

УДК 517.9

№ держреєстрації договору 0106U000111

Інв. №

Національна академія наук України
Інститут математики
01601, м.Київ-4, вул. Терещенківська, 3
тел. (044)2345150, факс (044)2352010

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор

Інституту математики НАН України
академік НАН України

А. М. Самойленко

14.12.2010 р.

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ МОДЕЛЕЙ З СИНГУЛЯРНИМИ
ВЗАЄМОДІЯМИ
(Заключний)

Керівник НДР

завідувач відділу Математичної фізики

док.фіз.-мат. наук, професор

О. Л. Ребенко

Рукопис закінчено 1 грудня 2010 р.

Результати цієї роботи розглянуті Вченою Радою Інституту математики НАН
України, протокол від 14.12.2010 № 10

Київ — 2010

Зміст

Список виконавців.....	4
Реферат	5
Вступ.....	15
1. Побудова рівноважних статистичних станів, що відповідають сингулярним взаємодіям	26
1.1. Евклідові стани квантових кристалів.....	26
1.2 Рівноважні стани, що відповідають системам з багаточастинковим сингулярним потенціалом	29
2. Рівноважна динаміка типу Глаубера неперервних систем частинок як границя динамік типу Кавасакі	37
3. Теорія сингулярних збурень	41
3.1. Метод оснащених гільбертових просторів в теорії супер-сингулярних збурень самоспряжених операторів	41
3.2. Спектральна теорія сингулярно збурених операторів математичної фізики	44
3.3. Обернена задача спектрального аналізу теорії сингулярних збурень	49
4. Теорія динамічних систем з конфліктною взаємодією.....	54
4.1. Спектральна теорія динамічних систем з конфліктною взаємодією .	54
4.2. Теорія критичної поведінки складних систем. Комп'ютерне моделювання нелінійної динаміки систем з конфліктною взаємодією....	66
5. Теорія внутрішніх ємностей конденсаторів зі зчисленною кількістю пластин.....	75
5.1. Позначення, визначення, відомі факти	77
5.2. Конденсатори, асоційовані міри, їхні енергії та потенціали.....	79
5.3. Внутрішня ємність конденсатора	82
5.4. Теорема про сильну повноту	84
5.5. Достатні умови розв'язності основної екстремальної задачі	85
5.6. Дуальні варіаційні задачі	86

6. Задача Гаусса	90
6.1. Задача Гаусса з верхніми крайовими умовами	90
6.2. Задача Гаусса над ліпшицевими многовидами	95
7. Застосування центральних многовидів в якісному аналізі нелінійних математичних моделей задач математичної фізики, зокрема, нелінійної світодинаміки	98
7.1. Біфуркації обертаючих структур в параболічному функціонально-диференціальному рівнянні	98
7.2. Застосування центральних многовидів в задачі про синхронізацію в системі двох одномодових взаємозв'язаних лазерів	106
Література	119

Список виконавців

Керівник роботи

доктор фіз.-мат.наук, професор
завідувач відділу

О.Л. Ребенко

Співвиконавці:

доктор фіз. мат. наук
провідний науковий співробітник
доктор фіз. мат. наук
провідний науковий співробітник
доктор фіз. мат. наук
провідний науковий співробітник
кандидат фіз. мат. наук
молодший науковий співробітник

Н.В. Зорій

В.Д. Кошманенко

О.Б. Ликова

Д.Л. Фінкельштейн

аспірант

С.М. Петренко

аспірант

Н.В. Харченко

Реферат

Предметом дослідження теми були системи, що описують неперервні та ґратчасті моделі теорії твердого тіла, класичної та квантової статистичної механіки із сингулярною взаємодією, моделі біологічної еволюції та екологічні моделі очищення забрудненого середовища. Досліджувались наступні задачі: побудова гіббсівського стану ν -вимірного квантового кристалу, у вузлах якого розташовані ангармонічні осцилятори з відхиленнями, що набувають значень в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ і утримуються у вузлах ґратки одночастинковим неполіноміальним потенціалом з двома мінімумами; критична поведінка квантових кристалів у режимі малих мас осцилюючих частинок; евклідові гіббсівські міри, що відповідають багаточастинковим потенціалам взаємодії; спектральна теорія сингулярно збурених операторів математичної фізики; спектральна теорія динамічних систем з конфліктною взаємодією; методи оснащених гільбертових просторів в теорії супер-сингулярних збурень самоспряжених операторів; граничні спектральні міри динамічних систем конфлікту; дослідження умов виникнення та трансформування сингулярно неперервного спектру в динамічних системах конфлікту; теорія нелінійної поведінки складних систем; комп'ютерне моделювання нелінійної динаміки систем з конфліктною взаємодією; побудова сингулярно збуреного оператора в термінах квадратичних форм, оснащених просторів, методом узагальноної суми, методом самоспряжених розширень симетричних операторів, на основі формули Крейна для резольвент; аналіз структури спектру збуреного оператора в залежності від способу побудови оператора; аналіз спектральної міри сингулярно збуреного оператора фрактальної структури; аналіз спектральної міри сингулярно збуреного оператора фрактальної структури; обернена задача спектрального аналізу в теорії сингулярних збурень; динамічні системи складних процесів, які породжують спектральні міри та розподіли фрактальної структури; аналіз граничних

спектральних мір в динамічних моделях з нелінійною композицією конфліктної взаємодії; застосування результатів спектрального аналізу до динамічних задач математичної фізики; спектральні властивості граничних розподілів динамічних систем конфлікту з двома спірними позиціями; новий метод побудови сингулярно збуреного оператора на основі теорії оснащених гільбертових просторів; використання матриць Якобі для параметризації самоспряжених розширень симетричних операторів і їх зв'язок з оберненою задачею на власні значення; побудова моделей конфлікту для складних систем, дослідження їх траєкторій, існування граничних циклів, інтерпретація в термінах процесів міграції; встановлення критеріїв наявності фіксованої спектральної компоненти в граничних розподілах динамічних систем в термінах структурно подібних мір; розв'язання оберненої задачі спектрального аналізу в теорії динамічних систем конфлікту для структурно подібних мір; знаходження умов, які забезпечують самоподібність образ-мір нескінченних добутків дискретних мір; дослідження моделі динамічної системи конфліктної тріади, яка описує взаємодію між трьома природними субстанціями; доведення можливості регенерації фізичного спектру в складних нелінійних системах в термінах квазі-точкової сингулярно неперервної міри; встановлення наявності основних фаз співіснування конфліктних субстанцій тріади, а саме: станів динамічної рівноваги (стабільної нерухомої точки), циклічних орбіт у формі атракторів, періодично осцилюючих траєкторій, квазі-хаотичних еволюцій; моделювання різних типів нелінійної конфліктної взаємодії. Показано існування біфуркаційних точок та порогів переходу між різними фазами; дослідження залежності нелінійної динаміки складних систем від параметрів задачі, зокрема виявлення зв'язків між поведінкою трьох природних субстанцій: популяцією біологічного виду, ресурсом для існування, та негативними факторами типу інфекції; теорія ємностей конденсаторів зі зчисленною (скінченною чи нескінченною) кількістю пла-

стин довільної топології у локально компактному просторі; екстремальні задачі теорії потенціалу над нескінченномірними векторними мірами Радона; варіаційна задача Гаусса про мінімум енергій з верхніми крайовими умовами та зовнішніми полями; центральні многовиди в якісному аналізі нелінійних математичних моделей задач математичної фізики, зокрема, нелінійної світодинаміки.

В результаті проведеної науково-дослідницької роботи основними результатами досліджень є:

1. Доведена єдиність евклідової гіббсівської міри при всіх значеннях температури кристалу, якщо маса m осцилюючої частинки не перевищує деяке критичне значення $m_* > 0$.

2. Доведена єдиність евклідової гіббсівської міри при всіх значеннях маси, якщо температура системи перевищує деяке критичне значення T_* .

3. Вирішена проблема побудови міри Гіббса для систем з багаточастинковою взаємодією нескінченного радіусу дії.

4. Показано, що в режимі високої температури та малої активності у скейлінгу за допомогою так званого потенціалу Каца генератор певного стрибкового процесу на просторі конфігурацій збігається до генератору певного процесу народження та загибелі на цьому просторі.

5. Досліджено двокомпонентну модель контактів спеціального вигляду: сума двох незалежних неперервних моделей контактів (народження та загибелі із постійним коефіцієнтом загибелі та лінійним коефіцієнтом народженням) та взаємодії, яка задається додатковим лінійним коефіцієнтом народженням однієї моделі, залежним від другої. Знайдені явні формули для перших та других кореляційних функцій цієї двокомпонентної моделі та досліджена їхня гранична по часу поведінка.

6. Вивчено міри на просторах конфігурацій двох типів. Описано гібсовські міри на таких просторах. Розглянуто основні властивості відносних енергій та кореляційних функцій. Зокрема, показано, що гібсовські мри

зосереджені на парах конфігурацій, які не перетинаються.

7. Розвинуто методи спектрального аналізу для операторів математичної фізики збурених сингулярними квадратичними формами.

8. В шкалі гільбертових просторів проведена класифікація сингулярних збурень и побудована спектральна теорія збурених самоспряжених операторів.

9. Відому спектральну теорію Ароншайна-Донагхью розширено на випадок сингулярних збурень довільного рангу $\mathcal{H}_2$ -класу. Доведено теореми виникнення та існування довільного точкового спектру при сингулярних збуреннях з $\mathcal{H}_2$ -класу. Розвинуто конструктивні методи побудови такого спектру.

10. Розвинуто новий підхід в теорії сингулярних збурень для побудови збуреного оператора методом оснащених просторів. Встановлено необхідні та достатні ознаки щільності підпросторів в шкалі гільбертових просторів в контексті побудови збурених операторів.

11. Доведено існування інваріантних спектральних мір (носії яких є атракторами) і які відповідають станам динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією.

12. Досліджувались спектральні властивості граничних розподілів для мір що описують динамічну систему конфлікту з двома спірними позиціями. Доведено існування інваріантних граничних станів. Знайдено критерії чистоти спектру (точкового, абсолютно неперервного, сингулярно неперервного). Знайдено формули для визначення топологічного типу, а також розмірності Хаусдорфа носіїв граничних мір.

13. Створено новий напрямок в теорії сингулярних збурень, який ґрунтується на методі оснащених гільбертових просторів. Доведено, що відомі методи форм-суми, а також метод самоспряжених розширень включаються в запропоновану вище конструкцію. Показано, що так звані супер-сингулярні

збурення частково піддаються розгляду в рамках методу оснащених просторів. В рамках теорії сингулярних збурень необмежених самоспряжених операторів встановлено зв'язок між оберненою задачею на власні значення та матрицями Якобі. Одержано явні формули для знаходження матричних елементів якобієвої матриці по заданому набору власних чисел та власних векторів сингулярно збуреного оператора.

14. Побудована і вивчена динамічна модель, що описує конфліктну взаємодію в дискретному часі двох складних систем з нетривіальною внутрішньою структурою. Показано, що типова траєкторія складної системи асимптотично наближається (притягується) до граничного циклу. Запропонована інтерпретація результатів в термінах міграційних процесів.

15. Досліджена динамічна система конфлікту між парою систем, кожна з яких у свою чергу є внутрішньо конфліктною. Зовнішній і внутрішній конфлікти мають різний характер. Зовнішній описується альтернативною взаємодією незнищених супротивників. Внутрішній має характер боротьби між взаємно пов'язаними популяціями різних біологічних видів (модель типу "хижак-жертва"). Побудована комп'ютерна модель такої системи, одержано ряд ілюстрованих графіками типових поведінок, які можна інтерпретувати, зокрема, як міграцію робочої сили та інвестицій між країнами.

16. Досліджено динамічну систему, що моделює популяцію біологічного виду в просторі структурно-подібних фрактальних мір. Композиція (відображення), яке задає динамічну систему, пов'язане з варіантом нескінченної системи рівнянь Лотки-Вольтерри і є багатовекторним узагальненням квадратичної функції, добре відомого логістичного рівняння.

17. Введено класифікацію (параметризацію) супер-сингулярних збурень самоспряжених операторів в термінах шкали гільбертових просторів (методом оснащених просторів). Досліджено спектральні властивості граничних

мір динамічних систем конфлікту, які моделюють альтернативну взаємодію між опонентами. Встановлені основні спектральні характеристики динамічних систем конфлікту. Закладено основи для побудови спектральної теорії

динамічних систем конфлікту.

18. Одержано умови відновлення чистого спектрального типу (чисто точкового, абсолютно неперервного, або сингулярно неперервного) в граничних розподілах динамічних систем з композицією альтернативного конфлікту. Доведено, що втрачений точковий спектр фізичної системи можна регенерувати виходячи із станів з чисто сингулярно неперервним спектром. Доведено, що "майже завжди" розподіли граничних мір є чисто сингулярно неперервними. Одержано достатні умови належності граничних мір фіксованому спектральному типу: чисто сингулярно неперервному, чисто точковому, або чисто абсолютно неперервному.

19. Запропонована інтерпретація явища виникнення сингулярно неперервного спектра, як перехід системи із станів з чисто точковим або абсолютно неперервним спектром в стан з чисто сингулярним спектром, аналогічний трансформації фізичної системи в польову (можливо хвильову) субстанцію.

20. Знайдені критерії чистоти спектру (точкового, абсолютно неперервного, сингулярно неперервного) граничних розподілів ймовірнісних мір динамічних систем конфлікту.

21. Побудовані найпростіші версії екологічної моделі, що описує альтернативну взаємодію між температурою та вологістю. Розроблено новий метод передбачення динаміки поширенням інфекції в середовищі біологічних видів, модель "інфекція-щеплення". Одержано конкретні комп'ютерні графіки, що ілюструють моделі "вогонь-вода" та "інфекція-щеплення". Виявлено ряд природніх закономірностей, що заслуговують на увагу з точки зору практичних застосувань. Встановлено нові методи доведення існува-

ння довільних спектральних носіїв у сингулярно збурених операторів H_{-2} -класу.

22. Досліджувались спектральні та фрактальні властивості структурно-подібних мір динамічних систем конфлікту. Знайдено критерій виникнення точкового спектру при конфліктній композиції сингулярно неперервних мір. Одержано динамічні характеристики моделей, що описують взаємодії між конфліктними системами. Зокрема, побудована складна динамічна система, яка є внутрішньо конфліктною. Зовнішній конфлікт описується альтернативною взаємодією незнищених супротивників. Внутрішній – має характер боротьби між взаємно пов'язаними популяціями різних біологічних видів (модель типу "хижак-жертва").

23. Побудовано комп'ютерний варіант такої системи в дискретному часі. Одержано ряд характерних графіків, які можна інтерпретувати, зокрема, як міграцію робочої сили та інвестицій між країнами. Побудовано ряд моделей, що описують альтернативну конфліктну взаємодію між природними стихіями типу вода-вогонь, інфекція-антидот. Знайдено явну математичну умову успішності прецесу кредитування.

24. На просторі структурно подібних мір побудована нетривіальна глобальна міра, для якої підмножина сингулярно неперервних мір є множиною повної міри.

25. Досліджено обернену спектральну задачу для сингулярно збурених самоспряжених операторів. Показано, що для оператора A та довільного $a \in \mathbb{R}$ існує сингулярно збурений оператор $\tilde{A}$ такий що $\tilde{A}$ та A збігаються в підпросторі $E_A((-\infty, a))\mathcal{H}$ і одночасно $\tilde{A}$ має додаткову спектральну гілку на $(-\infty, a)$ довільного напер заданого типу. Зокрема, $\tilde{A}$ може мати задані спектральні властивості в резольвентній множині оператора A зліва від a . Більш за те, для довільного самоспряженого оператора T в $\mathcal{H}$ існує $\tilde{A}$ такий, що T є унітарно еквівалентним частині $\tilde{A}$, яка діє у відповідному інваріантному підпросторі.

26. Досліджено спектральні властивості граничних мір динамічних систем конфлікту, що моделюють альтернативну боротьбу супротивників. Показано, що типові траєкторії систем збігаються до інваріантних взаємно сингулярних мір. Доведено, що майже завжди самі граничні міри є чисто сингулярно неперервними. Знайдено умови, при яких граничні міри належать фіксованому спектральному типу: чисто сингулярно неперервному, чисто точковому, або чисто абсолютно неперервному.

27. Досліджено граничні розподіли станів динамічної системи конфлікту асоційованої з парою стохастичних матриць нескінченного рангу. Дано опис цих станів в термінах нескінчених добутків розкладів Хана - Жордана дискретних зарядів. Встановлено параметризацію обмежених знизу суперсингулярно збурених самоспряжених операторів використовуючи шкали гільбертових просторів $\mathcal{H}_{-k} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_k$, $k > 0$. Параметризацію одержано в термінах допоміжних операторів S , які діють з позитивного простору в негативний $S : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{-k}$ і є такими, що їх ядро $\text{Ker} S$ щільне в $\mathcal{H}_{k/2}$.

28. Вивчено властивості структурно подібних мір на відрізку. Показано, що довільна структурно подібна міра на $[0, 1]$ є образ-мірою нескінченного прямого добутку деякої послідовності дискретних ймовірнісних мір.

29. Досліджено модель динамічної системи конфліктної тріади, яка описує взаємодію між трьома природними субстанціями: популяцією біологічного виду (життя), навколишнім середовищем (ресурс існування), та негативними факторами для існування (інфекція, зло). Встановлено наявність основних фаз співіснування субстанцій тріади: стану динамічної рівноваги (стабільної нерухомої точки), циклічних атракторів, періодично осцилюючих траєкторій, та еволюцій близьких до хаотичних. На конкретних моделях показано існування біфуркаційних точок та порогів переходу між різними фазами.

30. Закладено основи теорії ємностей конденсаторів зі зчисленною (скінченною чи нескінченною) кількістю пластин довільної топології у локально

компактному просторі. Для довільного додатно визначеного ядра в локально компактному просторі, що задовольняє умову В. Fuglede узгодженості між сильною та широкою топологіями над передгільбертовим простором мір Радона зі скінченною енергією, знайдено постановки варіаційних задач, дуальних до основної варіаційної задачі (і які, отже, можуть слугувати новими еквівалентними означеннями ємностей конденсаторів), але тепер вже завжди розв'язних — навіть для незамкнених конденсаторів з нескінченною кількістю пластин. Розв'язки дуальних варіаційних задач приводять до природного узагальнення класичного поняття внутрішньої рівноважної міри, асоційованої з множиною. Дано опис цих розв'язків, їхніх потенціалів та відповідних рівноважних констант, вивчено властивості їх єдиності та неперервності, виділено характеристичні властивості.

31. Розроблено нові ефективні методи дослідження екстремальних задач теорії потенціалу над нескінченномірними векторними мірами Радона, що ґрунтуються на впровадженні належних метричних структур та мають у своїй основі теорему про повноту відповідних метричних просторів. Як приклад застосування цих методів, знайдено достатні умови розв'язності задачі про мінімум енергій векторних мір, асоційованих з некомпактним конденсатором з нескінченною кількістю пластин.

32. У локально компактному просторі вивчено варіаційну задачу Гаусса про мінімум енергій з верхніми крайовими умовами та зовнішніми полями, де точна нижня межа енергій розглядається над класом усіх додатних мір Радона, що зосереджені на заданій некомпактній замкненій множині Σ та задовольняють певні нормування і крайові умови. Доведено теореми про існування та єдиність рівноважної міри, вивчено властивості її неперервності у широкій та сильній топологіях, коли крайові умови та множина Σ змінюються одночасно, дано опис вагових рівноважних потенціалів.

33. Дано конструктивний та чисельний розв'язок варіаційної задачі Га-

ууса про мінімум вагових ньютонівських енергій борелевих мір, асоційованих з конденсатором (Γ_1, Γ_2) . Тут Γ_1, Γ_2 — компактні $(n - 1)$ -розмірні многовиди без краю, що не перетинаються та задовольняють умову Ліпшиця. Це стало можливим дякуючи теоремі про еквівалентність задачі Гаусса певній задачі мінімізації у просторі Соболева–Слободецького $H^{-1/2}(\Gamma)$, де $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

34. Доведена теорема про існування і асимптотичну форму обертаючої структури, породженої із стаціонарного просторово-однорідного розв’язку задачі побудови центральних многовидів для рівнянь, інваріантних відносно групи обертання кола.

35. Розглянута система звичайних диференціальних рівнянь, що описують динаміку двох взаємозв’язаних одномодових напівпровідникових лазерів. Зокрема, вивчаються розв’язки, що відповідають амплітудній синхронізації. Показано, що множина розв’язків утворює в фазовому просторі тривимірний інваріантний многовид. Досліджувалась стійкість траєкторій на цьому многовиді як у тангенціальному, так і трансверсальному до нього напрямках. Встановлено умови існування глобально асимптотично стійких розв’язків рівнянь на многовиді, що синхронізовані за амплітудою.

За результатами дослідження було опубліковано 38 робіт з них в іноземних фахових журналах— 16, у вітчизняних фахових журналах— 15, в препринтах— 7. 5 робіт прийнято до друку. Зроблено 25 доповідей на міжнародних конференціях. В тезах конференцій опубліковано 25 рефератів(тез). Захищено 2 кандидатські дисертації і підготовлена до захисту 1 кандидатська дисертація. Основні результати роботи викладені у наступних 7-ми розділах.

Вступ

Характерною рисою сучасної математичної фізики є дослідження, які пов'язані не тільки з фізичною природою тіл, що нас оточують, а й таких, які описують біологічні, екологічні, економічні та інші системи.

Дослідження у 2006-2010 роках були присвячені наступним фундаментальним напрямкам:

- 1) Побудова гіббсівських станів квантових кристалів.
- 2) Побудова та дослідження єдиності гіббсівських станів, що відповідають класичним неперервним системам нескінченної кількості частинок, взаємодія яких описується сингулярними багаточастинковими потенціалами.
- 3) Спектральна теорія сингулярно збурених операторів математичної фізики.
- 4) Дослідження спектральної теорії динамічних систем з конфліктною взаємодією.
- 5) Розвиток методів оснащених гільбертових просторів в теорії суперсингулярних збурень самоспряжених операторів
- 6) Дослідження властивостей граничних спектральних мір динамічних систем конфлікту.
- 7) Дослідження умов виникнення та трансформування сингулярно неперервного спектру в динамічних системах конфлікту.
- 8) Теорія нелінійної поведінки складних систем. Комп'ютерне моделювання нелінійної динаміки систем з конфліктною взаємодією.
- 9) Дослідження дво-компонентних моделей контактів в біологічних моделях.
- 10) Побудові теорії ємностей конденсаторів зі зчисленною (скінченною чи нескінченною) кількістю пластин довільної топології у локально компактному просторі.
- 11) Розробці нових ефективних методів дослідження екстремальних за-

дач теорії потенціалу над нескінченномірними векторними мірами Радона.

12) Дослідженню варіаційної задачі Гаусса про мінімум енергій з верхніми крайовими умовами та зовнішніми полями.

13) Конструктивному та чисельному розв'язанню варіаційної задачі Гаусса про мінімум ньютонівих енергій за наявності зовнішніх полів над многовидами Ліпшиця.

14) Дослідження центральних многовидів в якісному аналізі нелінійних математичних моделей задач математичної фізики, зокрема, нелінійної світодинаміки.

Були отримані наступні результати.

1. Вивчалась критична поведінка квантових кристалів у режимі малих мас осцилюючих частинок. Виявилось, що при зменшенні маси частинок до деякого критичного значення у системі зникають не тільки структурні фазові переходи навіть при температурах, що наближаються до абсолютного нуля $T \approx 0$ але й зникає будь яка критична поведінка. Такий результат про єдиність Гіббсового стану (а значить відсутність будь-якої критичної поведінки) був отриманий у роботах [3]–[5] для поліноміальних ангармонічних взаємодій. В роботі О.Л. Ребенка (разом з В.А. Загребновим) [53] для неполіноміального ангармонічного потенціалу з двома мінімумами були побудовані кластерні розклади, збіжність яких була доведена при довільній температурі кристалу, якщо якщо маса m осцилюючої частинки не перевищує деяке критичне значення $m_* > 0$.

2. Доведена єдиність евклідової гіббсівської міри при всіх значеннях маси, якщо температура системи перевищує деяке критичне значення T_* .

3. Вирішена проблема побудови міри Гіббса для систем з багаточастинковою взаємодією нескінченного радіусу дії.

4. Показано, що в режимі високої температури та малої активності у скейлінгу за допомогою так званого потенціалу Каца генератор певного стрибкового процесу на просторі конфігурацій збігається до генератору

певного процесу народження та загибелі на цьому просторі.

5. Досліджено двокомпонентну модель контактів спеціального вигляду: сума двох незалежних неперервних моделей контактів (народження та загибелі із постійним коефіцієнтом загибелі та лінійним коефіцієнтом народженням) та взаємодії, яка задається додатковим лінійним коефіцієнтом народженням однієї моделі, залежним від другої. Знайдені явні формули для перших та других кореляційних функцій цієї двокомпонентної моделі та досліджена їхня гранична по часу поведінка.

6. Вивчено міри на просторах конфігурацій двох типів. Описано гібсовські міри на таких просторах. Розглянуто основні властивості відносних енергій та кореляційних функцій. Зокрема, показано, що такі гібсовські міри зосереджені на парах конфігурацій, які не перетинаються.

7. Розвинуто методи спектрального аналізу для операторів математичної фізики збурених сингулярними квадратичними формами.

8. В шкалі гільбертових просторів проведена класифікація сингулярних збурень и побудована спектральна теорія збурених самоспряжених операторів.

Структура спектру операторів математичної фізики, зокрема операторів енергії, становить найбільш важливу характеристику відповідних фізичних систем. Особливо актуальні проблеми виникають при дослідженні структури спектру сингулярно збурених операторів. Звичайно в спектрі виділяють три компоненти: точковий спектр (власні значення), абсолютно неперервний спектр (в задачах розсіювання) та сингулярно неперервний спектр, інтерес до якого зріс в останю декаду. Власне теорія сингулярних збурень самоспряжених операторів з точки зору спектральної структури – це відносно новий напрям в математичній фізиці. Він охоплює аналіз спектру усіх типів. Дослідження в цьому напрямі ідуть досить інтенсивні. Особливу увагу привертає структура сингулярного спектру в зв'язку з застосуваннями в фрактальній геометрії. Ідея фрактальної будови світу

викликала інтерес та необхідність до аналізу тонкої структури сингулярно неперервного спектру (розмірність Хаусдорфа). Новий імпульс до проблем структури сингулярно неперервного спектру виник у зв'язку з задачами теорії динамічних систем, які описують так звану конфліктну взаємодію різних фізичних моделей. Цей напрямок є абсолютно новим і пріоритетним.

9. Відому спектральну теорію Ароншайна-Донагхью розширено на випадок сингулярних збурень довільного рангу $\mathcal{H}_2$ -класу. Доведено теореми виникнення та існування довільного точкового спектру при сингулярних збуреннях з $\mathcal{H}_2$ -класу. Розвинуто конструктивні методи побудови такого спектру.

10. Розвинуто новий підхід в теорії сингулярних збурень для побудови збуреного оператора методом оснащених просторів. Встановлено необхідні та достатні ознаки щільності підпросторів в шкалі гільбертових просторів в контексті побудови збурених операторів.

11. Доведено існування інваріантних спектральних мір (носії яких є атракторами) і які відповідають станам динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією.

12. Досліджувались спектральні властивості граничних розподілів для мір що описують динамічну систему конфлікту з двома спірними позиціями. Доведено існування інваріантних граничних станів. Знайдено критерії чистоти спектру (точкового, абсолютно неперервного, сингулярно неперервного). Знайдено формули для визначення топологічного типу, а також розмірності Хаусдорфа носіїв граничних мір.

13. Створено новий напрямок в теорії сингулярних збурень, який ґрунтується на методі оснащених гільбертових просторів. Доведено, що відомі методи форм-суми, а також метод самоспряжених розширень включаються в конструкцію. Показано, що так звані супер-сингулярні збурення частко-

во піддаються розгляду в рамках методу оснащених просторів. В рамках теорії сингулярних збурень необмежених самоспряжених операторів встановлено зв'язок між оберненою задачею на власні значення та матрицями Якобі. Одержано явні формули для знаходження матричних елементів якобієвої матриці по заданому набору власних чисел та власних векторів сингулярно збуреного оператора.

14. Побудована і вивчена динамічна модель, що описує конфліктну взаємодію в дискретному часі двох складних систем з нетривіальною внутрішньою структурою. Показано, що типова траєкторія складної системи асимптотично наближається (притягується) до граничного циклу. Запропонована інтерпретація результатів в термінах міграційних процесів.

15. Досліджена динамічна система конфлікту між парою систем, кожна з яких у свою чергу є внутрішньо конфліктною. Зовнішній і внутрішній конфлікти мають різний характер. Зовнішній описується альтернативною взаємодією незнищених супротивників. Внутрішній має характер боротьби між взаємно пов'язаними популяціями різних біологічних видів (модель типу "хижак-жертва"). Побудована комп'ютерна модель такої системи, одержано ряд ілюстрованих графіками типових поведінок, які можна інтерпретувати, зокрема, як міграцію робочої сили та інвестицій між країнами.

16. Досліджено динамічну систему, що моделює популяцію біологічного виду в просторі структурно-подібних фрактальних мір. Композиція (відображення), яке задає динамічну систему, пов'язане з варіантом нескінченної системи рівнянь Лотки-Вольтерри і є багатовекторним узагальненням квадратичної функції, добре відомого логістичного рівняння.

17. Введено класифікацію (параметризацію) супер-сингулярних збурень самоспряжених операторів в термінах шкали гільбертових просторів (методом оснащених просторів). Досліджено спектральні властивості граничних мір динамічних систем конфлікту, які моделюють альтернативну взаємо-

дію між опонентами. Встановлені основні спектральні характеристики динамічних систем конфлікту. Закладено основи для побудови спектральної теорії динамічних систем конфлікту.

18. Одержано умови відновлення чистого спектрального типу (чисто точкового, абсолютно неперервного, або сингулярно неперервного) в граничних розподілах динамічних систем з композицією альтернативного конфлікту. Доведено, що втрачений точковий спектр фізичної системи можна регенерувати виходячи із станів з чисто сингулярно неперервним спектром. Доведено, що "майже завжди" розподіли граничних мір є чисто сингулярно неперервними. Одержано достатні умови належності граничних мір фіксованому спектральному типу: чисто сингулярно неперервному, чисто точковому, або чисто абсолютно неперервному.

19. Запропонована інтерпретація явища виникнення сингулярно неперервного спектра, як перехід системи із станів з чисто точковим або абсолютно неперервним спектром в стан з чисто сингулярним спектром, аналогічний трансформації фізичної системи в польову (можливо хвильову) субстанцію.

20. Знайдені критерії чистоти спектру (точкового, абсолютно неперервного, сингулярно неперервного) граничних розподілів ймовірнісних мір динамічних систем конфлікту.

21. Побудовані найпростіші версії екологічної моделі, що описує альтернативну взаємодію між температурою та вологістю. Розроблено новий метод передбачення динаміки поширення інфекції в середовищі біологічних видів, модель "інфекція-щеплення". Одержано конкретні комп'ютерні графіки, що ілюструють моделі "вогонь-вода" та "інфекція-щеплення". Виявлено ряд природніх закономірностей, що заслуговують на увагу з точки зору практичних застосувань. Встановлено нові методи доведення існування довільних спектральних носіїв у сингулярно збурених операторів H_{-2} -класу.

22. Досліджувались спектральні та фрактальні властивості структурно-подібних мір динамічних систем конфлікту. Знайдено критерій виникнення точкового спектру при конфліктній композиції сингулярно неперервних мір. Одержано динамічні характеристики моделей, що описують взаємодії між конфліктними системами. Зокрема, побудована складна динамічна система, яка є внутрішньо конфліктною. Зовнішній конфлікт описується альтернативною взаємодією незнищених супротивників. Внутрішній – має характер боротьби між взаємно пов'язаними популяціями різних біологічних видів (модель типу "хижак-жертва").

23. Побудовано комп'ютерний варіант такої системи в дискретному часі. Одержано ряд характерних графіків, які можна інтерпретувати, зокрема, як міграцію робочої сили та інвестицій між країнами. Побудовано ряд моделей, що описують альтернативну конфліктну взаємодію між природними стихіями типу вода-вогонь, інфекція-антидот. Знайдено явну математичну умову успішності прецесу кредитування.

24. На просторі структурно подібних мір побудована нетривіальна глобальна міра, для якої підмножина сингулярно неперервних мір є множиною повної міри.

25. Досліджено обернену спектральну задачу для сингулярно збурених самоспряжених операторів. Показано, що для оператора A та довільного $a \in \mathbb{R}$ існує сингулярно збурений оператор $\tilde{A}$ такий що $\tilde{A}$ та A збігаються в підпросторі $E_A((-\infty, a))\mathcal{H}$ і одночасно $\tilde{A}$ має додаткову спектральну гілку на $(-\infty, a)$ довільного напер заданого типу. Зокрема, $\tilde{A}$ може мати задані спектральні властивості в резольвентній множині оператора A зліва від a . Більш за те, для довільного самоспряженого оператора T в $\mathcal{H}$ існує $\tilde{A}$ такий, що T є унітарно еквівалентним частині $\tilde{A}$, яка діє у відповідному інваріантному підпросторі.

26. Досліджено спектральні властивості граничних мір динамічних систем конфлікту, що моделюють альтернативну боротьбу супротивників.

Показано, що типові траєкторії таких систем збігаються до інваріантних взаємно

сингулярних мір. Доведено, що майже завжди самі граничні міри є чисто сингулярно неперервними. Знайдено умови, при яких граничні міри належать

фіксованому спектральному типу: чисто сингулярно неперервному, чисто точковому, або чисто абсолютно неперервному.

27. Досліджено граничні розподіли станів динамічної системи конфлікту асоційованої з парою стохастичних матриць нескінченного рангу. Дано опис цих станів в термінах нескінчених добутків розкладів Хана - Жордана дискретних зарядів. Встановлено параметризацію обмежених знизу суперсингулярно збурених самоспряжених операторів використовуючи шкали гільбертових просторів $\mathcal{H}_{-k} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_k$, $k > 0$. Параметризацію одержано в термінах допоміжних операторів S , які діють з позитивного простору в негативний $S : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{-k}$ і є такими, що їх ядро $\text{Ker} S$ щільне в $\mathcal{H}_{k/2}$.

28. Вивчено властивості структурно подібних мір на відрізку. Показано, що довільна структурно подібна міра на $[0, 1]$ є образ-мірою нескінченного прямого добутку деякої послідовності дискретних ймовірнісних мір.

29. Досліджено модель динамічної системи конфліктної тріади, яка описує взаємодію між трьома природними субстанціями: популяцією біологічного виду (життя), навколишнім середовищем (ресурс існування), та негативними факторами для існування (інфекція, зло). Встановлено наявність основних фаз співіснування субстанцій тріади: стану динамічної рівноваги (стабільної нерухомої точки), циклічних атракторів, періодично осцилюючих траєкторій, та еволюцій близьких до хаотичних. На конкретних моделях показано існування біфуркаційних точок та порогів переходу між різними фазами.

Головні результати останньої роботи полягає в побудові моделей, які демонструють наявність усіх основних фаз співіснування субстанцій типо-

вої конфліктної тріади: стан динамічної рівноваги (стабільна, нерухома точка), фаза циклічного атрактора (траєкторія пульсуючої еволюції кожної із субстанцій), зона біфуркацій, яка містить, зокрема, можливість складної поведінки з переходами між каскадом циклічних атракторів, накінець – фаза квазі-хаотичної поведінки. Усі такі фази співіснування конфліктних субстанцій дуже часто зустрічаються в природі. Так, рівноважний стан (нерухома стабільна точка) є характерним для співіснування різного виду бактерій в живій істоті, коли найнебезпечніші мікроби існують в здоровому організмі, але не перевищують припустимої концентрації і не викликають явних відхилень (звичайна динамічна рівновага). Лише досить значний зовнішній вплив здатен порушити такий стан рівноваги і привести до створення пріоритету якомусь типу бактерій, що приводить до симптомів певної хвороби. Інша типова фаза – циклічний атрактор, спостерігається, наприклад, коли сезонні (циклічні) епідемії грипу обумовлені вичерпанням повноцінних джерел життєвих ресурсів та збільшеною концентрацією (перенаселенням) біологічного виду в окремих регіонах. Ця фаза характерна для багатьох коливальних процесів природи. Звичайно, ці фази, як певні стани динамічних систем конфлікту, виникають в наших моделях лише при певних значеннях параметрів взаємодії. В переважній більшості ситуацій спостерігається складніша, часом практично хаотична поведінка системи. Усе це означає, що розвинутий тут підхід і побудована теорія можуть бути застосований як інструмент дослідження конкретних конфліктних задач з трьома конфліктуючими опонентами.

30. Закладено основи теорії ємностей конденсаторів зі зчисленною (скінченною чи нескінченною) кількістю пластин довільної топології у локально компактному просторі. Під конденсатором розуміється зчислений, локально скінченний набір довільних множин, кожній з яких приписано знак $+1$ або -1 та замикання пластин протилежного знаку взаємно не перетинаються. Дослідження були мотивовані тим добре знаним фактом, що у

некомпактному випадку основна варіаційна задача теорії внутрішніх ємностей конденсаторів є, взагалі кажучи, нерозв'язною і цей феномен має місце навіть за вельми природних припущень (скажімо, для ядер Ньютона, Гріна або Рісса в евклідовому просторі та замкнутих двохпластинних конденсаторів). Тому було важливо знайти постановки варіаційних задач, дуальних до основної варіаційної задачі (і які, отже, могли б слугувати новими еквівалентними означеннями ємностей конденсаторів), але вже завжди розв'язних — скажімо, навіть для незамкнених конденсаторів.

Для довільного додатно визначеного ядра у локально компактному просторі, що задовольняє відому умову В. Fuglede узгодженості між сильною та широкою топологіями над простором мір Радона зі скінченною енергією, задачі з бажаними властивостями поставлено та розв'язано. Їхні розв'язки приводять до природного узагальнення класичного поняття внутрішньої рівноважної міри, асоційованої з множиною. Дано опис цих розв'язків, їхніх потенціалів та відповідних рівноважних констант, вивчено властивості їх єдиності та неперервності, виділено характеристичні властивості.

Такі результати є новими та представляють інтерес навіть для конденсаторів зі скінченною кількістю пластин, що раніше вже досліджувалися в математичній літературі. Однак з тою ж самою загальністю аналогічну теорію було побудовано для конденсаторів з нескінченною кількістю пластин. Це вимагало осмислення відповідних понять нескінченномірних векторних мір, визначення належним чином їх енергій і потенціалів та розвитку нових ефективних методів.

31. Запропоновано та обґрунтовано нові ефективні методи дослідження екстремальних задач теорії потенціалу над некомпактними класами нескінченномірних векторних мір Радона, асоційованих з конденсаторами. Для подолання труднощів, викликаних нескінченною розмірністю векторних мір та їх широкою некомпактністю, розроблено принципово новий підхід у порівнянні з раніше відомими, що ґрунтується на впровадженні над

векторними мірами належних метричних структур та має у своїй основі наступні дві доведені у звітний період теореми. Перша стверджує, що для довільного додатно визначеного ядра множина всіх нескінченномірних векторних мір Радона, асоційованих з конденсатором, утворює напівметричний простір, ізометричний до належним чином визначеного напівметричного простору скалярних мір. Друга теорема виділяє топологічні підпростори напівметричного простору нескінченномірних векторних мір, які за певних вельми загальних припущень виявляються повними, а індукована на них сильна топологія сильнішою ніж широка.

32. Як приклад застосування розроблених методів дослідження екстремальних задач теорії потенціалу над нескінченномірними векторними мірами Радона, знайдено достатні умови розв'язності задачі про мінімум енергій векторних мір, асоційованих з некомпактним конденсатором з нескінченною кількістю пластин.

33. Вивчено задачу Гаусса про мінімум енергій з верхніми крайовими умовами за наявності зовнішнього поля f , де мінімум розглядається над класом усіх додатних мір Радона, що зосереджені на заданій некомпактній замкненій множині Σ і задовольняють певні нормування та крайові умови. Доведено теореми про існування та єдиність рівноважної міри, вивчено властивості її неперервності у широкій та сильній топологіях, коли крайові умови та множина Σ змінюються одночасно, дано опис f -вагового потенціалу рівноважної міри та виділено його характеристичні властивості. Такі результати є новими навіть для класичних ядер, що істотно для застосувань у конструктивній теорії функцій та до задач індустріальної математики.

34. Сумісно з G. Of та W. L. Wendland, в евклідовому просторі розмірності $n \geq 3$ дано конструктивний та чисельний розв'язок варіаційної задачі Гаусса про мінімум вагових ньютонівих енергій борелевих мір, асоційованих з конденсатором (Γ_1, Γ_2) . Тут Γ_1, Γ_2 — компактні $(n - 1)$ -розмірні мно-

говиди без краю, що не перетинаються та задовольняють умову Ліпшиця. Це стало можливим дякуючи теоремі про еквівалентність задачі Гаусса певній задачі мінімізації у просторі Соболева–Слободецького $H^{-1/2}(\Gamma)$, де $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Отримані за звітний період результати викладено в роботах [61]–[85].

35. Доведена теорема про існування і асимптотичну форму обертаючої структури, породженої із стаціонарного просторово-однорідного розв’язку задачі побудови центральних многовидів для рівнянь, інваріантних відносно групи обертання кола.

36. Розглянута система звичайних диференціальних рівнянь, що описують динаміку двох взаємозв’язаних одномодових напівпровідникових лазерів. Зокрема, вивчаються розв’язки, що відповідають амплітудній синхронізації. Показано, що множина таких розв’язків утворює в фазовому просторі

тривимірний інваріантний многовид. Досліджувалась стійкість траєкторій на цьому многовиді як у тангенціальному, так і трансверсальному до нього напрямках. Встановлено умови існування глобально асимптотично стійких розв’язків рівнянь на многовиді, що синхронізовані за амплітудою.

За результатами дослідження було опубліковано 38 робіт з них в іноземних фахових журналах– 16, у вітчизняних фахових журналах– 15, в препринтах– 7. 5 робіт прийнято до друку. Зроблено 25 доповідей на міжнародних конференціях. В тезах конференцій опубліковано 25 рефератів(тез). Захищено 2 кандидатські дисертації і підготовлена до захисту 1 кандидатська дисертація. Основні результати роботи викладені у наступних 7-ми розділах.

1 Побудова рівноважних статистичних станів, що відповідають сингулярним взаємодіям.

1.1 Евклідові стани квантових кристалів.

Є загальноприйнятим, що для дослідження різних фізичних явищ в квантових кристалах треба досліджувати нескінченну систему взаємодіючих ангармонійних осциляторів, які розташовані у вузлах ν -вимірної ґратки $\mathbb{Z}^\nu$. Формальний Гамільтоніан такої системи (у випадку двох-частинкової взаємодії) можна подати у такому вигляді:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j \in \mathbb{Z}^\nu} \Delta_j + \sum_{j \in \mathbb{Z}^\nu} W(q_j) + \frac{J}{2} \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^\nu, i \neq j} Q(q_i, q_j) - \sum_{j \in \mathbb{Z}^\nu} h q_j, \quad (1)$$

де m це маса частинки-осцилятора, Δ_j ; це оператор Лапласа, що відповідає кінетичній енергії частинки, яка може рухатись (коливатись) у d -вимірному

($d \leq \nu$) евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$. Він визначений в одно-частинковому Гільбертовому просторі $L^2(\mathbb{R}^d, dq)$, де dq це міра Лебега. У випадку коли $d < \nu$ кристал називають поляризованим. Гамільтоніану (9) не можна надати строгого математичного сенсу, бо сумування в (9) ведеться по всій нескінченній ґратці $\mathbb{Z}^\nu$. Для того, щоб строго визначити математичну проблему спершу розглядають локальні гамільтоніани

$$H_\Lambda = H_0^\Lambda + V^\Lambda, \quad (2)$$

де

$$H_0^\Lambda = -\frac{1}{2m} \sum_{j \in \Lambda} \Delta_j + \frac{1}{2} a \sum_{j \in \Lambda} q_j^2 + \frac{J}{4} \sum_{\langle i,j \rangle \in \Lambda} (q_i - q_j)^2 + C_\Lambda, \quad (3)$$

це Гамільтоніан гармонійної системи, а V^Λ описує ангармонійну взаємодію і фактично задає модель, в рамках якої вивчається проблема. Гамільтоніан

(9) задається в локальному гільбертовому просторі

$$\mathcal{H}_\Lambda = \bigotimes_{j \in \Lambda} L^2(\mathbb{R}^d, dq_j) \simeq L^2(\mathbb{R}^{d|\Lambda|}, dq_\Lambda),$$

$$dq_\Lambda = \prod_{j \in \Lambda} dq_j,$$

Стан системи описують локальними Гіббсовими станами,, які для скінченної температури $T > 0$ (або $\beta = (kT)^{-1}$) визначаються формулою

$$\rho_\Lambda^\beta(A) = \frac{\text{Tr}(Ae^{-\beta H_\Lambda})}{Z_\beta(\Lambda)}, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (4)$$

де $Z_\beta(\Lambda) = \text{Tr} e^{-\beta H_\Lambda}$ і $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ - алгебра обмежених операторів в $\mathcal{H}_\Lambda$, що відповідають спостережуваним величинам фізичної природи. Основна математична проблема полягає в знаходженні методів для побудови станів нескінченних систем, тобто дослідженню термодинамічної границі локальних гіббсових станів

$$\rho^\beta(A) = \lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^d} \rho_\Lambda^\beta(A). \quad (5)$$

Основним технічним прийомом, що дозволяє застосувати техніку, що застосовується при дослідженні класичних систем є представлення сліду у формулі (4) за допомогою функціональних інтегралів виду:

$$\rho_\Lambda^\beta\left(\prod_{l=0}^n A_{t_l}^{(l)}\right) = \int \prod_{l=0}^n \mathcal{A}^{(l)}(\phi_\Lambda(t_l)) d\mu^\Lambda(\phi) := \langle \prod_{l=0}^n \mathcal{A}^{(l)}(\cdot) \rangle_{\mu^\Lambda}, \quad (6)$$

де

$$A = \prod_{l=0}^n A_{t_l}^{(l)} = A_0^{(0)} e^{-t_1 H_\Lambda} A_0^{(1)} e^{-(t_2 - t_1) H_\Lambda} \dots e^{-(t_n - t_{n-1}) H_\Lambda} A_0^{(n)} e^{t_n H_\Lambda}, \quad (7)$$

а оператори $A_0^{(k)}, k = 0, \dots, n$ є операторами множення на функцію

$$(A_0 f)(x_\Lambda) = \mathcal{A}(x_\Lambda) f(x_\Lambda). \quad (8)$$

Міра μ^Λ будується як збурення умовних мір Вінера, що зосереджені на просторах неперервних "броунівських мостів".

У попередніх роботах [57], [3]–[5] вивчалась критична поведінка квантових кристалів у режимі великих квантових флуктуацій для поліноміальних моделей. Таку поведінку можна моделювати параметром, що відповідає масі осциляторів. Виявилось, що при зменшенні маси частинок до деякого критичного значення у системі зникають структурні фазові переходи навіть при температурах, що наближаються до абсолютного нуля $T \approx 0$. Деякі попередні результати по даній проблемі були відомі і раніше (див., наприклад роботу [57], але остаточний результат про єдиність Гіббсового стану (а значить відсутність будь-якої критичної поведінки) був отриманий у роботах [3]–[5] для поліноміальних ангармонійних взаємодій і в роботі [53] для неpolіноміального ангармонійного потенціалу з двома мінімумами:

$$V(q) = \frac{1}{2}a^2 + b e^{-\delta q^2/2}, \quad b \geq 0, \delta \geq 0, \quad q \in \mathbb{R}^d. \quad (9)$$

Основний результат роботи [53] формулюється наступною теоремою.

Теорема 1. *Для системи квантових частинок з гамільтоніаном (2), (3), (9) існує достатньо мала маса m_* така, що для довільної $0 < m < m_*$ слабка границя міри (6)*

$$\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{Z}^\nu} \mu^\Lambda(\cdot) = \mu(\cdot), \quad (10)$$

існує, і μ є єдиною на просторі $(\Omega_{\hat{\beta}, \mathbb{Z}^\nu}, \Sigma_{\hat{\beta}, \mathbb{Z}^\nu})$ у множині мір помірною росту, для всіх значень $T > 0$. Для $T = 0$ границя (10) також існує, але не є евклідовою гіббсовою мірою. Гранична міра відповідає квантовому стану на алгебрі $\mathfrak{A}_0$, який може бути неперервно поширений на алгебру усіх локальних спостережених $\mathfrak{A}$.

Доведення теореми ґрунтується на побудові нових кластерних розкладів для станів, що визначаються формулою (4). Побудова таких розкладів і детальне доведення теореми викладено в роботі [53].

1.2 Рівноважні стани, що відповідають системам з багаточастинковим сингулярним потенціалом.

Одним з найбільш фундаментальних об'єктів в класичній статистичній механіці є міра Гіббса. Це ймовірнісна міра, за допомогою якої обчислюються середні фізичних спостережуваних величин: енергії, числа частинок, густини, тощо. Побудова міри Гіббса для нескінченних систем взаємодіючих частинок є складною математичною проблемою. Для нескінченної системи невзаємодіючих тотожних точкових частинок (класичний ідеальний газ) міра Гіббса збігається з добре вивченою мірою Пуассона. У випадку взаємодіючих частинок міра Гіббса є, фактично, "збуренням" міри Пуассона. Коли система скінченна, таке збурення можна записати у явному вигляді, тобто міра Гіббса є абсолютно неперервною відносно міри Пуассона. Відповідна щільність, що є похідною Радона-Нікодіма, виражається через потенціал взаємодії між частинками. Коли ж вона нескінченна, таку схему побудови Гіббсової міри не можна застосовувати, бо не існує відповідної щільності.

З точки зору фізичних застосувань середні спостережувальних величин зручніше виражати через так звані кореляційні функції, означення яких подано трохи нижче. Кореляційні функції залежать від скінченного числа змінних i , наприклад, у випадку розріджених статистичних систем можуть бути розраховані по теорії збурень. Кожній мірі Гіббса відповідає нескінченна послідовність кореляційних функцій i навпаки, якщо нескінченна послідовність функцій задовольняє певним умовам, то такій послідовності відповідає міра Гіббса. Ця відповідність дозволяє звести проблему побудови міри Гіббса до проблеми побудови послідовності кореляційних функцій.

Визначимо спершу простір конфігурацій, який визначає положення частинок нескінченної системи. Нехай $\mathbb{R}^d$ це d -вимірний евклідовий простір. Через $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ми позначимо сім'ю всіх борелівських множин в $\mathbb{R}^d$. Через $\mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ будемо позначати систему всіх обмежених множин з $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Визначимо простір конфігурацій в $\mathbb{R}^d$ як множину локально скінченних підмножин

$$\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}^d} := \{ \gamma \subset \mathbb{R}^d \mid |\gamma \cap \Lambda| < \infty, \text{ для всіх } \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \}, \quad (11)$$

де $|A| := \text{card} A$ це кількість точок множини A .

Для довільних $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ визначимо також простір скінченних конфігурацій Γ_0 :

$$\Gamma_0 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma^{(n)}, \quad \Gamma^{(n)} := \{ \eta \subset \mathbb{R}^d \mid |\eta| = n \}. \quad (12)$$

Простір скінченних конфігурацій в обмеженому об'ємі $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ позначимо через Γ_Λ :

$$\Gamma_\Lambda := \{ \gamma \in \Gamma_0 \mid \gamma \subset \Lambda, \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d) \}, \quad (13)$$

У цьому розділі ми будемо розглядати нескінченну систему точкових тотожних частинок, що взаємодіють за допомогою багаточастинкового потенціалу V , який задається нескінченною послідовністю p - частинкових потенціалів:

$$V = (0, 0, V_2(x_1, x_2), V_3(x_1, x_2, x_3), \dots, V_p(x_1, \dots, x_p), \dots) \quad (14)$$

Метою дослідження у цьому розділі є отримання рівномірних оцінок на сім'ю кореляційних функцій $\rho(\eta)$, які дозволяють довести існування міри Гіббса.

Вираз для міри Гіббса у скінченному об'ємі у випадку великого канонічного ансамблю має вигляд:

$$\mu_\Lambda(d\gamma) = \frac{1}{Z_\Lambda(z, \beta)} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (15)$$

де

$$Z_\Lambda(z, \beta) = \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma), \quad (16)$$

а інтеграл за мірою $\lambda_{z\sigma}$ можна записати у вигляді:

$$\int_{\Gamma_\Lambda} F(\gamma) \lambda_\sigma(d\gamma) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int_{\Lambda} \cdots \int_{\Lambda} F_N(x_1, \dots, x_N) \sigma(dx_1) \cdots \sigma(dx_N). \quad (17)$$

Для довільної конфігурації $\eta \in \Gamma_\Lambda$ кореляційна функція, що відповідає мірі (15),(16) має вигляд:

$$\rho_\Lambda(\eta) = \frac{z^{|\eta|}}{Z_\Lambda(z, \beta)} \int_{\Gamma_\Lambda} e^{-\beta U(\eta \cup \gamma)} \lambda_{z\sigma}(d\gamma). \quad (18)$$

Отже побудову гіббсівської міри на нескінченних конфігураціях Γ можна звести до побудови сім'ї кореляційних функцій $\rho(\eta)$ на просторі скінченних конфігурацій $\eta \in \Gamma_0$. Остання проблема зводиться до знаходження термодинамічної границі $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^d$ у виразі (18).

Щоб виконати цей перехід треба накласти додаткові умови на повну енергію довільної конфігурації $\gamma \in \Gamma_\Lambda$ та енергію взаємодії двох конфігурацій $\eta, \gamma \in \Gamma_\Lambda$. Такими умовами є *надстійкість* взаємодії та *регулярність знизу*. Щоб визначити ці поняття введемо розбиття простору $\mathbb{R}^d$ на елементарні d -кубики.

Нехай $\overline{\Delta}_a$ - це розбиття простору $\mathbb{R}^d$ на кубики $\Delta_a(r)$ з ребром $a > 0$ і центром в точці ar , $r \in \mathbb{Z}^d$:

$$\Delta_a(r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a(r^i - 1/2) \leq x^i < a(r^i + 1/2)\}. \quad (19)$$

Ми будемо писати Δ замість $\Delta_a(r)$, якщо по контексту буде зрозуміло, про який кубик йдеться мова. Не обмежуючи загальності, ми в цій роботі будемо розглядати тільки ті множини $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$, які є об'єднанням кубиків $\Delta_a(r)$.

Означення 1. Взаємодія U називається *надстійкою* ("superstable" за Рю-елем) (SS), якщо існують константи $A > 0$, $B \geq 0$ та розбиття $\overline{\Delta}_{a_0}$,

такі що

$$U(\eta) \geq \sum_{\Delta \in \overline{\Delta}_{a_0}} (A|\eta_\Delta|^2 - B|\eta_\Delta|), \quad \text{для всіх } \eta \in \Gamma_0. \quad (20)$$

Означення 2. Взаємодія U називається регулярною знизу (LR), якщо існує спадна позитивна функція Ψ на $\mathbb{N}_0$ така що

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}^d} \Psi(|r|) < \infty, \quad (21)$$

а енергія взаємодії $W(\eta; \gamma)$ задовольняє наступну нерівність:

$$W(\eta; \gamma) \geq -\frac{1}{2} \sum_{r, s \in \mathbb{Z}^d} \Psi(|r - s|) (|\eta_{\Delta_{a_0}(r)}|^2 + |\gamma_{\Delta_{a_0}(s)}|^2) \quad (22)$$

для всіх $\eta, \gamma \in \Gamma_0$.

Проблема існування гіббсового стану тісно пов'язана із встановленням рівномірних оцінок на кореляційні функції в обмеженому об'ємі. Для потенціалів, які задовольняють умовам (123)–(129), такі оцінки були вперше отримані в роботі Рюеля [54]:

$$\rho_\Lambda(\eta) \leq \xi^{|\eta|}, \quad \eta \in \Gamma_\Lambda, \quad (23)$$

де ξ не залежить від Λ .

Рівномірні оцінки на систему кореляційних функцій дозволяють будувати сім'ю нормованих, попарно узгоджених щільностей розподілів, які визначають міру Гіббса на нескінченних конфігураціях Γ (див. також [54]).

В роботах [49, 52] були отримані узагальнення оцінок Рюеля [54] для двочастинкових потенціалів взаємодії, а в роботі [42] для багаточастинкових потенціалів з обмеженим радіусом дії:

$$\rho_\Lambda(\eta) \leq \xi^{|\eta|} e^{-\frac{1}{2}U^+(\eta)}, \quad \eta \in \Gamma_\Lambda. \quad (24)$$

В роботі [48] останній результат узагальнений на багаточастинкові потенціали з нескінченним радіусом дії. Спираючись на деякі аргументи роботи

[31], оцінку (24) і теорему Прохорова в роботі [42] вдалось отримати дуже просте і елегантне доведення того факту, що сім'я мір

$$\{\mu_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)\},$$

які відповідають сім'ї кореляційних функцій $\rho_\Lambda(\eta)$ є відносно компактною, що, в свою чергу, забезпечує існування принаймні однієї граничної міри μ . У роботі [42] було також доведено, що μ задовольняє рівняння Георгії-Нгуйєна-Цессіна, тобто $\mu \in G_V(z, \beta)$, де $G_V(z, \beta)$ це множина усіх станів Гіббса, що відповідають потенціалу взаємодії V та термодинамічним параметрам z, β . Цей результат можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема 2. ([42]) *Нехай потенціал V є таким, що сім'я кореляційних функцій $\rho_\Lambda(\eta)$ задовольняє оцінку (24). Тоді для будь-яких $\beta, z > 0$ існує принаймні один стан Гіббса, тобто*

$$G_V(z, \beta) \neq \emptyset.$$

У роботі Рюеля [54] рівномірні оцінки були отримані для потенціалів, які забезпечували умову надстійкості (123) та умову регулярності знизу (129). Для парних потенціалів взаємодії ці умови можна забезпечити. Але для багаточастинкових потенціалів (14) загального вигляду умову регулярності знизу (129) довести мабуть не можливо, за винятком якихось особливих умов (наприклад позитивності) на p -частинкові потенціали при $p \geq 3$. Тому метод, який був розроблений в роботах [49], [48] є поки що єдиним технічним інструментом, який дозволяє отримати необхідні оцінки.

Умови на багаточастинковий потенціали взаємодії

Розглянемо багаточастинковий потенціал взаємодії загального типу, який визначається сім'єю p -частинкових потенціалів $V_p : (R^d)^{\otimes p} \rightarrow \mathbb{R}$, $p \geq 2$. На сім'ю потенціалів $V := \{V_p\}_{p \geq 2}$ ми будемо накладати наступні умови:

В1. Неперервність.

$$V_p \in C(\widetilde{(\mathbb{R}^d)^{\otimes p}}), \quad p \geq 2,$$

де

$$\widetilde{(\mathbb{R}^d)^{\otimes n}} = \{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes n} \mid x_k \neq x_l \text{ при } k \neq l \}.$$

В2. Симетричність. Для довільного $p \geq 2$, довільних $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^d)^{\otimes p}$ і довільної перестановки π чисел $\{1, \dots, p\}$

$$V_p(x_1, \dots, x_p) = V_p(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(p)}).$$

В3. Трансляційна інваріантність. Для довільного $p \geq 2$, довільних $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^d)^{\otimes p}$ і довільного $b \in \mathbb{R}^d$

$$V_p(x_1, \dots, x_p) = V_p(x_1 + b, \dots, x_p + b).$$

Потенціальна енергія довільної конфігурації $\gamma \in \Gamma_0$ визначається формулою (??).

Так само, як і у випадку парного потенціалу визначимо для кожного $p \geq 2$ додатні та від'ємні частини:

$$V_p = V_p^+ - V_p^-, \quad (25)$$

де

$$V_p^+ := \max\{0, V_p\}, \quad V_p^- := -\min\{0, V_p\}. \quad (26)$$

У випадку парного потенціалу з технічних міркувань, які були використані при доведенні теореми 2.2 роботи [49], ми будували додаткове розбиття потенціалу взаємодії. За допомогою такого розбиття енергія довільної конфігурації $\Gamma \in \Gamma_0$ представлялась у вигляді деякої додатної частини і енергії, яка задовольняє умову стійкості. У цьому розділі розбиття такого типу ми запишемо у вигляді додаткової умови, яка гарантує надстійкість повної енергії $U(\gamma)$.

В4. Надстійкість. Для довільного $p \geq 2$ потенціал V_p може бути представлений у вигляді:

$$\begin{aligned} V_p &= \tilde{V}_p^+ + V_p^{(st)}, \quad V_p^{(st)} = \bar{V}^+ + V_p^-, \\ \tilde{V}^+ &:= (\tilde{V}_p^+)_{p \geq 2} \quad V^{(st)} := (V_p^{(st)})_{p \geq 2}, \end{aligned} \quad (27)$$

де $\tilde{V}_p^+ + \bar{V}^+ = V_p^+$, а $V_p^{(st)}$, $p \geq 2$ забезпечує стійкість повної енергії взаємодії, побудованої за потенціалом $V^{(st)}$, тобто

$$U^{(st)}(\eta) = U_{V^{(st)}}(\eta) \geq -B|\eta|. \quad (28)$$

Щоб сформулювати умови на потенціали V_p , введемо деякі допоміжні конструкції. Нехай $p \geq 2$ та $N \in \mathbb{N}$. Для довільного об'єднання $X_N := \cup_{j=1}^N \Delta_j$ кубиків з розбиття $\bar{\Delta}_a$ (див. (19)) і довільного $\varepsilon \geq 0$ визначимо такі величини:

$$I_p^{k_1, \dots, k_N}(\Delta_1; \dots; \Delta_N) := \sup_{\substack{x_{i_1}^{(1)} \in \Delta_1, \dots, x_{i_N}^{(N)} \in \Delta_N \\ i_1 = \overline{1, k_1}, \dots, i_N = \overline{1, k_N}}} V_p^-(x_1^{(1)}, \dots, x_{k_N}^{(N)}), \quad (29)$$

де $k_1 + \dots + k_N = p$, $k_j \geq 1$, $j = \overline{1, N}$ і

$$\begin{aligned} I_p^{k_1, \dots, k_M | \bar{k}}(\Delta_1; \dots; \Delta_M | \varepsilon; (\Delta)_\pi) &:= \\ &= \sum_{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{\bar{k}} \in \bar{\Delta}_a} I_p^{k_1, \dots, k_M, 1, 1, \dots, 1}(\Delta_1; \dots; \Delta_M; \Delta'_1; \dots; \Delta'_{\bar{k}}) \prod_{i=1}^{\bar{k}} \left(1 + d_{\Delta'_i, \Delta_{\pi(i)}}^\varepsilon\right), \end{aligned} \quad (30)$$

де $d_{\Delta'_i, \Delta_{\pi(i)}}^\varepsilon = \left(\text{dist}(\Delta'_i, \Delta_{\pi(i)})\right)^\varepsilon$, π -відображення множини індексів $\{1, \dots, \bar{k}\}$ у множину $\{1, \dots, M\}$, $(\Delta)_\pi := \{\Delta_{\pi(1)}, \dots, \Delta_{\pi(\bar{k})}\}$ і $k_1 + \dots + k_M + \bar{k} = p$.

Зауважимо, що, внаслідок трансляційної інваріантності потенціалів взаємодії, у випадку $M = 1$ усі індекси $\pi(i) = 1$, а величина

$$I_p^{k_1 | \bar{k}}(\Delta_1 | \varepsilon; \Delta_1) = I_p^{k_1 | \bar{k}}(\varepsilon), \quad (31)$$

тобто не залежить від положення кубика Δ_1 . Для додатних частин $\tilde{V}_p^+$ потенціалів взаємодії визначимо величину

$$v_p^{k_1, \dots, k_N}(\Delta_1, \dots, \Delta_N) := \inf_{\substack{x_{i_1}^{(1)} \in \Delta_1, \dots, x_{i_N}^{(N)} \in \Delta_N \\ i_1 = \overline{1, k_1}, \dots, i_N = \overline{1, k_N}}} \widetilde{V}_p^+(x_1^{(1)}, \dots, x_{k_N}^{(N)}). \quad (32)$$

В4' .Притягувально-відштовхувальні властивості. Існує $a = a_0 > 0$, таке що для довільного $N \in \mathbb{N}$, довільної множини $X_N := \cup_{j=1}^N \Delta_j$, $\Delta_j \in \overline{\Delta}_{a_0}$ виконуються наступні нерівності:

(i) для будь-якого $\Delta \in \overline{\Delta}_{a_0}$ і будь якого $p \geq 2$

$$V_p(x_1, \dots, x_p) \geq 0, \quad \text{якщо} \quad \{x_1, \dots, x_p\} \subset \Delta. \quad (33)$$

(ii) для будь-якого $p \geq 2$, $1 \leq N < p$, та $\pi : \{1, \dots, n\} \mapsto \{1, \dots, N\}$

$$v_p^{k_1, \dots, k_N}(\Delta_1, \dots, \Delta_N) \geq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{m_i \geq 1, i=\overline{1, N}; n \geq 1 \\ m_1 + \dots + m_N + n = p+l}} C_{k_1}^{m_1} \dots C_{k_N}^{m_N} (2p)^n I_{p+l}^{m_1, \dots, m_N | n}(\Delta_1, \dots, \Delta_N; \varepsilon, (\Delta)_\pi), \quad (34)$$

де $k_1 + \dots + k_N = p$, $C_k^m = k!/m!(k-m)!$, якщо $k \geq m$ і $C_k^m = 0$ якщо $m > k$.

Сформулюємо основний результат цього підрозділу розділу і наведемо оцінки, які забезпечують доведення основної теореми.

Теорема 3. Припустимо, що потенціал взаємодії $V = \{V_p\}_{p \geq 2}$ задовольняє умови **В1** – **В4'**. Тоді, для довільних $\Lambda \in \mathcal{B}_c(\mathbb{R}^d)$ і довільних $\beta, z \geq 0$ існує константа $\xi = \xi(\beta, z)$, що не залежить від Λ , така що сім'я кореляційних функцій $\rho^\Lambda(\eta)$, задовольняє наступні нерівності:

$$\rho_\Lambda(\eta) \leq \xi^{|\eta|} e^{-\frac{1}{2}\beta U_{\widetilde{V}^+}(\eta)}, \quad \eta \in \Gamma_\Lambda. \quad (35)$$

Оцінка (35) забезпечує умову теореми 2.2, тобто існування гіббсівського стану для системи, взаємодія в якій задовольняє умови теореми 2.3.

2 Рівноважна динаміка типу Глаубера неперервних систем частинок як границя динамік типу Кавасакі

Простір конфігурацій Γ визначений у попередньому розділі формулою (11).

Ми можемо ототожнити $\gamma \in \Gamma$ з мірою Радона $\sum_{x \in \gamma} \varepsilon_x$ на $\mathbb{R}^d$, де ε_x — це міра Дірака в точці $x \in \mathbb{R}^d$ і $\sum_{x \in \emptyset} \varepsilon_x :=$ нульова міра. Справді, тоді для довільного компакту $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ маємо:

$$\gamma(\Lambda) = \sum_{x \in \gamma} \varepsilon_x(\Lambda) = |\gamma_\Lambda| < +\infty,$$

де $\gamma_\Lambda = \gamma \cap \Lambda$.

Таким чином, Γ можна вкласти у $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ і розглянути на Γ топологію $\mathcal{O}(\Gamma)$, індуковану топологією простору $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$. Тобто $\mathcal{O}(\Gamma)$ — це найслабша топологія, відносно якої всі відображення

$$\Gamma \ni \gamma \longmapsto \langle f, \gamma \rangle := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \gamma(dx) = \sum_{x \in \gamma} f(x)$$

є неперервними для довільної $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Відповідна до топології $\mathcal{O}(\Gamma)$ борелівська σ -алгебра $\mathfrak{B}(\Gamma)$ є, з іншого боку, найменшою σ -алгеброю, відносно якої всі відображення $N(\Lambda, \cdot)$, визначені як

$$\Gamma \ni \gamma \longmapsto N(\Lambda, \gamma) := |\gamma \cap \Lambda|,$$

є вимірними для довільної $\Lambda \in \mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d)$.

Нехай $\Lambda \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, покладемо

$$\Gamma_\Lambda = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cap \Lambda^c = \emptyset\}, \quad (36)$$

де $\Lambda^c = \mathbb{R}^d \setminus \Lambda$.

Нехай для $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\widetilde{\Lambda}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \Lambda^n \mid x_k \neq x_j, k \neq j\}.$$

Нехай також S_n — це група перестановок множини $\{1, \dots, n\}$.

Означимо для $\Lambda \in \mathcal{O}_c(\mathbb{R}^d)$ та $n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ множину

$$\Gamma_\Lambda^{(n)} := \{\gamma \in \Gamma_\Lambda \mid |\gamma| = n\}, \Gamma_\Lambda^{(0)} := \{\emptyset\}.$$

Існує бієкція $\widetilde{\Lambda}^n/S_n \rightarrow \Gamma_\Lambda^{(n)}$. Ця бієкція визначає локально компактну метризовану хаусдорфову топологію на $\Gamma_\Lambda^{(n)}$. Нехай $s_\Lambda^n : \widetilde{\Lambda}^n \rightarrow \Gamma_\Lambda^{(n)}$, така що $s_\Lambda^n : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \{x_1, \dots, x_n\} \in \Gamma_\Lambda^{(n)}$. Тоді

$$\Gamma_\Lambda = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_\Lambda^{(n)}.$$

Цей простір має звичайну топологію диз'юнктного об'єднання і відповідну борелівську σ -алгебру $\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$.

Для $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{O}_c(\mathbb{R}^d)$, $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ розглянемо відображення $p_{\Lambda_2, \Lambda_1} : \Gamma_{\Lambda_2} \mapsto \Gamma_{\Lambda_1}$, таке що

$$p_{\Lambda_2, \Lambda_1}(\gamma) := \gamma_{\Lambda_1}, \quad \gamma \in \Gamma_{\Lambda_2}.$$

Тоді вимірний простір $(\Gamma, \mathfrak{B}(\Gamma))$ є проективною границею вимірних просторів $(\Gamma_\Lambda, \mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda))$, $\Lambda \in \mathcal{O}_c(\mathbb{R}^d)$, тобто, $\mathfrak{B}(\Gamma)$ — найменша σ -алгебра на Γ , така що всі відображення

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto p_\Lambda \gamma := \gamma \cap \Lambda = \gamma_\Lambda \in \Gamma_\Lambda$$

є $\mathfrak{B}(\Gamma)/\mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$ -вимірними. Крім цього, $\mathfrak{B}(\Gamma) \cap \Gamma_\Lambda = \mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda)$.

Якщо на просторі $(\Gamma, \mathfrak{B}(\Gamma))$ задана деяка міра μ , то сім'я мір $\{\mu^\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{O}_c(\mathbb{R}^d)\}$, де

$$\mu^\Lambda := \mu \circ p_\Lambda^{-1}$$

буде узгодженою, тобто для довільних $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{O}_c(\mathbb{R}^d)$, $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$

$$\mu^{\Lambda_2} \circ p_{\Lambda_2, \Lambda_1}^{-1} = \mu^{\Lambda_1}.$$

Навпаки, за теоремою Колмогорова про міру на проективній границі просторів, розділ 5, теорема 3.2), якщо задана система мір μ^Λ на вимірних просторах $(\Gamma_\Lambda, \mathfrak{B}(\Gamma_\Lambda))$, $\Lambda \in \mathcal{O}_c(\mathbb{R}^d)$, що є узгодженою, то існує єдина міра μ на $(\Gamma, \mathfrak{B}(\Gamma))$, така що $\mu^\Lambda = \mu \circ p_\Lambda^{-1}$.

Зауважимо також, що при $\Lambda \in \mathfrak{B}(X)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ множина

$$C(\Lambda, n) := \{\gamma \in \Gamma \mid |\gamma \cap \Lambda| = n\}$$

належить $\mathfrak{B}(\Gamma)$. Більше того, $\mathfrak{B}(\Gamma)$ є σ -оболонкою системи множин $C(\Lambda, n)$, $\Lambda \in \mathcal{O}_c(\mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Для довільної $\Lambda \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ розглянемо найменшу σ -алгебру $\mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma)$, таку що всі відображення

$$\Gamma \ni \gamma \mapsto |\gamma \cap \Lambda'|, \quad \Lambda' \subset \Lambda, \Lambda' \in \mathfrak{B}_c(\mathbb{R}^d)$$

є $\mathfrak{B}_\Lambda(\Gamma)$ -вимірними.

Для довільної функції $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma \in \Gamma$, і довільних $x, y \in \mathbb{R}^d$ покладемо

$$\begin{aligned} (D_x^- F)(\gamma) &:= F(\gamma \setminus x) - F(\gamma), \\ (D_{xy}^{-+} F)(\gamma) &:= F(\gamma \setminus x \cup y) - F(\gamma). \end{aligned}$$

Нехай $a : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty)$ така функція, що $a(-x) = a(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, і $a \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$. Визначимо білінійні форми

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\varepsilon(F, G) &:= \frac{1}{2} \int_\Gamma \mu(d\gamma) \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(dx) \int_{\mathbb{R}^d} dy a_\varepsilon(x - y) \\ &\quad \times \exp[-E(y, \gamma \setminus x)] (D_{xy}^{-+} F)(\gamma) (D_{xy}^{-+} G)(\gamma), \quad \varepsilon > 0, \\ \mathcal{E}_0(F, G) &:= \alpha \int_\Gamma \mu(d\gamma) \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(dx) (D_x^- F)(\gamma) (D_x^- G)(\gamma), \end{aligned}$$

де $F, G \in \mathcal{FC}_b(C_0(\mathbb{R}^d), \Gamma)$, $a_\varepsilon(\cdot) = \varepsilon^d a(\varepsilon \cdot)$ і $\alpha = z^{-1} k_\mu^{(1)} \int_{\mathbb{R}^d} a(x) dx$. Тут кореляційна функція $k_\mu^{(1)} = \int_\Gamma \langle f, \gamma \rangle d\mu(\gamma) / \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$ для всіх неперервних f з компактим носієм, а міра μ задана стійким парним двочастинковим потенціалом ϕ . Кондратьєв, Літвінов та Рьокнер (2005) показали, що ці форми допускають замикання, а їх генератори на щільній області цилін-

дричних гладких функцій мають вигляд

$$(H_\varepsilon F)(\gamma) = - \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(dx) \int_{\mathbb{R}^d} dy a_\varepsilon(x-y) \times \exp[-E(y, \gamma \setminus x)] (D_{xy}^{++} F)(\gamma), \quad \varepsilon > 0, \quad (37)$$

$$(H_0 F)(\gamma) = - \alpha \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(dx) (D_x^- F)(\gamma) - \alpha \int_{\mathbb{R}^d} z dx \exp[-E(x, \gamma)] (D_x^+ F)(\gamma) \quad (38)$$

та є генераторами консервативних процесів Ханта. Основний результат цього розділу сформулюємо наступними теоремами, детальне доведення яких можна знайти в роботах [23], [24].

Теорема 4. *Нехай двочастинковий потенціал ϕ є стійким зі сталою $B > 0$ і*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |e^{-\phi(x)} - 1| z dx < (2e^{1+2B})^{-1}.$$

Нехай μ — відповідна гібсівська міра. Тоді для всіх неперервних функцій f з компактним носієм

$$H_\varepsilon e^{\langle \varphi, \cdot \rangle} \rightarrow H_0 e^{\langle \varphi, \cdot \rangle} \text{ в } L^2(\Gamma, \mu) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

Теорема 5. *Якщо додатково потенціал ϕ є позитивним, то є також збіжність скінченновимірних розподілів відповідних процесів.*

3 Теорія сингулярних збурень.

3.1 Метод оснащених гільбертових просторів в теорії супер-сингулярних збурень самоспряжених операторів.

Ця тема досліджувалась в роботах [1, 13, 14, 15].

В цих роботах запропонована класифікація обмежених знизу супер-сингулярних збурень $\tilde{A}$ фіксованого самоспряженого оператора $A \geq 1$. В A -шкалі гільбертових просторів $\mathcal{H}_{-k} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_k = \text{Dom} A^{k/2}$, $k > 0$ встановлена параметризація збурених операторів $\tilde{A}$ в термінах сингулярних квадратичних форм γ_S та асоційованих с ними операторів $S : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{-k}$, які мають наступну властивість: вони дорівнюють нулю на деякому підпросторі з $\mathcal{H}_k$ і при цьому цей підпростір є щільним в $\mathcal{H}_{k/2}$.

Далі введено класифікацію (параметризацію) супер-сингулярних збурень самоспряжених операторів в термінах шкали гільбертових просторів (тобто, методом оснащених просторів). Іншими словами, встановлено параметризацію обмежених знизу супер-сингулярно збурених самоспряжених операторів використовуючи шкали гільбертових просторів $\mathcal{H}_{-k} \supset \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_k$, $k > 0$. Параметризацію одержано в термінах допоміжних операторів S , які діють з позитивного простору в негативний $S : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{-k}$ і є такими, що їх ядро $\text{Ker} S$ щільне в $\mathcal{H}_{k/2}$.

Опишемо ці результати докладніше.

Нехай $A \geq 1$ позначає самоспряжений оператор в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ з нормою $\| \cdot \|$ та скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$. Можна вважати, що $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^d, dx)$, $d \geq 1$, а $A = H_0 + 1$ відповідає незбуреному оператору Лапласа $H_0 = -\Delta$.

Звичайним чином з оператором A асоціюється A -шкала гільбертових просторів

$$\mathcal{H}_{-k} \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_k, \quad k > 0, \quad (39)$$

де $\mathcal{H}_k = \text{Dom} A^{k/2}$ з нормою $\| f \|_k := \| A^{k/2} f \|$, $f \in \text{Dom} A^{k/2}$, а $\mathcal{H}_{-k}$ –

поповнення простору $\mathcal{H}$ по негативній нормі $\|f\|_{-k} := \|A^{-k/2}f\|$, $f \in \mathcal{H}$.
Усюди символ $\sqsupset$ позначає щільне і неперервне вкладення.

Щоб сформулювати головний результат необхідно ввести деякі означення.

Нехай оператор $A \geq 1$ зафіксовано. Припускаємо, що одиниця є точною нижньою гранню спектра оператора A , тобто, $1 = \inf_{\|f\|=1} (Af, f)$.

Означення. Самоспряжений оператор $\tilde{A} \geq \tilde{m} > -\infty$ належить класу $\mathcal{P}_k(A)$, $k > 0$, якщо заданий нижче підпростір з $\mathcal{H}_k = \text{Dom}(A^k)$, а саме

$$\mathcal{M}_k := \{\varphi \in \mathcal{H}_k \mid A_c^{k/2} \varphi = \tilde{A}_c^{k/2} \varphi\}, \quad \mathcal{H}_k = \mathcal{M}_k \oplus \mathcal{N}_k, \quad \mathcal{N}_k \neq \{0\} \quad (40)$$

є щільним в $\mathcal{H}_{k/2}$:

$$\mathcal{H}_{k/2} \sqsupset \mathcal{M}_k, \quad (41)$$

де $\tilde{A}_c := \tilde{A} + c$, $A_c := A + c$, з $c = 0$, якщо $\tilde{m} \geq 1$, та $c = 1 - \tilde{m}$, якщо $\tilde{m} < 1$.

Далі припускається, що число $\tilde{m}$ є точною нижньою гранню оператора $\tilde{A}$, тобто, $\tilde{m} := \inf_{\|f\|=1} (\tilde{A}f, f)$. Тому в (68) числа $c \in [0, \infty)$ та $k > 0$ є мінімальними.

Згідно відомої термінології, оператор $\tilde{A}$ є власно супер-сингулярно збуреним, якщо він належить класу $\mathcal{P}_k(A)$ з $k \geq 4$. При $k = 2$ він є просто сильно сингулярно збуреним. Далі ми розглядаємо лише оператори $\tilde{A} \in \mathcal{P}_k(A)$ з $k \geq 2$.

Ще одне означення. Нехай оператор S діє в A -шкалі, тобто $S : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{-k}$, $k > 0$ і є самоспряженим:

$$\langle S\varphi, \psi \rangle_{k, -k} = \langle \varphi, S\psi \rangle_{-k, k} =: \gamma_S(\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in \text{Dom}S = \text{Dom}S^*.$$

Означення. Оператор $S : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{-k}$, $k > 0$ належить класу $\mathcal{S}_{-k}(A)$, $k > 0$, якщо підпростір $\mathcal{M}_k := \{\varphi \in \mathcal{H}_k \mid \gamma_S[\varphi] = 0\}$ є щільним в $\mathcal{H}_{k/2}$:

$$\mathcal{H}_{k/2} \sqsupset \text{Ker}S, \quad \text{Ker}S \equiv \mathcal{M}_k. \quad (42)$$

Відзначимо, що при $k = 1$, ($k = 2$) оператори S та відповідні їм квадратичні форми γ_S звичайно зводяться сингулярними збуреннями $\mathcal{H}_{-1}$, ($\mathcal{H}_{-2}$ -класів). При $k \geq 4$ вони відомі як супер-сингулярні збурення. В останньому випадку множина $\text{Ker} S$ є щільною в $\mathcal{H}_2 = \text{Dom} A$ але симетричний оператор $\dot{A} := A \upharpoonright \text{Ker} S$ є істотно самоспряженим. Тому в такому разі проблема побудови збуреного оператора $\tilde{A}$ формально заданого сумою $A + S$ не має однозначного розв'язку до теперішнього часу.

Основні результати можна сформулювати наступними теоремами:

Теорема 6. *Існує бієктивна відповідність між операторами $\tilde{A} \in \mathcal{P}_2(A)$, $\tilde{A} \geq 1$ та обмеженими операторами $S \in \mathcal{S}_{-2}(A)$, які задовольняють нерівності:*

$$\| \varphi \|_1^2 \leq \langle S\varphi, \varphi \rangle_{-2,2} \leq \| \varphi \|_2^2, \quad \varphi \in \mathcal{N}_2 := \mathcal{H}_2 \ominus \text{Ker} S \quad (43)$$

Теорема 7. *($c > 0$, $k=2$) Існує бієктивна відповідність між операторами $\tilde{A} \in \mathcal{P}_2(A)$, $\tilde{A} \geq \tilde{m}$, $\tilde{m} < 1$ та обмеженими додатніми операторами $S \in \mathcal{S}_{-2}(A)$, які задовольняють нерівності:*

$$\| \varphi \|_{1,c}^2 \leq \langle S\varphi, \varphi \rangle_{-2,2} \equiv \gamma_S[\varphi] \leq \| \varphi \|_{2,c}^2, \quad \varphi \in \mathcal{N}_{2,c} := \mathcal{H}_{2,c} \ominus \text{Ker} S, \quad c = 1 - \tilde{m} \quad (44)$$

та для яких точна нижня границя $\inf_{\|\varphi\|_2=1} \gamma_S[\varphi] = 0$.

В найзагальнішому випадку результат можна зформулювати наступним чином.

Теорема 8. $\tilde{A} \in \mathcal{P}_2(A)$, $\tilde{A} \geq \tilde{m}$, $\tilde{m} < 1$:

$$\| \varphi \|_{1,c}^2 \leq \langle S\varphi, \varphi \rangle_{-2,2} \equiv \gamma_S[\varphi] \leq \| \varphi \|_{2,c}^2, \quad \varphi \in \mathcal{N}_{2,c} := \mathcal{H}_{2,c} \ominus \text{Ker} S, \quad c = 1 - \tilde{m} \quad (45)$$

та для яких точна нижня границя $\inf_{\|\varphi\|_2=1} \gamma_S[\varphi] = 0$.

Існує бієктивна відповідність між обмеженими знизу сингулярно збуреними операторами $\tilde{A} \in \mathcal{P}_k(A)$, $k \geq 2$, $\tilde{A} \geq \tilde{m} > -\infty$ та обмеженими додатніми операторами $S : \mathcal{H}_k \rightarrow \mathcal{H}_{-k}$ з класу $\mathcal{S}_{-k}(A)$, які задовольняють нерівності:

$$\| \varphi \|_{k/2,c}^2 \leq \gamma_S[\varphi] \equiv \langle S\varphi, \varphi \rangle_{-k,k} < \| \varphi \|_{k,c}^2, \quad \varphi \in \mathcal{N}_{k,c} := \mathcal{H}_{k,c} \ominus \text{Ker} S, \quad (46)$$

де $c = 1 - \tilde{m} > 0$, якщо $\tilde{m} < 1$, та $c = 0$, якщо $\tilde{m} \geq 1$. Відповідність встановлюється рівністю:

$$\tilde{A}_c^{-k/2} = (1 + \mathbf{A}_c^{-k/2} S) A_c^{-k/2}. \quad (47)$$

3.2 Спектральна теорія сингулярно збурених операторів математичної фізики

По цій темі опубліковано дві статті: [2, 6]. В них розвинуто методи спектрального аналізу для дослідження властивостей операторів математичної фізики збурених, зокрема, сингулярними квадратичними формами. Структура спектру операторів математичної фізики, та операторів енергії, становить найбільш важливу характеристику відповідних фізичних систем. Особливо актуальні проблеми виникають при дослідженні структури спектру сингулярно збурених операторів. Звичайно в спектрі виділяють три компоненти: точковий спектр (власні значення), абсолютно неперервний спектр (в задачах розсіювання) та сингулярно неперервний спектр, інтерес до якого зріс в останю декаду. Власне теорія сингулярних збурень самоспряжених операторів з точки зору спектральної структури – це відносно новий напрям в математичній фізиці. Він охоплює аналіз спектру усіх типів. Дослідження в цьому напрямі ідуть досить інтенсивні. Особливу увагу привертає структура сингулярного спектру в зв'язку з застосуваннями в фрактальній геометрії. І навики, методи фрактальної геометрії інтенсивно застосовуються до аналізу тонкої структури сингулярно неперервного спектру (тип, розмірність Хаусдорфа). Новий імпульс до проблем

структури сингулярно неперервного спектру виник у зв'язку з задачами теорії динамічних систем, які описують нелінійну динаміку з конфліктною взаємодією в складних фізичних системах.

Зокрема досліджувалась задача про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченного рангу

Вивчалися чисто сингулярні збурення скінченного рангу самоспряженого оператора A в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Збуренні оператори $\tilde{A}$ визначаються формулою Крейна для резольвент: $(\tilde{A} - z)^{-1} = (A - z)^{-1} + B_z$, $\text{Im} z \neq 0$, де B_z оператори скінченного рангу такі, що $\text{dom} B_z \cap \text{dom} A = \{0\}$. Для довільної системи ортонормованих векторів $\{\psi_i\}_{i=1}^{n < \infty}$ з умовою $\text{span}\{\psi_i\} \cap \text{dom} A = \{0\}$ та довільного набору дійсних чисел $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ побудовано оператор $\tilde{A}$, який розв'язує задачу на власні значення: $\tilde{A}\psi_i = \lambda_i\psi_i$, $i = 1, \dots, n$. Доведено єдиність $\tilde{A}$ при умові, що $\text{rank} B_z = n$.

Нехай в комплексному сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$ задано необмежений самоспряжений оператор $A = A^*$ з областю визначення $\mathfrak{D}(A) \equiv \text{dom} A$. Інший самоспряжений оператор $\tilde{A}$ в $\mathcal{H}$ називається чисто сингулярно збуреним відносно A , позначаємо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$, якщо область

$$\mathfrak{D} := \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) : Af = \tilde{A}f\} \quad (48)$$

є щільною в $\mathcal{H}$. Зрозуміло, що для кожного $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$ існує щільно визначений симетричний оператор

$$\dot{A} := A \upharpoonright \mathfrak{D} = \tilde{A} \upharpoonright \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{D}(\dot{A}) = \mathfrak{D} \quad (49)$$

з нетривіальними індексами дефекту $\mathbf{n}^\pm(\dot{A}) = \dim \text{Ker}(\dot{A} \pm i)^* \neq 0$. В роботі розглядається підклас операторів $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$, де $n = \mathbf{n}^+(\dot{A}) = \mathbf{n}^-(\dot{A}) < \infty$.

Досліджується проблема існування і побудови оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$, який розв'язує задачу на власні значення

$$\tilde{A}\psi_i = \lambda_i\psi_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (50)$$

для довільних наперед заданих дійсних чисел λ_i та системи ортонормованих векторів $\{\psi_i\}_{i=1}^n$, таких що $\text{span}\{\psi_i\} \cap \text{dom}A = \{0\}$.

Дослідження спектру, зокрема точкового, у самоспряжених розширень симетричних операторів зі скінченими індексами дефекту в загальному вигляді вперше проводилась в роботах М.Г.Крейна, де доведено існування принаймі одного розширення з наперед заданими власними значеннями з поля регулярності симетричного оператора.

Ми розглядали задачу на власні значення для самоспряжених розширень симетричного оператора з точки зору теорії сингулярно збурених операторів. Суть нашого результату в тому, що точки λ_i в (50) довільні, зокрема можуть лежати на спектрі оператора A .

Основний результат роботи містить така теорема.

Теорема 9. *Для необмеженого самоспряженого оператора A в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ існує єдиний чисто сингулярно збурений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$, який розв'язує задачу на власні значення (50) з довільними наперед заданими числами $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, n < \infty$ та будь-якою множиною ортонормованих векторів $\{\psi_i\}_{i=1}^n$ з умовою*

$$\text{span}\{\psi_i\}_{i=1}^n \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}. \quad (51)$$

Відзначимо, що доведення цієї теореми, яке приведене в [7] конструктивне. Резольвента оператора A будується послідовно, з використанням на кожному кроці чисто сингулярного збурення рангу 1.

Теорема 10. *Резольвента кожного самоспряженого оператора $\tilde{A} \in \mathcal{A}(\dot{A})$, $\tilde{A} \neq A$, задається формулою Крейна,*

$$(\tilde{A} - z)^{-1} = (A - z)^{-1} + b_z^{-1}(\cdot, \eta_z)\eta_z, \quad (52)$$

де вектор-функція η_z із значеннями в $\mathfrak{N}_z$ задовольняє рівняння:

$$\eta_z = (A - \xi)(A - z)^{-1}\eta_\xi, \text{Im}z, \text{Im}\xi \neq 0, \quad (53)$$

а значення скалярної функції b_z пов'язані співвідношеннями:

$$b_z = b_\xi + (\xi - z)(\eta_\xi, \eta_{\bar{z}}), \operatorname{Im} z, \operatorname{Im} \xi \neq 0, \quad (54)$$

$$\bar{b}_z = b_{\bar{z}} \quad (55)$$

Використовуючи ці теореми одержуємо опис усіх операторів $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$.

Теорема 11. Самоспряжений в $\mathcal{H}$ оператор $\tilde{A} \neq A$ належить до множини $\mathcal{P}_s^1(A)$ тоді і лише тоді, коли для будь-якого $z_0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$ (а отже і для всіх таких z) існує підпростір

$$\mathfrak{N}_{z_0} \subset \mathcal{H}, \dim \mathfrak{N}_{z_0} = 1, \mathfrak{N}_{z_0} \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}, \quad (56)$$

та число

$$b_{z_0} \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} b_{z_0} = -\operatorname{Im} z_0, \quad (57)$$

такі що

$$(\tilde{A} - z_0)^{-1} = (A - z_0)^{-1} + b_{z_0}^{-1}(\cdot, \eta_{\bar{z}_0})\eta_{z_0}, \quad (58)$$

де $\eta_{z_0} \in \mathfrak{N}_{z_0}$, $\|\eta_{z_0}\| = 1$, а $\eta_{\bar{z}_0} = (A - z_0)(A - \bar{z}_0)^{-1}\eta_{z_0}$.

Для довільної точки $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} z \neq 0$, резольвента оператора $\tilde{A}$ задається формулою (52), де функції

$$\eta_z = (A - z_0)(A - z)^{-1}\eta_{z_0}, \quad (59)$$

$$b_z = b_{z_0} + (z_0 - z)(\eta_{z_0}, \eta_{\bar{z}}), \quad (60)$$

задовольняють співвідношення (53) – (55).

Дивись доведення в [1].

Досліджено обернену спектральну задачу для сингулярно збурених самоспряжених операторів Показано, що для оператора A та довільного $a \in \mathbb{R}$ існує сингулярно збурений оператор $\tilde{A}$ такий що $\tilde{A}$ та A збігаються в підпросторі $E_A((-\infty, a))\mathcal{H}$ і одночасно $\tilde{A}$ має додаткову спектральну гілку на $(-\infty, a)$ довільного напер заданого типу. Зокрема, $\tilde{A}$ може мати задані спектральні властивості в резольвентній множині оператора A зліва від a .

Більш за те, для довільного самоспряженого опеоратора T в $\mathcal{H}$ існує $\tilde{A}$ такий, що T є уніторно еквівалентним частині $\tilde{A}$, яка діє у відповідному інваріантному підпросторі.

3.3 Обернена задача спектрального аналізу в теорії сингулярних збурень.

Опубліковано одну статтю [41].

В рамках теорії сингулярних збурень необмежених самоспряжених операторів встановлено зв'язок між оберненою задачею на власні значення та матрицями Якобі. Відомо, що наступна обернена задача на власні значення є розв'язною. Для необмеженого додатнього оператора A , довільної послідовності чисел E_j та послідовності векторів ψ_j , $j = 1, 2, \dots$ з умовою $(\text{span}\{\psi_j\})^{\text{cl}} \cap \text{dom}(A) = \{0\}$ треба побудувати послідовність сингулярно збурених операторів A_n , $n = 1, 2, \dots$, які розв'язують задачу на власні значення: $A_n \psi_j = E_j \psi_j$, $j = 1, \dots, n \leq \infty$. Показано, що з кожним оператором A_n природним чином асоційована матриця Якобі J_{n+1} рангу $n + 1$. Послідовність матриць Якобі J_n , $n = 0, 1, \dots$ узгоджена в тому сенсі, що J_n є правильною частиною J_{n+1} для кожного n . Тому існує гранична матриця Якобі $J = J_{n=\infty}$ нескінченного рангу. Тут ми показуємо, що і навпаки, виходячи з довільної наперед заданої матриці Якобі J в деякому підпросторі $\mathcal{N}$, $\mathcal{N} \cap \text{dom}(A) = \{0\}$ можна побудувати послідовність сингулярно збурених операторів A_n , які розв'язують задачу на власні значення: $A_n \psi_j = E_j \psi_j$, $j = 1, \dots, n$, де вектори ψ_j , та числа E_j визначаються по J . При цьому, відповідна послідовність асоційованих з A_n матриць Якобі J_n збігається до заданої матриці J .

Нехай $A \geq 0$ – необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $\text{dom} A \equiv \mathcal{D}(A)$ в комплексному сепарабельному просторі Гільберта $\mathcal{H}$ з скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$.

Оператор $\tilde{A} \neq A$ називається (чисто) сингулярно збуреним відносно A ,

якщо множина

$$\mathfrak{D} = \left\{ \varphi \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) : A\varphi = \tilde{A}\varphi \right\}$$

є щільною в $\mathcal{H}$. Зрозуміло, що A і $\tilde{A}$ мають спільний симетричний оператор $\dot{A} = A \upharpoonright \mathfrak{D} = \tilde{A} \upharpoonright \mathfrak{D}$ із нетривіальними індексами дефекту $\mathbf{n}^\pm(\dot{A}) = \dim \text{Ker}(\dot{A} \pm i)^* \neq 0$. Пишемо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$, $n \leq \infty$, якщо різниця резольвент $(\tilde{A} - z)^{-1} - (A - z)^{-1}$, $\text{Im} z > 0$ є оператором рангу n .

Тут ми досліджуємо сингулярні збурення класу $\mathcal{H}_{-1}$. Це означає, що збурені оператори $\tilde{A}$ можна представити у вигляді узагальненої суми: $\tilde{A} = A \dot{+} T$, де оператори T діють в A -шкалі $\mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ гільбертових просторів, $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$, при цьому, $\text{ran} T \cap \mathcal{H} = \{0\}$. Тут $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}(A^{1/2})$ в нормі $\|\varphi\|_1 := \|A^{1/2}\varphi\|$, а $\mathcal{H}_{-1}$ позначає дуальний простір до $\mathcal{H}_1$ відносно $\mathcal{H}$.

Нехай $E_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots$ - деяка послідовність дійсних чисел, а $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$ довільна послідовність векторів ортонормованих в $\mathcal{H}$ така, що виконується умова:

$$\text{span}\{\psi_j, j \geq 1\}^{\text{cl}} \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}, \quad (61)$$

де cl позначає замикання. Показано, що для кожного скінченного n існує єдиний сингулярний збурений самоспряжений оператор $A_n \in \mathcal{P}_s^n(A)$ що розв'язує задачу на власні значення,

$$A_n \psi_j = E_j \psi_j, j = 1, \dots, n. \quad (62)$$

При цьому, послідовність A_n збігається в сильному резольвентному смислі до деякого оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^{n=\infty}(A)$, який розв'язує задачу на власні значення для усіх E_j .

Як правило, оператори A_n мають вигляд $A_n = A \dot{+} T_n$ і будуються індуктивно з використанням на кожному кроці сингулярного збурення рангу 1. Така процедура природним чином породжує послідовність асоційованих

матриць Якобі:

$$J_n = \left\{ \begin{array}{cccccc} b_0 & a_0 & & & & \\ a_0 & b_1 & a_1 & & & 0 \\ & a_1 & b_2 & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ 0 & & & \bullet & \bullet & a_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & b_n \end{array} \right\}.$$

Ці матриці узгоджені в тому сенсі, що на n -кроці матриця J_n містить у собі матрицю J_{n-1} як частину. При $n \rightarrow \infty$ ми одержуємо матрицю Якобі J нескінченного рангу, яку називаємо асоційованою з оберненою задачею на власні значення для заданих $E_j \in \mathbf{R}$, $\psi_j \in \mathcal{H}$, $j = 1, 2, \dots$

Резольвента оператора A_n має зображення через резольвенту A_{n-1} та пару $E_n \in \mathbf{R}$, $\psi_n \in \mathcal{H}$ у вигляді

$$R_n(z) = (A_n - z)^{-1} = R_{n-1}(z) + b_n^{-1}(\cdot, \eta_n)\eta_n, \quad \text{Im} z \neq 0, \quad (63)$$

де

$$b_n = b_n(z) = (E_n - z)(\psi_n, \eta_n), \quad \eta_n = \eta_n(z) = (A_{n-1} - E_n)R_{n-1}(z)\psi_n$$

Матричні елементи a_n, b_n яacobієвих матриць виражаються рекурентним чином через оператори A_j , вектори ψ_j та власні значення E_j , $j \leq n$. А саме,

$$b_0 = \langle \psi_1, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle - E_1,$$

$$a_0 := |\langle \psi_2, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle|, \dots$$

$$b_n = \langle \psi_{n+1}, \mathbf{A}_{n-1} \psi_{n+1} \rangle - E_{n+1},$$

$$a_{n-1} = |\langle \psi_{n+1}, \mathbf{A}_{n-1} \psi_n \rangle|, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де $\mathbf{A}_j$ позначає замикання оператора $A_j : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$.

Виявляється, що виходячи з довільної матриці Якобі J заданої в деякому ортонормованому базисі $\{\varphi_j\}$, що утворює підпростір $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{N} \cap$

$\text{dom}A = \{0\}$ можна неєдинним чином відновити послідовності ψ_j і E_j такі, що розв'язуючи по ним обернену задачу на власні значення виникає послідовністю сингулярно збурених операторів A_n з якими асоційовані матриці Якобі J_n збіжні до J . Процедура відновлення ψ_j і E_j конструктивна і формально не однозначна.

Далі описано процедуру побудови матриці Якобі асоційованої з сингулярно збуреним оператором

Нехай задано: необмежений самоспряжений оператор $A \geq 0$ в $\mathcal{H}$, послідовність від'ємних чисел E_j , $j = 1, 2, \dots$ та послідовність $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$ ортонормованих в $\mathcal{H}$ векторів, яка задовольняє умову (68). Зараз ми покажемо, що заданій послідовності від'ємних чисел $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ та послідовності векторів $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ існує послідовність сингулярних збурень скінченного рангу $A_N = A + \tilde{T}_N$, що розв'язують задачу на власні значення (62). При цьому, з кожним оператором A_N буде асоційовано якобієву матрицю

$$J_N = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & & & \\ a_0 & b_1 & a_1 & & 0 \\ & a_1 & b_2 & \bullet & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & & \bullet & \bullet & a_{N-1} \\ & & & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}.$$

Опишемо послідовно процедуру побудови такої матриці.

На першому кроці для $N = 1$ по заданим E_1 та ψ_1 ми визначаємо сингулярно збурений оператор формулою:

$$A_1 = A_0 + \alpha_1 \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_1, \quad A_0 \equiv A,$$

де

$$\omega_1 := (\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1 \in \mathcal{H}_{-1}, \quad \alpha_1 := -\frac{1}{\langle \psi_1, \omega_1 \rangle} = -\frac{1}{\langle \psi_1, \mathbf{A}_0\psi_1 \rangle - E_1},$$

$\mathbf{A}_0$ - замикання ізометричного відображення $A_0 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_{-1}$, а $\tilde{+}$ позначає суму у смислі квадратичних форм [30]. Безпосередня перевірка показує, що оператор A_1 розв'язує задачу: $A_1\psi_1 = E_1\psi_1$. Покладемо

$$b_0 := a_{11}^0 - E_1, \text{ де } a_{11}^0 := \langle \psi_1, \mathbf{A}_0\psi_1 \rangle.$$

Очевидно, що $b_0 > 0$ оскільки оператор A є додатнім, а число E_1 від'ємним. Відзначимо, що як сингулярне збурення рангу один $\alpha_1 \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_1$, так і матричний елемент b_0 якобієвої матриці J_0 , яку ми будуємо, єдино визначенні оператором A та заданою парою E_1, ψ_1 .

На другому кроці, для $N = 2$ ми використовуємо оператор A_1 , число E_2 та вектор $\psi_2, \psi_1 \perp \psi_2$ і визначаємо сингулярно збурений оператор за формулою:

$$A_2 = A_1 \tilde{+} \alpha_2 \langle \cdot, \omega_2 \rangle \omega_2,$$

де

$$\omega_2 = (\mathbf{A}_1 - E_2)\psi_2 \in \mathcal{H}_{-1}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{\langle \psi_2, \omega_2 \rangle} = -\frac{1}{\langle \psi_2, \mathbf{A}_1\psi_2 \rangle - E_2}.$$

Пряма перевірка показує, що оператор A_2 розв'язує задачу: $A_2\psi_1 = E_1\psi_1$, $A_2\psi_2 = E_2\psi_2$. Покладаємо

$$b_1 = a_{22}^0 - E_2, \quad a_0 = |a_{21}^0|, \text{ де } a_{22}^0 := \langle \psi_2, \mathbf{A}_0\psi_2 \rangle, \quad a_{21}^0 := \langle \psi_2, \mathbf{A}_0\psi_1 \rangle.$$

Отже

$$\alpha_2 = -\frac{1}{b_1 - \frac{a_0^2}{b_0}}.$$

Аналогічно, на третьому кроці ($N = 3$) для довільних від'ємних наперед заданих E_1, E_2, E_3 , та $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \notin \mathcal{D}(A), \psi_1 \perp \psi_2 \perp \psi_3 \perp \psi_1$ ми визначаємо:

$$A_3 = A_2 \tilde{+} \alpha_3 \langle \cdot, \omega_3 \rangle \omega_3,$$

де

$$\omega_3 = (\mathbf{A}_2 - E_3)\psi_3, \quad \alpha_3 = -\frac{1}{\langle \psi_3, \omega_3 \rangle} = -\frac{1}{\langle \psi_3, \mathbf{A}_2\psi_3 \rangle - E_3}$$

Покладемо

$$b_2 = a_{33}^1 - E_3, \quad a_1 = |a_{32}^1|, \text{ де } a_{33}^1 := \langle \psi_3, \mathbf{A}_1 \psi_3 \rangle, \quad a_{32}^1 := \langle \psi_3, \mathbf{A}_1 \psi_2 \rangle.$$

Отже,

$$\alpha_3 = -\frac{1}{\langle \psi_3, \mathbf{A}_1 \psi_3 \rangle - E_3 - \frac{|\langle \psi_3, \mathbf{A}_1 \psi_2 \rangle|^2}{b_1 - \frac{a_0^2}{b_0}}} = -\frac{1}{b_2 - \frac{a_1^2}{b_1 - \frac{a_0^2}{b_0}}}$$

Для довільного $N \geq 1$ маємо

$$A_{n+1} = A_n + \alpha_{n+1} \langle \cdot, \omega_{n+1} \rangle \omega_{n+1}, \quad \omega_{n+1} := (\mathbf{A}_n - E_{n+1})\psi_{n+1},$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= -\frac{1}{\langle \psi_{n+1}, \omega_{n+1} \rangle} = -\frac{1}{a_{n+1,n+1}^{n-1} - E_{n+1} - \frac{|a_{n,n-1}^{n-1}|^2}{a_{n-1,n-1}^{n-2} - E_{n-1} - \dots - \frac{|a_{21}^0|^2}{a_{11}^0 - E_1}}} \\ &= -\frac{1}{b_n - \frac{a_{n-1}^2}{b_{n-1} - \dots - \frac{a_1^2}{b_1 - \frac{a_0^2}{b_0}}}}. \end{aligned}$$

Покладемо

$$b_n := a_{n+1,n+1}^{n-1} - E_{n+1}, \quad a_{n-1} := |\langle \psi_{n+1}, \mathbf{A}_{n-1} \psi_n \rangle|,$$

де

$$a_{n+1,n+1}^{n-1} := \langle \psi_{n+1}, \mathbf{A}_{n-1} \psi_{n+1} \rangle, \quad a_{n,n-1}^{n-1} = \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-1} \psi_{n-1} \rangle.$$

Тепер опишемо перехід від матриці Якобі до збуреного оператора.

Нехай $A \equiv A_0$ самоспряжений оператор в $\mathcal{H}$, J - матриця Якобі, $\mathcal{N}$ - підпростір в $\mathcal{H}$, такий що $\mathcal{N} \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}$. Для оператора A та матриці Якобі J ми будуємо оператор $\tilde{A}$ сингулярно збурений відносно A . Основний результат дає наступна теорема, доведення якої можна знайти в [41].

Теорема 12. *Нехай A - самоспряжений оператор, J - матриця Якобі, $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{N}$ -ортонормована система векторів.*

Існує сингулярно збурений оператор $\tilde{A} = \tilde{A}_J$, такий що

$$\tilde{A}\psi_j = E_j\psi_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (64)$$

де послідовності $\{E_j\}$ та $\{\psi_j\}$ будуються за допомогою матриці J та послідовності $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}$ -ортонормована система векторів.

4 Теорія динамічних систем з конфліктною взаємодією.

4.1 Спектральна теорія динамічних систем з конфліктною взаємодією.

По цій темі опубліковано наступні роботи: [7, 29, 36, 32, 37, 33, 34, 8]

Досліджено спектральні властивості граничних мір динамічних систем конфлікту, що моделюють альтернативну боротьбу супротивників. Показано, що типові траєкторії таких систем збігаються до інваріантних взаємно сингулярних мір. Доведено, що майже завжди самі граничні міри є чисто сингулярно неперервними. Знайдено умови, при яких граничні міри належать фіксованому спектральному типу: чисто сингулярно неперервному, чисто точковому, або чисто абсолютно неперервному.

Доведено існування інваріантних спектральних мір (носії яких є аттракторами) і які відповідають станам динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією.

Зокрема вивчалися спектральні властивості граничних розподілів для мір що описують динамічну систему конфлікту з двома спірними позиціями. Доведено існування інваріантних граничних станів. Знайдено критерії чистоти спектру (точкового, абсолютно неперервного, сингулярно неперервного). Знайдено формули для визначення топологічного типу, а також розмірності Хаусдорфа носіїв граничних мір. Побудована і вивчена динамічна модель, що описує конфліктну взаємодію в дискретному часі двох складних систем з нетривіальною внутрішньою структурою.

Зокрема досліджувалась структура точкового спектру та задача про відновлення втраченого фізичного спектру.

Одержано умови відновлення чистого спектрального типу (чисто точкового, абсолютно неперервного, або сингулярно неперервного) в граничних розподілах динамічних систем з композицією альтернативного конфлікту. Зокрема, показано, що точковий спектр можна регенерувати виходячи із станів з чисто сингулярно неперервним спектром.

Досліджуються спектральні властивості граничних розподілів динамічних систем конфлікту в дискретному часі. В найпростішому випадку динамічна система конфлікту породжується парою ймовірнісних мір μ та ν на відрізку $[0, 1]$, зосереджених на структурно подібних множинах (див. нижче). Еволюція в цих системах задається композицією альтернативного конфлікту $\ast$, яка по суті є перетворенням в просторі пар мір:

$$\{\mu^{N-1}, \nu^{N-1}\} \xrightarrow{\ast} \{\mu^N, \nu^N\}, \quad \mu^0 = \mu, \nu^0 = \nu, \quad N = 1, 2, \dots$$

Раніше вже доведено існування граничних станів такої динамічної системи:

$$\mu^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu^N, \quad \nu^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \nu^N,$$

які є інваріантними відносно дії композиції $\ast$. Наступна задача полягає в дослідженні спектральної структури носіїв граничних мір μ^∞ , ν^∞ . В роботі [7] показано, що ці міри задовольняють аналогам відомої теореми Джессена-Вінтнера і тому мають чистий спектральний тип, тобто є або чисто точковими, або чисто абсолютно неперервними, або чисто сингулярно неперервними. В [7] знайдено достатні умови (а в найпростішому випадку з двома позиціями конфлікту – критерії) того, що спектр (=носій) граничних мір має фіксований спектральний тип.

Далі досліджується в певному сенсі обернена задача. Як відновити спектральний тип хоча б однієї з мір, змінений або втрачений в результаті конфліктної взаємодії? Задача є складною і тут одержано лише часткові результати. Зокрема доведено, що в класі структурно подібних мір початковий тип спектра однієї з мір можна відновити. Більш за те, показано, що точковий тип спектра можна регенерувати навіть у випадку, коли після

конфліктної взаємодії граничні міри мають чисто сингулярно неперервний спектр, який і досі не має загально прийнятого фізичного смислу. Основний результат статті сформульовано в теоремі 14.6, яка містить критерій відновлення чисто точкового спектрального типу. В роботі наведено також ряд простих достатніх умов належності граничної міри до певного спектрального типу.

Нехай A та B позначають пару фізичних об'єктів, які час від часу вступають у конфронтацію чи конфлікт. Такі об'єкти звемо опонентами або протилежними сторонами у тому смислі, що їхні "життєві інтереси" перетинаються, тобто A та B мають спільний простір "існування який позначаємо Ω . Для побудови математичної моделі в якості Ω беремо скінчену дискретну множину точок (=позицій конфлікта) або компактну підмножину метричного простору, наприклад відрізок $[0, 1]$. Початкові розподіли життєвих інтересів опонентів задаються на Ω імовірнісними мірами: $\mu = \mu_A$ та $\nu = \nu_B$, відповідно. Конфронтація між A та B відбувається в дискретному часі $t = 1, 2, \dots, N, \dots$ і математично визначається некомутативним перетворенням $\ast$ (композицією конфлікта) в просторі мір. Ця композиція породжує динамічну систему конфлікта в просторі структурно подібних мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}^{ss}([0, 1])$ (означення див. в наступному розділі). В роботі [7] вже показано, що за винятком крайніх випадків, для довільної пари початкових мір $\mu^0 = \mu, \nu^0 = \nu$, траєкторія динамічної системи конфлікта $\{\mu^N, \nu^N\}$ прямує до нерухомої точки, якій відповідає пара граничних мір μ^∞, ν^∞ .

Тут зосереджено увагу на наступних питаннях. Коли хоча б одна гранична міра, скажімо μ^∞ , є чисто точковою: $\mu^\infty = \mu_{pp}^\infty$? А якщо одна з початкових мір була чисто точковою, $\mu = \mu_{pp}$, а на границі стала чисто сингулярною, $\mu^\infty = \mu_{sc}^\infty$, то чи існує міра ν' така, що будуючи нову динамічну систему конфлікта з початковою парою μ^∞, ν' , нова гранична міра $(\mu^\infty)^\infty$

стане знову чисто точковою? Іншими словами, чи можна відновити точковий тип спектра міри $\mu = \mu_{\text{pp}}$, який втрачається в конфліктній взаємодії з мірою ν ? Відзначимо, що виникнення сингулярно неперервного спектра є характерним явищем в теорії конфлікту. В той же час належність μ^∞ до точкового типу потребує виконання досить специфічних умов. Як правило, конфліктна взаємодія між опонентами A та B , яким відповідають різні точкові або абсолютно неперервні міри μ та ν , приводить до граничних станів μ_{sc}^∞ , ν_{sc}^∞ з сингулярним ніде не щільним фрактальним спектром.

Тому задача про знаходження умов, які забезпечують відновлення точкового типу спектра враченого в результаті конфліктної взаємодії, є актуальною. Основою дослідження є попередня робота, де знайдено явні формули для опису граничних розподілів для дискретних мір. Спираючись на ці результати, тут одержано як прості достатні умови, так і критерій для відновлення точкового спектрального типу для структурно подібних мір на $[0, 1]$.

Відзначимо, що на основі композиції конфлікту $\ast$ побудовано значно складніші динамічні системи, які описують, зокрема, процеси міграції, соціальної конфронтації та кооперації. В таких моделях спектральний тип граничних мір напевно не є стійким і може під час еволюції осцилювати і неодноразово наближатися як до сингулярно неперервного, так і до точкового, і навіть до абсолютно неперервного.

Компактна множина $S \subseteq \mathbb{R}$ зветься *структурно подібною*, якщо при кожному $\varepsilon > 0$ вона розкладається у об'єднання скінченної кількості подібних підмножин з діаметрами, що не перевищують ε :

$$S = \bigcup_{j=1}^{M_\varepsilon < \infty} s_j, \quad \text{diam}(s_j) \leq \varepsilon, \quad s_j \approx s_l, \quad j, l = 1, 2, \dots, M_\varepsilon, \quad (65)$$

при цьому

$$\lambda(s_j^{\text{cl}} \cap s_l^{\text{cl}}) = 0, \quad j \neq l,$$

де $\approx$ позначає подібність, s_j^{cl} – замикання множини s_j , λ – міра Лебега. Іншими словами, структурно подібна множина на довільному ε -рівні складається з скінченної кількості подібних "цеглинок".

Міра μ на $\mathbb{R}$ зветься структурно подібною, якщо її носій $\text{supp}\mu = S$ є структурно подібною множиною.

В подальшому використовуються лише підклас ймовірнісних мір на відріжку $[0, 1]$, носії яких є структурно подібними. Усю множину таких мір позначаємо $\mathcal{M}^{\text{ss}}([0, 1]) \equiv \mathcal{M}^{\text{ss}}$ (s.s.= structural similarity) і визначаємо наступним чином.

Розглянемо пару стохастичних матриць виду

$$Q = \{\mathbf{q}_k\}_{k=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & q_{1k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & q_{2k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & q_{nk} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \equiv \{q_{ik}\}_{i=1, k=1}^{n, \infty} \quad (66)$$

та

$$P \equiv \{\mathbf{p}_k\}_{k=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{2k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{nk} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \equiv \{p_{ik}\}_{i=1, k=1}^{n, \infty}, \quad (67)$$

стовпчики яких утворюють стохастичні вектори $\mathbf{q}_k$ та $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$:

$$\mathbf{q}_k = (q_{1k}, q_{2k}, \dots, q_{nk}), \quad q_{1k}, \dots, q_{nk} > 0, \quad q_{1k} + \dots + q_{nk} = 1.$$

$$\mathbf{p}_k = (p_{1k}, p_{2k}, \dots, p_{nk}), \quad p_{1k}, \dots, p_{nk} \geq 0, \quad p_{1k} + \dots + p_{nk} = 1.$$

Припускаємо, що виконується умова

$$q_{\inf} := \inf_{ik} q_{ik} > 0. \quad (68)$$

Матриця (66) фіксує на $[0, 1]$ так зване Q -представлення дійсних чисел. Воно задається наступним чином. Інтервал $[0, 1]$ розкладається зліва направо в сімейство інтервалів $\Delta_{i_1}, \Delta_{i_1 i_2}, \dots, \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}, \dots$ рангу $1, 2, \dots, k, \dots$:

$$[0, 1] = \bigcup_{i_1=1}^n \Delta_{i_1} = \bigcup_{i_1, i_2=1}^n \Delta_{i_1 i_2} = \dots = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k} = \dots.$$

При цьому вимагається, що різні інтервали фіксованого рангу перетинаються лише в крайніх точках, їх довжини визначаються елементами матриці Q ,

$$\lambda(\Delta_{i_1}) = q_{i_1 1}, \quad \lambda(\Delta_{i_1 i_2}) = q_{i_1 1} \cdot q_{i_2 2}, \quad \dots, \quad \lambda(\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}) = q_{i_1 1} \cdot q_{i_2 2} \cdot \dots \cdot q_{i_k k}, \quad \dots,$$

а об'єднання узгоджені:

$$\Delta_{i_1} = \bigcup_{i_2=1}^n \Delta_{i_1 i_2}, \quad \dots \quad \Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=1}^n \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}, \quad \dots$$

Неважко зрозуміти, що σ -алгебра породжена сімейством підмножин $\{\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ збігається з борелевською σ -алгеброю на $[0, 1]$. Зокрема, для кожної точки $x \in [0, 1]$ існує послідовність вкладених інтервалів $\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \dots \supset \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k} \supset \dots$, які в перетині містять лише цю точку:

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

При фіксованому Q -представленні відрізка $[0, 1]$ кожна стохастична матриця (67) задає деяку борелеву міру μ , як границю послідовності кусково рівномірно розподілених імовірнісних мір: $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k$, де μ_k визначаються першими k стовпчиками матриць Q та P ,

$$\mu_k := \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^{\infty} c_{i_1 i_2 \dots i_k} \lambda_{i_1 i_2 \dots i_k}, \quad c_{i_1 i_2 \dots i_k} := \frac{p_{i_1 1} p_{i_2 2} \dots p_{i_k k}}{q_{i_1 1} q_{i_2 2} \dots q_{i_k k}}, \quad (69)$$

де $\lambda_{i_1 i_2 \dots i_k} := \lambda \upharpoonright \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$ позначає звуження міри Лебега на відрізок $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$.

З (69) видно, що

$$\mu_1(\Delta_{i_1}) = p_{i_1}, \mu_2(\Delta_{i_1 i_2}) = p_{i_1} \cdot p_{i_2}, \dots, \mu_k(\Delta_{i_1, \dots, i_k}) = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k}, \dots \quad (70)$$

З (69), (70) випливає, що функція розподілу $f_k(x) = \mu_k\{[0, x]\}$ міри μ_k має графік (кусково лінійної) неспадної ламаної лінії. При цьому, значення функції $f_k(x)$, $k > 1$ в крайніх точках інтервалів $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ ранга $k - 1$ ті самі, що і у функції $f_{k-1}(x)$. Неважко зрозуміти, що послідовність $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ поточно майже усюди збігається, $f_k(x) \rightarrow f(x)$, $k \rightarrow \infty$, де $f(x)$ є неперервною справа неспадною функцією, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. За побудовою, $f(x)$ є функцією розподілу деякої міри μ , яка належить до класу $\mathcal{M}^{\text{ss}}([0, 1])$. Це випливає з того, що на усіх інтервалах $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$, $k \geq 1$ міра μ будується подібною процедурою і $\lambda(\Delta_{i_1, \dots, i_k}) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ завдяки умові (68).

Характерна особливість класу мір $\mu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}$ полягає в тому, що такі міри завжди мають лише одну компоненту в розкладі Лебега: або точкову, або абсолютно неперервну, або сингулярно неперервну. Цей факт про чистоту спектра (= носія) міри $\mu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}$ випливає з аналога відомої теореми Джессена-Вінтнера. Її можна сформулювати наступним чином.

Для мір з класу $\mathcal{M}^{\text{ss}}$ пишемо $\mu \in \mathcal{M}_{\text{pp}}, \mathcal{M}_{\text{ac}}, \mathcal{M}_{\text{sc}}$ (позначення ss опускаємо), якщо міра μ є чисто точковою ($\mu = \mu_{\text{pp}}$), чисто абсолютно неперервною ($\mu = \mu_{\text{ac}}$), або чисто сингулярно неперервною ($\mu = \mu_{\text{sc}}$), відповідно. Позначимо

$$P_{\max}(\mu) := \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\}, \quad \rho(\mu, \lambda) := \prod_{k=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^n \sqrt{p_{ik} q_{ik}}),$$

Теорема 13. *Кожна міра $\mu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}$ має чистий спектральний тип:*

- (a) $\mu \in \mathcal{M}_{\text{pp}}$, лише якщо $P_{\max}(\mu) > 0$,
- (b) $\mu \in \mathcal{M}_{\text{ac}}$, лише якщо $\rho(\mu, \lambda) > 0$,
- (c) $\mu \in \mathcal{M}_{\text{sc}}$, лише якщо $P_{\max}(\mu) = 0$ та $\rho(\mu, \lambda) = 0$.

Доведення **(a)** - відоме. Ідея доведення **(b)**, **(c)** ґрунтується на теоремі Какутані щодо мір, які є нескінченими прямими добутками послідовності мір.

Динамічна система конфлікту будується в прямому добутку просторів $\mathcal{M}^{\text{ss}} \times \mathcal{M}^{\text{ss}}$ наступним чином. При фіксованому Q -представленні відрізка $[0, 1]$ розглядається пара мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}$ асоційованих з стохастичними матрицями P та $R = \{\mathbf{r}_k\}_{k=1}^{\infty}$. До них застосовується некомутативне перетворення $\ast$ (композиція конфлікту):

$$\mu^1 = \mu \ast \nu, \quad \nu^1 = \nu \ast \mu,$$

де кожна з мір μ^1, ν^1 знову належить простору $\mathcal{M}^{\text{ss}}$. Ці міри асоційовані з стохастичними матрицями $P^1 = \{\mathbf{p}_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, $R^1 = \{\mathbf{r}_k^1\}_{k=1}^{\infty}$, де нові стохастичні вектори $\mathbf{p}_k^1, \mathbf{r}_k^1$ визначаються композицією конфлікту $\ast$ в просторі $\mathbb{R}^n$, $n > 1$:

$$\mathbf{p}_k^1 = \mathbf{p}_k \ast \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{r}_k^1 = \mathbf{r}_k \ast \mathbf{p}_k.$$

Координати p_{ik}^1, r_{ik}^1 , $i = 1, \dots, n$ векторів $\mathbf{p}_k^1$, $\mathbf{r}_k^1$ підраховуються за формулами:

$$p_{ik}^1 := \frac{p_{ik}(1 - r_{ik})}{z_k}, \quad r_{ik}^1 := \frac{r_{ik}(1 - p_{ik})}{z_k}, \quad (71)$$

де дільник $z_k = 1 - (\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k)$ ($(\cdot, \cdot)$ – позначає скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$) забезпечує умову стохастичності нових векторів:

$$\sum_{i=1}^n p_{ik}^1 = \sum_{i=1}^n r_{ik}^1 = 1.$$

З (71) видно, що координати ортогональних векторів залишаються незмінними відносно дії $\ast$. Зрозуміло також, що для коректності формул (71) треба вимагати аби $(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) \neq 1$ для кожного k . Ця умова автоматично буде виконуватися при ітераціях композиції $\ast$, якщо вона мала місце на першому кроці.

Формули (71) мають наступну інтерпретацію. При $k = 1$ число p_{i1}^1 дорівнює ймовірності для опонента A знаходитись в регіоні Δ_{i_1} після першого кроку конфліктної взаємодії з опонентом B . Ця ймовірність пропорційна добутку початкової ймовірності p_{i1} для A бути в Δ_{i_1} , на $1 - r_{i1}$ – ймовірності того, що опонент B в цьому регіоні відсутній. Аналогічний смисл має r_{i1}^1 . Неважко показати, числа $p_{i1}^1, r_{i1}^1 \in$ умовними ймовірностями одночасної взаємовиключної (= альтернативної) присутності опонента A чи B по усім регіонам $\Delta_{i_1}, i = 1, \dots, n$. Аналогічний смисл мають числа p_{ik}^1, r_{ik}^1 для будь-якого k .

Ітерація композиції $\ast$ в просторі $\mathcal{M}^{\text{ss}} \times \mathcal{M}^{\text{ss}}$ породжує динамічну систему конфлікту у дискретному часі:

$$\{\mu^{N-1}, \nu^{N-1}\} \xrightarrow{\ast} \{\mu^N, \nu^N\}, \quad N = 1, 2, \dots, \quad \mu^0 = \mu, \nu^0 = \nu. \quad (72)$$

Наступна теорема стверджує, що кожна траєкторія динамічної системи (72) збігається до інваріантного граничного стану.

Теорема 14. *Для довільної пари початкових мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}$ з умовою*

$$(\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) \neq 1, \quad \forall k, \quad (73)$$

існують інваріантні відносно дії $\ast$ граничні міри $\mu^\infty, \nu^\infty \in \mathcal{M}^{\text{ss}}$ у смислі поточної збіжності майже всюди відповідних функцій розподілу:

$$\mu^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu^N, \quad \nu^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \nu^N.$$

При цьому, $\mu^\infty \perp \nu^\infty$, якщо $\mu \neq \nu$, та $\mu^\infty = \nu^\infty$, якщо $\mu = \nu$.

Відзначимо, що умова (73) (далі припускаємо, що вона завжди виконується) означає, що рівність $p_{ik} = r_{ik} = 1$ ніколи не трапляється. Існування граничних мір μ^∞, ν^∞ впливає з існування граничних стохастичних векторів

$$\mathbf{p}_k^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{p}_k^N, \quad \mathbf{r}_k^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{r}_k^N, \quad k = 0, 1, \dots$$

що доведено в більш загальному контексті в теоремі про конфлікт. Послідовності граничних векторів $\mathbf{p}_k^\infty, \mathbf{r}_k^\infty$, $k = 1, 2, \dots$ формують пару стохастичних матриць P^∞, R^∞ , з якими асоційовані міри μ^∞, ν^∞ з простору $\mathcal{M}^{\text{ss}}$. Властивості $\mu^\infty \perp \nu^\infty$, або $\mu^\infty = \nu^\infty$ також є наслідками теореми про конфлікт.

Неважко знайти явну формулу для значень граничних мір μ^∞, ν^∞ на інтервалах $\Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Але для цього необхідно привести допоміжні результати. Для пари різних і неортогональних стохастичних векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$ позначимо

$$D := \sum_{i \in \mathbb{N}_+} d_i = - \sum_{i \in \mathbb{N}_-} d_i,$$

де

$$d_i = p_i - r_i, \quad \mathbb{N}_+ := \{i : d_i > 0\}, \quad \mathbb{N}_- := \{i : d_i < 0\}.$$

Відзначимо, що $0 < D \leq 1$ оскільки $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$. Рівність $\sum_{i \in \mathbb{N}_+} d_i = - \sum_{i \in \mathbb{N}_-} d_i$ випливає з того, що $\sum_i p_i - \sum_i r_i = 0$.

Теорема 15. *Якщо $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$, то координати граничних векторів $\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ мають наступний явний опис:*

$$p_i^\infty = \begin{cases} d_i/D, & i \in \mathbb{N}_+ \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_+ \end{cases}, \quad r_i^\infty = \begin{cases} -d_i/D, & i \in \mathbb{N}_- \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_- \end{cases} \quad (74)$$

Якщо початкові вектори рівні, $\mathbf{p} = \mathbf{r}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \neq 1$, то граничні вектори також рівні, $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty$, і більш за те, їх координати рівномірно розподілені: $p_i^\infty = r_i^\infty = 1/m$, де $m \leq n$ позначає кількість ненульових координат у векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}$.

Доведення подаємо лише фрагментарно. Якщо $\mathbf{p} \neq \mathbf{r}$, але $p_i = r_i$ для якогось i , то раніше вже показано, що координати $p_i^N = r_i^N$ збігаються до нуля, $p_i^\infty = r_i^\infty = 0$. Більш за те, якщо d_i не є строго додатнім, то ітерація

формул (71) показує, що і в такому разі $p_i^N \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$. Це означає, що $p_i^\infty = 0$ для усіх $i \notin \mathbb{N}_+$. Аналогічно $r_i^N \rightarrow 0$, якщо $i \notin \mathbb{N}_-$. Тому $d_i^N := p_i^N - r_i^N \rightarrow d_i^\infty = p_i^\infty$ для $i \in \mathbb{N}_+$ і $-d_i^N \rightarrow -d_i^\infty = r_i^\infty$ для $i \in \mathbb{N}_-$. Далі, неважко бачити, що наступні відношення не залежать від N :

$$\frac{d_i^N}{d_j^N} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in \mathbb{N}_+ \cup \mathbb{N}_-$$

Отже

$$\frac{d_i^\infty}{d_j^\infty} = \frac{d_i}{d_j}.$$

Тому

$$\frac{p_i^\infty}{p_j^\infty} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in \mathbb{N}_+, \quad \frac{r_i^\infty}{r_j^\infty} = \frac{d_i}{d_j}, \quad i, j \in \mathbb{N}_-.$$

Тепер легко показати, що ця система рівнянь відносно граничних координат має єдиний розв'язок виду (74). У випадку $\mathbf{p} = \mathbf{r}$ рівномірний розподіл граничних координат, $p_i^\infty = r_i^\infty = 1/m$, де $m = |\{i : p_i = r_i \neq 0\}|$ встановлено.

З теореми 15 одержуємо наступний результат.

Теорема 16. *Елементи стохастичних матриць P^∞ , R^∞ , з якими асоційовані граничні міри μ^∞ , ν^∞ мають явний опис: якщо $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{r}_k$, то*

$$p_{ik}^\infty = \begin{cases} d_{ik}/D_k, & i \in \mathbb{N}_{+,k} \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_{+,k} \end{cases}, \quad r_{ik}^\infty = \begin{cases} -d_{ik}/D_k, & i \in \mathbb{N}_{-,k} \\ 0, & i \notin \mathbb{N}_{-,k} \end{cases} \quad \mathbf{p}_k \neq \mathbf{r}_k. \quad (75)$$

Якщо $\mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k$, то

$$p_{ik}^\infty = r_{ik}^\infty = 1/m_k, \quad \mathbf{p}_k = \mathbf{r}_k, \quad (\mathbf{p}_k, \mathbf{r}_k) \neq 1. \quad (76)$$

де m_k позначає кількість точок множини $\{i : p_{ik} = r_{ik} \neq 0\}$.

Отже, значення міри μ^∞ на інтервалі $\Delta_{i_1 \dots i_k}$ в припущенні, що вона не є чисто точковою, визначається комбінацією відповідних добутоків з формул

(75), (76). Зокрема, якщо $\mathbf{p}_s \neq \mathbf{r}_s$ або $\mathbf{p}_s = \mathbf{r}_s$ для усіх $s \leq k$, то.

$$\mu^\infty(\Delta_{i_1 \dots i_k}) = \begin{cases} \prod_{l=1}^k d_{i_l l} / D_l, & \forall i_l \in \mathbb{N}_{+,l} \\ 0, & \exists i_l \notin \mathbb{N}_{+,l} \end{cases}. \quad (77)$$

$$\mu^\infty(\Delta_{i_1 \dots i_k}) = \prod_{l=1}^k 1/m_k, \quad (78)$$

Безпосередньо з теорем 13 та 16 впливає наступний результат, який формулюємо лише для однієї з граничних мір.

Теорема 17. *Гранична міра μ^∞ має чистий спектральний тип:*

(a) $\mu^\infty \in M_{\text{pp}}$ лише тоді, коли

$$P_{\max}(\mu^\infty) := \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \frac{d_{ik}}{D_k} > 0, \quad (79)$$

(b) $\mu^\infty \in M_{\text{ac}}$ лише тоді, коли майже для усіх k

$$\rho(\mu^\infty, \lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_i \sqrt{\frac{d_{ik} q_{ik}}{D_k}} > 0, \quad (80)$$

(c) $\mu^\infty \in M_{\text{sc}}$ лише тоді, коли обидві умови (79), (80) порушуються.

Перейдемо до викладу основного результату по темі:

"Відновлення спектрального типу".

Відзначимо, що питання про перехід мір з одного з класів $\mathcal{M}_{\text{ac}}$, $\mathcal{M}_{\text{pp}}$, $\mathcal{M}_{\text{sc}}$ до іншого є важливим в застосуваннях.

Говоримо, що міра μ має *направлену локальну перевагу* (directed local priority) відносно ν , (позначаємо $(\mu > \nu)_{\text{loc}}$), якщо для кожного k існує залежне від k значення індекса i (позначаємо його i'_k), таке, що різниці $d_{ik} = p_{ik} - r_{ik}$ з $i \in \mathbb{N}_{+,k}$, $i \neq i'_k$, прямують до нуля при $k \rightarrow \infty$ настільки

швидко, що наступна сума є скінченою:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i \neq i'_k, i \in \mathbb{N}_{+,k}} \frac{d_{ik}}{D_k} < \infty. \quad (81)$$

Наприклад, якщо майже при усіх k (тобто $k \notin K$, де K – скінчена множина) числа d_{ik} строго додатні лише при для одного значення індекса $i = i'_k$, то в (81) лишається скінчена кількість доданків і тому $(\mu > \nu)_{\text{loc}}$.

Основний результат роботи дає наступна теорема. Вона стверджує, що в результаті конфліктної взаємодії між мірами $\mu \neq \nu$ гранична міра μ^∞ буде чисто точковою лише тоді, коли початкова міра μ має направлену локальну перевагу відносно міри ν .

Теорема 18. *Розглянемо динамічну систему конфлікту (72) з початковою парою мір $\mu, \nu \in \mathcal{M}^{\text{ss}}$ таких, що $\mu \neq \nu$. Припустимо що стохастичні матриці P, R асоційовані з мірами μ, ν задовольняють умову: $\mathbf{p}_k \neq \mathbf{r}_k$ майже для усіх k (за винятком $k \in K$, де K – скінчена множина). Тоді гранична міра*

$$\mu^\infty \in \mathcal{M}_{\text{pp}} \Leftrightarrow (\mu > \nu)_{\text{loc}}. \quad (82)$$

Доведення ґрунтується на співвідношенні:

$$(\mu > \nu)_{\text{loc}} \Leftrightarrow \prod_{k \neq K} \max_i (d_{ik}) / D_k > 0. \quad (83)$$

Деталі дивись в роботі [8]

4.2 Теорія критичної поведінки складних систем. Комп'ютерне моделювання нелінійної динаміки систем з конфліктною взаємодією.

Публікації по цій темі: [9, 12, 10, 38, 39, 40, 35]

Досліджена модель динамічної системи конфліктної тріади. Вона описує взаємодію між трьома природними субстанціями: популяцією біологічного виду (життя), навколишнім середовищем (ресурс існування), та негативними факторами для існування (інфекція). Встановлено наявність основних фаз співіснування субстанцій тріади: стану динамічної рівноваги (нерухомої точки), циклічних атракторів, періодично осцилюючих траєкторій, та еволюцій близьких до хаотичних. Комп'ютерним моделюванням продемонстровано існування біфуркаційних точок та порогів між різними фазами.

Під *конфліктною тріадою* ми розуміємо фізичну систему, що складається з трьох субстанцій (позначимо їх **P**, **R**, **Q**), які існують у спільному просторі Ω і взаємодіють певним чином. Глобально, кожна субстанція в початковий момент часу характеризується числом: P, R, Q — у певному вимірі абсолютним значення кількості відповідної субстанції в усьому просторі. Система є складною, в тому сенсі, що кожна субстанція є багатокомпонентною:

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n), \mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n), \mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n), P_i, R_i, Q_i \geq 0, i = 1, \dots, n,$$

тобто, розподілена по окремим регіонам Ω_i , з яких складається простір існування:

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i, \quad 2 \leq n < \infty.$$

Отже, **P**, **R**, **Q** є векторами з невід'ємними координатами, $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}_+^n$. Досліджується динаміка змін кожної компоненти P_i, R_i, Q_i внаслідок взаємодії між субстанціями в дискретному часі.

Таким чином, еволюція векторів **P**, **R**, **Q**, зумовлена конфліктною взаємодією, породжує деяку динамічну систему в дискретному часі:

$$\{\mathbf{P}^N, \mathbf{R}^N, \mathbf{Q}^N\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{P}^{N+1}, \mathbf{R}^{N+1}, \mathbf{Q}^{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \dots$$

Для спрощення задачі ми припускаємо, що змінюються лише координати

P_i, R_i, Q_i , а числа P, R, Q , як l_1 -норми векторів:

$$P = \| \mathbf{P} \|_1 = P_1 + \dots + P_n, \quad R = \| \mathbf{R} \|_1, \quad Q = \| \mathbf{Q} \|_1.$$

від часу не залежать.

Відображення $\ast$ визначається законом взаємодії між субстанціями. Взагалі цей закон невідомий. В цій роботі $\ast$ ми визначаємо евристично (див. нижче в розділі 3 формули (93), (94)) згідно інтуїтивного розуміння фізичної суті субстанцій $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$.

Двостороння парна взаємозалежність, плюс-мінус, є аналогом добре відомій моделі "жертва – хижак". Вона моделює конфліктну боротьбу непереміжних альтернативних субстанцій типу: вірус – медичний антідот. Тут протилежною субстанцією до вірусної інфекції виступає природний життєвий ресурс. В моделі припускається, що ресурс є невичерпним, а інфекція – незнищенна.

При цьому, послідовність $P_i^N, N = 0, 1, \dots$ можна трактувати, як еволюцію кількості певного біологічного виду в регіоні Ω_i під впливом двох протилежних чинників. Динаміка популяції P_i^N позитивно залежить від використання ресурсного середовища, та негативно від дії інфекції. Тому в момент часу $N + 1$ регіональне значення величини P_i^{N+1} зростає при збільшенні R_i^N , та спадає при зростанні Q_i^N . У свою чергу, регіональні зміни життєвого ресурсу R_i^N є негативно залежними, з одного боку, від інтенсивності їх використання, як джерела для існування біологічної популяції, а з другого – впливом субстанції $\mathbf{Q}$, альтернативної по природі до $\mathbf{R}$. Накінець, еволюцію координат Q_i^N можна інтерпретувати, як динамічну характеристику концентрації загроз існуванню для біологічного виду в кожному окремому регіоні Ω_i . Локальне поширення інфекції Q_i^{N+1} збільшується при зростанні P_i^N та зменшенні R_i^N . Явні формули усіх взаємозалежностей наведено далі.

Таким чином, координати P_i^N, R_i^N, Q_i^N описують еволюцію локальних числових характеристик субстанцій у окремих регіонах Ω_i .

Нелінійна динаміка взаємозалежностей величин $P_i^N, R_i^N, Q_i^N, i = 1, \dots, n, N =$

1, 2, ..., що тут досліджується є досить складною. Тому важко сподіватися на встановлення точних результатів (теорем) про глобальну поведінку усієї системи. Тим не менше, ми одержуємо ряд математичних результатів для окремих двосторонніх ланок конфліктної тріади з парною взаємодією. Для повної складної системи в розділі 3 побудовані комп'ютерні моделі. Їх аналіз і дослідження проявляє ряд цікавих закономірностей.

Один з важливих результатів роботи полягає у встановленні математичної коректності (фактично змістовності) побудованої динамічної системи конфліктної тріади. А саме, показано, що при належному підборі параметрів взаємодії (цей підбір є нетривіальною задачею) комп'ютерні моделі складної системи не "розвалюються", тобто значення координат змінюються в фізично допустимих межах.

Другий важливий результат нашої роботи у тому, що модельні реалізації динамічної системи конфліктної тріади проявляють типові закономірності складних систем, які відомі і досить повно відображені в літературі. А саме, встановлено наявність різних фаз існування системи: фаза динамічної рівноваги, фаза циклічних атракторів, широкого спектру циклічних траєкторій, зона біфуркаційних точок та порогів між різними фазами, фаза квазі-хаотичної поведінки.

Взаємозалежності субстанцій **P**, **R**, **Q** в конфліктній тріаді згідно рівнянь (93), (94) (див. нижче) є нелінійними і досить складними. Але двосторонні парні взаємодії припускають достатньо повний математичний аналіз. В цьому розділі представлено два результати для ситуацій, які позначаємо як "плюс – мінус" та "мінус – мінус" моделі.

В моделі "плюс – мінус" аналізуємо динаміку змін двох субстанцій **P** та **R**. Плюс означає, що **P** одержує позитивний вплив з боку **R**, а мінус – негативний вплив на **R** з боку **P**.

Задача полягає в дослідженні динаміки змін (перерозподілу) величин P_i^N , R_i^N по регіонам Ω_i в силу "плюс – мінус" взаємодії між субстанціями **P** та

R при умові незмінності повної кількості P, R в усьому просторі Ω і їх незалежності від третьої субстанції.

Відповідна динамічна система конфлікту:

$$\{P_i^N, R_i^N\} \xrightarrow{*} \{P_i^{N+1}, R_i^{N+1}\}, \quad P_i^0 = P_i, R_i^0 = R_i \quad (84)$$

є значно простішою в порівнянні з поведінкою повної складної системи. При конкретному заданні перетворення $*$ динамічна система (84) дозволяє провести досить детальний аналіз.

Теорема 19. (*"Плюс-мінус" модель*) Динамічна система конфлікту (84) має три характерні фази поведінки.

Перша фаза (рівноважний стан) визначається рівномірним стартовим розподілом:

$$P_i^N = P/n, \quad R_i^N = R/n, \quad \forall N, i; \quad \mathbf{p} = (1/n, \dots, 1/n), \quad \mathbf{r} = (1/n, \dots, 1/n). \quad (85)$$

Рівноважний стан (85), як нерухома точка, не є одноточковим аттрактором.

Друга фаза (існування граничного нерухомого стану) характеризується умовою: хоча б для одного i ,

$$p_i = 0, \quad r_i \neq 0. \quad (86)$$

У цьому випадку система збігається до граничного нерухомого стану

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{p}^N, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{r}^N, \quad \mathbf{p}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty. \quad (87)$$

Третя типова фаза (квазі-хаотична поведінка) визначається умовами

$$\mathbf{p} \neq \mathbf{r}, \quad \forall i, p_i \neq 0, \quad r_i \neq 0. \quad (88)$$

В цій фазі кожна з координат p_i^N, r_i^N , $i = 1, \dots, n$ коливається в межах між нулем та одиницею, у загальному випадку, без явної закономірності.

Проведені вище міркування доводять, що в загальній ситуації для цих системи існують нескінченні коливання усіх її координат. Чи можуть бути ці коливання циклічними? Тобто, чи існують точні цикли із скінченною кількістю кроків? Теоретично це можливо при певних співвідношеннях між значеннями координат, але поки-що існування точних циклів в моделі "плюс – мінус" є відкритим питанням.

Комп'ютерне моделювання також підтверджує, що рівноважна точка не є притягальною (атрактором).

Аналогічні характерні властивості поведінки має динамічна система з двосторонньою конфліктною взаємодією між біологічним видом та інфекційним (вірусним) середовищем, "мінус – плюс" модель.

Проведений вище аналіз парної двосторонньої "плюс – мінус" взаємодії показує, що і зараз, в "мінус – плюс" моделі, в загальному випадку (коли всі стартові координати різні і відмінні від нуля) поведінка системи буде мати ковальний характер без явної закономірності. Так, зокрема, скажімо координата p_i^N буде зростати, якщо концентрація інфекції q_i^N менша за показник конфліктності системи $\theta^N = (\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N)$. Але нерівність $q_i^N < \theta^N$ не може виконуватись одночасно в усіх регіонах. Тому будуть існувати інші координати $p_{k \neq i}^N$, які неминуче будуть спадати. З часом ці тенденції змінюються, причому не синхронно по різних регіонах. Для якісного передбачення в конкретних ситуаціях треба ввести додаткові параметри і досліджувати модель в практичному режимі. В загальній ситуації спостерігаємо описане в теоремі 1 квазі-хаотичне коливання усіх величин $\theta^N, p_i^N, q_i^N, i = 1, \dots, n$ при $N \rightarrow \infty$.

Розглянемо тепер "мінус – мінус" модель. Її можна інтерпретувати, як ситуацію, що відповідає двосторонній конфліктній взаємодії між парою "інфекція – антідот". Це чисто альтернативна боротьба типу "або – або" яка описує тенденцію витіснення супротивників один одного в кожному регіо-

ні. Математичні формули конфліктної взаємодії для стохастичних векторів $\mathbf{r}, \mathbf{q}$ у цьому випадку мають вигляд

$$q_i^{N+1} = \frac{q_i^N(1 - r_i^N)}{z^N}, \quad r_i^{N+1} = \frac{r_i^N(1 - q_i^N)}{z^N}, \quad (89)$$

де нормуючий знаменник $z^N = 1 - \theta^N$, $\theta^N = (\mathbf{q}^N, \mathbf{r}^N)$. Знак мінус в чисельниках обох формул означає альтернативність (повну непримиренність) субстанцій. Але нормування на одиницю векторів $\mathbf{q}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}$ на кожному кроці конфліктної взаємодії означає незнищенність цих опонентів. Інтуїтивно можна здогадатись, що альтернативні субстанції відштовхуючись просто розподіляться по різним регіонам. Це дійсно так. Точний характер поведінки описано в наступній теоремі.

Теорема 20. (*"Мінус – мінус" модель*) Припустимо, що для заданої пари стохастичних векторів $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n, n > 1$ в початковий момент часу показник конфліктності $\theta = (\mathbf{q}, \mathbf{r})$ задовольняє умову:

$$0 < \theta < 1.$$

Тоді визначена формулами (89) траєкторія динамічної системи конфлікту:

$$\{\mathbf{q}^N, \mathbf{r}^N\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{q}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}\}, \quad \mathbf{q}^0 = \mathbf{q}, \mathbf{r}^0 = \mathbf{r}, \quad N = 0, 1, \dots$$

з необхідністю збігається до нерухомої граничної точки:

$$\mathbf{q}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{q}^N, \quad \mathbf{r}^\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{r}^N.$$

Граничні вектори $\mathbf{q}^\infty, \mathbf{r}^\infty$ є інваріантними відносно дії конфліктної композиції:

$$\mathbf{q}^\infty = \mathbf{q}^\infty * \mathbf{r}^\infty, \quad \mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}^\infty * \mathbf{q}^\infty. \quad (90)$$

При цьому, граничні вектори ортогональні,

$$\mathbf{q}^\infty \perp \mathbf{r}^\infty, \quad (91)$$

якщо $\mathbf{q} \neq \mathbf{r}$, та тотожні, $\mathbf{q}^\infty = \mathbf{r}^\infty$, якщо початкові вектори рівні, $\mathbf{q} = \mathbf{r}$. В останньому випадку (рівноважний стан) координати граничних векторів рівномірно розподілені: $q_i^\infty = r_i^\infty = 1/m$ для усіх i таких, що $q_i = r_i \neq 0$, де $m \leq n$ позначає число ненульових координат у початкових векторів.

Динамічну систему конфліктної тріади, що описує еволюцію одночасно взаємодіючих субстанцій $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ символічно записуємо у вигляді

$$\{\mathbf{P}^N, \mathbf{R}^N, \mathbf{Q}^N\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{P}^{N+1}, \mathbf{R}^{N+1}, \mathbf{Q}^{N+1}\}, \quad N = 0, 1, \dots \quad (92)$$

де $*$ – композиція конфлікту визначена нижче формулами (93), (94). Ми припускаємо, що субстанції $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ мають спільний простір існування Ω , який природним чином розкладено на окремі регіони, $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \Omega_i$, $n \geq 2$. Конфліктна тріада є складною системою в тому сенсі, що кожна з трьох субстанцій має внутрішню структуру:

$$\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n), \quad \mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_n),$$

елементи якої P_i, R_i, Q_i , $i = 1, \dots, n$ визначають кількісну характеристику початкового, при $N = 0$, розподілу субстанцій по регіонах простору існування.

Субстанції конфліктної тріади мають різну фізичну природу. Тому конкретні формули взаємодії кожної субстанції із доповнюючою парою, тобто $\mathbf{P}$ з парою $\{\mathbf{R}, \mathbf{Q}\}$, $\mathbf{R}$ з $\{\mathbf{P}, \mathbf{Q}\}$, та $\mathbf{Q}$ з $\{\mathbf{P}, \mathbf{R}\}$ є відмінними одна від одної. Увесь механізм взаємодії, який міститься в композиції конфлікту $*$, розкладено на дві частини: формули (93) – алгоритм кількісних змін величин P_i, R_i, Q_i по регіонах Ω_i , та (94) – статистичний закон перерозподілу ймовірностей "окупації" субстанціями $\mathbf{P}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}$ кожного з регіонів.

Еволюцію кількісних регіональних змін визначаємо наступними рівняннями:

$$P_i^{N+1} = \frac{P_i^N + d_1(R_i^N - Q_i^N)}{Z_P^N},$$

$$R_i^{N+1} = \frac{R_i^N + 1/d_3 \cdot Q_i^N / P_i^N}{Z_R^N}, \quad (93)$$

$$Q_i^{N+1} = \frac{Q_i^N + d_2(R_i^N - Q_i^N)}{Z_Q^N}, \quad P_i^0 = P_i, \quad R_i^0 = R_i, \quad Q_i^0 = Q_i, \quad N = 0, 1, \dots,$$

де параметри $d_1, d_2, d_3 > 0$ характеризують залежну від конкретної моделі швидкість змін субстанцій **P**, **R**, **Q** в силу природних взаємозалежностей між ними. Нормуючі знаменники Z_P^N, Z_Q^N, Z_R^N стабілізують глобальну кількість відповідної субстанції у всьому просторі Ω , вони можуть додатково залежати від часу в силу зовнішніх обставин. Тут, заради спрощення, ми вважаємо, що глобальна сумарна кількісна характеристика кожної із субстанцій є незмінною і тому покладаємо

$$Z_P^N = P = \sum_i^n P_i, \quad Z_Q^N = Q = \sum_i^n Q_i, \quad Z_R^N = R = \sum_i^n R_i, \quad N = 0, 1, \dots$$

Друга частина механізму конфліктної взаємодії $\ast$ має міжрегіональний чисто ймовірносний (статистичний) характер. Для її математичного задання необхідно перейти до нормованих на одиницю векторів

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n), \quad \mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n),$$

де координати

$$p_i := P_i/P, \quad r_i = R_i/R, \quad q_i := Q_i/Q, \quad i = 1, \dots, n$$

мають смисл ймовірностей знайти відповідну субстанцію **P**, **R** чи **Q** в i -му регіоні (або ймовірність "окупації" регіону Ω_i відповідною субстанцією). Закон перерозподілу цих ймовірностей визначається наступними формулами, які є статистичними аналогами різницевих варіантів рівнянь Лотки - Вольтери:

$$\begin{aligned} p_i^{N+1} &= \frac{p_i^N (1 + a(r_i^N - q_i^N))}{z_p^N}, \\ r_i^{N+1} &= \frac{r_i^N (1 - cp_i^N - bq_i^N)}{z_r^N}, \end{aligned} \quad (94)$$

$$q_i^{N+1} = \frac{q_i^N(1 + c^{-1}p_i^N - br_i^N)}{z_q^N}, \quad p_i^0 = p_i, r_i^0 = r_i, q_i^0 = q_i, \quad N = 0, 1, \dots,$$

де параметри $a, b, c > 0$ характеризують інтенсивність конфліктної взаємодії.

Перша з цих формул показує, що статистично популяція субстанції **P** максимально перерозподіляється в той регіон, де є найбільша ймовірність знайти життєвий ресурс та мінімальна загроза існуванню. Згідно другої формули, ймовірність знайти життєвий ресурс **R** зменшується в тих регіонах, де зростає популяція **P** (бо вона використовує життєвий ресурс), а також там, де велика концентрація інфекції **Q** (нагадаємо, що субстанції **Q** та **R** є взаємно альтернативними (субстанцію **Q** можна трактувати як від'ємний, протилежний до **R** ресурс)). Накінець, в силу третьої формули в (94), ймовірність небезпеки (інфекції) для існування популяції в i -му регіоні збільшується разом із зростанням самої популяції та зменшується в залежності від наявності позитивного життєвого ресурсу. Знаменники в формулах (94) забезпечують стохастичність векторів $\mathbf{p}^N = (p_1^N, \dots, p_n^N)$, $\mathbf{r}^N = (r_1^N, \dots, r_n^N)$, $\mathbf{q}^N = (q_1^N, \dots, q_n^N)$, $N = 1, 2, \dots$

Для завершення визначення композиції конфлікту $\ast$ необхідно ренормувати вектори $\mathbf{p}^{N+1}$, $\mathbf{r}^{N+1}$, $\mathbf{q}^{N+1}$, координати яких задані формулами (94). Це означає перехід до остаточних кількісних значень субстанцій **P**, **Q** та **R** на кожному $N + 1$ -кроці в i -му регіоні:

$$P_i^{N+1} = p_i^{N+1} \cdot P, \quad Q_i^{N+1} = q_i^{N+1} \cdot Q, \quad R_i^{N+1} = r_i^{N+1} \cdot R. \quad (95)$$

Таким чином, композиція конфлікту позначене відображенням $\ast$, яке породжує динамічну систему конфліктної тріади (92), повністю визначається формулами (93), (94), (95).

Побудовані конкретні комп'ютерні моделі. Доведено існування стану динамічної рівноваги.

Показано, що типова траєкторія складної системи асимптотично наближається (притягується) до граничного циклу. Запропонована інтерпретація результатів в термінах міграційних процесів.

5 Теорія внутрішніх ємностей конденсаторів зі зчисленною кількістю пластин.

Побудовано теорію внутрішніх ємностей конденсаторів зі зчисленною (скінченною або нескінченною) кількістю пластин довільної топології в локально компактному просторі X . Під *конденсатором* розуміється зчислений, локально скінченний набір $\mathbf{A}$ довільних множин $A_i \subset X$, $i \in I$, кожній з яких приписано знак $+1$ або -1 та замикання пластин протилежного знаку взаємно не перетинаються. Побудована теорія є логічним продовженням досліджень Н. В. Зорій у попередній звітний період (див., наприклад, [59, 60]); щодо підґрунтя таких досліджень, див. також результати відомого японського математика М. Ohtsuka, викладені ним у фундаментальній праці [46].

Теорія ємностей конденсаторів є природним розвитком та узагальненням теорії ємностей множин, побудованої у роботах О. Frostman [25], Н. Cartan [18], De la Vallée-Poussin [56] для класичних ядер в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, та пізніше розвиненої відомим датським математиком В. Fuglede [26] на загальні ядра в локально компактному просторі X . Однак ці дві теорії — для множин та, з іншого боку, для конденсаторів — виявилися глибоко відмінними одна від іншої.

Щоб проілюструвати це, досить зазначити, що у некомпактному випадку основна екстремальна задача теорії ємностей конденсаторів є, взагалі кажучи, *нерозв'язною* і цей несподіваний феномен має місце навіть за вельми природних припущень (скажімо, для ядер Ньютона, Гріна або Рісса

в $\mathbb{R}^n$ та замкненого конденсатора; див. [90]–[93]), що складає принципову відмінність від теорії ємностей множин (див. [18, 26]). Необхідні та достатні умови розв’язності основної екстремальної задачі теорії ємностей конденсаторів у випадку скінченного числа пластин було отримано в [60, 94, 95] (див. також наведений у розділі 5.5 приклад 1).

Тому було важливо знайти постановки задач, *дуальних* до основної варіаційної задачі теорії внутрішніх ємностей конденсаторів (і, отже, таких, що надавали б нові *еквівалентні* визначення поняття ємності конденсатора), але тепер вже *завжди розв’язних* — наприклад, навіть для незамкнених конденсаторів з нескінченною кількістю пластин. (Під дуальністю варіаційних задач розуміється рівність їхніх екстремальних значень.)

Для всіх додатно визначених ядер, що задовольняють умову Fuglede [26] узгодженості між сильною та широкою топологіями над простором мір Радона зі скінченною енергією, такі варіаційні задачі сформульовані та розв’язані. Їхні розв’язки є природним узагальненням добре відомого поняття внутрішньої рівноважної міри, асоційованої з множиною. Отримано опис цих розв’язків та відповідних рівноважних констант, доведено теореми про їх єдиність та неперервність, виділено характеристичні властивості.

Такі результати є новими та представляють інтерес навіть для конденсаторів зі скінченною кількістю пластин, що раніше вже досліджувалися в математичній літературі (див., наприклад, [46, 45, 55]). Однак з тою ж самою загальністю аналогічну теорію було побудовано для конденсаторів з нескінченною кількістю пластин. Це вимагало осмислення відповідних понять нескінченномірних векторних мір, визначення належним чином їх енергій і потенціалів та розвитку нових ефективних методів.

5.1 Позначення, визначення, відомі факти

Надалі X позначає локально компактний простір, що задовольняє аксіому віддільності Хаусдорфа, а $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(X)$ позначає лінійний простір всіх

дійсних мір Радона ν на X , устаткований топологією *широкої* (=грубої) збіжності, тобто топологією поточної збіжності на класі $C_0(X)$ усіх дійсних неперервних функцій на X з компактним носієм (див. [16]). Під *ядром* κ на X ми розуміємо напівнеперервну знизу функцію

$$\kappa : X \times X \rightarrow (-\infty, \infty],$$

яка вважається невід'ємною у випадку некомпактності простору X .

Якщо $\nu, \mu \in \mathfrak{M}$, то *взаємна енергія* $\kappa(\nu, \mu)$ та *потенціал* $\kappa(\cdot, \nu)$ відносно ядра κ визначаються відповідно рівностями

$$\kappa(\nu, \mu) := \int \kappa(x, y) d(\nu \otimes \mu)(x, y) \quad \text{та} \quad \kappa(\cdot, \nu) := \int \kappa(\cdot, y) d\nu(y).$$

(Тут і надалі, вводячи позначення, ми завжди вважаємо відповідний об'єкт справа добре визначеним — як скінченне число або $\pm\infty$.) При $\nu = \mu$ ми отримуємо *енергію* $\kappa(\nu, \nu)$ міри ν . Нехай $\mathcal{E} = \mathcal{E}(X)$ складається з усіх $\nu \in \mathfrak{M}$ зі скінченною енергією.

Ми будемо розглядати *додатно визначене* ядро κ , що означає його симетричність (тобто $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$ для всіх $x, y \in X$) та невід'ємність енергії $\kappa(\nu, \nu)$ для всіх $\nu \in \mathfrak{M}$ (звичайно, якщо відповідне значення $\kappa(\nu, \nu)$ є добре визначеним). Тоді множина $\mathcal{E}$ утворює передгільбертів простір зі скалярним добутком $\kappa(\nu, \mu)$ та напівнормою $\|\nu\|_{\mathcal{E}} := \|\nu\|_{\mathcal{E}(X)} := \sqrt{\kappa(\nu, \nu)}$ (див. [26]). Топологія на $\mathcal{E}$, що визначається напівнормою $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{\mathcal{E}}$, називається *сильною*.Dodatno визначене ядро називається *строго додатно визначеним*, якщо напівнорма $\|\cdot\|$ задовольняє всі аксіоми норми.

Нагадаємо, що міра $\nu \geq 0$ називається *зосередженою* на множині $E \subset X$, якщо E ν -вимірна і $\nu = \nu_E$, де $\nu_E := \nu|_E$ позначає слід міри ν на E . Нехай $\mathfrak{M}^+(E)$ — випуклий конус всіх невід'ємних мір, зосереджених на E , і $\mathcal{E}^+(E) := \mathfrak{M}^+(E) \cap \mathcal{E}$. Введемо також позначення $\mathfrak{M}^+ := \mathfrak{M}^+(X)$ і $\mathcal{E}^+ := \mathcal{E}^+(X)$.

Означення 3. Наслідуючи В. Fuglede [26], назовемо (додатно визначене) ядро κ *узгодженим*, якщо кожна сильно фундаментальна узагальнена

послідовність в $\mathcal{E}^+$ збігається сильно до кожної з її широких граничних точок. Узгоджене ядро називається довершеним, якщо воно є строго додатно визначеним.

Зауваження 1. Необхідно розглядати узагальнені послідовності (або фільтри) в $\mathfrak{M}$ замість звичайних послідовностей, оскільки широка топологія в загальному не задовольняє першу аксіому зліченності. Цієї незручності можна уникнути, якщо розглядати метризовний та зліченний на нескінченності простір X — скажімо, $X = \mathbb{R}^n$.

Оскільки наші дослідження стосуються саме довершених (чи, більш загально, узгоджених) ядер, важливо зауважити, що клас таких ядер є досить широким і містить, зокрема, всі класичні ядра теорії потенціалу. Дійсно, в евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ядро Ньютона $|x - y|^{2-n}$ є довершеним [18]. Довершеними є ядра Рісса $|x - y|^{\alpha-n}$, $0 < \alpha < n$, в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ [19, 20], та звуження логарифмічного ядра $-\log |x - y|$ в $\mathbb{R}^2$ на відкритий одиничний круг [43]. Нарешті, якщо D — відкрита множина в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а її узагальнена функція Гріна g_D існує, то ядро g_D є також довершеним [22].

З іншого боку, поняття довершених (чи, більш загально, узгоджених) ядер є ефективним в дослідженні екстремальних задач теорії потенціалу над класами додатних мір. Дійсно, теорія ємностей множин була побудована в [26] саме для цих ядер, що стало можливим дякуючи наступній теоремі (пор. з нашою теоремою 23).

Теорема 21 (Fuglede [26]). *Ядро κ є довершеним тоді і тільки тоді, коли простір $\mathcal{E}^+$ сильно повний та сильна топологія на $\mathcal{E}^+$ сильніша за широку.*

Зауваження 2. У звітний період було показано, що це поняття є також ефективним в екстремальних задачах теорії потенціалу над класами знакозмінних мір Радона, асоційованих з конденсаторами зі скінчен-

ною чи нескінченною кількістю пластин. Це забезпечується належним результатом про повноту (див. теорему 23).

5.2 Конденсатори, асоційовані міри, їхні енергії та потенціали

Позначимо через I^+ та I^- злічені (скінченні чи нескінченні), диз'юнктні множини індексів $i \in \mathbb{N}$, і нехай I позначає їхнє об'єднання. Нехай кожному $i \in I$ однозначно співставлена непорожня множина $A_i \subset X$.

Означення 4. Упорядкований набір $\mathbf{A} = (A_i)_{i \in I}$ називається (I^+, I^-) -конденсатором (або просто конденсатором) в X , якщо кожна компактна підмножина з X перетинається щонайбільше зі скінченною кількістю множин A_i та

$$\overline{A_i} \cap \overline{A_j} = \emptyset \quad \text{для всіх } i \in I^+, j \in I^-. \quad (96)$$

Назвемо A_i , $i \in I^+$, та A_j , $j \in I^-$, додатними та від'ємними пластинами конденсатора $\mathbf{A}$, відповідно. Конденсатор назвемо замкненим, компактим або універсально вимірним, якщо відповідна властивість задовольняється кожною його пластиною. Назвемо його скінченим, якщо такою є множина I . Позначимо $\overline{\mathbf{A}} := (\overline{A_i})_{i \in I}$ і зауважимо, що в силу (96) $\overline{\mathbf{A}}$ є (замкненим) (I^+, I^-) -конденсатором. Також позначимо

$$A^+ := \bigcup_{i \in I^+} A_i, \quad A^- := \bigcup_{i \in I^-} A_i.$$

Нехай $\mathfrak{M}(\mathbf{A})$ позначає клас усіх лінійних комбінацій (скінченних чи нескінченних)

$$\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu^i, \quad \text{де } \alpha_i := \text{sign } A_i \text{ та } \mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i).$$

Наділимо цей клас відношенням тотожності та топологією так, щоб отриманий топологічний простір $\mathfrak{M}(\mathbf{A})$ був гомеоморфним до простору $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}^+(A_i)$ (де кожний множник $\mathfrak{M}^+(A_i)$ розглядається устаткованим широкою топологією); відповідну топологію на $\mathfrak{M}(\mathbf{A})$ назвемо по аналогії широкою топологією. Більш детально, μ_1 та μ_2 з $\mathfrak{M}(\mathbf{A})$ вважаються тотожними ($\mu_1 = \mu_2$)

тоді і лише тоді, коли $\mu_1^i = \mu_2^i$ для всіх $i \in I$. Якщо S — напрямлена множина індексів, то узагальнена послідовність $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathfrak{M}(\overline{\mathbf{A}})$ називається широко збіжною до $\mu_0 \in \mathfrak{M}(\overline{\mathbf{A}})$, якщо $\mu_s^i \rightarrow \mu_0^i$ широко для всіх $i \in I$.

Оскільки кожна компактна підмножина з X перетинається щонайбільше зі скінченною кількістю пластин A_i , для кожного $\varphi \in C_0(X)$ лише скінченна кількість величин $\mu^i(\varphi)$ (де елемент $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbf{A})$ фіксований) відмінні від нуля. Звідси випливає, що для кожної лінійної комбінації $\mu \in \mathfrak{M}(\mathbf{A})$ існує єдина міра Радона $R\mu$ така, що

$$R\mu(\varphi) = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu^i(\varphi) \quad \text{для всіх } \varphi \in C_0(X);$$

в силу (96), її додатна та від'ємна частини у розкладі Хана-Жордана мають вигляд

$$R\mu^+ = \sum_{i \in I^+} \mu^i \quad \text{та} \quad R\mu^- = \sum_{i \in I^-} \mu^i.$$

Зауважимо, що це відображення $R : \mathfrak{M}(\mathbf{A}) \rightarrow \mathfrak{M}$ не є, взагалі кажучи, ін'єктивним, тобто можуть існувати $\mu, \mu' \in \mathfrak{M}(\mathbf{A})$ такі, що $\mu \neq \mu'$, але $R\mu = R\mu'$. (Воно ін'єктивне тоді і лише тоді, коли всі A_i , $i \in I$, взаємно не перетинаються.) Назвемо $\mu, \mu' \in \mathfrak{M}(\mathbf{A})$ *R-еквівалентними*, якщо їх R -образи співпадають.

Також зауважимо, що з широкої збіжності в $\mathfrak{M}(\mathbf{A})$ випливає широка збіжність для відповідних R -образів. Зворотнє виконується тоді і лише тоді, коли всі $\overline{A_i}$, $i \in I$, взаємно не перетинаються; в цьому можна переконатися з допомогою теореми Тітце-Урисона про неперервне продовження в нормальних просторах.

У відповідності до електростатичного трактування конденсатора $\mathbf{A}$, нехай взаємодія між довільними мірами (зарядами) на його пластинах A_i та A_j , $i, j \in I$, визначається (скінченною чи нескінченною) матрицею $(\alpha_i \alpha_j)_{i, j \in I}$. Тоді, якщо $\mu, \mu_1 \in \mathfrak{M}(\mathbf{A})$, то *взаємну енергію та потенціал* природно ви-

значити відповідно формулами¹

$$\kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_1) := \sum_{i,j \in I} \alpha_i \alpha_j \kappa(\mu^i, \mu_1^j) \quad \text{та} \quad \kappa(\cdot, \boldsymbol{\mu}) := \sum_{j \in I} \alpha_j \kappa(\cdot, \mu^j). \quad (97)$$

При $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_1$ величина $\kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_1)$ визначає енергію елемента $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}(\mathbf{A})$. Позначимо через $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ множину всіх $\boldsymbol{\mu} \in \mathfrak{M}(\mathbf{A})$ таких, що $-\infty < \kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) < \infty$.

Легко перевірити, що включення $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}(\mathbf{A})$ рівносильно тому, що $\sum_{i \in I} \|\mu^i\|^2 < \infty$. Звідси випливає, що $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ утворює *випуклий* конус; цей факт, звісно, надзвичайно корисний при розв'язуванні екстремальних задач.

Нагадаємо (див. [26, 43]), що *приблизно всюди* (*пр.вс.*) означає, що твердження виконується всюди, за можливим винятком множини нульової внутрішньої ємності.

Лема 1. *Для довільних фіксованих $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_1 \in \mathcal{E}(\mathbf{A})$ виконуються рівності*

$$\begin{aligned} \kappa(\cdot, \boldsymbol{\mu}) &= \kappa(\cdot, R\boldsymbol{\mu}) \quad \text{пр. вс. в } X, \\ \kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}_1) &= \kappa(R\boldsymbol{\mu}, R\boldsymbol{\mu}_1). \end{aligned} \quad (98)$$

Зауважимо, що в силу додатної визначеності ядра з (98) випливає наступна нерівність, яка зовсім не була очевидною "a priori":

$$\kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \geq 0 \quad \text{для всіх} \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}(\mathbf{A}). \quad (99)$$

Знайдене лемою 1 співвідношення між енергіями та потенціалами $\boldsymbol{\mu}$ та $R\boldsymbol{\mu}$ власне і дозволило розвинути ефективний аналіз на нескінченномірних векторних мірах, асоційованих з конденсатором. Дійсно, примінюючи (98) до $\kappa(R\boldsymbol{\mu}_k, R\boldsymbol{\mu}_t)$, де $\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\mu}_t, k, t = 1, 2, \dots$ — фіксовані елементи з класу $\mathcal{E}(\mathbf{A})$, та враховуючи, що відповідні ряди в (97) є абсолютно збіжними, ми отримуємо наступну теорему.

¹Тут і надалі, вираз $\sum_{i \in I} c_i$ вважається добре визначеним, якщо таким є кожний доданок c_i , а сума не залежить від порядку сумування. Тоді, за теоремою Рімана, сума скінченна тоді і лише тоді, коли ряд абсолютно збіжний.

Теорема 22. Множина $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ утворює напівметричний простір з напівметрикою

$$\|\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2\|_{\mathcal{E}(\mathbf{A})} := \left[\sum_{i,j \in I} \alpha_i \alpha_j \kappa(\mu_1^i - \mu_2^i, \mu_1^j - \mu_2^j) \right]^{1/2}, \quad \boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2 \in \mathcal{E}(\mathbf{A}), \quad (100)$$

і цей простір є ізометричним до його R -образу, тобто

$$\|\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2\|_{\mathcal{E}(\mathbf{A})} = \|R\boldsymbol{\mu}_1 - R\boldsymbol{\mu}_2\|_{\mathcal{E}}.$$

Ця напівметрика є метрикою тоді і тільки тоді, коли ядро κ строго додатно визначене, а всі A_i , $i \in I$, взаємно не перетинаються.

Всюди далі $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ трактується як напівметричний простір з напівметрикою (100). Оскільки $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ та його R -образ ізометричні, аналогічно термінології в $\mathcal{E}$ топологію напівметричного простору $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ назвемо *сильною*.

5.3 Внутрішня ємність конденсатора

Зафіксувавши векторнозначну функцію $\mathbf{g} = (g_i)_{i \in I}$, де всі компоненти $g_i : X \rightarrow (0, \infty)$ є неперервними, та числовий вектор $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in I}$ з $a_i > 0$, визначимо *внутрішню ємність* конденсатора $\mathbf{A}$ (відносно κ , $\mathbf{a}$ та $\mathbf{g}$) формулою²

$$\text{cap } \mathbf{A} := \text{cap}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) := \left[\inf_{\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})} \kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}) \right]^{-1},$$

де

$$\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) := \left\{ \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}(\mathbf{A}) : \int g_i d\mu^i = a_i \text{ для всіх } i \in I \right\}.$$

Паралельно зі зазначеною вище електростатичною інтерпретацією (і, отже, можливих застосувань до задач індустрії — див. "capacitors" в [30]), це поняття має цілий ряд суттєвих застосувань до теорії апроксимації, геометричної теорії функцій та самої теорії потенціалу (див. монографії [45, 55, 27] та наведені там цитування).

²Як завжди, точна нижня межа над порожньою множиною визначається як $+\infty$. Ми також покладемо $1/0 = +\infty$.

При $I = \{1\}$, $g_1 = 1$, $a_1 = 1$ поняття внутрішньої ємності конденсатора зводиться до поняття внутрішньої ємності множини; відповідну величину позначимо символом $C(\cdot)$.

Як випливає з (99), у загальному $0 \leq \text{cap } \mathbf{A} \leq \infty$. Необхідні та (або) достатні умови для того, щоб мав місце не вироджений випадок $0 < \text{cap } \mathbf{A} < \infty$, отримані в [85].

Задача існування $\lambda_{\mathbf{A}} \in \mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з мінімальною в класі $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ енергією (назвемо її $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачею) є основною екстремальною задачею теорії внутрішніх ємностей конденсаторів. Вона має сенс у випадку, якщо $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) \neq \emptyset$, що еквівалентно умові

$$\text{cap}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) > 0. \quad (101)$$

Назвемо $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачу *розв'язною*, якщо клас $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ всіх її розв'язків $\lambda_{\mathbf{A}}$ непорожній. Розв'язок $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачі (якщо він існує) є єдиним у сенсі наступного твердження (див. також слідуючий за ним наслідок).

Лема 2. *Нехай $\lambda, \hat{\lambda} \in \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$. Тоді $\lambda, \hat{\lambda}$ належать до одного класу еквівалентності в напівметричному просторі $\mathcal{E}(\mathbf{A})$, тобто $\|\lambda - \hat{\lambda}\|_{\mathcal{E}(\mathbf{A})} = 0$.*

Твердження 1. *Нехай $\lambda, \hat{\lambda} \in \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$. Тоді $R\lambda = R\hat{\lambda}$, якщо ядро κ строго додатно визначене, і $\lambda = \hat{\lambda}$, якщо, до того ж, всі A_i , $i \in I$, взаємно не перетинаються.*

Щодо задачі існування, то вона є легко розв'язною лише у випадку, коли виконується сукупність наступних умов: конденсатор $\mathbf{A}$ скінченний і компактний, а ядро κ неперервне на $A^+ \times A^-$. Дійсно, тоді клас допустимих мір $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ компактний у широкій топології, а функціонал енергії $\kappa(\mu, \mu)$ напівнеперервний знизу на $\mathcal{E}(\mathbf{A})$, і існування $\lambda \in \mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ доводиться з допомогою декількох рядків елементарних викладок (див., наприклад, [46]), що використовують лише структури широкої топології. Однак задача існування стає вельми нетривіальною, якщо хоча б одна з наведених

тільки що умов не виконується. Скажімо, клас допустимих мір перестає бути широко компактним, якщо хоча б одна з множин A_i некомпактна.

Щоб розв'язати задачу існування, у звітний період було започатковано та обгрунтовано підхід, що ефективно використовує структури обох топологій над напівметричним простором $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ — як широкої, так і сильної. У основі такого підходу лежить теорема про сильну повноту належних топологічних підпросторів простору $\mathcal{E}(\mathbf{A})$.

5.4 Теорема про сильну повноту

Всюди далі, якщо не вказано інше, вважаємо, що ядро κ узгоджене (див. визначення 3) і або $I^- = \emptyset$, або κ , $\mathbf{g}$, $\mathbf{a}$ та $\mathbf{A}$ задовольняють наступним двом умовам:

$$\sum_{i \in I} a_i g_{i, \inf}^{-1} < \infty, \quad (102)$$

$$\sup_{x \in A^+, y \in A^-} \kappa(x, y) < \infty, \quad (103)$$

де $g_{i, \inf} := \inf_{x \in A_i} g_i(x)$. Позначивши

$$\mathcal{E}(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g}) := \left\{ \mu \in \mathcal{E}(\mathbf{A}) : \int g_i d\mu^i \leq a_i \text{ для всіх } i \in I \right\},$$

розглянемо $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ як топологічний підпростір напівметричного простору $\mathcal{E}(\mathbf{A})$.

Теорема 23. *За вказаних вище постійних умов, нехай конденсатор $\mathbf{A}$ замкнений. Тоді напівметричний простір $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ є повним. Більш детально, якщо узагальнена послідовність $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ сильно фундаментальна і μ позначає одну з її широких граничних точок (таке μ існує), тоді $\mu \in \mathcal{E}(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ і $\mu_s \rightarrow \mu$ сильно, тобто*

$$\lim_{s \in S} \|\mu_s - \mu\|_{\mathcal{E}(\mathbf{A})} = 0.$$

Нехай тепер, крім того, ядро строго додатно визначене (отже, довершене), а всі A_i , $i \in I$, взаємно диз'юнктні. Якщо $(\mu_s)_{s \in S}$ збігається сильно до $\mu_0 \in \mathcal{E}(\mathbf{A})$, тоді насправді $\mu_0 \in \mathcal{E}(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ і $\mu_s \rightarrow \mu_0$ також широко.

Зауваження 3. Оскільки напівметричний простір $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ ізометричний до його R -образу, теорема 23 виділяє сильно повні топологічні підпростори передгілбертового простору $\mathcal{E}$, що складаються із знакозмінних мір. Такий результат представляє незалежний інтерес оскільки, згідно з добре відомим прикладом *Н. Cartan* [18], увесь простір $\mathcal{E}$ є сильно неповним навіть для ядра Ньютона $|x - y|^{2-n}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

5.5 Достатні умови розв’язності основної екстремальної задачі

За вказаних вище постійних умов, нехай конденсатор $\mathbf{A}$ замкнений і виконується умова (101). Достатні умови розв’язності основної екстремальної задачі теорії внутрішніх ємностей конденсаторів даються наступною теоремою.

Теорема 24. Для кожного $i \in I$ нехай функція $g_i|_{A_i}$ або обмежена зверху, або задовольняє наступну умову на її ріст: існують $r_i \in (1, \infty)$ та $\omega_i \in \mathcal{E}$ такі, що

$$g^{r_i}(x) \leq \kappa(x, \omega_i) \quad \text{пр. вс. в } A_i.$$

Якщо, крім того, кожна множина A_i або компактна, або має скінченну ємність

$$C(A_i) < \infty, \tag{104}$$

тоді клас $\mathfrak{S}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ непорожній і широко компактний.

Зауваження 4. Стосовно формулювання теореми 24, зауважимо, що компактна множина $K \subset \mathbf{X}$ може мати нескінченну ємність; ємність $C(K)$ є необхідно скінченною, якщо ядро строго додатно визначене [26]. З іншого боку, навіть для ядра Ньютона множини зі скінченною ємністю можуть бути необмеженими [43].

Щоб довести теорему 24, ми показуємо, що кожна (мінімізуюча) узагальнена послідовність $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з властивістю $\lim_{s \in S} \|\mu_s\|_{\mathcal{E}(\mathbf{A})}^2 =$

$[\text{cap } \mathbf{A}]^{-1}$ є сильно фундаментальною. Тоді з теореми 23 випливає, що для деякого $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{A}, \leq \mathbf{a}, \mathbf{g})$ виконується $\mu_s \rightarrow \gamma$ сильно і широко. Це γ є розв'язком $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачі тоді і тільки тоді, коли $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$. Справедливість такого включення якраз і вдається довести при умовах на $g_i|_{A_i}$ та A_i , наведених у формулюванні теореми 24.

Зауважимо, що ці умови на A_i є істотними не тільки для доведення теореми 24, але і для її справедливості в цілому. Це випливає з наступного прикладу та факту (див. [90]), що у випадку (106) умова (104) не виконується.

Приклад 1. У $\mathbb{R}^3$ розглянемо ядро Ньютона $\kappa(x, y) = |x - y|^{-1}$, і нехай $I^+ = \{1\}$, $I^- = \{2\}$, $g_1 = g_2 = 1$, $a_1 = a_2 = 1$. Нехай A_2 визначається як тіло обертання, що складається з усіх $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ таких, що $2 \leq x_1 < \infty$ та $0 \leq x_2^2 + x_3^2 \leq \rho(x_1)$, де $\rho(x_1) \rightarrow 0$ при $x_1 \rightarrow \infty$, і нехай $A_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$. Розглянемо такі випадки:

$$\rho(r) = r^{-s}, \quad \text{де } s \in [0, \infty), \quad (105)$$

$$\rho(r) = \exp(-r^s), \quad \text{де } s \in (0, 1], \quad (106)$$

$$\rho(r) = \exp(-r^s), \quad \text{де } s > 1. \quad (107)$$

Тоді $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задача є розв'язною в обох випадках (105) і (107), але вона є нерозв'язною у випадку (106); див. [90].

5.6 Дуальні варіаційні задачі

У зв'язку з відміченим фактом нерозв'язності $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачі важливо знайти постановки задач, *дуальних* до неї (і, отже, таких, що надають нові *еквівалентні* визначення поняття ємності конденсатора), але тепер вже *завжди розв'язних* — наприклад, навіть для незамкнених конденсаторів з нескінченною кількістю пластин.

У роботах [62, 71, 72, 83, 85] розглядалися екстремальні задачі про мінімум енергій над певними підкласами просторів $\mathcal{E}$ та $\mathcal{E}(\mathbf{A})$, належним чином

визначених. За постійних умов, сформульованих вище, ці варіаційні задачі виявляються дуальними до $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ -задачі, але вже завжди розв'язними. Розв'язки зазначених варіаційних задач є природним узагальненням добре відомого поняття внутрішньої рівноважної міри, асоційованої з множиною (див. [26]). Отримано опис цих розв'язків та відповідних рівноважних констант, доведено теореми про їх єдиність та неперервність, виділено характеристичні властивості. Відсилаючи до робіт [83, 85] за цими результатами у їх отриманій загальності (див., наприклад, теореми 8.1, 8.2, 8.3, 10.1, 12.1, твердження 11.1, 11.2 та наслідки 8.3, 9.1, 9.2, 10.1 в [83]), тут для зручності читача ми наведемо їх у випадку, коли формулювання є максимально спрощеними та відчутними.

Отже, припустимо для простоти, що $\overline{A_i}$, $i \in I$, взаємно не перетинаються, а ядро κ є строго додатно визначеним і, отже, довершеним.

Теорема 25. *За зазначених умов, ємність $\text{cap}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ альтернативно визначається наступним співвідношенням:*

$$\text{cap}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) = \inf_{\boldsymbol{\mu} \in \Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})} \kappa(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu}), \quad (108)$$

де $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ складається з усіх $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{E}(\overline{\mathbf{A}})$ з властивістю

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \boldsymbol{\mu}) \geq c_i(\boldsymbol{\mu}) g_i(x) \quad \text{пр.вс. в } A_i, \quad i \in I. \quad (109)$$

Тут $c_i(\boldsymbol{\mu}) \in \mathbb{R}$, $i \in I$, — деякі залежні від $\boldsymbol{\mu}$ константи, що задовольняють рівність

$$\sum_{i \in I} c_i(\boldsymbol{\mu}) = 1. \quad (110)$$

Якщо, крім того, $0 < \text{cap } \mathbf{A} < \infty$, то визначена співвідношенням (108) варіаційна задача, дуальна до основної, є завжди розв'язною, тобто існує $\gamma_{\mathbf{A}} \in \Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з мінімальною в цьому класі енергією:

$$\kappa(\gamma_{\mathbf{A}}, \gamma_{\mathbf{A}}) = \text{cap}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}).$$

Більш того, розв'язок $\gamma_{\mathbf{A}}$ дуальної варіаційної задачі (108) та числа $C_i := c_i(\gamma_{\mathbf{A}})$, $i \in I$, що задовольняють співвідношення (109) та (110) при $\mu = \gamma_{\mathbf{A}}$, визначені єдиним чином та задовольняють рівності

$$C_i = \frac{\alpha_i \kappa(\gamma_{\mathbf{A}}^i, \gamma_{\mathbf{A}})}{\text{cap } \mathbf{A}} = \inf_{x \in A_i} \frac{\alpha_i a_i \kappa(x, \gamma_{\mathbf{A}})}{g_i(x)}, \quad i \in I,$$

де позначення " $\inf_{x \in A_i}$ " означає, що точна нижня межа розглядається над всією множиною A_i за можливим винятком множини внутрішньої ємності нуль.

Міру $\gamma_{\mathbf{A}}$ та числа $C_i(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) := C_i$, $i \in I$, що єдиним чином визначені теоремою 25 за умови $0 < \text{cap } \mathbf{A} < \infty$, назовемо *внутрішньою рівноважною мірою* та *внутрішніми рівноважними константами*, асоційованими з $\mathbf{A}$ (відповідно до κ , $\mathbf{a}$ та $\mathbf{g}$).

У доповнення до співвідношення (109), потенціал $\kappa(x, \gamma_{\mathbf{A}})$ внутрішньої рівноважної міри $\gamma_{\mathbf{A}}$ має наступні властивості.

Теорема 26. *Нехай ядро κ неперервне на $A_\ell \times A_j$ при $\alpha_\ell \neq \alpha_j$ та $\kappa(\cdot, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$ рівномірно на компактних множинах. Тоді*

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \gamma_{\mathbf{A}}) \leq C_i g_i(x) \quad \text{для всіх } x \in \text{supp } \gamma_{\mathbf{A}}^i, \quad i \in I,$$

i, отже,

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \gamma_{\mathbf{A}}) = C_i g_i(x) \quad \text{пр.вс. в } A_i \cap \text{supp } \gamma_{\mathbf{A}}^i, \quad i \in I.$$

Крім того, внутрішня рівноважна міра та внутрішні рівноважні константи є неперервними функціями конденсатора. Щоб строго сформулювати цю важливу властивість, введемо наступні означення.

На множині всіх (I^+, I^-) -конденсаторів в X введемо структуру часткової впорядкованості з допомогою відношення $\prec$, де $\mathbf{A} \prec \mathbf{A}'$ означає, що $A_i \subset A'_i$ для всіх $i \in I$. Тут $\mathbf{A}' = (A'_i)_{i \in I}$. Тоді, очевидно, $\text{cap } \mathbf{A}$ є неспадною функцією конденсатора, тобто

$$\text{cap } \mathbf{A} \leq \text{cap } \mathbf{A}', \quad \text{якщо } \mathbf{A} \prec \mathbf{A}'.$$

Нехай $\mathbf{A}_n = (A_i^n)_{i \in I}$, де $n \in \mathbb{N}$, та $\mathbf{A}$ — фіксовані (I^+, I^-) -конденсатори. Будемо писати $\mathbf{A}_n \uparrow \mathbf{A}$, якщо виконуються наступні дві умови: $\mathbf{A}_n \prec \mathbf{A}_{n+1}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ та

$$A_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_i^n \quad \text{для всіх } i \in I.$$

Теорема 27. *Нехай або $g_{i,\inf} > 0$ для всіх $i \in I$, або простір X зліченний на нескінченності³. Якщо $\mathbf{A}_n$, $n \in \mathbb{N}$, універсально вимірні та $\mathbf{A}_n \uparrow \mathbf{A}$, то*

$$\text{cap}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \text{cap}(\mathbf{A}_n, \mathbf{a}, \mathbf{g}). \quad (111)$$

Припустимо, крім того, що $0 < \text{cap}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) < \infty$. Тоді

$$\gamma_{\mathbf{A}_n} \rightarrow \gamma_{\mathbf{A}} \quad \text{сильно та широко,}$$

$$C_i(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) = \lim_{n \in \mathbb{N}} C_i(\mathbf{A}_n, \mathbf{a}, \mathbf{g}) \quad \text{для всіх } i \in I.$$

Зауваження 5. Теорема 27 залишається в силі, якщо $(\mathbf{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ замінити на частково впорядковану множину всіх компактних конденсаторів $\mathbf{K}$ таких, що $\mathbf{K} \prec \mathbf{A}$. Більш того, тоді припущення, що або $g_{i,\inf} > 0$ для всіх $i \in I$, або X є зліченим на нескінченності, не потрібне.

Зауваження 6. Якщо зчисленна множина індексів I зводиться до одного елемента, тобто $I = \{1\}$, то наведені вище теореми 25, 26, 27 є добре відомими (див. теореми 4.1, 4.2 в [26]; тоді, звичайно, $C_1 = 1$). У загальному випадку зчисленного I властивості внутрішньої рівноважної міри $\gamma_{\mathbf{A}}$, асоційованої з конденсатором $\mathbf{A}$, є цілком подібними до відповідних властивостей внутрішньої рівноважної міри, асоційованої з множиною. Єдина суттєва відмінність полягає в тому, що виконується

$$\gamma_{\mathbf{A}}^i(X) \leq a_i \text{cap } \mathbf{A} \quad \text{для всіх } i \in I$$

³Нагадаємо (див. [17, Шар. 1, § 9]), що локально компактний простір називається зліченим на нескінченності, якщо він може бути зображений як зчислення об'єднання компактних множин.

і, на відміну від теорії ємностей множин, нерівність у цих співвідношеннях не є, взагалі кажучи, рівністю. Це спричинено згаданим вище феноменом нерозв'язності основної варіаційної задачі теорії ємностей конденсаторів.

Зауваження 7. Істотно зауважити, що всі згадані вище умови на ядро не є обтяжливими. Вони виконуються, наприклад, для ядер Ньютона $|x - y|^{2-n}$, Рісса $|x - y|^{\alpha-n}$ (де $0 < \alpha < n$), та Гріна g_D (де D — відкрита множина, а g_D — її узагальнена функція Гріна) в $\mathbb{R}^n$, якщо евклідова відстань між A^+ та A^- є строго додатною, а також для звуження логарифмічного ядра $-\log |x - y|$ в $\mathbb{R}^2$ на відкритий одиничний круг.

6 Задача Гаусса.

6.1 Задача Гаусса з верхніми крайовими умовами

Ми користуємося позначеннями та визначеннями з розділу 5. Як і раніше, розглядається позитивно визначене ядро κ у локально компактному просторі X .

Для замкненої множини Σ , міри $\sigma \in \mathfrak{M}^+(\Sigma)$ і неперервної додатної функції g , вивчено задачу Гаусса з верхніми крайовими умовами та зовнішнім полем f , де точна нижня межа енергій розглядається над класом усіх $\nu \in \mathfrak{M}^+(\Sigma)$ з властивостями $\int g d\nu = 1$ та $\sigma - \nu \geq 0$. Доведено теореми про існування та єдиність розв'язку λ_Σ^σ , вивчено властивості його неперервності у широкій та сильній топологіях, коли σ та Σ змінюються одночасно, дано опис f -вагового потенціалу розв'язку λ_Σ^σ , виділено його характеристичні властивості. Такі результати є новими навіть для класичних ядер в $\mathbb{R}^n$, що істотно для застосувань до задач конструктивної теорії функцій та індустріальної математики.

Щоб скоротити позначення, для довільно фіксованих міри ν та функції ψ будемо писати $\langle \psi, \nu \rangle := \int \psi d\nu$. Нехай $\Phi(X)$ позначає клас усіх на-

півнеперервних знизу функцій $\psi : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ таких що $\psi \geq 0$ у випадку некомпактності простору X . Позначимо $\kappa_\nu := \kappa(\cdot, \nu)$, де $\kappa(\cdot, \nu)$ — потенціал міри ν відносно ядра κ , та $S_\nu := \text{supp } \nu$.

Зафіксуємо функцію $f : X \rightarrow (-\infty, \infty]$, що характеризує джерело зовнішньої енергії, та припустимо, що має місце хоча б один з наступних двох випадків: або $f \in \Phi(X)$ (випадок I), або $f = \kappa_\zeta$, де $\zeta \in \mathcal{E}$ — *знакозмінна* міра (випадок II). Тоді f -ваговий потенціал W_ν^f та f -вагова енергія $G_f(\nu)$ міри $\nu \in \mathcal{E}$ визначаються відповідно формулами

$$W_\nu^f(x) := \kappa_\nu(x) + f(x), \quad G_f(\nu) := \|\nu\|^2 + 2\langle f, \nu \rangle = \langle W_\nu^f + f, \nu \rangle.$$

Зауважимо, що за прийнятих умов f -ваговий потенціал W_ν^f довільної міри $\nu \in \mathcal{E}$ є добре визначеним та $\neq -\infty$ принаймі приблизно всюди в X .

Зафіксувавши також непорожню замкнену множину $\Sigma \subset X$, розглянемо функцію $g > 0$, що визначена та неперервна принаймі в деякому відкритому околі U_Σ множини Σ , та міру $\sigma \in \mathfrak{M}^+(\Sigma)$, що відіграє роль верхньої крайової умови (constraint) для можливих розподілів мір (=зарядів). Розглянемо задачу мінімізації f -вагової енергії

$$G_f^\sigma(\Sigma, g) := \inf_{\nu \in \mathcal{E}^\sigma(\Sigma, g)} G_f(\nu),$$

де

$$\mathcal{E}^\sigma(\Sigma, g) := \{\nu \in \mathcal{E}^+(\Sigma) : \langle g, \nu \rangle = 1, \nu \leq \sigma\}$$

та $\nu \leq \sigma$ означає, що $\sigma - \nu \geq 0$. Паралельно зі своєю електростатичною інтерпретацією, ця задача має численні застосування до теорії наближень, розвинені американською та російською математичними школами [50, 21].

Якщо⁴

$$G_f^\sigma(\Sigma, g) < \infty \tag{112}$$

(або, що рівносильно, якщо $\mathcal{E}_f^\sigma(\Sigma, g) := \{\nu \in \mathcal{E}^\sigma(\Sigma, g) : G_f(\nu) < \infty\} \neq \emptyset$), тоді має сенс задача існування $\lambda_\Sigma^\sigma \in \mathcal{E}^\sigma(\Sigma, g)$ з мінімальною f -ваговою

⁴З прийнятих умов випливає, що $G_f^\sigma(\Sigma, g) > -\infty$; отже, у випадку (112) величина $G_f^\sigma(\Sigma, g)$ скінченна.

енергією $G_f(\lambda_\Sigma^\sigma) = G_f^\sigma(\Sigma, g)$. Розв'язок λ_Σ^σ (якщо він існує) називається *рівноважною мірою* відносно κ , Σ , σ , g , та f .

При $X = \mathbb{R}^2$, $\kappa(x, y) = -\log|x - y|$, $g = 1$ та додаткових умовах на ріст зовнішнього поля $f \in \Phi(\mathbb{R}^2)$ на нескінченності, ця задача вивчалася Р. Д. Драгнев, Е. В. Саф та Е. А. Рахмановим (див. [50, 21]). Методи, розвинені нами за звітний період з метою аналізу задачі мінімізації f -вагової енергії, та отримані результати істотно відрізняються від відповідних методів та результатів з [50, 21]. А саме, наш підхід ґрунтується на одночасному використанні як широкої, так і сильної топологій у передгільбертовому просторі $\mathcal{E}$, що дозволило нам в обох випадках, I та II, встановити існування рівноважної міри λ_Σ^σ для некомпактної множини Σ та вивчити властивості неперервності рівноважної міри λ_Σ^σ як функції від двох змінних (Σ, σ) . Ми також отримали варіаційні нерівності для f -вагових потенціалів W_λ^f та виділили їхні характеристичні властивості.

Для спрощення формулювання результатів припустимо, що або простір X злічений на нескінченності, або $\inf_{x \in X} g(x) > 0$. Тоді поняття ν -локальної нехтовності та поняття ν -нехтовності співпадають для довільної $\nu \geq 0$ з $\langle g, \nu \rangle < \infty$; і, отже, довільна множина N з $C(N) = 0$ є ν -нехтовною, якщо енергія ν скінченна.

Теорема 28. *Нехай виконується умова (112), ядро κ довершене, а ємність $C(\Sigma)$ скінченна. Крім того, нехай функція $g|_{U_\Sigma}$ або обмежена, або виконується наступна умова на її ріст на нескінченності: існують $r \in (1, \infty)$ та $\omega \in \mathcal{E}$ такі, що*

$$g^r(x) \leq \kappa_\omega(x) \quad \text{пр. вс. в } U_\Sigma.$$

Тоді справедливі наступні твердження:

- (a) *Існує єдина рівноважна міра λ_Σ^σ .*
- (b) *Нехай $\Sigma_s \subset U_\Sigma$, $s \in S$, — частково впорядкована по відношенню включення, спадна сім'я замкнених множин таких, що $C(\Sigma_s) < \infty$*

для усіх $s \in S$ та

$$\bigcap_{s \in S} \Sigma_s = \Sigma,$$

а $\sigma_s \in \mathfrak{M}^+(\Sigma_s)$, $s \in S$, — узагальнена послідовність мір, яка спадає і широко збігається до σ . Тоді

$$G_f^\sigma(\Sigma, g) = \lim_{s \in S} G_f^{\sigma_s}(\Sigma_s, g),$$

$$\lambda_{\Sigma_s}^{\sigma_s} \rightarrow \lambda_\Sigma^\sigma \quad \text{сильно та широко.}$$

(с) Нехай $\{K\}$ — частково впорядкована по відношенню включення, зростаюча сім'я всіх компактних підмножин з Σ . Тоді існує спадна до 1 узагальнена послідовність $(\beta_K^*)_{K \in \{K\}} \subset (1, \infty)$ така, що для всіх $\beta_K \in [1, \beta_K^*]$ виконується

$$G_f^\sigma(\Sigma, g) = \lim_{K \uparrow \Sigma} G_f^{\beta_K \sigma_K}(K, g). \quad (113)$$

Крім того, $\lambda_K^{\beta_K \sigma_K} \rightarrow \lambda_\Sigma^\sigma$ сильно та широко.

Щоб сформулювати наступне твердження, введемо такі позначення. Якщо $E \subset X$ — задана замкнена множина з $C(E) > 0$, а ψ — універсально вимірна функція, обмежена знизу приблизно всюди на E , то позначимо

$${}^{\text{''inf''}} \psi(x) := \sup \{q : \psi(x) \geq q \quad \text{пр. вс. в } E\}.$$

Зауважимо, що тоді

$$\psi(x) \geq {}^{\text{''inf''}} \psi(x) \quad \text{пр. вс. в } E;$$

це випливає з властивості зчисленної напівадитивності ємності $C(\cdot)$ над універсально вимірними множинами нульової внутрішньої ємності [26]. Якщо тепер ψ — універсально вимірна функція, обмежена зверху приблизно всюди на E , то напишемо

$${}^{\text{''sup''}} \psi(x) := {}^{\text{''inf''}} [-\psi(x)].$$

У наступній теоремі припустимо, що $\sigma_K \in \mathcal{E}$ для кожної компактної множини $K \subset \Sigma$ і $\langle g, \sigma_{\Sigma_0} \rangle > 1$, де $\Sigma_0 := \{x \in \Sigma : f(x) < \infty\}$. Тоді необхідно виконується умова (112), оскільки існує компакт $K_0 \subset \Sigma_0$ з $\sigma_{K_0} / \langle g, \sigma_{K_0} \rangle \in \mathcal{E}_f^\sigma(\Sigma, g)$; див. [94, 21].

Справедливі наступні властивості f -вагового потенціалу $W_{\lambda_\Sigma^f}^f$ рівноважної міри λ_Σ^σ , які до того ж є характеристичними, тобто визначають λ_Σ^σ однозначним чином.

Теорема 29. *Для фіксованої міри $\lambda \in \mathcal{E}^\sigma(\Sigma, g)$ наступні твердження є рівносильними:*

(i) λ є рівноважною мірою λ_Σ^σ .

(ii) Існує число $w_\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що

$$W_\lambda^f(x) \geq w_\lambda g(x) \quad \text{нр. вс. в } S_{\sigma-\lambda}, \quad (114)$$

$$W_\lambda^f(x) \leq w_\lambda g(x) \quad \text{нр. вс. в } S_\lambda. \quad (115)$$

(iii) $-\infty < \ell \leq L < \infty$, де

$$\ell := \sup_{x \in S_\lambda} \frac{W_\lambda^f(x)}{g(x)}, \quad L := \inf_{x \in S_{\sigma-\lambda}} \frac{W_\lambda^f(x)}{g(x)}.$$

Зауваження 8. Співвідношення (114) і (115) коректні, оскільки за прийнятих умов ємності $C(S_{\sigma-\lambda})$ і $C(S_\lambda)$ додатні. Також зауважимо, що (115) виконується всюди на S_λ , якщо $f \in \Phi(X)$.

Зауваження 9. З тверджень (ii) та (iii) випливає таке спостереження: якщо λ — рівноважна міра, то множина всіх w_λ , для яких виконуються (114) та (115), утворюють замкнений скінченний інтервал $[\ell, L]$. Звичайно, якщо $g = 1$, $f = 0$, а κ задовольняє принцип максимуму, то $\ell = L$ і, отже, $[\ell, L]$ складається лише з одної точки. Однак це не так у загальному, що проілюстровано прикладами, наведеними в [84].

Доведення теореми 28 базується на наступній теоремі про сильну повноту множини $\mathcal{E}^\sigma(\Sigma, g)$, що розглядається як топологічний підпростір передгільбертового простору $\mathcal{E}$.

Теорема 30. *Нехай ядро κ довершене, $E \subset U_\Sigma$ — замкнена множина з $C(E) < \infty$, і нехай функція g — така, як вимагається в теоремі 28. Тоді множина*

$$\mathcal{E}^+(E, g) := \{\nu \in \mathcal{E}^+(E) : \langle g, \nu \rangle = 1\},$$

що розглядається як топологічний підпростір простору $\mathcal{E}$, є сильно повною. Більш детально, кожна сильно фундаментальна узагальнена послідовність $(\nu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}^+(E, g)$ збігається сильно і широко до єдиної міри $\nu_0 \in \mathcal{E}^+(E, g)$. Якщо тепер $\sigma_0 \in \mathfrak{M}^+(E)$ — фіксована міра, то тоді це ж виконується для $\mathcal{E}^{\sigma_0}(E, g)$ замість $\mathcal{E}^+(E, g)$.

Результати цього розділу можуть бути узагальнені на випадок конденсаторів зі зчисленною кількістю пластин, що ми плануємо зробити у наступний звітний період.

6.2 Задача Гаусса над ліпшицевими многовидами.

Ми користуємося позначеннями та визначеннями з розділів 5 та 6.1.

Всюди далі Γ_1, Γ_2 — компактні $(n-1)$ -розмірні многовиди без краю в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, що не перетинаються та задовольняють умову Ліпшиця, локально компактний простір X визначається формулою $X = \Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, і нехай ядро κ на Γ — ядро Ньютона $|x - y|^{2-n}$, де $|x - y|$ позначає евклідову відстань в $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо конденсатор $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$, де $I^+ = \{1\}$, $I^- = \{2\}$ і $A_i = \Gamma_i$ для $i = 1, 2$, числовий вектор $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ з $a_i > 0$ та векторнозначну функцію $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$, де g_i — неперервна позитивна функція на Γ_i , і далі визначимо класи мір $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ та $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ тими ж співвідношеннями, як і в розділі 5. За умов цього розділу, $\mathcal{E}(\mathbf{A})$ складається з усіх борелевих мір

$\mu = \mu^1 - \mu^2$ з компонентами $\mu^i \in \mathcal{E}^+(\Gamma_i)$, $i = 1, 2$, а $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ — з усіх $\mu \in \mathcal{E}(\mathbf{A})$ таких, що $\langle g_i, \mu^i \rangle = a_i$, $i = 1, 2$. Нагадаємо, що ці класи утворюють випуклі конуси та в силу строгої позитивної визначеності ядра Ньютона можуть трактуватися як метричні простори з метрикою $\|\mu\|_{\mathcal{E}(\Gamma)}$.

Якщо, додатково, $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція, що характеризує джерело зовнішньої енергії, то розглянемо функціонал Гаусса

$$G_f(\mu) := \|\mu\|_{\mathcal{E}(\Gamma)}^2 + 2\langle f, \mu \rangle,$$

відомий також під назвою f -вагової енергії (див. розділ 6.1). Тепер задача Гаусса полягає в знаходженні $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ з

$$G_f(\lambda) = \inf_{\mu \in \mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})} G_f(\mu) =: G_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}). \quad (116)$$

За умов цього розділу розв'язок λ задачі Гаусса існує і єдиний, що випливає з строгої позитивної визначеності ядра Ньютона, випуклості і широкої компактності класу допустимих мір $\mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ та напівнеперервності знизу функціонала G_f на $\mathcal{E}(\mathbf{A})$.

У сумісній з G. Of та W. L. Wendland роботі [86] побудовано конструктивний та чисельний алгоритм знаходження розв'язку λ . Це стало можливим дякуючи доведеній там теоремі про еквівалентність задачі Гаусса (116) над многовидами Ліпшиця задачі мінімізації у просторі Соболева–Слободецького $H^{-1/2}(\Gamma)$ (див. наведену нижче теорему 32), що в свою чергу базується на опису мір $\sigma \in \mathcal{E}(\Gamma)$ в термінах $\Sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, даному наступною теоремою 31. (Тут ми користуємося позначеннями, прийнятими в [28].)

Теорема 31. *Нехай міра Бореля $\sigma \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ має скінченну ньютонovu енергію*

$$\int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |x - y|^{2-n} d\sigma(x) d\sigma(y) = \|\sigma\|_{\mathcal{E}(\Gamma)}^2 < \infty.$$

Тоді існує єдиний елемент $\Sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ з властивостями

$$\sigma(\varphi) = \int_{\Gamma} \varphi d\sigma = (\varphi, \Sigma)_{L_2(\Gamma)} \quad \text{для всіх} \quad \varphi \in C^\infty(\Gamma),$$

де $C^\infty(\Gamma)$ — множина звужень на Γ елементів з $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Більш того, ньютоніві енергії для σ і Σds (де ds — поверхнева міра на Γ) співпадають, тобто

$$\|\sigma\|_{\mathcal{E}(\Gamma)}^2 = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |x - y|^{2-n} \Sigma(x) ds(x) \Sigma(y) ds(y).$$

Щоб визначити задачу мінімізації в $H^{-1/2}(\Gamma)$, дуальну до початкової задачі (116), розглянемо в $H^{-1/2}(\Gamma)$ конус

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) := \left\{ \Theta = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \Theta^i, \quad \text{де} \quad \Theta^i \in H^{-1/2}(\Gamma_i), \right. \\ \left. \Theta^i \geq 0 \quad \text{та} \quad \int_{\Gamma_i} g_i \Theta^i ds = a_i \quad \text{для} \quad i = 1, 2 \right\}. \end{aligned}$$

Якщо $f \in C(\Gamma) \cap H^{1/2}(\Gamma)$, то для кожного $\Sigma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ позначимо

$$V_f(\Sigma) := \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} |x - y|^{2-n} \Sigma(x) ds(x) \Sigma(y) ds(y) + 2(f, \Sigma)_{L_2(\Gamma)}.$$

Теорема 32. Нехай $f, g_1, g_2 \in C(\Gamma) \cap H^{1/2}(\Gamma)$. Тоді розв'язок $\lambda \in \mathcal{E}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ початкової задачі (116) визначає єдиний елемент $\Lambda \in \mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$ з властивостями

$$\lambda(\varphi) = (\varphi, \Lambda)_{L_2(\Gamma)} \quad \text{для всіх} \quad \varphi \in C^\infty(\Gamma),$$

$$V_f(\Lambda) = G_f(\lambda) = G_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g}).$$

Більш того, Λ є розв'язком задачі мінімізації функціонала V_f над $\mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$, тобто

$$V_f(\Lambda) = \min_{\Theta \in \mathcal{K}(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})} V_f(\Theta).$$

Тепер, щоб побудувати чисельний алгоритм розв'язку дуальної задачі, використовується дискретизація Бубнова–Галеркіна кусково-постійними граничними елементами з максимальним діаметром розбиття h . Доведена збіжність до Λ і $G_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ при $h \rightarrow 0$, отримані оцінки відхилення від Λ і $G_f(\mathbf{A}, \mathbf{a}, \mathbf{g})$ при $h > 0$.

7 Застосування центральних многовидів в якісному аналізі нелінійних математичних моделей задач математичної фізики, зокрема, нелінійної світодинаміки.

7.1 Біфуркації обертаючих структур в параболічному функціонально-диференціальному рівнянні.

Зацікавленість нелінійними оптичними системами з перетвореннями просторових змінних у двовимірному оборотному зв'язку обумовлена використанням таких систем в задачах обробки інформації [?].

Багатий спектр локальних і нелокальних перетворень дозволяє генерувати і візуально спостерігати процеси самоорганізації: пульсуючі хвилі, дисипативні структури, оптичну турбулентність. Такі структури можна використовувати для кодування та зберігання інформації.

Виникнення світлових структур в оптичних системах з нелокальним оборотним зв'язком є наслідком втрати стійкості деякого просторово-однорідного світлового режиму внаслідок внесення збурень в умови, при яких відбувається цей процес. Математичною моделлю таких систем є квазілінійне параболічне рівняння з перетворенням просторових змінних [11].

Біфуркації Андронова–Хопфа народження періодичного розв'язку вказаного рівняння для круга з перетворенням просторових змінних, коли цим перетворенням є поворот на сталий кут, присвячена робота [?]. В цій роботі для дослідження біфуркації народження обертаючих структур у випадку, коли перетворенням круга є добуток радіального стискання круга і повороту на сталий кут, був застосований метод центрального многовида [44].

У звітний період досліджувались біфуркації народження періодичного розв'язку задачі Неймана на крузі для параболічного рівняння з перетворенням просторових змінних у випадку, коли це перетворення є композицією

перетворень повороту на сталий кут і радіального стискання.

Для дослідження цього випадку був розвинутий метод побудови наближених періодичних по t розв'язків, в якому використовується одночастотний метод Боголюбова в поєднанні з формалізмом побудови центральних многовидів для систем, інваріантних відносно групи обертання кола.

1. Постановка задачі. Виділення просторово-однорідної вітки стаціонарних розв'язків задачі. На одиничному крузі S з центром в початку координат розглянемо рівняння

$$\partial u / \partial t + u = D \Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad \partial u / \partial \nu|_{\partial S} = 0, \quad (117)$$

в якому u — фаза світлової хвилі, Δ — двовимірний оператор Лапласа, $D > 0$ — ефективний коефіцієнт дифузії частинок нелінійного середовища, $0 < \gamma \leq 1$ — контрастність інтерференційної картини, $K > 0$ — коефіцієнт, пропорційний інтенсивності светового потоку, $Qu(t, r, \theta) = u(t, \kappa r, \theta + h)$, де $0 < \kappa < 1$, $0 < h < \pi$, (r, θ) — полярні координати на S , ν — одинична внутрішня нормаль до границі S .

Нехай $H = L_2(S)$ — гільбертів простір вимірних на S функцій зі скалярним добутком

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{\pi} \int_S uv \, dx$$

і відповідною нормою $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$; $H^l(S)$ — простір Соболева вимірних на S функцій зі скалярним добутком

$$\langle u, v \rangle_l = \frac{1}{\pi} \sum_{0 \leq \alpha \leq l} \int_S \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) \, dx,$$

де $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, і відповідною нормою $\|u\|_l = \langle u, u \rangle_l^{1/2}$. Позначимо $H^l = H^l(S) \cap \{\partial u / \partial \nu|_{\partial S} = 0\}$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Простір H^l є поповненням простору нескінченно диференційованих на S функцій, задовольняючих умові $\partial u / \partial \nu|_{\partial S} = 0$, по нормі $H^l(S)$.

Задачі (117) відповідає неперервна напівгрупа $\{S_t\}$, що діє в просторі H .

Позначимо $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ — групу обертань кола. Нехай $u(t, r, \theta)$ — розв’язок задачі (117). Легко бачити, що розв’язком цієї задачі є функція $u(t, r, \theta + \alpha)$, где $\alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Таким чином, задача (117) S^1 -еквіваріантна.

Ми розглядаємо питання про існування, асимптотичну форму і стійкість періодичного розв’язку задачі (117), яке біфуркує із просторово-однорідного стану рівноваги, тобто розв’язку рівняння

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (118)$$

Нагадаємо, що при дослідженні біфуркації народження циклу інтерес являють і втрата стійкості стаціонарними розв’язками, і наближені формули для періодичних розв’язків малої амплітуди, що народжуються.

Відповідно [?] зі зростанням K кількість співіснуючих коренів цього рівняння необмежено збільшується, при цьому при $K \rightarrow \infty$ їх склад постійно оновлюється: народжуються нові стани рівноваги і зникають старі. У зв’язку з цим зафіксуємо яку-небудь неперервну вітку розв’язків

$$w = w(K), \quad 1 + K\gamma \sin w(K) \neq 0 \quad (119)$$

рівняння (118), яка визначена тільки на скінченному проміжку зміни параметра K . Лінеаризовану на стані рівноваги (119) задачу (117) представимо у вигляді

$$\dot{u} + \mathfrak{L}(K)u = 0, \quad (120)$$

де лінійний оператор $\mathfrak{L}(K) : H \rightarrow H$ з областю визначення H^2 заданий формулою

$$\mathfrak{L}(K)v = -D\Delta v + v + \Lambda(K)Qv, \quad \Lambda(K) = \gamma \sin w(K). \quad (121)$$

Перейдемо тепер до вибору біфуркаційного значення параметру K . Розв’язок цієї задачі приводить, зрозуміло, до дослідження спектру оператора $\mathfrak{L}(K) :$

$H \rightarrow H$. У цьому зв'язку відмітимо, що відповідно [?] (лема 3.1) оператор $\mathfrak{L}(K)$ має компактну резольвенту і, таким чином, спектр цього оператора дискретний. Скористаємося методом розділення змінних для аналізу спектра оператора $\mathfrak{L}(K)$. З цією метою розглянемо гільбертів простір $L_2([0, 1], r)$ комплекснозначних вимірних на $[0, 1]$ функцій із скалярним добутком

$$\ll f, g \gg = \int_0^1 r f(r) \bar{g}(r) dr.$$

Визначимо тепер лінійний оператор $\mathfrak{A}_k(K)$, $k \in \mathbb{Z}$, рівністю

$$\mathfrak{A}_k f = -D\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr}\right) - \frac{k^2}{r^2} f\right] + f + \exp(ikh) \Lambda(K) \widehat{Q} f,$$

де $\widehat{Q} f(r) = f(\kappa r)$, з областю визначення $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_k(K)) = \{f \in L_2([0, 1], r) : \mathfrak{A}_k(K) f \in L_2([0, 1], r), f'(1) = 0\}$. Зрозуміло, що $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_k(K))$ не залежить від $k \in \mathbb{Z}$ і K із указанного вище проміжку. Тому позначимо $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}_k(K)) = \mathfrak{D}$. Очевидно, що будь-яку власну функцію оператора $\mathfrak{L}(K)$ можна представити у вигляді $\exp(is\theta) \Psi_s(K)$, де $s \in \mathbb{Z}$, а $\Psi_s(K)$ — власна функція оператора $\mathfrak{A}_s(K)$.

Лінійний оператор $\widehat{Q}: L_2([0, 1], r) \rightarrow L_2([0, 1], r)$ є, очевидно, обмеженим і $\|\widehat{Q}\| = \kappa^{-1}$. Спряжений оператор $\widehat{Q}^*: L_2([0, 1], r) \rightarrow L_2([0, 1], r)$ визначається формулою:

$$\widehat{Q}^* f(r) = \begin{cases} \kappa^{-2} f(\kappa^{-1} r), & 0 \leq r \leq \kappa; \\ 0, & \kappa < r \leq 1. \end{cases}$$

Оператор $\mathfrak{A}_k^*(K)$, спряжений до оператора $\mathfrak{A}_k(K)$ і визначений рівністю

$$\mathfrak{A}_k^*(K) f = -D\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr}\right) - \frac{k^2}{r^2} f\right] + f + \exp(-ikh) \Lambda(K) \widehat{Q}^* f,$$

має область визначення $\mathfrak{D}$.

Відповідно [?] (лема 3.2) спектр оператора $\mathfrak{L}(K)$ задовольняє умову $\sigma(\mathfrak{L}(K)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq 1 - \kappa^{-1} |\Lambda(K)|\}$. Таким чином, при $|\Lambda(K)| < \kappa$

нульовий розв'язок рівняння (120) експоненціально стійкий. Тому розглянемо лише ті значення K , для яких $|\Lambda(K)| > \kappa$. Якщо $\Lambda(K) < -1$, то нульовий розв'язок рівняння, очевидно, нестійкий. Таким чином, інтерес представляють значення K , для яких має місце одна із умов: $-1 < \Lambda(K) < -\kappa$, $\kappa < \Lambda(K) < 1$, $\Lambda(K) > 1$.

Біфуркаційне значення $\hat{K}$ знайдемо із наступної умови.

Умова 1. Існують $\hat{K} > 0$, ціле m , дійсне $\omega_0 \neq 0$, функція $J \in \mathfrak{D}$ такі, що

$$\mathfrak{L}(\hat{K}) \exp(im\theta)J = -i\omega_0 \exp(im\theta)J. \quad (122)$$

Припустимо, що: $-i\omega_0$ — просте власне значення оператора $\mathfrak{A}_m(\hat{K})$; $-ni\omega_0 \in \sigma(\mathfrak{A}_m(\hat{K}))$, $n = 0, \pm 2, \dots$

Згідно з умовою 1 існують: $\varepsilon_0 > 0$, функції $\lambda \in \mathbb{C}^\infty(\hat{K} - \varepsilon_0, \hat{K} + \varepsilon_0)$ і $\tilde{J} \in \mathbb{C}^\infty((\hat{K} - \varepsilon_0, \hat{K} + \varepsilon_0), \mathfrak{D})$ такі, що для $K \in (\hat{K} - \varepsilon_0, \hat{K} + \varepsilon_0)$

$$\mathfrak{L}(K) \exp(im\theta)\tilde{J}(K) = -\lambda(K) \exp(im\theta)\tilde{J}(K), \lambda(\hat{K}) = i\omega_0, \tilde{J}(\hat{K}) = J. \quad (123)$$

Має місце рівність [?]

$$\lambda(K) = i\omega_0 + \gamma(K \sin w(K) - \hat{K} \sin \hat{w}) \ll J^*, \hat{Q}J \gg \exp(imh) + O(|K - \hat{K}|^2). \quad (124)$$

Тут $\hat{w} = w(\hat{K})$, а J^* — власна функція оператора $\mathfrak{A}_m^*(\hat{K})$, яка відповідає власному значенню $i\omega_0$ і нормована умовою $\ll J^*, J \gg = 1$. Очевидно,

$$Re \lambda'(\hat{K}) = \gamma(\sin w(\hat{K}) + \hat{K} \cos w'(\hat{K})) Re (\ll J^*, \hat{Q}J \gg \exp(imh)). \quad (125)$$

Нескладно вказати умови, по крайній мірі для малих $1 - \kappa$, при яких виконується наступна умова.

Умова 2. $Re \lambda'(\hat{K}) > 0$.

Перейдемо тепер від параметра K до параметру μ згідно рівності $K = \hat{K} + \mu$. З метою скорочення позначень покладемо $\mathfrak{L}(K + \mu) = \mathfrak{L}(\mu)$, $w(\hat{K} + \mu) = w(\mu)$, $\lambda(\hat{K} + \mu) = \lambda(\mu)$. Виконаємо тепер в рівнянні (117) перетворення

$u = w(\mu) + v$. В результаті в просторі H отримаємо рівняння

$$\dot{v} + \mathfrak{L}(\mu)v = \mathfrak{R}(Qv, \mu), \quad (126)$$

де $\mathfrak{R}(v, \mu) = K\gamma[\cos(w(\mu) + v) - \cos w(\mu) + v \sin w(\mu)]$.

2. Наближені обертаючі структури. У відповідності з одночастотним методом і формалізмом побудови центральних многовидів S^1 -еквіваріантних рівнянь будемо будувати розв'язок рівняння (10) у вигляді

$$v = z \exp(im\theta)J + \bar{z} \exp(-im\theta)\bar{J} + \sigma(z \exp(im\theta), \bar{z} \exp(-im\theta), r, \mu), \quad (127)$$

де z задовольняє рівнянню

$$\dot{z} = \lambda_1(\mu)z + c_1(\mu)z^2\bar{z} + \dots \quad (128)$$

Підставимо (127), (128) в рівняння (126) і в отриманій рівності виконаємо заміну $z \exp(im\theta) \rightarrow z$, $\bar{z} \exp(-im\theta) \rightarrow \bar{z}$. Представимо потім $\sigma = \sigma(z, \bar{z}, r, \mu)$ у вигляді $\sigma = \sigma_2 + \sigma_3 + \dots$, де σ_k , $k = 2, 3, \dots$, — форма порядку k відносно $z, \bar{z}$. В результаті відносно коефіцієнтів квадратичної форми

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_{20}z^2 + \sigma_{11}z\bar{z} + \frac{1}{2}\sigma_{02}\bar{z}^2 \quad (129)$$

отримаємо, покладаючи $\mu = 0$, наступні рівняння

$$(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})\sigma_{20} = -\hat{K}\gamma \cos \hat{w}J^2, \quad \mathfrak{A}_0\sigma_{11} = -\hat{K}\gamma \cos \hat{w}j^2. \quad (130)$$

Згідно Умови 1 ці рівняння однозначно розв'язні:

$$\sigma_{20} = -\hat{K}\gamma \cos \hat{w}(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}J^2, \quad \sigma_{11} = -\hat{K}\gamma \cos \hat{w}\mathfrak{A}_0^{-1}j^2, \quad (131)$$

Очевидно, $\sigma_{02} = \bar{\sigma}_{20}$. Покладаючи тепер

$$\sigma_3 = \frac{1}{3}\sigma_{30}z^3 + \frac{1}{2!}\sigma_{21}z^2\bar{z} + \frac{1}{2!}\sigma_{12}z\bar{z}^2 + \frac{1}{3}\sigma_{03}\bar{z}^3$$

і міркуючи як і вище, відносно коефіцієнтів форми σ_3 отримаємо лінійні неоднорідні рівняння. Згідно Умови 1 рівняння відносно σ_{30} , σ_{03} однозначно розв'язні. Розглянемо тепер рівняння відносно σ_{21}

$$(i\omega_0 + \mathfrak{A}_m)\sigma_{21} + c_1(0)J = -\frac{1}{2}\widehat{K}\gamma \cos \widehat{w} \exp(imh)(\widehat{Q}(2J\sigma_{11} + \overline{J}\sigma_{20}) + \frac{1}{2}\widehat{K}\gamma \sin \widehat{w} \exp(imh)\widehat{Q}(J^2\overline{J}). \quad (132)$$

Із умови 1 випливає, що лінійний одновимірний простір $\text{Span}\{J\}$ є простором розв'язків лінійного однорідного рівняння, що відповідає лінійному неоднорідному рівнянню (16). Таким чином, для розв'язності рівняння (132) необхідно і достатньо, щоб $\ll J^*, g \gg = 0$, де g — його неоднорідність. Враховуючи рівність (131), звідси для $c_1 = c_1(0)$ знаходимо

$$c_1 = \frac{1}{2} \exp(imh) \ll J^*, \widehat{\Lambda}\widehat{Q}(\overline{J}J^2) + (\widehat{\Lambda} \text{ctg } \widehat{w})^2 (2\widehat{Q}J\mathfrak{A}_0^{-1}\widehat{Q}(J\overline{J}) + \exp(2imh)\widehat{Q}(\overline{J}(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1}\widehat{Q}J^2)) \gg. \quad (133)$$

Потім із рівняння (132) знаходимо σ_{21} у тому ж вигляді, що і його неоднорідність. Зрозуміло, що при вказаному виборі c_1 рівняння відносно σ_{21} має розв'язок $\sigma_{21} = \overline{\sigma}_{12}$. Припустимо далі, що виконана наступна умова:

Умова 3. $Re\, c_1 < 0$.

Розглянемо тепер рівняння

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + c_1 z^2 \overline{z},$$

яке є нормальною формою біфуркації Андронова-Хопфа. Згідно умов 2, 3 при $\mu < 0$ нульовий розв'язок цього рівняння є стійким. При $\mu > 0$ розглядуване рівняння має біфуркуючий із нуля періодичний розв'язок, який з точністю порядку $\mu^{3/2}$ задовольняє рівності

$$\begin{aligned} z &= \mu_1^{1/2} \exp(i\widehat{\omega}(\mu)t), \quad \mu_1 = \mu Re\, \lambda'(0)(-Re\, c_1)^{-1}, \quad \widehat{\omega}(\mu) = \\ &= Im\, \lambda(\mu) + \mu_1 Im\, c_1 Re\, \lambda'(0). \end{aligned} \quad (134)$$

В силу рівностей (127), (129), (131), (134) рівняння (126) має наближений по нев'язці порядку $\mu^{3/2}$ (в метриці H) періодичний по t розв'язок $\widehat{v} =$

$\widehat{v}(\eta, r, \mu)$, $\eta = \widehat{\omega}(\mu)t + m\theta$, де

$$\begin{aligned} \widehat{v} = & 2\mu_1^{1/2} Re \exp(i\eta)J + \\ & + \mu_1 \widehat{\Lambda} \operatorname{ctg}(\widehat{w}) \left[\mathfrak{A}_0^{-1} \widehat{Q}(J\bar{J}) + Re \exp(2i(\eta + mh))(2i\omega_0 + \mathfrak{A}_{2m})^{-1} \widehat{Q}J^2 \right]. \end{aligned} \quad (135)$$

Таким чином, розв'язок рівняння (10) типу структури, що обертається, треба шукати у вигляді

$$v = \sum_{s=1}^{\infty} \mu^{s/2} v_s(\eta, r), \quad \eta = \omega(\mu)t + m\theta, \quad \omega(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \omega_s. \quad (136)$$

Зрозуміло, що коефіцієнти розкладу функцій $v(\mu) \in H^2$, $\omega(\mu) \in \mathbb{R}$ повинні бути визначені із рівняння

$$\omega \frac{\partial v}{\partial \eta} - D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{m^2}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right] + v + \Lambda(\mu) Q_m v = \mathfrak{R}(Q_m v, \mu), \quad (137)$$

де $Q_m v(\eta, r) = v(\eta + mh, \kappa r)$.

3. Існування обертаючої структури.

Описаний вище формалізм побудови періодичної структури рівняння (126) ґрунтується на наступній теоремі.

Теорема 33. *Нехай виконані умови 1 – 3. Тоді існує $\mu_0 > 0$ таке, що для $0 < \mu < \mu_0$ рівняння (126) має періодичний по t розв'язок $v^* = v^*(\eta, r, \mu)$, $\eta = \omega(\mu)t + m\theta$. Має місце наступна рівність*

$$v^*(\eta, r, \mu) = \widehat{v}(\eta, r, \mu) + O(\mu^{3/2}), \quad \omega(\mu) = \widehat{\omega}(\mu) + O(\mu^2),$$

де $\widehat{\omega}(\mu)$, $\widehat{v}(\mu)$ визначені рівностями (134) і (135) відповідно.

4. Стійкість обертаючої структури. Питання про стійкість побудованого вище розв'язку рівняння (10) розглянемо при наступній умові

Умова 4 *Нехай:*

1) *існує одна и тільки одна пара простих власних значень $-\lambda(0)$, $-\bar{\lambda}(0)$ оператора $\mathfrak{L}(0)$ така, що $\lambda(0) = i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$;*

$$2) \sigma(\mathcal{L}(0))/\{-\lambda(0), -\bar{\lambda}(0)\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\}.$$

За допомогою принципу зведення питання про стійкість обертаючої хвилі v^* рівняння (126) при виконанні умов 1, 3, 4 було досліджено в роботі [?]. У звіті для дослідження на стійкість розв'язку v^* використовується метод, що базується на аналізі лінеаризованого в околі v^* рівняння (126).

Теорема 34. *Нехай виконані умови 1, 3, 4. Тоді періодичний по t розв'язок v^* рівняння (126) є експоненціально орбітально стійким.*

Доведення теореми 34 наведено в роботі [11] (с. 165–168).

Висновок до підрозділу. В даному підрозділі метод дослідження біфуркуючих із стаціонарного розв'язку періодичних розв'язків для нелінійних середовищ з малою дифузією використано при загальних умовах біфуркації Андронова–Хопфа для параболічної задачі з перетворенням повороту–стискання просторових змінних.

Метод базується на розвиненій в роботах [?], [?] техніці побудови наближених біфуркуючих періодичних розв'язків.

В проведених у звітний період дослідженнях з цією метою використовується одночастотний метод Боголюбова в поєднанні з формалізмом побудови центральних многовидів для рівнянь, інваріантних відносно групи обертання кола. Основним результатом є Теорема 1 про існування і асимптотичну форму обертаючої структури, породженої із стаціонарного просторово-однорідного розв'язку вихідної задачі.

Що стосується теореми 34 про стійкість обертаючої структури, то при її доведенні були використані підходи, ініційовані роботою [?], які успішно розвиваються при дослідженні автохвильових процесів в нелінійних середовищах з малою дифузією

При дослідженні орбітальної стійкості обертаючої структури застосовувався принцип зведення в теорії стійкості і метод Гальоркіна.

7.2 Застосування центральних многовидів в задачі про синхронізацію в системі двох одномодових взаємозв'язаних лазерів.

Термін *світлодинаміка*, що входить в назву теми, пов'язаний з таким поняттям як лазерна динаміка. *Лазер* - це особливий тип ламп, здатних генерувати когерентне електромагнітне випромінювання.

Когерентність - це властивість двох або більше випадкових процесів, здатних взаємно посилювати або послабляти один одного при їх складанні.

В теорії лазера розглядаються три групи рівнянь в залежності від досліджуваних проблем. Це 1. Швидкісні рівняння; 2. Напівкласичні; 3. Квантовомеханічні.

1. Швидкісні рівняння дозволяють проаналізувати наступні проблеми: умови лазерної генерації; розподіл інтенсивності по модах; одномодовий режим роботи лазера; синхронізація, тощо.

2. Напівкласичні рівняння дозволяють розглянути наступні проблеми (серед інших): здвиги частоти генерації; синхронізацію частот; незатухаючі коливання; хаос в лазерному випромінюванні та шляхи до нього і все те, що вказано в 1.

3. Квантово механічні рівняння дозволяють дослідити ширину лінії лазерної генерації; флуктуації фази; інтенсивність лазерного випромінювання (шуми); статистику фотонів і всі проблеми, вказані в 1 і 2.

Що стосується синхронізації, то це явище можна визначити як *властивість матеріальних об'єктів самої різної природи виробляти єдиний ритм спільного існування, не дивлячись на різницю між індивідуальними ритмами і на наявність, інколи, слабких взаємних зв'язків*.

Мета більшості задач синхронізації полягає в знаходженні області простору параметрів, для яких мають місце стійкі періодичні коливання.

Задачі синхронізації лазерів представляють особливий інтерес. Вони виникають, зокрема, у зв'язку з необхідністю збільшення потужності випро-

мінування за допомогою лазерних ґраток [?], а також у зв'язку з побудовою оптичних систем для передачі захищеної інформації.

Математичною моделлю досліджуваної у звітний період задачі про амплітудну синхронізацію в системі двох взаємозв'язаних напівпровідникових лазерів є наступна система швидкісних рівнянь [58]:

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt} &= i\delta E_1 + (1 + i\alpha)N_1 E_1 + \beta e^{-i\varphi} E_2, \\ \frac{dN_1}{dt} &= \varepsilon [J - N_1 - (2N_1 + 1)|E_1|^2], \\ \frac{dE_2}{dt} &= (1 + i\alpha)N_2 E_2 + \beta e^{-i\varphi} E_1, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \varepsilon [J - N_2 - (2N_2 + 1)|E_2|^2],\end{aligned}\tag{138}$$

де змінні E_1, E_2 — комплексні амплітуди оптичного поля; N_1, N_2 — дійсні змінні (щільності носіїв зарядів в активній зоні лазера); δ задає розлад частот лазерів, J означає величину накачки, β , ($0 < \beta < 1/2$), характеризує силу взаємодії лазерів; φ — фаза взаємодії; ε — відношення середнього проміжку часу життя фотона до середнього проміжку часу життя носіїв. Наявність малого параметра ε обумовлює повільно-швидко структуру системи (138).

Відмітимо деякі важливі властивості системи (138), пов'язані з симетріями.

Симетрія $SO(2)$:

$$(E_1, N_1, E_2, N_2) \rightarrow (E_1 e^{i\mu}, N_1, E_2 e^{i\mu}, N_2)$$

обумовлює існування інваріантних періодичних розв'язків (CW - розв'язків)

$$E_j = a_j e^{i\omega t + i\nu_j}, \quad N_j = r_j,\tag{139}$$

де $\omega, a_j, \nu_j, r_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2$. Такі розв'язки називають також стаціонарними, бо вони відповідають режимам зі стаціонарною інтенсивністю $|E_j(t)|$.

Крім того, така симетрія означає, що при відповідних значеннях параметрів система (138) має модульовані хвильові розв'язки (*MW*-розв'язки), тобто, квазіперіодичні розв'язки виду

$$E_j(t) = a_j(t)e^{i\omega t + i\nu_j}, \quad N_j(t) = r_j(t), \quad a_j(t+T) = a_j(t), \quad r_j(t+T) = r_j(t), \quad (140)$$

де $\omega, T, a_j(t), r_j(t), \nu_j \in \mathbb{R}$ для всіх $t \in \mathbb{R}$.

Іншу важливу симетрію система (1) має при $\varphi = 0$. Це Z_2 -симетрія:

$$(|E_1|, N_1, |E_2|, N_2) \rightarrow (|E_2|, N_2, |E_1|, N_1),$$

при якій система (138) інваріантна.

Далі покладаємо $\varphi = 0$. Фізично, $\varphi = 0$ відповідає випадку, коли відстань між досліджуваними лазерами дорівнює цілому числу довжин оптичних хвиль.

Редуційована система. Наявність в системі (138) $SO(2)$ -симетрії дозволяє понизити розмірність системи. Це можливо здійснити за допомогою заміни змінних $E_j \rightarrow (a_j, \mu_j)$:

$$E_1(t) = a_1(t)e^{i\mu_1(t)}, \quad E_2(t) = a_2(t)e^{i\mu_2(t)},$$

де a_j і μ_j - нові дійсні змінні. При цьому покладаємо, що $a_1(t) > 0, a_2(t) > 0$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Через $\Delta\psi = \psi_1 - \psi_2$ позначимо різницю фаз лазерів.

Внаслідок заміни система (138) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= N_1 a_1 + \beta a_2 \cos \Delta\psi, \\ \frac{dN_1}{dt} &= \varepsilon [J - N_1 - (2N_1 + 1)a_1^2], \\ \frac{da_2}{dt} &= N_2 a_2 + \beta a_1 \cos \Delta\psi, \\ \frac{dN_2}{dt} &= \varepsilon [J - N_2 - (2N_2 + 1)a_2^2], \\ \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \delta + (N_1 - N_2)\alpha - \beta \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} \right) \sin \Delta\psi. \end{aligned} \quad (141)$$

Система (141) вже не має $SO(2)$ симетрій і розглядається у фазовому просторі $\mathbb{R} \times S^1$. Тому в нових змінних всі CW -розв'язки вигляду (139) стають стаціонарними, а всі MW -розв'язки вигляду (140) — періодичними.

Для системи (141) справедлива наступна

Теорема 35. *Підпростір*

$$M := \{(a_1, N_1, a_2, N_2) : a_1 = a_2, N_1 = N_2\}$$

інваріантний відносно потоку, що задається системою (141).

Твердження теореми випливає із того, що система (141) інваріантна відносно перетворення $T : (a_1, N_1, a_2, N_2) \rightarrow (a_2, N_2, a_1, N_1)$. Так як підпростір M є нерухомою точкою цього перетворення, то він буде інваріантним відносно потоку, заданого системою (141).

Підпростір M в подальшому будемо називати многовидом синхронізованих по амплітуді розв'язків системи (141). Так як у загальному випадку $\Delta\psi \neq 0$, фази можуть бути не синхронізованими. Це дозволяє відмітити наявність нового явища в системі взаємодіючих лазерів, яке характеризується синхронізацією лише деяких із компонент двох взаємозв'язаних неідентичних систем.

Легко впевнитись, що на многовиді система (141) зводиться до розгляду системи із трьох звичайних диференціальних рівнянь. Дійсно, підставляючи $N_1 = N_2 = N$, $a_1 = a_2 = a$ в (141), отримаємо

$$\frac{da}{dt} = Na + \beta a \cos \Delta\psi, \quad (142)$$

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon [J - N - (2N + 1)a^2], \quad (143)$$

$$\frac{d\Delta\psi}{dt} = \delta - 2\beta \sin \Delta\psi. \quad (144)$$

Динаміка системи (142) – (144) обумовлює динаміку вихідної системи швидкісних рівнянь, синхронізованих по амплітуді. Нашою метою є доведення

існування стійких розв'язків, наприклад, глобально асимптотично стійкого стану рівноваги або періодичного розв'язку системи (142) – (144).

Система (142) – (144) має наступні особливості:

- а) простір $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^1$ є фазовим;
- б) рівняння (144) не залежить від інших рівнянь; існує явний загальний інтеграл цього скалярного диференціального рівняння;
- в) підпростір $\{a = 0\} \times \mathbb{R} \times S^1$ інваріантний відносно потоку, що задається системою (142) – (144);
- г) система (142) – (144) інваріантна відносно перетворення $(a, N, \Delta\psi) \rightarrow (-a, N, \Delta\psi)$.

Згідно властивості б) систему (142) – (144) можна розглядати як двохвимірну неавтономну систему. Зокрема, якщо параметр β малий — то як двохвимірну автономну систему із неавтономним збуренням

$$\frac{da}{dt} = a [N + \beta \cos \Delta\psi(t, c)], \quad (145)$$

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon [J - N - (2N + 1)a^2].$$

Якщо рівняння (144) має асимптотично стійкий стан рівноваги, то у фазовому просторі системи (142) – (144) існує притягуючий інваріантний підпростір $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{\Delta\psi_0\}$.

Враховуючи властивості в) і г), досить розглянути поведінку системи (142) – (144) в напівплощині $a > 0$. Після заміни $x = \ln a$ із (145) отримаємо систему

$$\frac{dx}{dt} = N + \beta \cos \Delta\psi(t, c), \quad (146)$$

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon [J - N - (2N + 1)e^{2x}]. \quad (147)$$

Відмітимо, що отримана система еквівалентна рівнянню Л'єнара

$$x'' + \varepsilon x'(1 + 2e^{2x}) + \beta \sin \Delta\psi(t, c) + \\ + \varepsilon [(1 - 2\beta \cos \Delta\psi(t, c)e^{2x} - J - \beta \cos \Delta\psi(t, c))] = 0, \quad (148)$$

де штрих означає похідну по t .

Наступна лема описує динаміку рівняння (144).

Лема 3. *Нехай δ і β — дадатні параметри, причому β задовольняє нерівності*

$$0 < \beta < \frac{1}{2}. \quad (149)$$

Тоді:

i) при $\delta = 2\beta$ рівняння (144) має на S^1 єдине не грубе нестійке положення рівноваги $\Delta\psi = \Delta\psi_m = \pi/2 \pmod{2\pi}$;

ii) при $0 < \delta < 2\beta$ рівняння (144) має в точності два положення рівноваги $\Delta\psi = \Delta\psi_0 < \pi/2$ і $\Delta\psi = \Delta\psi_1 > \pi/2$; положення рівноваги $\Delta\psi_0$ ($\Delta\psi_1$) є асимптотично стійким (нестійким);

iii) при $\delta > 2\beta > 0$ рівняння (144) має періодичний роз'вязок

$$\Delta\psi = \Delta\psi_p(t) = 2 \arctan \left[\frac{2\beta}{\delta} + \tan \left(\frac{t}{2} \sqrt{\delta^2 - 4\beta^2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2\beta}{\delta} \right)^2} \right] \quad (150)$$

з періодом

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta^2 - 4\beta^2}},$$

що задовольняє співвідношення $\Delta\psi_p(0) = 2 \arctan(2\beta/\delta)$ (тобто $\Delta\psi_p(T) = \Delta\psi_p(0) + 2\pi$).

Із цієї лема випливає, що при $0 < \delta < 2\beta$ існують два положення рівноваги і дві гетероклінічні траєкторії, що з'єднують положення рівноваги. При $\delta = 2\beta$ положення рівноваги співпадають і існує одна гетероклінічна траєкторія. При $\delta > 2\beta$ існує періодичний роз'вязок, який породжується із гетероклінічної траєкторії, тобто період цього періодичного роз'вязку прямує до нескінченності якщо δ прямує до 2β .

Положення рівноваги на многовиді M і їх стійкість. Із лема 1 випливає, що система (142) – (144) може мати стійке положення рівноваги лише при умові $0 < \delta < 2\beta$, при цьому $\Delta\psi = \Delta\psi_0 < \pi/2$. Отже, система

(142) – (144) на стійкому підпросторі $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{\Delta\psi_0\}$ має вигляд

$$\frac{da}{dt} = aN + a\beta \cos \Delta\psi_0, \quad (151)$$

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon [J - N - (2N + 1)e^{2x}]. \quad (152)$$

При умові (149) внаслідок того, що $J > 0$, $\cos \Delta\psi_0 > 0$, ця система має положення рівноваги

$$R_0 : a = a_0 = \sqrt{\frac{J + \beta \cos \Delta\psi_0}{1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0}}, \quad N = -\beta \cos \Delta\psi_0, \quad (153)$$

а також

$$R_1 : a = 0, \quad N = J. \quad (154)$$

Власні значення, відповідні положенню рівноваги R_0 , мають вигляд

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\varepsilon(1 + 2J)}{2(1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0)} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon(1 + 2J)}{2(1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0)}\right)^2 - 2\varepsilon(J + 2\beta \cos \Delta\psi_0)}.$$

При умовах (149) і $J > 0$ власні значення λ_1, λ_2 мають від’ємні дійсні частини. Це означає, що положення рівноваги R_0 є (локально) асимптотично стійким. Щоб дослідити область притягання положення рівноваги R_0 , скористаємося тим, що систему (151), (152) можна звести до рівняння Льєнара (148) заміною $x = \ln a$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} (1 + 2e^{2x}) + \varepsilon [(1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0)e^{2x} - J - \beta \cos \Delta\psi_0] = 0.$$

Після заміни

$$x = x_0 + \xi,$$

де $x_0 = \ln a_0$ отримаємо

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + f(\xi) \frac{d\xi}{dt} + g(\xi) = 0.$$

Тут

$$f(\xi) = \varepsilon [1 + 2e^{2x_0}e^{2\xi}],$$

$$g(\xi) = \varepsilon \left[(1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0) e^{2x_0} e^{2\xi} - J - \beta \cos \Delta\psi_0 \right].$$

Отже, мають місце співвідношення

$$\begin{aligned} f(\xi) &> 0 \text{ для всіх } \xi, \\ \left| \int_l^{\xi} f(\sigma) d\sigma \right| &\rightarrow \infty \text{ при } \xi \rightarrow \infty, \\ g(0) &= 0, \quad g'(\xi) > 0 \text{ для всіх } \xi, \end{aligned}$$

на підставі яких можемо зробити висновок, що положення рівноваги R_0 є асимптотично стійким відносно змінних x, N , а отже, область притягання в змінних a, N включає $a > 0, N \in \mathbb{R}$. В результаті має місце наступна теорема.

Теорема 36. *Нехай $\delta < 2\beta$, $J, \varepsilon > 0$, $0 < \beta < 1/2$. Тоді положення рівноваги R_0 системи (142) – (144) асимптотично стійке з областю притягання $\{a > 0\} \times \mathbb{R} \times S^1$.*

Відзначимо, що з урахуванням симетрії аналогічне твердження має місце для симетричного положення рівноваги

$$R'_0 : a = -a_0, \quad N = -\beta \cos \Delta\psi_0 \quad (155)$$

в напівплощині $a < 0$.

Виникнення стійких періодичних розв'язків на многовиді M .
В практично важливому випадку, коли взаємодія між лазерами слабка, тобто $\beta \ll 1$, можна встановити існування стійких періодичних розв'язків системи на многовиді.

Теорема 37. *Якщо параметр $\beta > 0$ досить малий і $\varepsilon, J > 0$, то в системі (142) – (144) існує стійкий граничний цикл, який при $\beta \rightarrow 0$ прямує до положення рівноваги $N = 0, a = \sqrt{J}$.*

Твердження цієї теореми випливає із загальної теореми про періодичне збурення експоненціально стійкого положення рівноваги.

Одною із характерних властивостей рівнянь динаміки напівпровідникових лазерів є малість параметра ε . Враховуючи цей факт, доведемо існування періодичних розв'язків в іншому важливому випадку, коли не припускається малість β .

Теорема 38. *Якщо параметр $\varepsilon > 0$ досить малий, а також $J > 0$ і $\delta > 2\beta$, то в системі (142) – (144) існує стійкий граничний цикл.*

Доведення даної теореми ґрунтується на наступній теоремі:

Теорема 39. *Нехай задана періодична крайова задача*

$$x'' + \varepsilon f(t, x, x') + g(t) = 0, \quad x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T), \quad (156)$$

де $T > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$, $g \in C(\mathbb{R})$. Якщо

$$\int_0^T g(s) ds = 0, \quad (157)$$

то при $\varepsilon = 0$ існує однопараметричне сімейство розв'язків задачі (156). При досить малому $\varepsilon \neq 0$ існує єдиний розв'язок задачі (156), якщо виконані наступні умови:

1) рівняння

$$\int_0^T f(s, \varsigma + \mu(s), \mu'(s)) ds = 0, \quad (158)$$

має єдиний розв'язок ς_0 , де

$$\mu(t) = \frac{t}{T} \int_0^T \int_0^s g(\sigma) d\sigma ds - \int_0^t \int_0^s g(\sigma) d\sigma ds, \quad (159)$$

$$2) \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s, \varsigma_0 + \mu(s), \mu'(s)) ds \neq 0.$$

Трансверсальна стійкість стаціонарних розв'язків на $\mathbf{M}$. Проведемо дослідження трансверсальної стійкості стаціонарних розв'язків системи (141) на многовиді $\mathbf{M}$. Для цього введемо в системі (141) нові змінні:

$$\bar{x} = a_1 + a_2, \quad \bar{y} = N_1 + N_2, \quad \bar{\xi} = a_1 - a_2, \quad \bar{\eta} = N_1 - N_2. \quad (160)$$

В результаті отримаємо систему рівнянь

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{2}(\bar{x}\bar{y} + \bar{\xi}\bar{\eta}) + \beta\bar{x} \cos \Delta\psi \equiv g_1(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad (161)$$

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \varepsilon \left[2J - \bar{y} - \frac{1}{2}(\bar{y} + 1)(\bar{x}^2 + \bar{\xi}^2) - \bar{x}\bar{\xi}\bar{\eta} \right] \equiv g_2(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad (162)$$

$$\frac{d(\Delta\psi)}{dt} = \delta + \alpha\bar{\eta} - 2\beta \frac{\bar{x}^2 + \bar{\xi}^2}{\bar{x}^2 - \bar{\xi}^2} \sin \Delta\psi \equiv g_3(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad (163)$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \frac{1}{2}(\bar{x}\bar{\eta} + \bar{y}\bar{\xi}) - \beta\bar{\xi} \cos \Delta\psi \equiv f_1(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad (164)$$

$$\frac{d\bar{\eta}}{dt} = - \left[\bar{\eta} + \frac{1}{2}\bar{\eta}(\bar{x}^2 + \bar{\xi}^2) + \bar{x}\bar{\xi}(\bar{y} + 1) \right] \equiv f_2(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}), \quad (165)$$

в якій рівняння (161) – (163) описують динаміку вихідної системи на многовиді $\mathbf{M}$, а рівняння (164), (165) — динаміку вихідної системи в трансверсальному до $\mathbf{M}$ напрямку. В нових координатах многовид $\mathbf{M}$ прийме вигляд

$$\mathbf{M} : \{ (\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, \bar{\xi}, \bar{\eta}) : \bar{\xi} = 0, \bar{\eta} = 0 \}.$$

Легко впевнитись, що в силу інваріантності $\mathbf{M}$ мають місце співвідношення

$$f_j(\bar{x}, \bar{y}, \Delta\psi, 0, 0) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Нехай $\delta\nu = (\delta\bar{x}, \delta\bar{y}, \delta\Delta\psi)^T$ і $\delta w = (\delta\bar{\xi}, \delta\bar{\eta})^T$ — варіації координат вздовж тангенціального і, відповідно, трансверсально до $\mathbf{M}$ напрямків; $F = (f_1, f_2)^T$, $G = (g_1, g_2, g_3)^T$. Для розв'язку $s(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t), \Delta\psi(t), 0, 0)$ на многовиді $\mathbf{M}$ складемо відповідні (161) – (165) рівняння у варіаціях

$$\frac{d(\delta\nu)}{dt} = A(s(t))\delta\nu + B(s(t))\delta w, \quad (166)$$

$$\frac{d(\delta w)}{dt} = C(s(t))\delta w, \quad (167)$$

де

$$A(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\bar{y} + \beta \cos \Delta\psi & \frac{1}{2}\bar{x} & -\beta \sin \Delta\psi \\ -\varepsilon\bar{x}(\bar{y} + 1) & -\varepsilon(1 + \frac{1}{2}\bar{x}^2) & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta \cos \Delta\psi \end{pmatrix},$$

$$B(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

$$C(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\bar{y} - \beta \cos \Delta\psi & \frac{1}{2}\bar{x} \\ -\varepsilon\bar{x}(\bar{y} + 1) & -\varepsilon(1 + \frac{1}{2}\bar{x}^2) \end{pmatrix}.$$

Із (166), (167) випливає, що рівняння в варіаціях мають трикутну матрицю коефіцієнтів, при чому, як видно, трансверсальне варіаційне рівняння, тобто рівняння для δw , відщеплюється від рівняння для δv . Тому для визначення трансверсальної стійкості траєкторій на многовиді $\mathbf{M}$ достатньо розглянути систему (167).

Означення. Будемо говорити, що розв'язок на многовиді $\mathbf{M}$ трансверсально асимптотично стійкий (не стійкий), якщо лінійне рівняння в варіаціях (167) експоненціально асимптотично стійке (не стійке).

Що стосується локальної трансверсальної стійкості стаціонарних розв'язків на $\mathbf{M}$, то відповідні результати слідують із приведеного у попередньому пункті аналізу глобальної стійкості на $\mathbf{M}$.

Стаціонарних розв'язки на $\mathbf{M}$ в нових координатах приймуть вигляд

$$R_0 : \bar{x}_1 = 2a_0, \quad \bar{y}_1 = -2\beta \cos \Delta\psi, \quad \Delta\psi_1 = \Delta\psi_0, \quad \bar{\xi}_1 = \bar{\eta}_1 = 0,$$

$$R_1 : \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{y}_2 = 2J, \quad \Delta\psi_2 = \Delta\psi_0, \quad \bar{\xi}_2 = \bar{\eta}_2 = 0,$$

де $\Delta\psi_0 = \arcsin(\delta/2\beta)$.

Трансверсальну стійкість стаціонарного розв'язку R_0 визначаємо по знакам коренів характеристичного рівняння

$$\det \begin{pmatrix} -\beta \cos \Delta\psi_0 - \lambda & \sqrt{\frac{J + \beta \cos \Delta\psi_0}{1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0}} \\ -2\varepsilon \sqrt{\frac{J + \beta \cos \Delta\psi_0}{1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0}}(1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0) & -\varepsilon \frac{1 + 2J}{1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

або

$$(\lambda + 2\beta \cos \Delta\psi_0) \left(\lambda + \varepsilon \frac{1 + 2J}{1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0} \right) + 2\varepsilon(J + 2\beta \cos \Delta\psi_0) = 0. \quad (168)$$

Розв'язуючи рівняння (168), знаходимо

$$\lambda_{1,2} = -\beta \cos \Delta\psi_0 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \frac{1 + 2J}{1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0} \pm \sqrt{\left(2\beta \cos \Delta\psi_0 - \varepsilon \frac{1 + 2J}{1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0} \right)^2 - 8\varepsilon(J + \beta \cos \Delta\psi_0)}.$$

При достатньо малому ε отримаємо

$$\lambda_1 = -\varepsilon \left[\frac{1 + 2J}{1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0} + \frac{J + \beta \cos \Delta\psi_0}{\beta \cos \Delta\psi_0} \right] + O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_2 = -2\beta \cos \Delta\psi_0 + \frac{J + \beta \cos \Delta\psi_0}{\beta \cos \Delta\psi_0} + O(\varepsilon^2).$$

Трансверсальну стійкість стаціонарного розв'язку R_1 визначаємо по знакам коренів характеристичного рівняння

$$\det \begin{pmatrix} J - \beta \cos \Delta\psi_0 - \lambda & 0 \\ 0 & -\varepsilon - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Маємо $\lambda_1 = J - \beta \cos \Delta\psi_0$ і $\lambda_2 = -\varepsilon$. Таким чином, можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 40. *Нехай $0 < \delta < 2\beta$. Тоді:*

а) існує таке $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\beta, J, \Delta\psi_0)$, що для всіх $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ положення рівноваги R_0 системи (161) – (165) є трансверсально асимптотично стійким;

б) положення рівноваги R_1 системи (161) – (165) трансверсально асимптотично стійке (не стійке) для всіх достатньо малих ε , якщо виконується умова $J - \beta \cos \Delta\psi_0 < 0$ ($J - \beta \cos \Delta\psi_0 > 0$).

$$\beta \cos \Delta\psi_0 > 0$$

$$\frac{1 + 2J}{1 - 2\beta \cos \Delta\psi_0} + \frac{J}{\beta \cos \Delta\psi_0} + 1 > 0.$$

Висновок до підрозділу.

Розглядається система звичайних диференціальних рівнянь, що описують динаміку двох взаємозв'язаних одномодових напівпровідникових лазерів. Зокрема, вивчаються розв'язки, що відповідають амплітудній синхронізації. Показано, що множина таких розв'язків утворює в фазовому просторі тривимірний інваріантний многовид. Досліджується стійкість траєкторій на цьому многовиді як у тангенціальному, так і трансверсальному до нього напрямках. Встановлено умови існування глобально асимптотично стійких розв'язків рівнянь на многовиді, що синхронізовані за амплітудою.

Література

- [1] *Albeverio, S., R.Bozhok, V. Koshmanenko*, The rigged Hilbert spaces approach in singular perturbation theory, *Reports of Math. Phys.* **58**, No. 2, 227-246, (2006).
- [2] *Albeverio, S., M.Dudkin, A.Konstantinov, V. Koshmanenko*, On the point spectrum of $\mathcal{H}_{-2}$ —class singular perturbations, *Math. Nachr.* **208**, No. 1-2, (2007) 20-27.

- [3] *Albeverio, S., Yu. Kondratiev, Yu. Kozitsky, and M. Röckner.* Uniqueness for Gibbs measures of quantum lattices in small mass regime. // *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 37(1):43–69, 2001.
- [4] *Albeverio, S., Yu. Kondratiev, Yu. Kozitsky, and M. Röckner.* Gibbs states of a quantum crystal: uniqueness by small particle mass. // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(8):693–698, 2002.
- [5] *Albeverio, S., Yu. Kondratiev, Yu. Kozitsky, and M. Röckner.* Small mass implies uniqueness of Gibbs states of a quantum crystal. // *Comm. Math. Phys.*, 241(1):69–90, 2003.
- [6] *Albeverio, S., A. Konstantinov, and V. Koshmanenko,* Remarks on the Inverse Spectral Theory for Singularly Perturbed Operators, *Operator Theory: Advance and Appl.*, **190**, 115-122 (2009).
- [7] *Albeverio, S., V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin,* Spectral properties of image measures under infinite conflict interactions, *Positivity*, **10**, 39-49, (2006).
- [8] *Albeverio, S., Koshmanenko, V., Pratsiovytyi, M. Torbin, G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\tilde{Q}$ -symbols, *MFAT*, **16**, N. 4, (2010).
- [9] *Albeverio, S., V. Koshmanenko, I. Samoilenko,* The Conflict Interaction between Two Complex Systems. Cyclic Migration, Preprint No. 262, 26 p. (2006)
- [10] *Albeverio, S. , V. Koshmanenko, I. Samoilenko,* The conflict interaction between two complex systems: Cyclic migration, *J. Interdisciplinary Math.*, **11**, No 2, 163-185 (2008).

- [11] *Белан Е. П., Лыкова О. Б.* Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Нелінійні коливання. — 2006. — **9**, № 2. — С. 155–169.
- [12] *Боднарчук, М. В., В. Д. Кошманенко, І. В. Самойленко,* Динаміка взаємодії конфлікту між системами з внутрішньою структурою, *Нелінійні коливання*, **9**, № 4, 435-450, (2006).
- [13] *Bozhok R.V. and V.D. Koshmanenko* Parametrization of Supersingular Perturbations in the Method of Rigged Hilbert Spaces, *Russian J. Math. Phys.*, **14**, No. 4, 401-405 (2007).
- [14] *Bozhok R. and V. Koshmanenko* Super-singular perturbations in the scale of Hilbert spaces, Український математичний конгрес, Kyiv (2009).
- [15] *Bozhok R. and V. Koshmanenko* On parametrization of super-singular perturbations by the rigged Hilbert space method, Intern. Conf. on Functional Analysis, Lviv, p. 28, (2010).
- [16] *Бурбаки, Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер // М.: Наука (1967), 396 с.
- [17] *Бурбаки, Н.* Общая топология // М.: Наука (1968).
- [18] *Cartan, H.* Théorie du potentiel Newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels // Bull. Soc. Math. France **73** (1945), p. 74–106.
- [19] *Deny, J.* Les potentiels d'énergie finite // Acta Math. **82** (1950), p. 107–183.
- [20] *Deny, J.* Sur la définition de l'énergie en théorie du potentiel // Ann. Inst. Fourier Grenoble **2** (1950), p. 83–99.
- [21] *Dragnev, P. D., Saff, E. B.* Constrained energy problems with applications to orthogonal polynomials of a discrete variable // J. Anal. Math. **72** (1997), p. 223–259.

- [22] *Edwards, R.* Cartan's balayage theory for hyperbolic Riemann surfaces // Ann. Inst. Fourier **8** (1958), 263–272.
- [23] *Finkelshtein D. L., Kondratiev Yu. G., Lytvynov E. W.* Equilibrium Glauber dynamics of continuous particle systems as a scaling limit of Kawasaki dynamics // Random Oper. Stochastic Equations. — 2007. — **15**, no. 2. — P. 105–126.
- [24] *Finkelshtein D., Kondratiev Yu., Lytvynov E.* Equilibrium Glauber dynamics of continuous particle systems as a scaling limit of Kawasaki dynamics // International Conf. “Modern Stochastics: Theory i Applications”, Kyiv, June 19–23, 2006: Abstracts. — Kyiv: Kyiv Nat. Taras Shevchenko Univ., 2006. — P. 129.
- [25] *Frostman, O.* Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions // Comm. Sém. Math. Univ. Lund **3** (1935), p. 1–118.
- [26] *Fuglede, B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta Math. **103** (1960), p. 139–215.
- [27] *Hayman, W. K.* Multivalent functions // Cambridge Tracts in Math. **110**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).
- [28] *Hsiao, G. C., Wendland, W. L.* Boundary Integral Equations // Springer-Verlag, Berlin (2008).
- [29] *Karataieva T. and V. Koshmanenko*, Origination of the singular continuous spectrum in the dynamical systems of conflict, *Methods of Functional Analysis and Topology*, **15**, no. 1, 15–30, (2009).
- [30] *Kasap, S. O.* Principles of Electrical Engineering Materials and Devices // Erwin McGraw Hill, Boston (1997).

- [31] *Kondratiev Yu. G., O. V. Kutoviy.* On the metrical properties of the configuration space // *Math. Nachr.* — 2006. — Vol. 279, № 7. — P. 774—783.
- [32] *Кошманенко, В.Д.* Відновлення спектрального типу граничних розподілів у динамічних системах конфлікту, *Укр. мат. журн.*, **59**, № 6, 771-784 (2007).
- [33] *Koshmanenko, V.D.* Regeneration of a Loosed Spectral Type in the Conflict Dynamical Systems, *Intern. Krein's Conference*, MAA07, Odessa, -P. 75, (2007).
- [34] *Koshmanenko, V.* The structured similarity property for infinite products of measures, *Infinite dimensional analysis and topology*, Yaremche, 78 -79, (2009).
- [35] *Koshmanenko, V.* Conflict dynamical systems in terms of stochastic matrices, *Stochastic Analysis and Random Dynamical Systems*, Lviv, p. 126, (2009).
- [36] *Кошманенко, В.Д.* Повна міра множини сиінгулярно неперервних мір, *Укр. мат. журн.* **61**, № 1, 83-91, (2009).
- [37] *Кошманенко, В.Д.* Квазі-точкові спектральні міри в теорії динамічних систем конфлікту, *Укр. мат. журнал*, (2010).
- [38] *Koshmanenko, V., N.Kharchenko,* The Conflict Fire-Water Cyclic Model, *Intern. Conference "Problems of decision making under uncertainties"*PDMU-2008, Kyiv-Rivne, Ukraine, 24 (2008).
- [39] *Koshmanenko, V., I.Samoilenko,* The Conflict Dynamics of Natural Triad, *Intern. Conference "Problems of decision making under uncertainties"*PDMU-2008, Kyiv-Rivne, Ukraine, 25-26, (2008).

- [40] *Koshmanenko, V., I. Samoilenko*, The Conflict Fire-Water Cyclic Model, "Системний аналіз та інформаційні технології ІПСА, САІТ-2008, 43 (2008).
- [41] *Koshmanenko, V., H. Tugai*, Матриці Якобі асоційовані з оберненою задачею на власні значення в теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів *Укр. мат. журн.*, **58**, No. 12, 1651-1662 (2006).
- [42] *Kutoviy, O. V., A. L. Rebenko*. Existence of Gibbs state for continuous gas with many-body interection // *J. Math. Phys.* — 2004. — Vol. 45, № 4, P. 1593-1605.
- [43] *Ландкоф, Н. С.* Основы современной теории потенциала // М.: Наука (1966), 515 с.
- [44] *Lykova O. B.* On the Pole of Bogolyubovs Integral Manifold Method in Bifurcation Analysis of Multidimensional Nonlinear Models // *Ukr. J. Phys.* — 2009. — **54**, № 8–9. — P. 891–894.
- [45] *Никишин, Е. М., Сорокин, В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность // Наука, Физматлит, Москва (1988).
- [46] *Ohtsuka, M.* On potentials in locally compact spaces // *J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1* **25** (1961), p. 135–352.
- [47] *Petrenko S. N.* Uniqueness of Gibbs state. // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2007. — Vol. 4, № 3. — P. 148—159.
- [48] *Petrenko, S. N., A. L. Rebenko*. Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction II: many-body potentials // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2009. — Vol. 6, № 1. — P. 191—208.

- [49] *Petrenko S. N., A. L. Rebenko.* Superstable criterion and superstable bounds for infinite range interaction I: two-body potentials // *Meth. Funct. Anal. and Topology.* — 2007. — Vol. 13, №1. — P. 50—61.
- [50] *Рахманов, Е. А.* Равновесные меры и распределение нулей экстремальных полиномов дискретного переменного // *Мат. сборник* **187** (8) (1996), с. 109–124.
- [51] *Rebenko, A.L.* Poisson measure representation and cluster expansion in statistical physics. // *Commun. Math. Phys.*, **151**, 427-435 (1993).
- [52] *Rebenko A. L.* New Proof of Ruelle’s Superstability Bounds / A. L. Rebenko // *J. Stat. Phys.* — 1998. — № 91. — P. 815—826.
- [53] *Rebenko, A.L., V.A. Zagrebnov.* Gibbs State Uniqueness for Anharmonic Quantum Crystal with a Nonpolynomial Double-well Potential. // *Journ. Stat. Mechanics: Theory and Experiment* (2006) P09002 (Electronic journal).
- [54] *Ruelle D.* Superstable interactions in classical statistical mechanics // *Commun. Math. Phys.* — 1970. — Vol. 18, № 2. — P. 127—159.
- [55] *Saff, E. B. V. Totik,* Logarithmic potentials with external fields // *Springer-Verlag, Berlin* (1997).
- [56] *De la Vallée-Poussin, Ch. J.* Le potentiel logarithmique, balayage et représentation conforme // *Louvain–Paris* (1949).
- [57] *Verbeure, A. and V.A. Zagrebnov.* No-go theorem for quantum structural phase transitions. // *J. Phys. A: Math.Gen.*, **28**, 5415 (1995).
- [58] *Янчук С. В., Шнайдер К., Лыкова О. Б.* Амплитудная синхронизация в системе двух взаимодействующих полупроводниковых лазеров // *Укр. мат. журн.* — 2008. — **60**, № 3. — С. 426–435.

- [59] *Zorii, N.* Extremal problems in the theory of potentials in locally compact spaces. // I; II; III, Bull. Soc. Sci. Lettr. Łódź **50** Sér. Rech. Déform. **31** (2000), p. 23–54; p. 55–80; p. 81–106.
- [60] *Zorii, N.* On the solvability of the Gauss variational problem // Comput. Meth. Funct. Theory **2** (2002), p. 427–448.
- [61] *Зорий, Н. В.* Экстремальные задачи, дуальные к вариационной задаче Гаусса // Укр. мат. журн. **58** (2006), с. 747–764.
- [62] *Zorii, N.* On capacities of condensers in locally compact spaces // Bull. Soc. Sci. Lettr. Łódź **56** (2006), p. 125–142.
- [63] *Zorii, N.* How the 2-capacity of a space condenser can be written in terms of the Newtonian capacities? A solution to F.W. Gehring’s problem // Analysis and Partial Differential Equations, Bedlewo (Poland), June 18–24, 2006 (Abstracts), p. 44.
- [64] *Zorii, N.* How the 2-capacity of a space condenser can be written in terms of the Newtonian capacities? A solution to F.W. Gehring’s problem and related results // Entire and Subharmonic Functions and Related Topics, Kharkiv (Ukraine), August 14–17, 2006 (Abstracts), p. 44.
- [65] *Zorii, N.* Necessary and sufficient conditions of the solvability of the Gauss variational problem // Geometric Measure Theoretic Approaches to Potentials on Fractals and Manifolds, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Germany), April 8–14, 2007 (Proceedings), p. 1067–1070.
- [66] *Zorii, N.* Necessary and sufficient conditions of the solvability of the Gauss variational problem // Extremal problems in Complex and Real Analysis, Moscow (Russia), May 22–26, 2007 (Abstracts), p. 56.
- [67] *Zorii, N.* Extremal problems for potentials with external fields. Applications to the theory of capacities of condensers // 6-th International Summer

- School on Potential Theory and Applications, Sofia (Bulgaria), July 6–12, 2007 (Abstracts), p. 28.
- [68] *Zorii, N.* How the 2-capacity of a space condenser can be written in terms of the Newtonian capacities? A solution to F.W. Gehring’s problem // 6-th International Summer School on Potential Theory and Applications, Sofia (Bulgaria), July 6–12, 2007 (Abstracts), p. 29.
 - [69] *Zorii, N.* On interior capacities of condensers // International conference on complex analysis and related topics, 11-th Romanian-Finnish Seminar, Alba Iulia (Romania), August 14–19, 2008 (Abstracts).
 - [70] *Zorii, N.* Minimizing measures on condensers of infinitely many plates // Bull. Soc. Sci. Lettr. Łódź **59** (2009), p. 37–59.
 - [71] *Zorii, N.* Interior capacities of condensers in locally compact spaces // arXiv:0902.0396 (2009), Preprint, 38 p.
 - [72] *Zorii, N.* Interior capacities of condensers with infinitely many plates in locally compact spaces // arXiv:0906.4522 (2009), Preprint, 42 p.
 - [73] *Zorii, N.* Equilibrium problems for infinite dimensional vector potentials with external fields // arXiv:0911.0901 (2009), Preprint, 25 p.
 - [74] *Zorii, N.* Interior capacities of condensers with infinitely many plates // Computational Methods and Function Theory, Bilkent University, Ankara (Turkey), June 8–12, 2009 (Abstracts), p. 63.
 - [75] *Zorii, N.* Interior capacities of condensers with infinitely many plates // XVth Conference on Analytic Functions and Related Topics, Chelm (Poland), July 5–9, 2009 (Abstracts), p. 54.
 - [76] *Zorii, N.* Interior capacities of condensers with infinitely many plates in locally compact spaces // 8-th Summer School in Potential Theory, Budapest (Hungary), July 6–12, 2009 (Abstracts), p. 22–23.

- [77] *Zorii, N.* Interior capacities of condensers with infinitely many plates in locally compact spaces // International Conference on Complex Analysis and Related Topics, 12-th Romanian-Finnish Seminar, Turku (Finland), August 17–21 (Abstracts), p. 53–54.
- [78] *Zorii, N.* *Constrained energy problems with external fields*, arXiv:1001.4147 (2010), Preprint, 10 p.
- [79] *N. Zorii*, Minimizing measures on condensers of infinitely many plates // arXiv:1001.4369 (2010), Preprint, 22 p.
- [80] *Zorii, N.* Equilibrium problems for infinite dimensional vector potentials with external fields // Optimal Configurations on the Sphere and Other Manifolds, Vanderbilt University, Nashville (USA), May 17–20, 2010 (Abstracts), p. 31.
- [81] *Zorii, N.* Equilibrium problems for infinite dimensional vector potentials with external fields // International Conference on Complex Analysis, Lviv (Ukraine), May 31–June 5, 2010 (Abstracts), p. 68–69.
- [82] *Zorii, N.* Constrained energy problems with external fields for infinite dimensional vector measures // arXiv:1010.2126 (2010), Preprint, 28 p.
- [83] *Zorii, N.* Interior capacities of condensers in locally compact spaces // Potential Anal., doi10.1007/s11118-010-9204-y (2010), p. 1–41.
- [84] *Zorii, N.* Constrained energy problems with external fields // Complex Anal. Oper. Theory, doi10.1007/s11785-010-0070-9 (2010), p. 1–11.
- [85] *Zorii, N.* Interior capacities of condensers with countably many plates in locally compact spaces // Hiroshima Math. J. **40** (2010), №3, 35 p.
- [86] *Zorii, N., Of, G. Wendland, W. L.* On the numerical solution of minimal energy problems // Complex Variables and Elliptic Equations, **55**, №11 (2010), p. 991–1012.

- [87] *Zorii, N., Of, G., Wendland, W. L.* The Gauss problem // Fast Boundary Element Methods in Industrial Applications, Technical University of Graz (Austria), October 2–5, 2008 (Abstracts), p. 24.
- [88] *Zorii, N., Of, G., Wendland, W. L.* On the numerical solution of minimal energy problems // Technical University of Graz (Austria), Preprint, 28 p.
- [89] *Zorii, N., Of, G., Wendland, W. L.* The Gauss problem // 13-th Conference on Mathematics of Finite Elements and Applications Brunel University, London, June 9–12 (Abstracts), p. 194.
- [90] *Зорий, Н. В.* Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов // Укр. мат. журн. **38** (1986), с. 431–437.
- [91] *Зорий, Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов и ядер Рисса // Укр. мат. журн. **41** (1989), с. 34–42.
- [92] *Зорий, Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала I; II // Укр. мат. журн. **42** (1990), с. 494–500; с. 1475–1480.
- [93] *Зорий, Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории риссова потенциала I; II, // Укр. мат. журн. **47** (1995), с. 1350–1360; **48** (1996), с. 603–613.
- [94] *Зорий, Н. В.* Задачи равновесия для потенциалов с внешними полями // Укр. мат. журн. **55** (2003), с. 1315–1339.
- [95] *Зорий, Н. В.* Необходимые и достаточные условия разрешимости вариационной задачи Гаусса // Укр. мат. журн. **57** (2005), с. 60–83.