie algebras, *J. Phys. Conf. Ser.* **965** (2018), 012028, 6 pp.
- [45] Nesterenko M., Pošta S., Equivalence of vector field realizations of Lie algebras from the Lie group point of view QTS-X/LT-XII (June 2017, Varna, Bulgaria), Quantum Theory and Symmetries with Lie Theory and Its Applications in Physics, Vol. 1, 2018, 421–427.
- [46] Нестеренко М., Еквівалентність реалізацій алгебр Лі, Матеріали Міжнародної науково-методичної конференції “Сучасні науково-методичні проблеми математики у вищій школі” (21–22 червня 2018 р.), НУХТ, Київ, 2018, с. 21.
- [47] Nesterenko M., Pošta S., Contractions of Lie algebras realizations, Abstract of International workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 21–24, 2018), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2018.

- [48] Nikitin A.G., The maximal “kinematical” invariance group for an arbitrary potential revised, *J. Math. Phys. Geom.* **14** (2018), no. 4, 519–531.
- [49] Opabasenko S.V., Popovych R.O., Generalized symmetries and conservation laws of (1+1)-dimensional Klein–Gordon equation, Abstract of International workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 21–24, 2018), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2018.
- [50] Rassokha I., Serov M., Spichak S., Stogniy V., Group classification of a class of generalized nonlinear Kolmogorov equations and exact solutions, *J. Math. Phys.* **59** (2018), 071514, 14 pp.
- [51] Spichak S., Stogniy V., Symmetric properties and exact solutions of the linear equation of pricing of the Asian option, Abstract of International workshop “Symmetry and Integrability of Equations of Mathematical Physics” (Kyiv, December 21–24, 2018), Abstract, Kyiv, Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2018.
- [52] Спічак С.В., Стогній В.І., Копась І.Н., Горбунова О. Симетрійні властивості та точні розв’язки (2+1)-вимірного лінійного рівняння ціноутворення азійського опціону, Collection of scientific papers of Intern. Conf. “Modern problems of mechanics and mathematics”, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, L’viv, 2018, Vol. 3, 165–166.
- [53] Spichak S., Stogniy V., Kopas I., Symmetries and fundamental solutions of (2+1)-dimensional linear equation of pricing of Asian option, Book of abstracts of the 9th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems;; (June 10–14, 2018, Larnaca, Cyprus), Nicosia, University of Cyprus, p. 36.
- [54] Cherniha R., Davydovych V., King J.R., Lie symmetries of nonlinear parabolic-elliptic systems and their application to a tumour growth model, *Symmetry* **10** (2018), 21 pp.

- [55] Bihlo A., Dos Santos Cardoso-Bihlo E., Popovych R.O., Differential invariants for a class of diffusion equations, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 50–65, arXiv:1909.00477.
- [56] Boyko V.M., Generalized Casimir operators of solvable Lie algebras, Book of Abstracts of Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (September 24–26, 2019, Kyiv), Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, p. 96.
- [57] Бойко В.М., Ванеєва О.О., Нестеренко М.О., Нікітін А.Г., Попович Р.О. (редактори), Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 204 с.
- [58] Бойко В.М., Локазюк О.В., $(1+1)$ -вимірні нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з максимальними ліївськими симетріями, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 16–21.
- [59] Ванеєва О., Групоїди еквівалентності класів нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку стаття, *Доповіді НАН України* (2019), no. 5, 3–10.
- [60] Ванеєва О., Точні розв’язки рівнянь Фішера з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 44–49.
- [61] Ванеєва О.О., Нормалізовані класи квазілінійних еволюційних рівнянь другого порядку, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків (6–8 червня, 2019, Київ, Україна), С. 50.
- [62] Vaneeva O., Transformation and normalization properties of evolution equations, Abstracts of XI International Workshop “Lie theory and its applications in physics” (June 17–23, 2019, Varna, Bulgaria), p. 20.
- [63] Vaneeva O., Equivalence groupoids, normalization property and group classification problems for evolution equations, Abstracts of 10th Mathematical Physics Meeting: School and Conference on Modern Mathematical Physics (September 9–14, 2019, Belgrade, Serbia), 48–49.

- [64] Vaneeva O., Equivalence groupoids in the group classification problems, Book of Abstracts of Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (September 24–26, 2019, Kyiv), Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, p. 119.
- [65] Vaneeva O., Boyko V., Zhalij A., Sophocleous C., Classification of reduction operators and exact solutions of variable coefficient Newell–Whitehead–Segel equations, *J. Math. Anal. Appl.* **474** (2019), no. 1, 264–275.
- [66] Єгорченко І.А., Розв’язки системи пов’язаних рівнянь ейконалу, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 66–77.
- [67] Zhalij A., On quantum integrable systems in three-dimensional magnetic fields, Book of Abstracts of Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of Theoretical and Mathematical Physics” (September 24–26, 2019, Kyiv), Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, Kyiv, p. 122.
- [68] Жалій О.Ю., Бурде Г.І., Точно-розв’язні моделі гідродинамічної стійкості, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 78–83.
- [69] Зіненко В.І., Класифікація низькорозмірних алгебр Лі та обчислення їх характеристик, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків (6–8 червня, 2019, Київ, Україна), С. 58.
- [70] Zinenko V., Classification of low-dimensional Lie algebras and computation of their characteristics, Abstracts of XI International Workshop “Lie theory and its applications in physics” (June 17–23, 2019, Varna, Bulgaria), p. 22.
- [71] Kontogiorgis S., Popovych R.O., Sophocleous C., Enhanced symmetry analysis of two-dimensional Burgers system, *Acta Appl. Math.* **163** (2019), 91–128, arXiv:1709.02708.
- [72] Локазюк О.В., Нелінійні еволюційні рівняння другого порядку з алгебрами ліївських симетрій максимальної розмірності, Тези доповід-

- ей Міжнародної конференції молодих математиків (6–8 червня, 2019, Київ, Україна), С. 62.
- [73] Myronova M., Nesterenko M., Generic realizations of conformal and de Sitter algebras, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 100–112.
 - [74] Nesterenko M., Pošta S., Discrete analysis on non-cubic lattices, *J. Phys. Conf. Ser.* **1416** (2019), 8 pp.
 - [75] Nesterenko M., Pošta S., Contractions of realizations of Lie algebras, Тези доповідей Міжнародної конференції молодих математиків (6–8 червня, 2019, Київ, Україна), С. 38.
 - [76] Nikitin A.G., Supersymmetries in Schrödinger–Pauli equations and in Schrödinger equations with position dependent mass, in Integrability, Supersymmetry and Coherent States, Springer, Cham, 2019, 133–162.
 - [77] Nikitin A.G., Exact solvability of PDM systems with extended Lie symmetries, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 113–130.
 - [78] Спичак С.В., Стогний В.И., Копась И.Н., Симметрии Ли и фундаментальные решения линейного $(2+1)$ -мерного уравнения ценообразования азиатских опционов, Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования, Санкт-Петербург, РГПУ им. Герцена, 2019, 89–90.
 - [79] Спичак С.В., Стогний В.И., Копась І.М., Симетрійні властивості та точні розв’язки $(2+1)$ -вимірною лінійного рівняння ціноутворення азійських опціонів, *Зб. праць Ін-ту математики НАН України* **16** (2019), no. 1, 164–173.
 - [80] Cherniha R., Davydovych V., A hunter-gatherer–farmer population model: Lie symmetries, exact solutions and their interpretation, *Eur. J. Appl. Math.* **30** (2019), 338–357.