

УДК 517.9

КП

№ держреєстрації 0111U001030

Інв. №

**Національна академія наук України
Інститут математики**

01601, м.Київ-4, вул. Терещенківська, 3, тел. (044) 2345150;
факс 38-044-2352010

Затверджую

Директор Інституту математики
академік НАН України

А.М.Самойленко

8.12.2015 р.

**ЗВІТ
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ**

**ДОСЛІДЖЕННЯ СПЕКТРАЛЬНИХ
ХАРАКТЕРИСТИК ТА КРИТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ
СКЛАДНИХ СИСТЕМ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ
(Заключний)**

Керівник НДР

завідувач відділу Математичної фізики

док.фіз.-мат. наук, професор

О.Л.Ребенко

2015

Рукопис закінчено 1 грудня 2015 р.

Результати цієї роботи розглянуто Вченою Радою ІМ НАН України
протокол №. 15 від 8 грудня 2015 року

СПИСОК АВТОРІВ

Керівник роботи завідувач відділу доктор фіз.-мат.наук, професор	О.Л. Ребенко (реферат, вступ, розділ 1, висновки)
Відповідальний виконавець провідний науковий співробітник доктор фіз.-мат.наук	В. І. Скрипник (підрозділ 1.5.3, розділ 2)
Відповідальний виконавець провідний науковий співробітник доктор фіз.-мат.наук	В.Д. Кошманенко (розділи 3,4)
Відповідальний виконавець провідний науковий співробітник доктор фіз.-мат.наук	Н.В. Зорій (розділи 5-8)
Виконавець старший науковий співробітник кандидат фіз.-мат.наук	П. В. Малишев (підрозділ 1.4.1)
Виконавець молодший науковий співробітник кандидат фіз.-мат.наук	С.М. Петренко (підрозділи 1.4.2, 3.3)
Виконавець молодший науковий співробітник кандидат фіз.-мат.наук	М. В. Тертичний (підрозділ 1.4.2)
Виконавець молодший науковий співробітник кандидат фіз.-мат.наук	Н.В. Харченко (розділ 3.1)
Виконавець головний інженер-дослідник кандидат фіз.-мат.наук	Т.В.Каратаєва (підрозділ 3.1)
Виконавець аспірант	В. А. Болух (підрозділи 1.3-1.5,)

РЕФЕРАТ

Звіт по НДР: 109 с., 86 джерел

Об'єкт дослідження – системи, що описують неперервні та гратчасті системи статистичної механіки, квантові гіббсівські системи, нерівноважні стохастичні системи, система Максвелла-Лоренца електромагнітного поля, що взаємодіє з зарядженими частинками в наближенні Дарвіна, в якому лагранжіан та гамільтоніан частинок відщеплені від електромагнітного поля, складні динамічні системи, які описують конфліктну взаємодію альтернативних субстанцій.

Методи дослідження – методи нескінченновимірного аналізу, теорії операторів, теорії динамічних та стохастичних процесів.

В рамках науково-дослідницької роботи отримані наступні результати:
проведений детальний математичний опис сучасних методів моделей квантової теорії поля;

методом нескінченновимірного пуассонівського аналізу доведено теорему про експоненціальне представлення деяких інтегралів за мірою Лебега-Пуассона, яка спрощує побудову розкладів Майєра для термодинамічних потенціалів;

побудований розв'язок рівнянь Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Йовена за допомогою нескінченновимірних інтегралів за мірою Пуассона;

доведено, що послідовність кореляційних функцій ρ_R , що відповідає фінітному потенціалу збігається до ρ за нормою простору Рюелля E_ξ ;

введена модель *коміркового газу*, яка є проміжною між моделями *гратчастих газів* і неперервними системами статистичної механіки;

доведені теореми, які стверджують, що тиск та вільна енергія коміркового газу апроксимують відповідні термодинамічні функції неперервних статистичних систем з довільною наперед заданою точністю;

побудовано розклад Майєра у формі Бріджеса-Федербуша для системи точкових частинок, які взаємодіють за допомогою неінтегрованого потенціалу взаємодії;

побудовано нові розклади для термодинамічних потенціалів статистичної механіки, які дають можливість покращити результати радіус збіжності розкладу Майєра;

запропоноване нове коротке доведення збіжності високотемпературних

полімерних розкладів канонічних кореляційних функцій граткових класичних та квантових гіббсівських систем осциляторів, які взаємодіють завдяки парному та тернарному потенціалам, а також нерівноважних стохастичних систем осциляторів, які взаємодіють завдяки парному потенціалу з гіббсівськими початковими кореляційними функціями;

знайдені розв'язки впорядкованого узагальненого рівняння Кірквуда-Зальцбурга, що описує рівновагу у граткових класичних та квантових системах осциляторів з суперстійкими багато-частинковими потенціалами, а також еволюцію у стохастичних системах граткових осциляторів з парними потенціалами взаємодії та гіббсівськими початковими станами;

для рівняння руху частинок з апроксимованим гамільтоніаном Дарвіна, що узагальнює гамільтоніан Кулона, доведено існування розв'язків на скінченному часовому інтервалі з допомогою теорем Коші та Ляпунова. Розв'язки представлені як голоморфні функції або часу або початкових даних, що не допускають зіткнення між частинками;

знайдені періодичні та обмежені розв'язки рівнянь руху Кулона на прямій двох та трьох негативних однакових точкових зарядів в полі двох та трьох точкових фіксованих симетрично розташованих зовнішніх зарядів. При цьому використані теореми Зігеля, Мозера та Вайнстайна;

для $n \geq 3$ точкових площинних зарядів $e_j < 0, j = 1, \dots, n-1, e_n > 0$ знайдено точні розв'язки типу Лагранжа рівнянь руху Кулона. Для $n > 3$ всі негативні заряди однакові та мають рівні маси. Ці розв'язки описують рух негативних зарядів уздовж кеплерових орбіт навколо нерухомого додатнього заряду таким чином, що їх координати збігаються з вершинами правильного багатокутника;

для математичних моделей складних конфліктних систем виведені універсальні еволюційні рівняння, одержані умови забезпечення пріоритету у заданому регіоні, доведено існування рівноважних (компрімісних) станів та циклічних орбіт;

побудовано низку моделей конфлікту складних систем та досліджено поведінку їх траєкторій;

введено поняття системи конфлікту в термінах пар імовірнісних мір, показано, що кожна траєкторія з початковим станом, заданим парою мір збігається до рівноважного стану, який фіксується нормованими компонентами класичного розкладу Гана-Жордана;

дано опис граничних розподілів станів динамічної системи конфлікту асоційованої з парою стохастичних матриць нескінченного рангів в термінах нескінчених добутоків розкладів Хана - Жордана дискретних зарядів;

введено поняття спектральної міри із квазіточковим спектром. Доведено, що в процесах конфліктної взаємодії між фізичними системами граничні стани з чисто точковим виникають лише при переходах із початкових станів, які задані мірами з квазіточковим спектром;

розвинуто методи спектрального аналізу для операторів математичної фізики збурених сингулярними квадратичними формами;

розроблено новий ефективний підхід до дослідження істотно некомпактних екстремальних задач теорії потенціалу над нескінченномірними векторними мірами Радона в локально компактному просторі, що ґрунтується на впровадженні належних метричних структур та доведенні теореми про повноту відповідних метричних просторів;

побудована теорія внутрішніх ємностей конденсаторів зі зчисленною кількістю пластин довільної топології. Дослідження були мотивовані тим фактом, що у некомпактному випадку основна варіаційна задача цієї теорії є, взагалі кажучи, нерозв'язною. Для вельми загального ядра знайдено постановки варіаційних задач, дуальних до основної, але тепер вже завжди розв'язних. Їхні розв'язки приводять до природного узагальнення класичного поняття внутрішньої рівноважної міри, асоційованої з множиною. Дано опис цих розв'язків, їхніх потенціалів та відповідних рівноважних констант, вивчено властивості єдиності та неперервності, виділено характеристичні властивості;

у локально компактному просторі вивчено варіаційну задачу Гаусса про мінімум енергій за наявності зовнішніх полів в класичній та мажорантних постановках. Встановлено достатні та/або необхідні умови існування розв'язків, досліджено питання єдиності та неперервності, дано опис вагових рівноважних потенціалів та відповідних вагових рівноважних констант, виділено характеристичні властивості;

в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, отримано конструктивний та чисельний розв'язки варіаційної задачі Гаусса відносно ядра Ріса порядку $\alpha \in (1, n)$ для скінченного числа неперетинних компактних $(n-1)$ -розмірних ліпшицевих многовидів Γ_i , $i \in I$, без краю. Це стало можливим дякуючи доведеній теоремі про еквівалентність початкової задачі належній задачі мінімізації у просторі Соболева-Слободецького $H^{(1-\alpha)/2}(\Gamma)$, де $\Gamma := \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$.

ТЕРМОДИНАМІЧНІ ПОТЕНЦІАЛИ, РІВНЯННЯ КІРКВУДА - ЗАЛЬ-
ЦБУРГА, РІВНЯННЯ БОГОЛЮБОВА, НАДСТІЙКИ ПОТЕНЦІАЛИ, РОЗ-
КЛАДИ МАЙЄРА, КОМІРКОВИЙ ГАЗ, СИСТЕМА МАКСВЕЛЛА - ЛО-
РЕНЦА, СПЕКТРАЛЬНА ТЕОРІЯ, ДИНАМІЧНА СИСТЕМА КОНФЛІ-
КТУ, КВАЗІТОЧКОВИЙ СПЕКТР, СИНГУЛЯРНИЙ СПЕКТР, ТЕОРІЯ
СИНГУЛЯРНИХ ЗБУРЕНЬ, ШКАЛА СОБОЛЕВСЬКИХ ПРОСТОРІВ, ДИ-
ФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ, ЦИКЛІЧНІ ОР-
БІТИ, ω -ІНВАРІАНТНІ СТАНИ, ВЕКТОРНІ МІРИ РАДОНА НЕСКІН-
ЧЕННОЇ РОЗМІРНОСТІ, ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА ГАУССА, ЄМНІСТЬ КОН-
ДЕНСАТОРА

ЗМІСТ

Вступ	9
1 Дослідження складних систем статистичної механіки методами нескінченновимірного аналізу	16
1.1. Простори конфігурацій, міри, умови на потенціал взаємодії.....	16
1.2. Експоненціальне представлення деяких інтегралів за мірою Лебега-Пуассона та його застосування	20
1.3. Побудова розв'язків рівнянь статистичної механіки за допомогою нескінченновимірних інтегралів за мірою Лебега-Пуассона	23
1.3.1. Рівняння Кірквуда-Зальцбурга для кореляційних функцій рівноважних систем	23
1.3.2. Рівняння BBGKY	25
1.4. Апроксимації неперервних статистичних систем	30
1.4.1. Апроксимація фінітними потенціалами	30
1.4.2. Модель коміркового газу	33
1.5. Нові розклади для термодинамічних функцій	34
1.5.1. Розклад Бріджеса-Федербуша для систем з посилено надстійкою взаємодією	34
1.5.2. Про нову форму запису розкладів Майєра.....	35
1.6. Упорядковане граткове рівняння Кірквуда-Зальцбурга	37
2 Дослідження рівнянь руху заряджених частинок з апроксимованим гамільтоніаном Дарвіна	40
2.1. Локальна динаміка зарядів першого наближення.....	40
2.2. Глобальна динаміка зарядів і рівновага.....	43
3 Дослідження складних динамічних систем конфлікту	49
3.1. Побудова моделей динамічних систем конфлікту.....	49
3.2. Застосування спектральної теорії до моделей динамічних систем з конфліктною взаємодією. Дослідження структури спектру ...	68
3.3. Існування інваріантних станів	70
4 Проблема щільних вкладень	74
5 Екстремальні задачі теорії потенціалу над нескінченномірними векторними мірами Радона. Теорія внутрішніх ємностей конденсаторів	76
5.1. Позначення, означення, відомі факти	77

5.2. Нескінченномірні векторні міри Радона, асоційовані з конденсаторами; їхні енергії та потенціали	79
5.3. Внутрішня ємність конденсатора	82
5.4. Теорема про сильну повноту	83
5.5. Достатні умови розв'язності основної екстремальної задачі	84
5.6. Дуальні варіаційні задачі	85
6 Варіаційна задача Гаусса у її класичній постановці	89
6.1. Постановка задачі	89
6.2. Про єдиність розв'язків варіаційної задачі Гаусса	90
6.3. Опис $\mathbf{f}$ -вагових потенціалів розв'язків задачі Гаусса	91
6.4. Достатні умови існування розв'язків задачі Гаусса. Неперервність розв'язків та f -вагових рівноважних констант ..	92
6.5. Критерій розв'язності варіаційної задачі Гаусса	94
7 Варіаційна задача Гаусса в мажорантній постановці Є. Рахманова	96
8 Варіаційна задача Гаусса з ядром Ріса над ліпшицевими многовидами	99
Висновки	101
Перелік посилань	103

ВСТУП

Характерною рисою сучасної математичної фізики є дослідження, які пов'язані не тільки з фізичною природою тіл, що нас оточують, а й такі, що описують біологічні, екологічні, економічні та інші системи. Дослідження по цих напрямках проводяться в усіх розвинених країнах світу, серед яких можна виділити Німеччину, Італію, Францію, Росію, США. В Україні, крім Інституту математики НАНУ можна відзначити Харківський фізико-технічний інститут та Харківський університет.

Дослідження, що проводилися виконавцями теми у 2011-2015 роках були присвячені наступним фундаментальним напрямкам:

- 1) Дослідження складних систем статистичної механіки методами нескінченновимірної аналізу.
- 2) Дослідження рівнянь Кірквуда-Зальцбурга з багато-частинковими потенціалами взаємодії.
- 3) Дослідження рівнянь руху заряджених частинок з апроксимованим гамільтоніаном Дарвіна.
- 4) Дослідження складних динамічних систем конфлікту.
- 5) Проблема щільних вкладень у шкалі Соболевських просторів.
- 6) Розробці нового ефективного підходу до дослідження істотно некомпактних екстремальних задач теорії потенціалу над нескінченномірними векторними мірами Радона у локально компактному просторі.
- 7) Завершенню побудови теорії внутрішніх ємностей конденсаторів зі зчисленною кількістю пластин довільної топологічної структури у локально компактному просторі відносно вельми загального додатно визначеного ядра.
- 8) Дослідженню добре відомої варіаційної задачі Гаусса про мінімум енергій за наявності зовнішніх полів як в класичній постановці, так і в мажорантній постановці Є. Рахманова.
- 9) Конструктивному та чисельному розв'язанню варіаційної задачі Гаусса про мінімум енергій Ріса за наявності зовнішніх полів над многовидами Ліпшиця.

Результати з розвинення перших двох напрямків викладені в першому розділі звіту. Зокрема, доведено теорему про експоненціальне представлення деяких інтегралів за мірою Лебега-Пуассона, яка спрощує побудову розкладів Майєра для термодинамічних потенціалів [2].

Запропонований новий метод доведення рівнянь Боголюбова-Борна-Гріна-

Кірквуда-Йовена (VBGKY) Побудований розв'язок рівнянь VBGKY за допомогою нескінченновимірних інтегралів за мірою Пуассона [3].

Досліджена нескінченна система точкових частинок, взаємодія в яких визначається стійким двочастинковим потенціалом ϕ з нескінченним радіусом дії. Введена послідовність фінітних потенціалів взаємодії ϕ_R , яка поточно збігається до ϕ при $R \rightarrow \infty$. Доведено, що відповідна послідовність кореляційних функцій ρ_R збігається до ρ за нормою простору Рюелля E_ξ [5].

Для неперервних нескінченних систем класичної статистичної механіки з посилено надстійкою взаємодією введена модель *коміркового газу*, яка є проміжною між моделями *гратчастих газів* і неперервними системами статистичної механіки [6].

Сім'я апроксимованих кореляційних функцій визначається таким чином, що враховують тільки такі конфігурації в $\mathbb{R}^d$, для яких для заданого розбиття $\mathbb{R}^d$ на неперетинні гіперкубики об'ємом a^d у кожному кубіку міститься не більше однієї частинки. Доведено, що ці функції поточно збігаються до кореляційних функцій неперервної системи при $a \rightarrow 0$ для довільних значень оберненої температури β і активності z . Цей результат доведений для парного і багаточастинкового потенціалу взаємодії [7].

Для моделі коміркового газу, яка апроксимує неперервну систему доведено, що вільна енергія збігається до вільної енергії класичного газу, якщо розміри комірок прямують до нуля [8].

Побудовано розклад Майєра у формі Бріджеса-Федербуша для системи точкових частинок, які взаємодіють за допомогою неінтегрованого потенціалу взаємодії [4].

Побудовано нові розклади для термодинамічних потенціалів статистичної механіки, які дають можливість покращити результати для радіусу збіжності розкладу Майєра [9].

Запропоноване нове коротке доведення збіжності високотемпературних полімерних розкладів канонічних кореляційних функцій граткових класичних та квантових гіббсівських систем осциляторів, які взаємодіють завдяки парному та тернарному потенціалам, а також нерівноважних стохастичних систем осциляторів, які взаємодіють завдяки парному потенціалу з гіббсівськими початковими кореляційними функціями [10].

Знайдені розв'язки впорядкованого узагальненого рівняння Кірквуда-Зальцбурга, що описує рівновагу у граткових класичних та квантових систе-

мах осциляторів з суперстійкими багато-частинковими потенціалами, а також еволюцію у стохастичних системах ґраткових осциляторів з парними потенціалами взаємодії та гіббсівськими початковими станами [11].

У другому розділі для рівняння руху частинок з апроксимованим гамільтоніаном Дарвіна, що узагальнює гамільтоніан Кулона, доведено існування розв'язків на скінченому часовому інтервалі з допомогою теорем Коші та Ляпунова. Розв'язки представлені як голоморфні функції або часу або початкових даних, що не допускають зіткнення між частинками [12]. Знайдені періодичні та обмежені розв'язки рівнянь руху Кулона на прямій двох та трьох негативних однакових точкових зарядів в полі двох та трьох точкових фіксованих симетрично розташованих зовнішніх зарядів. При цьому використані теореми Зігеля, Мозера та Вайнстайна [13]. Для $n \geq 3$ точкових площинних зарядів $e_j < 0, j = 1, \dots, n-1, e_n > 0$ знайдено точні розв'язки типу Лагранжа рівнянь руху Кулона. Для $n > 3$ всі негативні заряди однакові та мають рівні маси. Ці розв'язки описують рух негативних зарядів уздовж кеплерових орбіт навколо нерухомого додатнього заряду таким чином, що їх координати збігаються з вершинами правильного багатокутника [14].

Третій розділ присвячений побудові моделей складних динамічних систем конфлікту, дослідженню їх властивостей та властивостей їх траєкторій. Методами аналізу систем різницевих диференціальних рівнянь нелінійної динаміки досліджено модель динамічної системи конфліктної тріади, яка описує взаємодію між трьома природними субстанціями: популяцією біологічного виду, навколишнім середовищем (ресурс існування), та негативними факторами для існування (інфекція). Встановлено наявність основних фаз співіснування субстанцій тріади: стану динамічної рівноваги (нерухомої точки), циклічних атракторів, періодично осцилюючих траєкторій, та еволюцій близьких до хаотичних. На контурних моделях показано існування біфуркаційних точок та порогів переходу між різними фазами. Розроблено новий метод передбачення поширення інфекції в біологічному середовищі на основі моделі "інфекція-щеплення".

Побудована модель динамічної системи конфлікту між альтернативними стихіями типу "Вогонь-Вода" при наявності зовнішнього впливу. Ця модель описує конфліктну взаємодію альтернативних стихій при систематичному зовнішньому підживленні (аналог сонячної радіації) та внутрішньому перемішуванні (аналог вітру). Доведено існування періодичних орбіт. В загальному

випадку встановлена збіжність траєкторій системи до ω -граничних циклічних орбіт. Проведено комп'ютерне моделювання нелінійної динаміки систем з конфліктною взаємодією.

Одержані комп'ютерні варіанти моделі описують циклічну систему "вогонь-вода" та пульсуючу систему "інфекція-щеплення як в дискретному часі, так і в неперервному.

В контексті динамічної картини взаємодіючих фізичних систем введено поняття спектральної міри із квазі-точковим спектром [15]. Показано, що при конфліктній взаємодії з точковими мірами лише квазі-точкові сингулярно неперервні спектральні міри можуть трансформуватися в міри з чисто точковим спектром.

Проведено дослідження структури спектру та його властивостей для мір, які, зокрема, можуть виникнути як граничні стани динамічних систем з конфліктною взаємодією. Встановлено зв'язок між побудовою нескінченного добутку імовірнісних мір та спектральною властивістю міри мати структурну подібність. Досліджена тонка структура сингулярно неперервних мір побудованих за допомогою згорток Бернуллі випадкових величин з незалежними $\tilde{Q}$ -символами.

Введено поняття системи конфлікту в термінах пар імовірнісних мір та побудовано декілька моделей систем конфлікту. Зокрема показано, що кожна траєкторія з початковим станом, заданим парою мір μ, ν , збігається до рівноважного стану, який фіксується нормованими компонентами μ_+, ν_+ класичного розкладу Гана-Жордана заряду $\omega = \mu - \nu$.

Вивчено властивості структурно подібних мір на відрізку. Показано, що довільна структурно подібна міра на $[0, 1]$ є образ-мірою нескінченного прямого добутку деякої послідовності дискретних ймовірнісних мір. Детально вивчено тонку структуру ймовірнісних розподілів і мір в загальному підході представлень в термінах Q -символів.

Досліджено граничні розподіли станів динамічної системи конфлікту асоційованої з парою стохастичних матриць нескінченного рангу. Дано опис цих станів в термінах нескінчених добутків розкладів Хана - Жордана дискретних зарядів.

у четвертому розділі розвинуто методи спектрального аналізу для операторів математичної фізики збурених сингулярними квадратичними формами. В шкалі гільбертових просторів проведена класифікація сингулярних

збурень і побудована спектральна теорія збурених самоспряжених операторів. В термінах ємності компактної множини встановлено критерій щільності у просторі Соболева підпростору із функцій зосереджених на доповнені до множини нульової міри Лебега.

В п'ятому розділі запропоновано та обґрунтовано нові ефективні методи дослідження екстремальних задач теорії потенціалу над некомпактними класами нескінченномірних векторних мір Радона, асоційованих з конденсаторами. Для подолання труднощів, викликаних нескінченною розмірністю векторних мір та їхньою широкою некомпактністю, розроблено принципово новий підхід у порівнянні з раніше відомими, що ґрунтується на впровадженні над векторними мірами належних метричних структур та має у своїй основі наступні дві доведені у звітний період теореми. Перша стверджує, що для довільного додатно визначеного ядра множина всіх нескінченномірних векторних мір Радона, асоційованих з конденсатором, утворює напівметричний простір, ізометричний до належним чином визначеного напівметричного простору скалярних мір. Друга теорема виділяє топологічні підпростори напівметричного простору нескінченномірних векторних мір, які за певних вельми загальних припущень виявляються повними, а індукована на них сильна топологія є сильнішою ніж широка. Див. [67, 74, 75, 78, 80].

Як приклад застосування розроблених методів дослідження істотно некомпактних екстремальних задач теорії потенціалу над нескінченномірними векторними мірами Радона, знайдено необхідні та достатні умови розв'язності варіаційної задачі Гаусса у класичній постановці про мінімум енергій векторних мір за наявності зовнішніх полів, що навіть в сенсі достатніх умов складало відкриту проблему протягом кількох десятиліть. Див. [74, 75, 78, 80].

Шостий розділ присвячений завершенню побудови теорії внутрішніх ємностей конденсаторів зі зчисленною кількістю пластин довільної топологічної структури у локально компактному просторі відносно вельми загального додатно визначеного ядра. Під конденсатором розуміється зчислений, локально скінченний набір довільних множин, кожній з яких приписано знак $+1$ або -1 та замикання пластин протилежного знаку взаємно не перетинаються. Дослідження були мотивовані тим добре знаним фактом, що у некомпактному випадку основна варіаційна задача теорії внутрішніх ємностей конденсаторів є, взагалі кажучи, нерозв'язною і цей феномен має місце навіть за вельми природних припущень (скажімо, для ядер Ньютона, Гріна або Ріса в евклідовому

просторі та замкнених двохпластинних конденсаторів). Тому було важливо знайти постановки варіаційних задач, дуальних до основної варіаційної задачі (і які, отже, могли б слугувати новими еквівалентними означеннями ємностей конденсаторів), але вже завжди розв'язних — навіть для незамкнених конденсаторів з нескінченною кількістю пластин.

Для довільного додатно визначеного ядра у локально компактному просторі, що задовольняє відому умову В. Fuglede узгодженості між сильною та широкою топологіями над простором мір Радона зі скінченною енергією, задачі з бажаними властивостями поставлено та розв'язано. Їхні розв'язки приводять до природного узагальнення класичного поняття внутрішньої рівноважної міри, асоційованої з множиною. Дано опис цих розв'язків, їхніх потенціалів та відповідних рівноважних констант, вивчено властивості їхньої єдиності та неперервності, виділено характеристичні властивості.

Такі результати є новими та представляють інтерес навіть для конденсаторів зі скінченною кількістю пластин, що раніше вже досліджувалися в математичній літературі. Однак з тою ж самою загальністю аналогічну теорію було побудовано для конденсаторів з нескінченною кількістю пластин. Це вимагало осмислення відповідних понять нескінченномірних векторних мір, означення належним чином їхніх енергій і потенціалів та розвитку нових ефективних методів. Див. [67, 78].

Сьомий розділ містить результати з вивчення варіаційної задачі Гаусса у мажорантній постановці Є. Рахманова про мінімум енергій з верхніми крайовими умовами за наявності зовнішнього поля f , де мінімум розглядається над класом усіх додатних мір Радона, що зосереджені на заданій некомпактній замкненій множині A і задовольняють певні нормування та крайові умови. Доведено теореми про існування та єдиність рівноважної міри, вивчено властивості її неперервності у широкій та сильній топологіях, коли крайові умови та множина A змінюються одночасно, дано опис f -вагового потенціалу рівноважної міри та виділено його характеристичні властивості. Такі результати є новими навіть для класичних ядер, що істотно для можливих застосувань до задач конструктивної теорії функцій та індустріальної математики. Див. [68].

Результати восьмого розділу стосуються конструктивного та чисельного розв'язання варіаційної задачі Гаусса про мінімум енергій Ріса за наявності зовнішніх полів над многовидами Ліпшиця. Сумісно з Н. Harbrecht та W.L. Wendland в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, отримано конструктивний та чисельний розв'язок

варіаційної задачі Гаусса про мінімум енергій відносно ядра Ріса $|x - y|^{\alpha-n}$, $1 < \alpha < n$, за наявності зовнішніх полів для скінченного числа неперетинних компактних $(n - 1)$ -розмірних ліпшицевих многовидів Γ_i , $i \in I$, без краю. Це стало можливим дякуючи доведеній теоремі про еквівалентність початкової задачі належній задачі мінімізації у просторі Соболева–Слободецького $H^{-\varepsilon/2}(\Gamma)$, де $\varepsilon := \alpha - 1$ і $\Gamma := \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$. У випадку двох многовидів еквівалентна задача зводиться до нелінійної системи граничних інтегральних рівнянь для потенціалу простого шару. Для її розв’язання застосовано чисельний метод, що використовує розбиття Бубнова–Галеркіна з кусково-постійними граничними елементами. Див. [69, 73, 76, 79]. Зауважимо, що отримані тут результати чисельно проілюстрували аналітично встановлений Н.В. Зорій ефект втрати частини заряду на нескінченності при досягненні рівноважного стану.

1 ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ СТАТИСТИЧНОЇ МЕХАНІКИ МЕТОДАМИ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО АНАЛІЗУ

1.1 Простори конфігурацій, міри, умови на потенціал взаємодії

Нехай σ – це міра Лебега в $\mathbb{R}^d$. Позначимо через $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, борелівську σ -алгебру відкритих множин в $\mathbb{R}^d$, а через $\mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d)$ усі підмножини, що мають компактне замикання. *Конфігураційний простір* $\Gamma := \Gamma_{\mathbb{R}^d}$ буде складатися з усіх локально скінченних підмножин простору $\mathbb{R}^d$, тобто

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \mid |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ для всіх } \Lambda \in \mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d) \}, \quad (1.1)$$

де $|A|$ є число, що означає кількість точок в A . Це досить природне визначення з точки зору застосувань, оскільки в обмеженому об'ємі не може знаходитися нескінченна кількість частинок. Якщо частинки системи не мають інших характеристик (крім координат, в яких вони зосереджені), то *фазовий простір* системи збігається з конфігураційним простором Γ . Якщо ж кожна частинка системи має ще інші характеристики, такі як імпульс, спин, заряд, тощо, тоді фазовим простором є так званий *маркований конфігураційний простір* $\tilde{\Gamma}$. Ми розглянемо найбільш простий фазовий простір класичного точкового газу, кожна частинка якого в довільній точці $x \in \gamma \subset \mathbb{R}^d$ має імпульс $p_x = mv_x \in \mathbb{R}^d$. Кожна точка $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ – це нескінченна множина пар (x, p_x) , в яких $x \in \gamma \in \Gamma$, а $p_x \in \mathbb{R}^d$:

$$\tilde{\Gamma} := \{ \tilde{\gamma} = \{(x, p_x)\} \mid x \in \gamma, p_x \in \mathbb{R}^d \}. \quad (1.2)$$

Позначимо множину усіх скінченних конфігурацій простору Γ через Γ_0 . Насправді Γ_0 є підмножиною Γ , але вона буде розглядатися як самостійний конфігураційний простір, в якому незалежним чином можна ввести свою топологію. Визначимо спершу конфігураційний простір з фіксованою кількістю точок:

$$\Gamma^{(n)} := \{ \gamma \in \Gamma \mid |\gamma| = n, n \in \mathbb{N} \}, \quad \Gamma^{(0)}. \quad (1.3)$$

Якщо усі такі конфігурації знаходяться в деякій обмеженій множині $\Lambda \in$

$\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, то відповідний простір буде:

$$\Gamma_{\Lambda}^{(n)} := \left\{ \gamma \in \Gamma^{(n)} \mid \gamma \subset \Lambda \right\}. \quad (1.4)$$

В дослідженні багатьох термодинамічних характеристик нескінченних систем важливе значення має розбиття простору $\mathbb{R}^d$ на елементарні гіперкуби з довжиною ребер $a > 0$, і центри яких розташовані в точках $r \in a\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$:

$$\Delta_a(r) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid (r^i - a/2) \leq x^i < (r^i + a/2), i = 1, \dots, d\}. \quad (1.5)$$

Будемо писати Δ замість $\Delta_a(r)$, якщо не має потреби вказувати, де знаходиться центр гіперкубика. Позначимо таке розбиття через $\overline{\Delta}_a$. Для довільного $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і довільного розбиття $\overline{\Delta}_a$ позначимо через $\overline{\Delta}_{a,\Lambda} := \{\Delta \in \overline{\Delta}_a \mid \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset\}$ мінімальне покриття Λ гіперкубиками $\Delta \in \overline{\Delta}_a$ таким чином, що

$$\Lambda \subseteq \Lambda_a \quad \text{і} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \Lambda_a = \Lambda. \quad (1.6)$$

Згідно з ідеями Гіббса фізичний стан системи описується ймовірнісною мірою, яка будується спершу в деякому обмеженому об'ємі простору $\mathbb{R}^d$ в залежності від ансамблю (мікроканонічного, канонічного або великого канонічного), який розглядається для конкретної задачі і подальшому граничному термодинамічному переході. Ми будемо розглядати системи статистичної механіки в рамках великого канонічного ансамблю і почнемо цей розгляд з системи невзаємодіючих точкових частинок (*ідеальний газ*). Стан ідеального газу в рівноважній статистичній механіці описується мірою Пуассона $\pi_{z\sigma}$ на конфігураційному просторі Γ , де $z > 0$ – це активність (фізичний параметр, який пов'язаний з густиною частинок в системі). Міру $\pi_{z\sigma}$ з мірою інтенсивності $z\sigma$ ми визначимо трохи нижче. Для цього спершу введемо так звану міру Лебега-Пуассона $\lambda_{z\sigma} = \lambda_{z\sigma}^{\Lambda}$ на просторі скінченних конфігурацій Γ_{Λ} , $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ (або Γ_0) за формулою:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{\Lambda}} F(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda} \cdots \int_{\Lambda} F(\{x_1, \dots, x_n\}) \sigma(dx_1) \cdots \sigma(dx_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda} \cdots \int_{\Lambda} F_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned} \quad (1.7)$$

для всіх вимірних функцій $F = \{F_n\}_{n \geq 0}$, $F_n \in L^{\infty}(\Lambda^n)$ (або $F_n \in L^1(\mathbb{R}^{dn})$).

У випадку двочастинкового потенціалу взаємодії $V_2(x, y) = \phi(|x - y|)$, де $|x - y|$ – евклідова відстань між частинками $x, y \in \mathbb{R}^d$, потенціальна енергія взаємодії:

$$U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \phi(|x_i - x_j|). \quad (1.8)$$

а енергія взаємодії між частинками конфігурації η і частинками конфігурації $\bar{\gamma}$:

$$W(\eta; \gamma) := \sum_{\substack{x \in \eta, \\ y \in \gamma}} \phi(|x - y|). \quad (1.9)$$

Основними фундаментальними характеристиками системи взаємодіючих частинок є властивості стійкої, надстійкої та посилено надстійкої взаємодії. Умова стійкості є необхідною для коректного термодинамічного опису статистичних систем з нескінченною кількістю частинок, існування граничних кореляційних функцій. Така умова може бути сформульована з допомогою системи нескінченного числа нерівностей, кожна з яких відповідає певній скінченній підсистемі, що складається з N частинок, які розташовані у точках $x_1, \dots, x_N$ простору $\mathbb{R}^d$ (див. також [18]) наступним чином:

Означення 1.1. Взаємодія називається стійкою, якщо для будь-якої підсистеми з кількістю частинок $N \geq 2$ та набором координат $\{x_1, \dots, x_N\} \in \mathbb{R}^d$ існує константа $B \geq 0$ така, що

$$U(x_1, \dots, x_N) \geq -B N. \quad (1.10)$$

Однією з найважливіших умов, що накладається на потенціал взаємодії між частинками, є умова інтегровності на нескінченності. Це означає, що для будь-яких $R > 0$

$$\int_{|x| \geq R} \phi(|x|) dx < +\infty. \quad (1.11)$$

Умови (1.10), (1.11) є достатніми для побудови міри Гіббса системи нескінченного числа частинок в області малих значень параметрів $\beta = (k_B T)^{-1}$ та z , де T — температура системи, z — активність, яка безпосередньо пов'язана з густиною системи частинок (див. [18], глава 4), k_B — константа Больцмана, що забезпечує перехід від температурної до енергетичної шкали.

Але для того, щоб побудувати міру Гіббса у випадку системи нескінченного числа частинок для будь-яких додатних значень параметрів β та

z , необхідно накласти додаткові обмеження на взаємодію між частинками. Такою умовою є умова надстійкості, яку ввів Руель в роботі [19].

Означення 1.2. ([19]) Взаємодія називається надстійкою, якщо для будь-якого розбиття на куби $\overline{\Delta}_a$ та будь-якої конфігурації $\gamma = \{x_1, \dots, x_n\} \in \Gamma_0$ існують такі константи $A > 0$, $B \geq 0$, що виконується умова:

$$U(\gamma) \geq \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a} [A|\gamma_\Delta|^2 - B|\gamma_\Delta|]. \quad (1.12)$$

У цьому огляді ми будемо використовувати так звану *посилено надстійку* взаємодію.

Означення 1.3. Взаємодія називається посилено надстійкою, якщо існує розбиття $\overline{\Delta}_{a_0}$ і константи $A(a) > 0$, $B(a) \geq 0$, $m \geq 2$ такі, що для довільних $0 < a \leq a_0$ і $\gamma \in \Gamma_0$ виконується наступна умова:

$$U(\gamma) \geq A(a) \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_a: |\gamma_\Delta| \geq 2} |\gamma_\Delta|^m - B(a)|\gamma|. \quad (1.13)$$

Зауваження 1.1. Надстійкі взаємодії були введені Д. Рюелем (див. [17] або [18], Гл.3, § 3.2.9 і [19]). Я. М. Парк (див. [16]) вперше використав умову посиленої надстійкості з $m > 2$, щоб довести обмеженість експоненти від оператора локальної кількості частинок для квантової системи взаємодіючого Бозе газу. Означення 1.3 було вперше запропоновано в [20]. На відміну від означення Парка в нерівність (1.13) включає випадок $m = 2$, але з константами, які залежать від параметра a . Посилено надстійкі взаємодії включають потенціали, які не є інтегровні в нулі $0 \in \mathbb{R}^d$.

Умови стійкості, надстійкості та посиленої надстійкості, сформульовані в (1.10), (1.12) і (1.13), накладають загальні умови на характер енергії взаємодії. В рамках наближення таких взаємодій двохчастинковими (парними) потенціалами треба знайти найбільш оптимальні достатні умови їх виконання. Прикладом таких умов, які будуть використані в звіті є наступні:

(А): Умови на потенціал взаємодії Розглянемо потенціали загального вигляду ϕ , які є неперервними функціями на $R_+ \setminus \{0\}$ і для яких існують константи $r_0 > 0$, $R > r_0$, $\varphi_0 > 0$, $\varphi_1 > 0$ і $\varepsilon_0 > 0$ такі, що:

$$1) \quad \phi(|x|) \equiv -\phi^- (|x|) \geq -\frac{\varphi_1}{|x|^{d+\varepsilon_0}} \text{ для } |x| \geq R;$$

$$2) \quad \phi(|x|) \equiv \phi^+(|x|) \geq \frac{\varphi_0}{|x|^s}, \quad s \geq d \text{ для } |x| \leq r_0,$$

де

$$\phi^+(|x|) := \max\{0; \phi(|x|)\}, \quad \phi^-(|x|) := -\min\{0; \phi(|x|)\},$$

а

$$\phi(|x|) = \phi^+(|x|) - \phi^-(|x|)$$

1.2 Експоненціальне представлення деяких інтегралів за мірою Лебега-Пуассона та його застосування

Одним із яскравих прикладів застосування методу нескінченновимірної пуассонівської аналізу при дослідженні нескінченних систем точкових частинок є результат, який буде сформульований у вигляді теореми 1.1.

В статистичній механіці доведення цього результату зводиться до алгебраїчних перетворень, наприклад в монографії Рюеля [18]. Це також слідує з роботи [1], проте вимагає ще додатково певні комбінаторні пересумування. Ми ж ставимо за мету продемонструвати інший варіант доведення формули (1.18). Зауважимо, що отриманий результат є надзвичайно корисним при вивченні окремих питань статистичної механіки, а саме для зручності обчислення деяких комбінаторних формул. В даній роботі будуть використані математичні властивості інтегралів за мірою Пуассона (в обмеженому об'ємі ми її назвали мірою Лебега-Пуассона). Слід зазначити, що міра Пуассона визначається на просторі локально скінченних конфігурацій евклідового простору $\mathbb{R}^d$ і використовується при побудові міри Гіббса для нескінченних систем точкових частинок.

Будемо розглядати функції на конфігураційному просторі Γ_Λ , що мають вигляд:

$$\Phi(\gamma) = \sum_{k=1}^{|\gamma|} \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \subset \gamma}^* F(\gamma_1) F(\gamma_2) \dots F(\gamma_k), \quad \Phi(\emptyset) = 1, \quad (1.14)$$

де $*$ в межі суми означає, що сумування відбувається по всіх k -непорожнім неперетинним підмножинам γ , тобто

$$\bigcup_{j=1}^k \gamma_j = \gamma, \quad \gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset \text{ для всіх } i \neq j, \quad \gamma_i \neq \emptyset, \quad i, j \in \{1, \dots, k\} \quad (1.15)$$

Функції $F : \Gamma_\Lambda \mapsto \mathbb{R}$ або $F : \Gamma_0 \mapsto \mathbb{R}$ можуть бути представлені як нескінченна послідовність симетричних функцій $\{F_n\}_{n \geq 0}$ так, що для будь-якої конфігурації $\gamma = \{x_1, \dots, x_n\} \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes n}$ матимемо:

$$F(\gamma) = F(\{x_1, \dots, x_n\}) = F_n(x_1, \dots, x_n) = F(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}), \quad (1.16)$$

$F(\emptyset) = F_0 \in \mathbb{R}$, $\pi \in P_n$, а P_n — є множиною перестановок з n елементів.

Теорема 1.1. [2] *Нехай функція Φ має вигляд (1.14), а функції F_n , задані формулою (1.16), задовольняють наступні оцінки:*

$$\int_{\Lambda} \dots \int_{\Lambda} F_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \leq c^n C_\Lambda n!, \quad (1.17)$$

де стала c не залежить від Λ . Тоді буде справджуватись рівність:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} \Phi(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) = e^{\int_{\Gamma_\Lambda \setminus \{\emptyset\}} F(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma)} \quad (1.18)$$

для $0 < z < 1/2c$.

Одним із яскравих прикладів застосування теореми 1.1 є представлення великої статистичної суми у вигляді експоненти. Даний результат є надзвичайно важливим для побудови термодинамічних потенціалів (зокрема тиску) при переході до нескінченного об'єму.

Тиск системи є функцією від активності z та оберненого значення температури $\beta = \frac{1}{kT}$, де T — температура системи, а k — стала Больцмана. Обчислюємо тиск за допомогою формули:

$$p(z, \beta) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} p^\Lambda(z, \beta) := \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} \frac{1}{\beta \sigma(\Lambda)} \log Z_\Lambda(z, \beta), \quad (1.19)$$

де $Z_\Lambda(z, \beta)$ — це велика статистична сума. Аналітичний запис великої статистичної суми можна подати у вигляді інтегралу за мірою Лебега-Пуассона по всім можливим конфігураціям частинок від фактора Больцмана:

$$Z_\Lambda(z, \beta) := \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (1.20)$$

де потенціальна енергія системи

$$U(\gamma) = \begin{cases} 0, & \text{для } |\gamma| = 0 \vee 1; \\ \sum_{\{x,y\} \subset \gamma} \phi(|x-y|) := \sum_{\{x,y\} \subset \gamma} \phi_{xy}, & \text{для } |\gamma| \geq 2. \end{cases} \quad (1.21)$$

Запис великої статистичної суми у вигляді (1.20) був відомий ще з робіт Р. А. Мінлоса, Я. Г. Сіная та їх учнів (1967-1968 р.р.), які у своїх дослідженнях зосереджували увагу на вивченні теорії фазових переходів, властивостях конфігураційних просторів, а також вперше розвинули контурну техніку для аналізу та оцінок ймовірності різних конфігурацій у фазовому просторі системи частинок.

Для того, щоб застосувати теорему 1.1 з $F(\gamma) = \Phi^T(\gamma)$ необхідно оцінити $\Phi^T(\gamma)$. Оцінки для таких функцій можна знайти в роботі [18]:

$$\int_{\Lambda} \dots \int_{\Lambda} |\Phi^T(\{x_1, \dots, x_n\})| dx_2 \dots dx_n \leq (n-1)! e^{-2\beta B} (e^{2\beta B+1} C(\beta))^{n-1} \quad (1.22)$$

Використаємо теорему 1.1 з $C_{\Lambda} = \sigma(\Lambda) C(\beta)^{-1} e^{-4\beta B-1}$ і $c = e^{2\beta B+1} C(\beta)$ для того, щоб представити велику статистичну суму у вигляді:

$$Z_{\Lambda}(z, \beta) = e^{\int_{\Gamma_{\Lambda} \setminus \{\emptyset\}} \Phi^T(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma)} \quad (1.23)$$

Остання рівність та оцінка (1.22) доводять існування та аналітичність тиску. Дійсно, використовуючи означення (1.19), отримуємо:

$$\begin{aligned} p^{\Lambda}(z, \beta) &= \frac{1}{\beta \sigma(\Lambda)} \log Z_{\Lambda}(z, \beta) = \frac{1}{\beta \sigma(\Lambda)} \int_{\Gamma_{\Lambda} \setminus \{\emptyset\}} \Phi^T(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma) = \\ &= \frac{1}{\beta \sigma(\Lambda)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda} \dots \int_{\Lambda} |\Phi^T(\{x_1, \dots, x_n\})| dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (1.24)$$

Слід зазначити, що існування та аналітичність тиску є наслідком існування інтегралів від функцій $\Phi^T(\{x_1, \dots, x_n\})$ по $x_2, \dots, x_n$.

Аналогічний результат також справджується і для густини нескінченної системи точкових частинок [18]:

$$\rho = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} |\Phi^T(\{x_1, \dots, x_n\})| dx_2 \dots dx_n. \quad (1.25)$$

1.3 Побудова розв'язків рівнянь статистичної механіки за допомогою нескінченновимірних інтегралів за мірою Лебега-Пуассона

1.3.1 Рівняння Кірквуда-Зальцбурга для кореляційних функцій рівноважних систем

Запишемо вираз для кореляційних функцій ρ_Λ , які відповідають системі, що знаходиться в обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$:

$$\rho_\Lambda(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \quad (1.26)$$

Достатньою умовою існування кореляційних функцій на Γ_Λ є умова стійкості (1.10) при $|\gamma| = N$. Ця умова дозволяє отримати оцінки:

$$1 \leq Z_\Lambda \leq e^{ze^{\beta B}\sigma(\Lambda)} \quad (1.27)$$

та

$$0 \leq \rho_\Lambda(\eta) \leq Z_\Lambda^{-1} e^{ze^{\beta B}\sigma(\Lambda)}. \quad (1.28)$$

Ці оцінки є наслідком умови стійкості і визначення інтегралу за мірою Лебега-Пуассона. Але оцінка (1.28) не дає підстав зробити висновок, що послідовність функцій $\rho_\Lambda(\eta)$ має термодинамічну границю при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$.

Одним з методів побудови кореляційних функцій при нескінченному об'ємі є метод рівнянь. Треба отримати рівняння для функцій ρ і знайти їх розв'язок. Отримаємо спершу такі рівняння для функцій ρ_Λ , тобто у скінченному об'ємі. Виділимо для цього в конфігурації η деяку точку $x \in \eta$ і введемо позначення $\eta^{(\hat{x})} := \eta \setminus \{x\}$. Тоді вираз (1.26) можна переписати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) = z^{|\eta|} \frac{e^{-\beta W(x; \eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta W(x; \gamma)} e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \quad (1.29)$$

Скористаємося тим, що у випадку парного потенціалу взаємодії енергія взаємодії двох конфігурацій задається формулою (1.9). Тоді експоненту в (1.29) можна записати у вигляді:

$$e^{-\beta W(x; \gamma)} = \prod_{y \in \gamma} [(e^{-\beta \phi(|x-y|)} - 1) + 1]. \quad (1.30)$$

Далі для довільної неперервної функції $\varphi \in C(\mathbb{R}^d)$ і довільного $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ справедлива проста комбінаторна формула:

$$\prod_{y \in \gamma} [1 + \varphi(y)] = \sum_{\xi \subseteq \gamma} \prod_{y \in \xi} \varphi(y) \quad (1.31)$$

Введемо наступне позначення:

$$K(x; \xi) := \begin{cases} \prod_{y \in \xi} (e^{-\beta \phi(|x-y|)} - 1), & |\xi| \geq 1, \\ 1, & \xi = \emptyset \end{cases} \quad (1.32)$$

Тоді вираз (1.29) можна переписати у вигляді:

$$\rho_\Lambda(\eta) = z^{|\eta|} \frac{e^{-\beta W(x; \eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\xi \subseteq \gamma} K(x; \xi) e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \quad (1.33)$$

Застосуємо до правої частини (1.33) рівність (див. [3]):

$$\int_{\Gamma_X} G(\gamma) \sum_{\eta \subseteq \gamma} H(\eta, \gamma \setminus \eta) \lambda_\sigma(d\gamma) = \int_{\Gamma_X} \int_{\Gamma_X} G(\eta \cup \gamma) H(\eta, \gamma) \lambda_\sigma(d\gamma) \lambda_\sigma(d\eta). \quad (1.34)$$

з Γ_Λ замість Γ_0 і

$$G(\gamma) = e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \gamma)}, \quad (1.35)$$

$$H(\xi, \gamma \setminus \xi) = K(x; \xi) \equiv K(x; \xi) \mathbb{1}_{\Gamma_\Lambda}(\gamma \setminus \xi).$$

Тоді

$$\rho_\Lambda(\eta) = z^{|\eta|} \frac{e^{-\beta W(x; \eta^{(\hat{x})})}}{Z_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} \int_{\Gamma_\Lambda} K(x; \xi) e^{-\beta U(\eta^{(\hat{x})} \cup \xi \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\xi). \quad (1.36)$$

Використовуючи означення кореляційного функціоналу (1.26), отримаємо остаточне співвідношення:

$$\rho_\Lambda(\eta) = z e^{-\beta W(x; \eta^{(\hat{x})})} \int_{\Gamma_\Lambda} K(x; \xi) \rho_\Lambda(\eta^{(\hat{x})} \cup \xi) \lambda_\sigma(d\xi). \quad (1.37)$$

В останньому інтегралі була використана рівність:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} z^{-|\xi|} f(\xi) \lambda_{z\sigma}(d\xi) = \int_{\Gamma_\Lambda} f(\xi) \lambda_\sigma(d\xi), \quad (1.38)$$

яка випливає з означення інтеграла за мірою Лебега-Пуассона.

Формально таке саме рівняння можна записати і для нескінченної системи в усьому просторі $\mathbb{R}^d$:

$$\rho(\eta) = ze^{-\beta W(x; \eta^{(\hat{x})})} \int_{\Gamma_0} K(x; \xi) \rho(\eta^{(\hat{x})} \cup \xi) \lambda_\sigma(d\xi), \quad \eta \in \Gamma_0. \quad (1.39)$$

Якщо існують розв'язки обох рівнянь (1.37), (1.39), і розв'язок рівняння (1.37) в деякому сенсі прямує до розв'язку рівняння (1.39) при $\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d$, то він відповідає сім'ї кореляційних функцій міри Гіббса. Якщо такий розв'язок є єдиним при певних значеннях термодинамічних параметрів z, β , то відповідна міра Гіббса буде відповідати єдиному гіббсівському стану. Якщо ж декілька розв'язків при певних значеннях термодинамічних параметрів z, β , тоді ці розв'язки будуть відповідати різним гіббсівським станам і тоді кажуть, що в системі в околі цих термодинамічних параметрів відбувається фазовий перехід.

1.3.2 Рівняння BBGKY

Еволюція стану системи визначається рівнянням Боголюбова, яке являє собою нескінченну систему інтегро-диференціальних рівнянь для кореляційних функцій. Дане рівняння має стаціонарні розв'язки, серед яких особливу роль відіграє перший розв'язок — розподіл Гіббса, що визначає рівноважний стан системи. Таким чином в основі статистичної механіки лежать рівняння Боголюбова, які єдиним чином визначають через стаціонарний та нестаціонарний розв'язки рівноважний та нерівноважний стан статистичної системи.

Рівняння Боголюбова розглядають як абстрактно еволюційні рівняння в деякому визначеному функціональному просторі. Щоб визначити еволюцію стану, слід побудувати для них еволюційний оператор. Виникає проблема: оператор в рівняннях Боголюбова є необмежений, а функціональний простір повинен мати в собі функції розподілу нескінченних систем. Для розв'язку цієї проблеми в статистичній механіці була створена процедура термодинамічного граничного переходу — спершу будуються розв'язки, що описують стан скінченних систем, а далі число частинок і об'єм посудини спрямовують до нескінченності при сталій густині. Отримані розв'язки описуватимуть стан нескінченних систем статистичної механіки.

Для того, щоб записати рівняння для кореляційних функцій нерівноважної системи взаємодіючих частинок, треба розглянути їх в конфігураційному просторі маркованих конфігурацій $\tilde{\Gamma}$, визначеному в (1.2). Для довільної

конфігурації $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ з $\gamma \in \Gamma_0$ гамільтоніан складається з кінетичної енергії частинок конфігурації і потенціальної енергії їх взаємодії:

$$H(\tilde{\gamma}) = E_k(\tilde{\gamma}) + U(\gamma), \quad E_k(\tilde{\gamma}) = \sum_{x \in \gamma} \frac{p_x^2}{2m}. \quad (1.40)$$

Розглянемо спершу систему в деякій обмеженій області $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. Важливою характеристикою системи є поведінка частинок поблизу границі $\partial\Lambda$ посудини Λ . Задамо такі граничні умови за допомогою деякого зовнішнього поля $u^\Lambda(x)$, $x \in \Lambda$:

$$u^\Lambda(x) := \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } x \in \partial\Lambda, \\ 0, & \text{якщо } x \in \Lambda_\delta, \end{cases} \quad (1.41)$$

де область Λ_δ містить точки $x \in \Lambda$, які знаходяться на відстані $d \geq \delta > 0$ від $\partial\Lambda$. В області $\Lambda \setminus \Lambda_\delta$ функція $u^\Lambda(x)$ є гладкою позитивною функцією. Гамільтоніан такої системи має вигляд:

$$H^\Lambda(\tilde{\gamma}) = E_k(\tilde{\gamma}) + U^\Lambda(\gamma), \quad U^\Lambda(\gamma) := U(\gamma) + \sum_{x \in \gamma} u^\Lambda(x), \quad \gamma \in \Gamma_\Lambda. \quad (1.42)$$

Вивід рівнянь BBGKY. В рамках великого канонічного ансамблю вираз для щільності міри Гіббса буде мати вигляд:

$$D_\Lambda(\tilde{\gamma}, N) = \frac{1}{Z_\Lambda} \frac{1}{N!} e^{\beta\mu N - \beta E(\tilde{\gamma})}, \quad N = |\tilde{\gamma}|, \quad (1.43)$$

де μ — хімічний потенціал, а Z_Λ — велика статистична сума, що виражається формулою:

$$Z_\Lambda = \sum_{N \geq 0} \frac{1}{N!} \int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda^{(N)}} d\tilde{\gamma} e^{\beta\mu N - \beta E(\tilde{\gamma})}, \quad d\tilde{\gamma} := (d\tilde{\sigma})^N := (d\sigma \otimes dp)^N. \quad (1.44)$$

Еволюція щільності міри Гіббса описується рівнянням Ліувіля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D_\Lambda(t; \tilde{\gamma}) &= \{H^\Lambda \tilde{\gamma}, D(t; \tilde{\gamma})\}_P = \\ &= \sum_{x \in \gamma} [\nabla_x H^\Lambda(\tilde{\gamma}) \cdot \nabla_{p_x} D_\Lambda(t; \tilde{\gamma}) - \nabla_{p_x} H^\Lambda(\tilde{\gamma}) \cdot \nabla_x D_\Lambda(t; \tilde{\gamma})], \end{aligned} \quad (1.45)$$

де $\{\cdot, \cdot\}_P$ — це дужки Пуассона, які визначаються другою стрічкою рівняння (1.45), а $\nabla_x (\nabla_{p_x})$ — градієнт за змінною $x(p_x)$. Треба також задати початковий розподіл:

$$D_\Lambda(t; \tilde{\gamma})|_{t=0} = D_\Lambda^0(\tilde{\gamma}). \quad (1.46)$$

Виходячи з вигляду гамільтоніану (див. (1.40) – (1.42)), граничні умови для функцій $D_\Lambda(t; \tilde{\gamma})$ можна записати у такому вигляді:

$$D_\Lambda(t; \tilde{\gamma})|_{\forall x \in \gamma, x \in \partial\Lambda} = D_\Lambda(t; \tilde{\gamma})|_{\forall x \in \gamma, p_x^{(\alpha)} = \pm\infty, \alpha = \overline{1, d}} = 0. \quad (1.47)$$

Еволюція початкової функції розподілу $D_\Lambda^0(\tilde{\gamma})$ описується рівнянням Ліувіля (1.45) і визначається еволюцією початкової конфігурації $\gamma = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N\}$, $N = |\gamma|$, або на мові пуассонівських полів:

$$\tilde{\gamma}(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^N \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_i) = \delta(x - x_i) \delta(p_x - p_{x_i}). \quad (1.48)$$

Стан системи частинок в момент часу t буде визначатись конфігурацією

$$\tilde{\gamma}_t = \{x_1(t), \dots, x_N(t)\}, \tilde{\gamma}_t(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^N \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_i(t)), \tilde{x}_i(t) = \tilde{x}_i(t, \tilde{\gamma}), \quad (1.49)$$

де точки конфігурації $\tilde{x}_i(t)$ задовольняють систему рівнянь Гамільтона:

$$\frac{dp_{x_i}(t)}{dt} = -\frac{\partial H^\Lambda(\tilde{\gamma}_t)}{\partial x_i(t)}, \quad \frac{dx_i(t)}{dt} = \frac{\partial H^\Lambda(\tilde{\gamma}_t)}{\partial p_{x_i}(t)}. \quad (1.50)$$

Позначимо через T_t оператор зсуву вздовж траєкторії частинок. Тоді

$$T_t \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_t. \quad (1.51)$$

Зауважимо, якщо $\tilde{\Gamma}_\Lambda$ з $\Lambda \in \mathcal{B}_c$ є фазовим простором системи частинок, еволюція фазових точок $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}_\Lambda$ яких описує система рівнянь Гамільтона (1.50) з гамільтоніаном (1.42), тоді міра

$$\mu_{D_\Lambda}^t(d\tilde{\gamma}) := D_\Lambda(t; \tilde{\gamma}) \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}), \quad t \geq 0 \quad (1.52)$$

є інваріантною відносно зсувів T_t :

$$\int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda} F(\tilde{\gamma}) \mu_{D_\Lambda}^t(d\tilde{\gamma}) = \int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda} F(T_t \tilde{\gamma}) \mu_{D_\Lambda}^0(d\tilde{\gamma}) \quad (1.53)$$

для функцій F , для яких інтеграли в (1.53) приймають скінченне значення.

Доведення є наслідком відомої теореми Ліувіля та визначення міри $\lambda_{\tilde{\sigma}}$.

Кореляційні функції, які відповідають нерівноважній динаміці, визначаються за формулою:

$$\rho_\Lambda(t; \tilde{\eta}) = \int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda} D_\Lambda(t; \tilde{\eta} \cup \tilde{\gamma}) \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}), \quad (1.54)$$

де $\tilde{\sigma}$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$, тобто $d\tilde{\sigma} = dx dp_x$. Продиференціюємо рівняння (1.54). Враховуючи рівняння Ліувіля та співвідношення:

$$\nabla_x H^\Lambda(\tilde{\gamma}) := \begin{cases} \nabla_x U^\Lambda(\eta) + \nabla_x W(\eta; \gamma), & \text{якщо } x \in \eta, \\ \nabla_x U^\Lambda(\gamma) + \nabla_x W(\eta; \gamma), & \text{якщо } x \in \gamma, \end{cases} \quad (1.55)$$

$$\nabla_{p_x} H^\Lambda(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{m} \mathbf{p}_x, \quad x \in \eta \cup \gamma, \quad (1.56)$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_\Lambda(t; \tilde{\eta}) &= \sum_{x \in \eta} [\nabla_x U^\Lambda(\eta) \cdot \nabla_{p_x} \rho_\Lambda(t; \tilde{\eta}) - \frac{1}{m} \mathbf{p}_x \cdot \nabla_x \rho_\Lambda(t; \tilde{\eta})] + \\ &+ \sum_{x \in \eta} \int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda} \sum_{y \in \gamma} \nabla_x \phi(|x - y|) \cdot \nabla_{p_x} D_\Lambda(t; \tilde{\eta} \cup \tilde{\gamma}) \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}) + \\ &+ \int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda} \sum_{x \in \gamma} \nabla_x H^\Lambda(\tilde{\eta} \cup \tilde{\gamma}) \cdot \nabla_{p_x} D_\Lambda(t; \tilde{\eta} \cup \tilde{\gamma}) \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}) - \\ &- \int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda} \sum_{x \in \gamma} \nabla_{p_x} H^\Lambda(\tilde{\eta} \cup \tilde{\gamma}) \cdot \nabla_x D_\Lambda(t; \tilde{\eta} \cup \tilde{\gamma}) \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}). \end{aligned} \quad (1.57)$$

Застосуємо до 2-го, 3-го і 4-го доданків рівняння (1.57) формулу Мекке, яка має місце також на просторі $\tilde{\Gamma}_\Lambda$ для міри $\lambda_{\tilde{\sigma}}$. Враховуючи означення (1.54) та граничні умови (1.47), отримуємо рівняння Боголюбова-Борна-Гріна-Кірквуда-Івона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_\Lambda(t; \tilde{\eta}) &= \sum_{x \in \eta} [\nabla_x U^\Lambda(\eta) \cdot \nabla_{p_x} \rho_\Lambda(t; \tilde{\eta}) - \frac{1}{m} \mathbf{p}_x \cdot \nabla_x \rho_\Lambda(t; \tilde{\eta})] + \\ &+ \sum_{x \in \eta} \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x \phi(|x - y|) \cdot \nabla_{p_x} \rho_\Lambda(t; \tilde{\eta} \cup \{(y, p_y)\}) dy dp_y. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Представлення розв'язку рівнянь ВВГКУ. Щоб отримати формулу, подібну до формули (1.26), запишемо спершу твірний функціонал для послідовності функцій $\rho_n^\Lambda(t; \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$:

$$\begin{aligned} F_\Lambda(t; j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Lambda^n} \int_{\mathbb{R}^{dn}} (d\tilde{x})^n \rho_n^\Lambda(t; \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) j(\tilde{x}_1) \cdots j(\tilde{x}_n) = \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda} \rho_\Lambda(t; \tilde{\eta}) \prod_{\tilde{x} \in \tilde{\eta}} j(\tilde{x}) \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\eta}) \end{aligned} \quad (1.59)$$

Підставимо у цю формулу визначення (1.54) і застосуємо рівність (1.34), яка справедлива і для міри $\lambda_{\tilde{\sigma}}$ на просторі $\tilde{\Gamma}_{\Lambda}$ маркованих конфігурацій $\tilde{\gamma}$ з $X = \Lambda \otimes \mathbb{R}^d$, $G(\tilde{\eta} \cup \tilde{\gamma}) = D_{\Lambda}(t, \tilde{\eta} \cup \tilde{\gamma})$ і $H(\tilde{\eta}, \tilde{\gamma}) = (\prod_{\tilde{x} \in \tilde{\eta}} j(\tilde{x}) \mathbb{1}_{\Lambda}(\gamma))$. В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} F_{\Lambda}(t; j) &= \int_{\tilde{\Gamma}_{\Lambda}} D_{\Lambda}(t; \tilde{\gamma}) \sum_{\tilde{\eta} \subseteq \tilde{\gamma}} \prod_{\tilde{x} \in \tilde{\eta}} j(\tilde{x}) \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}) = \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}_{\Lambda}} D_{\Lambda}(t; \tilde{\gamma}) e^{<\tilde{\gamma}, \log(1+j)>} \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}) = \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}_{\Lambda}} D_{\Lambda}(t; \tilde{\gamma}) : e^{<\tilde{\gamma}, j>} : \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}), \end{aligned} \quad (1.60)$$

де ми скористалися формулою

$$: e^{<\gamma, g>} := \exp[<\gamma, \log(1+g)>]. \quad (1.61)$$

Скористаємося формулою (1.53). Тоді остаточно отримуємо наступне представлення для твірного функціоналу:

$$\begin{aligned} F_{\Lambda}(t; j) &= \int_{\tilde{\Gamma}_{\Lambda}} : e^{<\tilde{\gamma}_t; j>} : D_{\Lambda}(0; \tilde{\gamma}) \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}) = \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}_{\Lambda}} \exp[<\gamma_t, \log(1+j)>] D_{\Lambda}(0; \tilde{\gamma}) \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}) \end{aligned} \quad (1.62)$$

і автоматично для кореляційних функцій:

$$\rho_{\Lambda}(t, \tilde{\eta}) = \int_{\tilde{\Gamma}_{\Lambda}} : \prod_{\tilde{x} \in \tilde{\eta}} \tilde{\gamma}_t(\tilde{x}) : D_{\Lambda}(0; \tilde{\gamma}) \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}). \quad (1.63)$$

Залишається з'ясувати, яким чином визначити еволюцію пуассонівського поля, тобто функцію $\tilde{\gamma}_t$ (див. (1.49)).

Для цього виконаємо диференціювання по змінній t функціоналу $F_{\Lambda}(t; j)$ у формулі (1.60), вставляючи праву частину рівняння Ліувіля (1.45). Застосуємо знову формулу Мекке і скористаємося формулами (1.55), (1.56):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_{\Lambda}(t; j)}{\partial t} = \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}_{\Lambda}} \int_{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^d} [\nabla_x W_x^{\Lambda}(\gamma) \cdot \nabla_{p_x} D_{\Lambda}(t; \tilde{\gamma} \cup \{x\})] : e^{<\tilde{\gamma} \cup \{x\}, j>} : d\tilde{x} \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}) - \\ &- \int_{\tilde{\Gamma}_{\Lambda}} \int_{\Lambda} \int_{\mathbb{R}^d} \left[\frac{1}{m} \mathbf{p}_x \cdot \nabla_x D_{\Lambda}(t; \tilde{\gamma} \cup \{x\}) \right] : e^{<\tilde{\gamma} \cup \{x\}, j>} : d\tilde{x} \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}), \end{aligned} \quad (1.64)$$

де $W_x^\Lambda(\gamma) := W(x; \gamma) + u^\Lambda(x)$. Враховуючи граничні умови (1.47), виконаємо інтегрування за частинами по змінній p_x у першому доданку і по змінній x — у другому доданку, діючи відповідними операторами ∇_{p_x} і ∇_x на фактор $: \exp[< \tilde{\gamma} \cup \{x\}, j >] :$. Далі знову застосуємо формулу Мекке, повертаючись до сумування по точках конфігурації $\tilde{\gamma}$ і заміняючи це сумування введенням інтегралу від пуассонівського поля $\tilde{\gamma}(\tilde{x})$. Після цього виконаємо ще раз інтегрування за частинами в цих інтегралах в сенсі узагальнених функцій, тобто перекидаючи оператори ∇_{p_x} і ∇_x на пуассонівські поля. Тоді остаточно отримаємо таке представлення:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_\Lambda(t; j)}{\partial t} = & - \int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda} \lambda_{\tilde{\sigma}}(d\tilde{\gamma}) D_\Lambda(t; \tilde{\gamma}) \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} d\tilde{x} \left(\frac{1}{m} \mathbf{p}_x \cdot \nabla_x \tilde{\gamma}(\tilde{x}) - \right. \\ & \left. - : \nabla_{p_x} \tilde{\gamma}(\tilde{x}) \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} d\tilde{x}' \tilde{\gamma}(\tilde{x}') : \cdot (\nabla_x \phi(|x - x'|) + \nabla_x u^\Lambda(x)) \right) \frac{\delta}{\tilde{\gamma}(x)} : e^{< \tilde{\gamma}, j >} :, \quad (1.65) \end{aligned}$$

де

$$: \tilde{\gamma}(\tilde{x}) \tilde{\gamma}(\tilde{x}') : := \tilde{\gamma}(\tilde{x}) \tilde{\gamma}(\tilde{x}') - \delta(\tilde{x} - \tilde{x}'),$$

що усуває доданок $\nabla_x \phi(|x - x'|)$ при $x - x' = 0$. Аналогічно, диференціюючи $F_\Lambda(t; j)$ у формулі (1.64), отримаємо вираз, який після застосування рівності (1.53) буде збігатись з правою частиною (1.65), якщо функція $\tilde{\gamma}_t(\tilde{x})$, буде задовольняти рівняння Власова

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\gamma}_t(\tilde{x})}{\partial t} = & - \frac{1}{m} \mathbf{p}_x \cdot \nabla_x \tilde{\gamma}_t(\tilde{x}) + \\ & + : \nabla_{p_x} \tilde{\gamma}_t(\tilde{x}) \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^d} d\tilde{x}' \tilde{\gamma}'_t(\tilde{x}') : \cdot (\nabla_x \phi(|x - x'|) + \nabla_x u^\Lambda(x)) \end{aligned} \quad (1.66)$$

у сенсі узагальнених функцій. Використовуючи це рівняння, легко перевірити безпосередньо, що вираз (1.63) задовольняє рівняння (1.58).

1.4 Апроксимації неперервних статистичних систем

1.4.1 Апроксимація фінітними потенціалами

Проблема апроксимації кореляційних функцій нескінченних систем, взаємодія в яких визначається потенціалом з нескінченним радіусом дії, кореляційними функціями, що відповідають фінітним потенціалам є технічною. Дуже часто вона допомагає значно спростити доведення деяких важливих результатів. Для обмежених систем, які знаходяться в деякому контейнері Λ збіжність кореляційних функцій ρ_R^Λ до функцій ρ^Λ є наслідком поточної

збіжності послідовності потенціалів $\{\phi_R\}$ до потенціалу ϕ і умови стійкості взаємодії. В той же час для граничних $(\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d)$ функцій ρ_R і ρ така збіжність не є очевидною. Ситуація трохи спрощується в області регулярності термодинамічних параметрів: активності z і оберненої температури β . У цьому випадку кореляційні функції задовольняють рівняння Кірквуда-Зальцбурга, але послідовність операторів Кірквуда-Зальцбурга K_R не задовольняє умови, що забезпечують рівномірну збіжність до відповідного оператора K . Тому проблема збіжності послідовності кореляційних функцій ρ_R , які побудовані за потенціалами ϕ_R , до функцій ρ не є зовсім тривіальною.

Система рівнянь Кірквуда-Зальцбурга (1.37) (або (1.39)) може бути записана у вигляді єдиного операторного рівняння (див. [18])

$$\rho = z\tilde{K}\rho + z\delta, \quad (1.67)$$

де оператор $\tilde{K}$ діє на довільну функцію $\varphi \in E_\xi$ у відповідності з правилом

$$\begin{aligned} (\tilde{K}\varphi)(\{x_1\}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^k \left(e^{-\beta\phi(|y_i-x_1|)} - 1 \right) \times \\ &\varphi(\{y_1, \dots, y_k\}) dy_1 \cdots dy_k \quad \text{якщо } |\eta| = 1 \ (\eta = \{x_1\}); \end{aligned} \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{K}\varphi)(\eta) &= \sum_{x \in \eta} \tilde{\pi}(x; \eta \setminus \{x\}) e^{-\beta W(x; \eta \setminus \{x\})} [\varphi(\eta \setminus \{x\}) + \\ &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^k \left(e^{-\beta\phi(|y_i-x|)} - 1 \right) \times \\ &\varphi(\eta \setminus \{x\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}) dy_1 \cdots dy_k], \quad \text{якщо } |\eta| \geq 2, \end{aligned} \quad (1.69)$$

де

$$\tilde{\pi}(x; \eta \setminus \{x\}) = \frac{\pi_W(x; \eta \setminus \{x\})}{\sum_{y \in \eta} \pi_W(y; \eta \setminus \{y\})}, \quad (1.70)$$

$$\pi_W(x; \eta \setminus \{x\}) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } W(x; \eta \setminus \{x\}) \geq -2B, \\ 0 & \text{у решті випадків,} \end{cases} \quad (1.71)$$

$$\rho := \{\rho(\eta; z, \beta)\}_{\eta \in \Gamma_0 \setminus \emptyset}, \quad (1.72)$$

$$\delta(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{якщо } |\eta| = 1, \\ 0 & \text{у решті випадків,} \end{cases} \quad (1.73)$$

Зауваження 1.2. Оператор $\tilde{K} = \Pi K$ у позначеннях Д. Рюеля [18], а (1.70), (1.71) є реалізація оператора Π . При цьому оператор $K : E_\xi \rightarrow E_{e^{2\beta V_\xi}}$, а оператор $\tilde{K} : E_\xi \rightarrow E_\xi$.

Оператор $\tilde{K}$ є обмеженим оператором у банаховому просторі E_ξ .

Розв'язок рівняння (1.67) можна подати у формі збіжних у просторі E_ξ (та точково збіжних для будь-якої фіксованої конфігурації $\eta \in \Gamma_0$) рядів

$$\rho(\eta; z, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} (\tilde{K}^n \delta)(\eta; z, \beta), \quad (1.74)$$

якщо взаємодія задовольняє умови **(A)**, а значення активності z належить кругу:

$$|z| \leq e^{-2\beta B} \xi e^{-\xi C(\beta)} \quad (1.75)$$

Оптимальним значенням параметра ξ є $\xi = C(\beta)^{-1}$, де

$$C(\beta) = \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-\beta \phi(|x|)} - 1 \right| dx. \quad (1.76)$$

Представимо потенціал взаємодії ϕ у вигляді:

$$\phi = \phi_R + \Delta\phi_R, \quad (1.77)$$

де

$$\phi_R(|x|) = \begin{cases} \phi(|x|), & \text{for } |x| \leq R \\ 0, & \text{for } |x| > R, \end{cases} \quad \Delta\phi_R(|x|) = \begin{cases} \phi(|x|), & \text{for } |x| \geq R \\ 0, & \text{for } |x| < R. \end{cases} \quad (1.78)$$

Нехай $R \geq R_0$. Тоді

$$\Delta\phi_R \leq 0. \quad (1.79)$$

Кореляційні функції, що відповідають потенціалу ϕ_R позначимо через $\rho_R(\eta; z, \beta)$. Очевидно, що вони задовільняють таким самим рівнянням Кірквуда-Зальцбурга з оператором $\tilde{K}_R$, який діє за формулами (1.68), (1.69) з потенціалом ϕ_R замість ϕ :

$$\rho_R = z \tilde{K}_R \rho_R + z \delta, \quad (1.80)$$

а його розвязки представляються рядом

$$\rho_R(\cdot; z, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \left(\left(\tilde{K}_R \right)^n \delta \right) (\cdot; z, \beta). \quad (1.81)$$

Сформулюємо основний результат у вигляді наступної теореми.

Теорема 1.2. Припустимо, що потенціал взаємодії $\phi(|x|)$ є неперервним на $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ і задовольняє умовам (А). Тоді, для достатньо малих значень параметра z , що задовольняє нерівність (1.75), розв'язок рівняння Кірквуда-Зальцбурга (1.80) для ρ_R прямує до розв'язку рівняння (1.67) за нормою простору E_ξ :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|\rho - \rho_R\|_\xi = 0. \quad (1.82)$$

Доведення теореми слідує з оцінки ряду

$$\rho - \rho_R = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} (\tilde{K}^n - \tilde{K}_R^n) \delta \quad (1.83)$$

у банаховому просторі E_ξ . Воно приведено в роботі [5].

1.4.2 Модель коміркового газу

Означення 1.4. Для заданого розбиття $\overline{\Delta}_a$ простору $\mathbb{R}^d$ система *коміркового газу* (КГ) визначається наступним конфігураційним простором

$$\tilde{\Gamma}^{(a)} = \tilde{\Gamma}_{\overline{\Delta}_a} := \{ \gamma \in \Gamma \mid |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1 \text{ для всіх } \Delta \in \overline{\Delta}_a \}, \quad (1.84)$$

Сім'я кореляційних функцій КГ визначається аналогічно (1.26):

$$\rho_\Lambda^{(a)}(\tilde{\eta}) = \frac{z^{|\tilde{\eta}|}}{Z_\Lambda^{(a)}} \int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda^{(a)}} e^{-\beta U(\tilde{\eta} \cup \tilde{\gamma})} \lambda_{z\sigma}^{(a)}(d\tilde{\gamma}), \quad \tilde{\eta} \in \tilde{\Gamma}_\Lambda, \quad \Lambda \in \mathfrak{B}_c(\Delta_a), \quad (1.85)$$

$$Z_\Lambda^{(a)} = \int_{\tilde{\Gamma}_\Lambda^{(a)}} e^{-\beta U(\tilde{\gamma})} \lambda_{z\sigma}^{(a)}(d\tilde{\gamma}). \quad (1.86)$$

Праву частину (1.85) можна переписати за допомогою інтегралу за мірою $\lambda_{z\sigma}$ на Γ_Λ :

$$\rho_\Lambda^{(a)}(\tilde{\eta}) = \rho_\Lambda^{(a)}(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda^{(a)}} \int_{\Gamma_{\Lambda \setminus \Lambda_\eta}} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \prod_{\Delta \in \Delta_a} \chi_-^\Delta(\gamma_\Delta) \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (1.87)$$

де $\Lambda_\eta := \bigcup_{\Delta: \Delta \cap \eta \neq \emptyset} \Delta$, а

$$\chi_-^\Delta(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } |\gamma_\Delta| = 0 \vee 1, \\ 0, & \text{в іншому випадку.} \end{cases} \quad (1.88)$$

Для термодинамічних потенціалів тиску і вільної енергії на одну частинку сформулюємо наступні теореми.

Теорема 1.3. [3] Нехай потенціал взаємодії ϕ задовольняє умови (A). Тоді існують граничні значення термодинамічного потенціалу тиску

$$p(z, \beta) = \frac{1}{\beta} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_l|} \log Z_{\Lambda_l}(z, \beta), \quad (1.89)$$

і

$$p^{(a)}(z, \beta) = \frac{1}{\beta} \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_l|} \log Z_{\Lambda_l}^{(a)}(z, \beta) \quad (1.90)$$

і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $a_1 = a_1(z, \beta, \varepsilon) > 0$ таке, що:

$$|p(z, \beta) - p^{(a)}(z, \beta)| < \varepsilon \quad (1.91)$$

для всіх позитивних значень z , β і $a \in (0, a_1(z, \beta, \varepsilon))$.

Теорема 1.4. [8] Нехай двочастинковий потенціал взаємодії $\phi(|x|)$ задовольняє умови (A). Тоді існує деяке $0 \leq v_0 < \infty$ таке, що для всіх $v > v_0$ існує границя

$$f^{(a)}(v, \beta) = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Lambda \uparrow \mathbb{R}^d}} f_{\Lambda}^{(a)}(N, \beta) := \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Lambda \uparrow \mathbb{R}^d}} \frac{1}{N} \log Z_{\Lambda}(N, \beta) \quad (1.92)$$

Функція $f^{(a)}(v, \beta)$ є монотонно неперервною випуклою функцією від v .

Теорема 1.5. [8] Нехай двочастинковий потенціал взаємодії $\phi(|x|)$ задовольняє умови (A). Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує значення параметру розбиття $a_1 = a_1(v, \varepsilon) > 0$ таке, що умова

$$|f(v, \beta) - f^{(a)}(v, \beta)| < \varepsilon \quad (1.93)$$

буде виконуватись для всіх позитивних значень v , β і $a \in (0; a_1(v, \varepsilon))$.

1.5 Нові розклади для термодинамічних функцій

1.5.1 Розклад Бріджеса–Федербуша для систем з посилено надстійкою взаємодією

Одним із методів дослідження статистичних систем є розклад величин, що їх характеризують, за степенями активності z . Такий розклад називають розкладом Майєра. Існують методи, за допомогою яких можна обчислювати коефіцієнти такого розкладу, одним із яких є метод Бріджеса–Федербуша [21]. Особливістю цього методу є нова форма запису коефіцієнтів розкладу, аналітичний вигляд яких описується вкладками від графів-дерев на відміну

від майєрівських графів. Аналітичним вкладом кожної лінії, що з'єднує дві вершини $x \in \mathbb{R}^d$ і $y \in \mathbb{R}^d$ такого графа є парний потенціал взаємодії $\phi(|x - y|)$, який повинен бути інтегрованим. В методі Бріджеса–Федербуша значно спрощується доведення збіжності рядів в області малих значень параметра активності.

У роботі розглядається система точкових частинок, які взаємодіють неінтегровним в околі нуля потенціалом. Такі системи можна розглядати в рамках моделі так званого *коміркового газу*, яка була введена О.Л. Ребенком [6] як апроксимація неперервних систем статистичної механіки з посилено надстійкими взаємодіями [20]. Потенціали таких взаємодій не є інтегровними, тому безпосередньо застосувати метод Бріджеса–Федербуша до таких систем не можна. Посилено надстійкі потенціали, які ми розглядаємо не задовольняють цим вимогам. Тому потрібно застосувати деякі проміжні технічні конструкції, щоб коректно побудувати цей розклад.

Збіжність розкладу Майєра виражає наступна теорема [4].

Теорема 1.6. *Нехай потенціал взаємодії задовольняє умови (A). Тоді існує границя*

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d} \frac{1}{\sigma(\Lambda)} \log Z_\Lambda(z, \beta) = \beta p(z, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\beta) z^n \quad (1.94)$$

для достатньо малих значень активності z , які визначаються нерівністю:

$$z\beta e^{\beta B_1+1}(\|\varphi\|_1 + \|u\|_1) < 1, \quad (1.95)$$

де

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty. \quad (1.96)$$

1.5.2 Про нову форму запису розкладів Майєра

У цьому розділі запропонована нова форма запису розкладів Майєра для термодинамічних потенціалів нескінченних систем статистичної механіки. Ідея полягає у тому, щоб розділити додатню і від'ємну частини потенціалу взаємодії між частинками і влаштувати розклад тільки за функціями Урселла від'ємної частини, яка інтегрується за мірою Гіббса, що визначається додатньою частиною потенціалу. Такий запис дає можливість покращити радіус збіжності розкладів Майєра і дослідити деякі нові властивості термодинамічних потенціалів.

Для побудови розкладу, який ми хочемо розглянути, ми скористаємося стандартною процедурою тільки для експоненти від енергії, яка враховує тільки від'ємну частину потенціалу ϕ^- ($\phi = \phi^+ + \phi^-$) і запишемо її у вигляді:

$$e^{-\beta U^-(\gamma)} = \sum_{\eta \subset \gamma} \tilde{F}(\eta), \quad \tilde{F}(\emptyset) = 1, \quad (1.97)$$

$$\tilde{F}(\eta) = \sum_{k=1}^{|\eta|} \sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subset \eta}^* F(\eta_1) \cdots F(\eta_k), \quad (1.98)$$

$F(\{x\}) = 0$ і $F(\eta) = \Phi_-^T(\eta)$ для $|\eta| \geq 2$, а вираз для $\Phi_-^T(\eta)$ відрізняються від функцій Урсе $\Phi^T(\eta)$ тим, що у кожному зв'язному графі, внесок якого входить у визначення $\Phi_-^T(\eta)$, аналітичний вираз C_{xy} , який відповідає кожній лінії графа, треба замінити на функції $C_{xy}^- := e^{-\beta \phi_{xy}^-} - 1$. Тоді велика статистична сума набуває вигляду:

$$Z_\Lambda(z, \beta) = Z_\Lambda^{(+)}(z, \beta) \int_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\eta \subset \gamma} \tilde{F}(\eta) \mu_\Lambda^+(d\gamma), \quad (1.99)$$

де μ_Λ^+ це міра Гіббса в Λ , яка відповідає взаємодії ϕ^+ . До правої частини рівності (1.99) застосуємо формулу:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} \sum_{\eta \subset \gamma} \tilde{F}(\eta) \mu_\Lambda^+(d\gamma) = \int_{\Gamma_\Lambda} \tilde{F}(\eta) \rho^{(+)}(\eta) \lambda_\sigma(d\eta), \quad (1.100)$$

де $\rho^{(+)}(\eta)$ сім'я кореляційних функцій, які відповідають взаємодії ϕ^+ . Враховуючи вигляд функції $\tilde{F}(\eta)$ в (1.98), підінтегральний вираз в (1.100) представимо у вигляді:

$$\sum_{k=1}^{|\eta|} \sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subset \eta}^* F(\eta_1) \cdots F(\eta_k) \rho^{(+)}(\eta) = \sum_{k=1}^{|\eta|} \sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subset \eta}^* X(\eta_1) \cdots X(\eta_k), \quad (1.101)$$

де функції X визначаються з рівняння (3.21) методом математичної індукції:

$$X(\eta) = \sum_{k=1}^{|\eta|} \sum_{\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subset \eta}^* F(\eta_1) \cdots F(\eta_k) \rho^{(+),T}(\eta_1, \dots, \eta_k \mid \eta), \quad (1.102)$$

де $\rho^{(+),T}(\eta_1, \dots, \eta_k \mid \eta)$ узагальнені зв'язні кореляційні функції [22], які відповідають взаємодії ϕ^+ . Вони визначаються як звичайні зв'язні кореляційні функції по відношенню до підмножин $\eta_1, \dots, \eta_k$ конфігурації η , тобто є звичайними зв'язними кореляційними функціями у випадку коли кожна з підмножин $\eta_1, \dots, \eta_k$ містить по одній точці. Враховуючи (3.21) і Теорему 2.1

роботи [2] отримаємо рівність:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} \tilde{F}(\eta) \rho^{(+)}(\eta) \lambda_\sigma(d\eta) = e^{\int_{\Gamma_\Lambda \setminus \{\emptyset\}} X(\gamma) \lambda_{z\sigma}(d\gamma)}. \quad (1.103)$$

Згідно формул (1.99)–(1.103) та визначення (1.89) отримаємо розклад тиску за степенями z :

$$p(z, \beta) := p^{(+)}(z, \beta) + kT \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} X_n(x_1, \dots, x_n) dx_2 \cdots dx_n. \quad (1.104)$$

Збіжність розкладу (1.104) слідує з оцінок функцій $\rho^{(+),T}(\eta_1, \dots, \eta_k | \eta)$ (див. [22]) і внесків $F(\eta)$ зв'язних графів, побудованих з допомогою функцій C_{xy}^- , вирішальною властивістю яких є умови:

$$C_{xy}^- = 0 \quad \text{при } |x - y| \leq a_0 \quad \text{і} \quad C^-(\beta, a_0) = \int_{\mathbb{R}^d} C_{0x}^- dx < \infty. \quad (1.105)$$

1.5.3 Упорядковане граткове рівняння Кірквуда-Зальцбурга

Ми розглядаємо задачу переходу до термодинамічної границі для кореляційних функцій великого канонічного ансамблю гіббсівських систем осциляторного типу з оберненою температурою $\beta \geq 0$, одновузловим фазовим простором з мірою $(\Omega, e^{-\beta u} P^0)$, потенціальною енергією $U(\omega_X)$, $X \subset \mathbb{Z}^d$ та зовнішнім полем $u(\omega)$, де $\omega_X = (\omega_x \in \Omega, x \in X)$. Вони задані так

$$\rho^\Lambda(\omega_X) = \Xi_\Lambda^{-1} \chi_\Lambda(X) \sum_{Y \subseteq \Lambda \setminus X} z^{|X|+|Y|} \int \exp\{-\beta U(\omega_{X \cup Y})\} P(d\omega_Y),$$

де $|Y|$ - число вузлів в Y , χ_Λ - характеристична функція гіпер-куба Λ , $z \in \mathbb{C}$ - активність, велика статистична сума Ξ_Λ збігається з сумою в чисельнику для $X = \emptyset$ та

$$P(d\omega_Y) = \prod_{y \in Y} P(d\omega_y), \quad P(d\omega_y) = e^{-\beta u(\omega_y)} P^0(d\omega_y),$$

Термодинамічна границя вимагає розширення Λ до $\mathbb{Z}^d$. Потенціальна енергія взаємодії визначена так

$$U(\omega_X) = \sum_{Y \subseteq X} u_Y(\omega_Y), \quad u_y(\omega_y) = 0$$

де $u_Y(\omega_Y) = u_{Y+a}(\omega_Y)$, $|Y| = k$, $a \in \mathbb{Z}^d$ - k -порядковий (k -осциляторний) трансляційний потенціал. Потенціальна енергія-необмежена функція та $P^0(\Omega) =$

∞ для осциляторного типу систем. Класичні граткові системи осциляторів описуються $\omega = q \in \mathbb{R} = \Omega$, $P^0(dq) = dq$. У квантовому випадку Ω - простір неперервних траєкторій та $P^0(d\omega) = dqP_{q,q}^\beta(dw)$, $q \in \mathbb{R}$, де $P_{q,q}^\beta(dw)$ - умовна міра Вінера. Стохастичні граткові градієнтні системи осциляторів, що взаємодіють, описуються $P^0(d\omega) = dqP_q(dw)$, $q \in \mathbb{R}$, де $P_q(dw)$ - міра Вінера [23].

Ми припускаємо, що умова суперстійкості виконується для додатньої та від'ємної частин потенціалів, тобто існує невід'ємна функція v на Ω така, що

$$|u_Y^\pm(\omega_Y)| \leq J_Y \sum_{y \in Y} v(\omega_y),$$

$$N_0 = \int e^{\beta(\gamma v^{1+\zeta}(\omega) - u(\omega))} P^0(d\omega) < \infty, \quad \text{pt} \zeta \geq 0, \gamma, \beta > 0$$

де $u_Y(\omega_Y) = u_Y^+(\omega_Y) - u_Y^-(\omega_Y)$, $u^\pm \geq 0$, $\|J\| = \max_x \sum_{x \in Y} J_Y < \infty$, сумування здійснюється за обмеженими підмножинами $\mathbb{Z}^d$, які містять x .

Послідовність $\rho = \{\rho(\omega_X; z) = \rho(\omega_X), X \subset \mathbb{Z}^d, |X| < \infty\}$ термодинамічної границі кореляційних функцій задовольняють КЗ рівняння (Кірквуда-Зальцбурга)

$$\rho = zK\rho + z\alpha.$$

де $\alpha(\omega_X) = \delta_{|X|,1}$, $\delta_{k,l} = 1, k = l$ та $\delta_{k,l} = 0, k \neq l$. КЗ оператор визначений так

$$(KF)(\omega_X) = \sum_{Y \subset X^c} \int K(\omega_x | \omega_{X \setminus x}; \omega_Y) [F(\omega_{X \setminus x \cup Y}) - \int P(d\omega_x) F(\omega_{X \cup Y})] P(d\omega_Y),$$

де сумування здійснюється за обмеженими підмножинами X^c , інтегрування здійснюється за декартівським $|Y|$ -кратним добутком $\Omega^{|Y|}$ простору Ω , для $X = x$ перший доданок в квадратних дужках для $Y = \emptyset$ є нулем та

$$K(\omega_x | \omega_{X \setminus x}; \omega_\emptyset) = e^{-\beta W(\omega_x | \omega_{X \setminus x})}, \quad W(\omega_x | \omega_{X \setminus x}) = U(\omega_X) - U(\omega_{X \setminus x}).$$

Має місце рівність ($X \cap Y = \emptyset$)

$$K(\omega_x | \omega_{X \setminus x}; \omega_Y) = e^{-\beta W(\omega_x | \omega_{X \setminus x})} K_x(\omega_X; \omega_Y),$$

$$K_x(\omega_X; \omega_Y) = \sum_n \sum_{\cup Y_j = Y, Y_j \neq \emptyset} \prod_{j=1}^n (e^{-\beta W(\omega_X; \omega_{Y_j} | x)} - 1),$$

де сумування здійснюється за множинами Y_j , які покривають Y та

$$W(\omega_X; \omega_Y | x) = \sum_{x \in Z \subseteq X} u_{Z \cup Y}(\omega_{Z \cup Y}).$$

Упорядковані КЗ оператор та КЗ рівняння є такі, що x визначається, як перший вузол (в лексикографічному порядку) та $v(\omega_x) = \max_{y \in X} v(\omega_y)$.

Ми шукаємо розв'язок КЗ рівняння у банаховому просторі $\mathbb{E}_{\xi,f}$ послідовностей вимірних функцій $G_X(\omega_X)$ з нормою

$$\|G\|_{\xi,f} = \max_X \xi^{-|X|} \operatorname{ess\,sup}_{w_X} \exp\left\{-\sum_{x \in X} f(\omega_x)\right\} |G(\omega_X)|,$$

$$f(\omega) = \gamma \beta v^{1+\zeta}(\omega), \quad \zeta \geq 0.$$

Покладемо

$$\|J\|_1 = \max_x \sum_{x \in Y} J_Y |Y|,$$

$$\|J\|_{*2} = \max_x \sum_{x \in Y} J_Y |Y| (N_3 \xi)_*(|Y|), \quad N_3 = \int e^{2f(\omega)} P(d\omega),$$

де $\xi_*(a)$ дорівнює ξ^a та 1, якщо, відповідно, $\xi \geq 1$ та $\xi < 1$.

Теорема 1.7. *Якщо $\zeta > 0$ та $\|J\|_1, \|J\|_{*2} < \infty$ то норма $\|K\|_{\xi,f}$ упорядкованого КЗ оператора K у банаховому просторі $\mathbb{E}_{\xi,f}$ є обмежена та ряд*

$$\rho = \sum_{n \geq 0} z^{n+1} K^n \alpha$$

визначає єдиний розв'язок упорядкованого КЗ рівняння в $\mathbb{E}_{f,\xi}$, який є голоморфною функцією від z у крузі $|z| < \|K\|_{\xi,f}^{-1}$.

2 ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯНЬ РУХУ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК З АПРОКСИМОВАНИМ ГАМІЛЬТОНІАНОМ ДАРВІНА

2.1 Локальна динаміка зарядів першого наближення

Система (МЛ) Максвелла-Лоренца заряджених релятивістських та нерелятивістських частинок, що взаємодіють з електромагнітним полем, є фундаментом сучасної фізики.

Електродинамічна МЛ система диференціальних рівнянь породжується лагранжіаном, якщо електричне та магнітне поля виражені в термінах електромагнітних потенціалів, що задовольняють умові Лоренца та хвильовим рівнянням, зачеплені з рівняннями Ньютона-Лоренца. Довести існування розв'язків цих рівнянь важко через те, що їх праві частини містять мірозначні заряд та струм, залежні від координат та швидкостей частинок, які можуть стикатись. Як уникнути катастрофічних зіткнень - головне питання математичної теорії.

Якщо швидкості частинок малі, тоді можна розкласти вищезгаданий лагранжіан в ряд за степенями оберненої швидкості світла. Його нульове наближення збігається з кулонівським лагранжіаном. Доданок з першою степенню c^{-1} збігається з часовою похідною повного заряду системи і є нулем. Доданок з c^{-2} збігається з лагранжіаном Дарвіна, що породжує сили залежні від швидкостей

Лагранжіан Дарвіна має вигляд

$$L = L^0 + \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2} \int [v_j^2(t) + \sigma \frac{v_j^4(t)}{8c^2}] dt, \quad \sigma = 0, 1,$$

де

$$L^0 = \sum_{j \neq k=1}^n e_k e_j \int \{ -|x_k(t) - x_j(t)|^{-1} + (2c)^{-1} [(v_j(t), v_k(t)) |x_k(t) - x_j(t)|^{-1} + \\ + |x_k(t) - x_j(t)|^{-3} (v_j(t), x_k(t) - x_j(t)) (v_k(t), x_k(t) - x_j(t))] \} dt$$

та $\sigma = 0, 1$ відповідає випадкам нерелятивістських та релятивістських частинок. Вираз $\frac{v_j^4(t)}{8c^2}$ є результат розкладу $(1 - c^{-2}v_j^2(t))^{\frac{1}{2}}$ за степенями $c^{-2}v_j^2(t)$. L^0

відрізняється від L_0 на необмежену константу, яка фігурує у виразі для L_0 (доданок в сумі з $k = j$).

Нехай

$$H_n^0 = \sum_{j=1}^n \frac{|p_j|^2}{2m_j} + U(x_{(n)}), \quad U(x_{(n)}) = \sum_{j \neq k=1}^n \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|}, \quad x_{(n)} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n}.$$

де в подвійній сумі j, k пробігають множину $1, \dots, n$. Тоді апроксимований гамільтоніан Дарвіна визначений в [24] як

$$H_n(c^{-2}) = \sum_{j=1}^n (p_j, v_j) - L, \quad p_j = m_j v_j$$

і

$$H_n(\eta) = H_n(\eta; x_{(n)}; p_{(n)}) = H_n^0 - \eta \sigma \sum_{j=1}^n \frac{|p_j|^4}{8m_j^3} - \eta \sum_{j \neq k=1}^n \frac{e_j e_k}{2m_j m_k |x_j - x_k|} [(p_j, p_k) + |x_j - x_k|^{-2} (p_j, x_j - x_k)(p_k, x_j - x_k)].$$

Наша мета, тепер, побудувати розв'язки рівнянь руху з апроксимованим гамільтоніаном Дарвіна з комплексними змінними

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H_n(\eta)}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H_n(\eta)}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Щоб зберегти позначення, які прийняті всюди, ми використаємо такі позначення ($x, y \in \mathbb{C}^n$)

$$(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j^*, \quad |x|^2 = (x, x), \quad x_j, y_j \in \mathbb{C},$$

$$(x, y)_* = (x, y^*) = \sum_{j=1}^n x_j y_j, \quad |x|_*^2 = (x, x^*),$$

де зірочка у верхньому індексі означає комплексне спряження. Нехай

$$D_m(r; \xi) = \{x_j : |x_j - \xi_j| \leq r, \quad x_j, \xi_j \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, m\}.$$

Локальна теорема існування розв'язків для (2.1) формулюється так [13]:

Теорема 2.1. *Нехай $\{a_l, b_l \in \mathbb{R}^3 : |a_j - a_l| \geq r_1, j, l = 1, \dots, n\}$, $|b_j|_0 \leq r_2$, $\kappa_2^{-1} = (1 - \sqrt{6}\kappa)^2 - 12\kappa^2 > 0$. Тоді існує розв'язок $(x_j(t), p_j(t))$ (1) для початкових даних $(x_j(0) = a_j, p_j(0) = b_j)$ такий, що*

$$(x_j(t); p_j(t)) \in D_{3n}(r; a) \times D_{3n}(r; b), \quad r = \kappa r_1$$

та $p_j(t), x_j(t)$ є голоморфними функціями t в диску $|t| < T = r((n+1)M)^{-1}$,
 $M = \max(M_1, M_2)$,

$$M_1 = c_1 r_1^{-2} + \eta \left(\frac{r+r_2}{r_1} \right)^2 (\eta_1 + \eta_2 r_1),$$

$$M_2 = m_-^{-1}(r+r_2) + \eta [\sigma \eta_3 (r+r_2)^3 + \eta_4 \frac{r+r_2}{r_1}],$$

де $m_- = \min_s m_s$ та позитивні константи η_j, c_1 не залежать від η, σ та є позитивними поліномами $\sqrt{\kappa_2}, \kappa$.

Зауваження 2.1. Наступна нерівність виконується для цих розв'язків

$$|x_j(t) - x_l(t)|_0 \geq |a_j - a_l|_0 - |x_j(t) - a_j|_0 - |x_l(t) - a_l|_0 \geq (1 - 2\kappa)r_1.$$

Це означає що зіткнення між частинками відсутні при $\kappa < \frac{1}{2}$. Умова обмеженості κ_2 більш сильна: $\kappa < \frac{1}{\sqrt{6}(1+\sqrt{2})}$. З нерівностей $\frac{6}{64} < \frac{1}{9}$ випливає, що, поклавши $\kappa = \frac{1}{8}$, отримуємо $\kappa_2^{-1} > \frac{2}{9}$.

Рівняння Дарвіна має вигляд

$$-\frac{\partial L(t)}{\partial x_j^\alpha} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t)}{\partial v_j^\alpha} = \sum_{\beta=1}^3 \sum_{k=1}^n K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) \dot{v}_k^\beta - G_{j,\alpha}(x_{(n)}; v_{(n)}) = 0, \quad j \in (n), \quad (2.2)$$

$$G_{j,\alpha}(x_{(n)}; v_{(n)}) = \frac{\partial L(t)}{\partial x_j^\alpha} - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L(t)}{\partial v_j^\alpha} \right) (x_{(n)}; v_{(n)}), \quad x_{(n)} = (x_1, \dots, x_n)$$

де в правій частині останньої рівності у другому доданку відсутні прискорення зарядів.

Локальна теорема існування розв'язків для нього формулюється так [13]:

Теорема 2.2. Нехай $\{a_l, b_l \in \mathbb{R}^3 : |a_j - a_l| \geq r_1, j, l = 1, \dots, n\}$, $|b_j|_0 \leq r_2$, та

$$R_*(c^2 r_1) = \prod_{l=1}^n m_l^3 - \sum_{s=0}^{3n-2} \sum_{j_k \neq j_l} \prod_{l=1}^s m_{[\frac{j_l}{3}]} ((3n-s)!) r'^{3n-s} > 0$$

де сумування у другій сумі ведеться за індексами $j_k \in (3n), k = 1, \dots, s$,
 $r' = (c^2 r_1)^{-1} \kappa_* \bar{c}^2$,

$\kappa_* = \sqrt{\kappa_2}(1 + \kappa_0\kappa_2)$, $\kappa_2^{-1} = (1 - 2\sqrt{3}\kappa)^2 - 24\kappa^2 > 0$, $\kappa_0 = 2\kappa + 1$. Тоді існує розв'язок $(x_j(t); v_j(t)) \in \mathbb{R}^{6n}$ рівняння Дарвіна для початкових даних $(x_j(t_0) = a_j, v_j(t_0) = b_j, t_0 \geq 0)$ такий, що

$$(x_j(t); v_j(t)) \in D_{3n}(r; a) \times D_{3n}(r; b) = D_{6n}(r; a, b); \quad , \quad r = \kappa r_1$$

та $x_j(t), v_j(t)$ є голоморфними функціями t в диску $|t - t_0| < T = r((6n + 1)M)^{-1}$, $M = \max(M' M'' n(3n)!, \kappa r_1 + r_2)$,

$$M' = (\max(m_+, r')^{3n-1} R_*^{-1}(c^2 r_1), \quad M'' = \bar{e}^2 r_1^{-2} [\eta_0 + c^{-2} \eta_1(\kappa r_1 + r_2)^2]$$

де η_j є позитивними поліномами $\sqrt{\kappa_2}$, κ та не залежать від c .

Зауваження 2.2. Наступна нерівність виконується для розв'язків (2.1)

$$|x_j(t) - x_l(t)|_0 \geq |a_j - a_l|_0 - |x_j(t) - a_j|_0 - |x_l(t) - a_l|_0 \geq (1 - 2\kappa)r_1.$$

Це означає що зіткнення між частинками відсутні при $\kappa < \frac{1}{2}$. Умова обмеженості κ_2 більш сильна: $\kappa < \frac{1}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}$.

Ці теореми випливають з теореми Коші про існування голоморфних розв'язків n -вимірних звичайних диференціальних рівнянь з голоморфним векторним полем [25]. Теорема Коші формулюється наступним чином.

Нехай система n -вимірних звичайних диференціальних

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x_{(n)}), \quad j = 1, \dots, n, \quad x_{(n)} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0$$

визначається функціями f_j , які є голоморфними функціями змінних x_j в $D_n(r; \xi)$ та рівномірно обмежені: $|f_j| \leq M$. Тоді розв'язок $x_j(t)$ для початкових даних $\xi_j = x_j(t_0)$ є голоморфною функцією t у диску $|t - t_0| < T = r((n + 1)M)^{-1}$ та належить $D_n(r; \xi)$.

2.2 Глобальна динаміка зарядів і рівновага

Важливою задачею математики є знаходження розв'язків рівнянь руху Ньютона систем багатьох d -вимірних частинок (тіл, зарядів) з сингулярною потенціальною енергією U у вигляді збіжних на всьому часовому інтервалі рядів. Ці рівняння для систем N тіл з масами $m_j, j = 1, \dots, N$ мають вигляд

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = - \frac{\partial U(x_{(N)})}{\partial x_j}, \quad (2.3)$$

$$j = 1, \dots, N, \quad x_{(N)} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{dN}, \quad x_j = (x_j^1, \dots, x_j^d).$$

Важливим класом цих систем є такі, що мають рівноважні конфігурації (рівновагу), в яких симетрична матриця U^0 частинних других похідних потенціальної енергії не має нульових власних значень, а потенціальна енергія є дійсно аналітичною функцією в них. Кулонівські лінійні системи двох та трьох негативних зарядів e_0 однакової маси в полі двох зовнішніх точкових фіксованих додатніх зарядів e' є саме такі. Цей важливий факт дозволив нам побудувати періодичні розв'язки поблизу рівноваги рівнянь руху Кулона цих негативних зарядів, розташованих на такій прямій, що додатні заряди розташовані симетрично на перпендикулярі до цієї прямої [14]. Ми застосували теореми Ляпунова(центрально), Мозера, Вайнстайна(Weinstein) та Зігеля, які вимагають знання спектру матриці U^0 . Перші дві теореми, які гарантують існування періодичних розв'язків у вигляді збіжних рядів, обмежували значення $\frac{e_0}{e'}$ через умову нерезонансності. Теорема Вайнстайна встановлює існування періодичних розв'язків без цієї умови, але може бути застосована тільки для систем зі стійкою рівновагою (U^0 є позитивно визначеною матрицею і рівновага є мінімумом потенціальної енергії).

Потенціальна енергія двох відємних зарядів e_0 на прямій у полі двох додатніх зарядів e' симетрично розташованих на перпендикулярі до неї має вигляд

$$U(x_{(2)}) = e_0^2 |x_1 - x_2|^{-1} - 2e_0 e' (\sqrt{x_1^2 + b^2})^{-1} - 2e_0 e' (\sqrt{x_2^2 + b^2})^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Рівняння рівноваги є таким $\frac{\partial}{\partial x_j} U(x_{(2)}) = 0$, $j = 1, 2$. Врахуємо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} |x_1 - x_2|^{-k} &= -k \frac{x_1 - x_2}{|x_1 - x_2|^{k+2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (\sqrt{x_1^2 + b^2})^{-k} &= -k \frac{x_1}{(\sqrt{x_1^2 + b^2})^{k+2}}. \end{aligned}$$

Тобто

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U(x_{(2)}) = -e_0^2 \frac{x_j - x_k}{|x_1 - x_2|^3} + 2e_0 e' \frac{x_j}{(\sqrt{x_1^2 + b^2})^3}, \quad j \neq k = 1, 2$$

Врезультаті для рівноваги $x_1 = x_1^0 = a$, $x_2 = x_2^0 = -a$ виникають рівності

$$\frac{e_0}{(2a)^3} = \frac{e'}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3}.$$

Далі

$$\frac{\partial U(x_{(2)})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial U(x_{(2)})}{\partial x_2 \partial x_1} = -2e_0^2 |x_1 - x_2|^{-3}.$$

Нехай $U_{1,2}^0$ є ця функція в рівновазі. Тоді $U_{1,2}^0 = -\frac{e_0^2}{4a^3} = -u'$. Далі

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} U(x_{(2)}) = \frac{2e_0^2}{|x_1 - x_2|^3} + \frac{2e_0 e'}{(\sqrt{x_j^2 + b^2})^3} - \frac{6e_0 e' x_j^2}{(\sqrt{x_j^2 + b^2})^5}$$

Нехай $U_{j,j}^0$ є ця функція в рівновазі. Тоді

$$U_{1,1}^0 = U_{2,2}^0 = \frac{e_0^2}{4a^3} + \frac{2e_0 e'}{(\sqrt{a^2 + b^2})^3} - \frac{6e_0 e' a^2}{(\sqrt{a^2 + b^2})^5}$$

З рівності рівноваги випливає

$$\left(\frac{e_0}{e'}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{2a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a = (4 - \eta)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\eta} b, \quad \eta = \left(\frac{e_0}{e'}\right)^{\frac{2}{3}} < 4. \quad (2.5)$$

Як наслідок

$$U(x_{(2)}^0) = U(-a, a) = \frac{e_0^2}{2a} - \frac{2e_0 e'}{a} \left(\frac{e_0}{e'}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{e_0^2}{2a} \left(1 - 4\left(\frac{e'}{e_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$U_{1,1}^0 = U_{2,2}^0 = 2u' - u_*, \quad u_* = \frac{3e_0^2}{4^2 a^3} \left(\frac{e_0}{e'}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{3u'}{4} \left(\frac{e_0}{e'}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Нехай U^0 є матрицею з елементами $U_{1,1}^0, U_{2,2}^0, U_{1,2}^0 = U_{2,1}^0$. Її власні значення ζ_1, ζ_2 легко знаходяться, як корені $\lambda = \zeta_1, \zeta_2$ рівняння

$$(2u' - u_* - \lambda)^2 - u'^2 = 0,$$

$$\zeta_1 = u' - u_*, \quad \zeta_2 = 3u' - u_*.$$

Два власні значення є від'ємним та позитивним, якщо $3u' < u_*$, $u' > u_*$, відповідно. Наступний результат випливає з теореми про стійкість Дагранжа-Діріхле [26], бо другий випадок означає, що потенціальна енергія має мінімум в рівновазі.

Теорема 2.3. Система двох зарядів на прямій з потенціальною енергією (2.4) має рівновагу $x^0 = (-a, a)$ визначену (2.5), якщо $\frac{e_0}{e'} < 8$ та є стійкою, якщо

$$\frac{e_0}{e'} < \frac{8}{\sqrt{27}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Якщо є нейтральність $e' = e_0$, то рівновага стійка.

Якщо $3u' > u_*$, $u' < u_*$, то один корінь є додатний та другий-відємний. Якщо $u' = u_*$ чи $3u' = u_*$, то один корінь є додатний чи відємний, а інший є нулем.

Лінійна частина векторного поля у рівновазі має такі власні значення $\pm i\sqrt{m^{-1}(3u' - u_*)}$, $\pm i\sqrt{m^{-1}(u' - u_*)}$ if $u' > u_*$. Для застосування теореми Ляпунова потрібно виключити резонанси між ζ_1, ζ_2 , тобто $\frac{\zeta_2}{\zeta_1} = k^2$, $1 < k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2.4. *Нехай $\frac{e_0}{e'} < \frac{8}{\sqrt{27}}$ та $\frac{e_0}{e'} \neq \frac{8}{\sqrt{27}}(\frac{k^2-3}{k^2-1})^{\frac{3}{2}}$, $1 < k \in \mathbb{Z}^+$ чи $\frac{8}{\sqrt{27}} < \frac{e_0}{e'} < 8$. Тоді рівняння (2.3) при $n = 2$ та (2.4) має два чи один розв'язки такі, що кожен з них залежить від дійсного параметру c_j дл деякого j , $j = 1, 2$ чи одного дійсного параметру c . Ці розв'язки та їх періоди $\tau_1(c_1), \tau_2(c_2)$ or $\tau(c)$ є голоморфні функції цих параметрів в нулі та $\tau_1(0) = 2\pi\sqrt{m}(u'(1 - \frac{3}{4}(\frac{e_0}{e'})^{\frac{2}{3}}))^{-\frac{1}{2}}$, $\tau_2(0) = 2\pi\sqrt{m}(u'(3 - \frac{3}{4}(\frac{e_0}{e'})^{\frac{2}{3}}))^{-\frac{1}{2}}$ or $\tau(0) = 2\pi\sqrt{m}(u'(3 - \frac{3}{4}(\frac{e_0}{e'})^{\frac{2}{3}}))^{-\frac{1}{2}}$.*

Наступна теорема випливає з теореми Вейнштейна.

Теорема 2.5. *Нехай $\frac{e_0}{e'} < \frac{8}{\sqrt{27}}$. Тоді рівняння (2.3) при $n = 2$ та (2.4) на рівні енергії $E_h = \frac{e_0^2}{2a}(1 - 4(\frac{e'}{e_0})^{\frac{2}{3}}) + h$ при достатньо малому h має два періодичні розв'язки з частотами близькими до $m^{-1}(3 - \frac{3}{4}(\frac{e_0}{e'})^{\frac{2}{3}})u'$, $m^{-1}(1 - \frac{3}{4}(\frac{e_0}{e'})^{\frac{2}{3}})u'$.*

Наступна теорема відповідає випадку невідємних коренів і випливає з Теорему 1.1 з [14].

Теорема 2.6. *Нехай $\frac{8}{\sqrt{27}} < \frac{e_0}{e'} < 8$. Тоді рівняння (2.3) при $n = 2$ та (2.4) має обмежені розв'язки, які є голоморфні функції в нулі одного дійсного параметру такі, що $\|x - x^0\|_\lambda < \infty$, $\|\dot{x}\|_\lambda < \infty$, де $\lambda < \sqrt{m^{-1}(u_* - u')}$ та x^0 -рівновага.*

Наступна теорема випливає з теореми Мозера.

Теорема 2.7. *Нехай $\frac{8}{\sqrt{27}} < \frac{e_0}{e'} < 8$. Тоді рівняння (2.3) при $n = 2$ та (2.4) має обмежені розв'язки, які є голоморфні функції в нулі трьох дійсних параметрів $c_j, j = 1, 2, 3$. Якщо $c_3 = 0$ ці розв'язки є періодичними з періодом $\tau(c_1c_2)$ з Теорему 5.7.*

Розглянемо плоску систему n зарядів, $n - 1$ з яких відємні і однакові

$$U(x_{(n)}) = \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{e_j e_k}{|x_j - x_k|},$$

де

$$x_{(n)} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad |x|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2.$$

$$e_j = -e_0 < 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad e_n > 0.$$

Ми предстеляємо координати зарядів комплексними у вигляді

$$x_j = (x_j^1 + ix_j^2; 0) = (z_j q(t); 0) \in \mathbb{R}^3,$$

$$q(t) = e^{iu(t)} r_1(t), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad x_n = 0,$$

причому координати відємних однакових зарядів z_j збігаються з координатами правильного багатокутника з центром у нулі. Наша система має рівновагу для певного значення нерухомого додатнього заряду e_n у початку координат.

Теорема 2.8. *Нехай*

$$e_n = e_n^0 = 2^{-\frac{3}{2}} e_0 \sum_{k=1}^{n-2} \left(1 - \cos \frac{2\pi k}{n-1} \right)^{-\frac{1}{2}},$$

додатній заряд e_n має координату $z_n = 0$ та відємні заряди $e_j = e_j^0 = -e_0 < 0, j = 1, \dots, n-1$ з рівною масою m мають координати z_k , які збігаються з координатами правильного багатокутника з центром у нулі для $n > 3$ та $z_1 + z_2 = 0$ для $n = 3$. Нехай також $|z_n - z_j| = a$. Тоді така конфігурація є рівновагою в кулонівській системі цих зарядів.

Лема 2.1. *Нехай z_j та заряди $e_j, j = 1, \dots, n-1$ ті ж, що і в останній теоремі. Тоді*

$$-w^2 m_j z_j = \sum_{k=1, k \neq j}^n e_j e_k \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|^3}, \quad w \in \mathbb{R}$$

якщо $e_n > e_n^0$ та

$$w^2 a^3 \frac{m}{e_0} = e_n - e_n^0.$$

При доведенні цієї леми використовується рівність для координат правильного багатокутника з центром у нулі

$$\sum_{k=1}^{n-1} z_k = 0.$$

Точні розв'язки лагранжового типу $x_k = z_k q(t)$ мають властивість

$$|x_j - x_k| = |z_j - z_k| |q|.$$

З рівнянь Кулона для них

$$m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = \sum_{k=1, k \neq j}^n e_j e_k \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^3}, \quad j = 1, \dots, n,$$

впливає

$$m_j z_j \frac{d^2 q}{dt^2} = q |q|^{-3} \sum_{k=1, k \neq j}^n e_j e_k \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|^3},$$

Нехай

$$q(t) = e^{iu(t)} r(t), \quad r(t) > 0.$$

З цього та останньої Лема отримуємо

$$e^{-iu(t)} \frac{d^2 q}{dt^2} + w^2 r^{-2} = \frac{d^2 r}{dt^2} + i \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{du}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} r \right) - \left(\frac{du}{dt} \right)^2 r + w^2 r^{-2} = 0,$$

Має місце умова дійсності радіального рівняння

$$2 \frac{dr}{dt} \frac{du}{dt} + \frac{d^2 u}{dt^2} r = r^{-2} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{du}{dt} \right) = 0.$$

В результаті

$$\frac{du}{dt} = r^{-2} \eta, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} - \eta^2 r^{-3} + w^2 r^{-2} = 0,$$

де $\eta \in \mathbb{R}$ - стала. Останнє - це рівняння Кеплера.

Знайдені розв'язки описують рух негативних зарядів уздовж кеплерових орбіт навколо нерухомого додатнього заряду таким чином, що їх координати збігаються з вершинами правильного багатокутника.

3 ДОСЛІДЖЕННЯ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ КОНФЛІКТУ

3.1 Побудова моделей динамічних систем конфлікту

Результати з побудови ряду конкретних моделей динамічних систем конфлікту та досліджено їх властивості відображені в роботах [27, 29, 31, 34, 38]. Зокрема, в статтях [27, 29] "Модель динамічної системи конфліктної тріади" та "The conflict triad dynamical system" досліджується модель динамічної системи конфліктної тріади, яка описує взаємодію між трьома субстанціями: популяцією біологічного виду (життя), навколишнім середовищем (ресурс існування), та негативними факторами для існування (інфекція). Встановлено наявність основних фаз співіснування субстанцій тріади: стану динамічної рівноваги (нерухомої точки), циклічних атракторів, періодично осцилюючих траєкторій, та еволюцій близьких до хаотичних. Комп'ютерним моделюванням продемонстровано існування біфуркаційних точок та порогів між різними фазами.

Під *конфліктною тріадою* ми розуміємо фізичну систему, що складається з трьох субстанцій (позначимо їх $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$), які існують у спільному просторі Ω і взаємодіють певним чином. Глобально, кожна субстанція в початковий момент часу характеризується числом: P, R, Q — у певному вимірі абсолютним значення кількості відповідної субстанції в усьому просторі. Система є складною, в тому сенсі, що кожна субстанція має багато компонент:

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n), \mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n), \mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n), P_i, R_i, Q_i \geq 0, i = 1, \dots, n,$$

тобто, розподілена по окремим регіонам Ω_i , з яких складається простір існування:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i, \quad 2 \leq n < \infty.$$

Отже, $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ є векторами з невід'ємними координатами, $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}_+^n$. Досліджується динаміка змін кожної компоненти P_i, R_i, Q_i внаслідок взаємодії між субстанціями в дискретному часі.

Таким чином, еволюція векторів $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$, зумовлена конфліктною взаємодією, породжує деяку динамічну систему в дискретному часі:

$$\{\mathbf{P}^N, \mathbf{R}^N, \mathbf{Q}^N\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{P}^{N+1}, \mathbf{R}^{N+1}, \mathbf{Q}^{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \dots$$

Для спрощення задачі ми припускаємо, що змінюються лише координати P_i, R_i, Q_i , а числа P, R, Q , як l_1 -норми векторів:

$$P = \| \mathbf{P} \|_1 = P_1 + \dots + P_n, \quad R = \| \mathbf{R} \|_1, \quad Q = \| \mathbf{Q} \|_1.$$

від часу не залежать.

Відображення $\ast$ визначається законом взаємодії між субстанціями. Взагалі цей закон невідомий. В цій роботі $\ast$ ми визначаємо евристично, згідно інтуїтивного розуміння фізичної суті субстанцій $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$.

Двостороння парна взаємозалежність, плюс–мінус, є аналогом добре відомій моделі "жертва – хижак". Тут використано два різних варіанта такої взаємодії: взаємозалежність пари: біологічний вид (хижак) – життєвий ресурс (жертва), та взаємозалежність між біологічним видом (як жертвою) та вірусною інфекцією (як хижак). Взаємозалежність мінус–мінус є принципово іншою. Вона моделює конфліктну боротьбу непримиренних альтернативних субстанцій типу: вірус – медичний антидот. Тут протилежною субстанцією до вірусної інфекції виступає природний життєвий ресурс. В моделі припускається, що ресурс є невичерпним, а інфекція – незнищенна.

При цьому, послідовність $P_i^N, N = 0, 1, \dots$ можна трактувати, як еволюцію кількості певного біологічного виду в регіоні Ω_i під впливом двох протилежних чинників. Динаміка популяції P_i^N позитивно залежить від використання ресурсного середовища, та негативно від дії інфекції. Тому в момент часу $N + 1$ регіональне значення величини P_i^{N+1} зростає при збільшенні R_i^N , та спадає при зростанні Q_i^N . У свою чергу, регіональні зміни життєвого ресурсу R_i^N є негативно залежними, з одного боку, від інтенсивності їх використання, як джерела для існування біологічної популяції, а з другого – впливом субстанції $\mathbf{Q}$, альтернативної по природі до $\mathbf{R}$. Накінець, еволюцію координат Q_i^N можна інтерпретувати, як динамічну характеристику концентрації загроз існуванню для біологічного виду в кожному окремому регіоні Ω_i . Локальне поширення інфекції Q_i^{N+1} збільшується при зростанні P_i^N та зменшенні R_i^N .

Таким чином, координати P_i^N, R_i^N, Q_i^N описують еволюцію локальних числових характеристик субстанцій у окремих регіонах Ω_i . Символічно трійку субстанцій $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ можна асоціювати з філософською тріадою: людина, добро, зло, або, згідно міфології, з трьома стихіями природи, флора і фауна землі, вода та вогонь.

Нелінійна динаміка взаємозалежності величин $P_i^N, R_i^N, Q_i^N, i = 1, \dots, n, N = 1, 2, \dots$, що тут досліджується є досить складною. Тому важко сподіватися

на встановлення точних результатів (теорем) про глобальну поведінку усієї системи. Тим не менше, ми одержуємо ряд математичних результатів для окремих двосторонніх ланок конфліктної тріади з парною взаємодією. Для повної складної системи в розділі 3 побудовані комп'ютерні моделі. Їх аналіз і дослідження проявляє ряд цікавих закономірностей.

Один з важливих результатів роботи полягає у встановленні математичної коректності (фактично змістовності) побудованої динамічної системи конфліктної тріади. А саме, показано, що при належному підборі параметрів взаємодії (цей підбір є нетривіальною задачею) комп'ютерні моделі складної системи не "розвалюються", тобто значення координат змінюються в фізично допустимих межах.

Другий важливий результат нашої роботи у тому, що модельні реалізації динамічної системи конфліктної тріади проявляють типові закономірності складних систем, які відомі і досить повно відображені в літературі. А саме, встановлено наявність різних фаз існування системи: фаза динамічної рівноваги, фаза циклічних атракторів, широкого спектру циклічних траєкторій, зона біфуркаційних точок та порогів між різними фазами, фаза квазіхаотичної поведінки.

В порівнянні з SIR-моделлю наші побудови істотно відрізняються у двох аспектах. А саме, ми вводимо регіоналізацію простору існування. Тому комп'ютерні моделі можна використовувати для передбачення поширення інфекційного зараження окремо в кожному з регіонів і встановлення регіонів найбільш безпечні для існування біологічних спецій. Іншим новим моментом роботи є формули для опису конфліктної взаємодії. Вони враховують одночасно, як суто кількісні (емпіричні) характеристики конфлікту, так і статистичні дані.

Динамічна система конфліктної тріади – це модель, яка задається взаємодією між трьома природними субстанціями: популяцією біологічного виду чи спеції (життя), навколишнім середовищем (ресурс існування) та негативними факторами для існування біологічної спеції (інфекція). У цій моделі встановлено наявність основних фаз співіснування субстанцій тріади: стану динамічної рівноваги (нерухомої точки), циклічних атракторів, періодично осцилюючих траєкторій та еволюцій, близьких до хаотичних. Комп'ютерним моделюванням продемонстровано існування біфуркаційних точок та порогів між різними фазами.

Величини P_i^N , $N = 0, 1, \dots$ можна трактувати як еволюцію кількості певного біологічного виду в регіоні Ω під впливом двох чинників. Локальна (регіональна) динаміка популяції P_i^N позитивно залежить від кількості використаного ресурсного середовища, та негативно – від дії інфекції. Тому в момент часу $N + 1$ регіональне значення величини P_i^{N+1} зростає при збільшенні R_i^N , але спадає при зростанні Q_i^N . Своєю чергою, регіональні зміни ресурсу R_i^N є негативно залежними від двох інших сторін: з одного боку, від інтенсивності їх використання як джерела для існування біологічної популяції, а з другого – згубним впливом субстанції **Q**, альтернативної по природі до **R**. Нарешті, еволюцію координат Q_i^N можна інтерпретувати як динамічну характеристику концентрації загроз існуванню для біологічного виду в кожному окремому регіоні Ω_i . Локальне поширення інфекції Q_i^{N+1} збільшується при зростанні біологічної популяції P_i^N та зменшенні R_i^N . Явні формули усіх взаємозалежностей наведено в п. 8.2. Таким чином, координати P_i^N, R_i^N, Q_i^N описують еволюцію локальних числових характеристик субстанцій в окремих регіонах Ω_i .

У філософському аспекті трійку субстанцій **P**, **R**, **Q** можна асоціювати з тріадою: людина, добро, зло, а згідно з міфологією – з трьома стихіями природи: земля, вода та вогонь.

Динаміка взаємозалежностей величин P_i^N, R_i^N, Q_i^N , $i = 1, \dots, n$, $N = 1, 2, \dots$, що тут досліджується, є досить складною. Тому важко сподіватися на встановлення точних результатів (теорем) про глобальну поведінку усієї системи. Далі наведено низку точних математичних результатів для окремих двосторонніх ланок конфліктної тріади з парною взаємодією. Для повної складної системи побудовано комп'ютерні моделі. Їх аналіз і дослідження виявляють цікаві закономірності.

Важливий результат полягає у встановленні математичної коректності (фактично змістовності) побудованої динамічної системи конфліктної тріади. А саме, далі показано, що при належному підборі параметрів взаємодії (цей підбір є нетривіальною задачею) комп'ютерні моделі складної системи не розвалюються, тобто значення координат змінюються у фізично допустимих межах. Інший результат дослідження моделі полягає у тому, що конкретні реалізації динамічної системи конфліктної тріади виявляють типові закономірності складних систем, які відомі і досить повно відображені в літературі. А саме, встановлено наявність різних фаз існування системи: динамічної рів-

новаги, існування циклічних атракторів та широкого спектра циклічних траєкторій, наявність зони біфуркаційних точок та порогів між різними фазами, можливість поведінки близької до хаотичної.

Відомими в літературі та найбільш близькими до моделі конфліктної тріади є різні варіанти так званої SIR-моделі, що описують динаміку епідемічного зараження. У SIR-моделі конфліктна тріада звичайно представлена без регіоналізації простору існування. Уся популяція біологічного виду поділяється на три групи: S позначає кількість осіб, сприятливих до зараження, I – інфіковані та здатні переносити інфекцію, R – ті, що перебувають під захистом або вже видужали. Еволюція зазначених груп у часі визначається відносно простими нелінійними рівняннями:

$$\dot{S} = -rSI, \dot{I} = rSI - aI, \dot{R} = aI,$$

де $r, a > 0$. Основне питання – це дослідження динаміки поширення інфекції $I(t)$ залежно від заданих коефіцієнтів r, a та стартових значень $S(0), I(0)$.

Порівняно з SIR-моделлю наші побудови істотно відрізняються у двох аспектах. Ми вводимо регіоналізацію простору існування, тобто розбиття простору на окремі регіони. Тому комп'ютерні моделі можна використовувати для передбачення поширення інфекційного зараження окремо в кожному з регіонів і встановлення найбільш безпечних для існування біологічних спецій регіонів. Іншим новим моментом є оригінальні формули для опису конфліктної взаємодії (див. (3.2), (3.3)). Вони враховують одночасно як суто кількісні (емпіричні) характеристики конфліктних сторін, так і статистичні дані. Важливо також, що в формулах (3.2), (3.3) закладено принцип незнищеності для кожної із природних субстанцій.

Динамічну систему конфліктної тріади, що описує еволюцію трьох одночасно взаємодійних субстанцій $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$, символічно запишемо у вигляді

$$\{\mathbf{P}^N, \mathbf{R}^N, \mathbf{Q}^N\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{P}^{N+1}, \mathbf{R}^{N+1}, \mathbf{Q}^{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (3.1)$$

де $*$ – складна композиція конфлікту, визначена формулами (3.2), (3.3). Припускаємо, що субстанції $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ мають спільний простір існування Ω , який природним чином розкладено на окремі регіони, $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, $n \geq 2$. Конфліктна тріада – складна система в тому сенсі, що кожна з трьох субстанцій має внутрішню структуру:

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n), \quad \mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n),$$

елементи якої P_i, R_i, Q_i , $i = 1, \dots, n$, визначають кількісну характеристику початкового (при $N = 0$) розподілу субстанцій по регіонах простору існування.

Субстанції конфліктної тріади мають різну фізичну природу. Тому конкретні формули взаємодії кожної субстанції із парою, що її доповнює, тобто $\mathbf{P}$ з парою $\{\mathbf{R}, \mathbf{Q}\}$, $\mathbf{R}$ з $\{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\}$ та $\mathbf{Q}$ з $\{\mathbf{P}, \mathbf{R}\}$, є відмінними одна від одної. Увесь механізм взаємодії, який міститься в композиції конфлікту $\ast$, розкладено на дві частини: формули (3.2) – алгоритм кількісних змін величин P_i, R_i, Q_i по регіонах Ω_i та (3.3) – статистичний закон перерозподілу ймовірностей «окупації» субстанціями $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ кожного з регіонів.

Еволюцію кількісних регіональних змін визначаємо такими рівняннями:

$$\begin{aligned} P_i^{N+1} &= \frac{P_i^N + d_1(R_i^N - Q_i^N)}{Z_P^N}, \\ R_i^{N+1} &= \frac{R_i^N + 1/d_3 \cdot Q_i^N / P_i^N}{Z_R^N}, \\ Q_i^{N+1} &= \frac{Q_i^N + d_2(R_i^N - Q_i^N)}{Z_Q^N}, \\ P_i^0 &= P_i, \quad R_i^0 = R_i, \quad Q_i^0 = Q_i, \quad N = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де параметри $d_1, d_2, d_3 > 0$ характеризують залежну від конкретної моделі швидкість змін субстанцій $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ завдяки природним взаємозалежностям між ними. Нормувальні знаменники Z_P^N, Z_Q^N, Z_R^N стабілізують глобальну кількість відповідної субстанції у всьому просторі Ω , вони можуть додатково залежати від часу через зовнішні обставини. Для спрощення вважаємо, що глобальна сумарна кількісна характеристика кожної із субстанцій є незмінною, тому покладаємо

$$Z_P^N = P = \sum_i^n P_i, \quad Z_Q^N = Q = \sum_i^n Q_i, \quad Z_R^N = R = \sum_i^n R_i, \quad N = 0, 1, \dots$$

Формули (3.2) інтерпретуємо таким чином. На кожному кроці конфліктної боротьби зростання кількості біологічного виду в i -му регіоні P_i^{N+1} прямо залежить від кількості P_i^N в попередній момент N і пропорційне, з деяким коефіцієнтом, різниці між величиною (позитивного) життєвого ресурсу R_i^N та дією негативного фактора (загрозам знищення) з боку Q_i^N . Може статися, що ця різниця має в деякий момент часу N від'ємне значення. Тоді P_i^N буде досить швидко зменшуватися. Але для того, щоб система не розвалилася, тобто щоб жодна з координат P_i^N, Q_i^N, R_i^N не набула від'ємного значення,

такий період розвитку мусить бути недовгим. Аналогічно інтерпретуємо залежність Q_i^N від цієї самої різниці, але з іншим коефіцієнтом пропорційності. Своєю чергою, кількісна зміна життєвого ресурсу R_i^N є дуже чутливою до відношення Q_i^N/P_i^N . Зазначимо, що значення коефіцієнта $1/d_3$ в розглянутих далі прикладах є досить великим. Зауважимо, що згідно з формулами (3.2) усі координати формально зростають. Але насправді завдяки нормувальним знаменникам у цих формулах присутня стискувальна «дисипація» кількості кожної із конфліктних субстанцій. Це автоматично забезпечує зменшення усіх величин P_i, R_i, Q_i на кожному кроці конфліктної боротьби. Звичайно, конкретний характер описаних залежностей (зокрема, ролі параметрів взаємодії) та їх фізична інтерпретація визначаються відповідно до реальної моделі дослідження.

Друга частина механізму конфліктної взаємодії $\ast$ має міжрегіональний чисто ймовірнісний (статистичний) характер. Для її математичного запису необхідно перейти до нормованих на одиницю векторів:

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n),$$

де координати

$$p_i := P_i/P, \quad r_i = R_i/R, \quad q_i := Q_i/Q, \quad i = 1, \dots, n,$$

мають сенс імовірностей знайти відповідну субстанцію $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$ чи $\mathbf{Q}$ в i -му регіоні (або ймовірність «окупації» регіону Ω_i відповідною субстанцією). Закон перерозподілу цих імовірностей визначається формулами, які є статистичними аналогами різницевого варіанту рівнянь Лотки – Вольтерри:

$$\begin{aligned} p_i^{N+1} &= \frac{p_i^N(1 + a(r_i^N - q_i^N))}{z_p^N}, \\ r_i^{N+1} &= \frac{r_i^N(1 - cp_i^N - bq_i^N)}{z_r^N}, \\ q_i^{N+1} &= \frac{q_i^N(1 + c^{-1}p_i^N - br_i^N)}{z_q^N}, \\ p_i^0 &= p_i, r_i^0 = r_i, q_i^0 = q_i, \quad N = 0, 1, \dots, \end{aligned} \tag{3.3}$$

де параметри $a, b, c > 0$ характеризують інтенсивність конфліктної взаємодії.

Перша з формул (8.2.3) показує, що статистично популяція субстанції $\mathbf{P}$ максимально перерозподіляється в той регіон, де є найбільша ймовірність знайти життєвий ресурс та мінімальна загроза існуванню. Згідно з другою

формулою ймовірність знайти життєвий ресурс **R** зменшується в тих регіонах, де зростає популяція **P** (бо вона використовує життєвий ресурс), а також там, де велика концентрація інфекції **Q**; нагадаємо, що субстанції **Q** та **R** є взаємно альтернативними (субстанцію **Q** можна трактувати як від'ємний, протилежний до **R** ресурс). Завдяки третій формулі в (3.3) ймовірність небезпеки (інфекції) для існування популяції в i -му регіоні збільшується разом із зростанням самої популяції та зменшується залежно від наявності позитивного життєвого ресурсу. Знаменники в формулах (3.3) забезпечують стохастичність векторів $\mathbf{p}^N = (p_1^N, \dots, p_n^N)$, $\mathbf{r}^N = (r_1^N, \dots, r_n^N)$, $\mathbf{q}^N = (q_1^N, \dots, q_n^N)$, $N = 1, 2, \dots$

Для завершення визначення композиції конфлікту $\ast$ необхідно перенормувати вектори $\mathbf{p}^{N+1}$, $\mathbf{r}^{N+1}$, $\mathbf{q}^{N+1}$, координати яких задані формулами (3.3). Це означає перехід до остаточної кількісних значень субстанцій **P**, **Q** та **R** на кожному $N + 1$ кроці в i -му регіоні:

$$P_i^{N+1} = p_i^{N+1} \cdot P, \quad Q_i^{N+1} = q_i^{N+1} \cdot Q, \quad R_i^{N+1} = r_i^{N+1} \cdot R. \quad (3.4)$$

Таким чином, композиція конфлікту, тобто відображення $\ast$, яке породжує динамічну систему конфліктної тріади (3.1), повністю визначається формулами (3.2), (3.3), (3.4).

Проведені вище побудови – це лише перший крок у побудові моделі динамічної системи конфліктної тріади. Подальша діяльність у формі комп'ютерного моделювання виявляє низку цікавих властивостей та закономірностей тріади. Зокрема далі встановлено існування нерухомої точки, яка є аттрактором, існування локально стабільних граничних станів, наявності циклічних аттракторів, критичних біфуркаційних точок, коливальної поведінки в еволюції субстанцій, близької, з одного боку, до періодичної, а з другого – до майже хаотичної (квазіхаотичної). Без сумніву, подальші дослідження приведуть до встановлення значно глибших результатів, а також практичних застосувань.

Розглянемо докладніше динаміку двосторонніх парних взаємодій. Взаємозалежності субстанцій **P**, **R**, **Q** в конфліктній тріаді згідно з рівняннями (3.2), (3.3) є нелінійними і досить складними. Але двосторонні парні взаємодії припускають достатньо повний математичний аналіз. Тут встановлено два результати для ситуацій, які позначаємо як плюс – мінус та мінус – мінус моделі.

У моделі плюс – мінус аналізуємо динаміку змін двох субстанцій **P** та **R**. Плюс означає, що **P** одержує позитивний вплив з боку **R**, а мінус – негативний вплив на **R** з боку **P**.

Нехай P^N , $N = 0, 1, \dots$, позначає еволюцію кількості субстанції **P** (фіксованого біологічного виду) на території Ω в дискретному часі. Оскільки про-

стір існування Ω складається з окремих регіонів, $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, $2 \leq n < \infty$, то в кожен момент часу повна кількість P^N певним чином розподіляється по цих регіонах: $P^N = P_1^N + \dots + P_n^N$. Заради спрощення припускаємо, що повна кількість субстанції на усій території Ω є постійною, $P^N = P = \text{const}$. Це означає, що середня швидкість приросту та зменшення субстанції **P** (народження та загибелі біологічного виду) динамічно врівноважені. Таке припущення виконується досить часто, принаймні локально в певні періоди розвитку складної фізичної системи. Отже, в спрощеній моделі досліджуємо лише динаміку перерозподілу P_i^N по регіонах. У моделі конфліктної тріади перерозподіл величин P_i^N зумовлений двома факторами: позитивним впливом з боку субстанції **R** (використанням ресурсного середовища) та негативним впливом з боку **Q** (від загроз, наприклад, інфекції). У ситуації, коли глобальний вплив останнього фактора є незначним і ним можна знехтувати, двостороння парна взаємодія між величинами P^N , R^N математично дуже спрощується. При цьому залежність R від P є чисто негативною (субстанція **R** «спалюється» як життєвий ресурс для **P**). Але припускаємо, що кількість R в Ω є стабільною, $R^N = R = \text{const}$. Ця умова стабільності означає, що **R** постійно відновлюється за рахунок зовнішнього джерела, яке тепер не розглядається. Природно, в кожен момент часу **R** за певним законом розподіляється по регіонах: $R^N = R_1^N + \dots + R_n^N$.

Задача полягає в дослідженні динаміки змін (перерозподілу) величин P_i^N , R_i^N по регіонах Ω_i завдяки плюс – мінус взаємодії між субстанціями **P** та **R** за умови незмінності повної кількості P , R в усьому просторі Ω та їх незалежності від третьої субстанції.

Відповідна динамічна система конфлікту:

$$\{P_i^N, R_i^N\} \xrightarrow{*} \{P_i^{N+1}, R_i^{N+1}\}, \quad P_i^0 = P_i, R_i^0 = R_i \quad (3.5)$$

є значно простішою порівняно з поведінкою повної складної системи. При конкретному заданні перетворення $*$ динамічна система (3.5) дає можливість провести досить детальний аналіз. Теорема 3.1 досить повно описує поведінку цієї системи.

Уведемо найпростіший варіант конкретних формул плюс – мінус взаємодії між субстанціями **P** та **R**. Ці формули записуємо в термінах координат стохастичних векторів:

$$\mathbf{p}^N = (p_1^N, \dots, p_i^N, \dots, p_n^N), \quad \mathbf{r}^N = (r_1^N, \dots, r_i^N, \dots, r_n^N)$$

з одиничною l_1 -нормою:

$$p_i^N := \frac{P_i^N}{P}, \quad r_i^N := \frac{R_i^N}{R},$$

де нагадаємо, що P, R позначають повну кількість субстанцій **P**, **R** в усьому просторі Ω . А саме, на $N + 1$ кроці координати p_i^{N+1} та r_i^{N+1} визначаються

ітеративно за правилом

$$p_i^{N+1} = \frac{p_i^N(1 + r_i^N)}{z_{p,r}^N}, \quad r_i^{N+1} = \frac{r_i^N(1 - p_i^N)}{z_{r,p}^N}, \quad N = 0, 1, \dots, \quad (3.6)$$

де нормувальні знаменники

$$z_{p,r}^N = 1 + (\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N), \quad z_{r,p}^N = 1 - (\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N)$$

$((\cdot, \cdot) - \text{скалярний добуток в } \mathbb{R}^n)$ гарантують стохастичність векторів $\mathbf{p}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}$.

Зауважимо, що різні знаки в чисельниках формул (3.6) якраз визначають суть плюс – мінус моделі. Плюс означає, що P_i^{N+1} зростає залежно від величини R_i^N , а мінус – зменшення R_i^{N+1} при збільшенні P_i^N . Стійкість моделі забезпечується нормувальними знаменниками.

Теорема 3.1. *(плюс-мінус модель) Динамічна система конфлікту (3.5), яка задана формулами (3.6), має три характерні фази поведінки.*

Перша фаза (рівноважний стан) визначається рівномірним стартовим розподілом:

$$P_i^N = P/n, \quad R_i^N = R/n, \quad \forall N, i; \quad \mathbf{p} = (1/n, \dots, 1/n), \quad \mathbf{r} = (1/n, \dots, 1/n). \quad (3.7)$$

Рівноважний стан (3.7) має нерухому точку динамічної системи, але ця точка не є аттрактором.

Друга фаза (існування інваріантного граничного стану) з'являється за такої умови: хоча б для одного фіксованого i

$$p_i = 0, \quad r_i \neq 0. \quad (3.8)$$

У цьому випадку система збігається до граничного нерухомого стану:

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{p}^N, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{r}^N, \quad \mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty. \quad (3.9)$$

Третя типова фаза (квазіхаотична поведінка) визначається умовами

$$\mathbf{p} \neq \mathbf{r}, \quad \forall i, p_i \neq 0, \quad r_i \neq 0. \quad (3.10)$$

У цій фазі кожна з координат p_i^N, r_i^N , $i = 1, \dots, n$ коливається в межах між нулем та одиницею. У загальному випадку ці коливання позбавлені явної закономірності.

Доведення. У випадку рівномірного стартового розподілу субстанцій $\mathbf{P}, \mathbf{R}$ по регіонах, $P_i = P/n$, $R_i = R/n, \forall i$, усі координати стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ однакові: $p_i = r_i = 1/n$. Тоді легко порахувати, що

$$(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = 1/n = z_{p,r} = z_{r,p}.$$

Тому завдяки формулам (3.6) для усіх N маємо $p_i^N = r_i^N = 1/n$. Це доводить нерухомість динамічної системи (3.5) у стані, який визначається рівномірним стартовим розподілом $\mathbf{P}, \mathbf{R}$ і який фіксується однаковими координатами векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$. Той факт, що цей рівноважний стан не є одноточковим аттрактором, перевіряється контрприкладми: незначне відхилення будь-якої координати p_i або r_i на $\varepsilon > 0$ від значення $1/n$ приводить з часом до ще більших відхилень (див. лему ??).

У стані другої фази (при виконанні умови (3.8)) система при $N \rightarrow \infty$ збігається до нерухомої точки на границі. Для доведення вводимо величину

$$\theta^N := \sum_i p_i^N r_i^N = (\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N),$$

яка зветься показником конфліктності динамічної системи в момент часу N . Припустімо виконання умови (3.8). Нехай лише одна фіксована координата $p_i = 0$, а решта координат $r_i, p_{k \neq i}, r_{k \neq i}$ є більшими за нуль. Покажемо, що тоді при $N \rightarrow \infty$ існують граничні вектори $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ з координатами:

$$p_i^\infty = 0, r_i^\infty = 1, p_k^\infty \geq 0, r_k^\infty = 0, k \neq i.$$

Справді, якщо $p_i = 0$, а $r_i \neq 0$, то завдяки тому, що $0 < \theta \equiv \theta^0 < 1$, послідовність $r_i^N = r_i^{N-1}/(1 - \theta^{N-1})$, $N = 1, 2, \dots$ монотонно зростає. Через обмеженість $r_i^N < 1$, існує границя $r_i^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} r_i^N$. При цьому, оскільки $r_i^N = r_i \cdot \prod_{l=1}^N 1/(1 - \theta^l) < 1$, із збіжності r_i^N з необхідністю випливає, що послідовність θ^N монотонно спадає. Отже, $\theta^N \rightarrow 0$. Переконатися у тому, що $r_i^\infty = 1$, можна з наступних міркувань.

Покажемо, що $r_{k \neq i}^N \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Припустімо, що це не так. Тобто припустімо, що існує хоча б одна координата $r_{k \neq i}^N$, яка не збігається до нуля. Тоді через те, що показник конфліктності $\theta^N \rightarrow 0$, відповідна координата p_k^N мусить прямувати до нуля, щоб забезпечити факт $\theta^N \rightarrow 0$. Але це приводить до суперечності із припущенням, оскільки завдяки формулам (3.6) збіжність $\theta^N \rightarrow 0$ можлива, лише якщо $r_k^N < \theta^N$, бо $p_k^{N+1} = p_k^N (1 + r_k^N)/(1 + \theta^N)$. Це означає, що з необхідністю $r_k^N \rightarrow 0$ разом з показником конфліктності. Отже, усі координати $r_{k \neq i}^N$ прямують до нуля. Як наслідок, лише одна фіксована координата $r_i^\infty = 1$. Звідси також випливає існування граничних координат $p_k^\infty, k \neq i$, які можуть мати довільні (ненульові) значення, в сумі рівні одиниці. Очевидно, що знову завдяки $\theta^\infty = 0$ граничний стан усієї системи є нерухомим.

Якщо існує кілька координат $p_i = 0$ з відповідними $r_i \neq 0$, то, повторюючи аналогічні проведені міркування, легко показати, що усі послідовності r_i^N монотонно зростатимуть і досягатимуть фіксованих граничних значень $r_i^\infty > 0$, які в сумі дорівнюють одиниці. Послідовність показників конфліктності θ^N з необхідністю монотонно спадатиме до нуля, і відповідно граничний стан системи буде теж нерухомим.

Тепер розглянемо загальну ситуацію, характерну для третьої фази. Вважаємо, що усі стартові координати відмінні від нуля і різні. Тоді $0 < \theta < 1$, отже, початкові вектори $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ не є ортогональними. Зокрема, унеможлиблюємо $p_i = r_i = 1$ для якогось i . Покажемо, що в цьому випадку усі координати осцилюють у межах нуля – одиниця (взагалі без явної закономірності).

Як і вище, справедливість наступних міркувань повністю впливає з формул (3.6). Розглянемо довільну пару координат $0 \neq p_i \neq r_i \neq 0$. Припустімо, що у початковий момент виконуються нерівності

$$r_i < p_i < \theta. \quad (3.11)$$

Далі буде показано, що усі інші можливі нерівності між r_i, p_i, θ послідовно з'являтимуться у певний момент часу. Заради скорочення позначень ігноруємо (не пишемо) в наступних нерівностях часовий індекс N . Також використовуємо факт якісної поведінки величин θ^N, p_i^N, r_i^N , а саме, завдяки визначенню коефіцієнта конфліктності, $\theta^N = \sum_i p_i^N \cdot r_i^N$ він змінюється повільніше, ніж будь-яка окрема координата p_i^N, r_i^N . Це впливає з того, що скінченна сума добутоків диференціалів $\Delta p_i \Delta r_i$ має другий порядок малості порівняно з будь-яким окремим диференціалом $\Delta p_i, \Delta r_i$.

Неважко переконатися, що з (3.11) завдяки (3.6) впливає спадання координати p_i та зростання r_i . Це неминуче приводить до зміни (3.11) на нерівності

$$p_i < r_i < \theta. \quad (3.12)$$

Використовуючи знову формули (3.6) безпосередньо перевіряємо, що координата p_i і далі спадатиме, а r_i – зростатиме. Це триває доти, доки замість (3.12) з'являться нерівності

$$p_i < \theta < r_i. \quad (3.13)$$

Знову завдяки формулам (3.6) вони приводять до того, що координата p_i почне зростати, хоча r_i продовжує зростати. Це, очевидно, триває доти, доки нерівності (3.13) не зміняться на

$$\theta < p_i < r_i. \quad (3.14)$$

Зауважимо, що з останньої нерівності не впливає прямування до нуля коефіцієнта конфліктності (вектори $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ не можуть стати ортогональними). Це є наслідком того, що з (3.14), (3.15) з необхідністю впливає зростання хоча б однієї з координат.

Завдяки нерівностям (3.13) координата p_i зростала. При переході до (3.14) ця координата, очевидно, продовжує зростати, а r_i почне спадати. Це неминуче приводить до нерівностей

$$\theta < r_i < p_i. \quad (3.15)$$

З них випливає, що p_i все ще продовжує зростати, а r_i – спадати. Отже, виникають нерівності

$$r_i < \theta < p_i. \quad (3.16)$$

Останні нерівності зумовлюють початок спадання p_i , а r_i продовжуватимуть спадати. Але ці зміни тривають лише до моменту зміни (3.16) на стартові нерівності (3.11).

Таким чином, відбувся повний цикл коливання, протягом якого послідовно реалізувалися усі можливі варіанти нерівностей між величинами θ, r_i, p_i .

Варто зазначити, що послідовність взаємопереходів між нерівностями (3.11)– (3.16) є впорядкованою. У ході змін нерівностей (3.11)– (3.16) інколи могли виникнути і рівності, але завдяки формулам (3.6) ці рівності з необхідністю переходили у нерівності.

Ми встановили наступний важливий факт: жодна з координат r_i, p_i (як і показник конфліктності) не можуть наближатися до нуля. Наприклад, як тільки система перейшла в стан, коли виконується нерівність (3.11), в наступний момент координата r_i починає зростати. Взагалі, якщо якась з координат r_i, p_i стає найменшою, вона неминуче починає зростати завдяки формулам (3.6).

Для кожної пари координат $r_i, p_i, i = 1, \dots, n$, жодна з нерівностей (3.11) – (3.16) виконується в різні моменти часу і їхні взаємопереходи не є синхронними. Тому існування закономірних циклічних коливань для повної системи або наближення до такої поведінки є проблематичним. Ця фаза швидше подібна до квазіхаотичної.

Іншої характерної фази поведінки у системи не існує. Зокрема, у випадку, якщо одна або кілька зі стартових координат $r_i = 0$, а решта координат ненульові, зокрема $p_i \neq 0$, легко переконатися, що $p_i^N \rightarrow 0$, а решта ненульових координат коливається згідно з ситуацією, яка характерна до третьої типової фази поведінки. Отже, початкова система переходить у систему з меншою кількістю координат, але нової фази не виникає.

Наступна лема показує, що рівноважний стан (3.7) не є одноточковим аттрактором. Цим завершується доведення теореми. ■

Справедлива така лема. Незначне відхилення траєкторії динамічної системи (3.5) від рівноважного стану (3.7)

$$p_i = 1/n \rightarrow p_{i,\varepsilon} = 1/n + \varepsilon_i, \quad r_i = 1/n \rightarrow r_{i,\delta} = 1/n + \delta_i,$$

$$\sum_i \varepsilon_i = 0, \quad \sum_i \delta_i = 0$$

приводить до ще більших відхилень принаймні деяких координат:

$$\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i > \varepsilon_i, \quad \delta_i \rightarrow \delta'_i > \delta_i.$$

Доведення не є тривіальним і ґрунтується на аналізі змін значень координат $p_i^N = r_i^N$ залежно від заданого відхилення від рівноважного стану. Використання конфліктної композиції (формули (3.6)) показує, що лінійна по ε_i, δ_i частина відхилення довільної координати змінюється згідно з формулами

$$\varepsilon_i \rightarrow \varepsilon'_i = \varepsilon_i + 1/(n+1)\delta_i, \quad \delta_i \rightarrow \delta'_i = \delta_i - 1/(n-1)\varepsilon_i.$$

Ці формули визначаються матрицею T з елементами $t_{11} = t_{22} = 1$, $t_{12} = 1/(n-1)$, $t_{21} = -1/(n-1)$, яка не залежить від заданого відхилення і є строго додатно визначеною. Тому ітерація формул (3.6) приводить до відхилень, які не прямують до нуля, коли $N \rightarrow \infty$, в чому можна переконатися безпосередніми обчисленнями.

■

Викладені вище міркування доводять, що в загальній ситуації для розглядуваної системи існують нескінченні в часі коливання усіх її координат. Чи можуть ці коливання бути циклічними? Тобто, чи існують цикли скінченного періоду (із скінченною кількістю кроків)? Теоретично це можливо при певних співвідношеннях між значеннями координат. Але на цей момент існування точних циклів в моделі плюс – мінус є відкритим питанням.

Комп'ютерне моделювання підтверджує та ілюструє той факт, що рівноважна точка не є притягальною (атрактором).

Аналогічні до вище наведених характерні властивості має динамічна система з двосторонньою конфліктною взаємодією між біологічним видом та інфекційним (вірусним) середовищем, якій відповідає мінус – плюс модель. Якщо ввести вектор початкового статистичного розподілу інфекції по регіонах Ω_i ,

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_i, \dots, q_n), \quad q_i := \frac{Q_i}{Q},$$

де $Q = Q_1 + \dots + Q_n$, то еволюція змін координат p_i^N, q_i^N (за умови $Q = \text{const}$ та відсутності впливу з боку ресурсної субстанції $\mathbf{R}$) визначається ітеративно формулами, аналогічними до (3.6), але з протилежними знаками в чисельниках:

$$p_i^{N+1} = \frac{p_i^N(1 - q_i^N)}{z_{p,q}^N}, \quad q_i^{N+1} = \frac{q_i^N(1 + p_i^N)}{z_{q,p}^N}, \quad (3.17)$$

де нормувальні знаменники $z_{p,q}^N = 1 - (\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N)$, $z_{q,p}^N = 1 + (\mathbf{q}^N, \mathbf{p}^N)$ визначаються так, щоб забезпечити стохастичність векторів $\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N$. Тепер різні знаки в чисельниках формул (3.17) мають таку інтерпретацію: мінус – зменшення популяції в певному регіоні через інфекційне зараження, плюс – збільшення концентрації інфекції в регіонах із більшими локальними популяціями біологічного виду. Формально популяція в усіх регіонах нібито зменшується, а концентрація вірусу зростає, хоч швидкість такого зростання зменшується

через зменшення популяції. Але насправді цього не відбувається, бо нормувальний знаменник $z_{q,p}^N$ математично відповідає ефекту природної дисипації для бактерій, а знаменник $z_{p,q}^N$ у першій формулі, навпаки, виконує роль неперервного приросту біологічної популяції, точніше її незнищенності. Явні формули кількісних змін цих субстанцій по регіонах визначаються формулами (3.2), але вже в умовах потрібної конфліктної взаємодії.

Проведений вище аналіз парної двосторонньої плюс – мінус взаємодії показує, що й тепер в мінус – плюс моделі в загальному випадку (коли всі стартові координати різні й відмінні від нуля) поведінка системи матиме коливальний характер без явної закономірності. Зокрема, координата p_i^N зростатиме, якщо концентрація інфекції q_i^N менша за показник конфліктності системи $\theta^N = (\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N)$. Але нерівність $q_i^N < \theta^N$ не може виконуватись одночасно в усіх регіонах. Тому існуватимуть інші координати $p_{k \neq i}^N$, які неминуче спадатимуть. З часом ці тенденції змінюються, причому не синхронно по різних регіонах. Для якісного передбачення в конкретних ситуаціях треба ввести додаткові параметри і досліджувати модель у практичному режимі. У загальній ситуації спостерігаємо описане в теоремі 3.1 квазіхаотичне коливання усіх величин θ^N , p_i^N , q_i^N , $i = 1, \dots, n$, при $N \rightarrow \infty$.

Розглянемо тепер мінус – мінус модель. Її можна інтерпретувати як ситуацію, що відповідає двосторонній конфліктній взаємодії між парою інфекція – антидот. Це чисто альтернативна боротьба типу або – або, яка описує тенденцію витіснення супротивників один одного в кожному регіоні. Математичні формули конфліктної взаємодії для стохастичних векторів $\mathbf{r}, \mathbf{q}$ у цьому випадку мають вигляд

$$q_i^{N+1} = \frac{q_i^N(1 - r_i^N)}{z^N}, \quad r_i^{N+1} = \frac{r_i^N(1 - q_i^N)}{z^N}, \quad (3.18)$$

де z^N – нормувальний знаменник: $z^N = 1 - \theta^N$, $\theta^N = (\mathbf{q}^N, \mathbf{r}^N)$. Знак мінус у чисельниках обох формул означає альтернативність (повну непримиренність) субстанцій. Нормування на одиницю векторів $\mathbf{q}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}$ на кожному кроці конфліктної взаємодії забезпечує незнищенність цих опонентів. Інтуїтивно можна здогадатися, що альтернативні субстанції, відштовхуючись, просто розподіляться по різних регіонах. Це справді так. Точний характер поведінки описано в наступній теоремі.

Теорема 3.1. (мінус – мінус модель). Припустімо, що для заданої пари стохастичних векторів $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n, n > 1$ у початковий момент часу показник конфліктності $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{r})$ задовольняє умову

$$0 < \theta < 1.$$

Тоді визначена формулами (3.18) траєкторія динамічної системи конфлікту

$$\{\mathbf{q}^N, \mathbf{r}^N\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{q}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}\}, \quad \mathbf{q}^0 = \mathbf{q}, \mathbf{r}^0 = \mathbf{r}, \quad N = 0, 1, \dots,$$

з необхідністю збігається до нерухомої граничної точки:

$$\mathbf{q}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{q}^N, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{r}^N.$$

Граничні вектори $\mathbf{q}^\infty$, $\mathbf{r}^\infty$ є інваріантними відносно дії конфліктної композиції:

$$\mathbf{q}^\infty = \mathbf{q}^\infty * \mathbf{r}^\infty, \quad \mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}^\infty * \mathbf{q}^\infty. \quad (3.19)$$

При цьому граничні вектори ортогональні,

$$\mathbf{q}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty, \quad (3.20)$$

якщо $\mathbf{q} \neq \mathbf{r}$, та тотожні, $\mathbf{q}^\infty = \mathbf{r}^\infty$, якщо початкові вектори рівні: $\mathbf{q} = \mathbf{r}$. В останньому випадку координати граничних векторів рівномірно розподілені: $q_i^\infty = r_i^\infty = 1/m$ для усіх i таких, що $q_i = r_i \neq 0$, де $m \leq n$ позначає число ненульових координат у початкових векторах.

Доведення цієї теореми повністю аналогічне доведенню теореми про конфлікт.

Зазначимо, що формули (3.18) використовуються як деякі варіанти векторних різницевих аналогів добре відомих рівнянь Лотки – Вольтерри з неперервним часом. Тут ми використовуємо дискретний час, оскільки вважаємо фізичну неперервність неіснуючою, а математичну неперервність – лише зручним інструментом теорії. Варто навести можливі варіанти формул (3.6), (3.17) з неперервним часом:

$$\dot{p}(x, t) = \frac{p(\theta + r)}{m_{p,r} + \theta}, \quad \dot{r}(x, t) = \frac{r(\theta - p)}{m_{p,r} - \theta},$$

де $p = p(x, t)$, $r = r(x, t)$ позначають щільності розподілів відповідних субстанцій у точці $x \in \Omega$ у момент неперервного часу t , $m_{p,r} := P \cdot R$, $\theta(t) = \int_{\Omega} p(x, t) r(x, t) dx$. Але питання, чи породжують ці рівняння коректно визначену динамічну систему, залишається відкритим.

Існують різні фази граничних розподілів. З формул (3.2)–(3.4) видно, що питання про існування стану тріади, в якому усі три субстанції врівноважені, не має очевидної відповіді, бо динамічна система конфліктної тріади є досить складною. Хоча у фізичній реальності для складних систем подібного типу такі стани іноді існують. Ідеться про динамічну рівновагу у складних процесах з кількома суперечливими тенденціями, коли різні альтернативні субстанції співіснують у досить фіксованих (відмінних від нуля) кількостях. Зазначимо, що наявність таких станів не впливає прямо з теорем 3.1 та 3.1, де такі стани існують. Але можна припускати можливість гальмування коливань, притаманних моделям з двосторонньою плюс-мінус взаємодією завдяки стабілізації через існування граничних компромісних розподілів, установлених в теоремі 3.1 для мінус-мінус моделей.

Існування стану динамічної рівноваги встановлено в такій теоремі.

Теорема 3.2. Для динамічної системи конфліктної тріади (3.1), визначеної формулами (3.2)–(3.4), існує стан динамічної рівноваги. Такий стан визначається нерухомою точкою з координатами $P_i^{\text{eq}}, R_i^{\text{eq}}, Q_i^{\text{eq}}, i = 1, \dots, n$, які дорівнюють середньоарифметичним значенням початкових розподілів субстанцій $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ по регіонах Ω_i .

Доведення. Оскільки за припущенням $P = \text{const}, R = \text{const}, Q = \text{const}$, то координати кожного вектора не можуть збільшитись або зменшитись усі одночасно. Отже, якщо припустити, що хоч одна з координат змінюється, наприклад збільшується, то з необхідністю повинна існувати іще хоча б одна з координат, яка зменшуватиметься. Але це неможливо, оскільки згідно з формулами (3.2)–(3.4) усі координати рівноправні. Це впливає з симетричності цих формул відносно перестановок індексів координат. Тому стан, при якому

$$\begin{aligned} P_i^{\text{eq}} &= 1/n \sum_{k=1}^n P_k, \quad R_i^{\text{eq}} = 1/n \sum_{k=1}^n R_k, \quad Q_i^{\text{eq}} = \\ &= 1/n \sum_{k=1}^n Q_k, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.21)$$

є нерухомим. ■

Ця теорема має комп'ютерну ілюстрацію. Якщо для довільної конкретної моделі стартові координати P_i, R_i, Q_i кожного вектора P, R, Q покласти рівними середньоарифметичним значенням $P_i^{\text{eq}}, R_i^{\text{eq}}, Q_i^{\text{eq}}$, то вони не змінюються (є постійними) при довільному $N \geq 1$, тобто такий стан системи буде нерухомим. Це означає, що система (3.1) перебуває у стані динамічної рівноваги.

Наступний результат про існування одноточкового атрактора формулюємо як теорему, хоча її доведення не є чисто математичним, а скоріше евристичне.

Теорема 3.3. Рівноважний стан динамічної системи конфліктної тріади (3.1), який визначається середньоарифметичними значеннями координат $P_i^{\text{eq}}, R_i^{\text{eq}}, Q_i^{\text{eq}}, i = 1, \dots, n$ (див. (3.21)), є одноточковим атрактором.

А в публікаціях [31, 34, 38] Побудована найпростіша модель динамічної системи, яка описує конфліктну взаємодію альтернативних стихій типу вогонь - вода при систематичному зовнішньому підживленні (аналог сонячної радіації) та внутрішньому перемішуванні (аналог вітру). В загальному випадку встановлена збіжність траєкторій системи до ω -граничних циклічних орбіт.

Так в роботі [34] побудована і досліджується поведінка максимально спрощеної моделі динамічної системи породженої перетворенням, яке описує

конфліктну взаємодію між альтернативними стихіями F та W типу вогню та води розподіленими порціями по секторах кола. Припускається додатково, що F зазнає систематичного зовнішнього впливу (це підживлення є аналогом сонячної радіації), а розподіл W трансформується за певним законом, який є аналогом переміщення у просторі за рахунок вітру. Простір розподілу стихій F , W є колом поділений на $n \geq 2$ секторів (регіонів) Δ_k , $k = 1, \dots, n$. Вага присутності кожної із стихій F , W в регіоні Δ_k задається статистично. В початковий момент часу, $t = 0$ стихіям F , W ставиться у відповідність пара стохастичних векторів $p, r \in \mathbb{R}_+^n$, координати яких $p_k, r_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$ мають смисл ймовірностей знайти F , W в регіоні Δ_k :

$$p_k := \mathbb{P}(F \in \Delta_k), \quad r_k := \mathbb{P}(W \in \Delta_k).$$

Еволюцію векторів $p(t), r(t)$, $t \geq 0$ в часі ми задаємо системою $2n$ звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dp_k}{dt} = \tilde{p}_k(\theta - \tilde{r}_k), \quad \frac{dr_k}{dt} = \tilde{r}_k(\theta - \tilde{p}_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.22)$$

які визначають закон конфліктної взаємодії між F та W . Вплив зовнішнього підживлення та внутрішнього перемішування з точністю до нормування має адитивний характер:

$$\tilde{p}_k = \frac{p_k + s_k}{z_p}, \quad \tilde{r}_k = \frac{r_k + h_k}{z_r}, \quad (3.23)$$

де $s_k, h_k \geq 0$ - деякі фіксовані значення. Величину $\theta := (\tilde{p}, \tilde{r}) \equiv \sum_{k=1}^n \tilde{p}_k \tilde{r}_k$ називаємо *показником конфліктності* між стихіями F, W в момент часу t . Нормувальні знаменники z_p, z_r в (3.23) забезпечують стохастичність векторів в кожен момент часу.

Еквівалентна модель задається системою рівнянь:

$$\dot{p}_k = \frac{p_k(\theta - r_k) + s_k}{z_p}, \quad \dot{r}_k = \frac{r_k(\theta - p_k) + h_k}{z_r}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.24)$$

Ми розбиваємо дослідження поведінки моделі заданої рівняннями (3.22) на декілька етапів. На першому кроці розглянемо автономну систему з чисто внутрішньою конфліктною взаємодією.

Насправді, ми досліджуємо деякий різницевий варіант системи у фіксовані моменти часу кратні куту α_n :

$$x_k(t_N + 1) = \frac{x_k(t_N) + s_k(t_N)}{z(t_N)}, \quad k = 1, \dots, n, \quad t_N = \alpha_n \cdot N, \quad N = 0, 1, \dots \quad (3.25)$$

де покладено, що вплив зовнішнього джерела відбувається по закону

$$s_k(t_N) = s(\alpha_n \cdot k + t_N), \quad \alpha_n := \frac{2\pi}{n}, \quad n \geq 2, \quad (3.26)$$

де $s(t)$ - довільна неперервна додатня функція періоду 2π , наприклад $s(t) = s(1 + \sin t)$, $s > 0$.

Якщо у початковий момент часу $t_N = 0$ вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ був стохастичний, то, як легко перевірити, нормувальний знаменник в (3.25) не буде залежати від часу і його можна знайти:

$$z(t_N) = z = 1 + s, \quad s = \sum_{k=1}^n s_k, \quad s_k = s(\alpha_k \cdot k) \quad (3.27)$$

Позначимо

$$x_k^N := x_k(t_N), \quad s_k^N := s_k(t_N) = s(\alpha_n \cdot k + t_N) \equiv s_{k+N}.$$

Тоді система рівнянь (3.25) набуває вигляду

$$x_k^{N+1} \equiv x_k(t_{N+1}) = \frac{x_k^N + s_k^N}{1 + s}, \quad x_k^0 \equiv x_k(t_0) = x_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad N = 0, 1, \dots \quad (3.28)$$

Ітеруючи цю систему можна знайти значення координат $x_k(t_N)$ для довільного моменту часу t_N . Отже, рівняння (3.28) задають у просторі $\mathbb{R}^n$ деяку динамічну систему в дискретному часі:

$$x^0 \equiv x(t_0) \xrightarrow{T_1} x^1 \xrightarrow{T_2} x^2 \longrightarrow \dots x^{N-1} \xrightarrow{T_N} x^N \longrightarrow \dots \quad (3.29)$$

де $T_1, T_2, \dots$ позначає послідовність залежних від часу перетворень заданих формулами (3.28). Завдяки (3.26) ця послідовність перетворень циклічно повторюється з періодом n , а саме, легко зрозуміти, що для кожного $k = 1, \dots, n$, $T_k = T_{k+n} = T_{k+Nn}$, $N = 0, 1, \dots$. Нас цікавить поведінка вектора $x^N \equiv x(t_N)$ при $N \rightarrow \infty$. Покажемо, що при будь-яких початкових значеннях координат $x_k(t_0)$ послідовність векторів $x(t_N)$ наближається до однієї й тієї ж циклічної траєкторії періоду n .

Теорема 3.4. *Кожна траєкторія $x^N = x(t_N)$ динамічної системи (3.29) заданої системою різницевих рівнянь (3.25) збігається в просторі $\mathbb{R}^n$ до ω -множини Γ^∞ , інваріантної відносно усіх перетворень $T_1, \dots, T_n$. Множина Γ^∞ складається із n векторів,*

$$\Gamma^\infty = \{\Gamma_j^\infty\}_{j=1}^n.$$

Кожен вектор Γ_j^∞ , $j > 1$ утворюється $j - 1$ -кратним циклічним зсувом координат першого вектора $\Gamma_1^\infty = (\gamma_1^\infty, \dots, \gamma_n^\infty)$:

$$\gamma_1^\infty \rightarrow \gamma_2^\infty, \dots, \gamma_k^\infty \rightarrow \gamma_{k+1}^\infty, \dots, \gamma_n^\infty \rightarrow \gamma_1^\infty.$$

Координати вектора Γ_1^∞ визначаються набором значень $s_1, \dots, s_n$ джерела зовнішнього впливу за формулами:

$$\gamma_1^\infty = \frac{s_1 + s_2 z \dots + s_n z^{n-1}}{z^n - 1}, \dots$$

$$\gamma_k^\infty = \frac{s_k + s_{k+1}z \cdots + s_{k-1}z^{n-1}}{z^n - 1} \equiv \frac{1}{z^n - 1} \sum_{j=0}^{n-1} s_{|k+j|_n} z^j, \dots \quad (3.30)$$

$$\gamma_n^\infty = \frac{s_n + s_1 z \cdots + s_{n-1} z^{n-1}}{z^n - 1},$$

де $z = 1 + s$, $s = s_1 + \cdots + s_n$.

Гранична ω -множина Γ^∞ є періодичною орбітою динамічної системи (3.29). Вона не залежить від початкової точки $x = x(t_0)$ траєкторії $x(t_N)$ і повністю визначається джерелом зовнішнього підживлення.

3.2 Застосування спектральної теорії до моделей динамічних систем з конфліктною взаємодією. Дослідження структури спектру

В статтях [15, 28, 30] проведено дослідження структури спектру та його властивостей для мір, які, зокрема, можуть виникнути як граничні стани динамічних систем з конфліктною взаємодією. Так в роботі [28] встановлено зв'язок між побудовою нескінченного добутку імовірнісних мір та спектральною властивістю міри мати структурну подібність. В публікації [30] досліджена тонка структура сингулярно неперервних мір побудованих за допомогою згорток Бернуллі випадкових величин з незалежними $\tilde{Q}$ -символами.

Нарешті, в роботі [15] "Квазіточкові спектральні міри в теорії динамічних систем конфлікту"

в контексті динамічної картини взаємодіючих фізичних систем введено поняття спектральної міри із квазі-точковим спектром. Показано, що при конфліктній взаємодії з точковими мірами лише квазі-точкові сингулярно неперервні спектральні міри можуть трансформуватися в міри з чисто точковим спектром.

Нехай A , B позначають гамільтоніани (оператори енергії) двох конфліктно взаємодіючих фізичних систем у фіксованому гільбертовому просторі станів $\mathcal{H}$. Розглянемо спектральні міри самоспряжених операторів A , B в припущенні, що вони мають спільний циклічний вектор $\psi \in \mathcal{H}$:

$$\mu(\Delta) := (E^A(\Delta)\psi, \psi)_{\mathcal{H}}, \quad \nu(\Delta) := (E^B(\Delta)\psi, \psi)_{\mathcal{H}},$$

де E^A, E^B – відповідні розклади одиниці операторів A, B , Δ – борелівські множини.

Конфліктна взаємодія між фізичними системами відбувається в моменти дискретного часу $t \equiv N = 0, 1, 2, \dots$ і приводить до трансформації початкової пари операторів в послідовність інших самоспряжених операторів A^N , B^N . Математично це записуємо відображенням:

$$\{A^N, B^N\} \xrightarrow{*} \{A^{N+1}, B^{N+1}\}, \quad A^0 = A, \quad B^0 = B,$$

де A^N , B^N позначають оператори енергії в момент $t = N$. Відображення $*$ породжує динамічну систему (конфлікту) в термінах відповідних спектральних мір:

$$\{\mu^N, \nu^N\} \xrightarrow{*} \{\mu^{N+1}, \nu^{N+1}\}, \mu^0 = \mu, \nu^0 = \nu.$$

Дія перетворення $*$ (композиції конфлікту) взагалі невідома і будується виходячи з конкретної задачі чи моделі. Ми визначаємо перетворення $*$ в термінах мір, ґрунтуючись на відомих математичних моделях опису конфліктних процесів, на аналогах дискретних варіантів систем рівнянь Лотки – Вольтерри, та моделях теорії ігор.

На міри μ, ν накладено умову структурної-подібності. Ця умова приводить до узагальнення поняття самоподібності, яке в математичному контексті було введено Хатчинсоном. По суті, властивість структурної подібності мір випливає з того, що ці міри є образ-мірами нескінчених прямих добутків послідовностей дискретних мір, які вивчалися ще Какуті.

Внаслідок цієї умови, кожна структурно-подібна міра має лише одну компоненту в лебеговому розкладі: або чисто абсолютно неперервну, або чисто точкову, або чисто сингулярно неперервну.

В процесі конфліктної еволюції

$$\{\mu^0, \nu^0\} \xrightarrow{*} \{\mu^1, \nu^1\} \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} \{\mu^N, \nu^N\} \xrightarrow{*} \dots \{\mu^\infty, \nu^\infty\}$$

спектральний тип мір взагалі кажучи змінюється. Як правило, граничні міри μ^∞, ν^∞ є сингулярно неперервними, незалежно від типу початкових мір μ, ν . Задача про існування граничних інваріантних мір μ^∞, ν^∞ розв'язується окремо.

Але існують (екзотичні) випадки, коли одна з граничних мір, скажімо μ^∞ , є чисто точковою, $\mu^\infty = \mu_{pp}^\infty$. Вже доведено, що чисто сингулярно неперервна міра $\mu \in \mathcal{M}_{sc}$ при конфліктній взаємодії з іншою сингулярно неперервною мірою ν може трансформуватися в чисто точкову, $\{\mu, \nu\} \xrightarrow{*, \infty} \{\mu^\infty, \nu^\infty\}$, $\mu^\infty \in \mathcal{M}_{pp}$ при певних досить сильних умовах. Ці умови формулюються, як існування напрямку шокowego пріоритету (одної міри над іншою).

Взагалі, з точки зору задач математичної фізики, явище, коли якась взаємодія між сингулярно неперервними спектральними мірами приводить до виникнення міри з точковим носієм (= спектром) є надзвичайно цікавим ефектом і заслуговує на глибокий аналіз.

В роботі досліджується наступне питання. Чи може виникнути чисто точкова спектральна міра при конфліктній взаємодії операторів енергії, один з яких має чисто сингулярно неперервну спектральну міру, а другий чисто точкову? Іншими словами, чи існують структурно-подібні міри μ_{sc}, ν_{pp} такі,

що виконується рівність

$$\mu_{sc} \overset{\infty}{*} \nu_{pp} = \mu_{pp}^{\infty}?$$

Тобто, чи може сингулярно неперервна міра трансформуватися в точкову при конфліктній взаємодії з якоюсь точковою мірою? На перший погляд це здається неможливим, виходячи з аналізу топологічної структури носіїв сингулярно неперервних та чисто точкових мір.

В цій роботі введено поняття (сингулярної) квазі-точкової спектральної міри. Основний результат стверджує, що для пари структурно-подібних мір $\mu = \mu_{sc}, \nu = \nu_{pp}$, гранична міра належить до класу чисто точкових мір, $\mu^{\infty} := \mu \overset{\infty}{*} \nu \in \mathcal{M}_{pp}$, тоді і лише тоді, коли міра μ є квазі-точковою.

Основний результат роботи дає така теорема. Вона стверджує, що сингулярно неперервна міра $\mu \in \mathcal{M}_{sc}$ під дією конфліктної взаємодії з чисто точковою мірою $\nu \in \mathcal{M}_{pp}$ може перейти у чисто точкову, лише якщо $\mu \in \mathcal{M}_{qp}$.

Теорема 3.5. *Для заданої пари структурно-подібних мір $\mu \in \mathcal{M}_{sc}$, $\nu \in \mathcal{M}_{pp}$ припустимо, що*

$$\mu^{\infty} := \mu \overset{\infty}{*} \nu \in \mathcal{M}_{pp}.$$

Тоді початкова міра μ з необхідністю є квазі-точковою, $\mu \in \mathcal{M}_{qp}$. Більш за те для кожної структурно-подібної міри $\mu \in \mathcal{M}_{qp}$ існує чисто точкова міра $\nu \in \mathcal{M}_{pp}$ така, що $\mu^{\infty} \in \mathcal{M}_{pp}$.

3.3 Існування інваріантних станів.

Ця тема була предметом досліджень в роботах [36, 37, 39], "Existence theorems of the ω -limit states for conflict dynamical systems" , "The Hahn-Jordan decomposition for a charge as an equilibrium state of the conflict dynamical system" , "On dynamical system of conflict with fair redistribution of vital resources" .

Ми використовуємо розклад Гана-Жордана для опису рівноважних станів систем конфлікту.

Ми вводимо поняття системи конфлікту в термінах пар імовірнісних мір та будуємо декілька моделей систем конфлікту. Зокрема показуємо, що кожна траєкторія з початковим станом, заданим парою мір μ, ν , збігається до рівноважного стану, який фіксується нормованими компонентами μ_+, ν_+ класичного розкладу Гана-Жордана заряду $\omega = \mu - \nu$.

Сучасна математична теорія конфлікту ґрунтується на рівняннях Лотки-Вольтерри,

$$\dot{x}_1 = x_1(r_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2(r_2 + a_{21}x_1 - a_{22}x_2), \quad (3.31)$$

та їх спеціалізованих версіях відомих як рівняння Ланчестера та рівняння Ріхардсона. В (3.31) функції $x_i(t)$ позначають кількість біологічного виду в момент часу t , а дійсні коефіцієнти r_i, a_{ik} є параметрами задачі.

Система рівнянь (3.31) з початку виникнення призначалася для опису динаміки кількісних змін двох біологічних видів в результаті їх природної популяції, конфліктної боротьби та ефектів самознищення внаслідок перенасичення. Багато прикладів такого сорту, зокрема, ряд моделей поширення епідемій, розглянуто в монографії Марі "Математична біологія". Згодом виявилось, що ці рівняння в певному сенсі є універсальними. Вони чудово працюють не лише в математичній біології, а придатні для побудови моделей конфлікту та опису динамічної поведінки складних систем різної природи, в екології, в соціальних науках, в процесах взаємодії різних мов, в релігійних, політичних і навіть військових конфліктах, зокрема, в процесах гонки озброєнь.

Важливо підкреслити, що рівняння (3.31) описують динаміку кількісних змін опонентів. В застосуваннях саме кількісні характеристики конфліктуючих сторін мають вирішальне значення. Ідеологія теорії конфліктів на основі рівнянь Лотки-Вольтерри спрямована на здобуття переваги та перемоги для однієї із сторін та мінімізації втрат, або, щонайменше, – порятунку для сторони, яка програє. Про встановлення компромісу між опонентами мова не йдеться.

Більш глибоке дослідження явища конфлікту та створення досконалішої теорії потребує статистичного аналізу величезної кількості актів конфліктної боротьби, які повторюються незліченну кількість разів. Такий аналіз можливий лише в термінах теорії ймовірностей, коли стан системи конфлікту задається розподілами випадкових величин пов'язаних з опонентами в просторі їх існування. Перехід від рівнянь Лотки-Вольтерри до рівнянь в термінах імовірнісних розподілів аналогічний переходу від класичної фізики до квантової в термінах рівнянь.

Тут під системою конфлікту розуміється складна фізична система, яка описує конфліктну взаємодію двох альтернативних сторін в термінах імовірнісних розподілів на спільному просторі існування. Наведемо математичне означення.

Нехай Ω позначає компакт з деякого метричного простору, на якому задана σ -алгебра підмножин $\mathcal{R}$. Позначимо через $\mathcal{M}^+(\Omega)$ сімейство всіх σ -адитивних додатних мір на $\mathcal{R}$. Підклас імовірнісних мір позначаємо $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$.

Кожну пару мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$ називаємо станом системи конфлікту між парою опонентів, розподіли яких на Ω задані цими мірами. Довільне відображення

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu \\ \nu \end{array} \right\} \xrightarrow{*} \left\{ \begin{array}{c} \mu' \\ \nu' \end{array} \right\}, \quad \mu, \nu, \mu', \nu' \in \mathcal{M}_1^+(\Omega) \quad (3.32)$$

називаємо композицією конфлікту, а трійку $(\Omega, \mathcal{M}_1^+(\Omega), *)$ – системою конфлікту.

Звичайно, відображення $*$ задається нелінійними рівняннями в дискретному чи неперервному часі (див. нижче) і мають додаткові властивості. Рівняння описують еволюцію змін розподілів, заданих мірами ω, ν на просторі Ω внаслідок конфліктної взаємодії протидіючих сторін. Замість наведених вище рівнянь Лотки-Вольтерри ми розглядаємо рівняння виду:

$$\mu^{N+1} = \mu^N(\theta^N + 1 - \nu^N), \quad \nu^{N+1} = \nu^N(\theta^N + 1 - \mu^N), \quad (3.33)$$

$$\mu^{N+1} = \mu^N(\theta^N + 1) - \tau^N, \quad \nu^{N+1} = \nu^N(\theta^N + 1) - \tau^N, \quad (3.34)$$

для дискретного часу $N = 0, 1, \dots$, та

$$\dot{\mu} = \mu(\theta - \nu), \quad \dot{\nu} = \nu(\theta - \mu), \quad (3.35)$$

$$\dot{\mu} = \frac{\mu\theta - \nu}{z}, \quad \dot{\nu} = \frac{\nu\theta - \mu}{z} \quad (3.36)$$

для неперервного часу $t \geq 0$. Тут $\theta = \theta(\mu, \nu)$ – скалярна функція, яка називається показником (глобальної) конфліктності між опонентами, математично задається як квадратична форма від мір μ, ν , її явний вигляд визначається конкретною моделлю. Функція $\tau = \tau(\mu, \nu)$ називається показником локальної конфронтації або окупації. Знаменник z в рівняннях (3.34) необхідний для нормування мір на одиницю.

Рівноважним станом системи конфлікту називається пара мір $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, для якої права частина рівнянь в одній із систем (3.33)–(3.36) тотожно дорівнює нулю.

В роботі ми розглядаємо докладно декілька моделей систем конфлікту лише з дискретним часом, хоча основний результат є справедливим і для неперервного часу.

Розглянемо довільну пару $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, $\mu \neq \nu$. Згідно класичного результату з теорії міри для заряду $\omega = \mu - \nu$ існує розклад Гана множини Ω на дві частини:

$$\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad \Omega_+ \cap \Omega_- = \emptyset, \quad (3.37)$$

такий, що для ω має місце розклад Жордана:

$$\omega = \omega_+ - \omega_-, \quad \omega_+(\Omega_-) = 0 = \omega_-(\Omega_+), \quad (3.38)$$

де компоненти $\omega_+, \omega_- \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ визначаються умовами:

$$\omega_+(A) = \omega_+(A_+) = \sup_{B \subseteq A} \omega(B), \quad A_+ = A \cap \Omega_+, \quad A, B \in \mathcal{R},$$

$$\omega_-(A) = \omega_-(A_-) = \sup_{B \subseteq A} -\omega(B), \quad A_- = A \cap \Omega_-.$$

Звичайно, розклад Гана (3.37) не єдиний, але додатні міри ω_+, ω_- в (3.38) фіксуються зарядом ω однозначно. Нормуючи їх на одиницю одержуємо дві імовірнісні міри з $\mathcal{M}_1^+(\Omega)$:

$$\mu_+ := \frac{\omega_+}{\omega_+(\Omega)}, \quad \nu_- := \frac{\omega_-}{\omega_-(\Omega)}. \quad (3.39)$$

Ми стверджуємо, що справедлива наступна теорема.

Теорема 3.6. *Кожна траєкторія системи конфлікту, задана однією з систем рівнянь (3.33)-(3.36) з початковим станом $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$, збігається до рівноважного стану $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}_1^+(\Omega)$. При цьому, виконується рівність*

$$\mu^\infty = \mu_+, \quad \nu^\infty = \nu_-, \quad (3.40)$$

де μ_+, ν_- визначені в (3.39).

В роботі ми встановлюємо цю теорему для декількох фіксованих моделей: коли μ, ν — дискретні міри, кусково рівномірно розподілені, абсолютно неперервні на відрізку $[0, 1]$ та абстрактні на компактній множині. Доведення для загального випадку буде опубліковане пізніше.

Зауважимо, що в попередніх роботах вже досліджувались системи конфлікту у випадку дискретних мір. В термінах стохастичних векторів такі системи вивчалися раніше. Зокрема, в цих роботах доведено існування нерухомих граничних точок (рівноважних станів). Застосування теорії систем конфлікту до моделювання природних процесів наведені в роботі [27]. Відзначимо також, що опис множини граничних точок по суті збігається із рівноважними станами з цієї роботи, але раніше цей результат не був явно сформульований і доведений.

4 ПРОБЛЕМА ЩІЛЬНИХ ВКЛАДЕНЬ

Цей напрямок розвинений у публікаціях [32, 35] та монографії "Метод оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів" [33]. Проблема щільності вкладення підпростору з одного простору в інший має багато різних застосувань. Ми аналізували цю проблему щодо вкладень у шкалі Соболевських просторів.

α -ємністю компактної множини $K \subset \mathbb{R}^n$ називається величина

$$\text{cap}_\alpha(K) = \inf\{\|\varphi\|_{W_k^2}^2 \mid \varphi \in C_0^\infty, \varphi \geq 1 \text{ на } K\}. \quad (4.1)$$

Якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – відкрита множина, то

$$\text{cap}_\alpha(\Omega) = \sup\{\text{cap}_\alpha(K) \mid K \subset \Omega\} \quad (4.2)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{-k}(\Omega) &:= \{\omega \in W_2^{-k} \mid \langle \omega, \varphi \rangle_{-k,k} = 0, \forall \varphi \in W_2^k, \text{supp} \varphi \in \Omega\} \\ &= \{\omega \in W_2^{-k} \mid \text{supp} \omega \subset \Omega^c\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Розглянемо в W_2^k підпростір

$$\mathcal{M}_k(\Omega) = (I_{k,-k} \mathcal{M}_{-k}(\Omega))^{cl,k} \quad (4.4)$$

За яких умов $\mathcal{M}_k(\Omega)$ є власним підпростором в W_2^k (тобто $\mathcal{M}_k(\Omega)^{cl} \neq W_2^k$) і одночасно щільним в L_2 ?

Теорема 4.1. *Нехай $k > n/2$. Тоді для кожної множини $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ нульової міри Лебега,*

$$\lambda(\Omega) = 0, \quad (4.5)$$

і такої що

$$\text{cap}_k(\Omega) > 0, \quad (4.6)$$

підпростір $\mathcal{M}_k(\Omega)$ є власним підпростором в W_2^k , тобто $\dim(W_2^k \ominus \mathcal{M}_k(\Omega)) > 0$, і одночасно щільним в L_2 .

Суть доведення полягає у наступному. Згідно теореми Соболева при $k > n/2$ простір $W_2^k \subset C(\mathbb{R}^n)$. Тому для кожної точки $y \in \Omega$ функціонал $l_{\delta_y}(\varphi) := \varphi(y)$, $\varphi \in W_2^k$ є неперервними на W_2^k . Отже множина узагальнених функцій

$$\{\omega = \delta_y \mid y \in \Omega\}$$

належить до простору W_2^{-k} але підпростір $\mathcal{N}_{-k} = (\text{span}\{\omega = \delta_y \mid y \in \Omega\})^{cl,-k}$ має нульовий перетин з $\mathcal{M}_{-k}(\Omega)$. Більш за те, з (4.3) випливає, що

$$\mathcal{N}_k(\Omega) = I_{k,-k} \mathcal{N}_{-k} \perp \mathcal{M}_k(\Omega)$$

Розглянемо шкалу гільбертових просторів утворену із соболевих просторів

$$\dots W_2^{-k} \supset L_2(\mathbb{R}^n, dx) \supset W_2^k \equiv W_2^k(\mathbb{R}^n) \dots,$$

Нехай $K \in \mathbb{R}^n$ – довільна компактна множина. Її доповнення $K^c = \mathbb{R}^n \setminus K$ позначаємо через Ω . Нагадаємо, що соболевський простір $\mathring{W}_2^k(\Omega)$ за означенням є замиканням множини функцій $C_0^\infty(\Omega)$ в W_2^k . Взагалі $\mathring{W}_2^k(\Omega)$ є власним підпростором в W_2^k , хоча $\mathring{W}_2^k(\mathbb{R}^n) = W_2^k$.

Ми цікавимося таким питанням. За яких умов $\mathring{W}_2^k(\Omega)$ є щільним в W_2^m , $m \leq k - 1$? Відповідь одержуємо в термінах ємності множини K .

Теорема 4.2. *Нехай для компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ і дійсного цілого $\alpha \geq 1$ ємністю $C_\alpha(K) > 0$. Тоді підпростір $\mathcal{M}_\alpha(\Omega) = \mathring{W}_2^\alpha(\Omega)$, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$ є щільним в W_2^m для цілого $m \leq \alpha - 1$:*

$$W_2^m \supset \mathring{W}_2^\alpha(\Omega) \quad (4.7)$$

тоді і лише тоді, коли

$$C_m(K) = 0. \quad (4.8)$$

5 ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ НАД НЕСКІНЧЕННОМІРНИМИ ВЕКТОРНИМИ МІРАМИ РАДОНА. ТЕОРІЯ ВНУТРІШНІХ ЄМНОСТЕЙ КОНДЕНСАТОРІВ

Викладені у цьому параграфі результати ґрунтуються на роботах [67, 78].

Завершено побудову теорії внутрішніх ємностей конденсаторів зі зчисленною кількістю пластин довільної топологічної структури в локально компактному просторі X відносно вельми загального додатно визначеного ядра κ . Під *конденсатором* розуміється зчислений, локально скінченний набір A довільних множин $A_i \subset X$, $i \in I$, кожній з яких приписано знак $+1$ або -1 та замикання пластин протилежного знаку взаємно не перетинаються. Побудована теорія є логічним продовженням попередніх досліджень Н.В. Зорій (див., наприклад, [63]); щодо підґрунтя таких досліджень, див. також результати відомого японського математика М. Ohtsuka, викладені ним у фундаментальній праці [56].

Теорія ємностей конденсаторів є природним розвитком та узагальненням теорії ємностей множин, побудованої у роботах О. Frostman [48], Н. Cartan [43], De la Vallée-Poussin [59] для класичних ядер в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, та пізніше розвиненої відомим датським математиком В. Fuglede [49] на загальні ядра в локально компактному просторі X . Однак ці дві теорії — для множин та, з другого боку, для конденсаторів — виявилися глибоко відмінними одна від іншої.

Щоб проілюструвати це, досить зазначити, що у некомпактному випадку основна екстремальна задача теорії ємностей конденсаторів є, взагалі кажучи, *нерозв'язною* і цей несподіваний феномен має місце навіть за вельми природних припущень (скажімо, для ядер Ньютона, Гріна або Ріса в $\mathbb{R}^n$ та стандартного замкненого двохпластинного конденсатора; див. [60]–[62]), що складає принципову відмінність від теорії ємностей множин (див. [43, 49]). Необхідні та достатні умови розв'язності основної екстремальної задачі теорії ємностей конденсаторів у випадку скінченного числа пластин було отримано в [64–66] (див. також наведений у розділі 5.5 приклад 5.1).

Тому було важливо знайти постановки задач, *дуальних* до основної варіаційної задачі теорії внутрішніх ємностей конденсаторів (і, отже, таких, що надавали б нові *еквівалентні* означення поняття ємності конденсатора), але тепер вже *завжди розв'язних* — наприклад, навіть для незамкнених конденсаторів з нескінченною кількістю пластин. (Під дуальністю варіаційних задач розуміється рівність їхніх екстремальних значень.)

Для всіх додатно визначених ядер, що задовольняють умову Fuglede [49] узгодженості між сильною та широкою топологіями над простором скаляр-

них мір Радона зі скінченною енергією, такі варіаційні задачі сформульовані та розв'язані. Їхні розв'язки є природним узагальненням добре відомого поняття внутрішньої рівноважної міри, асоційованої з множиною. Отримано опис цих розв'язків та відповідних рівноважних констант, доведено теореми про їхню єдиність та неперервність, виділено характеристичні властивості.

Такі результати є новими та представляють інтерес навіть для конденсаторів зі скінченною кількістю пластин, що вже досліджувалися в математичній літературі (окрім вищезгаданих робіт Н.В. Зорій, див., наприклад, [55, 56, 58]). Однак з тою ж самою загальністю аналогічну теорію було побудовано для конденсаторів з нескінченною кількістю пластин. Для подолання труднощів, викликаних нескінченною розмірністю векторних мір та їхньою широкою некомпактністю, у звітний період було розроблено принципово новий підхід у порівнянні з раніше відомими, що ґрунтується на впровадженні над векторними мірами належних напівметричних структур та доведенні теореми про повноту певних напівметричних просторів.

5.1 Позначення, означення, відомі факти

Для довільного топологічного простору Y позначимо через $\Phi(Y)$ множину всіх напівнеперервних знизу функцій $\psi : Y \rightarrow (-\infty, \infty]$, невід'ємних у випадку некомпактності Y .

Надалі X позначає локально компактний простір, що задовольняє аксіому віддільності Хаусдорфа, а $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X)$ — лінійний простір усіх дійсних мір Радона ν на X , устаткований топологією *широкої* (*=грубої*) збіжності, тобто топологією поточної збіжності на класі $C_0(X)$ усіх дійсних неперервних функцій на X з компактним носієм (див. [40]). Під *ядром* κ на X ми розуміємо фіксований елемент класу $\Phi(X \times X)$.

Якщо $\nu, \mu \in \mathfrak{M}$, то *взаємна енергія* $\kappa(\nu, \mu)$ та *потенціал* $\kappa(\cdot, \nu)$ відносно ядра κ означаються відповідно рівностями

$$\kappa(\nu, \mu) := \int \kappa(x, y) d(\nu \otimes \mu)(x, y) \quad \text{та} \quad \kappa(\cdot, \nu) := \int \kappa(\cdot, y) d\nu(y).$$

(Тут і надалі, вводячи позначення, ми завжди вважаємо відповідний об'єкт справа добре визначеним — як скінченне число або $\pm\infty$.) При $\nu = \mu$ ми отримуємо *енергію* $\kappa(\nu, \nu)$ міри ν . Нехай $\mathcal{E}_\kappa = \mathcal{E}_\kappa(X)$ складається з усіх $\nu \in \mathfrak{M}$ з $-\infty < \kappa(\nu, \nu) < \infty$.

Ми будемо розглядати *додатно визначене* ядро κ , що означає його симетричність ($\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$ для всіх $x, y \in X$) та невід'ємність енергії $\kappa(\nu, \nu)$ для всіх $\nu \in \mathfrak{M}$ (звичайно, якщо відповідне значення $\kappa(\nu, \nu)$ є добре визначеним). Тоді множина $\mathcal{E}_\kappa$ утворює передгільбертовий простір зі скалярним добутком $\kappa(\nu, \mu)$ та напівнормою $\|\nu\|_\kappa := \|\nu\|_{\mathcal{E}_\kappa} := \sqrt{\kappa(\nu, \nu)}$ (див. [49]). Топологія на $\mathcal{E}_\kappa$, що визначається напівнормою $\|\cdot\|_\kappa$, називається *сильною*. Дода-

тно визначене ядро називається *строго додатно визначеним*, якщо сильна топологія є віддільною (або, еквівалентно, якщо $\|\cdot\|_\kappa$ є нормою).

Нагадаємо, що міра $\nu \geq 0$ називається *зосередженою* на множині $E \subset X$, якщо E ν -вимірна і $\nu = \nu_E$, де $\nu_E := \nu|_E$ позначає слід міри ν на E . (Ці та інші потрібні нам факти теорії мір Радона та інтегрування викладено, наприклад, в [40].) Нехай $\mathfrak{M}^+(E)$ — випуклий конус усіх невід’ємних мір, зосереджених на E , і $\mathcal{E}_\kappa^+(E) := \mathfrak{M}^+(E) \cap \mathcal{E}_\kappa$. Введемо також позначення $\mathfrak{M}^+ := \mathfrak{M}^+(X)$ і $\mathcal{E}_\kappa^+ := \mathcal{E}_\kappa^+(X)$.

Означення 5.1. Наслідуючи В. Fuglede [49], назовемо (додатно визначене) ядро κ *узгодженим*, якщо кожна сильно фундаментальна узагальнена послідовність в $\mathcal{E}_\kappa^+$ збігається сильно до кожної з її широких граничних точок. Узгоджене ядро називається *довершеним*, якщо воно є строго додатно визначеним.

Зауваження 5.1. Необхідно розглядати узагальнені послідовності (або фільтри) в $\mathfrak{M}$ замість звичайних послідовностей, оскільки широка топологія, взагалі кажучи, не задовольняє першу аксіому зліченності. Цієї незручності можна уникнути, якщо розглядати метризовний та злічений на нескінченності простір X (скажімо, $X = \mathbb{R}^n$).¹

Оскільки наші дослідження стосуються саме довершених (чи, більш загально, узгоджених) ядер, важливо зауважити, що клас таких ядер є досить широким і містить, зокрема, всі класичні ядра теорії потенціалу. Дійсно, в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ядро Ньютона $|x - y|^{2-n}$ є довершеним [43]. Довершеними є ядра Ріса $|x - y|^{\alpha-n}$ порядку $0 < \alpha < n$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ [44, 45], та звуження логарифмічного ядра $-\log|x - y|$ в $\mathbb{R}^2$ на відкритий одиничний круг [54]. Нарешті, якщо D — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, що є регулярною в сенсі розв’язуваності класичної задачі Діріхле, то її (класична) функція Гріна g_D є довершеним ядром на $X = D$ [43, 47, 54].

З другого боку, як видно з означення 5.1, поняття довершених (чи, більш загально, узгоджених) ядер є вельми ефективним в дослідженні екстремальних задач теорії потенціалу над класами (скалярних) додатних мір. Дійсно, теорія ємностей множин була побудована в [49] саме для цих ядер, що стало можливим дякуючи наступній теоремі (пор. з нашою теоремою 5.3).

Теорема 5.1 (Fuglede [49]). *Ядро κ є довершеним тоді і тільки тоді, коли простір $\mathcal{E}_\kappa^+$ сильно повний та сильна топологія на $\mathcal{E}_\kappa^+$ сильніша за широку.*

Зауваження 5.2. У звітний період було показано, що поняття довершених (чи узгоджених) ядер є також ефективним в екстремальних задачах теорії

¹Нагадаємо (див. [41, глава 1, розділ 9]), що локально компактний простір називається *зліченим на нескінченності*, якщо він може бути зображений як зчислення об’єднання компактних множин.

потенціалу над класами знакозмінних мір Радона, асоційованих з конденсаторами зі скінченною чи нескінченною кількістю пластин. Це забезпечується введенням належної напівметричної структури над відповідним конусом векторних мір зі скінченною енергією та доведенні теореми про повноту певних напівметричних просторів (див. теорему 5.3).

5.2 Нескінченномірні векторні міри Радона, асоційовані з конденсаторами; їхні енергії та потенціали

Позначимо через I^+ та I^- злічені, диз'юнктні множини індексів $i \in \mathbb{N}$, $I := I^+ \cup I^-$, і нехай кожному $i \in I$ однозначно співставляється непорожня множина $A_i \subset X$.

Означення 5.2. Упорядкований набір $\mathbf{A} = (A_i)_{i \in I}$ називається (I^+, I^-) -конденсатором (або просто конденсатором) в X , якщо кожна компактна підмножина простору X перетинається щонайбільше зі скінченною кількістю множин A_i та

$$\overline{A_i} \cap \overline{A_j} = \emptyset \quad \text{для всіх } i \in I^+, j \in I^-. \quad (5.1)$$

Назвемо A_i , $i \in I^+$, та A_j , $j \in I^-$, *додатними* та *від'ємними пластинами* конденсатора $\mathbf{A}$, відповідно. Конденсатор назвемо *замкненим*, *компактним* або *універсально вимірним*, якщо кожна з його пластин володіє відповідною властивістю. Назвемо $\mathbf{A}$ *скінченним*, якщо такою є множина I . Позначимо $\overline{\mathbf{A}} := (\overline{A_i})_{i \in I}$ і зауважимо, що в силу (5.1) $\overline{\mathbf{A}}$ є (замкненим) (I^+, I^-) -конденсатором. Також позначимо

$$A^+ := \bigcup_{i \in I^+} A_i, \quad A^- := \bigcup_{i \in I^-} A_i.$$

Позначимо $\mathfrak{M}^+(\mathbf{A}) := \prod_{i \in I} \mathfrak{M}^+(A_i)$; тоді $\boldsymbol{\mu} = (\mu^i)_{i \in I}$, де $\mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i)$, $i \in I$, називається (додатною) *векторною мірою*, асоційованою з конденсатором $\mathbf{A}$, а $\mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i)$, $i \in I$, — її i -компонентами. Якщо $\mathbf{u} = (u_i)_{i \in I}$ — векторнозначна функція з μ^i -вимірними компонентами, то позначимо²

$$\langle \mathbf{u}, \boldsymbol{\mu} \rangle := \sum_{i \in I} \int u_i d\mu^i.$$

Топологію добутку $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}^+(A_i)$, де кожний $\mathfrak{M}^+(A_i)$ наділений індукованою широкою топологією, назвемо по аналогії *широкою*.

Оскільки кожна компактна підмножина простору X має непорожній перетин щонайбільше з скінченною кількістю A_i , то для кожного $\varphi \in C_0(X)$

²Тут і надалі, вираз $\sum_{i \in I} c_i$ вважається добре визначеним, якщо таким є кожний доданок c_i , а сума не залежить від порядку сумування. Тоді, за теоремою Рімана, сума скінченна тоді і тільки тоді, коли ряд абсолютно збіжний.

лише скінченна кількість величин $\mu^i(\varphi)$ (де $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{A})$ — фіксована міра) відмінні від нуля. Тому кожній (додатній) векторній мірі $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{A})$ ставиться у відповідність єдина (знакозмінна) скалярна міра Радона $R\mu \in \mathfrak{M}(X)$ з властивістю

$$R\mu(\varphi) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu^i(\varphi) \quad \text{для всіх } \varphi \in C_0(X),$$

де

$$\alpha_i := \text{sign } A_i := \begin{cases} +1, & \text{якщо } i \in I^+, \\ -1, & \text{якщо } i \in I^-. \end{cases}$$

Як впливає з (5.1), додатна та від'ємна частини у розкладі Хана–Жордана міри $R\mu$ мають відповідно зображення

$$R\mu^+ = \sum_{i \in I^+} \mu^i \quad \text{та} \quad R\mu^- = \sum_{i \in I^-} \mu^i.$$

Зауважимо, що це відображення $R : \mathfrak{M}^+(\mathbf{A}) \rightarrow \mathfrak{M}(X)$ не є, взагалі кажучи, ін'єктивним, тобто можуть існувати $\mu, \mu' \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{A})$ такі, що $\mu \neq \mu'$, але $R\mu = R\mu'$. (Воно ін'єктивне тоді і тільки тоді, коли всі A_i , $i \in I$, взаємно не перетинаються.) Назвемо $\mu, \mu' \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{A})$ *R-еквівалентними*, якщо їхні *R*-образи співпадають.

Також зауважимо, що з широкої збіжності в $\mathfrak{M}^+(\mathbf{A})$ впливає широка збіжність для відповідних *R*-образів. Обернене твердження виконується тоді і тільки тоді, коли всі $\overline{A_i}$, $i \in I$, взаємно не перетинаються; в цьому можна переконатися з допомогою відомої теореми Тітце–Урисона про неперервне продовження в нормальних просторах.

У відповідності до електростатичного трактування конденсатора $\mathbf{A}$, нехай взаємодія між довільними мірами (зарядами) на його пластинах A_i та A_j , $i, j \in I$, визначається (скінченною чи нескінченною) матрицею $(\alpha_i \alpha_j)_{i, j \in I}$. Тоді для довільних $\mu, \mu_1 \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{A})$ *взаємну енергію* природно означити формулою

$$\kappa(\mu, \mu_1) := \sum_{i, j \in I} \alpha_i \alpha_j \kappa(\mu^i, \mu_1^j). \quad (5.2)$$

Нехай $\kappa_\mu = (\kappa_\mu^i)_{i \in I}$ позначає *векторний потенціал* міри $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{A})$ з компонентами

$$\kappa_\mu^i(x) := \sum_{j \in I} \alpha_i \alpha_j \kappa(x, \mu^j), \quad x \in X.$$

При $\mu = \mu_1$ величина $\kappa(\mu, \mu_1)$ визначає *енергію* елемента $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{A})$. Позначимо через $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ множину всіх $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{A})$ таких, що $-\infty < \kappa(\mu, \mu) < \infty$.

Легко перевірити (див. [78, лема 3.3]), що μ належить $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i \in I} \|\mu^i\|_\kappa < \infty$. Звідси впливає, що $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ утворює *випуклий*

конус; цей факт, звісно, надзвичайно корисний при розв'язуванні екстремальних задач.

Нагадаємо (див. [49]), що *приблизно всюди* (пр. вс.) означає, що відповідне твердження виконується всюди, за можливим винятком множини нульової внутрішньої ємності. Справедливе наступне зображення енергій та векторних потенціалів $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ через енергії та потенціали їхніх компонентів (див. [78, наслідок 3.2]).

Лема 5.1. *Для довільних фіксованих $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ виконуються рівності*

$$\kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_1) = \kappa(R\boldsymbol{\mu}, R\boldsymbol{\mu}_1) = \sum_{i,j \in I} \alpha_i \alpha_j \kappa(\mu^i, \mu^j). \quad (5.3)$$

Більш того, $\kappa_\mu(x)$ є добре визначеним та скінченним пр. вс. в X та має компоненти

$$\kappa_\mu^i(x) = \alpha_i \kappa(x, R\boldsymbol{\mu}) = \sum_{i,j \in I} \alpha_i \alpha_j \kappa(x, \mu^j), \quad i \in I. \quad (5.4)$$

Ряди в (5.3) та (5.4) збігаються абсолютно, останній пр. вс. в X .

Зауважимо, що в силу додатної визначеності ядра з співвідношення (5.3) випливає наступна нерівність, яка "а ріогі" не була очевидною:

$$\kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \geq 0 \quad \text{для всіх} \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}). \quad (5.5)$$

Знайдене лемою 5.1 співвідношення між енергіями та потенціалами $\boldsymbol{\mu}$ та $R\boldsymbol{\mu}$ власне і дозволило розвинути ефективний аналіз на нескінченномірних векторних мірах, асоційованих з конденсатором. Дійсно, примінюючи (5.3) до $\kappa(R\boldsymbol{\mu}_k, R\boldsymbol{\mu}_t)$, де $\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\mu}_t, k, t = 1, 2$, — фіксовані елементи з класу $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$, та враховуючи, що відповідні ряди в (5.3) є абсолютно збіжними, ми отримуємо наступну теорему (див. [78, теорема 3.1]).

Теорема 5.2. *Множина $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ утворює напівметричний простір з напівметрикою*

$$\|\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2\|_{\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})} := \left[\sum_{i,j \in I} \alpha_i \alpha_j \kappa(\mu_1^i - \mu_2^i, \mu_1^j - \mu_2^j) \right]^{1/2}, \quad \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2 \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}), \quad (5.6)$$

і цей простір є ізометричним до його R -образу, тобто

$$\|\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2\|_{\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})} = \|R\boldsymbol{\mu}_1 - R\boldsymbol{\mu}_2\|_{\mathcal{E}_\kappa}.$$

Ця напівметрика є метрикою тоді і тільки тоді, коли ядро κ строго додатно визначене, а всі $A_i, i \in I$, взаємно не перетинаються.

Всюди далі $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ трактується як напівметричний простір з напівметрикою (5.6). Оскільки $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ та його R -образ ізометричні, аналогічно термінології в $\mathcal{E}_\kappa$ топологію напівметричного простору $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ назвемо *сильною*.

5.3 Внутрішня ємність конденсатора

Зафіксувавши векторнозначну функцію $\mathbf{g} = (g_i)_{i \in I}$, де всі компоненти $g_i : X \rightarrow (0, \infty)$ є неперервними, та числовий вектор $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ з $a_i > 0$, означимо *внутрішню ємність* конденсатора $\mathbf{A}$ (відносно κ , $\mathbf{a}$ та $\mathbf{g}$) формулою³

$$\text{cap}_\kappa \mathbf{A} := \text{cap}_\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) := \left[\inf_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})} \kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \right]^{-1},$$

де

$$\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) := \left\{ \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}) : \langle g_i, \mu^i \rangle = a_i \text{ для всіх } i \in I \right\}. \quad (5.7)$$

Паралельно зі зазначеною вище електростатичною інтерпретацією (і, отже, можливими застосуваннями до задач індустрії — див. "capacitors" в [53]), це поняття має цілу низку потужних застосувань до теорії апроксимації, геометричної теорії функцій та самої теорії потенціалу (див. монографії [51, 55, 58] та наведені там цитування).

При $I = \{1\}$, $g_1 = 1$, $a_1 = 1$ поняття внутрішньої ємності конденсатора зводиться до поняття внутрішньої ємності множини; відповідну величину позначимо $C_\kappa(\cdot)$.

Як впливає з (5.5), виконується $0 \leq \text{cap}_\kappa \mathbf{A} \leq \infty$. Необхідні та (або) достатні умови для того, щоб мав місце не вироджений випадок $0 < \text{cap}_\kappa \mathbf{A} < \infty$, отримані в [78] (див. там леми 6.2 та 6.3 при $\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

Задача існування $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{A} \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з *мінімальною* в цьому класі енергією (назвемо її $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -*задачею*) є основною екстремальною задачею теорії внутрішніх ємностей конденсаторів. Вона має сенс у випадку, якщо $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) \neq \emptyset$, що еквівалентно умові

$$\text{cap}_\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) > 0. \quad (5.8)$$

Назвемо $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачу *розв'язною*, якщо клас $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ всіх її розв'язків $\boldsymbol{\lambda}_\mathbf{A}$ непорожній. Розв'язок $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачі (якщо він існує) є єдиним у сенсі наступного твердження (див. також наступний за ним наслідок).

Лема 5.2. *Нехай $\boldsymbol{\lambda}, \hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$. Тоді $\boldsymbol{\lambda}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}$ належать до одного класу еквівалентності в напівметричному просторі $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$, тобто $\|\boldsymbol{\lambda} - \hat{\boldsymbol{\lambda}}\|_{\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})} = 0$.*

Наслідок 5.1. *Нехай $\boldsymbol{\lambda}, \hat{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$. Тоді $R\boldsymbol{\lambda} = R\hat{\boldsymbol{\lambda}}$, якщо ядро κ строго додатно визначене, і $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}}$, якщо, до того ж, всі A_i , $i \in I$, взаємно не перетинаються.*

³Як завжди, точна нижня межа над порожньою множиною визначається як $+\infty$. Ми також покладемо $1/0 = +\infty$.

Щодо задачі існування, то вона є легко розв'язною лише у випадку, коли виконується сукупність наступних умов: конденсатор $\mathbf{A}$ скінченний і компактний, а ядро κ неперервне на $A^+ \times A^-$. Дійсно, тоді клас допустимих мір $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ компактний у широкій топології, а функціонал енергії $\kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})$ напівнеперервний знизу на $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$, і існування $\boldsymbol{\lambda} \in \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ доводиться з допомогою декількох рядків елементарних викладок (див., наприклад, [56]), що використовують лише структуру широкої топології. Однак задача існування стає вельми нетривіальною, якщо хоча б одна з наведених тільки що умов не виконується. Скажімо, клас допустимих мір перестає бути широко компактним, якщо хоча б одна з множин A_i некомпактна.

Щоб розв'язати задачу існування, у звітний період було започатковано та обгрунтовано новий підхід, що ефективно використовує структури обох топологій над напівметричним простором $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ — як широкої, так і сильної. У основі такого підходу лежить теорема про сильну повноту належних топологічних підпросторів простору $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$.

5.4 Теорема про сильну повноту

Всюди далі, якщо не вказано інше, вважаємо, що ядро κ узгоджене (див. означення 5.1) і або $I^- = \emptyset$, або κ , $\mathbf{g}$, $\mathbf{a}$ та $\mathbf{A}$ задовольняють наступні дві умови:

$$\sum_{i \in I} a_i g_{i, \inf}^{-1} < \infty, \quad (5.9)$$

$$\sup_{x \in A^+, y \in A^-} \kappa(x, y) < \infty, \quad (5.10)$$

де $g_{i, \inf} := \inf_{x \in A_i} g_i(x)$. Позначивши

$$\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g}) := \left\{ \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}) : \langle g_i, \mu^i \rangle \leq a_i \text{ для всіх } i \in I \right\}, \quad (5.11)$$

розглянемо $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ як топологічний підпростір напівметричного простору $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$.

Теорема 5.3. *За вказаних вище умов, нехай конденсатор $\mathbf{A}$ замкнений. Тоді напівметричний простір $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ є повним. Більш детально, якщо узагальнена послідовність $(\boldsymbol{\mu}_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ сильно фундаментальна і $\boldsymbol{\mu}$ позначає одну з її широких граничних точок (така $\boldsymbol{\mu}$ існує), тоді $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ і $\boldsymbol{\mu}_s \rightarrow \boldsymbol{\mu}$ сильно, тобто*

$$\lim_{s \in S} \|\boldsymbol{\mu}_s - \boldsymbol{\mu}\|_{\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})} = 0.$$

Нехай тепер, крім уже зазначеного, ядро κ строго додатно визначене (отже, довершене), а всі A_i , $i \in I$, взаємно диз'юнктні. Якщо $(\boldsymbol{\mu}_s)_{s \in S}$ збігається сильно до $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$, тоді насправді $\boldsymbol{\mu}_0 \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ і $\boldsymbol{\mu}_s \rightarrow \boldsymbol{\mu}_0$ також широко.

Зауваження 5.3. Оскільки напівметричний простір $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ є ізометричним до його R -образу, теорема 5.3 виділяє сильно повні топологічні підпростори передгільбертового простору $\mathcal{E}_\kappa(X)$, що складаються із знакозмінних мір. Такий результат є цікавим сам по собі оскільки, згідно з добре відомим прикладом Н. Cartan [43], увесь простір $\mathcal{E}_\kappa(X)$ є сильно неповним навіть для ядра Кулона $|x - y|^{-1}$ в $\mathbb{R}^3$.

5.5 Достатні умови розв'язності основної екстремальної задачі

За вказаних вище постійних умов, нехай конденсатор $\mathbf{A}$ замкнений і виконується умова (5.8). Достатні умови розв'язності основної екстремальної задачі теорії внутрішніх ємностей конденсаторів даються наступною теоремою (див. [78, теорема 8.1] при $\mathbf{f} = \mathbf{0}$).

Теорема 5.4. *Для кожного $i \in I$ нехай функція $g_i|_{A_i}$ або обмежена зверху, або задовольняє наступну умову на її ріст: існують $r_i \in (1, \infty)$ та $\omega_i \in \mathcal{E}_\kappa(X)$ такі, що*

$$g^{r_i}(x) \leq \kappa(x, \omega_i) \quad \text{пр. вс. в } A_i. \quad (5.12)$$

Якщо, крім того, кожна множина A_i або компактна, або має скінченну ємність

$$C_\kappa(A_i) < \infty, \quad (5.13)$$

тоді клас $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ непорожній і широко компактний.

Зауваження 5.4. Стосовно формулювання теореми 5.4, зауважимо, що компактна множина $K \subset X$ може мати нескінченну ємність; ємність $C_\kappa(K)$ є необхідно скінченною, якщо ядро κ строго додатно визначене [49]. З іншого боку, навіть для ядра Ньютона множини зі скінченною ємністю можуть бути необмеженими [54].

Щоб довести теорему 5.4, ми показуємо, що кожна (мінімізуюча) узагальнена послідовність $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з властивістю $\lim_{s \in S} \|\mu_s\|_{\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})}^2 = [\text{сар}_\kappa \mathbf{A}]^{-1}$ є сильно фундаментальною. Тоді з теореми 5.3 випливає, що для деякого $\gamma \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ виконується $\mu_s \rightarrow \gamma$ сильно і широко. Очевидно, що γ є розв'язком $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачі тоді і тільки тоді, коли $\gamma \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$. Справедливість такого включення якраз і вдається довести при умовах на $g_i|_{A_i}$ та A_i , наведених у формулюванні теореми 5.4.

Зауважимо, що ці умови на A_i є істотними не тільки для доведення теореми 5.4, але і для її справедливості в цілому. Це випливає з наступного прикладу (див. [67, приклад 5.3]) та того факту (див. [60]), що у випадку (5.15) умова (5.13) не справджується.

Приклад 5.1. У $\mathbb{R}^3$ розглянемо ядро Кулона $\kappa(x, y) = |x - y|^{-1}$, і нехай $I^+ = \{1\}$, $I^- = \{2\}$, $\mathbf{g} = \mathbf{1}$, $\mathbf{a} = \mathbf{1}$. Нехай A_2 визначається як тіло обертання, що складається з усіх $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ таких, що $2 \leq x_1 < \infty$ та $0 \leq x_2^2 + x_3^2 \leq \rho(x_1)$, де $\rho(x_1) \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow \infty$, і нехай $A_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$. Розглянемо такі випадки:

$$\rho(r) = r^{-s}, \quad \text{де } s \in [0, \infty), \quad (5.14)$$

$$\rho(r) = \exp(-r^s), \quad \text{де } s \in (0, 1], \quad (5.15)$$

$$\rho(r) = \exp(-r^s), \quad \text{де } s > 1. \quad (5.16)$$

Тоді $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задача є розв'язною в обох випадках (5.14) і (5.16), але вона є нерозв'язною у випадку (5.15); див. [67].

Зауваження 5.5. Використовуючи фізичну термінологію, зазначений в цьому прикладі ефект нерозв'язності основної варіаційної задачі теорії ємностей конденсаторів можна інтерпретувати як витік частини заряду на нескінченність при спробі досягти рівноважного стану потенціалів. У звітний період цей несподіваний ефект, отриманий Н.В. Зорій чисто аналітичними методами, був проілюстрований чисельно в спільній роботі Н.В. Зорій з Н. Harbrecht та W.L. Wendland (див. [79, розділ 10]).

5.6 Дуальні варіаційні задачі

У зв'язку з відміченим в прикладі 5.1 ефектом нерозв'язності $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачі важливо було знайти постановки задач, *дуальних* до неї (і, отже, таких, що надавали б нові *еквівалентні* означення поняття ємності конденсатора), але тепер вже *завжди розв'язних* — наприклад, навіть для незамкнених конденсаторів з нескінченною кількістю пластин.

У роботі [67] розглядалися екстремальні задачі про мінімум енергій над певними підкласами напівметричного простору $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$, належним чином визначених. За постійних умов, сформульованих вище, ці варіаційні задачі виявилися дуальними до $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачі, але, на відміну від неї, вже завжди розв'язними. Розв'язки зазначених варіаційних задач є природним узагальненням добре відомого поняття внутрішньої рівноважної міри, асоційованої з множиною (див. [49]). Отримано опис цих розв'язків, їхніх потенціалів та відповідних рівноважних констант, доведено теореми про їхню єдиність та неперервність, виділено характеристичні властивості. Відсилаючи до роботи [67] за цими результатами у їхньому повному обсязі (див., наприклад, теореми 8.1, 8.2, 8.3, 10.1, 12.1, твердження 11.1, 11.2 та наслідки 8.3, 9.1, 9.2, 10.1 в [67]), для зручності читача ми наведемо їх тут лише у випадку, коли формулювання є максимально спрощеними та відчутними.

Припустимо для простоти, що $\overline{A_i}$, $i \in I$, взаємно не перетинаються, а ядро κ є строго додатно визначеним і, отже, довершеним.

Теорема 5.5. За зазначених умов ємність $\text{cap}_\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ альтернативно означається наступним співвідношенням:

$$\text{cap}_\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) = \inf_{\mu \in \Gamma_\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})} \kappa(\mu, \mu), \quad (5.17)$$

де $\Gamma_\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ складається з усіх $\mu \in \mathcal{E}_\kappa^+(\overline{\mathbf{A}})$ з властивістю

$$a_i \kappa_\mu^i(x) \geq c_i(\mu) g_i(x) \quad \text{пр.вс. в } A_i, \quad i \in I. \quad (5.18)$$

Тут $c_i(\mu) \in \mathbb{R}$, $i \in I$, — деякі залежні від μ константи, що задовольняють рівність

$$\sum_{i \in I} c_i(\mu) = 1. \quad (5.19)$$

Якщо, крім того, $0 < \text{cap}_\kappa \mathbf{A} < \infty$, то визначена співвідношенням (5.17) варіаційна задача, дуальна до основної, є завжди розв'язною, тобто існує $\gamma := \gamma_{\mathbf{A}} \in \Gamma_\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з мінімальною в цьому класі енергією:

$$\kappa(\gamma, \gamma) = \text{cap}_\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}).$$

Більш того, розв'язок γ дуальної варіаційної задачі (5.17) та числа $C_i := c_i(\gamma)$, $i \in I$, що задовольняють співвідношення (5.18) та (5.19) при $\mu = \gamma$, визначаються єдиним чином та задовольняють рівності

$$C_i = \frac{\alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma)}{\text{cap}_\kappa \mathbf{A}} = \inf_{x \in A_i} \frac{a_i \kappa_\gamma^i(x)}{g_i(x)}, \quad i \in I,$$

де позначення $\inf_{x \in A_i}$ означає, що точна нижня межа розглядається над всією множиною A_i за можливим винятком множини внутрішньої ємності нуль.

Міру $\gamma = \gamma_{\mathbf{A}}$ та числа $C_i(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) := C_i$, $i \in I$, що єдиним чином визначені теоремою 5.5 за умови $0 < \text{cap}_\kappa \mathbf{A} < \infty$, назовемо внутрішньою рівноважною мірою та внутрішніми рівноважними константами, асоційованими з $\mathbf{A}$ (відповідно до κ , $\mathbf{a}$ та $\mathbf{g}$).

У доповнення до співвідношення (5.18), векторний потенціал $\kappa_{\gamma_{\mathbf{A}}}(\cdot)$ внутрішньої рівноважної міри $\gamma_{\mathbf{A}}$ має наступні властивості. Позначимо через ∞_X точку Александрова для одноточкової компактифікації простору X .

Теорема 5.6. Нехай ядро κ неперервне на $A^+ \times A^-$ та $\kappa(\cdot, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty_X$ рівномірно на компактних множинах. Тоді

$$a_i \kappa_{\gamma_{\mathbf{A}}}^i(x) \leq C_i g_i(x) \quad \text{для всіх } x \in \text{supp } \gamma_{\mathbf{A}}^i, \quad i \in I,$$

і, отже,

$$a_i \kappa_{\gamma_{\mathbf{A}}}^i(x) = C_i g_i(x) \quad \text{пр.вс. в } A_i \cap \text{supp } \gamma_{\mathbf{A}}^i, \quad i \in I.$$

Крім того, внутрішня рівноважна міра та внутрішні рівноважні константи є неперервними функціями конденсатора. Щоб строго сформулювати цю важливу властивість, введемо наступні означення.

На множині $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(I^+, I^-)$ всіх (I^+, I^-) -конденсаторів в X введемо структуру часткової впорядкованості з допомогою відношення $\prec$, де $\mathbf{A} \prec \mathbf{A}'$ означає, що $A_i \subset A'_i$ для всіх $i \in I$. Тут $\mathbf{A}' = (A'_i)_{i \in I}$. Тоді, очевидно, $\text{сар}_\kappa \mathbf{A}$ є неспадною функцією конденсатора, тобто

$$\text{сар}_\kappa \mathbf{A} \leq \text{сар}_\kappa \mathbf{A}', \quad \text{якщо} \quad \mathbf{A} \prec \mathbf{A}'.$$

Нехай $\mathbf{A}_n = (A_i^n)_{i \in I}$, де $n \in \mathbb{N}$, та $\mathbf{A}$ — фіксовані (I^+, I^-) -конденсатори. Будемо писати $\mathbf{A}_n \uparrow \mathbf{A}$, якщо виконуються наступні дві умови: $\mathbf{A}_n \prec \mathbf{A}_{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та

$$A_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i^n \quad \text{для всіх} \quad i \in I.$$

Теорема 5.7. *Нехай або $g_{i,\inf} > 0$ для всіх $i \in I$, або простір X зліченний на нескінченності. Якщо $\mathbf{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, універсально вимірні та $\mathbf{A}_n \uparrow \mathbf{A}$, то*

$$\text{сар}_\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \text{сар}_\kappa(\mathbf{A}_n, \mathbf{a}, \mathbf{g}).$$

Припустимо, крім того, що $0 < \text{сар}_\kappa(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) < \infty$. Тоді

$$\gamma_{\mathbf{A}_n} \rightarrow \gamma_{\mathbf{A}} \quad \text{сильно та широко,}$$

$$C_i(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) = \lim_{n \in \mathbb{N}} C_i(\mathbf{A}_n, \mathbf{a}, \mathbf{g}) \quad \text{для всіх} \quad i \in I.$$

Зауваження 5.6. Теорема 5.7 залишається в силі, якщо $(\mathbf{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ замінити на частково впорядковану множину всіх компактних конденсаторів $\mathbf{K}$ таких, що $\mathbf{K} \prec \mathbf{A}$. Більш того, тоді припущення, що або $g_{i,\inf} > 0$ для всіх $i \in I$, або X є зліченим на нескінченності, є зайвим.

Зауваження 5.7. Якщо зчисленна множина індексів I зводиться до одного елемента, тобто $I = \{1\}$, то наведені вище теореми 5.5, 5.6, 5.7 є добре відомими (див. теореми 4.1 та 4.2 в [49]; тоді, звичайно, $C_1 = 1$). У загальному випадку зчисленного I властивості внутрішньої рівноважної міри $\gamma_{\mathbf{A}}$, асоційованої з конденсатором $\mathbf{A}$, є цілком подібними до відповідних властивостей внутрішньої рівноважної міри, асоційованої з множиною. Єдина суттєва відмінність полягає в тому, що виконується

$$\gamma_{\mathbf{A}}^i(X) \leq a_i \text{сар}_\kappa \mathbf{A} \quad \text{для всіх} \quad i \in I$$

і, на відміну від теорії ємностей множин, нерівність у цих співвідношеннях не є, взагалі кажучи, рівністю. Це спричинено згаданим вище феноменом нерозв'язності основної варіаційної задачі теорії ємностей конденсаторів.

Зауваження 5.8. Істотно зауважити, що всі згадані вище умови на ядро не є обтяжливими. Вони виконуються, наприклад, для ядер Ріса $|x - y|^{\alpha-n}$ (де $0 < \alpha < n$) та Гріна g_D (де D — регулярна відкрита множина, а g_D — її класична функція Гріна) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, якщо евклідова відстань між A^+ та A^- є строго додатною, а також для звуження логарифмічного ядра $-\log |x - y|$ в $\mathbb{R}^2$ на відкритий одиничний круг.

6 ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА ГАУССА У ЇІ КЛАСИЧНІЙ ПОСТАНОВЦІ

Результати даного розділу ґрунтуються на роботах [74, 78, 80]. У ньому ми притримуємося термінології, означень та позначень, прийнятих в попередньому розділі 5.

6.1 Постановка задачі

Нехай κ — додатно визначене ядро на локально компактному просторі X , $\mathbf{A} = (A_i)_{i \in I}$ — замкнений конденсатор зі зліченною кількістю пластин $A_i \subset X$ (див. означення 5.2), $\mathbf{g} = (g_i)_{i \in I}$ — векторнозначна функція з неперервними компонентами $g_i : X \rightarrow (0, \infty)$, $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ — числовий вектор з $a_i > 0$. Нехай $\mathfrak{M}^+(\mathbf{A}) = \prod_{i \in I} \mathfrak{M}^+(A_i)$ — випуклий конус усіх додатних векторних мір Радона, устаткований топологією широкої збіжності, а $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ — випуклий конус усіх $\boldsymbol{\mu} = (\mu^i)_{i \in I} \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{A})$ зі скінченною енергією $\kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})$, де $\kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu})$ задається формулою (5.2).

Нехай $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$ — векторнозначна функція, де $f_i : X \rightarrow [-\infty, \infty]$, $i \in I$, — зовнішні поля, що діють на заряди (міри), зосереджені на A_i . Тоді $\mathbf{f}$ -ваговий векторний потенціал та $\mathbf{f}$ -вагова енергія міри $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ відповідно означаються формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\mu &:= \kappa_\mu + \mathbf{f}, \\ G_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\mu}) &:= \kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\mu} \rangle. \end{aligned}$$

Всюди далі будемо вважати, що виконується один з наступних випадків:

- I. $f_i \in \Phi(X)$ для всіх $i \in I$;
- II. $f_i = \alpha_i \kappa(\cdot, \tau)$ для всіх $i \in I$, де $\tau \in \mathcal{E}_\kappa(X)$ — фіксована скалярна знакозмінна міра;
- III. $\mathbf{f} = \kappa \zeta$, де $\zeta \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ — фіксована векторна додатна міра.

Нехай $\mathcal{E}_{\mathbf{f}}^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ складається з усіх $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з $G_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\mu}) < \infty$, де $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ задано співвідношенням (5.7). Всюди надалі будемо вважати $\mathcal{E}_{\mathbf{f}}^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) \neq \emptyset$, що рівносильно нерівності

$$G_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) := \inf_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})} G_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\mu}) < \infty. \quad (6.1)$$

Зауважимо, що дякуючи зазначеному вибору $\mathbf{f}$, завжди виконується $G_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) > -\infty$ (див. [78, наслідок 6.1]). Необхідні та (або) достатні умови, при яких має місце (6.1), даються наступними двома твердженнями (див. [78, леми 6.2 та 6.3]).

Лема 6.1. Якщо має місце (6.1), то необхідно виконується

$$C_\kappa(\{x \in A_i : |f_i(x)| < \infty\}) \neq 0 \quad \text{для всіх } i \in I. \quad (6.2)$$

Якщо конденсатор $\mathbf{A}$ скінченний, то умови (6.1) і (6.2) рівносильні.

Лема 6.2. Якщо ж конденсатор $\mathbf{A}$ нескінченний, то нехай існують константи $M < \infty$ і $\delta > 0$, обоє незалежні від i , для яких

$$C_\kappa(\{x \in A_i : |f_i(x)| \leq M\}) > \delta \quad \text{для всіх } i \in I.$$

Тоді умова (5.9) достатня для виконання (6.1).

(Класична) *варіаційна задача Гаусса* полягає в знаходженні умов, що гарантують існування $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{A}, \mathbf{f}} \in \mathcal{E}_f^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з $G_f(\boldsymbol{\lambda}) = G_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$, вивченню питання єдиності $\boldsymbol{\lambda}$ та дослідженню властивостей екстремалей; див., зокрема, [50, 54, 56, 58].

Поряд з її очевидною фізичною інтерпретацією (і, отже, можливими застосуваннями до задач індустріальної математики), є добре відомими її застосування до задачі Діріхле і, отже, задачі вимітання (див. [54]), а також до конструктивної теорії функцій (див. роботи А.О. Гончара, Є. Рахманова, Е.В. Саф та їх послідовників та учнів).

У випадку, коли $\mathbf{A}$ є скінченим, компактним конденсатором, ядро κ неперервне на $A^+ \times A^-$, а для зовнішнього поля $\mathbf{f}$ виконується випадок I, варіаційна задача Гаусса була всебічно досліджена в трактаті [56]. При цьому існування її розв'язку $\boldsymbol{\lambda}$ легко доводилося на основі широкої компактності класу $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ та широкої напівнеперервності знизу функціонала Гаусса $G_f(\cdot)$ над $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$. Однак ці міркування втрачають чинність, якщо не виконується хоча б одне з перелічених тільки що припущень на $\mathbf{A}$, κ та $\mathbf{f}$. Дійсно, клас $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ не є широко компактним, якщо хоча б одна з пластин A_i , $i \in I$, є некомпактною, а функціонал $G_f(\cdot)$ не є широко напівнеперервним знизу, якщо або ядро κ не є неперервним на $A^+ \times A^-$, або ж для зовнішнього поля $\mathbf{f}$ виконується один з випадків II чи III.

Для розв'язання варіаційної задачі Гаусса при загальних умовах у звітний період був розроблений ефективний підхід, що ґрунтується на впровадженні теоремою 5.2 належної напівметричної структури над конусом $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ та доведенні теоремою 5.3 факту повноти напівметричного простору $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з успадкованою з $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ напівметрикою; тут $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$, як і раніше, задається формулою (5.11).

6.2 Про єдиність розв'язків варіаційної задачі Гаусса

Позначимо через $\mathfrak{S}_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ множину (можливо, порожню) всіх розв'язків варіаційної задачі Гаусса.

Лема 6.3. Якщо $\lambda, \hat{\lambda} \in \mathfrak{S}_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$, то λ та $\hat{\lambda}$ належать одному класу еквівалентності в $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ (тобто $\|\lambda - \hat{\lambda}\|_{\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})} = 0$) і, отже,

$$W_\lambda(x) = W_{\hat{\lambda}}(x) \quad \text{пр. вс. в } X. \quad (6.3)$$

Дійсно, стандартні міркування, що використовують випуклість класу допустимих мір $\mathcal{E}_f^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ та правило паралелограма, застосованого до $R\lambda$ і $R\hat{\lambda}$, елементів передгільбертового простору $\mathcal{E}_\kappa(X)$ (див. лему 5.1), показують, що $R\lambda$ і $R\hat{\lambda}$ еквівалентні в $\mathcal{E}_\kappa(X)$, що в силу теореми 5.2 про ізоморфізм напівметричного простору $\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})$ та його R -образу доводять перше твердження леми 6.3. Оскільки тоді $\kappa(x, R\lambda) = \kappa(x, R\hat{\lambda})$ (див. [49]), співвідношення (6.3) випливає з (5.4).

Зауважимо також, що довільні два розв'язки варіаційної задачі Гаусса співпадають, якщо ядро κ строго додатно визначене, а множини A_i , $i \in I$, попарно диз'юнктні.

6.3 Опис $\mathbf{f}$ -вагових потенціалів розв'язків задачі Гаусса

Відсилаючи до [78, розділ 7] (див. там теореми 7.1, 7.2, 7.3 та наслідки 7.1, 7.2) за всебічним вивченням $\mathbf{f}$ -вагових потенціалів розв'язків варіаційної задачі Гаусса, обмежимося цитуванням наступного отриманого там твердження.

Теорема 6.1. Для кожного $\lambda_{\mathbf{A}} \in \mathfrak{S}_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ існує числовий вектор $(C_{\mathbf{A}}^i)_{i \in I}$, що задовольняє такі два співвідношення:

$$a_i W_{\lambda_{\mathbf{A}}}^i(x) \geq C_{\mathbf{A}}^i g_i(x) \quad \text{пр. вс. в } A_i, \quad i \in I, \quad (6.4)$$

$$G_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) \leq \sum_{i \in I} C_{\mathbf{A}}^i + \langle \mathbf{f}, \lambda_{\mathbf{A}} \rangle. \quad (6.5)$$

Більш того, співвідношення (6.4) та (6.5) визначають однозначно розв'язки варіаційної задачі Гаусса серед усіх допустимих мір, а вектор $(C_{\mathbf{A}}^i)_{i \in I}$ є єдиним та не залежить від вибору $\lambda_{\mathbf{A}} \in \mathfrak{S}_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$. Тобто, якщо $\mu \in \mathcal{E}_f^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ — така довільна допустима міра, що для деякого числового вектора $(c_i)_{i \in I}$ виконуються співвідношення (6.4) та (6.5) з μ та c_i замість $\lambda_{\mathbf{A}}$ та $C_{\mathbf{A}}^i$, відповідно, то

$$\mu = \lambda_{\mathbf{A}} \quad \text{та} \quad c_i = C_{\mathbf{A}}^i, \quad i \in I.$$

Припустимо тепер, що ядро κ неперервне на $A^+ \times A^-$ та задовольняє умову (5.10), для зовнішнього поля $\mathbf{f}$ справджується випадок I, а $\mathbf{g}$ та $\mathbf{a}$ такі, що має місце (5.9). Тоді

$$a_i W_{\lambda_{\mathbf{A}}}^i(x) \leq C_{\mathbf{A}}^i g_i(x) \quad \text{для всіх } x \in \text{supp } \lambda_{\mathbf{A}}, \quad i \in I,$$

а тому

$$a_i W_{\lambda_{\mathbf{A}}}^i(x) = C_{\mathbf{A}}^i g_i(x) \quad \text{нр. вс. в } \text{supp } \lambda_{\mathbf{A}}^i, \quad i \in I.$$

Назвемо $C_{\mathbf{A}}^i$, $i \in I$, **f**-ваговими рівноважними константами. Як впливає з першої частини теореми 6.1, для них справджується формула

$$C_{\mathbf{A}}^i = \langle W_{\lambda_{\mathbf{A}}}^i, \lambda_{\mathbf{A}}^i \rangle = \inf_{x \in A_i} \frac{a_i W_{\lambda_{\mathbf{A}}}^i(x)}{g_i(x)}, \quad i \in I.$$

6.4 Достатні умови існування розв'язків задачі Гаусса. Неперервність розв'язків та **f**-вагових рівноважних констант

До кінця розділу 6 вважаємо, що ядро κ узгоджене (див. означення 5.1) і або $I^- = \emptyset$, або κ , **g**, **a** та **A** задовольняють умови (5.9) та (5.10).

Теорема 6.2. *Нехай для кожного $i \in I$ функція $g_i|_{A_i}$ або обмежена зверху, або задовольняє умову (5.12) для деяких $r_i \in (1, \infty)$ та $\omega_i \in \mathcal{E}_{\kappa}(X)$, а множина A_i або є компактною, або її ємність $C_{\kappa}(A_i)$ скінченна. Тоді в кожному з випадків I, II чи III клас усіх розв'язків варіаційної задачі Гаусса $\mathfrak{S}_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ є непорожнім і широко компактным.*

Доведення теореми 6.2 ґрунтується на теоремі 5.3 про сильну повноту напівметричного простору $\mathcal{E}_{\kappa}^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$. Дійсно, оскільки кожна (мінімізуюча) послідовність $\mu_k \in \mathcal{E}_{\mathbf{f}}^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$, $k \in \mathbb{N}$, з $\lim_{k \rightarrow \infty} G_{\mathbf{f}}(\mu_k) = G_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ є сильно фундаментальною, вона згідно з теоремою 5.3 сильно збігається до кожної своєї широкої граничної точки $\mu_0 \in \mathcal{E}_{\kappa}^+(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$. При цьому

$$G_{\mathbf{f}}(\mu_0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} G_{\mathbf{f}}(\mu_k) = G_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}),$$

бо функціонал Гаусса $G_{\mathbf{f}}$ є сильно неперервним на $\mathcal{E}_{\kappa}^+(\mathbf{A})$ у випадках II та III та широко напівнеперервним знизу у випадку I. Отже, щоб довести включення $\mu_0 \in \mathfrak{S}_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$, досить переконатися в рівностях $\langle g_i, \mu_0^i \rangle = a_i$, $i \in I$, що і вдається зробити при умовах, наведених у теоремі 6.2. Див. [78, розділ 11.2] щодо цих та інших деталей доведення.

Натупні два приклади показують, що зроблене в теоремі 6.2 припущення, що кожна A_i або є компактною, або має ємність $C_{\kappa}(A_i) < \infty$, є істотним для її справедливості.

Приклад 6.1. В $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, розглянемо ядро Ріса $\kappa_{\alpha}(x, y) = |x - y|^{\alpha - n}$ порядку $\alpha \in (0, 2]$, $\alpha < n$. Нехай $I^+ = \{1\}$, $I^- = \{2\}$, **g** = **1**, $C_{\kappa_{\alpha}}(A_i) > 0$ для всіх $i = 1, 2$. З метою спрощення формулювання вважаємо, що A_1 є компактною множиною, а $A_2^c := \mathbb{R}^n \setminus A_2$ — зв'язною. Припустимо, що для зовнішнього

поля $\mathbf{f}$ виконується випадок II з мірою $\tau \geq 0$, що має компактний носій $\text{supp } \tau \subset A_2^c$ та задовольняє умову

$$a_1 + \tau(\mathbb{R}^n) = a_2.$$

Тоді варіаційна задача Гаусса є нерозв'язною тоді і тільки тоді, коли A_2 має нескінченну κ_α -ємність, але є α -тонкою в точці Александрова $\infty_{\mathbb{R}^n}$.

Нагадаємо, що замкнена множина $F \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, називається α -тонкою в точці $\infty_{\mathbb{R}^n}$, якщо F^* , отримана з F інверсією відносно $S(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ є α -тонкою в $x = 0$ (див. [42, 54]). При $\alpha = 2$, $n \geq 3$, це означення належить М. Brelot [42], а при $\alpha \in (0, 2)$, $n \geq 2$, — Н.В. Зорій [61]. Зауважимо також, що приклад множини з нескінченною ньютонівською ємністю, але 2-тонкої в $\infty_{\mathbb{R}^n}$, наведено в [60].

Приклад 6.2. Прийmemo умови та позначення прикладу 6.1. У $\mathbb{R}^3$ розглянемо ядро Кулона $\kappa(x, y) = |x - y|^{-1}$, і нехай A_i , $i = 1, 2$, — такі, як в прикладі 5.1. Тоді множина A_2 не є 2-тонкою в $\infty_{\mathbb{R}^n}$ за умови (5.14), є 2-тонкою в $\infty_{\mathbb{R}^n}$, однак має нескінченну (ньютонівську) ємність за умови (5.15), та має скінченну ємність за умови (5.16) (див. [60]). Отже, згідно з прикладом 6.1, варіаційна задача Гаусса є нерозв'язною за умови (5.15) та є розв'язною за кожної з умов (5.14) чи (5.16).

Наступні два твердження цього підрозділу досліджують неперервність екстремалей в варіаційній задачі Гаусса при апроксимації конденсатора $\mathbf{A}$.

Нехай $\prec$ позначає відношення часткової впорядкованості на множині $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(I^+, I^-)$ всіх (I^+, I^-) -конденсаторів в локально компактному просторі X , означене в розділі 5.6. Очевидно, $G_{\mathbf{f}}(\cdot, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ є незростаючою функцією, тобто при фіксованих $\mathbf{f}$, $\mathbf{a}$ та $\mathbf{g}$

$$G_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) \leq G_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}', \mathbf{a}, \mathbf{g}), \quad \text{якщо } \mathbf{A}' \prec \mathbf{A}.$$

Теорема 6.3. *Нехай κ , $\mathbf{A}$, $\mathbf{a}$ та $\mathbf{g}$ задовольняють всі умови теореми 6.2, а для $\mathbf{f}$ виконується один з випадків II чи III. Нехай існує послідовність конденсаторів $\mathbf{A}_k = (A_i^k)_{i \in I} \in \mathfrak{C}(I^+, I^-)$, $k \in \mathbb{N}$, що зростає до $\mathbf{A}$, тобто*

$$\mathbf{A}_k \prec \mathbf{A}_{k+1} \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{N}, \quad A_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_i^k \quad \text{для всіх } i \in I,$$

і нехай для деякого $k_0 \in \mathbb{N}$ виконується⁴

$$G_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}_{k_0}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) < \infty. \tag{6.6}$$

Тоді

$$G_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) = \lim_{k \rightarrow \infty} G_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}_k, \mathbf{a}, \mathbf{g}).$$

⁴Зауважимо, що кожний $\mathbf{A} \in \mathfrak{C}$ може бути апроксимований зростаючою послідовністю $\mathbf{A}_k \in \mathfrak{C}$, $k \in \mathbb{N}$, якщо X злічений на нескінченності. Достатні умови для виконання нерівності (6.6) даються лемою 6.2 з $\mathbf{A}_{k_0}$ замість $\mathbf{A}$.

Виберемо довільно $\lambda_k := \lambda_{\mathbf{A}_k} \in \mathfrak{S}_f(\mathbf{A}_k, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ для всіх $k \geq k_0$ (такі λ_k існують). Тоді кожна широка гранична точка λ послідовності $(\lambda_k)_{k \geq k_0}$ належить до $\mathfrak{S}_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$. Більш того, $\lambda_k \rightarrow \lambda$ сильно, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_k - \lambda\|_{\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A})} = 0.$$

Неперервними є також $\mathbf{f}$ -вагові рівноважні константи, тобто

$$\lim_{\mathbf{A}_k \uparrow \mathbf{A}} C_{\mathbf{A}_k}^i = C_{\mathbf{A}}^i, \quad i \in I.$$

Теорема 6.4. Розглянемо частково впорядковану множину конденсаторів $\mathbf{A}_s = (A_i^s)_{i \in I} \in \mathfrak{C}$, $s \in S$ (де S — узагальнена послідовність), що спадає до $\mathbf{A}$, тобто

$$\mathbf{A}_{s_2} \prec \mathbf{A}_{s_1} \quad \text{для всіх } s_1 \leq s_2, \quad \bigcap_{s \in S} A_i^s = A_i \quad \text{для всіх } i \in I,$$

і припустимо, що для деякого $s_0 \in S$ виконуються всі умови теореми 6.2 для $\mathbf{A}_{s_0}$ замість $\mathbf{A}$. Тоді у кожному з випадків I, II, чи III,

$$G_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) = \lim_{s \in S} G_f(\mathbf{A}_s, \mathbf{a}, \mathbf{g}).$$

Виберемо довільно $\lambda_s := \lambda_{\mathbf{A}_s} \in \mathfrak{S}_f(\mathbf{A}_s, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ для всіх $s \geq s_0$ (такі λ_s існують). Тоді кожна широка гранична точка λ узагальненої послідовності $(\lambda_s)_{s \geq s_0}$ належить множині $\mathfrak{S}_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$. Більш того, $\lambda_s \rightarrow \lambda$ сильно, тобто

$$\lim_{s \in S} \|\lambda_s - \lambda\|_{\mathcal{E}_\kappa^+(\mathbf{A}_{s_0})} = 0.$$

Також $\mathbf{f}$ -вагові рівноважні константи є неперервними коли $\mathbf{A}_s \downarrow \mathbf{A}$, тобто

$$\lim_{s \in S} C_{\mathbf{A}_s}^i = C_{\mathbf{A}}^i, \quad i \in I.$$

Зауваження 6.1. При умовах теореми 6.3, якщо ядро κ строго додатно визначене, а всі A_i , $i \in I$, взаємно диз'юнктні, то (єдина) рівноважна міра $\lambda_{\mathbf{A}_k}$ прямує (коли $\mathbf{A}_k \uparrow \mathbf{A}$) до (єдиної) рівноважної міри $\lambda_{\mathbf{A}}$ одночасно в сильній і широкій топологіях. Аналогічне зауваження справедливе щодо апроксимації $\mathbf{A}_s \downarrow \mathbf{A}$ і теореми 6.4.

6.5 Критерій розв'язності варіаційної задачі Гаусса

Результати цього підрозділу ґрунтуються на роботах [74, 80].

Нехай, для простоти, ядро κ строго додатно визначене, для зовнішнього поля виконується випадок II з $\tau \in \mathcal{E}_\kappa(X)$, а $g_i = g_j =: g$ для всіх $i \neq j$, де g обмежена зверху. Тоді, згідно з теоремою 6.2, при умові, що кожна A_i , $i \in I$, має скінченну ємність, варіаційна задача Гаусса є розв'язною для всіх

нормуючих векторів $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$. У той же час приклади 6.1 та 6.2 показують, що висновок теореми 6.2 втрачає силу, якщо $L \neq \emptyset$, де L містить усі $\ell \in I$ з $C_\kappa(A_\ell) = \infty$.

Тому природньою є наступна задача: *при фіксованих κ , $\mathbf{A}$, g та τ дати опис множини $\mathcal{S}_\kappa(\mathbf{A}, g, \tau)$ усіх $\mathbf{a}$, для яких відповідна варіаційна задача Гаусса має розв'язок*. Відповідь на неї сформульована теоремами 7.2 та 7.3 з [80]; вона дається у термінах розв'язку певної допоміжної екстремальної задачі, тісно пов'язаної з оператором ортогонального проектування в передгільбертовому просторі $\mathcal{E}_\kappa(X)$ на випуклий конус $\mathcal{E}_\kappa^+\left(\bigcup_{\ell \in L} A_\ell\right)$ усіх додатних скалярних мір зі скінченною енергією, зосереджених на $\bigcup_{\ell \in L} A_\ell$. У випадку, коли $L = \{\ell\}$, отриманий опис множини $\mathcal{S}_\kappa(\mathbf{A}, g, \tau)$ є вичерпним.

З метою більшої ілюстративності, наведемо його у частковому випадку ядра Ріса $\kappa_\alpha(x, y) = |x - y|^{\alpha-n}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, порядку $\alpha \in (0, 2]$, $\alpha < n$, де згаданий оператор ортогонального проектування на $\mathcal{E}_\kappa^+(A_\ell)$ зводиться до оператора рісового вимітання $\beta_{A_\ell}^\alpha$ на A_ℓ . Нагадаємо, що оператор $\beta_{A_\ell}^\alpha$ пов'язаний з α -функцією Гріна $g_{A_\ell^c}^\alpha$ (відкритої) множини $A_\ell^c := \mathbb{R}^n \setminus A_\ell$ формулою [54]

$$g_{A_\ell^c}^\alpha(x, y) := \kappa_\alpha(x, \varepsilon_y) - \kappa_\alpha(x, \beta_{A_\ell}^\alpha \varepsilon_y), \quad x, y \in A_\ell^c,$$

де ε_y — одинична міра Дірака в точці y .

Теорема 6.5. *Нехай $A_i \cap A_\ell = \emptyset$ для всіх $i \neq \ell$, $C_{\kappa_\alpha}(A_i) > \delta > 0$ для всіх $i \in I$, а τ має компактний носій в A^c . Тоді множина $\mathcal{S}_{\kappa_\alpha}(\mathbf{A}, g, \tau)$ складається з усіх $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ з властивістю*

$$0 < a_\ell \leq \left\langle g, \beta_{A_\ell}^\alpha \left(\tau + \sum_{i \neq \ell} \alpha_i \xi^i \right) \right\rangle,$$

де $(\xi^i)_{i \neq \ell}$ — розв'язок (він існує і єдиний) задачі мінімізації $g_{A_\ell^c}^\alpha$ -грінової енергії

$$\left\| \tau + \sum_{i \neq \ell} \alpha_i \mu^i \right\|_{g_{A_\ell^c}^\alpha}^2$$

над класом всіх векторних мір $(\mu^i)_{i \neq \ell}$ таких, що кожна μ^i , $i \neq \ell$, зосереджена на A_i та нормована умовою $\langle g, \mu^i \rangle = a_i$.

Зауважимо, що кожна з компонент a_i , $i \neq \ell$, вектора $\mathbf{a} \in \mathcal{S}_{\kappa_\alpha}(\mathbf{A}, g, \tau)$ пробігає всю множину $\mathbb{R}_+$, що зумовлено умовою $C_{\kappa_\alpha}(A_i) < \infty$, $i \neq \ell$.

7 ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА ГАУССА В МАЖОРАНТНІЙ ПОСТАНОВЦІ Є. РАХМАНОВА

Ми користуємося позначеннями та означеннями з розділів 5 та 6. Наведені у цьому розділі результати отримано в [68].

Як і раніше, розглядається додатно визначене ядро κ у локально компактному просторі X . У цьому розділі $I = \{1\}$, тобто конденсатор $\mathbf{A}$ складається з однієї множини $A := A_1$, що вважається замкненою. Позначимо $g := g_1$, $f := f_1$, $\mathcal{E}_\kappa^+(A, g) := \mathcal{E}_\kappa^+(A, 1, g)$ та $\mathcal{E}_f^+(A, g) := \mathcal{E}_f^+(A, 1, g)$.

Для міри $\sigma \in \mathfrak{M}^+(A)$ такої, що $\langle g, \sigma \rangle > 1$, вивчено задачу мінімізації функціонала $G_f(\cdot)$ над класом $\mathcal{E}_f^\sigma(A, g) := \{\mu \in \mathcal{E}_f^+(A, g) : \mu \leq \sigma\}$, відомої як варіаційна задача Гаусса в мажорантній постановці Є. Рахманова [57]. Тут і надалі $\mu \leq \sigma$ означає, що $\sigma - \mu \geq 0$. При умові

$$G_f^\sigma(A, g) := \inf_{\mu \in \mathcal{E}_f^\sigma(A, g)} G_f(\mu) < \infty \quad (7.1)$$

доведено теореми про існування та єдиність міри $\lambda = \lambda_A^\sigma \in \mathcal{E}_f^\sigma(A, g)$ такої, що $G_f(\lambda_A^\sigma) = G_f^\sigma(A, g)$, вивчено властивості її неперервності у широкій та сильній топологіях, коли σ та A змінюються одночасно, дано опис f -вагового потенціалу розв'язку λ_A^σ , виділено його характеристичні властивості. Такі результати є новими навіть для класичних ядер в $\mathbb{R}^n$, що істотно для застосувань до задач конструктивної теорії функцій та індустріальної математики.

При $X = \mathbb{R}^2$, $\kappa(x, y) = -\log|x - y|$, $g = 1$ та додаткових умовах на ріст зовнішнього поля $f \in \Phi(\mathbb{R}^2)$ на нескінченності, ця задача вивчалася P.D. Dragnev, E.B. Saff та Є. Рахмановим (див. [46, 57]). Методи, розвинені нами за звітний період з метою аналізу задачі мінімізації f -вагової енергії, та отримані результати істотно відрізняються від відповідних методів та результатів з [46, 57]. А саме, наш підхід ґрунтується на одночасному використанні як широкої, так і сильної топологій у передгільбертовому просторі $\mathcal{E}$, що дозволило нам в обох випадках, I та II, встановити існування рівноважної міри λ_A^σ для некомпактної множини A та вивчити властивості неперервності рівноважної міри λ_A^σ як функції від двох змінних (A, σ) . Ми також отримали варіаційні нерівності для f -вагових потенціалів W_λ^f та виділили їхні характеристичні властивості.

Для спрощення формулювання результатів припустимо, що або простір X злічений на нескінченності, або $\inf_{x \in X} g(x) > 0$.

Теорема 7.1. *Нехай ядро κ довершене, а ємність $C_\kappa(A)$ скінченна. Крім того, нехай функція g або обмежена, або виконується умова (5.12) на її ріст на нескінченності. Тоді справедливі наступні твердження:*

- (а) *Існує єдина рівноважна міра λ_A^σ .*

- (b) Нехай A_s , $s \in S$, — частково впорядкована по відношенню включення, спадна сім'я замкнених множин таких, що $C(A_s) < \infty$ для усіх $s \in S$ та

$$\bigcap_{s \in S} A_s = A,$$

а $\sigma_s \in \mathfrak{M}^+(A_s)$, $s \in S$, — узагальнена послідовність мір, яка спадає і широко збігається до σ . Тоді

$$G_f^\sigma(A, g) = \lim_{s \in S} G_f^{\sigma_s}(A_s, g),$$

$$\lambda_{A_s}^{\sigma_s} \rightarrow \lambda_A^\sigma \quad \text{сильно та широко.}$$

- (c) Нехай $\{K\}$ — частково впорядкована по відношенню включення, зростаюча сім'я всіх компактних підмножин з A . Тоді існує спадна до 1 узагальнена послідовність $(\beta_K^*)_{K \in \{K\}} \subset (1, \infty)$ така, що для всіх $\beta_K \in [1, \beta_K^*]$ виконується

$$G_f^\sigma(A, g) = \lim_{K \uparrow A} G_f^{\beta_K \sigma_K}(K, g). \quad (7.2)$$

Крім того, $\lambda_K^{\beta_K \sigma_K} \rightarrow \lambda_A^\sigma$ сильно та широко.

У наступній теоремі припустимо, що $\sigma_K \in \mathcal{E}_\kappa$ для кожної компактної множини $K \subset A$ і $\langle g, \sigma_{A_0} \rangle > 1$, де $A_0 := \{x \in A : f(x) < \infty\}$. Тоді необхідно виконується умова (7.1), оскільки існує компакт $K_0 \subset A_0$ з $\sigma_{K_0} / \langle g, \sigma_{K_0} \rangle \in \mathcal{E}_f^\sigma(A, g)$; див. [46, 65].

Справедливі наступні властивості f -вагового потенціалу $W_{\lambda_A^\sigma}^f$ рівноважної міри λ_A^σ , які до того ж є характеристичними, тобто визначають λ_A^σ однозначним чином.

Теорема 7.2. Нехай для зовнішнього поля f виконується випадок I. Тоді міра $\lambda \in \mathcal{E}_f^\sigma(A, g)$ є рівноважною мірою λ_A^σ тоді і тільки тоді, коли для деякого $w_\lambda \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\begin{aligned} W_\lambda^f(x) &\geq w_\lambda g(x) \quad (\sigma - \lambda)\text{-майже всюди,} \\ W_\lambda^f(x) &\leq w_\lambda g(x) \quad \text{для всіх } x \in \text{supp } \lambda. \end{aligned}$$

Доведення теореми 7.1 базується на наступній теоремі про сильну повноту певних топологічних підпросторів передгільбертового простору $\mathcal{E}_\kappa(X)$.

Теорема 7.3. Нехай виконуються умови теореми 7.1. Тоді топологічний підпростір $\mathcal{E}_\kappa^+(A, g)$ простору $\mathcal{E}_\kappa(X)$ є сильно повним. Більш детально, кожна сильно фундаментальна узагальнена послідовність $(\nu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}_\kappa^+(A, g)$ збігається сильно і широко до єдиної міри $\nu_0 \in \mathcal{E}_\kappa^+(A, g)$. Якщо тепер $\sigma_0 \in \mathfrak{M}^+(A)$ — фіксована міра, то тоді це ж твердження виконується для $\{\nu \in \mathcal{E}_\kappa^+(A, g) : \nu \leq \sigma_0\}$.

Результати цього розділу можуть бути узагальнені на випадок конденсаторів зі зчисленною кількістю пластин, що ми плануємо зробити у наступний звітний період.

8 ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА ГАУССА З ЯДРОМ РІСА НАД ЛІПШИЦЕВИМИ МНОГОВИДАМИ

Ми користуємося позначеннями та означеннями з розділів 5 та 6. Наведені у цьому розділі результати отримано в [73, 79].

Всюди далі Γ_i , $i \in I$, — скінченний набір компактних $(n - 1)$ -розмірних многовидів без краю в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, що не перетинаються та задовольняють умову Ліпшиця, а $\kappa_\alpha(x, y)$ — ядро Ріса $|x - y|^{\alpha-n}$ порядку $\alpha \in (1, n)$. Приписуючи кожному Γ_i знак α_i , де α_i приймає значення $+1$ або -1 , отримаємо конденсатор $\mathbf{A} = (\Gamma_i)_{i \in I}$. Зафіксуємо числовий вектор $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ з $a_i > 0$ та векторнозначну функцію $\mathbf{g} = (g_i)_{i \in I}$, де g_i — неперервна додатна функція на Γ_i , і далі визначимо класи мір $\mathcal{E}_{\kappa_\alpha}^+(\mathbf{A})$ та $\mathcal{E}_{\kappa_\alpha}^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ тими ж співвідношеннями, як і в розділі 5. Нагадаємо, що ці класи утворюють випуклі конуси; в силу строгої додатної визначеності ядра Ріса вони можуть трактуватися як метричні простори з метрикою, заданою співвідношенням (5.6).

Якщо, додатково, $\mathbf{f} = (f_i)_{i \in I}$, де $f_i : \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервні функції, що задають зовнішні поля, то розглянемо функціонал Гаусса $G_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\mu}) = \kappa_\alpha(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) + 2\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\mu} \rangle$, відомий також під назвою $\mathbf{f}$ -вагової енергії Ріса (див. розділ 7), та варіаційну задачу Гаусса, що полягає в знаходженні $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{E}_{\kappa_\alpha}^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з мінімальною $\mathbf{f}$ -ваговою енергією:

$$G_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}_{\kappa_\alpha}^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})} G_{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\mu}) =: G_{\mathbf{f}}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}). \quad (8.1)$$

Зауважимо, що за зазначених умов розв'язок $\boldsymbol{\lambda}$ існує і єдиний, що впливає з строгої додатної визначеності ядра Ріса, випуклості і широкої компактності класу допустимих мір $\mathcal{E}_{\kappa_\alpha}^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ та широкої напівнеперервності знизу функціонала $G_{\mathbf{f}}$ на $\mathcal{E}_{\kappa_\alpha}^+(\mathbf{A})$.

У сумісних з Н. Harbrecht та W.L. Wendland роботах [73, 79] побудовано конструктивний та чисельний алгоритми знаходження розв'язку $\boldsymbol{\lambda}$ варіаційної задачі Гаусса. Це стало можливим дякуючи доведень там теоремі про еквівалентність варіаційної задачі Гаусса над многовидами Ліпшиця задачі мінімізації у просторі Соболева–Слободецького $H^{\varepsilon/2}(\Gamma)$, де $\varepsilon := \alpha - 1$ і $\Gamma := \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ (див. наведену нижче теорему 8.2), що в свою чергу базується на опису мір $\omega \in \mathcal{E}_{\kappa_\alpha}(\Gamma)$ в термінах узагальнених функцій $\Omega \in H^{-\varepsilon/2}(\Gamma)$, даному наступною теоремою 8.1. (Тут ми користуємося позначеннями, прийнятими в [52].)

Теорема 8.1. *Нехай борелева міра $\omega \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ має скінченну α -рісову енергію:*

$$\kappa_\alpha(\omega, \omega) = \int |x - y|^{\alpha-n} d(\omega \otimes \omega)(x, y) = \|\omega\|_{\kappa_\alpha}^2 < \infty,$$

де $\alpha \in (1, n)$. Тоді існує єдина узагальнена функція $\Omega \in H^{-\varepsilon/2}(\Gamma)$ з властивостями

$$\omega(\varphi) = \int_{\Gamma} \varphi d\omega = (\varphi, \Omega)_{L_2(\Gamma)} \quad \text{для всіх } \varphi \in C^\infty(\Gamma),$$

де $C^\infty(\Gamma)$ — множина звужень на Γ всіх елементів з $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Більш того, α -рісові енергії для ω та Ωds (де ds — поверхнева міра на Γ) співпадають, тобто

$$\|\omega\|_{\kappa_\alpha}^2 = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |x - y|^{\alpha-n} \Omega(x) ds(x) \Omega(y) ds(y).$$

Нехай $g_i \in C(\Gamma_i) \cap H^{\varepsilon/2}(\Gamma_i)$ для кожного $i \in I$. Щоб визначити задачу мінімізації в $H^{-\varepsilon/2}(\Gamma)$, дуальну до початкової задачі (8.1), розглянемо в $H^{-\varepsilon/2}(\Gamma)$ конус

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) := \left\{ \Theta = \sum_{i \in I} \alpha_i \Theta^i, \quad \text{де } \Theta^i \in H^{-\varepsilon/2}(\Gamma_i), \right. \\ \left. \Theta^i \geq 0 \quad \text{та} \quad \int_{\Gamma_i} g_i \Theta^i ds = a_i \quad \text{для всіх } i \in I \right\}. \end{aligned}$$

Якщо $f_i \in C(\Gamma_i) \cap H^{\varepsilon/2}(\Gamma_i)$, то для кожного $\Theta \in \mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ позначимо

$$V_f(\Theta) := \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |x - y|^{\alpha-n} \Theta(x) ds(x) \Theta(y) ds(y) + 2 \sum_{i \in I} (f_i, \Theta^i)_{L_2(\Gamma_i)}.$$

Теорема 8.2. Нехай $f_i, g_i \in C(\Gamma_i) \cap H^{\varepsilon/2}(\Gamma_i)$ для кожного $i \in I$. Тоді розв'язок $\lambda \in \mathcal{E}_{\kappa_\alpha}^+(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ варіаційної задачі Гаусса (8.1) визначає єдиний елемент $\Lambda \in \mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з властивостями

$$R\lambda(\varphi) = (\varphi, \Lambda)_{L_2(\Gamma)} \quad \text{для всіх } \varphi \in C^\infty(\Gamma),$$

$$V_f(\Lambda) = G_f(\lambda) = G_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}).$$

Більш того, Λ є розв'язком задачі мінімізації функціонала V_f над $\mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$, тобто

$$V_f(\Lambda) = \min_{\Theta \in \mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})} V_f(\Theta).$$

У випадку двох многовидів еквівалентна задача зводиться до нелінійної системи граничних інтегральних рівнянь для потенціалу простого шару. Для її розв'язання застосовано чисельний метод, що використовує розбиття Бубнова–Галеркіна з кусково-постійними граничними елементами з максимальним діаметром розбиття h . Доведена збіжність до Λ і $G_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ при $h \rightarrow 0$, отримані оцінки відхилення від Λ і $G_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ при $h > 0$.

ВИСНОВКИ

Протягом звітнього періоду співробітниками відділу було зроблено значний внесок у розвиток методів математичної фізики для дослідження складних систем, що описують неперервні та ґратчасті моделі теорії твердого тіла, статистичної механіки, моделі економічної, екологічної та біологічної еволюції, сконструйовані нові моделі таких систем та проведені комплексні дослідження їх властивостей. Отримані результати строго математично обґрунтовані і носять теоретичний характер. Наукові дослідження проведені на рівні світових досягнень сучасної математичної фізики та апробовані на міжнародних конференціях в Україні та за її кордонами.

В 2011 році О.Л.Ребенко виступив на семінарі університету Лінчопінга, Швеція та прийняв участь в обговоренні питань сучасної математичної фізики з вченими цього університету, а Н.В.Зорій з метою наукового співробітництва та організації воркшопу "Задачі про мінімум енергії" за участю вчених з Австрії, Германії, США два рази відвідала університет Штутгарта (Германія), а також прийняла участь в наступних міжнародних заходах:

Conference on Computational Complex Analysis and Approximation Theory, Protaras (Cyprus), June 5–11, 2011;

XVIth Conference on Analytic Functions and Related Topics, Chelm (Poland), June 26–29, 2011;

Israeli-Polish Mathematical Meeting, Lodz (Poland), September 12–15, 2011;

International Symposium "Partial Differential Equations: Theory, Applications, Simulations Stuttgart (Germany), October 6–8, 2011;

Професор університету Штутгарта (Германія) В. Вендланд, як гість, відвідав Інститут математики і виступив на семінарі.

В 2012 році О.Л.Ребенко зробив доповідь на XVII Міжнародному конгресі з математичної фізики в Ольборгу (Данія), 6-11 Серпня, 2012 р. (XVII-th International Congress on Mathematical Physics, August 6-11, 2012) на тему "Cell gas model of classical statistical mechanics Н.В. Зорій прийняла участь та виступила з 40-хвилинними доповідями на трьох міжнародних конференціях, а саме:

workshop "Задачі про мінімум енергії Університет Штутгарта (Німеччина), 12-16 серпня 2012 року;

"Оптимальні конфігурації на решітках та многовидах Інститут Обервольфаха (Німеччина), 19-25 серпня 2012 року;

Конференція до 120-річчя з дня народження Банаха, Львів, 17-21 вересня 2012 року.

Також 40-хвилинну доповідь на Конференції до 120-річчя з дня народження Банаха зробив В.Д.Кошманенко.

Н.В. Зорій отримала диплом Міжнародної академії рейтингових технологій і соціології "Золота Фортуна".

В 2013 році Н.В. Зорій отримала підтримку гранта Саймона (США) та програми Scholar-in-Residence при Університеті Форт Вейна (США) для участі запрошеним лектором в роботі Річного колоквиуму з математичного аналізу при Університеті Форт Вейна (листопад 2013 року). Виступила там з доповіддю, продовжила спільні дослідження з Р. Dragnev (University of Fort Wayne) та Н. Hardin, Е. Saff (Vanderbilt University). Сприяла підписанню договору про співробітництво між Інститутом математики НАН України та відділом математичних наук Університету Форт Вейна.

В.Д. Кошманенко у 2013 році отримав премію НАН України ім. Ю. Митропольського.

В 2014 році Н.В. Зорій взяла участь у роботі конференції "Constructive Functions" при Vanderbilt University (США) (травень 2014 р.), річного колоквиуму з математичного аналізу при IPFW University (США) (травень 2014 р.), воркшопу "Minimal Energy Point Sets, Lattices, and Designs" при університеті Відня (жовтень 2014 р.). У рамках двосторонніх угод про співробітництво між Інститутом математики НАН України та IPFW University (університетом Форт Вейна), США та, відповідно, University of Stuttgart (університетом Штутгарту), Німеччина, продовжила співпрацю з Р. Dragnev (IPFW University) та W.L. Wendland (University of Stuttgart). Отримала підтримку гранта Саймона (США) та програми Scholar-in-Residence при Університеті Форт Вейна (США) для участі запрошеним лектором в роботі Річного колоквиуму з математичного аналізу при Університеті Форт Вейна (травень 2014 року).

В.Д. Кошманенко та Т.В. Каратаєва зробили доповіді на міжнародних конференціях:

"Динамічні системи та їх застосування яка відбулася у Києві 16-18 травня 2012 р.

"Боголюбовські читання DIF - 2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування Севастополь, Україна (23-30 червня 2013 р.).

"Dynamical system modelling and stability investigation XVII International Conference, в Києві 27-29 травня 2015 р.

Загалом за результатами дослідження було опубліковано 2 монографії, 30 статей, з них в іноземних фахових журналах – 12, у вітчизняних фахових журналах – 18, в препринтах – 4. В тезах конференцій опубліковано 10 рефератів(тез). Захищено 1 докторська і 2 кандидатські дисертації. Підготовлена до захисту 1 кандидатська дисертація.

Виконавці теми прочитали курси лекцій та виступили на семінарах в Києво-Могилянській академії, в Національному Університеті ім. Т. Шевченка. Результати досліджень обговорювались також на семінарах в Інституті теоретичної фізики та у НТУУ "КПІ".

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- [1] A.L. Rebenko. *Theory of Interacting Quantum Fields*. – De Gruyter Studies in Mathematics 39, 2012, 568 с.
- [2] V.A. Boluh, A.L. Rebenko. *An exponential representation for some integrals with respect to Lebesgue-Poisson measure*. – Meth. Funct. Anal. and Topology, 2014, **29**, № 2, p. 186–192.
- [3] О.Л. Ребенко, В.А. Болух Нескінченновимірний аналіз і статистична механіка //“Актуальні проблеми математичної фізики та її застосувань” Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014.— Том 11, № 1. — С. 257—315.
- [4] В.А. Болух Розклад Бріджеса–Федербуша для систем з посилено надстійкою взаємодією //“Актуальні проблеми математичної фізики та її застосувань”, Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — Том 11, № 1. — С. 153—165.
- [5] П.В. Малишев, О.Л. Ребенко. *Апроксимація фінітними потенціалами.* - Укр. мат. журн., 2013, **65**, № 10, с. 1342–1349.
- [6] A.L. Rebenko. *Cell gas model of classical statistical systems*. – Reviews in Math. Phys., 2013, **25**, № 4, p. 1330006-1–28.
- [7] С.М. Петренко, О.Л. Ребенко, М.В. Тертичний. *Про квазінеперервну апроксимацію в класичній статистичній механіці.* - Укр. мат. журн., 2011, **63**, № 3, с. 369–384.
- [8] Vira A. Boluh¹, Alexei L. Rebenko *Cell gas free energy as an approximation of the continuous models*. – Jour. Modern Phys., 2015, **6**, p.168–175.
- [9] О.Л. Ребенко, В.А. Болух. *Про нову форму запису розкладів Майєра.* - Доповіді НАНУ, 2015, № 11, стор. 19-23
- [10] В.Скрипник. *Про полімерні розклади для узагальнених гіббсівських ґраткових систем осциляторів з тернарною взаємодією.* - Укр. мат. журн., 2013, **65**, № 5, с. 689–697.
- [11] В.Скрипник. *Про ґраткові гіббсівські системи осциляторного типу з суперстійкими багато-частинковими потенціалами.* - Theory of stochastic processes, 2012, **18(34)**, № 2, с. 96–101.
- [12] В.Скрипник. *Про голоморфні розв’язки гамільтонових рівнянь руху точкових зарядів.* - Укр. мат. журн., 2011, **63**, № 2, с. 270-280.

- [13] В.Скрипник. *Про голоморфні розв'язки рівнянь руху Дарвіна точкових зарядів.* - Укр. мат. журн., 2013, **65**, № 4, с. 546-554.
- [14] В.Скрипник. *Періодичні та обмежені розв'язки рівнянь руху Кулона двох та трьох точкових зарядів з рівновагою на прямій.* - Укр. мат. журн., 2014, **66**, № 5, с. 679-693.
- [15] В.Д.Кошманенко. *Квазіточкові спектральні міри в теорії динамічних систем конфлікту.* Укр. мат. журн., 2011, **63**, № 2, С.187-199.
- [16] Y.M. Park. *Bounds on exponentials of local number operators in quantum statistical mechanics.* – Commun. Math. Phys., 1984, **94**, №1, p. 1–33.
- [17] D. Ruelle. *Classical statistical mechanics of a system of particles.* – Helv. Phys. Acta, 1963. **36**, №2, p. 183–197.
- [18] Д. Рюэль. *Статистическая Механика. Строгие Результаты.* М.: Мир, 1971.– 368 с.
- [19] D. Ruelle. *Superstable interactions in classical statistical mechanics.* – Commun. Math. Phys., 1970, **18**, № 2, p. 127–159.
- [20] A.L. Rebenko, M.V. Tertychnyi. *On stability, superstability and strong superstability of classical systems of statistical mechanics .* – Meth. Funct. Anal. and Topology, 2008, **14**, № 3, p. 287–296.
- [21] D. Brydges, P. Federbush. *A new form of the Mayer expansion in classical statistical mechanics.* – J. Math. Phys., 1978, **19**, No.10, p. 2064–2067.
- [22] Duneau M., Iagolnitzer D., Souillard B. *Decrease Properties of Truncated Correlation Functions and Analyticity Properties for Classical Lattices and Continuous Systems.*– Commun. math. Phys.— 1973.— **31**, p. 191–208.
- [23] W.Skrypnik *On the evolution of Gibbs states of the lattice gradient stochastic dynamics of interacting oscillators.*- - Theory of stochastic processes, 2009, **15(31)**, № 1, p. 61-82.
- [24] Л.Ландау, Е.Лифшиц *Теория поля.* М.: Гостехиздат, 1967.– 460 с.
- [25] К. Зигель, Ю. Мозер *Лекции по небесной механике.* М.: Ижевск, 2001.– 384 с.
- [26] V.Arnold, V.Kozlov, A.Neishtadt *Mathematical aspects of the classical and celestial mechanics.* URSS,Moscow, 2002.
- [27] V.Koshmanenko, I.Samoilenko, *The conflict triad dynamical system* Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2011,**16**, p. 2917-2935.

- [28] V. Koshmanenko, *The infinite direct products of probability measures and structural similarity*, Methods Funct. Anal. Topology, 2011, **17**, no. 1, 20-28.
- [29] В.Кошманенко, І.Самойленко, *Модель динамічної системи конфліктної триади*, Нелінійні коливання, 2011, **14**, № 1, 55-75.
- [30] S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\tilde{Q}$ -symbols*, Methods Funct. Anal. Topology, 2011, **17**, No. 2, 97-111.
- [31] Т.В. Каратаєва, В.Д.Кошманенко, *Існування циклічних траєкторій у $2n$ -вимірній динамічній системі конфлікту*, Динамічні системи та їх застосування, Intern. Conf., 2012, Kyiv, с. 12.
- [32] В.Д.Кошманенко, *Щільні підпростори в шкалі Соболевських просторів*, Всеукраїнська конф. "Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу Ворохта, 2012, с. 8.
- [33] В.Д. Кошманенко, М. Є. Дудкін, *Метод оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів*, Праці Інституту математики НАН України, Київ, 2013, 318 с.
- [34] Т.В. Каратаєва, В.Д.Кошманенко, *Модель динамічної системи конфлікту типу "Вогонь – Вода"*, Нелінійні коливання, 2014, **17**, no. 2, С.228-247.
- [35] M. E. Dudkin, V. D. Koshmanenko, *Nonzero capacity sets and dense subspaces in scales of the Sobolev spaces*, Methods Funct. Anal. Topology, 2014, **20**, no. 3, 213-218.
- [36] V. Koshmanenko, *Existence theorems of the ω -limit states for conflict dynamical systems*, Methods Funct. Anal. Topology, 2014, **20**, no. 4, p. 379-390.
- [37] V.D. Koshmanenko, S.M. Petrenko, *The Hahn-Jordan decomposition for a charge as an equilibrium state of the conflict dynamical system*, Ukrainian Math. J., (2015).
- [38] Koshmanenko V.D., Karataeva T.V. *Cyclic Model of Fire-Water Conflict*, Dynamical System Modelling and Stability Investigation, XVII Intern. Conf., Kyiv, Ukraine, 2015, с. 180.
- [39] V. Koshmanenko, *On dynamical system of conflict with fair redistribution of vital resources*, Dynamical Systems and Their Applications, Intern. Conf., Kyiv, Ukraine, 2015, с. 31.

- [40] Н. Бурбаки, *Интегрирование. Меры, интегрирование мер*, Москва: Наука, 1967, 396 с.
- [41] Н. Бурбаки, *Общая топология*, Москва: Наука 1968.
- [42] M. Brelot, *On Topologies and Boundaries in Potential Theory*, Lectures Notes in Math., vol. 175. Springer, Berlin, 1971).
- [43] H. Cartan, *Théorie du potentiel Newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels*, Bull. Soc. Math. France, 1945, **73** p. 74–106.
- [44] J. Deny, *Les potentiels d'énergie finie*, Acta Math. 1950, **82** p. 107–183.
- [45] J. Deny, *Sur la définition de l'énergie en théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **2**, 1950, p. 83–99.
- [46] P.D. Dragnev, E.B. Saff, *Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable*, J. Anal. Math. 1997, **72**, p. 223–259.
- [47] R. Edwards, *Cartan's balayage theory for hyperbolic Riemann surfaces*, Ann. Inst. Fourier, 1958, **8**, 263–272.
- [48] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund **3**, 1935, p. 1–118.
- [49] B. Fuglede, *On the theory of potentials in locally compact spaces*, Acta Math., 1960, **103**, p. 139–215.
- [50] C.F. Gauss, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungs-Kräfte*, (1839). Werke **5** (1867), p.197–244.
- [51] W.K. Hayman, *Multivalent functions*, Cambridge Tracts in Math., 1994, **110**, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [52] G.C. Hsiao, W.L. Wendland, *Boundary Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [53] S.O. Kasap, *Principles of Electrical Engineering Materials and Devices*, Erwin McGraw Hill, Boston, 1997.
- [54] Н.С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Москва: Наука, 1966, 515 с.
- [55] Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Москва: Наука, 1988.

- [56] M. Ohtsuka, *On potentials in locally compact spaces*, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1, 1961, **25** p. 135–352.
- [57] Е.А. Рахманов, *Равновесные меры и распределение нулей экстремальных полиномов дискретного переменного*, Мат. сборник, 1996, **187** (8) с. 109–124.
- [58] E.B. Saff, V. Totik, *Logarithmic potentials with external fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [59] Ch.J. De la Valée-Poussin, *Le potentiel logarithmique, balayage et représentation conforme*, Louvain–Paris, 1949.
- [60] Н.В. Зорий, *Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов*, Укр. мат. журн., 1986, **38** с. 431–437.
- [61] Н.В. Зорий, *Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов и ядер Рисса*, Укр. мат. журн., 1989, **41** с. 34–42.
- [62] Н.В. Зорий, *Одна вариационная задача теории грина потенциалов*. I; II, Укр. мат. журн., 1990, **42** с. 494–500; с. 1475–1480.
- [63] N. Zorii, *Extremal problems in the theory of potentials in locally compact spaces*. I; II; III, Bull. Soc. Sci. Lettr. Łódź **50** Sér. Rech. Déform. **31**, 2000, p. 23–54; p. 55–80; p. 81–106.
- [64] N. Zorii, *On the solvability of the Gauss variational problem*, Comput. Meth. Funct. Theory, 2002, **2**, p. 427–448.
- [65] Н.В. Зорий, *Задачи равновесия для потенциалов с внешними полями*, Укр. мат. журн., 2003, **55**, с. 1315–1339.
- [66] Н.В. Зорий, *Необходимые и достаточные условия разрешимости вариационной задачи Гаусса*, Укр. мат. журн., 2005, **57**, с. 60–83.
- [67] N. Zorii, *Interior capacities of condensers in locally compact spaces*, Potential Anal., 2011, **35**, p. 103–143.
- [68] N. Zorii, *Constrained energy problems with external fields*, Complex Anal. Oper. Theory. **5** (2011), p. 775–785.
- [69] N. Zorii, H. Harbrecht, G. Of, W.L. Wendland, *On Riesz minimal energy problems*, Computational Complex Analysis and Approximation Theory, Protaras (Cyprus), Abstracts, 2011, p. 100–102.
- [70] N. Zorii, *Gauss variational problem for infinite dimensional vector measures*, XVIth Conference on Analytic Functions and Related Topics, Chelm (Poland), Abstracts, 2011, p. 62–63.

- [71] N. Zorii, G. Of, W.L. Wendland, *Numerical solution of the generalized Gauss variational problem by fast boundary element methods*, Partial Differential Equations: Theory, Applications, Simulations, Stuttgart (Germany), Abstracts, 2011.
- [72] N. Zorii, *Gauss variational problem for infinite dimensional vector measures*, Israeli-Polish Mathematical Meeting, Lodz (Poland), Abstracts, 2011.
- [73] N. Zorii, H. Harbrecht, W.L. Wendland, *On Riesz minimal energy problems*, J. Math. Anal. Appl., 2012, **393**, p. 397–412.
- [74] N. Zorii, *Gauss variational problem for infinite dimensional vector measures and Riesz kernels*, Oberwolfach Report, 2012, **40**.
- [75] N. Zorii, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of the Gauss variational problem for infinite dimensional vector measures*, ArXiv:1207.0604 , 2012, 31 p.
- [76] N. Zorii, H. Harbrecht, W.L. Wendland, *Riesz minimal energy problems on manifolds*, SimTech Preprint, 2012, 22 p.
- [77] N. Zorii, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of the Gauss variational problem for infinite dimensional vector measures*, Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach, Lviv, Ukraine, Abstracts, 2012 , p. 168.
- [78] N. Zorii, *Equilibrium problems for infinite dimensional vector potentials with external fields*, Potential Anal., 2013, **38**, p. 397–432.
- [79] N. Zorii, H. Harbrecht, W.L. Wendland, *Riesz minimal energy problems on $C^{k-1,1}$ -manifolds*, Math. Nachr., 2014, **287**, p. 48–69.
- [80] N. Zorii, *Necessary and sufficient conditions for the solvability of the Gauss variational problem for infinite dimensional vector measures*, Potential Anal., 2014, **41**, p. 81–115.
- [81] N. Zorii, P.D. Dragnev, H. Hardin, E.B. Saff, *Minimum Riesz energy problems for a condenser with “touching plates”*, Constructive Functions, Vanderbilt University (USA), Abstracts, 2014, p. 57.
- [82] N. Zorii, *Constrained Gauss variational problem for condensers with touching plates*, ArXiv:1505.02596, 2015, 14 p.
- [83] N. Zorii, *Constrained Gauss variational problem for condensers with touching plates*, Bull. Soc. Sci. Lettr. Łódź **65** Sér. Rech. Déform. **3**, 2015, 14 p.

- [84] N. Zorii, P.D. Dragnev, H. Hardin, E.B. Saff, *Minimum Riesz energy problems for a condenser with "touching plates"*, ArXiv:1504.03805, 2015, 32 p.
- [85] N. Zorii, P.D. Dragnev, B. Fuglede, H. Hardin, E.B. Saff, *Minimum Riesz energy problems for a condenser with touching plates*, Potential Anal., DOI 10.1007/s 11118-015-9519-9, 35 p.
- [86] N. Zorii, H. Harbrecht, W.L. Wendland, *Rapid solution of minimal Riesz energy problems*, Numerical Methods in Partial Differential Equations (to appear in 2015), 21 p.
- [87] N. Zorii, H. Harbrecht, W.L. Wendland, *Minimal energy problems for strongly singular Riesz kernels*, submitted to Potential Anal., 32 p.