

УДК 517.95:517.958:517.928:512.81

КП XXXXXXXXX

№ держреєстрації 0106U000436

Інв. №

Національна Академія наук України

Інститут математики

01601, м. Київ, Терещенківська, 3;

тел. (044) 234 51 50, факс 235 20 10

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор Інституту
математики НАН України

академік НАН України

А.М. Самойленко

04.01.2011

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

Симетрія та інтегровність нелінійних моделей (заклучний)

Керівник НДР

член-кореспондент НАН України

доктор фіз.-мат. наук

А.Г. Нікітін

Рукопис закінчено 13 грудня 2010 р.

Результати цієї роботи розглянуто Вченою Радою Інституту
математики НАН України, протокол від 21.12.2010 № 11.

Київ–2010

Список авторів

Керівник проекту
чл.-кор. НАН України

д-р фіз.-мат. наук,
завідувач відділу

А.Г. Нікітін

д-р фіз.-мат. наук,
пров. наук. співр.

Р.О. Попович

д-р фіз.-мат. наук,
пров. наук. співр.

Р.М. Черніга

канд. фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

В.М. Бойко

канд. фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

І.А. Єгорченко

канд. фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

О.Ю. Жалій

канд. фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

О.М. Жуковський

канд. фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

Н.М. Іванова

канд. фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

М.О. Нестеренко

канд. фіз.-мат. наук,
старш. наук. співр.

С.В. Спічак

канд. фіз.-мат. наук,
наук. співр.

О.О. Ванєєва

канд. фіз.-мат. наук,
мол. наук. співр.

О.В. Магда

канд фіз.-мат. наук,

мол. наук. співр.

мол. наук. співр.

аспірант

аспірант

аспірант

пров. інженер

інженер

О.Г. Плюхін

О.В. Курікша

В.В. Давидович

Ю.Г. Караджов

С.С. Коваленко

Н.М. Шаповал

Л.І. Величко

Реферат

Звіт про НДР: 249 сторінок, 146 джерел.

Ключові слова: інтегровність, симетрія, точні розв'язки, нелінійні моделі, алгебри та групи Лі.

Об'єкт дослідження: нелінійні задачі математичної фізики, хімії, біології та економіки.

Мета роботи: створення нових ефективних методів групової класифікації систем нелінійних диференціальних рівнянь та об'єктів, що з ними пов'язані (законів збереження, Q -умовних і потенціальних симетрій, реалізацій алгебр Лі та диференціальних інваріантів) і знаходження їх точних розв'язків.

Методи дослідження: сучасні методи групового аналізу, теорії алгебр та груп Лі.

Звіт містить основні результати отримані в рамках виконання НДР по проекту “Симетрія та інтегровність нелінійних моделей” та список наукових робіт опублікованих в рамках цієї НДР.

Зміст

1	Вступ	8
2	Основні наукові результати	9
3	Нерозкладні представлення однорідної групи Галілея	23
4	Групова класифікація систем рівнянь дифузії	27
5	Моделі Черна–Саймона у 1+3-вимірному просторі Мінковського	31
5.1	Модельні рівняння	32
5.2	Лагранжове формулювання та закони збереження	33
5.3	Точні розв’язки	34
5.4	Контракція до нерелятивістської границі	36
5.5	Лагранжіан та тензор енергії-імпульсу для нерелятивістської границі	37
6	Точно розв’язна модель для нейтральних ферміонів з квадрупольною взаємодією	38
6.1	Формулювання задачі	39
6.2	Спектр та власні вектори гамільтоніану	41
7	Груповий аналіз у класах диференціальних рівнянь	44
7.1	Точкові перетворення у класах диференціальних рівнянь .	44
7.2	Відображення між класами	60
7.3	Нормалізовані класи диференціальних рівнянь	65
7.4	Нормалізовані класи систем еволюційних рівнянь	73
8	Інваріанти алгебр Лі	79
9	Контракції алгебр Лі	83
10	Інваріантні системи двох ЗДР другого порядку та алгебри Лі векторних полів на площині	89

11 Орбіт-функції та правила галуження орбіт групи Вейля	91
11.1 Орбіт-функції напівпростих груп Лі рангу три	91
11.2 Ортогональні поліноми та орбіт-функції	93
11.3 Правила галуження орбіт групи Вейля	94
12 Застосування квазікристалів до криптографії та апроксимації майжеперіодичних функцій	95
12.1 Застосування квазікристалів у криптографії	95
12.2 Квазікристали та майже періодичні функції	98
13 Симетрії та моделюючі функції для дифузійних процесів	99
13.1 Експериментальні дані та симетрії. Еволюція по часу на основі симетрій	100
13.2 Моделюючі функції для профілів покриття. Алгоритм обчислення моделюючих функцій	104
14 Симетрії Лі, умовні симетрії та точні розв'язки нелінійних рівнянь реакції-дифузії та крайових задач	107
14.1 Умовні симетрії та точні розв'язки деяких нелінійних рівнянь математичної біології	107
14.2 Q -умовні симетрії і точні розв'язки класу систем рівнянь РД зі степеневими коефіцієнтами дифузії	116
14.3 Застосування методу Лі для розв'язання деяких нелінійних задач типу Стефана	127
15 Класифікація інтегровних тривимірних квантово-механічних систем в магнітному полі	133
16 Групова класифікація квазілінійних рівнянь еліптичного типу	146
16.1 Попередні результати групової класифікації	146
16.2 Інваріантність відносно алгебр Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві	148
16.3 Інваріантність відносно розв'язних алгебр Лі	150

16.4	Інваріантність відносно чотиривимірних алгебр Лі	152
16.5	Завершення групової класифікації	157
17	Груповий аналіз та закони збереження рівнянь	
	реакції–дифузії	158
17.1	Розширений груповий аналіз рівнянь реакції–дифузії зі степеневими нелінійностями	158
17.2	Розширений груповий аналіз квазілінійних рівнянь реакції–дифузії зі степеневою нелінійністю	162
17.3	Груповий аналіз нелінійних рівнянь дифузії між пластинами	166
17.4	Потенціальні неklasичні симетрії рівнянь дифузії	168
17.5	Потенціальні симетрії рівнянь дифузії у пористому середовищі	170
17.6	Допустимі перетворення у класах узагальнених рівнянь Кортевега–де-Фріза	174
17.7	Потенціальні закони збереження та потенціальні системи .	177
17.8	Закони збереження рівнянь конвекції–дифузії	178
18	Диференціальні інваріанти та приховані симетрії	179
18.1	Відносні диференціальні інваріанти	179
18.2	Групова класифікація відносно прихованої симетрії	191
19	Математичні моделі створення	
	та експлуатації алмазних бурових долот	194
19.1	Температурний стан алмазного сферичного долота	196
19.2	Абразивне зношування алмазного долота	209
19.3	Зношування алмазного долота з врахуванням контакту . .	215
20	Апробація результатів, участь в конференціях,	
	наукове співробітництво тощо	225
21	Педагогічна діяльність, підготовка кадрів	230
22	Публікації	231

1 Вступ

На сьогодні дослідження нелінійних моделей та побудова їх розв'язків є однією з основних і актуальних проблем математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь. І саме групові методи є дуже ефективним і інколи єдиним дієвим інструментом для конструктивного розв'язання цієї проблеми. Дослідження в області групового аналізу диференціальних рівнянь активно виконуються в провідних наукових центрах світу, але багато важливих проблем залишаються нерозв'язаними. Головною метою даної НДР було створення нових алгоритмів для дослідження симетрійних властивостей складних нелінійних диференціальних рівнянь і ефективних методів побудови їх точних розв'язків.

За звітний період дослідження в рамках НДР були зосереджені у основному на таких взаємопов'язаних напрямках:

- 1) зображення та реалізації векторними полями скінченновимірних груп та алгебр Лі, зокрема, важливих груп та алгебр математичної фізики;
- 2) закони збереження, Q -умовні та потенціальні симетрії рівнянь та систем еволюційного типу;
- 3) алгебраїчні методи інтегрування та нелінійний принцип суперпозиції для систем диференціальних рівнянь, квазі-точно розв'язні моделі;
- 4) задачі групової класифікації для важливих класів нелінійних моделей математичної фізики, біології тощо;
- 5) теорія диференціальних інваріантів;
- 6) суперсиметрія та методи побудови розв'язків систем диференціальних рівнянь;
- 7) розділення змінних та суперінтегровні моделі.

Дослідження, що виконувалися в рамках даної НДР були пов'язані з різноманітними методами дослідження модельних нелінійних систем сучасної математичної фізики, хімії, біології та економіки.

Протягом звітної періоду в рамках даного проекту виконавцями в вітчизняних та закордонних виданнях опубліковано 1 монографію, 1 збірник наукових праць, 143 наукових робіт, оформлено 1 патент на винаходи.

Основні результати, що отримані в рамках даного проекту, відображено нижче.

Ряд з одержаних результатів мають пріоритетний характер у світі. Результати НДР доповідались на багатьох міжнародних конференціях.

У звіті розділи 1, 2 підготували А.Г. Нікітін та В.М. Бойко; 3, 4, 5, 6 — А.Г. Нікітін; 7 — Р.О. Попович; 8 — В.М. Бойко та Р.О. Попович; 9 — М.О. Нестеренко та Р.О. Попович; 10, 11, 12 — М.О. Нестеренко; 13 — А.Г. Нікітін та С.В. Спічак; 14 — Р.М. Черніга; 15 — О.Ю. Жалій; 16 — С.В. Спічак; 17 — О.О. Ванєєва, Н.М. Іванова та Р.О. Попович; 18 — І.А. Єгорченко; 19 — О.М. Жуковський; 20, 21, 22 — В.М. Бойко.

2 Основні наукові результати

Розв'язано задачу про рух релятивістської частинки з довільним спіном у полі точкового заряду (чл.-кор. НАН України **А.Г. Нікітін**).

Побудовані нерозкладні представлення однорідної групи Галілея у просторах векторних полів. Знайдено функціональні та диференціальні інваріанти для цих представлень, описані усі можливі системи лінійних диференціальних рівнянь для векторних полів, інваріантні відносно групи Галілея (чл.-кор. НАН України **А.Г. Нікітін**).

Завершено групову класифікацію двокомпонентних систем рівнянь дифузії з довільною матрицею дифузії (чл.-кор. НАН України **А.Г. Нікітін**).

Побудовані розв'язки двобозонної моделі Яна-Кумінгса з трьома степенями свободи (чл.-кор. НАН України **А.Г. Нікітін**).

Проведено групову класифікацію узагальнених моделей Черна–Саймона у $1+3$ -вимірному просторі Мінковського та знайдено сім'ї точних розв'язків для таких моделей (чл.-кор. НАН України **А.Г. Нікітін, О.В. Курікша**).

Розв'язана задача про відновлення коефіцієнта дифузії на основі експериментальних даних (отриманих в Інституті фізики НАН України) відносно поверхневої дифузії для системи літій-мобілен. Запропоновано метод побудови апроксимаційних функцій розподілу концентрації для нелінійних систем дифузії, що базується на розкладі за функціями похибок (чл.-кор. НАН України **А.Г. Нікітін, С.В. Спічак**).

Знайдено точний розв'язок рівняння Дірака для нейтрона, що рухається у електромагніт-ному полі, породженому зарядженим тонким дротом з постійним струмом. Показано, що така система може мати зв'язані стани і знайдено відповідний спектр енергій (чл.-кор. НАН України **А.Г. Нікітін**).

Доведено, що існує тільки одна пара комплексних чотиривимірних алгебр Лі, для яких добре визначену контракцію між ними не можна реалізувати як узагальнену контракцію Інью–Вігнера. Знайдено нижню границю (рівну три) для невід'ємних цілих показників степенів параметра, які є достатніми для реалізації всіх узагальнених контракцій Інью–Вігнера між дійсними або комплексними чотиривимірними алгебрами Лі (**Р.О. Попович**).

Доведено теорему, що будь-яка діагональна контракція еквівалентна узагальненій контракції Інью–Вігнера з цілочисленною сигнатурою. Отримано аналогічні посилені твердження у більш спеціальних випадках. Так довільна узагальнена контракція Інью–Вігнера еквівалентна узагальненій контракції Інью–Вігнера з цілочисленною сигнатурою і тими же асоційованими сталими матрицями. Будь-яка діагональна кон-

тракція, матриці якої має скінченну границю, коли параметр контракції прямує до 0, еквівалентна узагальненій контракції Іньоню–Вігнера з цілими і невід’ємними степенями (**Р.О. Попович**).

Виконано симетрійний аналіз класу баротропічних потенціальних рівнянь завихореності, параметризованих двома постійними параметрами. Показано, що один з параметрів є несуттєвим. Отримано низку точних розв’язків, які допускають метеорологічну інтерпретацію (**Р.О. Попович**).

З точністю до контактної еквівалентності повністю описано локальні закони збереження $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь другого порядку. Доведено, що відповідні простори законів збереження можуть мати розмірності 0, 1, 2 та нескінченність. Для всіх можливих ненульових значень розмірності знайдено канонічний вигляд (відносно контактної еквівалентності) рівнянь, що допускають такі простори законів збереження (**Р.О. Попович**).

Створено новий алгебраїчний алгоритм побудови інваріантів алгебр Лі, на основі якого побудовано функціональні базиси інваріантів (узагальнених операторів Казиміра) для широких класів алгебр Лі (**В.М. Бойко, Р.О. Попович**).

За допомогою оригінального алгебраїчного методу побудовано функціональні базиси інваріантів (узагальнених операторів Казиміра) для розв’язних алгебр Лі з “діагональними” нільнезалежними елементами та нільрадикалами, ізоморфними алгебрі строго верхньотрикутних матриць (**В.М. Бойко, Р.О. Попович**).

На основі аналізу різних означень некласичної симетрії та порівняння властивостей ліївської і некласичної симетрій зроблено висновок, що некласична симетрія не є симетрією у звичайному сенсі. Побудовано приклад, який показує, що існуючі означення некласичної симетрії не є коректними у випадку систем диференціальних рівнянь з частинними похідними (а не окремих рівнянь) (**Р.О. Попович**).

Вичерпно описано оператори редукції, тобто оператори некласичної (умовної) симетрії $(1+1)$ -вимірних лінійних параболічних рівнянь з частинними похідними другого порядку і всі можливі редукції таких рівнянь до звичайних диференціальних. Доведено, що в деякому сенсі проблема еквівалентна розв'язанню початкових рівнянь. “No-go” результат поширено на дослідження точкових перетворень (допустимих перетворень, перетворень еквівалентності, ліївських симетрій) та ліївських редукцій визначальних рівнянь для некласичних симетрій. Перетворення, що лінеаризують визначальні рівняння, отримано у загальному випадку та при різних додаткових обмеженнях. Побудовано нетривіальних приклад, що ілюструє застосування операторів редукції до знаходження точних розв'язків рівнянь з розглядуваного класу. Виявлено зв'язок між операторами редукції таких рівнянь і перетвореннями Дарбу (**Р.О. Попович**).

Доведено, що потенціальні закони збереження мають характеристики, залежні лише від локальних змінних, тоді і тільки тоді, коли їх індуковано локальними законами збереження. Отже, характеристики чисто потенціальних законів збереження мають суттєво залежати від потенціальних змінних. Це твердження суттєво узагальнює результати недавньої статті Блумена, Шевякова і Іванової [J. Math. Phys., 2006, V.47, 113505]. Більш того, його поширено на калібровані потенціальні системи, абелеві і загальні накриття та загальні розшаровані системи диференціальних рівнянь. У якості нових засобів для дослідження потенціальних законів збереження запропоновано спеціальну версію леми Адамара для розшарувань і поняття навантажених просторів струменів. Ефективність розробленої техніки продемонстровано на нетривіальному прикладі законів збереження нелінійних рівнянь конвекції-дифузії (**Р.О. Попович**).

Для рівнянь з частинними похідними у випадку двох незалежних змінних введено поняття сингулярних операторів редукції, тобто сингулярних операторів некласичної (умовної) симетрії. Вичерпно описано всі

можливі редукції таких рівнянь до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Як приклади вивчено властивості сингулярних операторів редукції $(1+1)$ -вимірних еволюційних та хвильових рівнянь. Сформульовано загальні умови, за яких розв'язання визначальних рівнянь на коефіцієнти операторів редукції еквівалентно у певному сенсі розв'язанню вихідного рівняння, що суттєво узагальнює подібні вже існуючі “по-go” твердження для $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь. Показано, що вивчення сингулярних векторних полів для рівняння з частинними похідними повинно бути першим кроком алгоритму обчислення операторів редукції (**Р.О. Попович**).

Методи багатовимірних простих хвиль застосовано до вивчення квазі-простих хвиль у слабо дисипативній рідині. Для хвильової фази виведено двовимірне рівняння Бюргерса, яке суттєво відрізняється від відомих двовимірних рівняння Бюргерса, наприклад, рівняння Хохлова–Заболоцької. Отримане рівняння досліджено у рамках симетрійного аналізу диференціальних рівнянь. Побудовано багатопараметричні сім'ї його точних розв'язків. Найпростіші розв'язки проаналізовано у початкових змінних стосовно їх фізичної релевантності (**Р.О. Попович**).

Побудовано нові Q -умовні симетрії нелінійних рівнянь реакції-дифузії-конвекції та систем реакції-дифузії зі степеневими коефіцієнтами дифузії. У випадку систем реакції-дифузії це зроблено вперше. Використовуючи отримані симетрії, побудовано нові точні розв'язки та досліджено їх властивості для деяких рівнянь та систем рівнянь математичної біології, зокрема рівняння Маррі (Murray) та узагальненого рівняння Фітцгю–Нагумо (Fitzhugh–Nagumo) (**Р.О. Черніга, О.Г. Плюхін**).

Проведено вичерпний опис симетрії Лі для класу нелінійних систем багатовимірних рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами дифузії. Показано, що результати можна узагальнити на багатокomпонентні системи таких рівнянь та наведено відповідну теорему. Побудовано нові закони збереження для систем реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами

дифузії (**Р.О. Черніга**).

Метод Лі застосовано для встановлення інваріантності одного класу нелінійних крайових задач типу Стефана. Знайдено всі можливі симетрії Лі, які можуть допускатися цими задачами в залежності від наявних коефіцієнтів. Встановлено нові типи нелінійностей, коли вихідну крайову задачу можна звести до крайової задачі для ЗДР та отримати її точний розв'язок (**Р.О. Черніга, С.С. Коваленко**).

Досліджено симетрії Лі та проведено неліївську редукцію, знайдено нові точні розв'язки та наведено їх інтерпретацію для системи нелінійних рівнянь реакції-дифузії з поперечною дифузією (системи Шігезади–Кавасакі–Терамото). Аналогічні дослідження проведено для одного класу рівнянь 4-го порядку для опису динаміки тонких плівок (**Р.О. Черніга**).

Використовуючи нещодавно встановлене зображення екзотичної конформної алгебри Галілея, побудовано всі трикомпонентні системи тривимірних рівнянь (серед рівнянь першого порядку), інваріантні відносно цієї алгебри та її підалгебр. Встановлено, що навіть найпростіші системи такого типу є строго нелінійними, проте знайдена їх аналогія з деякими відомими фізичними системами (рівняннями руху мілкої води та рівняннями руху в'язких рідин при дії ротаційних сил) (**Р.О. Черніга**).

Проведено класифікацію потенціалів електромагнітного поля в тривимірному евклідовому просторі, при яких відповідна квантово-механічна система, що описується рівнянням Шрьодінгера, є інтегрованою, тобто для яких існує пара операторів другого порядку, що комутують між собою, а також з оператором рівняння. Як результат, було отримано низку вектор-потенціалів, для яких відповідне рівняння Шрьодінгера є інтегровним в означеному вище сенсі, але при цьому не допускає відокремлення змінних, а отже ці потенціали не містяться в відомій класифікації Шаповалова і тому є новими (**О.Ю. Жалій**).

Проведено класифікацію точно-розв'язних моделей гідродинамічної

стабільності. З математичної точки зору проблема визначення стабільності даної течії представляє собою розв'язування системи рівнянь, що отримані з рівнянь Нав'є–Стокса лінеарізацією за основними течіями та знаходження множини всіх її можливих розв'язків, які дозволяють розщеплення збурень на нормальні моди. Було повністю розглянуто випадки декартових та циліндричних координат. Наведено гідродинамічну інтерпретацію отриманих результатів (**О.Ю. Жалій**).

Розроблені кінетичні моделі для опису фізико-хімічних процесів, які паралельно відбуваються при спіканні алмазовмісних композитів на основі твердосплавних матриць методом гарячого пресування. На основі цих моделей встановлено, що енергія активації дифузії, зародкоутворення нових фаз і хімічних реакцій несе у собі повну інформацію про структури і фізико-механічні властивості надтвердих композиційних алмазовмісних композитів (НКАМ), та виготовлені нові конкурентоспроможні на світовому ринку НКАМ нового складу, які за зносостійкістю перевищують стандартні композити (**О.М. Жуковський**).

Проведено дослідження та аналіз модельних зв'язаних задач термoprужності і зношування для сферичного та циліндричного долота (**О.М. Жуковський**).

Зроблена повна групова класифікація нелінійних рівнянь вигляду $\Delta u = F(x, y, u, u_x, u_y)$. Дослідження було виконано окремо для класів рівнянь інваріантних відносно алгебр Лі операторів симетрії, які мають структуру напівпростих алгебр, алгебр з нетривіальним розкладом Леві та розв'язних алгебр (**С.В. Спічак**).

Розроблено загальний метод опису та класифікації відносних диференціальних інваріантів. Метод базується на побудові та класифікації розширених представлень для алгебри, для якої ми шукаємо відносні диференціальні інваріанти. Запропоновано метод та наведені приклади опису векторних та тензорних відносних диференціальних інваріантів. Отримані результати дають, зокрема, можливість повного та система-

тичного опису рівнянь та систем рівнянь, інваріантних відносно заданої алгебри (**І.А. Єгорченко**).

Новий алгоритм побудови диференціальних інваріантів для нескінченновимірних алгебр, зокрема, таких, які є алгебрами еквівалентності для класів диференціальних рівнянь. На основі цього побудовані приклади фундаментальних базисів диференціальних інваріантів для таких алгебр та приклади, коли такі набори інваріантів дають можливість характеристики рівнянь (тобто визначення належності конкретного рівняння до певного класу еквівалентності) (**І.А. Єгорченко**).

Опис можливих редукцій хвильового рівняння до двовимірних рівнянь. Знаходження та уточнення необхідних умов редукції, а також відповідних редуктованих рівнянь. Дослідження можливих редуктованих рівнянь та побудова нових нелінійських розв'язків (**І.А. Єгорченко**).

Повний опис умовної симетрії двовимірного хвильового рівняння. Симетрійна класифікація загального класу двовимірних хвильових рівнянь з довільною не лінійністю відносно умовної симетрії. Побудовані нові нелінійські розв'язки використанням знайденої симетрії (**І.А. Єгорченко**).

Розроблений метод та наведені приклади опису рівнянь, що мають задану приховану симетрію. Метод базується на описі та класифікації умовних диференціальних інваріантів — тобто виразів, які є диференціальними інваріантами за певної умови. Крім опису рівнянь з заданою прихованою симетрією, отримані результати дають можливість класифікації симетрій них та нелінійських редукції рівнянь (**І.А. Єгорченко**).

Прокласифіковано потенціальні неklasичні симетрії $(1+1)$ -вимірного рівняння швидкої дифузії $u_t = (u^{-1}u_x)_x$. Доведено, що деякі класи таких симетрій пов'язані зі звичайними неklasичними симетріями на множині розв'язків допоміжної потенціальної системи. Знайдено нові точні нелінійські розв'язки. Показано, що всі відомі точні розв'язки рівняння швидкої дифузії вичерпуються розв'язками, які можна побудувати за

знайденими операторами потенціальної неklasичної симетрії (**О.О. Ванєєва, Н.М. Іванова, Р.О. Попович**).

Описано нелінійності, для яких рівняння з класу $(1+1)$ -вимірних рівнянь фільтрації допускають нетривіальні неklasичні симетрії (**О.О. Ванєєва, Н.М. Іванова, Р.О. Попович**).

Повністю розв'язано задачу групової класифікації $(1+1)$ -вимірних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими нелінійностями вигляду $f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m$, $f g n \neq 0$. Класифікацію виконано з точністю до перетворень з узагальненої та умовних груп еквівалентності класу, а також з точністю до всіх точкових перетворень. За знайденими симетріями методом редукції побудовано нові точні розв'язки досліджуваних рівнянь, що допускають розширення лівівської симетрії. Описано множину всіх допустимих перетворень та прокласифіковано локальні закони збереження у цьому класі (**О.О. Ванєєва, Р.О. Попович**).

З симетрійної точки зору досліджено рівняння дифузії між пластинами $u_t = (|u|^{-3/2} u_x)_x + x^{-1} u$. З використанням різних методів (лівівська редукція, нелінійне відокремлення змінних, узагальнені умовні симетрії, приховані симетрії, неklasичні симетрії) побудовано лівівські, а також нелівівські точні розв'язки цього рівняння (**О.О. Ванєєва, Р.О. Попович**).

Виконано вичерпну групову класифікацію рівнянь дифузії між пластинами $u_t = (D(u)u_x)_x + h(x)u$. Прокласифіковано локальні закони збереження і побудовано додаткові перетворення еквівалентності та точні розв'язки рівнянь з цього класу (**О.О. Ванєєва, Р.О. Попович**).

Запропоновано новий підхід до групової класифікації, що базується на застосуванні перетворень з узагальненої розширеної групи еквівалентності та відображень між класами рівнянь. Використовуючи цей підхід, повністю розв'язано задачу групової класифікації $(1+1)$ -вимірних квазі-лінійних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневими

вою нелінійністю вигляду $f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m$ ($m \neq 0, 1$). За знайденими симетріями методом редукції побудовано нові точні розв'язки рівнянь з досліджуваного класу. Також вичерпно описано структуру множини допустимих перетворень (**О.О. Ванєєва, Р.О. Попович**).

Прокласифіковано закони збереження для рівнянь дифузії у пористому середовищі. Використовуючи відповідні потенціальні системи знайдено потенціальні симетрії. Походження потенціальних симетрій пояснено з допомогою потенціальних перетворень еквівалентності. Точкові та потенціальні перетворення еквівалентності також застосовано для знаходження потенціальних симетрій та відповідних інваріантних розв'язків досліджуваних рівнянь, які можна звести до лінійних (**О.О. Ванєєва, Н.М. Іванова, Р.О. Попович**).

Знайдено оператори редукції (некласичні симетрії) $(1+1)$ -вимірних квазілінійних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та степеневою нелінійністю вигляду $f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m$ ($m \neq 0, 1$). За знайденими операторами редукції побудовано точні розв'язки розглядуваних рівнянь (**О.О. Ванєєва, Р.О. Попович**).

Використовуючи метод, що базується на застосуванні перетворень з узагальненої розширеної групи еквівалентності та відображень між класами рівнянь, виконано групову класифікацію $(1+1)$ -вимірних квазілінійних рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами та експоненціальною нелінійністю вигляду $f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)e^{mu}$ ($m \neq 0$) (**О.О. Ванєєва**).

Досліджено допустимі точкові перетворення в класах узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза (КдФ). Отримано необхідні та достатні умови подібності таких рівнянь до стандартних рівнянь КдФ та модифікованого рівняння КдФ. Виконано групову класифікацію рівнянь КдФ зі змінними коефіцієнтами вигляду $u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} = 0$, де f та g — довільні гладкі функції змінної t , $fg \neq 0$ (**О.О. Ванєєва, Р.О. Попович**).

Розроблено теоретичні основи для вивчення контракцій алгебр Лі над полями комплексних і дійсних чисел та запропоновано нові необхідні критерії існування контракцій. Побудовано ряд важливих прикладів, які спростовують відомі гіпотези і твердження та дають підстави для формулювання нових гіпотез. Доведено теорему, що містить повний перелік необхідних критеріїв існування контракцій низькорозмірних алгебр Лі. Сформульовано алгоритм знаходження контракцій скінченновимірних алгебр Лі, за допомогою якого описано всі слабо нееквівалентні контракції дійсних низькорозмірних алгебр Лі (**Р.О. Попович, М.О. Нестеренко**).

Побудовано усі нееквівалентні системи двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, які інваріантні відносно дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири (**М.О. Нестеренко, О.В. Курікша**).

Переглянуто класифікацію дійсних алгебр Лі векторних полів, що діють на площині, та вичерпно описано множину їх диференціальних інваріантів, а саме: базиси диференціальних інваріантів, визначники Лі та оператори інваріантного диференціювання (**М.О. Нестеренко**).

Запропоновано нові підходи до обробки та кодування цифрових даних, що базуються на аперіодичних точкових наборах. Розроблено новий симетричний метод шифрування, що базується на специфічних властивостях квазікристалів, а саме: строгій аперіодичності та розривності в кожній точці (**М.О. Нестеренко**).

Вивчено орбіт-функції та відповідні дискретні перетворення типу Фур'є, що базуються на простих та напівпростих компактних групах Лі рангу три. Зокрема, отримано комбінаторні формули для обчислення кількості точок в решітці фундаментальної області та кількості елементів у класах суміжності. Побудовано явний вигляд операторів другого порядку та описано області для яких C -орбіт функції та S -орбіт функції є відповідно розв'язками краєвих задач Неймана та Діріхле в тривимірному евклідовому просторі. Запропоновано новий підхід до побудови ор-

тогональних поліномів багатьох змінних та правил галуження для них. **(М.О. Нестеренко).**

Знайдено правила галуження орбіт групи Вейля простих алгебр L_n для випадків $n \leq 8$ та кількох нескінчених серій. Встановлено зв'язок між багатозмінними експоненційними спеціальними функціями запропонованими А.У. Клімиком та C - і S -орбіт функціями, побудованими за допомогою групи Вейля алгебри A_n **(М.О. Нестеренко).**

Розроблено метод для дискретного Фур'є аналізу майжеперіодичних функцій заданих на квазікристалах. Запропонований метод базується на скінчених групах та дуальних до них. В явному вигляді знайдено Фур'є розклади майжеперіодичних функцій побудованих на стандартному квазікристалі Фібоначчі **(М.О. Нестеренко).**

Проведено повну групову класифікацію $(1 + 1)$ -вимірних рівнянь конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами відносно загальної та розширеної груп еквівалентності. За допомогою отриманих результатів проведено симетрійну редукцію і знайдено точні інваріантні та неінваріантні розв'язки рівнянь, що належать до даного класу **(Н.М. Іванова, Р.О. Попович).**

За допомогою композиційного варіаційного принципу знайдено локальні та нелокальні закони збереження $(1 + 1)$ -вимірних рівнянь конвекції–дифузії із сталими коефіцієнтами **(Н.М. Іванова).**

Доведено теорему про неіснування потенціальних законів збереження з характеристиками, що залежать від незалежних змінних. Досліджено закони збереження нелінійних телеграфних рівнянь **(Н.М. Іванова).**

Проведено повну групову класифікацію класу узагальнених телеграфних рівнянь вигляду $f(x)u_{tt} = (H(u)u_x)_x + K(u)u_x$ та побудовано широкі класи їх точних розв'язків. Для цього класу вивчено допустимі точкові перетворення та узагальнені неklasичні (умовні) симетрії. З точністю до групи еквівалентності даного класу, прокласифіковано його локальні закони збереження з характеристиками нульового порядку

(**Н.М. Іванова**).

На прикладі рівнянь Фоккера–Планка та Бюргерса досліджено застосування різних типів відношень еквівалентності до побудови законів збереження та потенціальних симетрій для (систем) диференціальних рівнянь з частинними похідними. Використовуючи звідність цих рівнянь до одновимірного рівняння теплопровідності, побудовано повні ієрархії їх локальних та потенціальних законів збереження та описано їх потенціальні симетрії (**Н.М. Іванова, Р.О. Попович**).

За допомогою прямого метода та композиційного варіаційного принципу побудовано локальні закони збереження для n -вимірних рівнянь конвекції–дифузії вигляду $u_t = (A(u))_{ii} + (B^i(u))_i$. Досліджено дію груп еквівалентності та симетрій на знайдені простори законів збереження (**Н.М. Іванова**).

Проведено класифікацію локальних та потенціальних симетрій та законів збереження для таких n -вимірних радіальних нелінійних рівнянь: хвильове рівняння, рівняння Шрьодінгера та його модифікації з нелінійністю, що залежить від похідної, двох радіальних узагальнень рівняння Кортевега–де Фріза та їх гамільтонових варіантів. Вказано всі класи таких рівнянь, що допускають ділатаційні енергії, конформні енергії та інверсії. Описано норми енергій, H^s -норми, що зберігаються, критичні степені для розв’язків з загостреннями та одновимірні оптимальні групи симетрій для інваріантних розв’язків (**Н.М. Іванова**).

Проведено повну групову класифікацію класів $(2 + 1)$ - та $(3 + 1)$ -вимірних нелінійних рівнянь конвекції–дифузії та систем двох рівнянь дифузії із зачепленою матрицею дифузії. Отримані результати використано для побудови редукцій та точних інваріантних розв’язків розглянутих рівнянь (**Н.М. Іванова**).

Отримано нові та систематизовано і зібрано вже відомі ліївські та неліївські точні розв’язки різних $(1 + 1)$ -вимірних рівнянь конвекції–дифузії вигляду $f(x)u_t = (g(x)A(u)u_x)_x + h(x)B(u)u_x$ (**Н.М. Іванова**).

Прокласифіковано локальні закони збереження першого порядку для системи нелінійних рівнянь дифузії із зачепленою матрицею дифузії. Отримані закони збереження використано для побудови множини нееквівалентних потенціальних систем. Проведено групову класифікацію чотирьох з отриманих потенціальних систем і побудовано нові потенціальні симетрії. Наведено приклад редукції системи рівнянь дифузії за оператором потенціальної симетрії. Лінеаризовано нелінійну модель фізики плазми за допомогою нескінченновимірної алгебри потенціальних симетрій (**Н.М. Іванова**).

Досліджено закони збереження та потенціальні симетрії лінійних $(1+1)$ -вимірних параболічних рівнянь другого порядку. Показано, що всі потенціальні закони збереження еквівалентні локальним. Запропоновано конструктивний критерій існування потенціальних симетрій. Проведено попередній аналіз узагальнених потенціальних симетрій та повний груповий аналіз найпростіших потенціальних симетрій лінійного рівняння теплопровідності (**Н.М. Іванова, Р.О. Попович**).

Для $(1+3)$ -вимірного рівняння Бюргерса $u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + uu_x$ побудовано всі можливі ліївські редукції та розв'язки за нееквівалентними 1-, 2- та 3-вимірними підалгебрами його максимальної алгебри симетрій Лі. Для деяких класів рівнянь Бюргерса (зокрема, класичне одновимірне рівняння) отримано нові неліївські точні розв'язки (**Н.М. Іванова**).

Прокласифіковано всі можливі локальні симетрії класу рівнянь реакції-дифузії вигляду $u_t = u_{xx} + k(x)u^2(1 - u)$. Ліївські симетрії використано для редукції рівнянь реакції-дифузії до звичайних диференціальних рівнянь (**Н.М. Іванова**).

Проведено повну групову класифікацію класу $(1+2)$ - і $(1+3)$ -вимірних рівнянь Бюргерса з коефіцієнтами, що залежать від часу та побудовано їх точні розв'язки (**Н.М. Іванова**).

Уточнено процедуру побудови потенціальних систем для систем диференціальних рівнянь, що допускають багатовимірні простори законів

збереження (Н.М. Іванова).

Проведено повну групову класифікацію класу нелінеарізованих еволюційних рівнянь, що мають застосування у фінансовій математиці. У випадках, коли дозволяє алгебра симетрій, знайдено розв'язки початкових задач вигляду $u(0, x) = U$, де U — довільна стала. Додатково, побудовано можливі ліівські редукції та розв'язки за нееквівалентними підалгебрами максимальних алгебр симетрій Лі (Н.М. Іванова).

3 Нерозкладні представлення однорідної групи Галілея

Задача опису скінченновимірних нерозкладних представлень однорідної групи Галілея є дикою задачею лінійної алгебри. Але виявилось, що ця задача допускає точний розв'язок у важливих частинних випадках, коли ці представлення реалізуються на спінових та векторних полях. Це означає, що при редукції представлень групи Галілея по її максимальній компактній підгрупі (групі обертань) можуть виникати тільки такі незвідні представлення, що відповідають спіновим та векторним представленням цієї підгрупи.

У роботах [28, 34, 35] побудовані нерозкладні представлення однорідної групи Галілея у просторах спінових та векторних полів. Показано, що задача опису таких представлень може бути зведена до наступної задачі лінійної алгебри

$$A^2 + BC = 0, \quad CA = 0, \quad AB = 0, \quad (3.1)$$

де A, B і C — матриці розмірності $n \times n$, $n \times m$ та $m \times n$ відповідно.

Нерозкладні розв'язки задачі (3.1) нумеруються трійками цілих чисел n, m, λ де n та m приймають значення

$$-1 \leq (n - m) \leq 2, \quad n \leq 3, \quad (3.2)$$

де

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{if } m = 0, \\ 1 & \text{if } m = 2 \text{ or } n - m = 2, \\ 0, 1 & \text{if } m = 1, n \neq 3. \end{cases} \quad (3.3)$$

Відповідні базисні елементи нерозкладних представлень алгебри Галілея мають вигляд

$$S_a = \begin{pmatrix} I_{n \times n} \otimes s_a & \cdot \\ \cdot & \mathbf{0}_{m \times m} \end{pmatrix}, \quad \eta_a = \begin{pmatrix} A \otimes s_a & B \otimes k_a^\dagger \\ C \otimes k_a & \mathbf{0}_{m \times m} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

де $I_{n \times n}$ та $\mathbf{0}_{m \times m}$ — одиничні та нульові матриці розмірності $n \times n$ та $m \times m$ відповідно, s_a ($a = 1, 2, 3$) — матриці розмірності 3×3 , що є генераторами представлення $D(1)$ групи обертань:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$k_1 = (i, 0, 0), \quad k_2 = (0, i, 0), \quad k_3 = (0, 0, i). \quad (3.6)$$

Відповідні скінчені перетворення Галілея для представлень $D(n, m, \lambda)$ мають вигляд:

Представлення $D(0, 0, 0)$:

$$\psi \rightarrow e^{imf} \psi, \quad (3.7)$$

де $f = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}^2 t / 2$. Такі перетворення зберігають квадратичну форму $I_1 = \psi^* \psi$.

- $D(1, 0, 0)$: Галілеївські 3-вектори $\mathbf{R} = \text{column}(R_1, R_2, R_3)$ перетворюються як

$$\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \cos \theta + \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{R}}{R} \sin \theta + \frac{\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{R})}{\theta^2} (1 - \cos \theta),$$

при обертаннях системи координат, а перетворення Галілея мають вигляд

$$\mathbf{R} \rightarrow e^{imf} \mathbf{R}. \quad (3.8)$$

Відповідна інваріантна форма має вигляд $I_2 = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}$.

- $D(1, 1, 0)$: Простір представлення утворюють галілеївські 4-вектори $\Psi_4 = (\mathbf{U}, \psi)$, де $\mathbf{U}$ — вектор і ψ — скаляр відносно обертань. Відповідні перетворення Галілея мають вигляд

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &\rightarrow e^{imf}(\mathbf{U} + \mathbf{v}\psi), \\ \psi &\rightarrow e^{imf}\psi.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Відповідна інваріантна форма має вигляд $I_1 = \psi^*\psi$.

- $D(1, 1, 1)$: Простір представлення утворюють галілеївські 4-вектори $\tilde{\Psi}_4 = (\mathbf{R}, B)$. Відповідні перетворення Галілея та інваріант мають вигляд

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &\rightarrow e^{imf}\mathbf{R}, \\ B &\rightarrow e^{imf}(B + \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}),\end{aligned}\tag{3.10}$$

$I_2 = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}$.

- $D(1, 2, 1)$: Простір представлення утворюють галілеївські 5-вектори $\Psi_5 = (\psi, \mathbf{U}, C)$, де ψ та C є скалярами і $\mathbf{U}$ — вектором відносно обертань. Відповідні перетворення Галілея та інваріант мають вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{\psi} &\rightarrow e^{imf}\tilde{\psi}, \\ \mathbf{U} &\rightarrow e^{imf}(\mathbf{U} + \mathbf{v}\psi), \\ C &\rightarrow e^{imf}(C + \mathbf{v} \cdot \mathbf{U} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\psi),\end{aligned}\tag{3.11}$$

$I_2 = \psi^*\psi$, $I_3 = \psi^*C + \psi C^* - \mathbf{U}^*\mathbf{U}$.

- $D(2, 0, 0)$: Простір представлення утворюють галілеївські 6-вектори $\Psi_6 = (\mathbf{R}, \mathbf{W})$, відповідні перетворення Галілея та інваріанти мають вигляд:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &\rightarrow e^{imf}\mathbf{R}, \\ \mathbf{W} &\rightarrow e^{imf}(\mathbf{W} + \mathbf{v} \times \mathbf{R}),\end{aligned}\tag{3.12}$$

$I_2 = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}$ and $I_4 = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{W} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}^*$.

- $D(2, 1, 0)$: Простір представлення утворюють галілеївські 7-вектори $\Psi_7 = (\mathbf{R}, \mathbf{W}, B)$, відповідні перетворення Галілея мають вигляд:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &\rightarrow e^{imf} \mathbf{R}, \\ B &\rightarrow e^{imf} (B + \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}), \\ \mathbf{W} &\rightarrow e^{imf} (\mathbf{W} + \mathbf{v} \times \mathbf{R})\end{aligned}\tag{3.13}$$

а інваріанти такі самі, як у попередньому випадку.

- $D(2, 1, 1)$: Простір представлення утворюють галілеївські 7-вектори $\tilde{\Psi}_7 = (\mathbf{K}, \mathbf{R}, \psi)$ відповідні перетворення Галілея та інваріанти мають вигляд:

$$\mathbf{K} \rightarrow e^{imf} (\mathbf{K} + \mathbf{v} \times \mathbf{R} + \mathbf{v}\psi), \tag{3.14}$$

$$\psi \rightarrow e^{imf} \psi, \quad \mathbf{R} \rightarrow e^{imf} \mathbf{R}, \tag{3.15}$$

$$I_1 = \psi^* \psi \text{ та } I_2 = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}.$$

- $D(2, 2, 1)$: Простір представлення утворюють галілеївські 8-вектори $\Psi_8 = (\mathbf{R}, \mathbf{K}, B, \psi)$, відповідні перетворення Галілея та інваріанти мають вигляд:

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{imf} \psi, \quad \mathbf{R} \rightarrow e^{imf} \mathbf{R}, \\ \mathbf{K} &\rightarrow e^{imf} (\mathbf{K} + \mathbf{v} \times \mathbf{R} + \mathbf{v}\psi), \\ B &\rightarrow e^{imf} (B + \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}),\end{aligned}\tag{3.16}$$

$$I_1 = \psi^* \psi, \quad I_2 = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R} \text{ and } I_5 = \psi^* B + \psi B^* - \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}^* - \mathbf{K}^* \cdot \mathbf{R}.$$

- $D(3, 1, 2)$: Простір представлення утворюють галілеївські 10-вектори $\Psi_{10} = (\mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathbf{N}, B)$ тобто три трьохвектора $\mathbf{R}, \mathbf{W}, \mathbf{N}$ і один скаляр B . відповідні перетворення Галілея та інваріанти мають вигляд:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &\rightarrow e^{imf} \mathbf{R}, \\ \mathbf{W} &\rightarrow e^{imf} (\mathbf{W} + \mathbf{v} \times \mathbf{R}), \\ \mathbf{N} &\rightarrow e^{imf} (\mathbf{N} + \mathbf{v} \times \mathbf{W} + \mathbf{v}B + \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}) - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \mathbf{R}), \\ B &\rightarrow e^{imf} (B + \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}),\end{aligned}\tag{3.17}$$

$$I_2 = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{R}, I_4 = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{W} + \mathbf{R} \cdot \mathbf{W}^*, I_6 = B^* B + \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}^* - \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}^* - \mathbf{N} \cdot \mathbf{R}^*.$$

На відміну від групи Лоренца, для якої існує два векторних представлення, для групи Галілея таких представлень виявилось дев'ять.

У роботах [34, 35, 116, 115, 113, 114] побудовані також усі можливі квазілінійні інваріантні рівняння, що відповідають знайденим представленням. Ці результати відкривають шлях до побудови різноманітних моделей частинок зі спіном 1, а також побудови представлень супергрупи Галілея.

4 Групова класифікація систем рівнянь дифузії

У роботах [37, 65, 66] завершено групову класифікацію систем нелінійних рівнянь дифузії наступного загального вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} - \Delta(a_{11}u_1 + a_{12}u_2) &= f^1(u_1, u_2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - \Delta(a_{21}u_1 + a_{22}u_2) &= f^2(u_1, u_2), \end{aligned} \tag{4.1}$$

де $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ — функції $m + 1$ незалежних змінних $t, x_1, x_2, \dots, x_m$, символи $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ позначають довільні дійсні параметри, Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^m$. Окрім довільних параметрів, рівняння (4.1) включають дві довільні функції від залежних змінних, а саме $f^1(u_1, u_2)$, та $f^2(u_1, u_2)$.

Рівняння (4.1) лежать в основі багатьох важливих моделей математичної фізики і математичної біології. Як частинні випадки вони включають рівняння Гінзбурга–Ландау, нелінійне рівняння Шрьодінгера та рівняння Тірінга. Задача групової класифікації рівнянь (4.1) полягає у знаходженні груп перетворень залежних та незалежних змінних, що зберігають їх форму. Ці групи будуть різними для різних довільних елементів, тому маємо підзадачу визначення класів довільних елементів, для

Табл. 4.1: Нелінійності та симетрії рівнянь (4.1).

No	Нелінійні члени	Аргументи F_1, F_2	Основні симетрії	Додаткові симетрії	ДПЕ (4.5)
1.	$f^1 = uF_1 + vF_2$ $-\nu z(\mu u + v),$ $f^2 = vF_1 - uF_2$ $+\nu z(u - \mu v),$ $R = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}},$ $z = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$	$Re^{\mu z}$	$e^{\nu t}(\mu R \partial_R - \partial_z)$	$\widehat{G}_\alpha$, if $\mu = a,$ $\nu \neq 0;$	2, if $\mu = 0$
				G_α , if $\mu = a,$ $\nu = 0$	
2.	$f^1 = e^{\mu z} R^\nu (\lambda u$ $-\sigma v),$ $f^2 = e^{\mu z} R^\nu (\lambda v$ $+\sigma u)$		$\nu D - u \partial_u - v \partial_v,$ $\mu D - u \partial_v + v \partial_u$	G_α if $\mu = a\nu$ & K if $\nu = \frac{4}{m}$	1, if $\nu = 0$

яких рівняння мають однакові групи симетрії. Ці класи визначаються з точністю до перетворень еквівалентності, які в свою чергу можуть залежати від форми довільних елементів.

Таким чином, задача групової класифікації систем (4.1) є дуже складною і водночас важливою проблемою, розв'язок якої створює теоретико-групове підґрунтя для широкого класу проблем математичної фізики. У роботах [37, 65, 66] наведено завершену групову класифікацію таких систем. У цьому звіті ми наведемо тільки частину результатів класифікації, а саме, повну класифікацію узагальнених рівнянь Гінзбурга–Ландау, що відповідають матриці дифузії наступного спеціального вигляду:

$$a_{11} = a_{22} = a, \quad a_{21} = -a_{12} = 1 \quad (4.2)$$

де a — довільний параметр. Результати будуть надані з точністю до перетворень еквівалентності $U \rightarrow \tilde{U} = G(U, t, x)$, $t \rightarrow \tilde{t} = T(U, t, x)$, $x \rightarrow \tilde{x} = X(U, t, x)$ and $f \rightarrow \tilde{f} = F(U, t, x, f)$, що зберігають загальну

форму рівнянь. У загальному випадку ці перетворення мають вигляд

$$\begin{aligned} u_a &\rightarrow K^{ab}u_b + b_a, & f^a &\rightarrow \lambda^2 K^{ab}f^b, \\ t &\rightarrow \lambda^{-2}t, & x_a &\rightarrow \lambda^{-1}x_a \end{aligned} \quad (4.3)$$

де

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & -K_2 \\ K_2 & K_1 \end{pmatrix}, \quad K_1^2 + K_2^2 \neq 0, \quad (4.4)$$

b_a , λ , K_1 та K_2 — довільні дійсні константи. Для деяких класів довільних елементів $f^1(u_1, u_2)$, та $f^2(u_1, u_2)$ можливі більш загальні перетворення, що включають наступні додаткові перетворення еквівалентності (ДПЕ):

$$\begin{aligned} 1. & u \rightarrow \exp(\omega t)u, \quad v \rightarrow \exp(\omega t)v, \\ 2. & u \rightarrow u \cos \omega t - v \sin \omega t, \quad v \rightarrow v \cos \omega t + u \sin \omega t, \\ 3. & u \rightarrow \exp(\omega t)u, \quad v \rightarrow v + \omega \frac{t^2}{2}, \\ 4. & u \rightarrow u + \omega t + \nu x^2, \quad v \rightarrow v, \\ 5. & u \rightarrow u, \quad v \rightarrow v + \omega t + \nu x^2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

При будь яких функціях f_1 та f_2 рівняння (4.1) допускають групу $E(n)$, перетворення якої мають вигляд

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad x_\mu \rightarrow x'_\mu = R_{\mu\nu}x_\nu + b_\mu, \quad (4.6)$$

де a , b_μ та $R_{\mu\nu}$ — довільні дійсні параметри, що задовольняють умову $R_{\mu\nu}R_{\mu\lambda} = \delta_{\mu\lambda}$. Для деяких спеціальних нелінійностей ця симетрія розширюється. Результати симетрійної класифікації наведено в наступних таблицях 4.1–4.3.

Тут (і надалі) G_μ , $\hat{G}_\mu$, K та D — генератори однопараметричних груп перетворень:

$$\begin{aligned} K &= 2t(t\partial_t + x_\mu\partial_{x_\mu}) - \frac{x^2}{2}(A^{-1})^{ab}u_b\partial_{u_a} - tm u_a\partial_{u_a}, \\ G_\mu &= t\partial_{x_\mu} + \frac{1}{2}x_\mu(A^{-1})^{ab}u_b\partial_{u_a}, \\ \hat{G}_\mu &= e^{\gamma t} \left(\partial_{x_\mu} + \frac{1}{2}\gamma x_\mu(A^{-1})^{ab}u_b\partial_{u_a} \right), \\ D &= t\partial_t + \frac{1}{2}x_\mu\partial_{x_\mu} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Табл. 4.2: Нелінійності та симетрії рівнянь (4.1).

No	Нелінійні члени	Аргу- менти F_α	Симетрії	ДПЕ (4.5)
1.	$f^1 = u^{\nu+1}F_1,$ $f^2 = u^{\nu+1}F_2$	$\frac{v}{u}$	$\nu D - u\partial_u - v\partial_v$	1, if $\nu = 0$
2.	$f^1 = \nu u + F_1,$ $f^2 = -\mu u + F_2$	v	$e^{(\nu+a\mu)t}\Psi_\mu(x)\partial_u$	
3.	$f^1 = e^{\nu v}F_1,$ $f^2 = e^{\nu v}F_2$	u	$\nu D - \partial_v$	
4.	$f^1 = u(F_1 + \varepsilon \ln u),$ $f^2 = v(F_2 + \varepsilon \ln u)$	$\frac{v}{u}$	$e^{\varepsilon t}(u\partial_u + v\partial_v)$	
5.	$f^1 = e^{\nu z}(uF_1 + vF_2),$ $f^2 = e^{\nu z}(uF_2 - vF_1)$	$Re^{\mu z}$	$\mu D + R\partial_R + \partial_z$	
6.	$f^1 = \lambda, f^2 = \varepsilon \ln u$		$D + u\partial_u + v\partial_v + \varepsilon t\partial_v,$ $\tilde{\psi}_0\partial_v$	3, 5
7.	$f^1 = \lambda v^{\nu+1},$ $f^2 = \sigma v^{\nu+1}$		$\nu D - u\partial_u - v\partial_v,$ $\Psi_0(x)\partial_u$	4
8.	$f^1 = \lambda e^v, f^2 = \sigma e^v$		$D - \partial_v, \Psi_0(x)\partial_u$	4
9.	$f^1 = \mu \ln v,$ $f^2 = \nu \ln v$		$\Psi_0(x)\partial_u, D + u\partial_u + v\partial_v$ $+ ((\mu - \nu a)t - \frac{\nu}{2m}x^2)\partial_u$	4

де A — матриця, елементи якої задані формулою (4.2), $\Psi_\mu(x)$ and $\psi_\mu = \psi_\mu(t, x)$ — довільні розв'язки рівняння Лапласа та рівняння теплопровідності:

$$\Delta \Psi_\mu = \mu \Psi_\mu, \quad \partial_t \psi_\mu - \Delta \psi_\mu = \mu \psi_\mu.$$

Відмітимо, що таблиця 4.1 включає результати класифікації рівняння Гінзбурга–Ландау як частинний випадок, що міститься у пункті 2 при $\mu = 0$.

Табл. 4.3: Симетрії рівнянь (4.1) з нелінійностями $f^1 = (\mu u - \sigma v) \ln R + z(\lambda u - \nu v)$, $f^2 = (\mu v + \sigma u) \ln R + z(\lambda v + \nu u)$.

No	Умови на коефіцієнти	Основні	Додаткові симетрії
1	$\lambda = 0,$ $\mu = \nu$	$e^{\mu t} \partial_z,$ $e^{\mu t} (R \partial_R + \sigma t v \partial_v)$	$\hat{G}_\alpha$ if $a\sigma = 0,$ $\mu \neq 0$
			G_α if $\sigma \neq 0,$ $a = \nu = 0$
2	$\lambda = 0,$ $\mu \neq \nu,$	$e^{\nu t} \partial_z,$ $e^{\mu t} (\sigma \partial_z + (\mu - \nu) R \partial_R)$	$\hat{G}_\alpha$ if $a\sigma = \nu - \mu$ чи $a = 0, \mu \neq 0$
			G_α if $a\sigma = \nu, \mu = 0$
3	$\delta = \lambda\sigma$ $+\frac{1}{4}(\mu - \nu)^2$ $= 0,$ $\mu + \nu = 2\omega_0$ $\lambda \neq 0$	$X_3 = e^{\omega_0 t} (2\lambda R \partial_R$ $+ (\nu - \mu) \partial_z),$ $2e^{\omega_0 t} \partial_z + tX_3$	$\hat{G}_\alpha$ if $\omega_0 \neq 0$ $a(\mu - \nu) = 2\lambda$
			G_α if $a\nu = -\lambda,$ $\omega_0 = 0$
4	$\lambda \neq 0,$ $\delta = 1$ $\omega_\pm = \omega_0 \pm 1$	$e^{\omega_+ t} (\lambda R \partial_R + (\omega_+ - \mu) \partial_z),$ $e^{\omega_- t} (\lambda R \partial_R + (\omega_- - \mu) \partial_z)$	$\hat{G}_\alpha$ if $\mu\nu \neq \lambda\sigma,$ $\lambda = a(\mu$ $-\nu + a\sigma)$
			G_α if $\nu\mu = \lambda\sigma,$ $\lambda = a\mu$
5	$\delta = -1$	$\exp(\omega_0 t) [2\lambda \cos t R \partial_R$ $+ ((\nu - \mu) \cos t - 2 \sin t) \partial_z],$ $\exp(\omega_0 t) [2\lambda \sin t R \partial_R$ $+ ((\nu - \mu) \sin t + 2 \cos t) \partial_z]$	none

5 Моделі Черна–Саймона у 1+3-вимірному просторі Мінковського

У цьому підрозділі наведено результати роботи [139], де запропоновано та досліджено релятивістську версію моделі Черна–Саймона у чотори-

вимірному просторі Мінковського. Ця модель включає як частинний випадок модель Керола–Філда–Яцківа, яка була створена для перевірки можливості порушення Лоренц-інваріантності, яке неможливо помітити у фізичних експериментах. За допомогою контракції Іноню–Вігнера знайдено нерелятивістську границю запропонованої моделі.

Як добре відомо, поле Черн–Саймона існує тільки у 1+2-вимірному просторі Мінковського, а його узагальнення побудовано тільки для просторів з парною кількістю просторових змінних. Неможливість побудови аналога моделі Черна–Саймона у реалістичному 1+4-вимірному просторі здається майже очевидною, оскільки у цьому просторі не існує відповідних інваріантів, які залежать від потенціалів та тензорів електромагнітного поля.

Незважаючи на це, нам вдалося побудувати релятивістське узагальнення моделі Черна–Саймона для випадку 1+4-вимірного простору-часу. Цього вдалося досягти завдяки введенню розширеного потенціального поля, яке задається п'яти-компонентними векторами. Наша модель включає модель Керола–Філда–Яцківа як частинний випадок, що відповідає певному підкласу розв'язків, обмежений додатковою умовою, має добре визначену нерелятивістську границю і має фізично змістовними розв'язки.

5.1 Модельні рівняння

Будемо виходити з наступної системи рівнянь, яка включає вектори напруги електричного поля $\mathbf{E}$, магнітної індукції $\mathbf{B}$, чотирьохвектор струму $j = (j^0, j^1, j^2, j^3)$ та додаткове поле $F = (F^0, F^1, F^2, F^3)$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{B} + ej_0,$$

$$\partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} = \lambda(F^0 \mathbf{B} - \mathbf{F} \times \mathbf{E}) + e\mathbf{j},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0,$$

$$\begin{aligned}\partial_t F^0 - \nabla \cdot \mathbf{F} &= \lambda \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + e j_4, \\ \partial_\mu F^\nu - \partial_\nu F^\mu &= 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Ми використовуємо векторні позначення $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ та $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, e та λ позначають електричний заряд та деяку нову константу взаємодії.

У випадку $\mathbf{F} = F^0 = 0$ система (5.1) редукується до звичайних рівнянь Максвелла (при цьому останнє з рівнянь (5.1) може інтерпретуватися просто як позначення для інваріанта $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = j^4$).

5.2 Лагранжове формулювання та закони збереження

Неважко переконатися, що система (5.1) утворена рівняннями Лагранжа–Ейлера. Відповідний лагранжиан має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + F^\nu F_\nu + \\ &+ \lambda \left(\frac{1}{2} A^4 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} + A^0 \varepsilon_{abc} F_a F_{bc} + F_0 \varepsilon_{abc} A_a F_{bc} \right),\end{aligned}\tag{5.2}$$

де

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_\mu = \partial_\mu A^4, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad a, b, c = 1, 2, 3,$$

а A_μ та A^4 — векторний та скалярний потенціали, що є функціями від x_μ , $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$.

Подібно до лагранжіану Черна–Саймона, лагранжиан (5.2) включає члени, що є добутками полів (у нашому випадку це $F^{\mu\nu}$ та F^μ) та потенціалів (у нашому випадку це A^μ та A^4). Він є релятивістським скаляром, і відповідні рівняння Лагранжа–Ейлера

$$\frac{\partial L}{\partial A^k} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A^k}{\partial x_\mu} \right)} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

дійсно співпадають з (5.1).

Згідно з теоремою Ньотер, інваріантність лагранжиана (5.2) відносно групи Лоренца породжує кілька законів збереження, найважливішими з яких є закони збереження енергії та імпульсу. У випадку лагранжiana (5.2) (де $J^k = 0$) тензор енергії-імпульсу набуває вигляду

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + F_0^2 + \mathbf{F}^2), \quad T^{0a} = T^{a0} = \varepsilon_{abc} E_b B_c + F^0 F^a, \\ T^{ab} &= -E^a E^b - B^a B^b + p^a p^b + \frac{1}{2} \delta^{ab} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + F_0^2 - \mathbf{F}^2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Відповідні густина енергії $\mathcal{E}$ та імпульсу $\mathcal{P}$ мають форму:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + F_0^2 + \mathbf{F}^2, \quad \mathcal{P} = \mathbf{B} \times \mathbf{E} + F^0 \mathbf{F}.$$

Іншими словами, *енергія та імпульс електромагнітного поля, що описується узагальненими рівняннями Максвелла (5.1), не залежать від константи взаємодії λ .*

Можна переконатися, що аналогічне твердження справедливе і для усіх інших законів збереження, притаманних системі (5.1).

Саме ця властивість (тобто незалежність енергії та імпульсу від взаємодії), разом із спеціальною формою лагранжиана, що включає добутки полів та потенціалів, характеризує модель Черна–Саймона. Тому є певні підстави вважати (5.2) узагальненням лагранжиана Черна–Саймона. Але на відміну від моделі Черна–Саймона, наша модель визначена у 1+4-вимірному просторі Мінковського і тому може виявитись навіть більш фізичною.

5.3 Точні розв'язки

Завдяки широкій симетрії, рівняння (5.1) мають досить широкі класи точних розв'язків. Регулярну процедуру для пошуку таких розв'язків створив Софус Лі ще наприкінці 19 сторіччя. Наведемо один з таких розв'язків.

Розглянемо систему (5.1) без токів та зарядів і покладемо там $\lambda = 0$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{B},$$

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{B} &= F^0 \mathbf{B} - \mathbf{F} \times \mathbf{E}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \partial_t F^0 - \nabla \cdot \mathbf{F} &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \\ \partial_\mu F^\nu - \partial_\nu F^\mu &= 0.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Будемо шукати розв'язки, інваріантні відносно обертань. Відповідна заміна змінних виглядає так:

$$\begin{aligned}A^4 &= A^4(t, r), \quad A^0 = A^0(t, r), \quad \mathbf{A} = \mathbf{x}f + \mathbf{x} \times \mathbf{g}, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{g} &= 0, \quad f = f(t, r), \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}(t, r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},\end{aligned}$$

а редуковані рівняння (5.5) набувають вигляду

$$\begin{aligned}3f_t + rf_{tr} - \frac{2}{r}A_r^0 - A_{rr}^0 &= 0, \\ \mathbf{x} \left(f_{tt} - \frac{1}{r}A_{tr}^0 \right) + \mathbf{x} \times \left(\mathbf{g}_{tt} + \frac{4}{r}\mathbf{g}_r + \mathbf{g}_{rr} \right) &= -2\mathbf{g}A_t^4 + \\ &+ \frac{\mathbf{x}}{r} \left(A_t^4(\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}_r) - A_r^4(\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}_t) \right) + r \left(A_r^4 \cdot \mathbf{g}_t + A_t^4 \cdot \mathbf{g}_r \right), \\ 2\mathbf{g}_t + r \cdot \mathbf{g}_{tr} - \frac{\mathbf{x}}{r}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{g}_{tr}) &= 0, \\ A_{rr}^4 + \frac{2}{r}A_r^4 - A_{tt}^4 &= k(2\mathbf{g} + r \cdot \mathbf{g}_r)(\mathbf{x} \times \xi_t), \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{g} &= 0,\end{aligned}\tag{5.6}$$

де нижні індекси позначають похідні по відповідних змінних.

Розв'язавши рівняння (5.6), дістаємо такі вирази для полів:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\frac{\mathbf{x}}{r^3} (f(r-t) + g(r+t)) + \frac{\mathbf{x}}{r^2} \left(\dot{f}(r-t) + \dot{g}(r+t) \right), \\ F^0 &= \frac{1}{r} \left(-\dot{f}(r-t) + \dot{g}(r+t) \right), \\ \mathbf{B} &= 0, \quad \mathbf{E} = C_1 \frac{\mathbf{x}}{r^3},\end{aligned}$$

де $f(r-t)$ і $g(r+t)$ — довільні функції змінних, наведених у дужках.

Ми бачимо, що поле точкового заряду $\mathbf{E} = C_1 \frac{\mathbf{x}}{r^3}$ виникає у нашій моделі так само природно, як і в теорії Максвела. Відповідне поле F визначається з точністю до двох довільних функцій.

5.4 Контракція до нерелятивістської границі

Добре відомо, що при побудові нерелятивістської границі треба дбати про те, щоб група симетрії релятивістської теорії (тобто група Пуанкаре) переходила у нерелятивістську групу симетрії, тобто у групу Галілея. Іншими словами, нерелятивістську границю доцільно будувати за допомогою контракції Іноню–Вігнера, яка була запропонована ще у 1953 році саме як регулярна процедура, що робить перехід до такої границі у коректний спосіб.

У найпростішому формулюванні контракція є процедурою переходу до границі, яка трансформує N -вимірну алгебру $\mathcal{L}$ з комутаційними відношеннями $[x, y] = \dots$ у неізоморфну N -вимірну алгебру $\mathcal{L}'$ у такий спосіб, що комутаційні відношення для контрагованої алгебри $\mathcal{L}'$ мають вигляд

$$[x, y]' \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} W_\varepsilon^{-1}([W_\varepsilon(x), W_\varepsilon(y)]), \quad (5.7)$$

де $W_\varepsilon \in \text{GL}(N, k)$ — несингулярне лінійне перетворення базису у $\mathcal{L}$, яке має сингулярну точку ε_0 для оберненого перетворення W_ε^{-1} .

У роботі [28] знайдено усі можливі контракції представлень групи Лоренца до векторних представлень групи Галілея. Використовуючи ці результати, ми отримали коректну границю рівнянь (5.1), які набули вигляду:

$$\begin{aligned} B_t - \nabla \mathbf{N} &= \lambda \mathbf{W} \cdot \mathbf{N} + ej^0, \\ \partial_t \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{W} &= \lambda (B \mathbf{W} + \mathbf{F} \times \mathbf{N}) = e \mathbf{j}, \\ \nabla \mathbf{R} &= \lambda \mathbf{R} \cdot \mathbf{W} + ej^4, \\ \partial_t \mathbf{W} + \nabla \times \mathbf{N} &= 0, \\ \partial_t \mathbf{F} - \nabla B &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{F} &= 0, \\ \nabla \mathbf{W} &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Рівняння (5.8) інваріантні відносно перетворень Галілея

$$t \rightarrow t' = t + a, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{b}, \quad (5.9)$$

якщо вектори $\mathbf{N}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{R}$ та скаляр B водночас перетворюються наступним чином:

$$\begin{aligned} B &\rightarrow B' = B + \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}, \\ \mathbf{R} &\rightarrow \mathbf{R}' = \mathbf{R}, \\ \mathbf{W} &\rightarrow \mathbf{W}' = \mathbf{W} + \mathbf{v} \times \mathbf{R}, \\ \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{N}' = \mathbf{N} + \mathbf{v} \times \mathbf{W} + \mathbf{v}B + \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}) - \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\mathbf{R}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Як і в релятивістському випадку, можна ввести п'ятикомпонентний вектор-потенціал $A = (A^0, \mathbf{A}, A^4)$, такий що

$$\mathbf{R} = \nabla A^4, \quad B = A_t^4, \quad \mathbf{W} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{N} = \mathbf{A}_t - \nabla A^0. \quad (5.11)$$

При цьому закон перетворень для A має вигляд:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A' = A, \\ A^4 &\rightarrow A^{4'} = A^4 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}, \\ A^0 &\rightarrow A^{0'} = A^0 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 A^4. \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.5 Лагранжіан та тензор енергії-імпульсу для нерелятивістської границі

Рівняння (5.8) мають досить широку симетрію і є рівняннями Лагранжа-Ейлера. Відповідний лагранжіан набуває вигляду:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2} (B^2 - \mathbf{W}^2) - \mathbf{N} \cdot \mathbf{R} + \nu(A^4 \mathbf{W} \cdot \mathbf{N} + A^0 \mathbf{R} \cdot \mathbf{W} - \\ - \mathbf{A} \cdot (\mathbf{W}B + \mathbf{R} \times \mathbf{N})) - e(A^4 j^0 + A^0 j^4 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Як і в релятивістському випадку, знаходимо відповідний тензор енергії-імпульсу:

$$\begin{aligned} T^0_0 &= \frac{1}{2}(B^2 + W_b W_b), \\ T^0_a &= \varepsilon_{abc} N_b W_c - B N_a, \\ T^a_0 &= B R_a + \varepsilon_{abc} R_b W_c, \\ T^a_b &= N_a R_b + N_b R_a - W_a W_b + \delta_{ab} \left(\frac{1}{2}(B^2 + W_n W_n) - R_n W_n \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Він задовольняє рівняння неперервності

$$\frac{\partial}{\partial t} T^\nu{}_0 + \frac{\partial}{\partial x_a} T^a{}_0 = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (5.15)$$

а відповідна густина енергії та імпульсу має вигляд

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(B^2 + \mathbf{W}^2), \quad \mathcal{P} = \mathbf{N} \times \mathbf{W} - B\mathbf{N}. \quad (5.16)$$

Знову, як у нерелятивістському випадку, енергія та імпульс не залежать від константи взаємодії, тобто енергія вільного поля співпадає з енергією при наявності взаємодії.

Таким чином, нами знайдено та досліджено аналог моделі Черна–Саймона у 1+4-вимірному просторі Мінковського. Побудована модель є релятивістськи інваріантною, більш того, вона допускає розширену групу Пуанкаре що включає також дилатацію.

6 Точно розв'язна модель для нейтральних ферміонів з квадрупольною взаємодією

У цьому підрозділі наведено результати роботи [132] де знайдено новий точний розв'язок рівняння Дірака для нейтрона, що рухається у електромагнітному полі, породженому зарядженим тонким дротом з постійним струмом. Показано, що така система може мати зв'язані стани і знайдено відповідний спектр енергій.

Точні розв'язки релятивістських хвильових рівнянь є в одночас досить рідкими та дуже важливими. По-перше, такі розв'язки вільні від невизначеностей, притаманних наближеним розв'язкам, по друге, вони задані у явній формі, що робить їх зручними для застосування як базису для розкладу розв'язків інших моделей.

6.1 Формулювання задачі

У роботі [132] знайдено точний розв'язок наступного рівняння Дірака–Паулі:

$$(\gamma^\mu \pi_\mu - m - \lambda S^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \psi = 0 \quad (6.1)$$

де γ^μ — матриці Дірака, $\pi_\mu = p_\mu - eA_\mu$, $p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$,

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu),$$

A_μ — компоненти вектор-потенціала зовнішнього електромагнітного поля, які ми вибрали у вигляді

$$A_0 = A_3 = \omega \log(x), \quad A_1 = A_2 = 0.$$

Саме такий потенціал відповідає полю, породженому нескінченним зарядженим дротом, що несе постійний струм, при умові, що густина заряду ρ дорівнює густині струму j , тобто

$$j = \rho = \omega/2.$$

Ми використовуємо наступну спеціальну реалізацію матриць Дірака:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ I & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -I & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \gamma^\alpha = i \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sigma_\alpha \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

де $\alpha = 1, 2$, σ_α — матриці Паулі, $\mathbf{0}$ та I — 2×2 нульові та одиничні матриці розмірності 2×2 . Тоді

$$S^{0\alpha} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_\alpha \\ -\sigma_\alpha & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad S^{3\alpha} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_\alpha \\ \sigma_\alpha & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Наші рівняння є однорідними відносно суми незалежних змінних $x_0 + x_3$. Тому зручно записати його у змінних світлового конуса

$$\tau = \frac{1}{2}(x_0 - x_3), \quad \xi = \frac{1}{2}(x_0 + x_3).$$

В результаті ми отримуємо:

$$L\psi \equiv (\tilde{\gamma}_\mu \tilde{\pi}^\mu - m - \lambda \eta_\alpha F_\alpha) \psi = 0 \quad (6.4)$$

where $F_\alpha = \frac{\omega x_\alpha}{x^2}$, $\alpha = 1, 2$, $x^2 = x_1^2 + x_2^2$,

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_0 &= \gamma_0 + \gamma_3, \quad \tilde{\gamma}_3 = \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_3), \quad \tilde{\gamma}_\alpha = \gamma_\alpha, \\ \eta_\alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_0 \gamma_\alpha + \gamma_3 \gamma_\alpha), \quad \tilde{\pi}_0 = i \frac{\partial}{\partial \tau} - 2e\varphi, \\ \tilde{\pi}_3 &= 2P_3 = 2i \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \tilde{\pi}_\alpha = p_\alpha = -i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \end{aligned} \quad (6.5)$$

і ведеться сумування по індексах μ та α по значенням $\mu = 0, 1, 2, 3$ та $\alpha = 1, 2$ відповідно.

Оператор P_3 комутує з L , тому зручно розкласти розв'язки по власним векторам ψ_M цього оператора:

$$P_3 \psi_M = M \psi_M \Rightarrow \psi_M = \exp(iM\xi) \psi(\tau, x_1, x_2). \quad (6.6)$$

Позначимо

$$\psi(\tau, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \rho(\tau, x_1, x_2) \\ \chi(\tau, x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

де ρ та χ — двокомпонентні спінори. Підставивши (6.6) та (6.7) до (6.4) отримуємо:

$$(i\sigma_\alpha p_\alpha - m) \rho + \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - 2e\omega \log x - \lambda \sigma_\alpha F_\alpha \right) \chi = 0, \quad (6.8)$$

$$2M\rho - (i\sigma_\alpha p_\alpha + m)\chi = 0. \quad (6.9)$$

Будемо шукати розв'язки рівнянь (6.8), (6.9), які є квадратично інтегровними та прямують до нуля при $x \rightarrow 0$. Можна показати, що тоді $M \neq 0$. Розв'язавши (6.9) відносно ρ при умові $M \neq 0$ і підставивши вираз для ρ до рівняння (6.8) дістаємо:

$$i \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \left(\varepsilon_0 + \frac{p^2}{2M} + 2e\omega \log x + \lambda \sigma_\alpha F_\alpha \right) \chi, \quad (6.10)$$

де $\varepsilon_0 = \frac{m^2}{2M}$ and $p^2 = p_1^2 + p_2^2$.

У випадку $e = 0$ рівняння (6.10) виявляється інтегрованим. Наша задача полягає у знаходженні квадратично інтегровних розв'язків цього рівняння, що відповідають дискретному спектру відповідного гамільтоніану.

6.2 Спектр та власні вектори гамільтоніану

Завдяки симетрії відносно обертань у площині 1-2 та відносно зсувів по τ рівняння (6.10) допускає розв'язки з розділеними змінними:

$$\chi_{\varepsilon k} = \exp(-i\varepsilon\tau) \frac{1}{\sqrt{r}} \begin{pmatrix} \exp(i(k - \frac{1}{2})\theta)\phi_1 \\ \epsilon \exp(i(k + \frac{1}{2})\theta)\phi_2 \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

де функції ϕ_1 та ϕ_2 залежать від інваріантної змінної r так що $x_1 = x \cos \theta$, $x_2 = x \sin \theta$, $r = 2M|\tilde{\lambda}|x$, $\epsilon = \frac{\tilde{\lambda}}{|\tilde{\lambda}|}$, $\tilde{\lambda}$ — нормуючий параметр.

Підставивши (6.11) у (6.10), дістаємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$H_k \phi \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k(k - \sigma_3) \frac{1}{r^2} + \sigma_1 \frac{1}{r} \right) \phi = \tilde{\varepsilon} \phi, \quad (6.12)$$

де ми поклали $e = 0$ та $\tilde{\lambda} = \omega\lambda$. Тут

$$\tilde{\varepsilon} = (\varepsilon - \varepsilon_0)/2M\omega\lambda^2. \quad (6.13)$$

Рівняння (6.12) вдається проінтегрувати використовуючи методи суперсиметричної квантової механіки. Це можливо тому, що це рівняння допускає суперсиметрію, причому гамільтоніан

$$H_k = \left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k(k - \sigma_3) \frac{1}{r^2} + \sigma_1 \frac{1}{r} \right), \quad (6.14)$$

є форм-інваріантним. А саме, його можна представити як добуток диференціальних операторів першого порядку:

$$H_k = a_k^+ a_k + C_k \quad (6.15)$$

де

$$a_k = \frac{\partial}{\partial r} + W_k, \quad a_k^+ = -\frac{\partial}{\partial r} + W_k, \quad C_k = -\frac{1}{(2k+1)^2},$$

а W є матричним суперпотенціалом

$$W_k = \frac{1}{2r}\sigma_3 - \frac{1}{2k+1}\sigma_1 - \frac{(k+\frac{1}{2})}{r}. \quad (6.16)$$

Легко перевірити, що

$$H_k^+ = a_k a_k^+ + C_k = -\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (k+1)(k+1-\sigma_3)\frac{1}{r^2} + \sigma_1\frac{1}{r},$$

тобто гамільтоніан-суперпартнер H_k^+ for H_k співпадає з H_{k+1} . Тому застосування методів суперсиметричної квантової механіки є доцільним.

Опускаючи технічні деталі, наведемо розв'язки рівняння (6.12) та відповідні власні значення. Нульовому власному значенню гамільтоніану (6.15) відповідають власні вектори

$$\phi_1(0, k; r) = r^{k+1} K_1 \left(\frac{r}{2k+1} \right), \quad \phi_2(0, k; r) = -r^{k+1} K_0 \left(\frac{r}{2k+1} \right), \quad (6.17)$$

де K_0 та K_1 — модифіковані функції Бесселя. Відповідне власне значення $\tilde{\varepsilon}_k$ у рівнянні (6.12) дорівнює $-\frac{1}{(2k+1)^2}$.

Власні вектори, що відповідають n -тому власному значенню, можна знайти з використанням співвідношення

$$\phi(n, k; r) = a_k^+ a_{k+1}^+ \cdots a_{k+n-1}^+ \phi(0, k+n; r), \quad n = 1, 2, \dots,$$

яке приводить до рекурентних формул

$$\begin{aligned} \phi_1(n, k; r) &= -\frac{\partial}{\partial r} \phi_1(n-1, k+1; r) - \frac{k}{r} \phi_1(n-1, k+1; r) \\ &\quad + \frac{1}{2k+1} \phi_2(n-1, k+1; r), \\ \phi_2(n, k; r) &= -\frac{\partial}{\partial r} \phi_2(n-1, k+1; r) - \frac{k+1}{r} \phi_2(n-1, k+1; r) \\ &\quad + \frac{1}{2k+1} \phi_1(n-1, k+1; r). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Відповідні власні значення задаються формулою

$$\tilde{\varepsilon} = -\frac{2(\omega\lambda)^2 M}{N^2},$$

де $N = 2(n + k) + 1$, n є невід'ємне натуральне число, k — напівціле число, що задає власне значення повного кутового моменту. Ці власні значення є виродженими з кратністю виродження $2k + 1$.

Власні значення гамільтоніану Дірака–Паулі, що відповідає нашій задачі, мають вигляд

$$E = \frac{m}{K + \tilde{\kappa}} + \kappa, \quad (6.19)$$

де κ — власні значення оператора зсуву вздовж третьої координати,

$$K = \sqrt{1 + \tilde{\kappa}^2 + \frac{\tilde{\lambda}^2}{N^2}}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{m}, \quad \tilde{\lambda} = 2\mu_0 g j. \quad (6.20)$$

Наведемо відповідні розв'язки вихідного рівняння:

$$\psi_{n,\kappa,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi L r}} \exp(-i(E x_0 - \kappa x_3)) \begin{pmatrix} \exp(i(k - \frac{1}{2})\theta) \eta_1(n, k; r) \\ \exp(i(k + \frac{1}{2})\theta) \eta_2(n, k; r) \\ \exp(i(k - \frac{1}{2})\theta) \phi_1(n, k; r) \\ \exp(i(k + \frac{1}{2})\theta) \epsilon \phi_2(n, k; r) \end{pmatrix}.$$

Тут

$$r = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{r_0}, \quad r_0 = \frac{1}{M|\tilde{\lambda}|} = \frac{K + \tilde{\kappa}}{m|\tilde{\lambda}|}, \quad \epsilon = \frac{\tilde{\lambda}}{|\tilde{\lambda}|},$$

де $\tilde{\kappa} = \kappa/m$, E , K and κ задаються рівняннями (6.19), (6.20), $\phi_1(n, k; r)$ and $\phi_2(n, k; r)$ — функції, задані рекурентними співвідношеннями (3.7), (6.18),

$$\begin{aligned} \eta_1(n, k; r) &= \tilde{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{k}{r} \right) \epsilon \phi_2(n, k; r) + (K + \tilde{\kappa}) \phi_1(n, k; r), \\ \eta_2(n, k; r) &= \tilde{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{k}{r} \right) \phi_1(n, k; r) + (K + \tilde{\kappa}) \epsilon \phi_2(n, k; r). \end{aligned}$$

Таким чином, знайдено точні розв'язки для зв'язаних станів нейтрона, що рухається у полі, створеному тонкою зарядженою ниттю з постійним струмом. Аналіз цих розв'язків дозволяє зробити висновок про принципову можливість експериментальної перевірки передбачень розглядуваної моделі. Відмітимо, що отримані результати мають певне відношення до проблеми безпеки ядерних реакторів.

7 Груповий аналіз у класах диференціальних рівнянь

Ця частина звіту присвячена теоретичним основам групового аналізу у класах (систем) диференціальних рівнянь. У п. 7.1 з симетричної точки зору проаналізовано базові поняття і об'єкти, асоційовані з системами диференціальних рівнянь та їх класами, а також розглянуто різні можливості для їх розвитку і узагальнення. Відображення між класами та їх потенційні застосування у класифікаційних задачах досліджено у п. 7.2. Ключове поняття нормалізованого класу систем диференціальних рівнянь, яке може стати основою для перебудови теорії групової класифікації і інших споріднених розділів групового аналізу, запропоновано і вивчено у п. 7.3. Нормалізаційні властивості класів $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь та систем таких рівнянь є предметом дослідження у п. 7.4.

Умовимося, що всі перетворення діють зліва. Термін “група точкових перетворень” використовуємо як скорочення для терміну “локальна (псевдо)група локально визначених точкових перетворень”. Області визначення і значень для відображень не вказані явно. Припустимо також, що всі функції є достатньо гладкими (як правило, дійсноаналітичними) на підхожих відкритих множинах.

7.1 Точкові перетворення у класах диференціальних рівнянь

Щоб створити міцне теоретичне підґрунтя для строгого введення поняття нормалізованих класів диференціальних рівнянь у п. 7.3, необхідно уважно переглянути основні поняття групового аналізу диференціальних рівнянь. Розпочнемо з аналізу базового поняття загального класу (систем) диференціальних рівнянь. Потім формалізуємо поняття точкових перетворень у таких класах і визначимо різні типи груп еквівалентності.

Також будуть строго сформульовані проблема групової класифікації у деякому класі диференціальних рівнянь, а також проблема класифікації допустимих перетворень. Це дає основу для розвитку методів групового аналізу з використанням поняття нормалізованих класів диференціальних рівнянь.

Системи диференціальних рівнянь. Нехай $\mathcal{L}$ — система $L(x, u_{(p)}) = 0$ l диференціальних рівнянь $L^1 = 0, \dots, L^l = 0$ для m невідомих функцій $u = (u^1, \dots, u^m)$ від n незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тут $u_{(p)}$ позначає множину всіх похідних функцій u по x порядку не вище p , включаючи u як похідну порядку нуль. Завжди вважаємо, що множина диференціальних рівнянь, які утворюють розглядувану систему, канонічно зображає цю систему і є мінімальною. Мінімальність множини рівнянь означає, що ніяке рівняння з цієї множини не є диференціальним наслідком інших рівнянь. Через $L_{(k)}$ позначимо максимальну множину алгебраїчно незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}$, що мають як диференціальні рівняння порядки не вище k . Ототожнимо $L_{(k)}$ з відповідною системою алгебраїчних рівнянь у $J^k(x|u)$ і пов'яжемо її з многовидом $\mathcal{L}_{(k)}$, визначеним цією системою.

Нагадаємо, що $J^k(x|u)$ — це простір струменів k -го порядку з незалежними змінними x і залежними змінними u . Гладку функцію, визначену на підмножині простору $J^k(x|u)$ для деякого k , тобто залежну від x і скінченної кількості похідних від u , називають диференціальною функцією від u . Позначення $H[u]$ вказує, що H — диференціальна функція від u .

Для того, щоб многовид $\mathcal{L}_{(k)}$ дійсно зображав систему $\mathcal{L}$ диференціальних рівнянь, система $\mathcal{L}$ повинна бути *локально розв'язною* у кожній точці многовиду $\mathcal{L}_{(k)}$. Для застосування леми Адамара до диференціальних функцій, що дорівнюють нулю на многовиді $\mathcal{L}_{(k)}$, потрібно, щоб система $L_{(k)}$ як система алгебраїчних рівнянь, визначених у просторі струменів $J^k(x|u)$, мала *максимальний ранг* у кожній точці многовиду $\mathcal{L}_{(k)}$.

Якщо для будь-якого k система $\mathcal{L}$ задовольняє обидві ці умови, то її називають *цілком невиродженою*. (Це означення трохи відрізняється від наведеного в монографії Олвера.)

Для певних цілей, наприклад, при дослідженні різних потенціальних і псевдо-потенціальних конструкцій замість поняття порядку зручно використовувати більш загальне поняття *ваги* диференціальних змінних, яке враховує структуру систем диференціальних рівнянь, що розглядаються. А саме, для кожної змінної простору струменів $J^\infty(x|u)$ нескінченного порядку (що є оберненою границею башти з просторів струменів $\{J^k(x|u), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ відносно канонічної проєкції $\pi^k: J^k(x|u) \rightarrow J^{k-1}(x|u), k \in \mathbb{N}$) визначимо її вагу ϱ за правилом:

$$\varrho(x_i) = 0, \quad \varrho(u_\alpha^a) = \varrho_a + |\alpha|.$$

Ваги $\varrho(u^a) = \varrho_a$ визначають з урахуванням структури системи $\mathcal{L}$. Надалі u_α^a позначає змінну в $J^\infty(x|u)$, відповідну похідній $\partial^{|\alpha|} u^a / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — довільний мультиіндекс, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Якщо $\varrho_a = 0$, то вага змінної u_α^a очевидно співпадає зі звичайним порядком похідної $|\alpha|$. У *навантажений простір струменів* $J_\varrho^k(x|u)$ включаємо змінні з вагами, не більшими, ніж k . Простір струменів нескінченного порядку $J^\infty(x|u)$ є оберненою границею башти навантажених просторів струменів $\{J_\varrho^k(x|u), k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ відносно канонічної проєкції $\pi_\varrho^k: J_\varrho^k(x|u) \rightarrow J_\varrho^{k-1}(x|u), k \in \mathbb{N}$.

Техніка роботи з вагами не відрізняється від техніки порядків, причому всі означення в термінах порядків можна переформулювати у термінах вагів. Так, вага $\varrho(H)$ будь-якої диференціальної функції $H[u]$ дорівнює максимальній вазі змінних, що явно виникають у H . Вага рівняння $H[u] = 0$ дорівнює $\varrho(H)$. Повна множина незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}$, які мають ваги не вище, ніж k , і асоційований многовид у $J_\varrho^k(x|u)$ позначимо символами $L_{[k]} = L_{[k]_\varrho}$ і $\mathcal{L}_{[k]} = \mathcal{L}_{[k]_\varrho}$ відповідно. Систему $\mathcal{L}$ називають *цілком невиродженою відносно ваги ϱ* , якщо для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ у кожній точці многовиду $\mathcal{L}_{[k]}$ вона локаль-

но розв'язна і алгебраїчна система $L_{[k]}$ має *максимальний ранг*. Лему Адамара можна застосовувати у звичайний спосіб до диференціальних функцій, які визначені в $J_{\rho}^k(x|u)$ і дорівнюють нулю на $\mathcal{L}_{[k]}$.

Усі місця, в яких використання навантажених просторів струменів суттєве, будемо вказувати явно. В інших місцях використано термінологію, що використовує порядки, хоча її можна замінити на таку, що ґрунтується на вагах.

Класи систем диференціальних рівнянь. Розглянемо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ систем диференціальних рівнянь

$$\mathcal{L}_{\theta}: \quad L(x, u_{(p)}, \theta(x, u_{(p)})) = 0,$$

параметризований $\theta = \theta(x, u_{(p)})$. Тут L — набір фіксованих функцій від x , $u_{(p)}$ і θ . Символ θ позначає набір довільних (параметричних) функцій $\theta(x, u_{(p)}) = (\theta^1(x, u_{(p)}), \dots, \theta^k(x, u_{(p)}))$, що пробігає множину роз'язків $\mathcal{S}$ системи $S(x, u_{(p)}, \theta_{(q)}(x, u_{(p)})) = 0$. Цю систему складають диференціальні рівняння на функції θ , де x і $u_{(p)}$ виступають у якості незалежних змінних, $\theta_{(q)}$ — множина всіх частинних похідних від θ порядку не вище q . Іноді множину $\mathcal{S}$ додатково обмежують умовою $\Sigma(x, u_{(p)}, \theta_{(q)}(x, u_{(p)})) \neq 0$ нерівності нулю з деяким іншим набором Σ диференціальних функцій. (Ця нерівність означає, що всі компоненти набору Σ не рівні 0. Для простоти набір Σ можна замінити окремою диференціальною функцією, що є добутком його компонент.) Надалі назвемо функції θ довільними елементами. Також позначимо *клас систем $\mathcal{L}_{\theta}$ з довільними елементами θ , що пробігають множину $\mathcal{S}$* як $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$.

Нехай $L_{\theta, (k)}$ позначає множину всіх алгебраїчно незалежних диференціальних наслідків системи $\mathcal{L}_{\theta}$, які мають як диференціальні рівняння порядки не вищі за $k \in \mathbb{N}$. Ототожнимо $L_{\theta, (k)}$ з відповідною системою алгебраїчних рівнянь у $J^k(x|u)$ і пов'яжемо її з многовидом $\mathcal{L}_{\theta, (k)}$, визначеним цією системою. Тоді $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ можна проінтерпретувати як сім'ю многовидів у $J^{(p)}$, параметризованих довільними елементами $\theta \in \mathcal{S}$.

Потрібно зауважити, що наведене означення класу систем диферен-

ціальних рівнянь не є повним. Проблема полягає у тому, що відповідність $\theta \rightarrow \mathcal{L}_\theta$ між довільними елементами і системами (трактованими не як формальні алгебраїчні рівності, а як справжні системи диференціальних рівнянь або многовиди в $J^{(p)}$) може бути не взаємно-однозначною. А саме, одна система може відповідати різним значенням довільних елементів. Причиною цієї невизначеності є те, що різні значення θ і $\tilde{\theta}$ довільних елементів можуть давати після підстановки в L той самий вираз від x і $u_{(p)}$. Більш того, для співпадіння $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ достатньо, щоб асоційовані системи $L_{\theta,(p)}$ і $L_{\tilde{\theta},(p)}$ відрізнялися одна від іншої множителем, що є неособливою матрицею, залежною від змінних з $J^{(p)}$.

Значення довільних елементів θ і $\tilde{\theta}$ назовемо *калібрувально еквівалентними* ($\theta \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \tilde{\theta}$), якщо $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ є тою самою системою диференціальних рівнянь. Для того, щоб відповідність $\theta \rightarrow \mathcal{L}_\theta$ була взаємно-однозначною, множину $\mathcal{S}$ довільних елементів потрібно факторизувати відносно відношення калібрувальної еквівалентності. $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ формально розглядають як різні зображення однієї системи з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Іноді можливо виконати калібрування неформально через зміну вибраного зображення розглядуваного класу (через зміну кількості k довільних елементів і заміну диференціальних функцій L і S , хоча це може призводити до більш складних обчислень). Оскільки класи часто не факторизують, зокрема, через відсутність природньої факторизації, це призводить до необхідності розгляду калібрувальних допустимих перетворень і калібрувальних перетворень еквівалентності (див. наступні підрозділи).

Підкласи в класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ виокремлюють за допомогою додаткових допоміжних систем рівнянь і/або умов нерівності нулю, що приєднують до основної допоміжної системи.

Перетин скінченної кількості підкласів класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ завжди є підкласом цього класу:

$$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}^1} \cap \dots \cap \mathcal{L}|_{\mathcal{S}^j} = \mathcal{L}|_{\mathcal{S}^\cap}, \quad \mathcal{S}^1, \dots, \mathcal{S}^k \subset \mathcal{S}, \quad \mathcal{S}^\cap = \mathcal{S}^1 \cap \dots \cap \mathcal{S}^j.$$

Додаткова допоміжна умова на перетин $\mathcal{S}^\cap$ — це система, що склада-

ється з усіх додаткових допоміжних умов для множин $\mathcal{S}^1, \dots, \mathcal{S}^j$, що перетинають.

Ситуація з доповненнями, об'єднаннями і різницями підкласів класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ складніша. Вони будуть підкласами класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ у визначеному вище сенсі тільки за спеціальних обмежень на додаткові допоміжні умови. Складнощі виникають при наявності одночасно і рівнянь, і нерівностей як зв'язків для підкласів.

Так, доповнення $\overline{\mathcal{L}}|\mathcal{S}' = \mathcal{L}|\overline{\mathcal{S}'}$ підкласу $\mathcal{L}|\mathcal{S}'$ у класі $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ також є підкласом класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$, якщо або додаткова система рівнянь, або додаткова система нерівностей порожня. Якщо $\mathcal{S}'$ задано системою $S'_1 = 0, \dots, S'_{s'} = 0$, то додатковою допоміжною умовою для $\overline{\mathcal{S}'}$ є $|S'_1|^2 + \dots + |S'_{s'}|^2 \neq 0$. Якщо $\mathcal{S}'$ задано нерівностями $\Sigma'_1 \neq 0, \dots, \Sigma'_{\sigma'} \neq 0$, то додатковою допоміжною умовою для $\overline{\mathcal{S}'}$ є $\Sigma'_1 \cdots \Sigma'_{\sigma'} = 0$.

Об'єднання $\mathcal{L}|\mathcal{S}' \cup \mathcal{L}|\mathcal{S}'' = \mathcal{L}|\mathcal{S}' \cup \mathcal{S}''$ і різниця $\mathcal{L}|\mathcal{S}' \setminus \mathcal{L}|\mathcal{S}'' = \mathcal{L}|\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}''$ підкласів $\mathcal{L}|\mathcal{S}'$ і $\mathcal{L}|\mathcal{S}''$ у класі $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ також є підкласами класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$, якщо або додаткові системи рівнянь, або додаткові системи нерівностей цих підкласів співпадають. Додаткові допоміжні умови відповідно будують з додаткових допоміжних умов для $\mathcal{S}'$ ($S'_1 = 0, \dots, S'_{s'} = 0, \Sigma'_1 \neq 0, \dots, \Sigma'_{\sigma'} \neq 0$) і $\mathcal{S}''$ ($S''_1 = 0, \dots, S''_{s''} = 0, \Sigma''_1 \neq 0, \dots, \Sigma''_{\sigma''} \neq 0$) у наступний спосіб (спільна частина умов зберігається):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' \cup \mathcal{S}'': & \quad \text{або} \quad |\Sigma'_1 \cdots \Sigma'_{\sigma'}|^2 + |\Sigma''_1 \cdots \Sigma''_{\sigma''}|^2 \neq 0, \\ & \quad \text{або} \quad S'_i S''_j = 0, \quad i = 1, \dots, s', \quad j = 1, \dots, s''; \\ \mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}'': & \quad \text{або} \quad \Sigma'_1 \cdots \Sigma'_{\sigma'} \neq 0, \quad \Sigma''_1 \cdots \Sigma''_{\sigma''} = 0, \\ & \quad \text{або} \quad S' = 0, \quad |S''_1|^2 + \dots + |S''_{s''}|^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Для замкненості множин підкласів відносно всіх операцій над множинами, поняття підкласу необхідно розширити, вважаючи, що об'єднання будь-якої скінченної кількості підкласів деякого фіксованого класу за означенням також є підкласом цього класу. Ще не зрозуміло, чи знайде таке розширення застосування у задачах групового аналізу.

Допустимі перетворення. Для $\theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{S}$ назовемо множину точкових перетворень з системи $\mathcal{L}_\theta$ у систему $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ *множиною допустимих перетворень з $\mathcal{L}_\theta$ у $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$* і позначимо її через $T(\theta, \tilde{\theta})$. Максимальна група G_θ точкових симетрій системи $\mathcal{L}_\theta$ співпадає з $T(\theta, \theta)$. Якщо системи $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ еквівалентні відносно точкового перетворення, то $T(\theta, \tilde{\theta}) = \varphi^0 \circ G_\theta = G_{\tilde{\theta}} \circ \varphi^0$, де φ^0 — фіксоване перетворення з $T(\theta, \tilde{\theta})$. Інакше $T(\theta, \tilde{\theta}) = \emptyset$. Аналогічно множину $T(\theta, \mathcal{L}|_S) = \{(\tilde{\theta}, \varphi) \mid \tilde{\theta} \in \mathcal{S}, \varphi \in T(\theta, \tilde{\theta})\}$ назовемо *множиною допустимих перетворень системи $\mathcal{L}_\theta$ у класі $\mathcal{L}|_S$* .

Означення 7.1. Множину $T(\mathcal{L}|_S) = \{(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \mid \theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{S}, \varphi \in T(\theta, \tilde{\theta})\}$ назовемо *множиною допустимих перетворень у класі $\mathcal{L}|_S$* .

Зауваження 7.1. Множину допустимих перетворень деякого класу у нетривіальному випадку вперше описано Кінгстоном і Софоклеусом для класу узагальнених рівнянь Бюргерса. Перетворення такого типу ці автори називають *формозберігаючими*. Поняття допустимих перетворень можна розглядати як формалізацію їх підходу.

Зауваження 7.2. Поняття і результати, наведені в цьому і наступному пунктах, можна переформулювати в інфінітезімальних термінах, використовуючи поняття векторних полів, алгебр Лі замість точкових перетворень, груп Лі тощо. Наприклад, див. Боровских для означення “конусів дотичних еквівалентностей”, яке є інфінітезімальним аналогом означення множини допустимих перетворень фіксованої системи у класі. Там же у рамках інфінітезімального підходу досліджено нетривіальний приклад напівнормалізованих класів (див. означення 7.10).

Зауваження 7.3. У випадку однієї залежної змінної ($m = 1$) всі попередні і наступні поняття можна поширити на контактні перетворення.

Елемент $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi)$ з $T(\mathcal{L}|_S)$ називають *калібрувальним допустимим перетворенням у $\mathcal{L}|_S$* , якщо $\theta \stackrel{g}{\sim} \tilde{\theta}$ і φ — тотожне перетворення.

Твердження 7.1. $T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}) \subset T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ для будь-якого підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$. Якщо $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ — інший підклас класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, то $T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}) \cap T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}) = T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''})$.

Групи еквівалентності. Групи еквівалентності різних типів, що діють у класах диференціальних рівнянь, визначають у строгий спосіб через поняття допустимих перетворень.

Так, будь-який елемент Φ зі звичайної групи еквівалентності $G^\sim = G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є точковим перетворенням у просторі змінних $(x, u_{(p)}, \theta)$, яке проєктовне на простір змінних $(x, u_{(p')})$ для будь-якого $0 \leq p' \leq p$ так, що проєкція $\Phi|_{(x, u_{(p')})}$ є продовженням p' -го порядку перетворення $\Phi|_{(x, u)}$, $\forall \theta \in \mathcal{S}$: $\Phi\theta \in \mathcal{S}$ і $\Phi|_{(x, u)} \in T(\theta, \Phi\theta)$. Трійки вигляду $(\theta, \Phi\theta, \Phi|_{(x, u)})$, де $\theta \in \mathcal{S}$ і $\Phi \in G^\sim$, називають допустимими перетвореннями, індукованими елементами групи еквівалентності $G^\sim$.

Нагадаємо, що точкове перетворення $\varphi: \tilde{z} = \varphi(z)$ у просторі змінних $z = (z_1, \dots, z_k)$ називають проєктовним на простір змінних $z' = (z_{i_1}, \dots, z_{i_{k'}})$, де $1 \leq i_1 < \dots < i_{k'} \leq k$, якщо вирази для $\tilde{z}'$ залежать тільки від z' . Позначимо обмеження φ на z' -простір як $\varphi|_{z'}: \tilde{z}' = \varphi|_{z'}(z')$.

Якщо довільні елементи θ явно залежать щонайбільше від x і u (цього можна завжди досягнути формально, вважаючи похідні новими залежними змінними), то можна допустити залежність перетворень змінних (x, u) від θ і розглянути *узагальнену групу еквівалентності* $G_{\text{gen}}^\sim = G_{\text{gen}}^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ (Мелешко, 1994, 1996, 2005). Будь-який елемент Φ з $G_{\text{gen}}^\sim$ є точковим перетворенням у (x, u, θ) -просторі, таким що $\forall \theta \in \mathcal{S}$: $\Phi\theta \in \mathcal{S}$ і $\Phi|_{(x, u)}^\theta = \Phi(\cdot, \cdot, \theta(\cdot, \cdot))|_{(x, u)} \in T(\theta, \Phi\theta)$.

Дія перетворення $\Phi \in G_{\text{gen}}^\sim$ на довільні елементи як функції від (x, u) задається правилом: $\tilde{\theta} = \Phi\theta$, якщо $\tilde{\theta}(x, u) = \Phi^\theta(\Theta(x, u), \theta(\Theta(x, u)))$, де $\Theta = (\Phi(\cdot, \cdot, \theta(\cdot, \cdot))|_{(x, u)})^{-1}$.

Грубо кажучи, $G^\sim$ — це множина допустимих перетворень, які можна застосувати до будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$, а $G_{\text{gen}}^\sim$ утворено допустимими перетвореннями, які можна розбити на класи, параметризовані значеннями

θ , що пробігають множину $\mathcal{S}$.

Розглядають і інші узагальнення груп еквівалентності, наприклад групи, елементи яких є точковими перетвореннями відносно незалежних та залежних змінних і включають нелокальні вирази від довільних елементів [69, 95, 121]. Дамо означення деяких узагальнень.

Означення 7.2. *Розширена група еквівалентності $\bar{G}^\sim = \bar{G}^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S})$ класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ складається з перетворень, кожне з яких зображено парою $\Phi = (\check{\Phi}, \hat{\Phi})$, де $\check{\Phi}$ — взаємно-однозначне неперервне разом з оберненим відображення на множині $\mathcal{S}$ довільних елементів як функцій від $(x, u_{(p)})$, а $\hat{\Phi}$ — точкове перетворення змінних (x, u) , що належить $T(\theta, \check{\Phi}\theta)$ для будь-якого θ з $\mathcal{S}$.*

Тут і надалі неперервність за функціональним аргументом розуміється відносно рівномірної збіжності усіх похідних на кожному компактї з області визначення.

Означення 7.3. *Розширену узагальнену групу еквівалентності $\bar{G}_{\text{gen}}^\sim = \bar{G}_{\text{gen}}^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S})$ класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ складають перетворення, кожне з яких зображено набором $\Phi = (\check{\Phi}, \{\hat{\Phi}^\theta, \theta \in \mathcal{S}\})$. Тут $\check{\Phi}$ визначається, як вище, а $\{\hat{\Phi}^\theta, \theta \in \mathcal{S}\}$ — сім'я точкових перетворень змінних (x, u) , неперервно параметризована θ , причому $\hat{\Phi}^\theta \in T(\theta, \check{\Phi}\theta)$ для кожного θ з $\mathcal{S}$.*

Множини, в яких шукають відображення довільних елементів, задають у залежності від досліджуваних класів систем диференціальних рівнянь. Надалі по можливості не будемо уточнювати конкретний тип груп еквівалентності. Це означатиме, що можна застосувати будь-яке з наведених понять.

Група еквівалентності породжує відношення еквівалентності на множині допустимих перетворень відповідного класу. А саме, допустимі перетворення $(\theta^1, \tilde{\theta}^1, \varphi^1)$ і $(\theta^2, \tilde{\theta}^2, \varphi^2)$ з $T(\mathcal{L}|\mathcal{S})$ називають $G^\sim$ -еквівалентними, якщо існує таке $\Phi \in G^\sim$, що $\theta^2 = \Phi\theta^1$, $\tilde{\theta}^2 = \Phi\tilde{\theta}^1$ і $\varphi^2 = \Theta \circ \varphi^1 \circ \Theta^{-1}$, де $\Theta = \Phi|_{(x,u)}$ (або $\Theta = \Phi|_{(x,u)}^\theta$ у випадку з $G_{\text{gen}}^\sim$).

Проблеми групової класифікації. Нагадаємо, що для фіксованого $\theta \in \mathcal{S}$ максимальна локальна (псевдо)група точкової симетрії системи $\mathcal{L}_\theta$ співпадає з $T(\theta, \theta)$ і позначається G_θ . Спільну частину $G^\cap = G^\cap(\mathcal{L}|\mathcal{S}) = \bigcap_{\theta \in \mathcal{S}} G_\theta$ всіх G_θ , $\theta \in \mathcal{S}$, називають *ядром максимальних точкових груп симетрії* систем з класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$. Зауважимо, що $G^\cap$ можна природно вкласти в $G^\sim$ через тривіальне (тотожне) продовження перетворень ядра у довільні елементи. Асоційована підгрупа $\hat{G}^\cap$ групи $G^\sim$ є нормальною.

Проблема групової класифікації для класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ полягає в описі всіх $G^\sim$ -нееквівалентних значень $\theta \in \mathcal{S}$ разом з відповідними групами G_θ , для яких $G_\theta \neq G^\cap$. Розв'язком проблеми групової класифікації є список пар $(\mathcal{S}_\gamma, \{G_\theta, \theta \in \mathcal{S}_\gamma\})$, $\gamma \in \Gamma$. Тут $\{\mathcal{S}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ — сім'я підмножин множини $\mathcal{S}$, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{S}_\gamma$ містить тільки $G^\sim$ -нееквівалентні значення θ з $G_\theta \neq G^\cap$, і для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$ з $G_\theta \neq G^\cap$ існує $\gamma \in \Gamma$ таке, що $\theta \in \mathcal{S}_\gamma \bmod G^\sim$. Структури груп G_θ подібні для різних значень $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$ при фіксованому γ . Зокрема, G_θ , $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$, мають однакову довільність у групових параметрах.

Проблеми групової класифікації в наведеному вище формулюванні дуже складні і, в загальному випадку, нерозв'язні, оскільки приводять до систем функціональних диференціальних рівнянь. Ось чому зазвичай розглядають тільки зв'язану компоненту одиниці G_θ^p для кожного θ замість цілої групи G_θ . G_θ^p називають *основною групою* (симетрій) системи $\mathcal{L}_\theta$. Генератори однопараметричних підгруп групи G_θ^p утворюють алгебру Лі A_θ векторних полів у просторі змінних (x, u) , яку називають *максимальною алгеброю лівської інваріантності* (або основною алгеброю інфінітезімальних операторів симетрії системи $\mathcal{L}_\theta$). Ядром основних груп класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ є група $G^{\cap p} = G^{\cap p}(\mathcal{L}|\mathcal{S}) = \bigcap_{\theta \in \mathcal{S}} G_\theta^p$, для якої алгебра Лі є $A^\cap = A^\cap(\mathcal{L}|\mathcal{S}) = \bigcap_{\theta \in \mathcal{S}} A_\theta$.

Будь-який оператор $Q = \xi^i(x, u)\partial_{x_i} + \eta^a(x, u)\partial_{u^a}$ з A_θ задовольняє критерій інфінітезімальної інваріантності для системи $\mathcal{L}_\theta$

$$Q_{(p)}L(x, u_{(p)}, \theta(x, u_{(p)}))\big|_{\mathcal{L}_\theta^p} = 0,$$

тобто результат дії продовженого оператора $Q_{(p)}$ на L дорівнює нулю на многовиді $\mathcal{L}_\theta^p$. $Q_{(p)}$ позначає стандартне p -те продовження оператора Q :

$$Q_{(p)} := Q + \sum_{0 < |\alpha| \leq p} \left(D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n} (\eta^a(x, u) - \xi^i(x, u) u_i^a) + \xi^i u_{\alpha, i}^a \right) \partial_{u_\alpha^a},$$

$D_i = \partial_i + u_{\alpha, i}^a \partial_{u_\alpha^a}$ — оператор повного диференціювання за змінною x_i , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультиіндекс, $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Змінну u_α^a з простору струменів J^r ототожнюють з похідною $\partial^{|\alpha|} u^a / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$, а $u_{\alpha, i}^a := \partial u_\alpha^a / \partial x_i$. Після розщеплення за незв'язаними змінними критерій інфінітезімальної інваріантності дає *систему визначальних рівнянь* на коефіцієнти оператора Q , де довільні елементи класу виступають параметрами. Розширення лівської симетрії пов'язані, як правило, з розширенням множини розв'язків цієї системи.

Знаючи A_θ , можна відновити G_θ^p . При інфінітезімальному підході проблема групової класифікації означає пошук всіх можливих нееквівалентних випадків розширення для A_θ , тобто перелік всіх $G^\sim$ -нееквівалентних значень довільного параметра θ разом з A_θ , що задовольняє умові $A_\theta \neq A^\cap$. Більш точно, розв'язком проблеми групової класифікації при інфінітезімальному підході є перелік пар $(\mathcal{S}_\gamma, \{A_\theta, \theta \in \mathcal{S}_\gamma\})$, $\gamma \in \Gamma$. Тут $\{\mathcal{S}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ — сім'я підмножин множини $\mathcal{S}$, $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{S}_\gamma$ містить тільки $G^\sim$ -нееквівалентні значення θ з $A_\theta \neq A^\cap$, і для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$ з $A_\theta \neq A^\cap$ існує $\gamma \in \Gamma$ таке, що $\theta \in \mathcal{S}_\gamma \bmod G^\sim$. Структури алгебр A_θ подібні для різних значень $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$ при фіксованому γ . Зокрема, всі A_θ , $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$, мають однакову розмірність або однакову довільність у параметрах у нескінченно-вимірному випадку.

Процедуру групової класифікації можна доповнити знаходженням явних умов (наприклад, систем диференціальних рівнянь) для довільних елементів, що забезпечують розширення лівської симетрії. Іншими словами, для будь-якого $\gamma \in \Gamma$ потрібно явно описати підмножину $\bar{\mathcal{S}}_\gamma \subset \mathcal{S}$, що включає довільні елементи, $G^\sim$ -еквівалентні довільним елементам з підмножини $\mathcal{S}_\gamma$. Хоча цей крок зазвичай пропускають, він може приводи-

ти до нетривіальних результатів.

Якщо клас $\mathcal{L}|_S$ не нормалізований, тобто якщо множину $T(\mathcal{L}|_S)$ не породжено групою $G^\sim$, отриманий класифікаційний список може включати рівняння, взаємно еквівалентні відносно точкових перетворень, які не належать до $G^\sim$. Знання таких *додаткових* еквівалентностей дозволяє суттєво спростити подальші дослідження класу $\mathcal{L}|_S$. Їх явну побудову можна розглядати як ще один крок алгоритму групової класифікації. Для виконання цього кроку можна використовувати той факт, що еквівалентні рівняння мають подібні максимальні алгебри інваріантності. Більш систематичний спосіб — опис повної множини допустимих перетворень.

Класичну постановку проблем групової класифікації можна розширити у двох напрямках.

Перший охоплює можливі варіації у відношеннях еквівалентності, з точністю до яких виконують групову класифікацію. Можна використати різні типи груп еквівалентності (звичайні, узагальнені, розширені, узагальнені розширені). Всі такі групи складаються, у дійсності, з точкових перетворень незалежних і залежних змінних. Модифікації торкаються лише структури перетворень відносно довільних елементів. Якщо клас допускає узагальнену/розширену групу еквівалентності, суттєво ширшу, ніж звичайна, групова класифікація у такому класі відносно звичайної групи еквівалентності, як правило, занадто громіздка і класифікаційний список далекий від оптимального або може навіть не існувати у замкнутій формі [69, 121].

Інша можливість модифікації проблем групової класифікації у тому ж напрямі полягає у розбитті розглядуваного класу на сім'ї підкласів, кожен з яких складається з рівнянь, нееквівалентних рівнянням з інших підкласів, і має групу еквівалентності, що не міститься у групі еквівалентності цілого класу (так звана нетривіальна умовна група еквівалентності). Кінцевий класифікаційний список для цілого класу буде об'єднанням класифікаційних списків для підкласів. Підкласи з розбит-

тя і їх групи еквівалентності є необхідними елементами у представленні отриманого результату. Саме цей підхід використано у нас для групової класифікації нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами і модульними нелінійностями [41, 140].

Включення додаткових перетворень еквівалентності до фрейму групової класифікації також є способом зміни відношення еквівалентності, що використовується. Після знаходження всіх додаткових еквівалентностей класифікація з точністю до $G^{\sim}(\mathcal{L}|_S)$ -еквівалентності перетворюється на *класифікацію з точністю до $T(\mathcal{L}|_S)$ -еквівалентності*, тобто з точністю до еквівалентності, породженої всіма можливими точковими перетвореннями. При наявності спеціальної властивості, яку назовемо напівнормалізацією, у класі $\mathcal{L}|_S$ гарантовано немає ніяких додаткових еквівалентностей. Тоді ці класифікації співпадають (наслідок 7.1 нижче).

Крім еквівалентностей, породжених точковими перетвореннями незалежних і залежних змінних, у випадку однієї залежної змінної ($m = 1$) можна використовувати також контактні перетворення. Потенціальні перетворення еквівалентності виникають для деяких класів з двома незалежними змінними. При дослідженні наближених симетрій природно застосовувати наближені перетворення еквівалентності.

Другий напрям для модифікації проблем групової класифікації — застосування критеріїв вибору, відмінних від розширення ліівської симетрії. Перетворення між рівняннями (або класами рівнянь) зберігають багато їх властивостей, індукують перетворення між об'єктами, спорідненими з ними, і тому породжують різні відношення еквівалентності на множини пар вигляду “(рівняння, об’єкт)” (або “(клас рівнянь, об’єкт)”). Отже, специфікацію таких об’єктів або їх властивостей можна використати як критерій вибору рівнянь (або класів рівнянь) з точністю до введених вище відношень еквівалентності у спосіб, подібний ліівської симетрії. Коло таких об’єктів досить широке. Воно включає неklasичні (умовні) симетрії, закони збереження, асоційовані потенціальні системи

і потенціальні або квазилокальні симетрії, узагальнені симетрії (симетрії Лі–Беклунда), контактні і наближені симетрії, допустимі перетворення і т. ін.

Калібрувальні групи еквівалентності. Група еквівалентності $G^\sim$ класу $\mathcal{L}|_S$ може містити перетворення, що діють тільки на довільні елементи і фактично не замінюють системи, тобто такі, що породжують калібрувальні допустимі перетворення. Зазвичай перетворення цього типу можна вважати тривіальними (калібрувальними) перетвореннями еквівалентності, причому вони утворюють *калібрувальну* підгрупу

$$G^{g\sim} = \{\Phi \in G^\sim \mid \Phi x = x, \Phi u = u, \Phi \theta \stackrel{g}{\sim} \theta\}$$

групи еквівалентності $G^\sim$. Більш того, $G^{g\sim}$ — нормальна підгрупа в $G^\sim$.

Застосування калібрувальних перетворень еквівалентності рівносильно переписуванню системи в іншому вигляді. На відміну від звичайних перетворень еквівалентності, їх роль у груповій класифікації зводиться не до вибору представників у класах еквівалентності, а до вибору вигляду цих представників. Як правило, калібрувальне відношення еквівалентності на множині довільних елементів класу диференціальних рівнянь породжено його калібрувальною групою еквівалентності. Будемо вживати назву “калібрувальні перетворення еквівалентності”, оскільки існують зовсім тривіальні перетворення еквівалентності, які фактично не перетворюють навіть довільні елементи. Такі перетворення виникають, якщо допоміжна система приводить до функціональної залежності довільних елементів, і утворюють нормальну підгрупу відповідної групи еквівалентності і відповідної калібрувальної групи еквівалентності. Будемо нехтувати цими перетвореннями і вважати, що групи еквівалентності співпадають, якщо вони мають однакові фактор-групи за тривіальними підгрупами еквівалентності.

Умовні групи еквівалентності. Поняття *умовної еквівалентності* виникає як розширення поняття перетворень умовної симетрії окремої системи диференціальних рівнянь (Фушич, 1991) до перетворень ек-

вівалентності у класах систем. Воно навіть більш природне, ніж поняття умовної симетрії, оскільки опис будь-якого класу включає як необхідну складову допоміжну систему (*умову*) на довільні елементи. Накладаючи додаткові зв'язки на довільні елементи, можна виокремити підклас у розглядуваному класі, група еквівалентності якого не міститься у групі еквівалентності цілого класу.

Нехай $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ — підклас класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, який виокремлено додатковою системою рівнянь $S'(x, u_{(p)}, \theta_{(q')}) = 0$ і нерівностей $\Sigma'(x, u_{(p)}, \theta_{(q')}) \neq 0$ на довільні елементи $\theta = \theta(x, u_{(p)})$. (Або рівняння, або нерівності можуть виконуватись тотожно.) Тут $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ — множина розв'язків об'єднаної системи $S = 0, \Sigma \neq 0, S' = 0, \Sigma' \neq 0$. Об'єднана система має бути сумісною для того, щоб підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ був непорожнім.

Означення 7.4. Групу еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ називають *умовною групою еквівалентності* всього класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ за умови $S' = 0, \Sigma' \neq 0$. Умовну групу еквівалентності називають *нетривіальною* тоді і тільки тоді, коли вона не є (з точністю до тривіальних перетворень еквівалентності) власною підгрупою групи $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$.

Групу еквівалентності всього класу можна вважати (невласною) умовною групою еквівалентності, асоційованою з порожньою додатковою умовою. Умовна група еквівалентності може бути тривіальною не відносно групи еквівалентності всього класу, а відносно іншої (власної) умовної групи еквівалентності. Дійсно, якщо $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}''$ і $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}) \subset G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''})$, то підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ нецікавий з точки зору умовної еквівалентності. Отже, множину додаткових умов на довільні елементи, які необхідно розглядати, можна суттєво скоротити.

Означення 7.5. Умовну групу еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ при додатковій умові $S' = 0, \Sigma' \neq 0$ називають *максимальною*, якщо вона є нетривіальною умовною групою еквівалентності для будь-якого підкласу класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, що власно містить підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$.

Іншими словами, тільки максимальні умовні групи еквівалентності є цікавими. Будь-яка максимальна умовна група еквівалентності нетривіальна.

Група еквівалентності $G^\sim(\mathcal{L}|_S)$ породжує відношення еквівалентності на множині пар додаткових допоміжних умов і відповідних умовних груп еквівалентності. А саме, якщо перетворення з $G^\sim(\mathcal{L}|_S)$ перетворює систему $S' = 0$, $\Sigma' \neq 0$ у систему $S'' = 0$, $\Sigma'' \neq 0$, то умовні групи еквівалентності $G^\sim(\mathcal{L}|_{S'})$ і $G^\sim(\mathcal{L}|_{S''})$ є подібними відносно цього перетворення і називаються $G^\sim$ -еквівалентними. Якщо умовна група еквівалентності максимальна, то будь-яка умовна група еквівалентності, $G^\sim$ -еквівалентна їй, також є максимальною.

Грунтуючись на понятті умовної еквівалентності, можна сформулювати проблему опису $T(\mathcal{L}|_S)$ аналогічно до звичайної проблеми групової класифікації. Нетривіальні додаткові допоміжні умови для довільних елементів природно виникають при вивченні $T(\mathcal{L}|_S)$. Зазвичай для цього необхідно виконати наступні кроки:

1. Побудувати $G^\sim(\mathcal{L}|_S)$ (або $G_{\text{gen}}^\sim(\mathcal{L}|_S)$ і т. ін.).
2. Описати умовні перетворення еквівалентності в $\mathcal{L}|_S$, тобто знайти повну сім'ю $G^\sim$ -нееквівалентних додаткових допоміжних умов S_γ , $\gamma \in \Gamma$ таких, що $G^\sim(\mathcal{L}|_{S_\gamma})$ — максимальна умовна група еквівалентності класу $\mathcal{L}|_S$ для будь-якого $\gamma \in \Gamma$.
3. Знайти допустимі перетворення, що не належать будь-якій умовній групі еквівалентності.

У дійсності запропонована процедура не є оптимальною. До її вдосконалення повернемося після введення поняття нормалізованих класів систем диференціальних рівнянь.

7.2 Відображення між класами

Відображення між класами систем диференціальних рівнянь, породжені точковими перетвореннями, відіграють важливу роль при груповому аналізі цих класів [41, 140]. Вивчимо поведінку трансформаційних властивостей класів при таких відображеннях. Ці результати утворюють основу для нового підходу до групової класифікації у певних класах диференціальних рівнянь, для яких існуючі методи не є достатньо потужними [121].

Подібність класів. Поняття подібних диференціальних рівнянь (Овсянніков, 1982) можна розширити на класи (системи) диференціальних рівнянь багатьма способами. Найбільш пряме й очевидне узагальнення подано у наступному означенні.

Означення 7.6. Класи $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ *подібні*, якщо $n = n'$, $m = m'$, $p = p'$, $k = k'$ і існує точкове перетворення $\Psi: (x, u_{(p)}, \theta) \rightarrow (x', u'_{(p)}, \theta')$, проективне на простір змінних $(x, u_{(q)})$ для кожного $0 \leq q \leq p$, причому $\Psi|_{(x, u_{(q)})}$ є продовженням q -го порядку перетворення $\Psi|_{(x, u)}$, та $\Psi\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ і $\Psi|_{(x, u_{(p)})}\mathcal{L}\theta = \mathcal{L}'_{\Psi\theta}$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$.

Тут і надалі дія такого точкового перетворення Ψ у просторі змінних $(x, u_{(p)}, \theta)$ на довільні елементи з $\mathcal{S}$ як диференціальні функції p -го порядку задається формулою:

$$\tilde{\theta} = \Psi\theta, \quad \text{якщо} \quad \tilde{\theta}(x, u_{(p)}) = \Psi^\theta\left(\Theta(x, u_{(p)}), \theta(\Theta(x, u_{(p)}))\right),$$

де $\Theta = (\text{pr}_p \Psi|_{(x, u)})^{-1}$, а pr_p позначає операцію стандартного продовження точкових перетворень на похідні порядку не вище, ніж p . Грубо кажучи, подібні класи складаються з подібних рівнянь з однаковими перетвореннями подібності.

Твердження 7.2. *Подібні класи мають подібні множини допустимих перетворень. А саме, перетворення подібності Ψ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ на клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ породжує взаємно-однозначне відображення Ψ^T з $T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ на $T(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$ за правилом $(\theta', \tilde{\theta}', \varphi') = \Psi^T(\theta, \tilde{\theta}, \varphi)$, якщо $\theta' = \Psi\theta$, $\tilde{\theta}' = \Psi\tilde{\theta}$ і $\varphi' = \Psi|_{(x, u)} \circ \varphi \circ \Psi|_{(x, u)}^{-1}$. Тут $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, $(\theta', \tilde{\theta}', \varphi') \in T(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$.*

Подібні класи диференціальних рівнянь також мають подібні групи еквівалентності. Більш точно, якщо класи подібні відносно перетворень певного типу (наприклад, точкових перетворень незалежних змінних, залежних змінних, їх похідних і довільних елементів), то групи еквівалентності, утворені перетвореннями еквівалентності одного типу, також подібні відносно цього перетворення.

Очевидно, що списки ліївських симетрій при груповій класифікації відносно будь-яких наведених вище відношень еквівалентності подібні для подібних класи. А саме, якщо перетворення Ψ породжує перетворення подібності класу $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ на клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і $\{(\theta, A_\theta), \theta \in \mathcal{S}_\gamma\}, \mathcal{S}_\gamma \subset \mathcal{S}, \gamma \in \Gamma$ — класифікаційний список для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, то

$$\{(\Psi\theta, (\Psi|_{(x,u)})_*A_\theta), \Psi\theta \in \Psi\mathcal{S}_\gamma\}, \Psi\mathcal{S}_\gamma \subset \mathcal{S}', \gamma \in \Gamma\} —$$

класифікаційний список для класу $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$. Тут $(\Psi|_{(x,u)})_*$ — відображення, індуковане перетворенням Ψ у множині векторних полів на просторі (x, u) (підняття векторних полів), A_θ позначає максимальну алгебру ліївської інваріантності системи $\mathcal{L}_\theta$.

Множину перетворень, використаних в означенні 7.6, можна розширити за допомогою різних типів залежності від довільних елементів, як у випадку груп еквівалентності. Зазвичай класи систем, подібні в розширеному сенсі, також мають подібні властивості з точки зору групового аналізу. При точкових перетвореннях подібності властивості фактично співпадають з точністю до подібності. Якщо Ψ — точкове перетворення у просторі змінних $(x, u_{(p)}, \theta)$, то відповідні класи мають практично ті ж самі трансформаційні властивості.

Репараметризація класів. Якщо перетворення Ψ тотожне відносно x і u , то $\mathcal{L}'_{\Psi\theta} = \mathcal{L}_\theta$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$, тобто насправді класи $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ співпадають як множини многовидів у просторі струменів. Будемо казати, що клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ — *точкова репараметризація* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, асоційована з репараметризуючим перетворенням Ψ . При найбільш загальному підході Ψ можна вважати довільним взаємно-однозначним відображен-

ням з $\mathcal{S}$ у $\mathcal{S}'$, що задовольняє умові $\mathcal{L}'_{\Psi\theta} = \mathcal{L}_\theta$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}$. Зауважимо, що кількість довільних елементів у $\mathcal{S}'$ може не співпадати з кількістю довільних елементів у $\mathcal{S}$. Узгодженість трансформаційних властивостей може порушуватися при узагальненій репараметризації.

Приклад неточної репараметризації, яку застосовують у груповому аналізі, дають класи $\{\mathcal{I} = \theta(\mathcal{I}', \mathcal{J})\}$ і $\{\mathcal{I}' = \theta'(\mathcal{I}, \mathcal{J})\}$, де $\mathcal{I}$ і $\mathcal{I}'$ ($\mathcal{J}$) — k -набори (l -набори) фіксованих функціонально незалежних виразів змінних x і $u_{(p)}$, а θ і θ' — довільні $(k + l)$ -арні k -вектор-функції з ненульовими якобіанами за першими k аргументами, $k, l \in \mathbb{N}$. Відповідне відображення між множинами довільних елементів полягає у взятті оберненої функції до кожного елемента множини. Перевагою такої репараметризації є збереження трансформаційних властивостей класів.

Загальні відображення між класами, породжені точковими перетвореннями. Подібність класів приводить до взаємно-однозначної відповідності між асоційованими множинами довільних елементів. Якщо знехтувати цією властивістю, отримаємо більш загальне і складне поняття відображення між класами диференціальних рівнянь.

Означення 7.7. Клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ назовемо *точковим образом* класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, якщо $n = n'$, $m = m'$, $p = p'$, $k = k'$ і існує сім'я $\bar{\varphi}$ точкових перетворень $\varphi_\theta: (x, u) \rightarrow (x', u')$, параметризована $\theta \in \mathcal{S}$, що задовольняє таку умову: для кожного $\theta \in \mathcal{S}$ існує $\tilde{\theta} \in \tilde{\mathcal{S}}$ і, навпаки, для кожного $\tilde{\theta} \in \tilde{\mathcal{S}}$ існує $\theta \in \mathcal{S}$ такі, що $\text{pr}_p \varphi_\theta \mathcal{L}_\theta = \tilde{\mathcal{L}}_{\tilde{\theta}}$.

Будемо казати, що сім'я $\bar{\varphi}$ здійснює точкове відображення класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ на клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$, і ототожнювати цю сім'ю з відповідним відображенням класів із асоційованим відображенням множин довільних елементів. Так, формулу $\text{pr}_p \varphi_\theta \mathcal{L}_\theta = \mathcal{L}'_{\theta'}$ можна скорочено записати як $\bar{\varphi}\theta = \theta'$.

У випадку подібних класів сім'я, що здійснює відповідне точкове відображення, насправді складається з єдиного елемента, тобто перетворення з сім'ї не залежать від довільних елементів.

Точковий клас-образ успадковує певні трансформаційні властивості

свого класу-прообразу. Існує також зворотній зв'язок. Наприклад, рівняння з клас-прообразу еквівалентні відносно точкових перетворень тоді і тільки тоді, коли їх образи також еквівалентні.

Твердження 7.3. *Точкове відображення між класами диференціальних рівнянь індукує відображення між відповідними множинами допустимих перетворень. А саме, якщо клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ є точковим образом класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ відносно сім'ї точкових перетворень $\varphi_\theta: (x, u) \rightarrow (x', u')$, $\theta \in \mathcal{S}$, то образом допустимого перетворення $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ є $(\theta', \tilde{\theta}', \varphi') \in T(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$, де $\mathcal{L}'_{\theta'} = \text{pr}_p \varphi_\theta \mathcal{L}_\theta$, $\mathcal{L}'_{\tilde{\theta}'} = \text{pr}_p \varphi_{\tilde{\theta}} \mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ і $\varphi' = \varphi_{\tilde{\theta}} \circ \varphi \circ (\varphi_\theta)^{-1}$.*

Більш того, подібне твердження також є вірним у зворотному напрямі.

Твердження 7.4. *Множину допустимих перетворень вихідного класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ можна відновити з множини допустимих перетворень його точкового образу $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$.*

Доведення. Припустимо, що сім'я точкових перетворень $\varphi_\theta: (x, u) \rightarrow (x', u')$, $\theta \in \mathcal{S}$, відображає клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ на клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$, $(\theta', \tilde{\theta}', \varphi') \in T(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$, а $\mathcal{L}_\theta$ і $\mathcal{L}_{\tilde{\theta}}$ — деякі рівняння, відображені у $\mathcal{L}'_{\theta'}$ і $\mathcal{L}'_{\tilde{\theta}'}$, відповідно. Тоді $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, де $\varphi = (\varphi_{\tilde{\theta}})^{-1} \circ \varphi' \circ \varphi_\theta$. Кожне допустиме перетворення з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ можна отримати наведеним способом. $\square$

Якщо клас $\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'}$ є тільки точковим образом класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ у сенсі означення 7.7 без подібності в сенсі означення 7.6, то подібність їх класифікацій може бути порушено. Тільки у випадку класифікацій відносно цілих множин допустимих перетворень завжди існує взаємно-однозначна відповідність між класифікаційними списками для клас-образу і клас-прообразу. Для того, щоб така відповідність мала місце в випадку класифікацій відносно груп еквівалентності, потрібно додатково вимагати, щоб образ кожної орбіти групи $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ у $\mathcal{S}$ співпадав з орбітою групи $G^\sim(\mathcal{L}'|_{\mathcal{S}'})$ у $\mathcal{S}'$. Ці властивості можна застосувати для спрощення розв'я-

зання проблеми групової класифікації. Якщо один з класів є класифіковним у простіший спосіб, володіючи, наприклад, множиною довільних елементів (групою еквівалентності, множиною допустимих перетворень тощо) простішої структури, то спочатку можна виконати його групову класифікацію, а потім використати її для отримання класифікації іншого класу. Саме цей підхід застосовано в [121] для групової класифікації деякого класу рівнянь реакції–дифузії.

Особливий тип відображень між класами диференціальних рівнянь складають відображення класів у їх підкласи. Якщо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ відображено на його підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ сім'єю перетворень $\bar{\varphi} = \{\varphi_{\theta}, \theta \in \mathcal{S}\}$, то $(\theta, \bar{\varphi}\theta, \varphi_{\theta}) \in T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. В окремих випадках відображення $\bar{\varphi}$ асоційоване з підгрупою H групи еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. А саме, відображення побудовано наступним чином. Виберемо підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ так, щоб кожна орбіта дії підгрупи H у $\mathcal{S}$ перетинала $\mathcal{S}'$ точно по одному елементу. Тоді покладемо $\bar{\varphi}\theta = \theta'$, де $\{\theta'\} = \mathcal{S}' \cap H\theta$, тобто будь-який елемент орбіти відображаємо в елемент з перетину орбіти і $\mathcal{S}'$. Як реалізацію перетворення φ_{θ} виберемо $h|_{(x,u)}^{\theta}$, де h — елемент з H , що відображає θ у θ' . Корисно ототожнити φ_{θ} і h . Систему додаткових допоміжних умов $\mathcal{S}' = 0$, $\Sigma' \neq 0$, що виокремлює підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ з класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, називають *калібруванням* довільних елементів, породженим підгрупою H . Прообрази кожного довільного елемента з $\mathcal{S}'$ відносно відображення $\bar{\varphi}$, асоційованого з H , є $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ -еквівалентними. При певних умовах на H відображення $\bar{\varphi}$ також встановлює зв'язок між узагальненими розширеними групами еквівалентності вихідного і відображеного класів.

Твердження 7.5. *Припустимо, що H — нормальна підгрупа узагальненої розширеної групи еквівалентності $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і кожна орбіта підгрупи H у $\mathcal{S}$ перетинає $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ точно по одному елементу. Нехай $\bar{\varphi}$ — відображення з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ у $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$, асоційоване з H , і $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ позначає узагальнену розширену групу еквівалентності підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$. Тоді рівняння з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх образи*

при відображенні $\bar{\varphi}$ $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ -еквівалентні.

Це означає, що групова класифікація у класі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з точністю до $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ -еквівалентності зводиться до групової класифікації у підкласі $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ відносно його групи еквівалентності $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$. Твердження 7.5 можна поширити на випадок калібрування довільних елементів, породженого підгрупою, яка не є нормальною.

Твердження 7.6. *Припустимо, що $\{H_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ — сім'я підгруп узагальненої розширеної групи еквівалентності $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$, кожне перетворення з $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ індукує відношення подібності на цій сім'ї і для будь-якого $\gamma \in \Gamma$ кожна орбіта підгрупи H_γ у $\mathcal{S}$ перетинає $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ точно в одному елементі. Нехай $\bar{\varphi}$ — відображення з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ у $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$, асоційоване з H_{γ_0} для фіксованого значення $\gamma_0 \in \Gamma$, $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ позначає узагальнену розширену групу еквівалентності підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$. Тоді рівняння з $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ -еквівалентні тоді і тільки тоді, коли їх образи при відображенні $\bar{\varphi}$ $G^\sim(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ -еквівалентні.*

7.3 Нормалізовані класи диференціальних рівнянь

Розв'язання задач групової класифікації є значно простішим у випадках, коли розглядуваний клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ систем диференціальних рівнянь має додаткову властивість нормалізованості відносно точкових перетворень. На додачу дослідження множини $T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ допустимих перетворень можна поглибити вивченням умовних груп еквівалентності підкласів з такою властивістю.

Означення нормалізованого класу.

Означення 7.8. Клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ назовемо *нормалізованим* (відносно точкових перетворень), якщо $\forall(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) \exists \Phi \in G^\sim: \tilde{\theta} = \Phi\theta$ і $\varphi = \Phi|_{(x,u)}$.

Клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ назовемо *нормалізованим в узагальненому сенсі*, якщо $\forall(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) \exists \Phi \in G_{\text{gen}}^\sim: \tilde{\theta} = \Phi\theta$ і $\varphi = \Phi(\cdot, \cdot, \theta(\cdot, \cdot))|_{(x,u)}$.

Означення 7.9. Клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ назовемо *сильно нормалізованим*, якщо він нормалізований і $G^{\sim}|_{(x,u)} = \prod_{\theta \in \mathcal{S}} G_{\theta}$, і назовемо *сильно нормалізованим в узагальненому сенсі*, якщо він нормалізований в узагальненому сенсі і $\forall \theta^0 \in \mathcal{S}: G^{\sim}_{\text{gen}}|_{(x,u)}^{\theta=\theta^0} = \prod_{\theta \in \mathcal{S}_{\theta^0}} G_{\theta}$, де $\mathcal{S}_{\theta^0} = \{\theta' \in \mathcal{S} \mid G^{\sim}_{\text{gen}}|_{(x,u)}^{\theta=\theta'} = G^{\sim}_{\text{gen}}|_{(x,u)}^{\theta=\theta^0}\}$.

Означення 7.10. Клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ назовемо *напівнормалізованим*, якщо $\forall (\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) \exists \tilde{\varphi} \in G_{\theta}, \exists \Phi \in G^{\sim}: \varphi = \Phi|_{(x,u)} \circ \tilde{\varphi}$, тобто

$$T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \{(\theta, \Phi\theta, \Phi|_{(x,u)} \circ \tilde{\varphi}) \mid \theta \in \mathcal{S}, \tilde{\varphi} \in G_{\theta}, \Phi \in G^{\sim}\}.$$

($T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \{(\theta^0, \Phi\theta^0, \Phi|_{(x,u)}^{\theta=\theta^0} \circ \tilde{\varphi}) \mid \theta^0 \in \mathcal{S}, \tilde{\varphi} \in G_{\theta}, \Phi \in G^{\sim}_{\text{gen}}\}$, якщо $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є напівнормалізованим в узагальненому сенсі.)

Грубо кажучи, клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є нормалізованим, якщо кожне допустиме перетворення в цьому класі індуковано перетворенням з групи еквівалентності $G^{\sim}$, і є сильно нормалізованим, якщо додатково $G^{\sim}|_{(x,u)}$ породжено елементами з G_{θ} , $\theta \in \mathcal{S}$. Множину допустимих перетворень напівнормалізованого класу породжено перетвореннями з групи еквівалентності цілого класу і перетвореннями з груп ліівської симетрії окремих рівнянь.

Твердження 7.7. *Якщо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований/напівнормалізований (у звичайному або узагальненому сенсі) і підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ замкнутий під дією групи $G^{\sim}$ (або $G^{\sim}_{\text{gen}}$), то підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ нормалізований/напівнормалізований у тому ж сенсі.*

Перетин нормалізованих підкласів класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ з однаковою групою еквівалентності $G^{\sim}_0$ є нормалізованим підкласом, причому $G^{\sim}_0$ є підгрупою його групи еквівалентності, що породжує всю відповідну множину допустимих перетворень. Дійсно, нехай $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ і $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ — нормалізовані підкласи класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}) = G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}) = G^{\sim}_0$. Якщо $\Phi \in G^{\sim}_0$, то $(\theta, \Phi\theta, \Phi|_{(x,u)}) \in T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''})$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''$, тобто $\Phi \in G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''})$. В силу нормалізованості підкласів $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ і $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}''}$ для будь-якого $(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \in T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''})$ існує $\Phi \in G^{\sim}_0$ таке, що $\tilde{\theta} = \Phi\theta$ і $\varphi = \Phi|_{(x,u)}$. Отже,

$\mathcal{L}|_{\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''}$ — нормалізований підклас. Доведення у випадку нормалізованості в узагальненому сенсі аналогічне.

Властивість нормалізованості було встановлено (в явній або неявній формах) для різних класів диференціальних рівнянь, важливих для застосувань.

Особливі приклади нормалізованих класів. Існує багато очевидних прикладів нормалізованих класів. Так, інтуїтивно зрозуміло, що граничні випадки класів, утворених або окремою системою диференціальних рівнянь, або всіма системами фіксованої кількості незалежних змінних, невідомих функцій і диференціальних рівнянь з обмеженнями або без обмежень порядку, є нормалізованими. Покажемо це в рамках наведеного формального підходу.

Розглянемо систему $L(x, u_{(p)}) = 0$ з l диференціальних рівнянь для m невідомих функцій u від n незалежних змінних x , яка допускає максимальну групу G точкових симетрій. Вважаємо, що набір θ складається з єдиного довільного елемента, який також позначимо як θ , і L є сталою по θ . Допоміжну систему $\mathcal{S}$ для довільного елемента θ можна вибрати різними способами. Обговоримо дві можливості.

Перша полягає у тому, щоб зв'язати θ єдиним (алгебраїчним або диференціальним) рівнянням, наприклад, $\theta = 0$. Тоді $\mathcal{S}$ — одноелементна множина, що складається з функції, тотожно рівної 0 на $J^{(p)}$, $T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \{ (0, 0, \varphi) \mid \varphi \in G \}$ і $G^\sim = \{ (\tilde{x}, \tilde{u}) = \varphi(x, u), \tilde{\theta} = F(x, u_{(p)}, \theta)\theta \mid \varphi \in G, F(\cdot, \cdot, 0) \neq 0 \}$, тобто в силу означення 1 клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ є нормалізованим. Він має непорожню тривіальну групу еквівалентності $G_{\text{triv}}^\sim = \{ (\tilde{x}, \tilde{u}) = (x, u), \tilde{\theta} = F(x, u_{(p)}, \theta)\theta \mid F(\cdot, \cdot, 0) \neq 0 \}$, якою потрібно знехтувати, і $G^\sim / G_{\text{triv}}^\sim = \{ (\tilde{x}, \tilde{u}) = \varphi(x, u), \tilde{\theta} = \theta \mid \varphi \in G \}$.

Друга можливість — не накладати ніяких зв'язків на θ . Тоді $\mathcal{S}$ — вся множина диференціальних функцій від $(x|u)$ p -го порядку, $T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \{ (\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \mid \theta, \tilde{\theta} \in \mathcal{S}, \varphi \in G \}$ і $G^\sim = \{ (\tilde{x}, \tilde{u}_{(p)}) = \text{pr}_p \varphi(x, u_{(p)}), \tilde{\theta} = F(x, u_{(p)}, \theta) \mid \varphi \in G, \partial F / \partial \theta \neq 0 \}$. Отже, клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований, при-

чому це приклад класів без взаємно-однозначної відповідності між довільними елементами і системами диференціальних рівнянь.

Для класу всіх систем l диференціальних рівнянь для m невідомих функцій n незалежних змінних, які мають порядок не вище, ніж p (тут l, m, n, p — фіксовані натуральні числа), ліві частини рівнянь можна вважати довільними елементами і взяти порожню допоміжну систему S , тобто $k = l$, $L \equiv \theta$ і $\mathcal{S}$ — вся множина з наборів l функціонально незалежних диференціальних функцій від $(x | u)$ p -го порядку. Тоді $T(\mathcal{L}|\mathcal{S}) = \{(\theta, \tilde{\theta}, \varphi) \mid \theta \in \mathcal{S}, \tilde{\theta} = \text{pr}_p \varphi F(x, u_{(p)}, \theta(x, u_{(p)})), |\partial \varphi / \partial(x, u)| \neq 0, \partial F / \partial \theta|_{\theta=0} \neq 0\}$ і $G^\sim = \{\Phi = (\varphi(x, u), F(x, u_{(p)}, \theta)) \mid |\partial \varphi / \partial(x, u)| \neq 0, \partial F / \partial \theta|_{\theta=0} \neq 0\}$, що очевидно показує нормалізованість цього класу.

Нормалізовані класи і проблеми групової класифікації. Поняття нормалізованих класів неявно використано при розв'язанні проблем групової класифікації для багатьох класів систем диференціальних рівнянь. Найбільш відомі класичні проблеми групової класифікації, такі як класифікації С. Лі звичайних диференціальних рівнянь другого порядку і двовимірних лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, було розв'язано з суттєвим залученням сильної нормалізованості наведених вище класів. Подібні класифікаційні техніки, що неявно ґрунтуються на властивостях нормалізованих класів, недавно застосовано при розв'язанні проблем групової класифікації багатьма авторами.

Твердження 7.8. *Нехай клас $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ нормалізований і G^i , $i = 1, 2$, — локальні групи точкових перетворень у просторі змінних (x, u) , причому $\mathcal{S}^i = \{\theta \in \mathcal{S} \mid G_\theta^p = G^i\} \neq \emptyset$. За цих умов $\mathcal{S}^1 \sim \mathcal{S}^2 \bmod G^\sim$ тоді і тільки тоді, коли $G^1 \sim G^2 \bmod G^\sim$.*

Твердження 7.9. *Дві системи з напівнормалізованого класу перетворюються одна в іншу точковим перетворенням тоді і тільки тоді, коли вони еквівалентні відносно групи еквівалентності цього класу.*

Наслідок 7.1. У напівнормалізованому класі класифікації з точністю до еквівалентності, індукованої дією групи еквівалентності, і з точністю до загальної точкової еквівалентності співпадають.

Твердження 7.10. Кожний нормалізований клас систем диференціальних рівнянь є напівнормалізованим.

Твердження 7.11. Нехай клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований і припустимо, що підмножина $\mathcal{S}'$ множини $\mathcal{S}$ визначає підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$, інваріантний відносно дії групи $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. Тоді підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ нормалізований (у тому ж самому сенсі), а $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ — підгрупа групи $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$, що породжує $T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ і, якщо $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі, співпадає з $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'})$ з точністю до калібрувальних перетворень еквівалентності в $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$.

Зауважимо, що за зроблених припущень підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'}$ має аналогічні властивості.

Для класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ і локальної (зв'язаної) групи G точкових перетворень змінних (x, u) такої, що $G = G_{\theta}^p$ для деякого $\theta \in \mathcal{S}$, розглянемо такі підмножини множини $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}_G = \{ \theta \in \mathcal{S} \mid G_{\theta}^p \supset G \}, \quad \bar{\mathcal{S}}_G = \{ \theta \in \mathcal{S} \mid G_{\theta}^p \supset G \bmod G^{\sim} \},$$

$$\mathcal{S}'_G = \{ \theta \in \mathcal{S} \mid G_{\theta}^p = G \}, \quad \bar{\mathcal{S}}'_G = \{ \theta \in \mathcal{S} \mid G_{\theta}^p = G \bmod G^{\sim} \}.$$

Наслідок 7.2. Нехай клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований. Тоді $\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}_G}$ і $\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}'_G}$ — його нормалізовані підкласи. $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$ є підгрупою груп $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}_G})$ і $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}'_G})$ і породжує $T(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}_G})$ і $T(\mathcal{L}|_{\bar{\mathcal{S}}'_G})$.

Твердження 7.12. Підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_0}$ інваріантний відносно $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, де $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}'_{G^{\cap}}$, $G^{\cap} = G^{\cap p}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$.

Твердження 7.13. Якщо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі, то клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G}$ має таку ж властивість. Множину $T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$ породжено групою $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G}) \cap G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, проекція якої на (x, u) — нормалізатор G в $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})|_{(x, u)}$.

Твердження 7.14. Припустимо, що $\mathcal{S}'_G \neq \emptyset$. Тоді $G^{\cap p}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}) = G$, $G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}) \subset G^{\sim}(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'_G})$ і, якщо клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ нормалізований у звичайному сенсі, проєкції цих груп еквівалентності на (x, u) співпадають.

Зауваження 7.4. Взагалі кажучи, нормалізованість класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ не призводить до нормалізованості підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_G}$.

З огляду на наведені твердження, проблема групової класифікації у будь-якому нормалізованому класі диференціальних рівнянь зводиться до підгрупового аналізу відповідної групи еквівалентності. Властивість сильної нормалізованості є ознакою того, що значна частина підгруп буде групами ліівської симетрії систем з класу, що розглядається. Більш того, під час класифікації природно виникає ієрархія нормалізованих підкласів, що відповідають випадкам розширення симетрії.

Нормалізовані підкласи і допустимі перетворення. Дослідження нормалізованості класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ або його підкласів необхідне для опису множини $T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$, і його можна включити як крок у вивчення $T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}})$. Як і для умовних груп еквівалентності, тільки частина нормалізованих підкласів при цьому є значимою.

Означення 7.11. Нормалізований підклас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$ класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ назовемо *максимальним*, якщо жоден нормалізований підклас класу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ не містить власно підкласу $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}'}$.

Означення максимальності можна сформулювати в той же спосіб для інших типів нормалізованості, тобто для сильно нормалізованих і напівнормалізованих (у звичайному або узагальненому сенсі) класів. Взагалі кажучи, максимальний сильно нормалізований підклас не є обов'язково максимальним нормалізованим підкласом і максимальний нормалізований підклас не є обов'язково максимальним напівнормалізованим підкласом. Більш того, максимальний нормалізований або напівнормалізований підклас може бути неасоційований з максимальною умовною

групою еквівалентності. Однак жоден власний підклас нормалізованого класу не приводить до максимальної умовної групи еквівалентності.

Алгоритм опису множини допустимих перетворень можна модифікувати через включення у нього як додаткового кроку дослідження нормалізованих властивостей підкласів, асоційованих з максимальними групами еквівалентності, і побудови повної сім'ї максимальних нормалізованих підкласів. Максимальні нормалізовані підкласи можна вивчати з точністю до $G^\sim$ -еквівалентності. Зауважимо, що при розв'язанні проблеми групової класифікації, немаксимальні нормалізовані підкласи виникають як можливі класифікаційні випадки, а тому також мають бути розглянуті.

Проблему класифікації допустимих перетворень можна вважати розв'язаною, наприклад, у таких випадках.

1. У силу означення нормалізованого класу, множина допустимих перетворень відома, якщо клас виявляється нормалізованим і пораховано його групу еквівалентності. Тоді

$$T(\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}) = \{ (\theta, \Phi\theta, \Phi|_{(x,u)}) \mid \theta \in \mathcal{S}, \Phi \in G^\sim \}.$$

До цього випадку відносяться всі класи нелінійних рівнянь Шрьодінгера [41, 140]. Зауважимо, що будь-який нормалізований клас має, з точністю до тривіальних перетворень еквівалентності, єдину максимальну умовну групу еквівалентності, яка очевидно співпадає з групою еквівалентності цього класу. Підклас не може породжувати максимальну умовну групу еквівалентності класу, якщо він власно міститься у нормалізованому підкласі.

2. Припустимо, що клас $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}}$ зображено як об'єднання неперетинних нормалізованих підкласів, і допустимих перетворень між системи з різних підкласів немає. Тобто $\mathcal{S} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{S}_\gamma$, $\mathcal{L}|_{\mathcal{S}_\gamma}$ — нормалізований для будь-якого $\gamma \in \Gamma$, $\mathcal{S}_\gamma \cap \mathcal{S}_{\gamma'} = \emptyset$ і $T(\theta, \theta') = \emptyset$, де $\theta \in \mathcal{S}_\gamma$, $\theta' \in \mathcal{S}_{\gamma'}$, $\gamma \neq \gamma'$.

Тоді $G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}) = \cap_{\gamma \in \Gamma} G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma)$ і $T(\mathcal{L}|\mathcal{S})$ — об'єднання множин $T(\mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma)$ допустимих перетворень підкласів, кожен з яких легко побудувати:

$$T(\mathcal{L}|\mathcal{S}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{ (\theta, \Phi\theta, \Phi|_{(x,u)}) \mid \theta \in \mathcal{S}_\gamma, \Phi \in G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma) \}.$$

Виберемо підмножину Λ у Γ таку, що $G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}_\lambda) \neq G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}_{\lambda'})$ для будь-яких різних $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ і для довільного $\gamma \in \Gamma$ існує $\lambda \in \Lambda$, що задовольняє умову $G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}_\lambda) = G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}_\gamma)$. Позначимо через Γ_λ підмножину тих γ , що відповідають фіксованому λ . Тоді множини максимальних нормалізованих підкласів класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$ вичерпують об'єднання $\bar{\mathcal{S}}_\lambda = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_\lambda} \mathcal{S}_\gamma$, $\lambda \in \Lambda$. Групи $G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}_\lambda) = G^\sim(\mathcal{L}|\bar{\mathcal{S}}_\lambda)$ вичерпують множину максимальних умовних груп еквівалентності класу $\mathcal{L}|\mathcal{S}$.

Множина допустимих перетворень класу нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалами і загальною модульною нелінійністю має наведену структуру для довільної просторової розмірності [41, 140].

3. Більш нетривіальна ситуація щодо допустимих перетворень виникає, коли максимальні нормалізовані підкласи мають непорожній перетин. Нехай $\mathcal{S}', \mathcal{S}'' \subset \mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'' \neq \emptyset$, підкласи $\mathcal{L}|\mathcal{S}'$ і $\mathcal{L}|\mathcal{S}''$ нормалізовані, $\mathcal{S}' = G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}') \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''$ і $\mathcal{S}'' = G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}'') \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''$. Останні дві умови означають, що будь-яке рівняння з $\mathcal{L}|\mathcal{S}'$ (або $\mathcal{L}|\mathcal{S}''$) еквівалентне відносно $G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}')$ (або $G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}'')$) рівнянню з $\mathcal{L}|\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''$. Тоді будь-яке допустиме перетворення $(\theta', \theta'', \varphi)$ з $\theta' \in \mathcal{S}'$ і $\theta'' \in \mathcal{S}''$ можна зобразити у вигляді $(\theta', \Phi^2(\Phi^1\theta'), (\Phi^2 \circ \Phi^1)|_{(x,u)})$, де $\Phi^1 \in G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}')$, $\Phi^2 \in G^\sim(\mathcal{L}|\mathcal{S}'')$ і $\Phi^1\theta' \in \mathcal{S}' \cap \mathcal{S}''$. Множини допустимих перетворень такої структури мають, наприклад, деякі класи рівнянь реакції–дифузії зі змінними коефіцієнтами [69].

Наведені випадки охоплюють тільки найпростіші ситуації опису множин допустимих перетворень у термінах нормалізованих підкласів.

7.4 Нормалізовані класи систем еволюційних рівнянь

Вивчимо властивості нормалізованості загальних класів $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь, їх підкласів та деяких класів систем $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь другого порядку.

Розглянемо клас $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь n -го порядку

$$u_t = H(t, x, u, u_x, u_{(n,x)}), \quad (7.1)$$

де $n \geq 2$, $H_{u_n} \neq 0$. Тут $u_k = \partial^k u / \partial x^k$, $k \in \mathbb{N}$, $u_0 = u$, $u_{(n,x)} = (u_0, \dots, u_n)$.

Добре відомо (Магадєєв, 1993), що кожне контактне перетворення, яке відображає рівняння з класу (7.1) у рівняння з цього ж класу, обов'язково має вигляд

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x, u, u_x), \quad \tilde{u} = U(t, x, u, u_x). \quad (7.2)$$

Функції T , X і U задовольняють умови невиродженості

$$T_t \neq 0, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} X_x & X_u & X_{u_x} \\ U_x & U_u & U_{u_x} \end{pmatrix} = 2 \quad (7.3)$$

і контактності

$$(U_x + U_u u_x) X_{u_x} = (X_x + X_u u_x) U_{u_x}. \quad (7.4)$$

Перетворення (7.2) однозначно продовжується на похідні u_x і u_{xx} за формулами $\tilde{u}_{\tilde{x}} = V(t, x, u, u_x)$ і $\tilde{u}_{\tilde{x}\tilde{x}} = D_x V / D_x X$, де

$$V = \frac{U_x + U_u u_x}{X_x + X_u u_x} \quad \text{або} \quad V = \frac{U_{u_x}}{X_{u_x}},$$

якщо $X_x + X_u u_x \neq 0$ або $X_{u_x} \neq 0$ відповідно. Права частина перетвореного рівняння дорівнює

$$\tilde{H} = \frac{U_u - X_u V}{T_t} H + \frac{U_t - X_t V}{T_t} \quad (7.5)$$

і $(X_u, U_u) \neq (0, 0)$ в силу (7.3) і (7.4). Більш того, кожне з перетворень вигляду (7.2) відображає клас (7.1) на себе, а тому його продовження

на довільний елемент H належить контактній групі еквівалентності $G_c^\sim$ класу (7.1). (Інших елементів у $G_c^\sim$ немає.) Іншими словами, група еквівалентності $G_c^\sim$ породжує всю множину допустимих контактних перетворень у класі (7.1), тобто цей клас нормалізований відносно контактних перетворень. Стисло сформулюємо наведені результати.

Твердження 7.15. *Клас (7.1) контактно-нормалізований. Контактна група еквівалентності $G_c^\sim$ класу (7.1) складається з перетворень (7.2), що задовольняють умови (7.3) і (7.4) і продовжені на довільний елемент H згідно (7.5).*

Зауважимо, що клас (7.1) також точково-нормалізований. Його точкова група еквівалентності $G_p^\sim$ складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x, u), \quad \tilde{u} = U(t, x, u), \\ \tilde{H} &= \frac{\Delta}{T_t D_x X} H + \frac{U_t D_x X - X_t D_x U}{T_t D_x X}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

де T , X і U пробігають відповідні множини гладких функцій, що задовольняють умови невиродженості $T_t \neq 0$ і $\Delta = X_x U_u - X_u U_x \neq 0$.

Існують підкласи класу (7.1), допустимі контактні перетворення в яких насправді вичерпано точковими перетвореннями.

Твердження 7.16. *Кожне контактне перетворення між квазілінійними рівняннями вигляду (7.1) є продовженням точкового.*

Розглянемо клас систем еволюційних рівнянь другого порядку загального вигляду

$$\bar{u}_t = \bar{F}(t, x, \bar{u}_x, \bar{u}_{xx}), \quad (7.7)$$

де $\bar{u} = (u^1, \dots, u^m)$, $\bar{F} = (F^1, \dots, F^m)$ і $|\partial \bar{F} / \partial \bar{u}_{xx}| \neq 0$. Будь-яке точкове перетворення $\mathcal{T}$ у просторі змінних $(t, x, \bar{u})$ має вигляд

$$\tilde{t} = \mathcal{T}^t(t, x, \bar{u}), \quad \tilde{x} = \mathcal{T}^x(t, x, \bar{u}), \quad \tilde{u}^a = \mathcal{U}^a(t, x, \bar{u}),$$

де $|\partial(\mathcal{T}^t, \mathcal{T}^x, \mathcal{U}) / \partial(t, x, \bar{u})| \neq 0$, $\bar{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}^1, \dots, \mathcal{U}^m)$.

Лема 7.1. Точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує дві системи з класу (7.7) тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{T}_x^t = \mathcal{T}_{u^a}^t = 0$, тобто $\mathcal{T}^t = T(t)$, де T — довільна гладка функція від t з $T_t \neq 0$. Довільні елементи перетворюються за формулою

$$\tilde{F}^a = \frac{\mathcal{U}_{u^b}^a D_x \mathcal{T}^x - \mathcal{T}_{u^b}^x D_x \mathcal{U}^a}{T_t D_x \mathcal{T}^x} F^b + \frac{\mathcal{U}_t^a D_x \mathcal{T}^x - \mathcal{T}_t^x D_x \mathcal{U}^a}{T_t D_x \mathcal{T}^x},$$

де $D_x = \partial_x + u_x^b \partial_{u^b} + \dots$ — оператор повного диференціювання по x . Отже, клас (7.7) нормалізований. Група еквівалентності класу (7.7) складається з перетворень, визначених у просторі змінних і довільних елементів згідно наведених формул.

Аналогічно, розглянемо підклас класу (7.7), утворений системами з довільними елементами, лінійними по $\bar{u}_{xx}$, тобто

$$u_t^a = S^{ab}(t, x, \bar{u}, \bar{u}_x) u_{xx}^b + H^a(t, x, \bar{u}, \bar{u}_x), \quad (7.8)$$

де $|S| \neq 0$, $S = (S^{ab})$, $\bar{H} = (H^1, \dots, H^m)$.

Лема 7.2. Точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує дві системи з класу (7.8) тоді і лише тоді, коли $\mathcal{T}_x^t = \mathcal{T}_{u^a}^t = 0$ і $\mathcal{T}_{u^a}^x = 0$, тобто $\mathcal{T}^t = T(t)$ і $\mathcal{T}^x = X(t, x)$, де T і X — довільні гладкі функції своїх аргументів такі, що $T_t X_x \neq 0$. Більш того, якобіан $|\partial \bar{\mathcal{U}} / \partial \bar{u}| \neq 0$. Довільні елементи перетворюються за формулами

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \frac{X_x^2}{T_t} \frac{\partial \bar{\mathcal{U}}}{\partial \bar{u}} S \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{U}}}{\partial \bar{u}} \right)^{-1}, \\ \tilde{\bar{H}} &= \frac{1}{T_t} \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{U}}}{\partial \bar{u}} \bar{H} + \bar{\mathcal{U}}_t - \frac{X_t}{X_x} D_x \bar{\mathcal{U}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \bar{\mathcal{U}}}{\partial \bar{u}} S \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{U}}}{\partial \bar{u}} \right)^{-1} \left(D_x \bar{\mathcal{U}}_x + u_x^a D_x \bar{\mathcal{U}}_{u^a} - \frac{X_{xx}}{X_x} D_x \bar{\mathcal{U}} \right) \right). \end{aligned}$$

Отже, клас (7.8) нормалізований. Група еквівалентності класу (7.8) складається з перетворень, визначених у просторі змінних і довільних елементів згідно наведених формул.

Зауваження 7.5. Якщо $S = \text{diag}(\Sigma^1, \dots, \Sigma^m)$ і $\tilde{S} = \text{diag}(\tilde{\Sigma}^1, \dots, \tilde{\Sigma}^m)$ — діагональні матриці-функції, то в силу леми 7.2 існує перестановка $\sigma \in S_m$ така, що $\tilde{\Sigma}^a = X_x^2 T_t^{-1} \Sigma^{\sigma(a)}$ і $\mathcal{U}_{u^b}^a(\Sigma^{\sigma(a)} - \Sigma^b) = 0$. (В останній формулі підсумовування немає.) У випадку, коли $\Sigma^a \neq \Sigma^b$ для будь-якого $a \neq b$, з цього випливає, що $\mathcal{U}_{u^b}^a = 0$ при $\sigma(a) \neq b$.

Наслідок 7.3. Підклас класу (7.8), утворений системами, лінійними за похідними, тобто визначений зв'язками $S_{u_x^c}^{ab} = 0$, $H_{u_x^c u_x^b}^a = 0$ на довільні елементи, є нормалізованим. Група еквівалентності цього підкласу є підгрупою групи еквівалентності класу (7.8) і складається з перетворень, в яких параметр-функції $\mathcal{U}^a$ додатково задовольняють умови $\mathcal{U}_{u^b u^c}^a = 0$, тобто $\mathcal{U}^a = U^{ab}(t, x)u^b + U^{a0}(t, x)$.

Наслідок 7.4. Підклас класу (7.8), виокремлений зв'язками $S_{u_x^c}^{ab} = S_{u^c}^{ab} = 0$, $H_{u_x^c u_x^b}^a = H_{u_x^c u^b}^a = H_{u^c u^b}^a = 0$, тобто утворений лінійними системами, є нормалізованим. Група еквівалентності цього підкласу співпадає з групою, описаною у наслідку 7.3.

Зауваження 7.6. Існує співвідношення між нормалізаційними властивостями загальних класів неоднорідних і відповідних однорідних лінійних систем диференціальних рівнянь. А саме, розглянемо клас $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ однорідних лінійних систем з l диференціальних рівнянь вигляду $L_\theta u = 0$ для m невідомих функцій $u = (u^1, \dots, u^m)$ від n незалежних змінних $x = (x_1, \dots, x_n)$. Тут $L_\theta = (L_\theta^{\mu a})$, $\mu = 1, \dots, l$ — матричний диференціальний оператор, параметризований θ , що пробігає множину функцій від x . Нехай відповідний клас $\mathcal{L}_{\text{inh}}$ неоднорідних систем нормалізований і його група еквівалентності $G_{\text{inh}}^\sim$ складається з перетворень, проективних по x і афінних по u , тобто перетворення для (x, u) мають вигляд $\tilde{x} = X(x)$ і $\tilde{u} = U^{ab}(x)u^b + U^{a0}(x)$ для будь-якого $\mathcal{T} \in G_{\text{inh}}^\sim$. Тоді клас $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ напівнормалізований. Група еквівалентності $G_{\text{hom}}^\sim$ класу $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ ізоморфна підгрупі групи $G_{\text{inh}}^\sim$, складеної перетворення з $(\hat{U}^{ab}U^{a0})$, що пробігає перетин множин розв'язків систем з $\mathcal{L}_{\text{hom}}$, де $(\hat{U}^{ab})$ — обернена до (U^{ab}) .

матриця. Зазвичай з цього випливає, що $U^{a0} = 0$. Додаткова умова на допустимі перетворення в $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ полягає у тому, що $(\hat{U}^{ab}U^{b0})$ є розв'язком вихідної системи (з фіксованими значеннями довільних елементів). Отже, при обмеженні на $\mathcal{L}_{\text{hom}}$ нормалізація порушується через лінійний принцип суперпозиції. Це обґрунтовує розгляд неоднорідних лінійних систем при дослідженні допустимих перетворень.

Комбінування зауваження 7.6 і наслідку 7.4 приводить до твердження про властивості відповідного класу однорідних лінійних систем.

Наслідок 7.5. *Підклас класу (7.8), утворений однорідними лінійними системами (тобто зв'язками на довільні елементи $\in S_{u_x^c}^{ab} = S_{u^c}^{ab} = 0$, $H_{u_x^c u_x^b}^a = H_{u_x^c u^b}^a = H_{u^c u^b}^a = 0$ і $u_x^c H_{u_x^c}^a + u^c H_{u^c}^a = H^a$), є напівнормалізованим. Група еквівалентності цього підкласу — підгрупа групи з наслідку 7.3, яка складається з перетворень з $U^{a0} = 0$. Точкове перетворення $\mathcal{T}$ пов'язує дві системи з цього класу тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{T}_x^t = \mathcal{T}_{u^a}^t = 0$, $\mathcal{T}_{u^a}^x = 0$ і $\mathcal{U}_{u^b u^c}^a = 0$, тобто $\mathcal{T}^t = T(t)$, $\mathcal{T}^x = X(t, x)$ і $\mathcal{U}^a = U^{ab}(t, x)u^b + U^{a0}(t, x)$, де T, X , U^{ab} і U^{a0} — довільні гладкі функції своїх аргументів такі, що $T_t X_x |U^{ab}| \neq 0$, і додатково $(\hat{U}^{ab}U^{b0})$ є розв'язком вихідної системи. Тут $(\hat{U}^{ab})$ — матриця, обернена до (U^{ab}) .*

Зауваження 7.7. При зображенні систем з класу (7.7), лінійних по $\bar{u}_{xx}$, у вигляді (7.8) кожне F^a замінено набором довільних елементів (S^{ab}, H^a) . У цьому конкретному випадку різні зображення дають еквівалентні результати. Так, формули для перетворень елементів S^{ab} і H^a можна отримати з аналогічних формул для F^a розщепленням відносно $\bar{u}_{xx}$. Відповідні множини допустимих перетворень, а також групи еквівалентності — ізоморфні. З розглянутими вище підкласами класу (7.8) можна працювати таким же способом. А саме, можна накладати зв'язки на функції S^{ab} і послідовно замінювати H^a виразами $H^{ab}(t, x, \bar{u})u_x^b + G^a(t, x, \bar{u})$, $H^{ab}(t, x)u_x^b + G^{ab}(t, x)u^b + G^{a0}(t, x)$ і $H^{ab}(t, x)u_x^b + G^{ab}(t, x)u^b$. Формули перетворення для нових довільних елементів можна знайти розщепленням

формул перетворення для $\bar{H}$ відносно $\bar{u}_x$ або $(\bar{u}_x, u)$. Групи еквівалентності різних зображень цих підкласів ізоморфні.

Отже, нами розвинуто теоретичні основи симетрійного аналізу у класах систем диференціальних рівнянь. Запропоновано низку нових понять, пов'язаних з такими класами: розширена (узагальнена розширена, умовна, потенціальна) група еквівалентності, нормалізований (напівнормалізований, строго нормалізований) клас, подібні класи, відображення між класами, породжене точковими перетвореннями тощо. Вони дозволяють адекватно формулювати проблеми класифікації для складних класів, узагальнювати постановки задач і отримувати кінцеві результати класифікацій у замкненому і простому вигляді. Нові методи, розроблені на основі отриманих результатів, істотно розширюють коло розв'язних класифікаційних задач.

Уточнено поняття цілком невідродженої системи диференціальних рівнянь, введено поняття цілковитої невідродженості відносно ваги, яке є важливим у дослідженнях потенціальних структур над диференціальними рівняннями.

Також введено нове поняття нормалізованого (сильно нормалізованого, напівнормалізованого) класу відносно різних типів групи еквівалентності. Показано, що алгебраїчні методи групової класифікації можна прямо застосовувати до класу систем диференціальних рівнянь тоді і тільки, коли клас нормалізований. Це визначає межі ефективності алгебраїчних методів у чистому вигляді і природно веде до висновку, що для використання у ненормалізованих класах їх потрібно додатково комбінувати з іншими підходами, наприклад, розбивати такі класи на нормалізовані підкласи або розглядати замість вихідних класів нормалізовані надкласи. Нормалізованість також є відповіддю на питання, яку властивість має мати клас, щоб так звана часткова групова класифікація в ньому давала вичерпний результат.

Доведено ряд тверджень, з яких випливає, що аналіз нееквівалент-

тних випадків при груповій класифікації у нормалізованому класі природно веде до побудови ієрархії нормалізованих підкласів. Це дає ще одну можливість для оптимізації процесу класифікації.

Вперше поставлено задачу про класифікацію допустимих перетворень у класах систем диференціальних рівнянь та запропоновано розв'язувати її через класифікацію максимальних груп умовної еквівалентності і максимальних нормалізованих підкласів.

Для ілюстрації введених понять побудовано ланцюжки вкладених нормалізованих або напівнормалізованих класів $(1+1)$ -вимірних еволюційних рівнянь та систем таких рівнянь.

Наведені вище результати опубліковано у роботах [41, 90, 121, 140, 134].

8 Інваріанти алгебр Лі

Означення узагальнених операторів Казіміра. Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g}$ розмірності $\dim \mathfrak{g} = n < \infty$ і відповідну зв'язану групу Лі G . Нехай $\mathfrak{g}^*$ — дуальний простір до $\mathfrak{g}$. Відображення $\text{Ad}^*: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*)$, визначене для кожного $g \in G$ співвідношенням $\langle \text{Ad}_g^* x, u \rangle = \langle x, \text{Ad}_{g^{-1}} u \rangle$ $\forall x \in \mathfrak{g}^*$ і $\forall u \in \mathfrak{g}$, називають *копрієднаним зображенням* групи Лі G . Тут $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ — звичайне приєднане зображення групи G на $\mathfrak{g}$, а образ Ad_G групи G при Ad — група внутрішніх автоморфізмів $\text{Int}(\mathfrak{g})$ алгебри $\mathfrak{g}$. Образ Ad_G^* групи G при Ad^* є підгрупою групи $\text{GL}(\mathfrak{g}^*)$.

Рангом копрієданого зображення rank Ad_G^* групи G (і алгебри $\mathfrak{g}$) називають максимальну розмірність орбіт групи Ad_G^* . Це базисно незалежна характеристика алгебри $\mathfrak{g}$. Орбіти такої розмірності називають регулярними.

Функцію $F \in C^\infty(\Omega)$, де Ω — деяка область у $\mathfrak{g}^*$, називають *інваріантом* групи Ad_G^* (глобальним на Ω), якщо $F(\text{Ad}_g^* x) = F(x)$ для всіх $g \in G$ і $x \in \Omega$ таких, що $\text{Ad}_g^* x \in \Omega$. Множину інваріантів групи Ad_G^* на

Ω позначимо через $\text{Inv}(\text{Ad}_G^*)$, не вказуючи явно область. Нехай надалі Ω — окіл точки з регулярної орбіти. Його завжди можна вибрати таким чином, щоб група Ad_G^* діяла на ньому регулярно. Тоді максимальна кількість $N_{\mathfrak{g}}$ функціонально незалежних інваріантів у $\text{Inv}(\text{Ad}_G^*)$ співпадає з корозмірністю регулярних орбіт групи Ad_G^* , тобто $N_{\mathfrak{g}} = \dim \mathfrak{g} - \text{rank} \text{Ad}_G^*$.

Щоб обчислити інваріанти явно, в алгебрі $\mathfrak{g}$ необхідно зафіксувати базис $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$. Це веде до фіксації дуального базису $\mathcal{E}^* = \{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ у дуальному просторі $\mathfrak{g}^*$ і ототожнення $\text{Int}(\mathfrak{g})$ і Ad_G^* з відповідними матричними групами. Базисні елементи $e_1, \dots, e_n$ задовольняють комутаційні відношення $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, де c_{ij}^k — компоненти тензора структурних сталих алгебри $\mathfrak{g}$ у базисі $\mathcal{E}$. Нехай $x \rightarrow \check{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — координати у просторі $\mathfrak{g}^*$, асоційовані з $\mathcal{E}^*$.

Добре відомо, що існує бієкція між елементами центру універсальної обгортуючої (*операторами Казіміра*) і поліноміальними інваріантами алгебри $\mathfrak{g}$. Таку бієкцію встановлює, зокрема, оператор симетризації Sym , який діє на одноклени за формулою

$$\text{Sym}(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) = \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} e_{i_{\sigma_1}} \cdots e_{i_{\sigma_r}},$$

де $i_1, \dots, i_r$ приймають значення від 1 до n , $r \in \mathbb{N}$, S_r позначає групу перестановок r елементів. Симетризацію також можна коректно визначити для раціональних інваріантів, а її коректність для інших інваріантів (якщо в $\text{Inv}(\text{Ad}_G^*)$ не існує функціонального базису з раціональних інваріантів) вимагає додаткового дослідження для кожного конкретної алгебри, оскільки загальних результатів щодо цього поки не існує. Симетризовані елементи з $\text{Inv}(\text{Ad}_G^*)$ природно назвати інваріантами або узагальненими операторами Казіміра алгебри $\mathfrak{g}$. Множина функціонально незалежних інваріантів $F^l(x_1, \dots, x_n)$, $l = \overline{1, N_{\mathfrak{g}}}$, утворює *функціональний базис* (*фундаментальний інваріант*) множини $\text{Inv}(\text{Ad}_G^*)$, тобто будь-який інваріант $F(x_1, \dots, x_n)$ можна єдиним чином зобразити як функцію від незалежних інваріантів $F^l(x_1, \dots, x_n)$, $l = \overline{1, N_{\mathfrak{g}}}$. Відповідну множи-

ну $\text{Sym } F^l(e_1, \dots, e_n)$, $l = \overline{1, N_{\mathfrak{g}}}$, називають базисом множини інваріантів $\text{Inv}(\mathfrak{g})$ алгебри $\mathfrak{g}$.

Алгоритм. Нагадаємо деякі факти з робіт Фелса та Олвера (1998, 1999) і адаптуємо їх до часткового випадку копрієднаної дії групи G на простір $\mathfrak{g}^*$. Нехай $\mathcal{G} = \text{Ad}_G^* \times \mathfrak{g}^*$ — тривіальне ліве головне Ad_G^* -розшарування над $\mathfrak{g}^*$. Правою регуляризацією $\widehat{R}$ копрієднаної дії групи G на $\mathfrak{g}^*$ є діагональна дія групи Ad_G^* на $\mathcal{G} = \text{Ad}_G^* \times \mathfrak{g}^*$, що задається відображенням $\widehat{R}_g(\text{Ad}_h^*, x) = (\text{Ad}_h^* \cdot \text{Ad}_{g^{-1}}^*, \text{Ad}_g^* x)$, $g, h \in G$, $x \in \mathfrak{g}^*$, і є регулярною та вільною. Назвемо $\widehat{R}_g$ *піднятою копрієднаною дією* групи G . Вона проектується на копрієднану дію на $\mathfrak{g}^*$ через Ad_G^* -еквіваріантну проєкцію $\pi_{\mathfrak{g}^*}: \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Будь-який *піднятий інваріант* групи Ad_G^* — це (локально визначена) гладка функція з $\mathcal{G}$ на деякий многовид, інваріантна відносно піднятої копрієднаної дії групи G . Функція $\mathcal{I}: \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{g}^*$, задана формулою $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\text{Ad}_g^*, x) = \text{Ad}_g^* x$, є *фундаментальним піднятим інваріантом* групи Ad_G^* , тобто $\mathcal{I}$ — піднятий інваріант, і будь-який піднятий інваріант єдиним чином можна локально задати як функцію від $\mathcal{I}$. Використовуючи довільну функцію $F(x)$ на $\mathfrak{g}^*$, можна утворити піднятий інваріант $F \circ \mathcal{I}$ групи Ad_G^* заміною x на $\mathcal{I} = \text{Ad}_g^* x$ у виразі для F . Звичайні інваріанти є частковими випадками піднятих інваріантів, що співпадають зі своїми композиціями з стандартною проєкцією $\pi_{\mathfrak{g}^*}$. Отже, звичайні інваріанти є частковими функціональними комбінаціями піднятих, які виявляються незалежними від параметрів групи Ad_G^* .

Алгебраїчний алгоритм для знаходження інваріантів алгебри Лі $\mathfrak{g}$ стисло сформульовано у наступних чотирьох кроках.

1. *Побудова загальної матриці $B(\theta)$ групи Ad_G^* .* $B(\theta)$ — матриця внутрішнього автоморфізму алгебри Лі $\mathfrak{g}$ у вибраному базисі $e_1, \dots, e_n$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ — повний набір параметрів (координат) групи $\text{Int}(\mathfrak{g})$ і $r = \dim \text{Ad}_G^* = \dim \text{Int}(\mathfrak{g}) = n - \dim Z(\mathfrak{g})$, де $Z(\mathfrak{g})$ — центр алгебри $\mathfrak{g}$.

2. *Зображення фундаментального піднятого інваріанту.* Фундаментальний піднятий інваріант $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n)$ групи Ad_G^* у вибраних

координатах $(\theta, \check{x})$ в $\text{Ad}_G^* \times \mathfrak{g}^*$ має явний вигляд $\mathcal{I} = \check{x}B(\theta)$.

3. *Виключення параметрів через нормалізацію.* Виберемо максимально можливу кількість ρ піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{j_1}, \dots, \mathcal{I}_{j_\rho}$, сталі $c_1, \dots, c_\rho$ і параметри групи $\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_\rho}$ такі, що рівняння $\mathcal{I}_{j_1} = c_1, \dots, \mathcal{I}_{j_\rho} = c_\rho$ розв'язні відносно $\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_\rho}$. Підстановка знайдених значень $\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_\rho}$ в інші підняті інваріанти $\mathcal{I}_j$ дає $N_{\mathfrak{g}} = n - \rho$ виразів $F^l(\check{x})$ без θ .

4. *Симетризація.* Функції $F^l(x_1, \dots, x_n)$ обов'язково утворюють базис множини $\text{Inv}(\text{Ad}_G^*)$. Тоді $\text{Sym } F^l(e_1, \dots, e_n)$ — базис множини $\text{Inv}(\mathfrak{g})$.

Твердження 8.1. *Нехай $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n)$ — фундаментальний піднятий інваріант і для піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{j_1}, \dots, \mathcal{I}_{j_\rho}$ та деяких сталих $c_1, \dots, c_\rho$ система $\mathcal{I}_{j_1} = c_1, \dots, \mathcal{I}_{j_\rho} = c_\rho$ розв'язна відносно параметрів $\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_\rho}$, а підстановка знайдених значень цих параметрів у інші підняті інваріанти приводить до $m = n - \rho$ виразів $\hat{\mathcal{I}}_1, \dots, \hat{\mathcal{I}}_m$, залежних тільки від $\check{x}$. Тоді $\rho = \text{rank Ad}_G^*$, $m = N_{\mathfrak{g}}$ і $\hat{\mathcal{I}}_1, \dots, \hat{\mathcal{I}}_m$ утворюють базис множини $\text{Inv}(\text{Ad}_G^*)$.*

Існуючі приклади обчислення інваріантів алгебр Лі показують, що версія алгебраїчного методу, яка залучає твердження 8.1, є найдієвішою.

Зазвичай для першого кроку підходять другі канонічні координати на $\text{Int}(\mathfrak{g})$, хоча іноді перші канонічні координати є більш прийнятним вибором. На відміну від загальної ситуації, для трикутних алгебр Лі використаємо спеціальні координати для їх груп внутрішніх автоморфізмів, які природно узгоджені з канонічними матричними зображеннями відповідних груп Лі і зі спеціальною подвійною нумерацією базисних елементів. Це приводить до прояснення і суттєвого спрощення всіх обчислень. Зокрема, алгебраїчні системи, які необхідно розв'язувати при нормалізації, стають лінійними відносно невідомих.

Ефективність розробленого алгебраїчного підходу продемонстровано для низькорозмірних алгебр Лі та для низки класів розв'язних алгебр

Лі з фіксованою структурою нільрадикалу, для яких у літературі були відомі лише часткові результати щодо їх інваріантів. Результати опубліковано в роботах [25, 52, 53, 54, 73, 101].

9 Контракції алгебр Лі

Граничні переходи між алгебрами Лі вперше виникли у дослідженнях І. Сегала 1951 році, відтоді контракції алгебр Лі мають широкий спектр застосувань в різних галузях теоретичної фізики та математики, вони також є одним з інструментів дослідження структури множин алгебр Лі. Зокрема, коефіцієнти Вігнера групи Евкліда $E(3)$ було отримано через контракцію коефіцієнтів Вігнера спеціальної ортогональної групи $SO(4)$. Контракції використовують для встановлення зв'язків між різноманітними кінематичними групами та для з'ясування їх фізичного значення. В такий спосіб між собою пов'язано різні алгебри Лі, які включають релятивістський оператор положення, та конформна група і група Шрьодінгера. Контракції також відіграють важливу роль при описі взаємодіючих систем за допомогою динамічних груп. Наприклад, граничний процес, при якому стала зчеплення прямує до нуля, приводить до випадку невзаємодіючих систем.

У роботі [33] розроблено теоретичні основи для вивчення контракцій алгебр Лі над комплексним і дійсним полями та запропоновано нові необхідні критерії існування таких контракцій, що дозволило описати всі слабо нееквівалентні контракції дійсних низькорозмірних алгебр Лі. Крім того було побудовано ряд важливих контрприкладів, які спростовують відомі гіпотези і твердження.

Розглянемо n -вимірну алгебру Лі $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$ (n -вимірний векторний простір V над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ з множенням, заданим дужкою Лі $[\cdot, \cdot]$, яка задовольняє тотожність Якобі та умови білінійності і антисиметричності).

Нехай $U: (0, \varepsilon_1] \rightarrow GL(V)$ — невироджений лінійний оператор на V для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$. Не втрачаючи загальності, можна покласти $\varepsilon_1 = 1$. Параметризована сім'я нових дужок Лі на просторі V визначається через стару дужку наступним чином:

$$\forall \varepsilon \in (0, 1], \forall x, y \in V: [x, y]_\varepsilon = U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y].$$

Якщо границя

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [x, y]_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} U_\varepsilon^{-1}[U_\varepsilon x, U_\varepsilon y] =: [x, y]_0$$

існує для усіх $x, y \in V$, тоді $[\cdot, \cdot]_0$ — добре визначена дужка Лі. Алгебра Лі $\mathfrak{g}_0 = (V, [\cdot, \cdot]_0)$ називається *однопараметричною неперервною контракцією* (або просто *контракцією*) алгебри Лі $\mathfrak{g}$.

Зауважимо, що нами чітко розрізняються поняття сильної та слабкої еквівалентності контракцій. Зокрема, побудовано контрприклад, що спростовує теорему Веймар-Вудз про еквівалентність усіх контракцій узагальненим контракціям Іньоню–Вігнера.

У роботі також розглянуто найпростіші типи контракцій та доведено теорему, що містить повний набір необхідних критеріїв існування контракцій для низькорозмірних алгебр Лі.

Теорема 9.1. *Якщо алгебра Лі $\mathfrak{g}_0$ є власною (неперервною чи послідовною) контракцією алгебри Лі $\mathfrak{g}$, то мають місце наступні співвідношення:*

- 1) $\dim \text{Der } \mathfrak{g}_0 > \dim \text{Der } \mathfrak{g}$ (та $\dim \mathcal{O}(\mathfrak{g}_0) < \dim \mathcal{O}(\mathfrak{g})$);
- 2) $n_A(\mathfrak{g}_0) \geq n_A(\mathfrak{g})$;
- 3) $\dim Z(\mathfrak{g}_0) \geq \dim Z(\mathfrak{g})$; більш того, $\dim \mathfrak{g}_{0(l)} \geq \dim \mathfrak{g}_{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$;
- 4) $\dim \mathfrak{g}_0^{(l)} \leq \dim \mathfrak{g}^{(l)}$, $l \in \mathbb{N}$;
- 5) $\dim \mathfrak{g}_0^l \leq \dim \mathfrak{g}^l$, $l \in \mathbb{N}$;
- 6) $r_{\mathfrak{g}_0} \geq r_{\mathfrak{g}}$;

- 7) $\text{rank } \kappa_{\mathfrak{g}_0} \leq \text{rank } \kappa_{\mathfrak{g}};$
- 8) якщо $\mathfrak{g}$ — унімодулярна, то і $\mathfrak{g}_0$ унімодулярна, іншими словами, умова $\text{tr}(\text{ad}_u) = 0 \ \forall u \in \mathfrak{g}$ приводить до такої самої умови в $\mathfrak{g}_0$;
- 9) якщо $\mathfrak{g}$ — розв'язна алгебра Лі, то $\mathfrak{g}_0$ також розв'язна, крім того, $r_s(\mathfrak{g}_0) \leq r_s(\mathfrak{g});$
- 10) якщо $\mathfrak{g}$ — нільпотентна алгебра Лі, то $\mathfrak{g}_0$ також нільпотентна, крім того, $r_n(\mathfrak{g}_0) \leq r_n(\mathfrak{g});$
- 11) $\mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g})$ для всіх значень $p, q \in \mathbb{N}$, де інваріанти $\mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g}_0)$ і $\mathfrak{C}_{pq}(\mathfrak{g})$ ненульові та визначені;
- 12) (лише над полем $\mathbb{R}!$) $\text{rang}_+ \kappa_{\mathfrak{g}_0} \leq \text{rang}_+ \kappa_{\mathfrak{g}}$ та $\text{rang}_- \kappa_{\mathfrak{g}_0} \leq \text{rang}_- \kappa_{\mathfrak{g}};$ більш того, $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \text{rang}_+ \tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}_0}^\alpha \leq \text{rang}_+ \tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}}^\alpha$ та $\text{rang}_- \tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}_0}^\alpha \leq \text{rang}_- \tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}}^\alpha.$

В теоремі 9.1 використано наступні позначення для величин та об'єктів, пов'язаних з алгеброю Лі $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$: алгебра диференціювань $\text{Der } \mathfrak{g}$, орбіта $\mathcal{O}(\mathfrak{g})$ під дією групи $GL(V)$, центр $Z(\mathfrak{g})$, максимальна розмірність $n_A(\mathfrak{g})$ абелевих підалгебр, форма Кілінга κ та модифікована форма Кілінга $\tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}}^\alpha = \text{tr}(\text{ad}_u \text{ad}_v) + \alpha \text{tr}(\text{ad}_u) \text{tr}(\text{ad}_v)$, кількість додатних (від'ємних) діагональних елементів $\text{rang}_+ \tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}}^\alpha$ ($\text{rang}_- \tilde{\kappa}_{\mathfrak{g}}^\alpha$) у діагональній формі матриці (модифікованої) форми Кілінга, ранг $r_{\mathfrak{g}}$ (тобто розмірність підалгебри Картана), приєднане зображення ad_x елемента $x \in \mathfrak{g}$, нижній центральний ряд $\mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \dots \supset \mathfrak{g}^l \supset \dots$ (де $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^l = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{l-1}]$, $l \in \mathbb{N}$), ряд похідних $\mathfrak{g}^{(0)} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \dots \supset \mathfrak{g}^{(l)} \supset \dots$ (де $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^{(l)} = [\mathfrak{g}^{(l-1)}, \mathfrak{g}^{(l-1)}]$), ранг розв'язності $r_s = r_s(\mathfrak{g})$, ранг нільпотентності $r_n = r_n(\mathfrak{g})$, інваріантна характеристика

$$\mathfrak{C}_{pq} = \frac{\text{tr}(\text{ad}_u^p) \text{tr}(\text{ad}_v^q)}{\text{tr}(\text{ad}_u^p \text{ad}_v^q)}, \quad p, q \in \mathbb{N},$$

що добре визначена при умовах $\text{tr}(\text{ad}_u^p) \neq 0$, $\text{tr}(\text{ad}_v^q) \neq 0$ і $\text{tr}(\text{ad}_u^p \text{ad}_v^q) \neq 0$ та не залежить від u і v .

Відзначимо, що в даній роботі сформульовано ряд нових необхідних критеріїв існування контракцій (наприклад, критерій 12 теореми 9.1), які є ефективним інструментом при дослідженні контракцій алгебр Лі фіксованих розмірностей. Зокрема, критерій 8 дозволив спростувати відому гіпотезу про те, що будь-яку алгебру Лі заданої розмірності можна отримати за допомогою контракції з напівпростої алгебри Лі.

Також було розглянуто багатопараметричні, повторні і послідовні контракції, та обчислено інваріантні величини для досить широких класів розв'язних алгебр Лі.

Лема 9.1. *Нехай $\mathfrak{a}_A$ — n -вимірна алгебра Лі з $(n - 1)$ -вимірним абелевим ідеалом та з комутаційними співвідношеннями, які задаються матрицею A . Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ — корені характеристичного полінома матриці A над полем $\mathbb{C}$.*

Якщо $\lambda_1^i + \dots + \lambda_{n-1}^i \neq 0$, $i \in \{p, q, p + q\}$, то величина $\mathfrak{C}_{pq}$ — добре визначена інваріантна характеристика алгебри $\mathfrak{a}_A$ і обчислюється за формулою

$$\mathfrak{C}_{pq} = \frac{\text{tr}(A^p)\text{tr}(A^q)}{\text{tr}(A^{p+q})} = \frac{(\lambda_1^p + \dots + \lambda_{n-1}^p)(\lambda_1^q + \dots + \lambda_{n-1}^q)}{(\lambda_1^{p+q} + \dots + \lambda_{n-1}^{p+q})}.$$

Ранг алгебри Лі $\mathfrak{a}_A$ (тобто розмірність її підалгебри Картана) дорівнює порядку нульового кореня характеристичного полінома матриці A плюс один.

Аналогічне твердження має місце для n -вимірних алгебр Лі з тривимірним ідеалом Гейзенберга $\mathfrak{h}_3$, $(n - 4)$ -вимірним абелевим ідеалом та з комутаційними співвідношеннями, що задаються матрицею A .

Лема 9.2. *Нехай $\mathfrak{w}_A = A_1 \oplus_A (\mathfrak{h}_3 \oplus (n - 4)A_1)$ і $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ — корені характеристичного полінома матриці A над полем $\mathbb{C}$.*

Якщо $\lambda_1^i + \dots + \lambda_{n-1}^i \neq 0$, $i \in \{p, q, p + q\}$, то $\mathfrak{C}_{pq}$ — добре визначена інваріантна характеристика алгебри $\mathfrak{w}_A$ і задається формулою

$$\mathfrak{C}_{pq} = \frac{\text{tr}(A^p)\text{tr}(A^q)}{\text{tr}(A^{p+q})} = \frac{(\lambda_1^p + \dots + \lambda_{n-1}^p)(\lambda_1^q + \dots + \lambda_{n-1}^q)}{(\lambda_1^{p+q} + \dots + \lambda_{n-1}^{p+q})}.$$

Ранг алгебри $\mathfrak{Li} \mathfrak{w}_A$ (тобто розмірність її підалгебри Картана) дорівнює порядку нульового кореня характеристичного полінома матриці A плюс один.

Нами також розглянуті контракції низькорозмірних алгебр Лі. Зокрема, обчислено інваріантні та напівінваріантні величини для дійсних алгебр Лі розмірностей три та чотири, що застосовуються для відокремлення випадків, коли контракцій не існує. Також сформульовано алгоритм опису контракцій, що використовує класифікацію алгебр Лі і критерії існування контракцій та дозволяє ефективно працювати з контракціями алгебр Лі фіксованих розмірностей. Отримано всі слабо нееквівалентні однопараметричні контракції дійсних та комплексних низькорозмірних алгебр Лі та виконано їх порівняння з виродженнями комплексних низькорозмірних алгебр Лі, дослідженими в роботах Бурде і Штайнхофф та Агаоки.

На рисунках 9.1 та 9.2 зображено класифікації контракцій три- та чотиривимірних дійсних алгебр Лі відповідно.

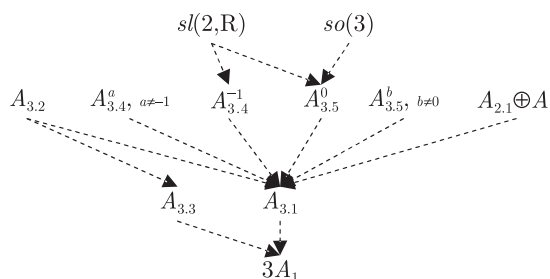
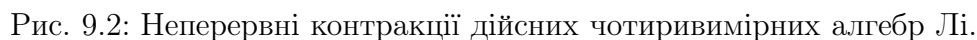


Рис. 9.1: Неперервні контракції дійсних тривимірних алгебр Лі.

Теорема 9.2. *Будь-яка неперервна контракція дійсної тривимірної алгебри Лі еквівалентна узагальненій контракції Іньюн–Вігнера з невід’ємними степенями параметра контракції. Причому лише контракція $so(3) \rightarrow A_{3.1}$ нееквівалентна звичайній ІВ-контракції.*

Теорема 9.3. *Будь-яка неперервна контракція комплексних тривимірних алгебр Лі еквівалентна простій контракції Іньюн–Вігнера.*



Використовуючи отриману класифікацію усіх нееквівалентних контракцій дійсних низькорозмірних алгебр Лі досліджено рівні, ко-рівні та структуру множин три- і чотиривимірних дійсних алгебр Лі. Важливо відзначити (див. рис. 9.2), що алгебри Лі з найпростішими структурами (абелеві та нільпотентні) належать до найнижчих рівнів, а найскладніші алгебри (нерозв'язні та досконалі) належать до найвищих рівнів. Зауважимо також, що, у порівнянні з комплексним випадком, над полем дійсних чисел спостерігається цілком природне роздвоєння незвідних компонент.

10 Інваріантні системи двох ЗДР другого порядку та алгебри Лі векторних полів на площині

Знайдемо усі системи вигляду

$$\ddot{x} = F(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad \ddot{y} = G(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}), \quad (10.1)$$

які інваріантні відносно дійсних низькорозмірних алгебр Лі.

Вивчення таких систем вмотивовано тим, що в багатьох випадках вони є базовими у класичній і квантовій механіці, механіці рідини та у загальній теорії відносності. Зокрема, серед (10.1) міститься усі ньютонівські і геодезичні системи. Дослідження усіх можливих симетрій таких систем є надзвичайно складною задачею. Тому у багатьох роботах виконувалася групова класифікація лише часткових випадків системи (10.1).

Для вичерпного опису регулярних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей не більше чотирьох застосовуємо теорію диференціальних інваріантів. Важливість диференціальних інваріантів пояснюється наступним фактом. Нехай система ЗДР інваріантна відносно алгебри $\mathfrak{g}$. Тоді локально її можна зобразити як об'єднання рівнянь, записаних у термінах диференціальних інваріантів $\mathfrak{g}$ (“регулярна” частина системи) та умов виродження рангів відповідних продовжених генераторів (“сингулярна” частина).

Необхідним етапом вивчення регулярних нормальних систем двох ЗДР другого порядку є побудова універсальних диференціальних інваріантів другого порядку відповідних алгебр. Наступна теорема дає необхідний і достатній критерій існування таких систем для заданої алгебри Лі.

Теорема 10.1. *Алгебра Лі векторних полів допускається нормальною регулярною системою типу (10.1) тоді і тільки тоді, коли ранги першого та другого продовжень цієї алгебри співпадають.*

Повне доведення цієї теореми міститься і роботі [8].

Спираючись на теорію диференціальних інваріантів було отримано вичерпний опис регулярних нормальних систем двох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, інваріантних відносно дійсних алгебр Лі розмірностей не більше чотирьох, а також інваріантні системи, які є сингулярними, тобто включають умови виродження рангів других продовжень генераторів алгебри Лі, а також системи, які не можуть бути записані у нормальній формі. Всі інваріантні системи наведено у додатках А, В та С роботи [29].

У роботі [32] було переглянуто класифікацію векторних полів Лі, що діють на дійсній площині, та отримано повний опис їх диференціальних інваріантів. Результати класифікації та опису диференціальних інваріантів оформлено у вигляді таблиць.

Зауважимо, що класифікацію скінченновимірних алгебр Лі векторних полів на дійсній площині доповнено реалізацією двовимірної алгебри Лі, яку пропущено у роботі Гонзалез-Лопес зі співавторами. Крім того, строго досліджено питання еквівалентності та параметризації в серіях алгебр Лі векторних полів а також обчислено базис диференціальних інваріантів, оператор інваріантного диференціювання і визначник Лі.

Слід відзначити, що задачі опису диференціальних інваріантів алгебр Лі, що діють на дійсній та комплексній площинах істотно відрізняються. Це зумовлено існуванням додаткових нееквівалентних алгебр Лі векторних полів в просторі двох дійсних змінних, які еквівалентні у випадку комплексного поля. Відповідний зв'язок також має місце і між визначниками Лі, базисами диференціальних інваріантів та операторами інваріантного диференціювання.

11 Орбіт-функції та правила галуження орбіт групи Вейля

Порівняно новим об'єктом у математиці є орбіт функції, введені І. Патерою у 2005 році, на основі понять характеру зображення та групи Вейля простої алгебри Лі. Досить швидко з'ясувалось, що згадані C -, S - та E -функції мають ряд корисних властивостей (таких як гладкість, повнота, ортогональність, симетричність/кососиметричність, інваріантність відносно дії групи Вейля), що зробило їх вивчення важливим для застосування до задач математичної фізики, теорії наближень, обробки зображень, інтерполяції тощо.

11.1 Орбіт-функції напівпростих груп Лі рангу три

У статтях [111, 87] детально вивчаються тривимірні неперервні та дискретні C -, S - та E -функції.

Нехай $\mathbb{R}^n$ це дійсний евклідів простір натягнутий на прості корені α простої групи/алгебри Лі G . Зручно також ввести базис фундаментальних ваг: ω -базис.

Решіткою ваг P є усі можливі лінійні комбінації ω -базису з цілими коефіцієнтами. У решітці P визначаємо конус головних ваг P^+ та строго додатніх ваг P^{++}

$$P \supset P^+ = \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}^{\geq 0}\omega_n \supset P^{++} = \mathbb{Z}^{> 0}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}^{> 0}\omega_n.$$

Групою Вейля $W(G)$ простої групи Лі G є скінчена група в $\mathbb{R}^n$ породжена дзеркальними відображеннями відносно $(n-1)$ -вимірних гіперплощин, що ортогональні до простих коренів і містять початок координат

$$r_i x = r_{\alpha_i} x = x - \frac{2\langle x, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} \alpha_i = x - \langle x, \check{\alpha}_i \rangle \alpha_i, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді орбіт-функції можна визначити наступним чином:

C -функція $C_\lambda(x)$, $\lambda \in P^+$ визначається як

$$C_\lambda(x) := \sum_{\mu \in W_\lambda} e^{2\pi i \langle \mu, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (11.1)$$

де W_λ орбіта групи Вейля, породжена точкою λ .

Якщо у (11.1) ми обмежимося орбітою парної підгрупи $W_{e\lambda}$ (підгрупа парної кількості віображень), то ми отримаємо означення E -функції $E_\lambda(x)$, $\lambda \in P_e = P^+ \cup r_i P^+$

$$E_\lambda(x) := \sum_{\mu \in W_{e\lambda}} e^{2\pi i \langle \mu, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Означення S -функції $S_\lambda(x)$, $\lambda \in P^{++}$ майже таке саме, але знак кожного з доданків визначається кількістю відображень $p(\mu)$ необхідних щоб отримати μ з λ

$$S_\lambda(x) := \sum_{\mu \in W_\lambda} (-1)^{p(\mu)} e^{2\pi i \langle \mu, x \rangle} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Звичайно ж μ можна отримати з λ не єдиним чином, проте парність кількості необхідних відображень зберігається і означення є коректним.

У даній роботі для простих та напівпростих компактних групах Лі рангу три вивчено орбіт функції, їх властивості та відповідні дискретні перетворення типу Фур'є. Зокрема, отримано комбінаторні формули для обчислення кількості точок в решітці фундаментальної області та кількості елементів у класах суміжності.

Знайдено оператори Лапласа для яких C -орбіт функції та S -орбіт функції є відповідно розв'язками краєвих задач Неймана та Діріхле в

тривимірному просторі. Вони мають наступний вигляд:

$$\Delta = \begin{cases} \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2, & \text{для } A_1 \times A_1 \times A_1; \\ \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_1}\partial_{x_2} + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2, & \text{для } A_2 \times A_1; \\ 2\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_1}\partial_{x_2} + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2, & \text{для } C_2 \times A_1; \\ 3\partial_{x_1}^2 - 5\partial_{x_1}\partial_{x_2} + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2, & \text{для } G_2 \times A_1; \\ \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_1}\partial_{x_2} + \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_2}\partial_{x_3} + \partial_{x_3}^2, & \text{для } A_3; \\ \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_1}\partial_{x_2} + \partial_{x_2}^2 - 2\partial_{x_2}\partial_{x_3} + 2\partial_{x_3}^2, & \text{для } B_3; \\ 2\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_1}\partial_{x_2} + 2\partial_{x_2}^2 - 2\partial_{x_2}\partial_{x_3} + \partial_{x_3}^2, & \text{для } C_3. \end{cases}$$

Функції $C_\lambda(x)$, $E_\lambda(x)$ та $S_\lambda(x)$ є власними функціями оператора Лапласа:

$$\Delta \begin{pmatrix} C_\lambda(x) \\ E_\lambda(x) \\ S_\lambda(x) \end{pmatrix} = -4\pi^2 \langle \lambda, \lambda \rangle \begin{pmatrix} C_\lambda(x) \\ E_\lambda(x) \\ S_\lambda(x) \end{pmatrix}.$$

Крайові задачі для вище наведених операторів розв'язуються на фундаментальних областях відповідних алгебр Лі, які також наведені у роботі в явному вигляді.

11.2 Ортогональні поліноми та орбіт-функції

У роботах [138, 137, 112] запропоновано рекурсивну побудову двох нескінчених сімей ортогональних поліномів в n змінних, яка може бути застосована до будь-якої напівпростої групи Лі рангу n . Даний результат зокрема містить зв'язок поліномів Чебишева першого та другого роду з поліномами простої групи A_1 , крім того, отримані поліноми нелоранівського типу еквівалентні частинному випадку поліномів Макдональда.

Оскільки в рамках запропонованого підходу ми маємо справу з орбіт-функціями, які є симетричними або косо-симетричними відносно дії групи Вейля, то отримані нами поліноми природно з'являються у якості 'будівельних блоків' в усіх поліномах багатьох змінних, пов'язаних з корене-

вими системами. На відміну від процесу ортогоналізації Грама-Шмідта або визначникової конструкції поліномів, нами було використано ідею розкладу добутків орбіт групи Вейля та властивості характера незвідного зображення.

Основним твердженням запропонованого підходу є наступне.

Твердження 11.1. *Будь-яку незвідну C -функцію та характер χ_λ на-
півпростой групи Лі G можна представити у вигляді полінома від C -
функцій фундаментальних ваг $\omega_1, \dots, \omega_n$.*

Слід також зазначити, що запропоновані поліноми зберігають ряд важливих властивостей орбіт-функцій, зокрема дискретизацію, повноту та ортогональність.

В роботах [138, 137, 112] також було отримано в явному вигляді системи рекурсій необхідних для побудови поліномів усіх простих груп лі рангів не вище за три. Крім цього було вивчено правила галуження отриманих поліномів відносно максимальних редуктивних підгруп групи Вейля.

11.3 Правила галуження орбіт групи Вейля

У роботі [108] розглядаються орбіти групи Вейля $W(A_n)$ та їх редукція до орбіт груп Вейля максимальних редуктивних підалгебр алгебри A_n . В фізичній літературі така задача часто називається обчисленням правил галуження.

Основною нашою задачею є редукувати кожен многогранник (орбіту) до суми концентричних многогранників нижчої симетрії, а часто і меншої розмірності. Загальний підхід може бути описаний наступним чином.

Розглянемо пару алгебр Лі $L \supset L'$ рангів n і m відповідно, де L – проста, а L' – максимальна редуктивна. Задача редукції орбіт для пари $W(L) \supset W(L')$ вважається розв'язанню якщо знайдено $n \times m$ -матрицю

P таку, що точки будь-якої орбіти $W(L)$ перетворюються матрицею P в точки відповідної орбіти $W(L')$. Обчислення правила галуження зводиться до застосування P до точок орбіти та до подального сортування отриманих точок по орбітах $W(L')$.

Зауважимо, що всі правила галужень було обчислено з точністю до контраградієнтних орбіт $W(A_n)$.

Правила галуження для $W(A_n) \rightarrow W(L)$ – це лінійне перетворення між евклідовими просторами $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. На відміну від перетворень окремих точок орбіти, що залежать від вибору базису, правило галуження є єдиним. Наші результати подано у вигляді $n \times m$ -матриць проєкції з цілими коефіцієнтами, отриманими за рахунок спеціально підібраних базисів.

12 Застосування квазікристалів до криптографії та апроксимації майжеперіодичних функцій

Важливим та нетиповим застосуванням інструментарію теорії зображень простих груп Лі є їх застосування до квазікристалів та побудова наближених методів для обчислення майжеперіодичних функцій. Теорія квазікристалів бере свій початок з роботи Шехтмана 1982 року, в якій йдеться про отримання кристалічної решітки сплаву, що не задовольняв тогочасній кристалографічній теорії. На сьогоднішній день кварікристали та майжеперіодичні функції стали важливими напрямками досліджень у сучасній математиці та фізиці.

12.1 Застосування квазікристалів у криптографії

У роботах [110, 64, 88] для побудови симетричного методу шифрування використано наступні властивості квазікристалів: (1) квазікристал не містить жодних періодичних підмножин та (2) розривність $\star$ -перетворення між квазікристалом Λ та його ‘вікном приймання’ Ω .

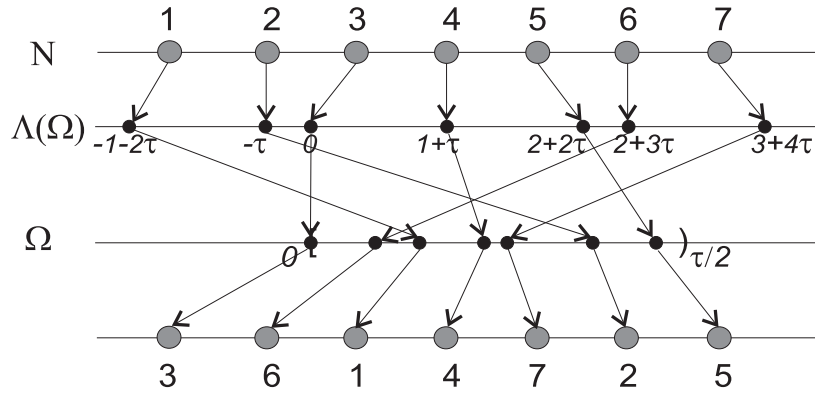


Рис. 12.1: Схема найпростішого шифру основаного на квазікристалі.

Основною ідеєю запропонованого підходу є: взяти цифрові дані, встановити відповідність один до одного між бітами інформації та натуральними числами N , перемістити точки з N на фрагмент квазікристалу Λ (див. перші два рядки рис. 12.1). На цьому етапі дані переміщено на точки квазікристалу. Далі застосовуємо $\star$ -перетворення до точок квазікристалу (див. другий та третій рядки рис. 12.1), що є принциповим кроком процесу шифрування. В результаті ми отримуємо точки квазікристалу з нашими даними у змішаному вигляді на вікні приймання Ω . Залишається лише перетворити вміст Ω на потрібну ґратку для виводу закодованої інформації (див. останні два рядки рис. 12.1).

Процес дешифрування проходить у зворотному порядку.

При використанні квазікристалів усі обчислення можуть бути проведені у цілих числах. Це забезпечує абсолютну точність процесів шифрування та дешифрування та стабільність алгоритму.

Шифрування може бути виконане одним потоком або розбите на блоки для паралельної обробки.

Основний алгоритм шифрування двовимірних зображень складається з наступних кроків:

- Побудова двох різних 1-вимірних квазікристалів $\Lambda^{(1)}$ та $\Lambda^{(2)}$ розмірів n_1 та n_2 відповідно до розмірів вхідних графічних даних $P(L)$.
- Встановлення відповідності один до одного між послідовністю коор-

динат x та точками $\Lambda^{(1)}$, та аналогічні відповідності для координат y і точок $\Lambda^{(2)}$.

- Основний крок шифрування - $\star$ -перетворення $\Lambda^{(1)} \otimes \Lambda^{(2)}$ на відповідне вікно $\Omega_1 \otimes \Omega_2$

$$\begin{aligned} \Lambda^{(1)}(\Omega_1) &\longrightarrow \Omega_1, & \Lambda^{(2)}(\Omega_2) &\longrightarrow \Omega_2; \\ x_1 + x_2\tau_1 &\mapsto x_1 + x_2\tau'_1, & y_1 + y_2\tau_2 &\mapsto y_1 + y_2\tau'_2. \end{aligned}$$

- Залишається лише перетворити точки зашифрованих фрагментів квазікристалу, які зараз лежать в Ω_1 та Ω_2 , у послідовність натуральних чисел вздовж осей x та y .

Для певних типів даних алгоритм шифрування залишає незмінними вертикальні та горизонтальні прямі, див. рис. 12.2b. Цей недолік походить не з властивостей квазікристалу, а з внутрішньої симетрії даних, що кодуються; цього можна уникнути кількома способами: розглядати колір як третю координату і кодувати її окремо або, як показано на рис. 12.2c, двовимірні дані можна розглянути як впорядкований одновимірний масив (модифікація 2). Досить швидким методом є застосування додаткового циклічного зсуву, що не залежить від квазікристалу (модифікація 1), див. рис. 12.2d.

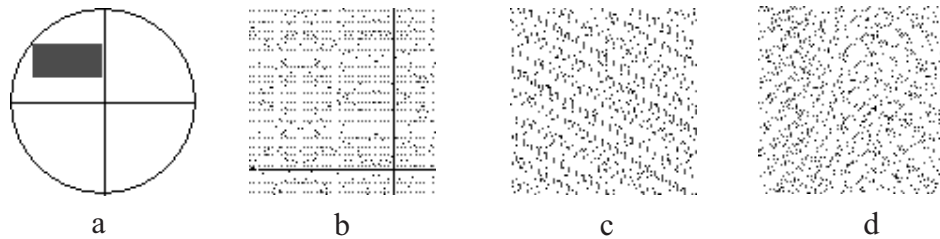


Рис. 12.2: Застосування запропонованого алгоритму шифрування: а – вихідне зображення; b – основний алгоритм; c – модифікація 2; d – модифікація 1.

Криптозмінними приватного ключа є наступні величини:

$$\tau_ \tau'_ a_ b_ sml_ X_ \varepsilon_ I, \quad \text{де}$$

τ, τ' – ірраціональні числа, розв’язки одного з рівнянь $x^2 = mx + 1$, $m = 1, 2, \dots$ або $x^2 = mx - 1$, $m = 3, 4, \dots$; a, b – цілі числа, що задають початкову точку квазікристалу; $X \in \{‘+’, ‘-’\}$ – напрямок побудови квазікристалу; sm^l – послідовність відстаней між сусідніми точками; ε – відстань від кінців інтервалу Ω в межах якої точки вже не розглядаються; $I \in \mathbb{N}$ – кількість ітерацій застосування фіксованого шифру.

12.2 Квазікристали та майже періодичні функції

В роботі [86] розроблено дискретні методи для функцій, які є майже періодичними, але не періодичними.

Квазікристали, квазікристалічні фотонні кристали, хвильові дослідження Фарадея та інші фізичні явища, породжені взаємодіями неспіврозмірних частот, всі призводять до необхідності дослідження майже періодичності. Типовим прикладом є потенціальне поле фізичного квазікристалу, такий потенціал не є періодичною функцією, а належить множині майже періодичних функцій.

Запропоновано метод для дискретного аналізу майже періодичних функцій який має ряд наступних переваг:

- Він цілком базується на теоретико-групових методах, перш за все на скінчених групах та дуальних до них.
- Фур’є наближення, обчислені дискретними методами є майже періодичними самі по собі та одноманітно наближують цільову функцію на всій області визначення.
- Частоти Фур’є, що використовують при наближенні належать до модуля частот Фур’є.

Стандартним підходом при моделюванні таких структур є використання скінченої частини з них та штучне впровадження періодичності поза межами розглянутої області. Хоча такий тип періодизації і широко використовується, він задовольняє не всі задачі моделювання.

Метод що пропонується у роботі проілюстровано на прикладі квазі-кристалу Фібоначчі, одне з наближень зображено на рисунку 12.3.

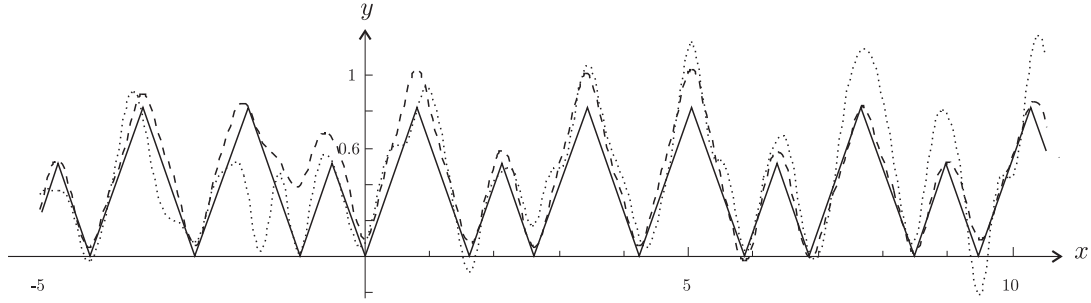


Рис. 12.3: Суцільна лінія є графіком цільової функції, пунктирна лінія — показує наближення з коефіцієнтами Фур'є отриманими за допомогою скінченної суми і штрихова лінія відображає наближення з коефіцієнтами обчисленими за допомогою інтегралу. Обидва наближення обчислені по $N^2 = 49$ точках решітки в фундаментальній області та $M = 11$ шматочках шляху, що відповідає інтервалу інтегрування $R \approx 23,30$. Отримані апроксимації одноманітно наближають цільову функцію на всій числовій прямій.

Зауважимо також, що похибка обчислень нашого методу пов'язана не з аперіодичною природою задачі, а з власною похибкою аналізу, а саме з тим як добре ми можемо наблизити функцію використовуючи лише скінчену кількість її коефіцієнтів Фур'є. Докладний алгоритм, що дозволяє проводити ефективний дискретний Фур'є аналіз майже періодичних функцій складається з шести кроків, які докладно описані у розділі 4.3 роботи [86].

13 Симетрії та моделюючі функції для дифузійних процесів

Було досліджено [117] такі аспекти теорії дифузійних процесів: використання симетрій в експериментальних даних для опису еволюції по часу, пошук узагальнених рівнянь Фіка, які допускають такі симетрії, а також побудову моделюючих функцій для опису концентрації речовини.

Класична теорія дифузійних процесів почата Фіком в 1855 і базується на рівнянні

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0. \quad (13.1)$$

В рівнянні (13.1) D — коефіцієнт дифузії, якій в загальному випадку залежить від концентрації θ .

Стандартні проблеми теорії дифузії полягають в наступному:

- 1) описати еволюцію по часу, і
- 2) специфікувати залежність коефіцієнта дифузії від концентрації речовини.

Ми запропонували новий метод для опису еволюції по часу і обчислення коефіцієнта дифузії. Відмінна риса нашого підходу полягає в тому, що ми знаходимо як функцію $\theta = \theta(t, x)$, так і функцію $D = D(\theta)$ у явному вигляді, тобто, вирішуємо проблеми 1) і 2) аналітично. Для того, щоб досягнути цієї мети ми почали з експериментальних даних для певної системи і зробили розклад по функціям помилок концентрації профілю. Аналітичний опис процесів дифузії дуже зручний для якісного аналізу. Більш того, схоже на те, що наш опис є добрим кількісно; його відхилення від експериментальних даних не перевищує похибки вимірювань.

Ми ретельно застосовували цей підхід для поверхневий дифузії абсорбції Li на Mo(112). Більш того ми перевірили цей метод для дифузії абсорбції Dy на Mo(112) на предмет його узагальнення.

13.1 Експериментальні дані та симетрії. Еволюція по часу на основі симетрій

Було почато з експериментальних даних, які представляють поверхню дифузії Li, абсорбованого на Mo(112). Схематично експериментальна установка представлена мікроскопом, якій сканує контактний потенціал

(див. *A.T. Loburets, A.G. Naumovets, Yu.S. Vedula, Diffusion of dysprosium on the (112) surface of molybdenum, Surf. Sci. 309, 297–304, 1998.*):

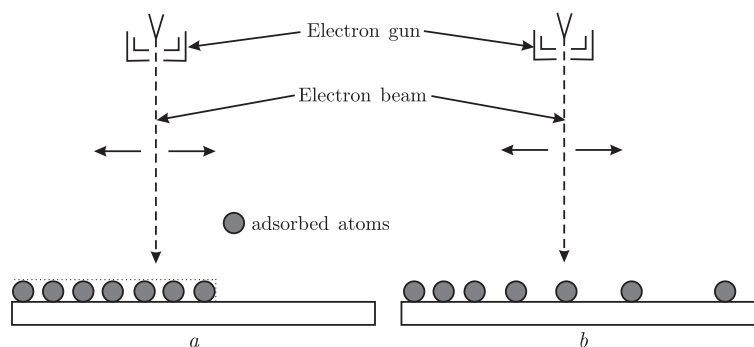


Рис. 13.1: Контактний скануючий мікроскоп.

Для певної дифузійної системи, в загалі, ми не знаємо вигляд еволюційного рівняння. Навіть якщо існують обґрунтовані причини того що процес описується рівняння Фіка, часто коефіцієнт дифузії невідомий. Таким чином виникає ідея, і її ми використали, пошуку симетрій базуючись на експериментальних даних.

Було зроблено вимірювання концентрацій в моменти часу $t = 0, 1200, 2100, 3600$ і 5400 (секунди), помилка експерименту була $\Delta\theta = 0.003$. Виміряні профілі представлені на рис. 13.2.

Наше завдання було запропонувати феноменологічну теорію пов'язану з дифузійним процесом. Для досягнення цієї мети ми знайшли певну симетрію, яка характеризує профілі покриття. А саме, нехай зафіксуємо профіль θ просканований в час t і розглянемо його як функцію x . Тоді будь-який інший профіль θ' виміряний в час t' можна знайти із θ використовуючи наступні перетворення:

$$x \rightarrow x' = (x - x_0) \sqrt{\frac{t}{t'}} + x_0, \quad (13.2)$$

де $x_0 = 0.88$ координата спільної точки профілів покриття.

Це твердження може бути перевірено за допомогою комп'ютерних обчислень експериментальних кривих. Підкреслимо, що знайдена симетрія досить точна — відхилення кривих, знайдених за допомогою пере-

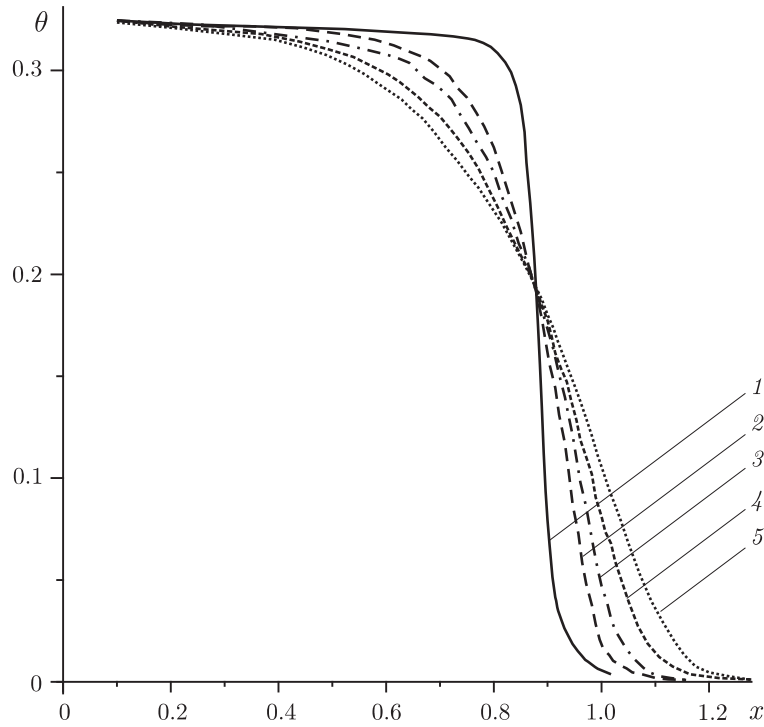


Рис. 13.2: Профіль концентрацій Li абсорбованого Mo(112): початковий, $t = 0$ (1), і виміряний при $t = 1200$ с (2), $t = 2100$ с (3), $t = 3600$ с (4), $t = 5400$ с (5). Координата x дана в мм, інша координата дає степе́нь покриття θ .

творення (13.2) із експериментальних даних не перевищує похибки експерименту, і це відхилення зменшується з зростанням часу.

Розглянута симетрія означає, що функції $\theta(t, x)$ інваріантні відносно одно-параметричної групи перетворень:

$$t \rightarrow t' = e^{2\alpha}t, \quad x \rightarrow x' = xe^{\alpha} + x_0(1 - e^{\alpha}), \quad (13.3)$$

де α дійсний параметр.

Використовуючи (13.3) і апарат класичного групового аналізу, можливо описати еволюцію по часу профілю $\theta(t, x)$. Дійсно, інфінітезимальний оператор перетворень (13.3) має вигляд:

$$X = \eta \frac{\partial}{\partial t} + \xi \frac{\partial}{\partial x} \equiv 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} - x_0 \frac{\partial}{\partial x},$$

де $\eta = \frac{\partial t'}{\partial \alpha}|_{\alpha=0}$, $\xi = \frac{\partial x'}{\partial \alpha}|_{\alpha=0}$. Інваріантність профілю покриття відносно

перетворень (13.3) означає, що $\theta(t, x)$ є розв'язком наступного рівняння:

$$X\theta(t, x) = 0.$$

Беручи до уваги, що ми маємо одновимірний процес, рівняння (13.1) можна звести до такого:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \quad (13.4)$$

де $D = D(\theta)$, $y = x - x_0$. Його перетворення інваріантності будуть такими:

$$t \rightarrow t' = e^{2\alpha} t, \quad y \rightarrow y' = ye^{\alpha}, \quad \theta \rightarrow \theta' = \theta. \quad (13.5)$$

Беручи до уваги цю властивість дифузійного рівняння, можна використати зміну Больцмана $\xi = \frac{y}{\sqrt{t}}$, і шукати його інваріантні розв'язки $\theta = \theta(\xi)$, де як θ , так і ξ є інваріантами перетворень (13.5).

Як ми бачимо, саме існування симетрії в експериментальних даних дає можливість передбачити форми профілів накриття у різних моментах часу (рис. 13.3).

Ми бачимо, що експериментальний профіль при $t = 0$ не має точну ступінчасту форму, і таким чином *не інваріантна відносно (13.5)*. Тим не менш, профіль θ_0 не так далекий від такої форми, і його можна розглядати як збурену функцію Хевисайда. З іншого боку, і це є експериментальний факт, для досить великих моментів часу t розв'язки нашої задачі інваріантні відносно перетворень (13.2). І якщо ми застосовуємо ці перетворення для нескінченно малих t' , усі профілі $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_4$ збігаються до ступінчатого. Таким чином, ми маємо пряме експериментальне підтвердження відомого математичного факту, що інваріантні розв'язки дифузійного рівняння (13.4) можуть слугувати як аттрактори для інших розв'язків. Іншими словами, невідомий поки що коефіцієнт дифузії повинен залежати від θ таким чином, щоб відповідна задача Коші (13.4), $\theta(0, y) = \theta_0(y)$ була асимптотичне стійкою по відношенню до малих збурень початкових даних (див. [A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov,

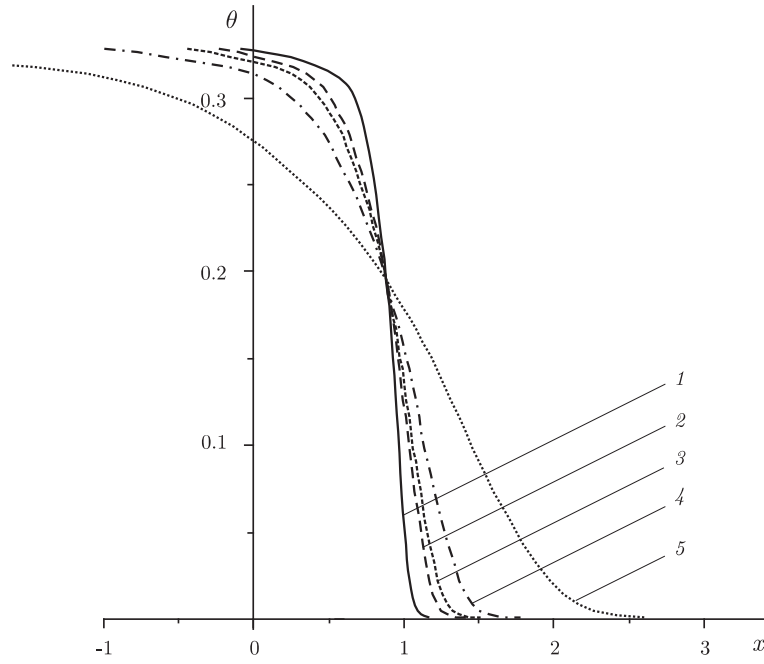


Рис. 13.3: Профілі накриття $\theta(t, x)$: експериментальні для $t = 2100$ с (1) і теоретичні для $t = 7000$ с (2), 10000 с (3), 20000 с (4), 100000 с (5).

S.P. Kurdiymov, A.P. Michailov, Blow up regimes for quasilinear parabolic equations. — Moscow: Nauka, 1987.]).

13.2 Моделюючі функції для профілів покриття.

Алгоритм обчислення моделюючих функцій

Добре відомо, що у випадку, коли коефіцієнт дифузії D не залежить від концентрації, загальний розв'язок задачі (13.4), $\theta(0, y) = \theta_0(y)$ задан наступним співвідношенням:

$$\theta(t, x) = a \operatorname{erfc}(b\xi)$$

де $a = 1/2$, $b = 1/(2\sqrt{D})$, $\xi = x/\sqrt{t}$ і erfc є сопряжена функція помилок:

$$\operatorname{erfc}(z) = 1 - \operatorname{erf}(z), \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Цей факт обґрунтує те, що саме функція помилок може бути використана як конструктивний елемент профілів концентрації для θ -незалежної дифузії.

Спочатку ми дали приклади моделюючих функцій. Потім запропонували алгоритм побудови таких функцій.

Як перший крок, було розглянуто представлення профілів $\theta(\xi)$ в вигляді однієї функції помилок, яке ефективно тільки в обмеженому інтервалі для змінної Больцмана ξ :

$$\theta = \theta_{(1)} = a_1(1 - \operatorname{erf}(b_1\xi)^2), \quad (13.6)$$

де a_1 і b_1 є параметрами. Вимагаючи мінімум середньо-квадратично відхилення і використовуючи метод спроб і помилок і пакет MAPLE, ми фіксуємо параметри a_1 і b_1 :

$$a_1 = 0.175, \quad b_1 = 0.375.$$

Функція $\theta_{(1)}$ добре описує форму профілю $\theta(\xi)$ для ξ в інтервалі $0.6 < \xi < \infty$, див. рис. 13.4. В цьому інтервалі різниця $|\theta - \theta_{(1)}|$ не

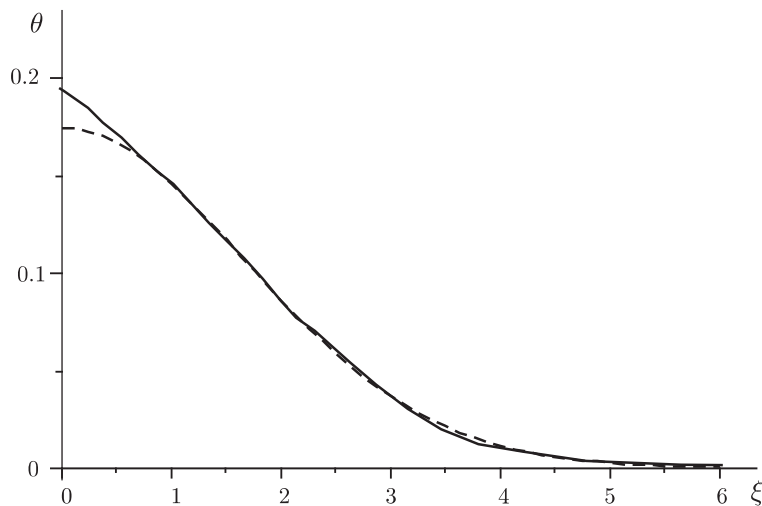


Рис. 13.4: Експериментальний профіль $\theta(x/\sqrt{t})$ для $t = 5400$ (нерозривна крива) і крива θ_1 яка дана співвідношенням (13.6) (розривна крива).

перевищує похибки експерименту. Тем не менш, для $\xi < 0.6$ ця різниця зростає.

Для того, щоб знайти моделюючу функцію для усіх позитивних ξ , достатньо додати маленький додатковий член до $\theta_{(1)}$:

$$\theta_{(2)} = \theta_{(1)} + a_2 \operatorname{erfc}(b_2 \xi), \quad \xi \geq 0, \quad (13.7)$$

де $a_2 = 0.02$ і $b_2 = 1.7$.

Функція (13.7) дає дуже точне представлення для профілю, знайденого експериментально в момент $t = 3600$ с; відхилення $|\theta - \theta_{(1)}|$ не перевищує похибки вимірювання (рис. 13.5)

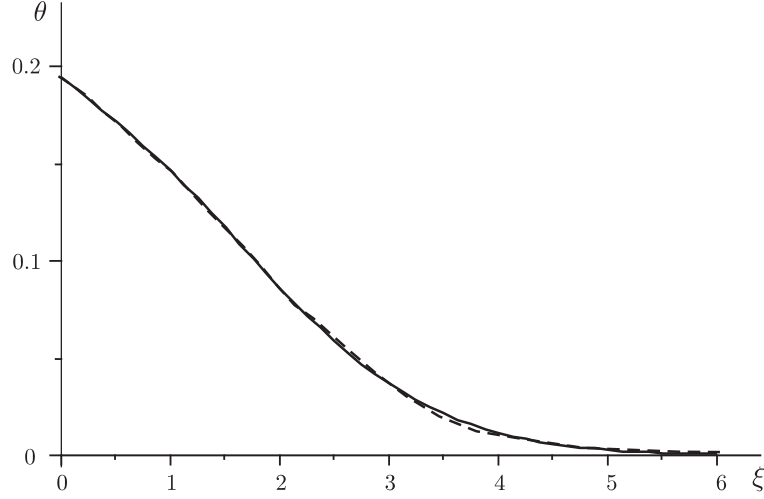


Рис. 13.5: Профілі покриття $\theta(\xi)$: Експериментальні дані для $t = 3600$ с (нерозривна крива) і крива, яка дана співвідношенням (13.7) (розривна крива).

В загальному випадку ми запропонували розклад по функціям помилок для моделюючих функцій у вигляді

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{erfc}(k_i \xi - \xi_i), \quad (13.8)$$

де ξ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) є деякі фіксовані координати Больцмана, k_i і A_i є параметри, які треба визначити.

Нехай $\xi_{i-1} < \xi_i$, або $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n$, тоді оптимальні величини k_i лежать в інтервалі

$$\frac{0.25}{\xi_{i+1} - \xi_i} \leq k_i \leq \frac{1}{\xi_{i+1} - \xi_i}. \quad (13.9)$$

Зокрема, можливо вибрати точки $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ регулярно, тобто з однаковими дистанціями $\xi_{i+1} - \xi_i$ для усіх i , і зафіксувати усі параметри: $k_1 = k_1 = \dots = k_n = p$.

Нехай $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ будуть відомі величини покриття у точках $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, і M — матриця з елементами $M_{ij} = \text{erfc}(k_i(\xi_i - \xi_j))$. Тоді параметри $A_1, A_2, \dots, A_n$ легко знаходяться, розв'язуючи наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$M_{ij}A_j = \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.10)$$

Застосовуючи цей алгоритм для експериментальних даних, отримаємо таку функцію:

$$\begin{aligned} \theta(\xi) = & -0.111\text{erfc}(0.4\xi + 1.7419) + 0.2076\text{erfc}(0.4\xi + 1.3064) \\ & -0.026\text{erfc}(0.4\xi + 0.8709) - 0.2913\text{erfc}(0.4\xi + 0.4355) \\ & +0.6397\text{erfc}(0.4\xi) - 0.7579\text{erfc}(0.4\xi - 0.4355) \\ & +0.7982\text{erfc}(0.4\xi - 0.8709) - 0.4123\text{erfc}(0.4\xi - 1.3064) \\ & +0.1009\text{erfc}(0.4\xi - 1.7419) - 0.0056\text{erfc}(0.4\xi - 2.1773). \end{aligned}$$

На основі моделюючих функцій було явно знайдено аналітичні формули для коефіцієнтів дифузії $D(\theta)$. Це, наприклад такі формули:

$$D = \frac{1}{4b_1^2} \left(1 + \frac{e^{Z^2} \text{erfc}(\sqrt{2}Z)}{\sqrt{2(1 - \frac{\theta}{a_1})}} \right), \quad Z = \text{erfinv} \left(\sqrt{1 - \frac{\theta}{a_1}} \right).$$

де $\text{erfinv}(\cdot)$ є обернена функція помилок ($\theta = \text{erf}(\text{erfinv}(\theta))$);

$$D = \frac{\frac{2a_1}{b_1} \left(\text{erf}(Z)e^{-Z^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{erfc}(\sqrt{2}Z) \right) + \frac{a_2}{b_2}e^{(-\nu Z)^2}}{8a_1b_1\text{erf}(Z)e^{-Z^2} + 4a_2b_2e^{(-\nu Z)^2}}.$$

14 Симетрії Лі, умовні симетрії та точні розв'язки нелінійних рівнянь реакції-дифузії та крайових задач

14.1 Умовні симетрії та точні розв'язки деяких нелінійних рівнянь математичної біології

Рівняння

$$U_t = [A(U)U_x]_x + B(U)U_x + C(U), \quad (14.1)$$

де $U = U(t, x)$ — невідома функція та $A(U)$, $B(U)$, $C(U)$ — довільні гладкі функції, яке називають рівнянням реакції-дифузії-конвекції (РДК), узагальнює велику кількість відомих нелінійних еволюційних рівнянь, що описують різноманітні процеси у фізиці, біології, медицині, екології та хімії (див. наприклад відомі монографії Ликова А.В., Еймза В.Ф. (Ames W.F.), Маррі Дж. (Murray J.), Окюбо А. (Okubo A.)). Це пов'язано з тим, що такі рівняння враховують три типи механізмів переносу енергії, кожен з яких при математичному моделюванні в першому наближенні відповідно є лінійним щодо других похідних за просторовими координатами, перших похідних та самої шуканої функції. Наприклад, при описі процесів тепломасопереносу перенос теплової енергії відбувається за рахунок теплопровідності середовища (закон Фур'є), за рахунок конвективного руху енергії та шляхом виділення (поглинання) енергії просторовими джерелами (стоками) енергії.

Частковий випадок рівняння (14.1), а саме:

$$U_t = U_{xx} + B(U)U_x + C(U) \quad (14.2)$$

було запропоновано Маррі як математична модель для опису різноманітних процесів в біології за участю одного виду тварин (клітин, генів тощо).

Типовим представником рівнянь вигляду (14.2) є рівняння

$$U_t = U_{xx} + \lambda U U_x + U(1 - U), \quad (14.3)$$

яке отримано Дж. Маррі, виходячи з таких міркувань: розглянемо найпростіше нетривіальне рівняння реакції з дифузиею, а саме рівняння Фішера

$$U_t = U_{xx} + U(1 - U)$$

з нелінійним конвективним потоком $H(U)$ в додатньому напрямку осі x . Тоді рівняння для $U(t, x)$ набере вигляду

$$U_t + \frac{\partial H(U)}{\partial x} = U_{xx} + U(1 - U). \quad (14.4)$$

Оскільки H — функція від U , то $\frac{\partial H(U)}{\partial x} = H'(U)U_x$. Вибравши найпростіший нетривіальний випадок $H'(U) = -\lambda U$, де λ — деяка стала, рівняння (14.4) запишеться у вигляді (14.3). Шукаючи розв'язки типу біжучої хвилі у вигляді

$$U(t, x) = f(z), \quad z = x - ct, \quad (14.5)$$

де швидкість c має бути знайдена, причому $0 \leq f(z) \leq 1$, $f'(z) \geq 0$, Маррі довів, що монотонні обмежені плоско-хвильові розв'язки існують лише при певних обмеженнях на швидкість c .

З метою інтегрування нелінійних рівнянь вигляду (14.1) багато дослідників намагалося їх лінеаризувати. Незважаючи на велику кількість таких робіт, на сьогоднішній день знайдено зовсім небагато рівнянь, які лінеаризуються. Серед таких рівнянь найвідомішими є рівняння Бюргерса

$$U_t = U_{xx} + \lambda U U_x \quad (14.6)$$

та рівняння нелінійної теплопровідності

$$U_t = (U^{-2} U_x)_x, \quad (14.7)$$

які зводяться до лінійного рівняння теплопровідності відповідно нелокальною підстановкою Коула–Гопфа та інтегральною підстановкою Блумана–Кумеї. Тобто інтегровними серед рівнянь вигляду (14.1) є лише ці два рівняння та ті, які до них зводяться локальними підстановками. Отже, основні зусилля було направлено на знаходження широких класів частинних розв'язків рівнянь вигляду (14.1). На сьогоднішній день найефективнішими методами пошуку таких розв'язків є методи, що ґрунтуються на застосуванні симетрій Лі та умовних симетрій.

Дослідженню симетрій Лі рівняння РДК (14.1) різноманітними математичними методами присвячено багато робіт протягом останніх 20–30 років (див. посилання в [27]). В роботах [27, 78] було завершено повний

Табл. 14.1: Симетрії Лі рівняння (14.1).

N	$A(U)$	$B(U)$	$C(U)$	MAI
1.	1	$\lambda_1 U$	0	$\partial_t, \partial_x, D_1, G_1, \Pi$
2.	1	$\lambda_1 U$	$\lambda_2 U, (\lambda_2 \neq 0)$	$\partial_t, \partial_x, \mathcal{G}_1$
3.	1	$\lambda_1 \log U$	$\lambda_2 U$	$\partial_t, \partial_x, G_2$
4.	1	$\lambda_1 \log U$	$\lambda_3 U \log U, (\lambda_3 \neq 0)$	$\partial_t, \partial_x, \mathcal{G}_2$
5.	1	$\lambda_1 \log U$	$U(\lambda_2 + \frac{\lambda_1^2}{4} \log^2 U)$	$\partial_t, \partial_x, Y$
6.	U^k	$\lambda_1 U^m, (m \neq 0)$	$\lambda_2 U^{2m-k+1}$	$\partial_t, \partial_x, D_2$
7.	$\exp kU$	$\lambda_1 \exp(mU), (m \neq 0)$	$\lambda_2 \exp((2m-k)U)$	$\partial_t, \partial_x, D_3$
8.	$\exp(kU), (k \neq 0)$	$\lambda_1 U$	$\lambda_2 \exp(-kU)$	$\partial_t, \partial_x, Z_1$
9.	$U^k, (k \neq 0),$	$\lambda_1 \log U$	$\lambda_2 U^{1-k}$	$\partial_t, \partial_x, Z_2$

опис симетрій Лі рівняння РДК з відповідними уточненнями вислідів отриманих раніше¹. Зокрема, встановлено, що будь-яке нелінійне рівняння з цього класу, яке інваріантне відносно три- і більше вимірної алгебри Лі може бути зведеним локальною підстановкою до одного з дев'яти рівнянь, поданих в таблиці 14.1 або до рівняння без конвективного члена (рівняння реакції-дифузії).

В таблиці 14.1, введено наступні позначення: $\lambda_1 \neq 0$, λ_2 , λ_3 , k та m

¹Cherniha R. and Serov M. European J. of Appl. Math. — 1998. — vol. 9, No 5. — P. 527–542.

довільні сталі, та

$$\begin{aligned}
\Pi &= t^2 \partial_t + tx \partial_x - \left(\frac{x}{\lambda_1} + tU\right) \partial_U, \\
G_1 &= t \partial_x - \frac{1}{\lambda_1} \partial_U, \\
G_2 &= t \partial_x - \frac{1}{\lambda_1} U \partial_U, \\
Y &= \exp\left[\frac{\lambda_1^2}{4} t - \frac{\lambda_1}{2} x\right] U \partial_U, \\
D_1 &= 2mt \partial_t + mx \partial_x - U \partial_U, \\
D_2 &= (2m - k)t \partial_t + (m - k)x \partial_x - U \partial_U, \\
D_3 &= (2m - k)t \partial_t + (m - k)x \partial_x - \partial_U, \\
\mathcal{G}_1 &= \exp(\lambda_2 t) \left(\partial_x - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \partial_U\right), \\
\mathcal{G}_2 &= \exp(\lambda_3 t) \left(\partial_x - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} U \partial_U\right), \\
Z_1 &= kt \partial_t + (kx - \lambda_1 t) \partial_x + \partial_U, \\
Z_2 &= kt \partial_t + (kx - \lambda_1 t) \partial_x + U \partial_U
\end{aligned} \tag{14.8}$$

оператори симетрії Лі.

Повний опис операторів Q -умовної симетрії для спеціального випадку рівняння (14.1), а саме:

$$U_t = U_{xx} + \lambda U U_x + f(U) \tag{14.9}$$

було представлено в роботі [56]. Там було встановлено таку теорему.

Теорема 14.1 ([56]). *Рівняння (14.9) Q -умовно інваріантне відносно оператора*

$$Q = \partial_t + \xi^1(t, x, U) \partial_x + \eta(t, x, U) \partial_U \tag{14.10}$$

тоді і тільки тоді, коли воно та відповідний оператор набувають одного з наступних виглядів, з точністю до еквівалентних представлень, породжених локальними перетвореннями вигляду

$$\begin{aligned}
t &\rightarrow t, \\
x &\rightarrow c_1 x + c_2 t + c_3 t^2, \\
U &\rightarrow c_4 + c_5 t + c_6 U.
\end{aligned}$$

Випадок 1. Рівняння Бюргерса

$$U_t = U_{xx} + \lambda U U_x,$$

$$Q = \partial_t + \left(\frac{\lambda}{2} U + q \right) \partial_x + \left(a + bU - \frac{\lambda q}{2} U^2 - \frac{\lambda^2}{4} U^3 \right) \partial_U,$$

де трійка функцій (a, b, q) є загальним розв'язком системи

$$a_t = a_{xx} - 2aq_x,$$

$$b_t = b_{xx} - 2bq_x + \lambda a_x$$

$$q_t = q_{xx} - 2qq_x - 2b_x.$$

Випадок 2. Рівняння

$$U_t = U_{xx} + \lambda U U_x + \lambda_0 + \lambda_2 U^2,$$

$$Q = \partial_t + \left(-\lambda U + \frac{\lambda_2}{\lambda} \right) \partial_x + (\lambda_0 + \lambda_2 U^2) \partial_U,$$

де $\lambda_0, \lambda_2 \neq 0$ — довільні сталі.

Випадок 3. Рівняння

$$U_t = U_{xx} + \lambda U U_x + \lambda_0 + \lambda_1 U + \lambda_3 U^3,$$

$$Q_i = \partial_t + p_i U \partial_x + \frac{3p_i}{2p_i - \lambda} (\lambda_0 + \lambda_1 U + \lambda_3 U^3) \partial_U, \quad i = 1, 2,$$

де p_i — корені квадратного рівняння $2p^2 + \lambda p + 9\lambda_3 - \lambda^2 = 0$, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_3 \neq 0$ — довільні сталі.

В роботі [58] теорему було узагальнено на випадок значно ширшого класу рівнянь РДК:

$$U_t = (U^m U_x)_x + \lambda U^n U_x + C(U), \quad \lambda \neq 0, \quad m \neq 0. \quad (14.11)$$

Виявилося, що Q-умовні симетрії вигляду (14.10) існують лише у випадках $n = m$ і $n = m + 1$. Зокрема, для рівняння (14.11) при $n = m + 1$ справедлива теорема.

Теорема 14.2 ([58]). *Рівняння (14.11) $n = m + 1$ Q -умовно інваріантне відносно оператора вигляду (14.10) тоді і тільки тоді, коли воно та відповідний оператор набувають вигляду*

$$(i) \quad U_t = (U^m U_x)_x + \lambda U^{m+1} U_x + \lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m}, \quad m \neq -1, \quad (14.12)$$

$$Q = \partial_t - \lambda U^{m+1} \partial_x + (\lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m}) \partial_U; \quad (14.13)$$

$$(ii) \quad U_t = (U^{-\frac{1}{2}} U_x)_x + \lambda U^{\frac{1}{2}} U_x + \\ + (\lambda_1 U^{\frac{3}{2}} + \lambda_2 U^{\frac{1}{2}} + \lambda_3) \left(\frac{\lambda_1}{2\lambda^2} + U^{\frac{1}{2}} \right), \quad (14.14)$$

$$Q = \partial_t + \left(-\lambda U^{\frac{1}{2}} + \frac{3\lambda_1}{2\lambda} \right) \partial_x + (\lambda_1 U^{\frac{3}{2}} + \lambda_2 U^{\frac{1}{2}} + \lambda_3) \partial_U. \quad (14.15)$$

Всі інші випадки інваріантності рівнянь вигляду (14.11) відносно операторів вигляду (14.10) є випадками інваріантності в сенсі Лі.

Отримані теореми було успішно застосовано для побудови точних розв'язків, дослідження їх властивості для деяких рівнянь РДК, які зустрічаються в застосуваннях [56, 58]. Зокрема, оператори умовних симетрій, отримані в теоремі 14.1, було застосовано до рівняння Маррі, узагальнених рівнянь Маррі та Фітц'ю–Нагумо.

Розгляньмо рівняння Маррі

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + u(\lambda_1 - \lambda_2 u). \quad (14.16)$$

де $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. Як випливає з наведеної вище таблиці, це рівняння допускає лише тривіальну алгебру Лі, породжену операторами зсувів ∂_t , ∂_x , тому можна отримати лише плоскохвильовий анзац

$$u = \phi(\omega), \quad \omega = x - \alpha t, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (14.17)$$

який редукує (14.16) до нелінійного ЗДР

$$\phi_{\omega\omega} + (\alpha + \lambda\phi)\phi_{\omega} + \phi(\lambda_1 - \lambda_2\phi) = 0. \quad (14.18)$$

ЗДР (14.18) при довільних коефіцієнтах λ , λ_1 , λ_2 і α не інтегрується в квадратурах, проте нам вдалося знайти частинні розв'язки:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + c_1 \exp(\gamma x + \gamma^2 t), \\ u &= c_1 \exp(\gamma x + (\gamma^2 + \lambda_1)t), \quad \gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda}, \end{aligned} \quad (14.19)$$

$$u(t, x) = \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + c_1 \exp(-(\gamma x + (\gamma^2 + \lambda_1)t)) \right]^{-1}, \quad \gamma = \frac{\lambda \lambda_1}{2 \lambda_2}, \quad (14.20)$$

де c_1 — довільна стала. Зауважимо, що при $\lambda < 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ and $c_1 > 0$, останній розв'язок має такі самі властивості як числовий розв'язок, зображений у відомій книзі Маррі², тому є важливим для застосувань.

З іншого боку, з теореми 14.1 випливає, що це рівняння допускає оператор Q -умовної симетрії

$$Q = \partial_t - \left(\lambda u + \frac{\lambda_2}{\lambda} \right) \partial_x + (\lambda_1 u - \lambda_2 u^2) \partial_u \quad (14.21)$$

за яким ми побудували розв'язок

$$u = \frac{\lambda_1 + c_1 \exp(\gamma x + \gamma^2 t)}{\lambda_2 + c_0 \exp(-\lambda_1 t)}, \quad \gamma = \frac{\lambda_2}{\lambda}. \quad (14.22)$$

Очевидно, що при $c_0 \neq 0$ він є нелінійським. Зауважимо, що розв'язок (14.22) при $c_0 > 0$ та $\lambda_1 < 0$ є вибухаючим (blow-up solution) за скінченний проміжок часу $t_0 = |\lambda_1|^{-1} \ln |\lambda_2/c_0|$.

Розгляньмо узагальнене рівняння Фітцг'ю–Нагумо (Fitzhugh–Nagumo)

$$u_t = u_{xx} + \lambda u u_x + \lambda_3 u(u - \delta)(1 - u), \quad 0 < \delta < 1, \quad \lambda_3 > 0, \quad (14.23)$$

яке при $\lambda = 0$ зводиться до класичного рівняння Фітцг'ю–Нагумо. З теореми 14.1 випливає, що це рівняння допускає 2 оператори Q -умовної симетрії, кожен з яких було використано для побудови точних розв'язків. Зокрема, ми встановили такі нелінійські розв'язки

$$u(t, x) = u_0 + \frac{\alpha_i c_i \exp(\gamma_i x + (u_0 \lambda \gamma_i + \beta_1 \alpha_i^2) t)}{c_i \exp(\gamma_i x + (u_0 \lambda \gamma_i + \beta_1 \alpha_i^2) t)} \quad (14.24)$$

²J.D. Murray, Mathematical Biology, Springer, Berlin, 1989 (див. Fig.11.5,b).

та

$$u(t, x) = u_0 + \frac{\alpha_i c_i \exp(\sigma_i x + (u_0 \lambda \sigma_i + \beta_2 \alpha_i^2) t)}{c_i \exp(\sigma_i x + (u_0 \lambda \sigma_i + \beta_2 \alpha_i^2) t)}, \quad (14.25)$$

де c_i , $i = 1, 2, 3$ — довільні сталі, $\gamma_i = \alpha_i \frac{\kappa + \lambda}{4}$, $\sigma_i = \alpha_i \frac{-\kappa + \lambda}{4}$, $i = 1, 2, 3$, $\kappa = \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda_3}$ та $\beta_1 = \frac{\lambda_3(3\kappa - \lambda)}{2(\kappa - \lambda)}$, $\beta_2 = \frac{\lambda_3(3\kappa + \lambda)}{2(\kappa + \lambda)}$, $u_0 = \frac{1}{3}(\delta + 1)$, $\alpha_1 = -\frac{1}{3}(\delta + 1)$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}(2\delta - 1)$, $\alpha_3 = \frac{1}{3}(2 - \delta)$ (тут передбачено підсумовування за індексом i , що повторюється).

У частинних випадках з них отримуються плоскохвильові типу біжучих фронтів, а саме:

$$u(t, x) = u_0 + \frac{\alpha_i + \alpha_j c \exp((\gamma_j - \gamma_i)(x + (u_0 \lambda + \beta_1^{ij})t))}{1 + c \exp((\gamma_j - \gamma_i)(x + (u_0 \lambda + \beta_1^{ij})t))},$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (14.26)$$

та

$$u(t, x) = u_0 + \frac{\alpha_i + \alpha_j c \exp((\sigma_j - \sigma_i)(x + (u_0 \lambda + \beta_2^{ij})t))}{1 + c \exp((\sigma_j - \sigma_i)(x + (u_0 \lambda + \beta_2^{ij})t))},$$

$$i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (14.27)$$

(тут нема підсумовування за індексами i, j). Цікаво зазначити, що формули (14.26) і (14.27) при $\lambda = 0$ породжують добре відомі біжучі fronti для рівняння Фітцг'ю–Нагумо³.

Оператор у випадку (і) теореми 14.2 редукує відповідне нелінійне рівняння РДК до ЗДР, які інтегруються. У підсумку було отримано розв'язок

$$U = \left[\frac{1}{\lambda t + c_1} \left(-x + \lambda_2(m+1) \left(\lambda \frac{t^2}{2} + c_1 t \right) + c_2 \right) \right]^{\frac{1}{m+1}},$$

нелінійного рівняння РДК

$$U_t = (U^m U_x)_x + \lambda U^{m+1} U_x + \lambda_2 U^{-m} \quad m \neq -1$$

³T. Kawahara and M. Tanaka, Interactions of traveling fronts: an exact solution of a nonlinear diffusion equation. Phys. Lett. A **97** (1983), 311–314.

та розв'язок

$$U = \left(\frac{1}{1+c_1 e^{-\lambda_1(m+1)t}} \left(-\frac{\lambda_1(m+1)}{\lambda} x + \lambda_2(m+1) \left(t - \frac{c_1}{\lambda_1(m+1)} e^{-\lambda_1(m+1)t} \right) + c_2 \right) \right)^{\frac{1}{m+1}}, \quad (14.28)$$

рівняння

$$U_t = (U^m U_x)_x + \lambda U^{m+1} U_x + \lambda_1 U + \lambda_2 U^{-m}, \quad m \neq -1, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

14.2 Q-умовні симетрії і точні розв'язки класу систем рівнянь РД зі степеневими коефіцієнтами дифузії

У 1952 А.К. Тюрінг опублікував видатну роботу⁴, в якій він запропонував революційну ідею про механізм морфогенезу (розвиток просторово-неоднорідних структур в організмі на протязі життя).

З того часу системи рівнянь РД докладно досліджувалися різними математичними методами, включаючи теоретико-групові. Головна увага була приділена розгляду дво-компонентної системи рівнянь РД вигляду

$$\begin{aligned} U_t &= [D^1(U)U_x]_x + F^1(U, V), \\ V_t &= [D^2(V)V_x]_x + F^2(U, V), \end{aligned} \quad (14.29)$$

де $U = U(t, x)$ та $V = V(t, x)$ дві невідомі функції, що описують густини клітин ті хімічних реагентів, $F^1(U, V)$ та $F^2(U, V)$ дві задані функції, що описують взаємодію між ними та оточуючим середовищем, функції $D^1(U)$ та $D^2(V)$ відповідні коефіцієнти дифузії (як правило їх покладають сталими), нижні індекси t та x означають диференціювання за цими змінними. Всеможливі симетрії Лі рівняння (14.29) як зі сталими коефіцієнтами дифузії так і для змінних коефіцієнтів повністю описано та узагальнено на багатовимірні системи РД такого вигляду (див. [26] та цитовану там літературу).

⁴Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. – 1952. – Vol. 237. – P. 37–72.

Задача побудови умовних симетрій для (14.29) все ще не розв'язана навіть у випадку Q -умовних симетрій. До того ж, на скільки нам відомо, немає жодної роботи присвяченої пошуку умовних симетрій системи рівнянь РД (14.29) у випадку $(D^1, D^2) \neq \text{const}$. У роботі [77] вперше систематично та детально досліджуються умовні симетрії систем нелінійних еволюційних рівнянь.

Добре відомо, що умовні симетрії можуть бути застосовані для знаходження точних розв'язків відповідних рівнянь, які не можна отримати за допомогою класичного методу Лі. До того ж, розв'язки отримані таким способом, можуть мати фізичну або біологічну інтерпретацію. Нижче ми шукатимемо Q -умовні симетрії вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t, x, U, V)\partial_x + \eta^1(t, x, U, V)\partial_U + \eta^2(t, x, U, V)\partial_V, \quad (14.30)$$

що допускає система рівнянь РД

$$\begin{aligned} U_t &= (U^k U_x)_x + F^1(U, V), \quad k \neq -1, \\ V_t &= (V^l V_x)_x + F^2(U, V), \quad l \neq -1, \quad k^2 + l^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Використовуючи стандартне узагальнення означення оператора Q -умовні симетрії на випадок системи двох еволюційних рівнянь, нами було отримано систему визначальних рівнянь для знаходження операторів вигляду (14.30) (див. детальніше в [77]). Аналізуючи цю нелінійну перевизначену систему рівнянь, було встановлено вигляд коефіцієнтів оператора (14.30):

$$\xi = \xi(t, x), \quad (14.32)$$

$$\begin{aligned} \eta^1 &= q^1(t, x)v + r^1(t, x)u + p^1(t, x), \\ \eta^2 &= q^2(t, x)u + r^2(t, x)v + p^2(t, x), \end{aligned} \quad (14.33)$$

тобто, оператор Q , який ми шукатимемо, набере вигляду

$$\begin{aligned} Q &= \partial_t + \xi(t, x)\partial_x + (q^1(t, x)v + r^1(t, x)u + p^1(t, x))\partial_u + \\ &\quad + (q^2(t, x)u + r^2(t, x)v + p^2(t, x))\partial_v. \end{aligned} \quad (14.34)$$

В залежності від значень функцій $q^1(t, x)$, $q^2(t, x)$, $\xi(t, x)$ з системи визначальних рівнянь виділяються три випадки, які охоплюють всі можливості:

- (a) $q^1(t, x) = q^2(t, x) = 0$, $\xi(t, x) \neq 0$;
- (b) $q^1(t, x) = q^2(t, x) = 0$, $\xi(t, x) = 0$;
- (c) $q^1(t, x)^2 + q^2(t, x)^2 \neq 0$, $\xi(t, x) = 0$.

Зауважимо, що додатково було розглянуто випадок

$$q^1(t, x)^2 + q^2(t, x)^2 \neq 0, \quad \xi(t, x) \neq 0 \quad (14.35)$$

та встановлено, що він неможливий, оскільки тоді отримуємо $k = l = 0$, що суперечить умові. Нижче подано теореми, які підсумовують розгляд кожного з випадків (a), (b) і (c).

Теорема 14.3. *У випадку (a) всі оператори Q -умовної симетрії вигляду (14.34) еквівалентні операторам симетрії Лі, відносно яких інваріантна система рівнянь РД (14.31).*

Теорема 14.4. *Система рівнянь РД (14.31) Q -умовна інваріантна відносно оператора вигляду (14.30) у випадку (b) тоді і тільки тоді, коли нелінійності F^1 , F^2 та відповідний оператор набувають вигляду зображеному в таблиці 14.2 (тут f , g довільні гладкі функції відповідних аргументів, λ , λ_j , $j = 1, 2, 3, 4$ довільні сталі).*

Зауваження. Обмеження накладені на коефіцієнти λ_k , що з'являються в останньому стовпчику таблиці 14.2, гарантують, що відповідні оператори не збігаються з операторами Лі. Звичайно, ці оператори залишаються Q -умовними, якщо деякі з λ перетворити в нуль, але тоді отримані оператори еквівалентні відповідним операторам симетрії Лі, які отримано в роботі⁵.

Випадок (c) вимагає найбільш складних і громіздких викладок. Він поділяється в свою чергу на три підвипадки, а саме

⁵Cherniha R., King J. R. // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — Vol. 308. — P. 11–35.

Табл. 14.2: Q -умовні симетрії системи РД (14.31).

№	Функції F^1 і F^2	Q -умовні оператори	Обмеження і додаткові умови
1.	$f(U^{k+1}),$ $-2\lambda V^{\frac{1}{2}} + g(U^{k+1})$	$\partial_t + 2p(x)V^{\frac{1}{2}}\partial_V$	$p_{xx} = p^2 + \lambda p,$ $p \neq 0, l = -\frac{1}{2}$
2.	$\lambda_1 U^{-k} + f(U^{k+1} - \alpha V^{l+1}),$ $\lambda_2 V^{-l} + g(U^{k+1} - \alpha V^{l+1})$	$\partial_t + \lambda_1 U^{-k}\partial_U +$ $+ \lambda_2 V^{-l}\partial_V$	$\alpha = \frac{\lambda_1(k+1)}{\lambda_2(l+1)}, \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1^2 + l^2 \neq 0.$
3.	$-2\lambda U^{\frac{1}{2}} + f(U^{\frac{1}{2}} - V^{\frac{1}{2}}),$ $-2\lambda V^{\frac{1}{2}} + g(U^{\frac{1}{2}} - V^{\frac{1}{2}})$	$\partial_t +$ $+ 2p(x)(U^{\frac{1}{2}}\partial_U + V^{\frac{1}{2}}\partial_V)$	$p_{xx} = (p)^2 + \lambda p,$ $p \neq 0, k = l = -\frac{1}{2}$
4.	$\lambda_1 U^{-k} + f(\omega),$ $(V^{l+1} - \lambda_3)(g(\omega) + \lambda_2 V^{-l})$	$\partial_t + \lambda_1 U^{-k}\partial_U +$ $+ \lambda_2(V - \lambda_3 V^{-l})\partial_V$	$\omega = \frac{\exp U^{k+1}}{(V^{l+1} - \lambda_3) \frac{\lambda_1(k+1)}{\lambda_2(l+1)}}, \lambda_2 \neq 0;$ або $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 \neq 0$, або $\lambda_3^2 + k^2 \neq 0$, або $\lambda_1^2 + l^2 \neq 0$
5.	$(U^{k+1} - \lambda_1)(f(\omega) + \lambda_2 U^{-k}),$ $(V^{l+1} - \lambda_3)(g(\omega) + \lambda_4 V^{-l})$	$\partial_t + \lambda_2(U - \lambda_1 U^{-k})\partial_U +$ $+ \lambda_4(V - \lambda_3 V^{-l})\partial_V$	$\omega = \frac{U^{k+1} - \lambda_1}{(V^{l+1} - \lambda_3) \frac{\lambda_2(k+1)}{\lambda_4(l+1)}},$ $\lambda_2 \lambda_4 \neq 0$; або $\lambda_1^2 + \lambda_3^2 \neq 0$, або $\lambda_3^2 + k^2 \neq 0$, або $\lambda_1^2 + l^2 \neq 0$

$$(c1) \ p_x^1 = 0, \ p_x^2 \neq 0,$$

$$(c2) \ p_x^1 \neq 0, \ p_x^2 \neq 0,$$

$$(c3) \ p_x^1 = p_x^2 = 0.$$

Зауважимо, що підвипадає $p_x^2 = 0, p_x^1 \neq 0$ еквівалентний до (c1).

Випадає (c1) нами повністю проаналізовано та отримано таку теорему.

Теорема 14.5. Система рівнянь РД (14.31) Q -умовна інваріантна відносно оператора вигляду (14.30) у випадку (1) тоді і тільки тоді, коли нелінійності F^1, F^2 та відповідний оператор набувають одного з 16 виглядів наведених нижче.

$$\begin{aligned} U_t &= (U^k U_x)_x + F^1, \\ V_t &= V_{xx} + F^2, \quad k \neq 0. \end{aligned} \tag{14.36}$$

$$1. \ F^1 = \lambda_1 U^{k+1} + \lambda_2, \ F^2 = \lambda_3 V + F(U),$$

$$Q = \partial_t + (A \exp((- \lambda_1(k+1) + \lambda_3)t) U^{k+1} + p) \partial_V,$$

$$p_t = p_{xx} + \lambda_3 p + A \lambda_2 \exp((- \lambda_1(k+1) + \lambda_3)t), \quad A \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & F^1 = F(U), \quad F^2 = \lambda_3 V - \lambda_2(k+1)F(U) + \lambda_2 \lambda_3 U^{k+1}, \\
& Q = \partial_t + (A(\lambda_2 U^{k+1} + V) + p) \partial_V, \\
& p_t = p_{xx} + \lambda_3 p, \quad A \lambda_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & F^1 = \lambda_1 + \lambda_2 U^{-k}, \quad F^2 = \lambda_3 V + \lambda_4 U^{2(k+1)} + \lambda_5 U^{k+1}, \\
& Q = \partial_t + \lambda_2 U^{-k} \partial_U + \left((A \exp(\lambda_3 t) - \frac{2\lambda_2 \lambda_4 (k+1)}{\lambda_3}) U^{k+1} + p \right) \partial_V, \\
& p_t = p_{xx} + \lambda_3 p - (k+1) \left((\lambda_1 + \lambda_2) \left(A \exp(\lambda_3 t) + \frac{2\lambda_2 (k+1) \lambda_4}{\lambda_3} \right) + \lambda_2 \lambda_5 \right), \\
& \lambda_2 \lambda_3 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad & F^1 = \lambda_1 + \lambda_2 U^{-k}, \quad F^2 = \lambda_3 U^{2(k+1)} + \lambda_4 U^{k+1}, \\
& Q = \partial_t + \lambda_2 U^{-k} \partial_U + ((2\lambda_2 \lambda_3 (k+1)t + A) U^{k+1} + p) \partial_V, \\
& p_t = p_{xx} - (2\lambda_2 \lambda_3 t + A)(\lambda_2 + \lambda_1)(k+1) + \lambda_2 \lambda_4, \quad \lambda_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad & F^1 = \lambda_1 + \lambda_2 U^{-k}, \quad F^2 = \lambda_3 V + \lambda_4 U^{k+1} + \lambda_5 \exp(\alpha U^{k+1}), \\
& Q = \partial_t + \lambda_2 U^{-k} \partial_U + \left((A \exp(\lambda_3 t) + \frac{\alpha \lambda_2 \lambda_4 (k+1)}{\lambda_3}) U^{k+1} + \alpha \lambda_2 (k+1) V + \right. \\
& \left. p \right) \partial_V. \\
& p_t = p_{xx} - \lambda_3 p - (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1) \left(A \exp(\lambda_3 t) + \frac{\alpha \lambda_2 \lambda_4 (k+1)}{\lambda_3} \right) + \lambda_2 \lambda_4 (k+1), \\
& \alpha \lambda_2 \lambda_3 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \quad & F^1 = \lambda_1 + \lambda_2 U^{-k}, \quad F^2 = \lambda_3 U^{k+1} + \lambda_4 \exp(\alpha U^{k+1}), \\
& Q = \partial_t + \lambda_2 U^{-k} \partial_U + ((-\alpha \lambda_2 \lambda_3 (k+1)t + A) U^{k+1} + \alpha \lambda_2 (k+1) V + p) \partial_V, \\
& p_t = p_{xx} - (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1)(-\alpha \lambda_2 \lambda_3 t + A) + \lambda_2 \lambda_3 (k+1), \quad \alpha \lambda_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \quad & F^1 = (\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{k+1}) U^{k+1} + \lambda_2 U, \\
& F^2 = \lambda_1 (k+1) V - \lambda_3 (k+1) U + \lambda_3 U^{k+1}, \\
& Q = \partial_t + \frac{\lambda_2}{1 - A_1 \exp(\lambda_2 k t)} U \partial_U + \\
& \quad + \left(\frac{\lambda_3 ((\lambda_2 - A_2) \exp(\lambda_2 k t) + A_1 A_2)}{\lambda_2 A_1 (k+1)} U^{k+1} + A_2 V + p \right) \partial_V, \\
& p_t = p_{xx} + \lambda_1 (k+1) p, \quad \lambda_2 A_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \quad & F^1 = (\lambda_1 - \lambda_2) U^{k+1} + \lambda_2 (k+1) U, \\
& F^2 = \lambda_1 (k+1) V - \lambda_3 (k+1) U + \lambda_3 U^{k+1} + \lambda_4 \ln(U^{k+1})
\end{aligned}$$

$$Q = \partial_t + \frac{\lambda_2(k+1)}{1-A\exp(\lambda_2 k(k+1)t)} U \partial_U + (\lambda_3 A^{-1} \exp(-\lambda_2 k(k+1)t) U^{k+1} + p) \partial_V,$$

$$p_t = p_{xx} + \lambda_1(k+1)p - \frac{\lambda_2 \lambda_4(k+1)^2}{1-A\exp(\lambda_2 k(k+1)t)}, \quad \lambda_2 A \neq 0.$$

$$9. F^1 = (U^{k+1} + \alpha)(\lambda_1 + \lambda_2 U^{-k}),$$

$$F^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1)V + \lambda_3(U^{k+1} + \alpha)^\beta + \lambda_4(U^{k+1} + \alpha),$$

$$Q = \partial_t + \lambda_2(U + \alpha U^{-k}) \partial_U +$$

$$+ \left((-\lambda_2 \lambda_4(\beta-1)(k+1)t + A) U^{k+1} + \beta \lambda_2(k+1)V + p \right) \partial_V,$$

$$p_t = p_{xx} + (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1)p + \alpha(-\lambda_2 \lambda_4(k+1)(\beta-1) +$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2)(k+1)(\lambda_2(k+1)\lambda_4(\beta-1)t + A)), \quad \lambda_2 \beta(\beta-1) \neq 0.$$

$$10. F^1 = (U^{k+1} + \alpha)(\lambda_1 + \lambda_2 U^{-k}),$$

$$F^2 = \lambda_3 V + \lambda_4(U^{k+1} + \alpha)^\beta + \lambda_5(U^{k+1} + \alpha),$$

$$Q = \partial_t + \lambda_2(U + \alpha U^{-k}) \partial_U + \left((A \exp((\lambda_1 - \lambda_2(k+1) + \lambda_3)t) \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_2 \lambda_5(\beta-1)(k+1)}{\lambda_1 - \lambda_2(k+1) + \lambda_3}) U^{k+1} + \beta \lambda_2(k+1)V + p \right) \partial_V,$$

$$p_t = p_{xx} + \lambda_3 p + \alpha \left((\lambda_1 - \lambda_2(k+1)) A \exp((\lambda_1 - \lambda_2(k+1) + \lambda_3)t) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_2 \lambda_3 \lambda_5(\beta-1)(k+1)}{\lambda_1 - \lambda_2(k+1) + \lambda_3} \right), \quad \lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2(k+1) + \lambda_3)\beta(\beta-1) \neq 0.$$

$$11. F^1 = (U^{k+1} + \alpha)(\lambda_1 + \lambda_2 U^{-k}),$$

$$F^2 = \lambda_3 V + (U^{k+1} + \alpha)(\lambda_4 \ln(U^{k+1} + \alpha) + \lambda_5),$$

$$Q = \partial_t + \lambda_2(U + \alpha U^{-k}) \partial_U + \left(\left(A \exp((\lambda_1 - \lambda_2(k+1) + \lambda_3)t) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\lambda_2 \lambda_4(k+1)}{\lambda_1 - \lambda_2(k+1) + \lambda_3} \right) U^{k+1} + \lambda_2(k+1)V + p \right) \partial_V,$$

$$p_t = p_{xx} + \lambda_3 p - \alpha(\lambda_1 + \lambda_2)(k+1) A \exp((\lambda_1 - \lambda_2(k+1) + \lambda_3)t) +$$

$$+ \frac{\alpha \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4(k+1)}{\lambda_1 - \lambda_2(k+1) - \lambda_3}, \quad \lambda_1 - \lambda_2(k+1) + \lambda_3 \neq 0.$$

$$12. F^1 = (U^{k+1} + \alpha)(\lambda_1 + \lambda_2 U^{-k}),$$

$$F^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1)V + (U^{k+1} + \alpha)(\lambda_3 \ln(U^{k+1} + \alpha) + \lambda_4),$$

$$Q = \partial_t + \lambda_2(U + \alpha U^{-k}) \partial_U + \left((\lambda_2 \lambda_3(k+1)t + A) U^{k+1} + \lambda_2(k+1)V + \right.$$

$$p \left. \right) \partial_V,$$

$$p_t = p_{xx} + (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1)(p - \alpha(\lambda_2 \lambda_3(k+1)t + A)) + \alpha \lambda_2 \lambda_3(k+1).$$

$$\begin{aligned}
13. \quad F^1 &= (U^{k+1} + \alpha)(\lambda_1 + \lambda_2 U^{-k}), \\
F^2 &= (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1)V + \lambda_3 \ln(U^{k+1} + \alpha) + \lambda_4(U^{k+1} + \alpha), \\
Q &= \partial_t + \lambda_2(U + \alpha U^{-k})\partial_U + ((\lambda_2 \lambda_4(k+1)t + A)U^{k+1} + p)\partial_V, \\
p_t &= p_{xx} + (k+1)\left((\lambda_1 + \lambda_2)(p - \alpha(\lambda_2 \lambda_4(k+1)t + A)) + \lambda_2(\alpha \lambda_4 + \lambda_3)\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
14. \quad F^1 &= (U^{k+1} + \alpha)(\lambda_1 + \lambda_2 U^{-k}), \\
F^2 &= \lambda_3 V + \lambda_4 \ln(U^{k+1} + \alpha) + \lambda_5(U^{k+1} + \alpha), \\
Q &= \partial_t + \lambda_2(U + \alpha U^{-k})\partial_U + \\
&\quad + \left((A \exp((\lambda_3 - (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1))t) + \frac{\lambda_2 \lambda_5}{(\lambda_1 + \lambda_2)(k+1) - \lambda_3})U^{k+1} + p \right) \partial_V, \\
p_t &= p_{xx} + \lambda_3 p - \alpha(\lambda_1 + \lambda_2)(k+1)A \exp((\lambda_3 - (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1))t) + \\
&\quad + \lambda_2 \left(\frac{\alpha \lambda_3 \lambda_5}{\lambda_3 - (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1)} + \lambda_4 \right), \quad \lambda_3 - (\lambda_1 + \lambda_2)(k+1) \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
15. \quad F^1 &= \lambda_1 U + \lambda_2 U^{-k} + \lambda_3 U^{-k} V - \lambda_3 V + \lambda_4 U^{k+1} + \lambda_5, \\
F^2 &= (\lambda_4 - \lambda_1)(k+1)V, \\
Q &= \partial_t + (\lambda_3 V - \lambda_1 U^{k+1} + \lambda_2)U^{-k}\partial_U + (A_1 U^{k+1} + A_2 V + p)\partial_V, \\
p_t &= p_{xx} + (k+1)((\lambda_4 - \lambda_1)p - A_1(\lambda_5 + \lambda_2)), \quad \lambda_3 \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_t &= (U^k U_x)_x + F^1, \\
V_t &= (V^{-\frac{1}{2}} V_x)_x + F^2.
\end{aligned} \tag{14.37}$$

$$\begin{aligned}
16. \quad F^1 &= \lambda_1 V - 2\lambda_1(V^{\frac{1}{2}} + \alpha)U^{-k} + \lambda_3 U^{k+1} + \lambda_4, \\
F^2 &= -2\lambda_3(k+1)(V^{\frac{1}{2}} + \alpha), \\
Q &= \partial_t - 2\lambda_1(V^{\frac{1}{2}} + \alpha)U^{-k}\partial_U + 2pV^{\frac{1}{2}}\partial_V, \\
p_{xx} - p^2 - \lambda_3 p &= 0, \quad p_t = 0, \quad \lambda_1 \neq 0.
\end{aligned}$$

Скрізь $F(U)$ є довільною гладкою функцією, λ_i , α , β — довільними (якщо немає обмежень) сталими. У всіх системах $k \neq 0$, $p_x \neq 0$, крім 16, а в системі 16 $k \in \mathbb{R}$.

На противагу (c1), випадок (c2) не веде до жодних Q -умовних симетрій.

Теорема 14.6. Система рівнянь РД (14.31), не допускає жодного оператора Q -умовної симетрії вигляду (14.34) у випадку (с2) $p_x^1 \neq 0$, $p_x^2 \neq 0$.

У випадку (с3) система класифікаційних рівнянь є найбільш громіздкою, тому результат тут не наводиться.

Як і у випадку скалярного двовимірного ДРЧП, так і у випадку системи таких рівнянь оператори Q -умовної симетрії вигляду (14.30) ми успішно застосуємо для редукції систем ДРЧП до систем ЗДР. Така редукція гарантується самою структурою знайдених операторів Q вигляду (14.30).

В таблиці 14.3 ми наводимо анзаци і редуковані системи ЗДР для систем поданих в таблиці 14.2, а також анзаци для систем рівнянь отриманих в теоремі 14.4. Номери 1, ..., 5 в таблиці 14.3 відповідають номерам систем РД, поданих в таблиці 14.2.

Як видно з таблиці 14.3, отримані редуковані системи ЗДР є нелінійними і їх неможливо проінтегрувати у випадку довільних гладких функцій f та g . Однак, ці системи можна проінтегрувати, у випадках, коли функції f та g мають специфічну структуру. Наприклад, система ЗДР, що виникає у випадку 5 таблиці (інші випадки можна розглянути аналогічно) набирає вигляду

$$\begin{aligned}\varphi_{xx} &= \alpha_1 \varphi + \beta_1 \psi, \\ \psi_{xx} &= \alpha_2 \varphi + \beta_2 \psi,\end{aligned}\tag{14.38}$$

якщо ми покладемо $g = -\frac{1}{l+1}(\alpha_2 \frac{\varphi}{\psi} + \beta_2)$, $f = -\frac{1}{k+1}(\alpha_1 + \beta_1 \frac{\psi}{\varphi})$, $r = -\lambda_2(k+1) = -\lambda_4(l+1)$, де α_j , β_j , $j = 1, 2$ довільні сталі. Незважаючи на те, що редукована система стає лінійною, система вихідних рівнянь РД

$$\begin{aligned}U_t &= (U^k U_x)_x - \frac{1}{k+1}(rU + \alpha_1(U^{k+1} - \lambda_1) \\ &\quad + \beta_1(V^{l+1} - \lambda_3) - \lambda_1 r U^{-k}), \\ V_t &= (V^l V_x)_x - \frac{1}{l+1}(rV + \alpha_2(U^{k+1} - \lambda_1)\end{aligned}$$

Табл. 14.3: Анзаци і редуковані системи ЗДР для систем рівнянь РД вигляду (14.31).

№	Анзаци	Системи ЗДР
1.	$U = (\varphi(x))^{\frac{1}{k+1}}$ $V = (p^2t + \psi(x))^2$	$\varphi_{xx} = -(k+1)f(\varphi)$ $\psi_{xx} = -\frac{1}{2}g(\varphi) + (\lambda + p)\psi$
2.	$U = (\lambda_1(k+1)t + \varphi(x))^{\frac{1}{k+1}}$ $V = (\lambda_2(l+1)t + \psi(x))^{\frac{1}{l+1}}$	$\varphi_{xx} = -(k+1)f(\varphi - \alpha\psi)$ $\psi_{xx} = -(l+1)g(\varphi - \alpha\psi)$
3.	$U = (p^2t + \varphi(x))^2$ $V = (p^2t + \psi(x))^2$	$\varphi_{xx} = (p + \lambda)\varphi - \frac{1}{2}f(\varphi - \psi)$ $\psi_{xx} = (p + \lambda)\psi - \frac{1}{2}g(\varphi - \psi)$
4.	$U = (\lambda_1(k+1)t + \varphi(x))^{\frac{1}{k+1}}$ $V = (\exp(\lambda_2(l+1)t + \psi(x)) + \lambda_3)^{\frac{1}{l+1}}$	$\varphi_{xx} = -(k+1)f\left(\exp\left(\varphi - \frac{\lambda_1(k+1)}{\lambda_2(l+1)}\psi\right)\right)$ $\psi_{xx} + \psi_x^2 = -(l+1)g\left(\exp\left(\varphi - \frac{\lambda_1(k+1)}{\lambda_2(l+1)}\psi\right)\right)$
5.	$U = (\varphi(x) \exp(\lambda_2(k+1)t) + \lambda_1)^{\frac{1}{k+1}}$ $V = (\psi(x) \exp(\lambda_4(l+1)t) + \lambda_3)^{\frac{1}{l+1}}$	$\varphi_{xx} = -(k+1)\varphi f\left(\varphi\psi^{-\frac{\lambda_2(k+1)}{\lambda_4(l+1)}}\right)$ $\psi_{xx} = -(l+1)\psi g\left(\varphi\psi^{-\frac{\lambda_2(k+1)}{\lambda_4(l+1)}}\right)$

$$+ \beta_2(V^{l+1} - \lambda_3) - \lambda_3 r V^{-l} \quad (14.39)$$

залишається нелінійною. Оскільки редукована система (14.38) є лінійною, то ми можемо легко побудувати її загальний розв'язок у явному вигляді. Поклавши $\beta_1 \neq 0$ (інакше ми маємо вважати, що $\alpha_2 \neq 0$ і починати розв'язання з другого рівняння системи (14.38)) функція ψ може бути виражена з першого рівняння (14.38)

$$\psi = \frac{1}{\beta_1}(\varphi_{xx} - \alpha_1\varphi), \quad (14.40)$$

таким чином друге рівняння зводиться до ЗДР четвертого порядку

$$\varphi_{xxxx} - (\alpha_1 + \beta_2)\varphi_{xx} + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\varphi = 0. \quad (14.41)$$

Структура загального розв'язку диференціального рівняння (14.41) принципово залежить від коренів алгебраїчного рівняння, яке є характеристи-

чним для (14.41)

$$s^4 - (\alpha_1 + \beta_2)s^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 0. \quad (14.42)$$

Розв'язуючи рівняння (14.41) та використовуючи теорію лінійних ЗДР, ми можемо отримати 9 різних виглядів функції φ в залежності від коренів характеристичного рівняння (14.42), вигляд яких ми опускаємо. Тут ми на прикладі однієї з форм проведемо детальний розгляд (розгляд інших форм проводиться аналогічно). Отже, розглянемо випадок

$$\varphi = A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3, \quad \delta = 0, \quad (14.43)$$

для якого отримуємо розв'язок редукованої системи (14.38) у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi &= A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3, \\ \psi &= -\frac{1}{\beta_1}(\alpha_1 A_4x^3 + \alpha_1 A_3x^2 + (\alpha_1 A_2 - 6A_4)x + \alpha_1 A_1 - 2A_3), \end{aligned} \quad (14.44)$$

Підставляючи формули (14.44) у анзац випадку 5 таблиці 14.3, отримуємо чотирьох-параметричну сім'ю точних розв'язків

$$\begin{aligned} U &= \left((A_1 + A_2x + A_3x^2 + A_4x^3) \exp(-rt) + \lambda_1 \right)^{\frac{1}{k+1}}, \\ V &= \left(-\frac{1}{\beta_1}(\alpha_1 A_4x^3 + \alpha_1 A_3x^2 + (\alpha_1 A_2 - 6A_4)x + \alpha_1 A_1 - 2A_3) \times \right. \\ &\quad \left. \times \exp(-rt) + \lambda_3 \right)^{\frac{1}{l+1}}. \end{aligned} \quad (14.45)$$

нелінійної системи рівнянь РД (14.39) при $\delta = 0$. Зауважимо, що розв'язок (14.45) з $t \rightarrow \infty$ прямує до стаціонарної точки $U = \lambda_1^{\frac{1}{k+1}}$, $V = \lambda_3^{\frac{1}{l+1}}$, якщо $r > 0$.

Розгляньмо систему (14.36) з нелінійностями випадку 2 теореми 5, а саме

$$\begin{aligned} U_t &= (U^k U_x)_x + F(U), \\ V_t &= V_{xx} + \lambda_3 V - \lambda_2(k+1)F(U) + \lambda_2 \lambda_3 U^{k+1}, \quad k \neq 0 \end{aligned} \quad (14.46)$$

і відповідний анзац (14.50). Підставивши анзац (14.50) у систему (14.46), отримаємо систему редукованих рівнянь

$$\begin{aligned}\varphi_{xx} &= -(k+1)F(\varphi^{\frac{1}{k+1}}), \\ \psi_{xx} &= (A - \lambda_3)\psi.\end{aligned}\tag{14.47}$$

Розв'яжемо систему (14.47) при $F(\varphi^{\frac{1}{k+1}}) = \alpha\varphi$. Зауважимо, що система (14.47) може бути розв'язана і при інших значеннях $F(\varphi^{\frac{1}{k+1}})$, зокрема, $F(\varphi^{\frac{1}{k+1}}) = 0$, $F(\varphi^{\frac{1}{k+1}}) = \varphi^2$, $F(\varphi^{\frac{1}{k+1}}) = \varphi^3$. В залежності від значення сталої $\beta = -(k+1)\alpha$, отримаємо три типи розв'язків першого рівняння системи (14.47)

$$\begin{aligned}\varphi &= A_1x + A_2, \text{ якщо } \beta = 0, \\ \varphi &= A_1 \exp(\sqrt{\beta}x) + A_2 \exp(-\sqrt{\beta}x), \text{ якщо } \beta > 0, \\ \varphi &= A_1 \cos(\sqrt{-\beta}x) + A_2 \sin(\sqrt{-\beta}x), \text{ якщо } \beta < 0,\end{aligned}\tag{14.48}$$

де $A_i = \text{const}$, $i = 1, 2$. В залежності від значення виразу $\gamma = A - \lambda_3$, отримаємо три типи розв'язків другого рівняння системи (14.47)

$$\begin{aligned}\psi &= A_3x + A_4, \text{ якщо } \gamma = 0, \\ \psi &= A_3 \exp(\sqrt{\gamma}x) + A_4 \exp(-\sqrt{\gamma}x), \text{ якщо } \gamma > 0, \\ \psi &= A_3 \cos(\sqrt{-\gamma}x) + A_4 \sin(\sqrt{-\gamma}x), \text{ якщо } \gamma < 0,\end{aligned}\tag{14.49}$$

$A_i = \text{const}$, $i = 3, 4$. Підставляючи попарно вирази (14.48) і (14.49) у анзац

$$\begin{aligned}U &= (\varphi(x))^{\frac{1}{k+1}}, \\ V &= -\lambda_2\varphi(x) + \exp(At) \left(\int p \exp(-At) dt + \psi(x) \right),\end{aligned}\tag{14.50}$$

породжений оператором з 2-го випадку теореми 14.5, отримаємо дев'ять різних розв'язків системи типу (14.46). Наприклад система

$$\begin{aligned}U_t &= (U^k U_x)_x + \alpha U^{k+1}, \\ V_t &= V_{xx} + \lambda_3 V + \lambda_4 U^{k+1}\end{aligned}\tag{14.51}$$

має розв'язок

$$\begin{aligned} U &= \left(A_1 \cos(\sqrt{-\beta}x) + A_2 \sin(\sqrt{-\beta}x) \right)^{\frac{1}{k+1}}, \\ V &= -\frac{\lambda_4}{\beta+\lambda_3} \left(A_1 \cos(\sqrt{-\beta}x) + A_2 \sin(\sqrt{-\beta}x) \right) + \\ &\quad + e^{At} \left(\int p e^{-At} dt + A_3 \cos(\sqrt{-\gamma}x) + A_4 \sin(\sqrt{-\gamma}x) \right), \end{aligned} \quad (14.52)$$

де $\beta = -(k+1)\alpha$, $\beta \neq -\lambda_3$, $\gamma = A - \lambda_3$, а p є розв'язком рівняння $p_t = p_{xx} + \lambda_3 p$.

В роботі [77] наведено низку інших розв'язків, досліджено їх властивості та пояснено їх інтерпретацію.

14.3 Застосування методу Лі для розв'язання деяких нелінійних задач типу Стефана

На сьогоднішній день вивчені симетрійні властивості надвеликої кількості диференціальних рівнянь, які зустрічаються в найрізноманітніших застосуваннях. Однак, у абсолютній більшості публікацій диференціальні рівняння досліджувались без врахування початкових та крайових умов. Наскільки нам відомо, перші роботи у цьому напрямку були опубліковані на початку 70-х років минулого століття, проте інтерес до теоретико-групового аналізу крайових задач почався лише наприкінці 80-х років⁶. Незважаючи на це, на сьогоднішній день немає закінченої теорії симетрійного аналізу крайових задач диференціальних рівнянь з частинними похідними; до одних і тих же типів крайових умов різні дослідники підходять з різних точок зору. Тому питання застосування групових методів до крайових задач є актуальним і потребує значної уваги дослідників, що працюють у цій галузі науки. У серії робіт, започаткованих в 90-х роках, нами досліджувався клас $(1+1)$ -вимірних нелінійних крайових задач типу Стефана, що моделюють процеси плавлення та випаровування металів у випадку, коли на їх поверхню падає потужний

⁶Див. монографію Rogers C., Ames W.F. Nonlinear boundary value problems in science and engineering. — Boston: Academic Press, 1989. — 418 р. та цитовану там літературу.

потік енергії (наприклад, лазерний промінь)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = C_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial t},$$

$$0 < S_1(t) < x < S_2(t), \quad t > 0, \quad (14.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = C_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial t}, \quad x > S_2(t), \quad t > 0, \quad (14.54)$$

$$x = S_1(t) : \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} = H_v \frac{dS_1}{dt} - q(t), \quad T_1 = T_v, \quad (14.55)$$

$$x = S_2(t) : \lambda_2(T_2) \frac{\partial T_2}{\partial x} = \lambda_1(T_1) \frac{\partial T_1}{\partial x} + H_m \frac{dS_2}{dt},$$

$$T_1 = T_2 = T_m, \quad (14.56)$$

$$x = +\infty : T_2 = T_0, \quad (14.57)$$

де T_v, T_m, T_0 — відповідно відомі температури випаровування, плавлення та твердого тіла на нескінченності, $\lambda_k(T_k)$ та $C_k(T_k)$ — коефіцієнти теплопровідності та питомі об'ємні теплоємності, H_v та H_m — питомі об'ємні теплоти випаровування та плавлення відповідно, $q(t)$ — відомий тепловий потік, що поглинається рідкою фазою на поверхні випаровування, $S_k(t)$ — шукані координати міжфазових меж, $\frac{dS_k}{dt}$ — швидкості міжфазових меж, $T_k(t, x)$ — шукані температурні поля, індекси $k = 1$ та $k = 2$ відповідають рідкій та твердій фазам відповідно.

У крайових задачах з класу (14.53)–(14.57) рівняння (14.53) та (14.54) описують процеси поширення тепла відповідно у рідкій та твердій фазах, крайові умови (14.55) моделюють динаміку випаровування на рухомій поверхні $S_1(t)$, крайові умови (14.56) є добре відомими умовами Стефана на поверхні плавлення $S_2(t)$. Також додатково припускається, що товщина рідкої фази є значно меншою за товщину твердої фази, що і дає можливість використовувати умову Діріхле (14.57).

Необхідно підкреслити, що в задачі (14.53)–(14.57) нехтується початковим розподілом температури в твердій фазі, і розглядається процес на тій стадії, коли уже присутні дві фази. Це означає, що процес починає

описуватися в момент часу $t = t^* > 0$, коли

$$T_1 = T_l(t), \quad T_2 = T_s(t),$$

де $T_l(t)$ та $T_s(t)$ — деякі функції, що знаходяться під час розв'язання задачі.

Головним результатом є така теорема, яка дає вичерпний опис операторів Лі системи нелінійних рівнянь теплопровідності (14.53)–(14.54), які дозволяють звести будь-яку крайову задачу з класу (14.53)–(14.57) до крайовій задачі для двох ЗДР, яка за визначенням є простішою.

Теорема 14.7 ([103]). *Нелінійна крайова задача з класу (14.53)–(14.57) може бути зредукована за допомогою інфінітезимального оператора системи нелінійних рівнянь теплопровідності (14.53)–(14.54) до крайової задачі для системи двох звичайних диференціальних рівнянь з відповідними крайовими умовами тоді і тільки тоді, коли цей оператор, з точністю до локальних перетворень $x \rightarrow x + x_0$, $t \rightarrow t + t_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$), є еквівалентним або до оператора*

$$X_1 = \partial_t + \mu \partial_x, \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (14.58)$$

або до оператора

$$X_2 = 2t\partial_t + x\partial_x. \quad (14.59)$$

При цьому, функції $S_k(t)$, $k = 1, 2$, та $q(t)$ мають бути вибрані відповідно таким чином

$$S_1 = \mu t + \omega_1, \quad S_2 = \mu t + \omega_2, \quad q(t) = q_0 \quad (14.60)$$

або

$$S_1 = \omega_1 \sqrt{t}, \quad S_2 = \omega_2 \sqrt{t}, \quad q(t) = \frac{q_0}{\sqrt{t}}, \quad (14.61)$$

де μ та ω_k , $k = 1, 2$ — константи, що мають бути знайдені під час розв'язання задачі, q_0 — довільна додатня стала.

Відзначимо, що оператор (14.58) веде до розв'язку задачі у вигляді біжучої хвилі. Такі розв'язки у випадку сталих коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_k(T_k)$ та питомих об'ємних теплоємностей $C_k(T_k)$ (тобто у випадку, коли система рівнянь базується на лінійних рівняннях теплопровідності) були знайдені в піонерській роботі⁷. У випадку нелінійних базових рівнянь теплопровідності (14.53)–(14.54) досліджувана крайова задача була розв'язана у неявній формі у роботах⁸. Для ряду конкретних виглядів функцій $\lambda_k(T_k)$ та $C_k(T_k)$ були також знайдені також точні розв'язки в явному вигляді.

Оператор (14.59) веде до автомодельних розв'язків задач з досліджуваного класу крайових задач. Цьому оператору відповідає анзац

$$T_1 = T_1(\omega), \quad T_2 = T_2(\omega), \quad \omega = \frac{x}{\sqrt{t}}. \quad (14.62)$$

Підстановка (14.62) у (14.53)–(14.57) веде до такого класу нелінійних крайових задач для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{d\omega} \left(\lambda_1(T_1) \frac{dT_1}{d\omega} \right) + \frac{\omega}{2} C_1(T_1) \frac{dT_1}{d\omega} = 0, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2, \quad (14.63)$$

$$\frac{d}{d\omega} \left(\lambda_2(T_2) \frac{dT_2}{d\omega} \right) + \frac{\omega}{2} C_2(T_2) \frac{dT_2}{d\omega} = 0, \quad \omega > \omega_2, \quad (14.64)$$

$$\omega = \omega_1 : \lambda_1(T_1) \frac{dT_1}{d\omega} = H_v \frac{\omega_1}{2} - q_0, \quad T_1 = T_v, \quad (14.65)$$

$$\omega = \omega_2 : \lambda_2(T_2) \frac{dT_2}{d\omega} = \lambda_1(T_1) \frac{dT_1}{d\omega} + H_2 \frac{\omega_2}{2}, \quad T_1 = T_2 = T_m, \quad (14.66)$$

$$\omega = +\infty : T = T_0. \quad (14.67)$$

Спростимо задачу, застосувавши до неї перетворення Кірхгофа

$$U = \int_0^{T_1} \lambda_1(T_1) dT_1, \quad V = \int_0^{T_2} \lambda_2(T_2) dT_2. \quad (14.68)$$

⁷Дульнев Г.Н., Ярышев Н.А. Теплофизика высоких температур. — 1967. — **5**, № 2. — С. 322–328.

⁸Черніга Р.М., Однороженко І.Г., Доп. АН УССР. Сер. А. — 1990. — № 12. — С. 46–48; Cherniha R. Cherniha N., J. Phys. A.: Math. Gen. — 1993. — **26**, № 18. — L. 935–940.

Підставивши (14.68) у (14.63)–(14.67) та провівши відповідні обрахунки, отримуємо еквівалентний клас крайових задач такої форми

$$U_{\omega\omega} + \frac{\omega}{2}D_1(U)U_\omega = 0, \quad (14.69)$$

$$V_{\omega\omega} + \frac{\omega}{2}D_2(V)V_\omega = 0, \quad (14.70)$$

$$\omega = \omega_1 : U_\omega = \frac{\omega_1}{2}H_v - q_0, \quad U = U_1, \quad (14.71)$$

$$\omega = \omega_2 : V_\omega = U_\omega + \frac{\omega_2}{2}H_m, \quad U = U_2, \quad V = V_2, \quad (14.72)$$

$$\omega = +\infty : V = V_0, \quad (14.73)$$

де функції $U(\omega)$, $V(\omega)$ та константи ω_1 , ω_2 є шуканими, $D_1(U) = \frac{C_1(T_1)}{\lambda_1(T_1)}$, $D_2(V) = \frac{C_2(T_2)}{\lambda_2(T_2)}$, сталі U_k та V_k визначаються з (14.68).

Таким чином, задача пошуку точних розв'язків крайових задач з класу (14.63)–(14.67) звелася до інтегрування нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку вигляду (14.69) та (14.70). Відомо, що рівняння такого типу можуть бути проінтегровані лише в деяких спеціальних випадках⁹. Відповідно до цього, в роботі [103] було знайдено декілька прикладів точних розв'язків крайових задач типу (14.69)–(14.73) для конкретних виглядів нелінійностей $D_1(U)$ та $D_2(V)$, при яких система (14.69)–(14.70) може бути проінтегрованою. Наведемо два з них.

Приклад. $D_1(U) = a^2$, $D_2(V) = b^2$ (тут і надалі, a та b — деякі додатні дійсні сталі). Тут розв'язок відповідної крайової задачі (14.69)–(14.73) можна подати у явному вигляді

$$U = \frac{U_1 \operatorname{erf}\left(\frac{a\omega_2}{2}\right) - U_2 \operatorname{erf}\left(\frac{a\omega_1}{2}\right) + (U_2 - U_1) \operatorname{erf}\left(\frac{a\omega}{2}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{a\omega_2}{2}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a\omega_1}{2}\right)},$$

$$V = \frac{V_0 \operatorname{erf}\left(\frac{b\omega_2}{2}\right) - V_2 + (V_2 - V_0) \operatorname{erf}\left(\frac{b\omega}{2}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{b\omega_2}{2}\right) - 1},$$

де невідомі сталі ω_1 та ω_2 знаходяться з такої системи трансцендентних

⁹Див., наприклад, довідник Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.

рівнянь

$$\frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{U_2 - U_1}{\operatorname{erf}\left(\frac{a\omega_2}{2}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a\omega_1}{2}\right)} e^{-\frac{a^2\omega_1^2}{4}} = \frac{\omega_1}{2} H_v - q_0,$$

$$\frac{b}{\sqrt{\pi}} \frac{V_2 - V_0}{\operatorname{erf}\left(\frac{b\omega_2}{2}\right) - 1} e^{-\frac{b^2\omega_2^2}{4}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \frac{U_2 - U_1}{\operatorname{erf}\left(\frac{a\omega_2}{2}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a\omega_1}{2}\right)} e^{-\frac{a^2\omega_2^2}{4}} + \frac{\omega_2}{2} H_m.$$

Приклад $D_1(U) = \frac{a^2}{U^2}$, $D_2(V) = \frac{b^2}{V^2}$. В цьому випадку розв'язок відповідної задачі (14.69)–(14.73) може бути поданим у параметричній формі

$$U = U_1 + \frac{\operatorname{erf}(\tau) - \operatorname{erf}(\tau_1)}{\operatorname{erf}(\tau_2) - \operatorname{erf}(\tau_1)} (U_2 - U_1),$$

$$\omega = \frac{2}{a} \left(\tau U + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{U_2 - U_1}{\operatorname{erf}(\tau_2) - \operatorname{erf}(\tau_1)} e^{-\tau^2} \right),$$

$$V = V_2 + \frac{\operatorname{erf}(\nu) - \operatorname{erf}(\nu_2)}{\operatorname{erf}(\nu_2) - 1} (V_2 - V_0),$$

$$\omega = \frac{2}{b} \left(\nu V + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{V_2 - V_0}{\operatorname{erf}(\nu_2) - 1} e^{-\nu^2} \right),$$

де невідомі параметри τ_1 , τ_2 , ν_2 знаходяться з такої системи трансцендентних рівнянь

$$\frac{U_2 - U_1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a^2}{U_1} - H_v \right) \frac{e^{-\tau_1^2}}{\operatorname{erf}(\tau_2) - \operatorname{erf}(\tau_1)} = U_1 H_v \tau_1 - a q_0,$$

$$\frac{ab}{\sqrt{\pi}} \frac{V_2 - V_0}{V_2} \frac{e^{-\nu_2^2}}{\operatorname{erf}(\nu_2) - 1} = \frac{U_2 - U_1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{a^2}{U_2} + H_m \right) \frac{e^{-\tau_2^2}}{\operatorname{erf}(\tau_2) - \operatorname{erf}(\tau_1)} + U_2 H_m \tau_2,$$

$$\frac{1}{a} \left(\tau_2 U_2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{U_2 - U_1}{\operatorname{erf}(\tau_2) - \operatorname{erf}(\tau_1)} e^{-\tau_2^2} \right) = \frac{1}{b} \left(\nu_2 V_2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{V_2 - V_0}{\operatorname{erf}(\nu_2) - 1} e^{-\nu_2^2} \right).$$

15 Класифікація інтегровних тривимірних квантово-механічних систем в магнітному полі

В роботах [10, 97] розглядається стаціонарне рівняння Шрьодінгера для частинки, що рухається в зовнішньому електромагнітному полі в тривимірному евклідовому просторі

$$H\psi = E\psi, \quad H = \frac{1}{2}\vec{p}^2 + V(x, y, z) + A_i(x, y, z)p_i + p_i A_i(x, y, z), \quad (15.1)$$

де $V(x, y, z)$ та $(A_1(x, y, z), A_2(x, y, z), A_3(x, y, z))$ – скалярний та векторний потенціали електромагнітного поля. Тут і надалі використовується позначення $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$, та за індексами, що повторюються йде підсумовування від 1 до 3.

За аналогією з класичною гамільтоновою механікою будемо вважати таку систему інтегровною, якщо існує пара квантово-механічних операторів P і Q , які комутують між собою, а також з гамільтоніаном H , тобто виконуються такі умови

$$[H, Q] = [H, P] = [P, Q] = 0.$$

Окрім цього, всі три оператора H, Q, P мають бути алгебраїчно незалежними, тобто жоден з них не може бути представлений поліномом від двох інших (докладніше див.: Hietarinta J. Pure quantum integrability // Phys. Lett. A. — 1998 — **246**. — P. 97–104; Hietarinta J. Classical vs quantum integrability // J. Math. Phys. — 1984. — **25**. — P. 1833–1840.).

В нашому дослідженні обмежемося випадком, коли оператори Q, P є квадратичними поліномами по $\vec{p}$

$$\begin{aligned} Q &= \alpha_{ik}(x, y, z)p_i p_k + f_i(x, y, z)p_i + u_1(x, y, z), \\ P &= \beta_{ik}(x, y, z)p_i p_k + g_i(x, y, z)p_i + u_2(x, y, z), \end{aligned} \quad (15.2)$$

В класичній механіці інтегровні системи є цікавими, оскільки їх рух у фазовому просторі є більш впорядкованим, а саме обмежується тором. В квантовій механіці інтегровність n -вимірної квантово-механічної

системи, тобто існування n інтегралів руху (операторів, що комутують між собою, та з оператором рівняння (15.1)), полегшує задачу визначення енергетичного спектру та хвильових функцій навіть тоді, коли з інтегровності не випливає відокремлення змінних, а лише так зване “квазі-відокремлення змінних” (Charest F., Hudon C., Winternitz P. Quasi-separation of variables in the Schrödinger equation with a magnetic field // J. Math. Phys. — 2007. — **48**. — 012105).

Отже задача опису всіх тих потенціалів електромагнітного поля V та A_1, A_2, A_3 , для яких квантово-механічна задача є інтегровною в означеному вище сенсі, є важливою і актуальною.

У випадку чисто скалярного потенціалу, тобто коли магнітне поле відсутнє, для тривимірного випадку цю задачу було розв’язано в 1967-му році Я.А. Смородінським та його учнями (Смородинский Я.А., Тугов И.И. О полных наборах наблюдаемых // ЖЭТФ — 1966. — **50**, № 3. — С. 653–659; Makarov A.A., Smorodinsky J.A., Valiev Kh., Winternitz P. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries // Nuovo Cimento A — 1967. — **52**. — P. 1061–1084). Вони довели, що з факту існування пари інтегралів руху першого або другого порядку по $\vec{p}$ (в означеному вище сенсі) випливає можливість відокремлення змінних у відповідному рівнянні Шрьодінгера та навпаки. А отже, отримані ними 11 класів інтегровних потенціалів V повністю співпали з результатами класичної роботи Ейзенхарта (Eisenhart L.P. Enumeration of potentials for which one-particle Schroedinger equations are separable // Phys. Rev. — 1948. — **74**, No. 1. — P. 87–89.), де він ще у 1948-му році описав всі скалярні потенціали, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера (або ж рівняння Гамільтона-Якобі у випадку класичної механіки) допускає відокремлення змінних хоча б в одній із 11 системі координат.

Наступний крок зробив у 1972-му році В.Н. Шаповалов зі співавторами (Шаповалов В.Н., Багров В.Г., Мешков А.Г. Разделение переменных в стационарном уравнении Шредингера // Изв. вузов СССР,

Фізика. — 1972. — № 8. — С. 45–50.), які отримали повний опис вектор-потенціалів з ненульовим магнітним полем, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера (15.1) допускає відокремлення змінних хоча б в одній із 11 вищезгаданих систем координат, та виписали відповідні пари операторів першого та другого порядків, які комутують між собою та з оператором рівняння.

Подальші результати в цьому напрямі пов'язані з роботами групи П. Вінтерніца (Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P. Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials // J. Math. Phys. — 1985. — **26**. — P. 3070–3079; McSween E., Winternitz P. Integrable and superintegrable Hamiltonian systems in magnetic fields // J. Math. Phys. — 2000. — **41**. — P. 2957–2967; Berube J., Winternitz P. Integrable and superintegrable quantum systems in a magnetic field // J. Math. Phys. — 2004. — **45**. — P. 1959–1973). Для двовимірного випадку було встановлено, що в магнітному полі з існування інтегралів руху другого порядку не обов'язково слідує відокремлення змінних. Хоча при цьому інтеграли руху все ще класифікуються на класи еквівалентності під дією групи Евкліда, причому члени другого порядку по p_i в них мають таку ж саму форму, як і у випадку чисто скалярного потенціалу. Також було показано, що в магнітному полі квантовий випадок вже не обов'язково збігається з класичним: отримані вектор-потенціали можуть залежати від сталої Планка $\hbar$ нетривіальним чином.

В даній роботі зроблено наступний крок в класифікації потенціалів електромагнітного поля V та $\vec{A}$ в трьохвимірному евклідовому просторі, при яких відповідна квантово-механічна система, що описується рівнянням (15.1), є інтегрованою в означеному вище сенсі, тобто для яких існує пара операторів (15.2), що комутують між собою, а також з оператором рівняння. Як результат, ми отримуємо цілу низку вектор-потенціалів, для яких відповідне рівняння Шрьодінгера (15.1) є інтегровним в означеному вище сенсі, але при цьому не допускає відокремлення змінних,

а отже ці потенціали не містяться в класифікації Шаповалова і тому є новими, і для яких відповідну квантово-механічну задачу визначення енергетичного спектру та хвильових функцій можна спробувати розв'язати за допомогою, наприклад, квазі-відокремлення змінних.

Спочатку ми розглянемо один оператор Q вигляду (15.2), який комутує з оператором рівняння Шрьодінгера H вигляду (15.1). Комутатор $[Q, H]$ буде містити в собі члени третього, другого, першого, та нульового порядків по p_i , коефіцієнти при яких ми маємо покласти рівними нулеві. Коефіцієнти при третій степені p_i дають таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x_m} p_m p_i p_k = 0$$

Після розв'язання цієї системи ми маємо наступний результат: розглядуваний оператор Q може бути представлений як симетричний білінійний поліном по генераторам групи рухів тривимірного евклідового простору E_3 , тобто групи симетрій тривимірного рівняння Шрьодінгера для вільної частинки (рівняння Гельмгольца):

$$Q = a_{ik} M_i M_k + b_{ik} (p_i M_k + M_k p_i) + c_{ij} p_i p_j + f_i(x, y, z) p_i + u_1(x, y, z), \quad (15.3)$$

де a_{ik} , b_{ik} та c_{ij} є константами, а M_i – оператор повороту, а саме $M_i = \varepsilon_{ikl} x_k p_l$, де ε_{ikl} – повністю антисиметричний тензор.

Порівнюючи отриманий вигляд оператора (15.3) з аналогічним виглядом для випадку чисто скалярного потенціалу робимо висновок, що члени другого порядку по p_i в операторах залишаються незмінними і після появи ненульового магнітного поля (як і в двовимірному випадку).

А тому, за повною аналогією з роботою (Makarov A.A., Smorodinsky J.A., Valiev Kh., Winternitz P. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries // Nuovo Cimento A — 1967. — **52**. — Р. 1061–1084.), пара комутуючих операторів P, Q вигляду (15.3) може бути зведена поворотами та зсувами системи координат, а також перетвореннями виду

$$Q' = \mu P + \nu Q + \lambda H$$

до одного з 11 класів, що відповідають класичним 11 ортогональним системам координат, які дозволяють відокремлення змінних у тривимірному рівнянні Шрьодінгера для вільної частинки.

Тому в нашому випадку ненульового магнітного поля ми отримаємо члени другого порядку по p_i в цих комутуючих 11 парах операторів P, Q такі ж самі, як і в роботі (Makarov A.A., Smorodinsky J.A., Valiev Kh., Winternitz P. A systematic search for nonrelativistic systems with dynamical symmetries // Nuovo Cimento A — 1967. — **52**. — P. 1061–1084.). Але, на відміну від чисто скалярного випадку, в наших операторах залишаються також ненульові коефіцієнти при членах p_i першого порядку, які є довільними функціями, від вигляду яких в решті решт і залежить вигляд магнітного поля (у скалярному випадку вони дорівнюють нулеві), як це буде показано далі.

Нам вдалося повністю розв’язати найпростіший “декартовий” випадок, тобто коли пара P, Q має вигляд:

$$\begin{aligned} Q &= p_1^2 + \vec{f}(x, y, z)\vec{p} + u_1(x, y, z), \\ P &= p_2^2 + \vec{g}(x, y, z)\vec{p} + u_2(x, y, z) \end{aligned}$$

Прирівнюючи в рівності $[H, Q] = [H, P] = [P, Q] = 0$ коефіцієнти при незалежних степенях p_i до нуля, ми отримаємо перевизначену систему нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними для невідомих функцій $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, u_1, u_2$ і V, A_1, A_2, A_3 .

Коефіцієнти при вищих степенях p_i дають таку систему:

$$\begin{aligned} f_2 &= f_2(x), \quad f_3 = f_3(x), \quad g_1 = g_1(y), \quad g_3 = g_3(y), \quad f_{1y} = g_{2x}, \\ f_2'(x) + f_{1y} &= 4A_{2x}, \quad g_3'(y) + g_{2z} = 4A_{3y}, \quad 4A_{1x} = f_{1x}, \\ f_3'(x) + f_{1z} &= 4A_{3x}, \quad g_1'(y) + g_{2x} = 4A_{1y}, \quad 4A_{2y} = g_{2y}. \end{aligned}$$

Її загальним розв’язком для $\vec{A}$ буде

$$\begin{aligned} 4A_1 &= s_x + k_{1x} + g_1(y) + r_1(z), \\ 4A_2 &= s_y + k_{2y} + f_2(x) + r_2(z), \end{aligned}$$

$$4A_3 = s_z + k_{1z} + k_{2z} + f_3(x) + g_3(y) + r'_3(z),$$

де $s = s(x, y, z)$, $k_1 = k_1(x, z)$, $k_2 = k_2(y, z)$.

Калібровне перетворення

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} F,$$

$$F = s(x, y, z) + k_1(x, z) + k_2(y, z) + r_3(z).$$

спрошує вираз для $\vec{A}$ до такого

$$A_1 = (g_1(y) + r_1(z))/4,$$

$$A_2 = (f_2(x) + r_2(z))/4,$$

$$A_3 = (f_3(x) + g_3(y))/4.$$

Маючи цей вираз для $\vec{A}$, ми отримаємо з коефіцієнтів при нижчих степенях p_i наступну систему для функцій $g_1(y)$, $r_1(z)$, $f_2(x)$, $r_2(z)$, $f_3(x)$, $g_3(y)$:

$$\begin{aligned} f_2(x)g'_3(y) &= g_1(y)f'_3(x), \\ r_1(z)f'_2(x) &= f_3(x)r'_2(z), \\ r_2(z)g'_1(y) &= g_3(y)r'_1(z). \end{aligned} \tag{15.4}$$

Очевидно, що рівняння Шрьодінгера з вектор-потенціалом (15.1) є інваріантним відносно перестановок A_1 , A_2 , A_3 , що відбуваються одночасно з x_1 , x_2 , x_3 . При цьому рівняння (15.4) є інваріантними відносно перестановок функцій $g_1(y)$, $r_1(z)$, $f_2(x)$, $r_2(z)$, $f_3(x)$, $g_3(y)$. Ці перетворення еквівалентності можна зобразити таким чином:

$$\begin{pmatrix} f_2 & g_3 & r_1 \\ f_3 & g_1 & r_2 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_1 & f_2 & g_3 \\ r_2 & f_3 & g_1 \\ A_3 & A_1 & A_2 \\ z & x & y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} g_3 & r_1 & f_2 \\ g_1 & r_2 & f_3 \\ A_2 & A_3 & A_1 \\ y & z & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} f_3 & r_2 & g_1 \\ f_2 & r_1 & g_3 \\ A_1 & A_3 & A_2 \\ x & z & y \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} g_1 & f_3 & r_2 \\ g_3 & f_2 & r_1 \\ A_2 & A_1 & A_3 \\ y & x & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r_2 & g_1 & f_3 \\ r_1 & g_3 & f_2 \\ A_3 & A_2 & A_1 \\ z & y & x \end{pmatrix}.$$

Використовуючи це відношення еквівалентності, нам вдалося повністю описати всі розв'язки системи (15.4). Це, в свою чергу дало нам опис всіх можливих форм вектор-потенціалів $\vec{A}$. Коефіцієнти при степенях p_i , що залишилися, служать для визначення форми скалярної компоненти вектор-потенціалу V і накладають деякі додаткові обмеження на $g_1(y)$, $r_1(z)$, $f_2(x)$, $r_2(z)$, $f_3(x)$, $g_3(y)$.

Внизу ми наводимо остаточні результати наших обчислень. Тут і надалі $\vec{\Omega}$ позначає магнітне поле, а саме $\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{A}$.

Випадок 1.

$$\begin{aligned} \vec{A} &= 0, \quad \vec{\Omega} = 0, & Q &= p_1^2 + 2u_1(x), \\ V &= u_1(x) + u_2(y) + u_3(z), & P &= p_2^2 + 2u_2(y). \end{aligned}$$

Цей випадок відповідає нульовому магнітному полю і міститься в класифікації Ейзенхарта (Eisenhart L.P. Enumeration of potentials for which one-particle Schroedinger equations are separable // Phys. Rev. — 1948. — **74**, No. 1. — P. 87–89.). Згідно його результатів такий вигляд для скалярного потенціалу $V = u_1(x) + u_2(y) + u_3(z)$ вичерпує всі скалярні потенціали, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера допускає відокремлення змінних в декартовій системі координат.

Випадок 2.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} v_1(z) \\ v_2(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} -v_2'(z) \\ v_1'(z) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = v_3(z), \quad \begin{aligned} Q &= p_1^2, \\ P &= p_2^2. \end{aligned}$$

Випадок 3.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) + g(y) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} g'(y) \\ -f'(x) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$V = u_1(x) + u_2(y), \quad \begin{aligned} Q &= p_1^2 + 4f(x)p_3 + 2u_1(x), \\ P &= p_2^2 + 4g(y)p_3 + 2u_2(y). \end{aligned}$$

Випадки 2-3 були отримані в класифікації Шаповалова та співавторів (Шаповалов В.Н., Багров В.Г., Мешков А.Г. Разделение переменных в стационарном уравнении Шредингера // Изв. вузов СССР, Физика. — 1972. — № 8. — С. 45–50.). Згідно їх результатів ці два випадки вичерпують всі вектор-потенціали з ненульовим магнітним полем, при яких відповідне рівняння Шрьодінгера допускає відокремлення змінних в декартовій системі координат.

Наступні випадки не пов'язані з відокремленням змінних, а отже ці потенціали не містилися в класифікації Шаповалова і тому є новими.

Випадок 4.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} g'(y) \\ f'(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f''(x) - g''(y) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} V &= -(C_3f(x) + C_3g(y) + \\ &\quad + 2C_2f^2(x) + 2C_1g^2(y) + r(z) + 4g(y)f''(x) + 4f(x)g''(y)), \\ Q &= p_1^2 + 4f'(x)p_2 - 2(4g(y)f''(x) + 2C_2f(x)^2 + C_3f(x)), \\ P &= p_2^2 + 4g'(y)p_1 - 2(4f(x)g''(y) + 2C_1g(y)^2 + C_3g(y)). \end{aligned}$$

де функції $f(x)$ та $g(y)$ є розв'язками рівнянь

$$\begin{aligned} f''(x) &= Cf^2(x) + C_1f(x) + C_4, \\ g''(y) &= Cg^2(y) + C_2g(y) + C_5. \end{aligned}$$

При $C = 0$ це є лінійні рівняння другого порядку. Випадок $C \neq 0$ більш цікавий: коли ще при цьому і $C_1 \neq 0$ (або ж, відповідно, $C_2 \neq 0$), то

їх розв'язками будуть перші трансцеденти Пенлеве, а якщо ж $C_1 = 0$ (або ж, відповідно, $C_2 = 0$), то маємо справу с рівнянням Вейерштраса, розв'язки якого виражаються або ж через функції Вейерштраса, або ж через елементарні функції, в залежності від параметру C_4 (або ж, відповідно, C_5) та констант інтегрування. Деталі можна знайти, наприклад, в довіднику Камке (Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.).

Випадок 5.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} g'(y) \\ f'(x) \\ Cf(x) + Cg(y) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} Cg'(y) \\ -Cf'(x) \\ f''(x) - g''(y) \end{pmatrix},$$

$$V = -(r + C_3f(x) + C_3g(y) + \\ + 2C_2f^2(x) + 2C_1g^2(y) + 4g(y)f''(x) + 4f(x)g''(y)),$$

$$Q = p_1^2 + 4(f'(x)p_2 + Cf(x)p_3) - \\ - 2(4g(y)f''(x) + 2C_2f(x)^2 + C_3f(x)),$$

$$P = p_2^2 + 4(g'(y)p_1 + Cg(y)p_3) - \\ - 2(4f(x)g''(y) + 2C_1g(y)^2 + C_3g(y)).$$

де функції $f(x)$ та $g(y)$ є розв'язками рівнянь

$$f''(x) = C_6f^2(x) + C_1f(x) + C_4,$$

$$g''(y) = C_6g^2(y) + C_2g(y) + C_5,$$

які розв'язуються аналогічно до попереднього випадку.

Випадок 6.

$$\vec{A} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} w'_1(y) + v'_1(z) \\ u'_2(x) + v'_2(z) \\ u'_3(x) + w'_3(y) \end{pmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} w''_3(y) - v''_2(z) \\ v''_1(z) - u''_3(x) \\ u''_2(x) - w''_1(y) \end{pmatrix},$$

$$V = -(r + u_1(x) + w_2(y) + v_3(z) + w_1(y)u''_2(x) + v_1(z)u''_3(x) + \\ + u_2(x)w''_1(y) + v_2(z)w''_3(y) + u_3(x)v''_1(z) + w_3(y)v''_2(z))/4,$$

$$Q = p_1^2 + u_2'(x)p_2 + u_3'(x)p_3 - (w_1(y)u_2''(x) + v_1(z)u_3''(x) + u_1(x))/2,$$

$$P = p_2^2 + w_1'(y)p_1 + w_3'(y)p_3 - (u_2(x)w_1''(y) + v_2(z)w_3''(y) + w_2(y))/2.$$

де функції $u_2(x)$, $u_3(x)$, $w_1(y)$, $w_3(y)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$, $u_1(x)$, $w_2(y)$, $v_3(z)$ визначені конкретним чином, та розбиваються в свою чергу на чотири випадки:

Випадок 6.1.

$$\begin{aligned} u_2(x) &= a_3(r_1 \cosh(a_1x) + k_1 \sinh(a_1x)), \\ u_3(x) &= a_2(r_1 \sinh(a_1x) + k_1 \cosh(a_1x)), \\ w_1(y) &= a_3(r_2 \cosh(a_2y) + k_2 \sinh(a_2y)), \\ w_3(y) &= a_1(r_2 \sinh(a_2y) + k_2 \cosh(a_2y)), \\ v_1(z) &= a_2(r_3 \cosh(a_3z) + k_3 \sinh(a_3z)), \\ v_2(z) &= a_1(r_3 \sinh(a_3z) + k_3 \cosh(a_3z)), \\ u_1(x) &= a_2^2 a_3^2 ((r_1^2 + k_1^2) \cosh(2a_1x) + \\ &\quad + 2r_1 k_1 \sinh(2a_1x))/4 + C(r_1 \cosh(a_1x) + k_1 \sinh(a_1x)), \\ w_2(y) &= a_1^2 a_3^2 ((r_2^2 + k_2^2) \cosh(2a_2y) + \\ &\quad + 2r_2 k_2 \sinh(2a_2y))/4 + C(r_2 \cosh(a_2y) + k_2 \sinh(a_2y)), \\ v_3(z) &= a_1^2 a_2^2 ((r_3^2 + k_3^2) \cosh(2a_3z) + \\ &\quad + 2r_3 k_3 \sinh(2a_3z))/4 + C_1(r_3 \cosh(a_3z) + k_3 \sinh(a_3z)) \end{aligned}$$

з 5 можливими підвипадками:

- a) $C = 0, \quad C_1 = 0;$
- b) $r_1 = k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = C;$
- c) $r_1 = k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = C;$
- d) $r_1 = -k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = -C;$
- e) $r_1 = -k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = -C.$

Випадок 6.2.

$$u_2(x) = a_3(r_1 \sin(a_1x) - k_1 \cos(a_1x)),$$

$$\begin{aligned}
u_3(x) &= a_2(r_1 \cos(a_1x) + k_1 \sin(a_1x)), \\
w_1(y) &= a_3(r_2 \sin(a_2y) - k_2 \cos(a_2y)), \\
w_3(y) &= a_1(r_2 \cos(a_2y) + k_2 \sin(a_2y)), \\
v_1(z) &= a_2(r_3 \cosh(a_3z) + k_3 \sinh(a_3z)), \\
v_2(z) &= a_1(r_3 \sinh(a_3z) + k_3 \cosh(a_3z)), \\
u_1(x) &= a_2^2 a_3^2 ((r_1^2 - k_1^2) \cos(2a_1x) + \\
&\quad + 2r_1 k_1 \sin(2a_1x))/4 + C(r_1 \sin(a_1x) - k_1 \cos(a_1x)), \\
w_2(y) &= a_1^2 a_3^2 ((r_2^2 - k_2^2) \cos(2a_2y) + \\
&\quad + 2r_2 k_2 \sin(2a_2y))/4 + C(r_2 \sin(a_2y) - k_2 \cos(a_2y)), \\
v_3(z) &= -a_1^2 a_2^2 ((r_3^2 + k_3^2) \cosh(2a_3z) + \\
&\quad + 2r_3 k_3 \sinh(2a_3z))/4 + C_1(r_3 \cosh(a_3z) + k_3 \sinh(a_3z))
\end{aligned}$$

з 5 можливими підвипадками:

- a) $C = 0, \quad C_1 = 0;$
- b) $r_1 = ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = iC;$
- c) $r_1 = ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = iC;$
- d) $r_1 = -ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = k_3, \quad C_1 = -iC;$
- e) $r_1 = -ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = -k_3, \quad C_1 = -iC.$

Випадок 6.3.

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= a_3(r_1 \cos(a_1x) + k_1 \sin(a_1x)), \\
u_3(x) &= ia_2(r_1 \sin(a_1x) - k_1 \cos(a_1x)), \\
w_1(y) &= a_3(r_2 \cos(a_2y) + k_2 \sin(a_2y)), \\
w_3(y) &= ia_1(r_2 \sin(a_2y) - k_2 \cos(a_2y)), \\
v_1(z) &= a_2(r_3 \cos(a_3z) + k_3 \sin(a_3z)), \\
v_2(z) &= ia_1(r_3 \sin(a_3z) - k_3 \cos(a_3z)), \\
u_1(x) &= -a_2^2 a_3^2 ((r_1^2 - k_1^2) \cos(2a_1x) + \\
&\quad + 2r_1 k_1 \sin(2a_1x))/4 + C(r_1 \cos(a_1x) + k_1 \sin(a_1x)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2(y) &= -a_1^2 a_3^2 ((r_2^2 - k_2^2) \cos(2a_2 y) + \\
&\quad + 2r_2 k_2 \sin(2a_2 y))/4 + C(r_2 \cos(a_2 y) + k_2 \sin(a_2 y)), \\
v_3(z) &= -a_1^2 a_2^2 ((r_3^2 - k_3^2) \cos(2a_3 z) + \\
&\quad + 2r_3 k_3 \sin(2a_3 z))/4 + C_1(r_3 \sin(a_3 z) - k_3 \cos(a_3 z))
\end{aligned}$$

з 5 можливими підвипадками:

- a) $C = 0, \quad C_1 = 0;$
- b) $r_1 = ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = iC;$
- c) $r_1 = -ik_1, \quad r_2 = -ik_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = iC;$
- d) $r_1 = -ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = -iC;$
- e) $r_1 = ik_1, \quad r_2 = ik_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = -iC.$

Випадок 6.4.

$$\begin{aligned}
u_2(x) &= a_3(r_1 \cosh(a_1 x) + k_1 \sinh(a_1 x)), \\
u_3(x) &= -ia_2(r_1 \sinh(a_1 x) + k_1 \cosh(a_1 x)), \\
w_1(y) &= a_3(r_2 \cosh(a_2 y) + k_2 \sinh(a_2 y)), \\
w_3(y) &= -ia_1(r_2 \sinh(a_2 y) + k_2 \cosh(a_2 y)), \\
v_1(z) &= a_2(r_3 \cos(a_3 z) + k_3 \sin(a_3 z)), \\
v_2(z) &= ia_1(r_3 \sin(a_3 z) - k_3 \cos(a_3 z)), \\
u_1(x) &= a_2^2 a_3^2 ((r_1^2 + k_1^2) \cosh(2a_1 x) + \\
&\quad + 2r_1 k_1 \sinh(2a_1 x))/4 + C(r_1 \cosh(a_1 x) + k_1 \sinh(a_1 x)), \\
w_2(y) &= a_1^2 a_3^2 ((r_2^2 + k_2^2) \cosh(2a_2 y) + \\
&\quad + 2r_2 k_2 \sinh(2a_2 y))/4 + C(r_2 \cosh(a_2 y) + k_2 \sinh(a_2 y)), \\
v_3(z) &= a_1^2 a_2^2 ((r_3^2 - k_3^2) \cos(2a_3 z) + \\
&\quad + 2r_3 k_3 \sin(2a_3 z))/4 + C_1(r_3 \sin(a_3 z) - k_3 \cos(a_3 z))
\end{aligned}$$

з 5 можливими підвипадками:

- a) $C = 0, \quad C_1 = 0;$

- b) $r_1 = -k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = C;$
- c) $r_1 = k_1, \quad r_2 = -k_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = C;$
- d) $r_1 = k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = -ik_3, \quad C_1 = -C;$
- e) $r_1 = -k_1, \quad r_2 = k_2, \quad r_3 = ik_3, \quad C_1 = -C.$

Таким чином, ми отримали цілу низку нових вектор-потенціалів, для яких відповідне рівняння Шрьодінгера (15.1) є інтегровним в означеному вище сенсі, але при цьому не допускає відокремлення змінних, і для яких відповідну квантово-механічну задачу визначення енергетичного спектру та хвильових функцій можна спробувати розв'язати за допомогою, наприклад, квазі-відокремлення змінних (Charest F., Hudon C., Winternitz P. Quasiseperation of variables in the Schrodinger equation with a magnetic field // J. Math. Phys. — 2007. — **48**. — 012105).

Класифікація інтегровних тривимірних квантово-механічних систем в магнітному полі. В роботах [44, 55, 74, 75, 102] метод відокремлення змінних застосовано до задачі визначення точно-розв'язних моделей гідродинамічної стабільності. З математичної точки зору проблема визначення стабільності даної течії представляє собою розв'язування системи рівнянь, що отримані з рівнянь Нав'є–Стокса лінеарізацією за основними течіями та знаходження множини всіх її можливих розв'язків, які дозволяють розщеплення збурень на нормальні моди. В роботі [44] повністю розглянуто випадки декартових та циліндричних координат. В роботах [55, 74, 75, 102] наведено гідродинамічну інтерпретацію отриманих результатів.

16 Групова класифікація квазілінійних рівнянь еліптичного типу

Зроблена повна групова класифікація нелінійних рівнянь вигляду [12, 42, 68, 48, 50]

$$\Delta u = F(x, y, u, u_x, u_y). \quad (16.1)$$

Дослідження було виконано окремо для класів рівнянь інваріантних відносно алгебр Лі операторів симетрії, які мають структуру напівпростих алгебр, алгебр з нетривіальним розкладом Леві та розв'язних алгебр. Це пов'язано з принциповою різницею методів досліджень таких типів рівнянь.

При цьому, розгляду підлягають рівняння, які замінами змінних не зводяться до рівняння Лапласа або інших лінійних рівнянь еліптичного типу.

16.1 Попередні результати групової класифікації

Згідно з відомим алгоритмом Лі–Овсяннікова, інфінітезимальні оператори, які генерують локальні групи інваріантності рівнянь вигляду (16.1), шукаємо в класі операторів

$$v = \tau \partial_x + \xi \partial_y + \eta \partial_u, \quad (16.2)$$

де $\tau = \tau(x, y, u)$, $\xi = \xi(x, y, u)$, $\eta = \eta(x, y, u)$ – двічі неперервно диференційовані функції в деякій області простору $R^2 \times V = \langle x, y \rangle \times \langle u \rangle$.

Провівши відповідні обчислення, приходимо до такого результату.

Твердження 16.1. *Група інваріантності рівняння (16.1) генерується інфінітезимальним оператором*

$$v = a(x, y) \partial_x + b(x, y) \partial_y + c(x, y, u) \partial_u, \quad (16.3)$$

де функції a , b , c , F задовольняють таку систему рівнянь:

$$a_y + b_x = 0, \quad a_x - b_y = 0,$$

$$\begin{aligned}
& c_{xx} + c_{yy} + 2u_x c_{xu} + 2u_y c_{yu} + (u_x^2 + u_y^2) c_{uu} + (c_u - 2a_x) F = \\
& = aF_x + bF_y + cF_u + [c_x + u_x(c_u - a_x) - u_y b_x] F_{u_x} + \\
& [c_y + u_y(c_u - b_y) - u_x a_y] F_{u_y}.
\end{aligned} \tag{16.4}$$

Неважко побачити, що перші два рівняння є умовами Коші–Рімана, тобто функції a та b є гармонічними функціями. Також, безпосередня перевірка показує, що для довільних значень функції F оператор (16.3) є нульовим оператором.

Групову класифікацію рівняння (16.1) проводили з точністю до перетворення з групи еквівалентності $\mathcal{E}$. Таку групу утворюють ті із перетворень

$$\bar{x} = \alpha(x, y, u), \quad \bar{y} = \beta(x, y, u), \quad v = \gamma(x, y, u), \quad \frac{D(\bar{x}, \bar{y}, v)}{D(x, y, u)} \neq 0,$$

які зберігають диференціальну структуру рівняння (16.1), тобто трансформують його в рівняння вигляду

$$v_{\bar{x}\bar{x}} + v_{\bar{y}\bar{y}} = \Phi(\bar{x}, \bar{y}, v, v_{\bar{x}}, v_{\bar{y}}).$$

Безпосередні обрахунки показали, що має місце таке твердження.

Твердження 16.2. *Групу $\mathcal{E}$ рівняння (16.1) складають перетворення*

$$\bar{x} = \alpha(x, y), \quad \bar{y} = \beta(x, y), \quad v = \gamma(x, y, u), \tag{16.5}$$

де

$$\alpha_x = \epsilon \beta_y, \quad \alpha_y = -\epsilon \beta_x \quad (\epsilon = \pm 1), \quad \alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 \neq 0, \quad \gamma_u \neq 0.$$

Оскільки в загальному випадкові не існують локальні групи перетворень, які б допускалися рівнянням вигляду (16.1), природно розпочати групову класифікацію з опису тих рівнянь, які мають найнижчі симетрійні властивості, тобто допускають однопараметричні групи перетворень.

Теорема 16.1. *З точністю до еквівалентності існують два класи квазілінійних рівнянь вигляду (16.1), які допускають однопараметричні групи локальних перетворень. Представники цих класів рівнянь та відповідні одновимірні алгебри інваріантності такі:*

$$\Delta u = F(y, u, u_x, u_y) : A_1^1 = \langle \partial_x \rangle,$$

$$\Delta u = F(x, y, u_x, u_y) : A_1^2 = \langle \partial_u \rangle.$$

16.2 Інваріантність відносно алгебр Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві

В теорії абстрактних алгебр Лі добре відомо, що всяка алгебра Лі інваріантні розкладається в напівпрямую суму напівпростої (фактор Леві) та розв'язної алгебр. Тому, перш за все, було описано рівняння, які інваріантні відносно простих (напівпротих) алгебр Лі операторів симетрії.

Спочатку було описано квазілінійні рівняння вигляду (16.1), алгебри інваріантності яких ізоморфні найнижчим простим класичним алгебрам Лі: $so(3)$ та $sl(2, \mathbb{R})$.

Теорема 16.2. *З точністю до еквівалентності існують два класи квазілінійних рівнянь вигляду (16.1), які допускають алгебри Лі операторів симетрії ізоморфні алгебри $so(3)$. Представники цих класів рівнянь та відповідні алгебри інваріантності такі:*

$$I. \quad \Delta u = \text{ch}^{-2} y \tilde{F}(u, \omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2) \text{ch}^2 y :$$

$$so^1(3) = \langle \partial_x, \text{sh } y \cos x \partial_x - \text{ch } y \sin x \partial_y, -\text{sh } y \sin x \partial_x - \text{ch } y \cos x \partial_y \rangle;$$

$$II. \quad \Delta u = \text{ch}^{-2} y \tilde{F}(\xi \text{ch } y, \eta \text{ch } y),$$

$$\xi = (u_x - \text{th } y) \sin u + u_y \cos u, \quad \eta = (u_x - \text{th } y) \cos u - u_y \sin u :$$

$$so^2(3) = \langle \partial_x, \text{sh } y \cos x \partial_x - \text{ch } y \sin x \partial_y + \text{ch } y \cos x \partial_u, \\ -\text{sh } y \sin x \partial_x - \text{ch } y \cos x \partial_y - \text{ch } y \sin x \partial_u \rangle.$$

Теорема 16.3. *З точністю до еквівалентності існують два класи квазілінійних рівнянь вигляду (16.1), які допускають алгебри Лі операторів*

рів симетрії ізоморфні алгебри $sl(2, \mathbb{R})$. Представники цих класів рівнянь та відповідні алгебри інваріантності такі:

$$\begin{aligned}
I. \quad & \Delta u = y^{-2} \tilde{F}(u, \omega), \quad \omega = y^2(u_x^2 + u_y^2) : \\
& sl^1(2, \mathbb{R}) = \langle 2x\partial_x + 2y\partial_y, -(x^2 - y^2)\partial_x - 2xy\partial_y, \partial_x \rangle; \\
II. \quad & \Delta u = y^{-2} \tilde{F}(v, \omega), \\
& v = (1 - 2yu_x) \cos 2u + 2yu_y \sin 2u, \\
& \omega = 2yu_y \cos 2u - (1 - 2yu_x) \sin 2u : \\
& sl^2(2, \mathbb{R}) = \langle 2x\partial_x + 2y\partial_y, -(x^2 - y^2)\partial_x - 2xy\partial_y + y\partial_u, \partial_x \rangle.
\end{aligned}$$

Далі, використовуючи структуру простих алгебр Лі і аналізуючи їх реалізації в класі операторів (16.2) з точністю до групи еквівалентності $\mathcal{E}$, було отримано такий результат.

Теорема 16.4. *В рамках сформульованої задачі, отриманими в теоремах 16.2 і 16.3 $SO(3)$ - та $SL(2, \mathbb{R})$ -інваріантними рівняннями вичерпуються рівняння вигляду (16.1), які допускають напівпрості групи локальних перетворень.*

Інваріантність відносно алгебр з нетривіальною розв'язною частиною. Далі, досліджувалось існування рівнянь вигляду (16.1), алгебри інваріантності яких мають структуру $S \ltimes N$, тобто задовольняють співвідношення

$$[S, S] \subset S, \quad [N, N] \subset N, \quad [S, N] \subset N, \quad (16.6)$$

з не пустою розв'язною частиною N . Можливі реалізації напівпростих алгебр S (фактора Леві) знайдені в теоремах 16.2 і 16.3. Тому нам, виходячи з третьої умови (16.6), нам залишилось описати в класі операторів (16.2) всеможливі реалізації розв'язних алгебр N , які б задовольняли умови сформульованої задачі.

В результаті досліджень було отримане наступний результат.

Теорема 16.5. *В рамках сформульованої задачі з точністю до еквівалентності існують шість класів нелінійних рівнянь вигляду (16.1), максимальні алгебри інваріантності яких є алгебрами Лі операторів симетрії з нетривіальним розкладом Леві, що розкладаються в пряму суму фактора Леві та розв'язної алгебри Лі:*

- 1) $\Delta u = \text{ch}^{-2} y \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2) \text{ch}^2 y : so^1(3) \oplus \langle \partial_u \rangle;$
- 2) $\Delta u = \text{ch}^{-2} y \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x \text{ch} y - \text{sh} y)^2 + u_y^2 \text{ch}^2 y : so^2(3) \oplus \langle \partial_u \rangle;$
- 3) $\Delta u = y^{-2} \tilde{F}(\omega), \quad \omega = (u_x^2 + u_y^2) y^2 : sl^1(2, \mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle;$
- 4) $\Delta u = y^{-2} \tilde{F}(\omega), \quad \omega = 4y^2 u_y^2 + (1 - 2yu_x)^2 : sl^2(2, \mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u \rangle;$
- 5) $\Delta u = \lambda \text{ch}^{-1} y \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \lambda \neq 0 : so^1(3) \oplus \langle \partial_u, u \partial_u \rangle;$
- 6) $\Delta u = \lambda y^{-1} \sqrt{u_x^2 + u_y^2}, \lambda \neq 0 : sl^1(2, \mathbb{R}) \oplus \langle \partial_u, u \partial_u \rangle.$

16.3 Інваріантність відносно розв'язних алгебр Лі

Була проведена остаточна групово-класифікація квазілінійного двовимірного рівняння еліптичного типу

$$\Delta u = F(x, y, u, u_x, u_y).$$

А саме, виконано класифікацію відносно чотиривимірних розв'язних алгебр за допомогою синтезу прямого метода Лі–Овсянікова и алгебраїчного підходу [12]. Далі, аналізуючи рівняння інваріантні відносно чотиривимірних алгебр, була завершена класифікація прямим методом [50].

Було запропоновано алгоритм, який пов'язує теорію реалізацій алгебр Лі і прямого метода класифікації. Перш за все було наведено наступні означення. Розглядалось алгебру $A_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ розмірності n , базисними елементами якої є диференціальні оператори першого порядку (векторні поля)

$$e_i = a_i(x, y) \partial_x + b_i(x, y) \partial_y + c_i(x, y, u) \partial_u, \quad i = 1, \dots, n, \quad (16.7)$$

для яких пари функцій $a_i(x, y)$, $b_i(x, y)$ задовольняють умови Коші–Рімана.

Означення 16.1. Реалізацію (16.7) алгебри A_n будемо називати *допустимою*, якщо існує така функція $F(x, y, u, u_x, u_y)$, для якої усі трійки функцій $(a_i(x, y), b_i(x, y), c_i(x, y, u))$ є розв'язками визначальних рівнянь (16.4), а відповідне інваріантне рівняння вигляду (16.1) є суттєво нелінійним.

Означення 16.2. Дві реалізації алгебри A_n з операторами вигляду (16.2), що містять функції $(a_i(x, y), b_i(x, y), c_i(x, y, u))$ і $(\tilde{a}_i(x, y), \tilde{b}_i(x, y), \tilde{c}_i(x, y, u))$, ми будемо називати *еквівалентними*, якщо існують перетворення еквівалентності, які зводять кожен оператор e_i (16.7) у відповідний оператор $\tilde{e}_i = \tilde{a}_i(x, y)\partial_x + \tilde{b}_i(x, y)\partial_y + \tilde{c}_i(x, y, u)\partial_u$ ($i = 1, \dots, n$).

Означення 16.3. Дві реалізації алгебри A_n будемо називати *ізоморфними*, якщо кожен із базисних операторів однієї реалізації є лінійною комбінацією базисних операторів іншої, а відповідне лінійне перетворення є невиродженим.

Означення 16.4. Дві реалізації алгебри A_n будемо називати *різними*, якщо вони є нееквівалентними та неізоморфними.

Через $\mathfrak{N}A_{k,l}$ позначимо множину усіх нееквівалентних допустимих реалізацій (можливо ізоморфних) для кожної алгебри $A_{k,l}$ розмірності k , а множину усіх різних допустимих реалізацій алгебри $A_{k,l}$ як $\mathfrak{D}A_{k,l}$. Очевидно, що $\mathfrak{D}A_{k,l} \subset \mathfrak{N}A_{k,l}$, і наша мета полягала у побудові усіх множин реалізацій $\mathfrak{D}A_{k,l}$.

Виходячи з наведених означень, запропоновано такий індуктивний алгоритм побудови цих множин, а також відповідних класів інваріантних рівнянь.

Для одновимірної алгебри $A_{1,1}$ маємо $\mathfrak{N}A_{1,1} = \mathfrak{D}A_{1,1} = \{\partial_x, \partial_u\}$.

- Для усіх алгебр $A_{k,l}$ розмірності k , $1 \leq k \leq 3$, будуємо множини реалізацій $\mathfrak{N}A_{k,l}$ і $\mathfrak{D}A_{k,l}$, а також відповідні їм класи інваріантних рівнянь.

- Після цього розглядаємо послідовно алгебри $A_{k+1,l}$ розмірності $k+1$. Як ідеал кожна з них містить деяку підалгебру $A_{k,m}$ розмірності k (це має місце для розв'язних алгебр Лі, оскільки для кожної із них існує композиційний ряд підалгебр. Тоді, розглядаючи кожен побудовану реалізацію з множини $\mathfrak{N}A_{k,m}$ для алгебри $A_{k,m} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$, будуємо додатковий оператор e_{k+1} так, щоб базисні оператори задовольняли комутаційні співвідношення алгебри $A_{k+1,l}$, і, якщо це потрібно, спрощуємо вигляд операторів перетвореннями з групи $\mathcal{E}$ (16.5).
- Далі перевіряємо, чи буде отримана реалізація допустимою; якщо так, то включаємо її до множини $\mathfrak{N}A_{k+1,l}$, якщо ні — вилучаємо її з подальшого розгляду. Із побудованої множини $\mathfrak{N}A_{k+1,l}$ виділяємо максимальну множину $\mathfrak{D}A_{k+1,l}$ різних реалізацій.
- Після побудови множини $\mathfrak{D}A_{4,l}$ різних реалізацій алгебр розмірності 4 і відповідних класів інваріантних рівнянь, які містять довільні функції однієї змінної, використовуємо прямий метод класифікації Овсяннікова, щоб отримати повний список рівнянь, інваріантних відносно алгебр Лі операторів симетрії, які мають розмірність вищу за чотири.

16.4 Інваріантність відносно чотиривимірних алгебр Лі

З точністю до еквівалентності, яку визначає для групи дифеоморфізмів, існують 42 класи нееквівалентних рівнянь, які допускають максимальні чотиривимірні алгебри Лі операторів симетрії. При цьому, ці рівняння містять довільні функції однієї змінної.

Згідно з класифікацією неізоморфних чотиривимірних розв'язних алгебр Лі [Мубарякзанов Г.М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1963. — № 1(32). — С. 114–123.], розрізняють по десять розкладних (в пряму суму алгебр Лі нижчих розмірностей) та нерозкладних алгебр Лі.

Інваріантність відносно розкладних алгебр

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.2} = A_{3.2} \oplus A_1$

1. $\tilde{A}_{4.2}^1 = \langle -u\partial_u, \partial_u, \partial_x \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle : \Delta u = (u_x + u_y)G\left(\frac{u_x}{u_y}\right);$
2. $\tilde{A}_{4.2}^2 = \langle \partial_y - u\partial_u, \partial_u, \partial_x \rangle \oplus \langle e^{-y}\partial_u \rangle : \Delta u = e^{-y}G(e^y u_x) - (u_x + u_y).$

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.3} = A_{3.3} \oplus A_1$

$$\tilde{A}_{4.3}^1 = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle : \Delta u = G(u_y).$$

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.4} = A_{3.4} \oplus A_1$

1. $\tilde{A}_{4.4}^1 = \langle \partial_u, \partial_x, x\partial_x + y\partial_y + (u+x)\partial_u \rangle \oplus \langle y\partial_u \rangle : \Delta u = e^{-u_x}G(ye^{-u_x});$
2. $\tilde{A}_{4.4}^2 = \langle \partial_u, -x\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle : \Delta u = e^x G(e^{-x}u_y).$

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.5} = A_{3.5} \oplus A_1$

1. $\tilde{A}_{4.5}^1 = \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y \rangle \oplus \langle \partial_u \rangle : \Delta u = (u_x + u_y)^2 G\left(\frac{u_x}{u_y}\right);$
2. $\tilde{A}_{4.5}^2 = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u \rangle \oplus \langle y\partial_u \rangle : \Delta u = y^{-1}G(u_x).$

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.6} = A_{3.6} \oplus A_1$

1. $\tilde{A}_{4.6}^1 = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y - u\partial_u \rangle \oplus \langle y^{-1}\partial_u \rangle : \Delta u = -2y^{-1}u_y + y^{-3}G(y^2u_x);$
2. $\tilde{A}_{4.6}^2 = \langle \partial_u, e^{2x}\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle : \Delta u = 2u_x + e^x G(e^{-x}u_y).$

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.7} = A_{3.7} \oplus A_1$

1. $\tilde{A}_{4.7}^1 = \langle \partial_x, \partial_u, x\partial_x + y\partial_y + qu\partial_u \rangle \oplus \langle y^q\partial_u \rangle, \quad q \neq 0, \pm 1 : \Delta u = (q-1)y^{-1}u_y + y^{q-2}G(y^{1-q}u_x);$
2. $\tilde{A}_{4.7}^2 = \langle \partial_u, e^{(1-q)x}\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle, \quad 0 < |q| < 1 : \Delta u = (1-q)u_x + e^x G(e^{-x}u_y).$

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.8} = A_{3.8} \oplus A_1$

1. $\tilde{A}_{4.8}^1 = \langle \partial_x, \partial_y, y\partial_x - x\partial_y \rangle \oplus \langle \partial_u \rangle : \Delta u = G(u_x^2 + u_y^2);$
2. $\tilde{A}_{4.8}^2 = \langle \partial_u, -\operatorname{tg} x \partial_u, \partial_x + u \operatorname{tg} x \partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle :$
 $\Delta u = 2u_x \operatorname{tg} x + u_y G(u_y \cos x).$

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.9} = A_{3.9} \oplus A_1$

1. $\tilde{A}_{4.9}^1 = \langle \partial_x, \partial_y, (qx + y)\partial_x + (qy - x)\partial_y \rangle \oplus \langle \partial_u \rangle, q > 0 :$
 $\Delta u = (u_x^2 + u_y^2)G \left((u_x^2 + u_y^2) \exp \left(2q \operatorname{arctg} \frac{u_x}{u_y} \right) \right);$
2. $\tilde{A}_{4.9}^2 = \langle \partial_u, -\operatorname{tg} x \partial_u, \partial_x + u(q + \operatorname{tg} x)\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_y \rangle, q > 0 :$
 $\Delta u = 2u_x \operatorname{tg} x + u_y G(u_y e^{-qx} \cos x).$

Рівняння, інваріантні відносно $\tilde{A}_{4.10} = A_{2.2} \oplus A_{2.2}$

1. $\tilde{A}_{4.10}^1 = \langle -x\partial_x - y\partial_y, \partial_x \rangle \oplus \langle -u\partial_u, \partial_u \rangle : \Delta u = \frac{(u_x^2 + u_y^2)}{yu_x} G \left(\frac{u_x}{u_y} \right);$
2. $\tilde{A}_{4.10}^2 = \langle \partial_x - u\partial_u, \partial_u \rangle \oplus \left\langle \lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_y, e^{-x} e^{\frac{(1+\lambda_1)y}{\lambda_2}} \partial_u \right\rangle,$
 $\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \in \mathbb{R} :$

$$\Delta u = - \left(1 + \left(\frac{1 + \lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right) u_x$$

$$+ e^{-x} e^{\frac{\lambda_1 y}{\lambda_2}} G \left(e^x e^{-\frac{\lambda_1 y}{\lambda_2}} \left(\frac{1 + \lambda_1}{\lambda_2} u_x + u_y \right) \right).$$

Інваріантність відносно нерозкладних алгебр. Усі нерозкладні чотиривимірні розв'язні алгебри Лі є напівпрямою сумою деякої тривимірної розв'язної алгебри Лі й одновимірної алгебри Лі, тобто мають структуру $A_1 \ltimes A_3$, де $A_1 = \langle e^4 \rangle$, $A_3 = \langle e^1, e^2, e^3 \rangle$. При цьому, для алгебр $A_{4.i}$ ($i = 1, \dots, 6$) $A_{4.i} = A_1 \ltimes A_{3.1}$, для алгебр $A_{4.i}$ ($i = 7, 8, 9$) $A_{4.i} = A_1 \ltimes A_{3.3}$, а $A_{4.10} = A_1 \ltimes A_{3.5}$.

Використовуючи відомі нееквівалентні реалізації алгебр $A_{3.1}$, $A_{3.3}$, $A_{3.5}$ ми отримали повний перелік рівнянь вигляду (16.1), максимальни-

ми алгебрами інваріантності яких є чотиривимірні нерозкладні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії.

$A_{4,1}$ -інваріантні рівняння:

$$A_{4,1}^1 = \langle \partial_y - xy\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_u, -y\partial_u, \partial_x \rangle : \Delta u = G(y^2 + 2u_x).$$

$A_{4,2}$ -інваріантні рівняння:

1. $A_{4,2}^1 = \langle x\partial_x + y\partial_y + (u + y)\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_x, \partial_u, \partial_y \rangle, \quad q = 1 :$

$$\Delta u = e^{-u_y} G(u_x);$$
2. $A_{4,2}^2 = \langle qx\partial_x + qy\partial_y + u\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_x, \partial_u, -q^{-1} \ln y \partial_u \rangle, \quad q \neq 0 :$

$$\Delta u = -\frac{u_y}{y} + \frac{u_x}{y} G\left(y^{(q-1)/q} u_x\right);$$
3. $A_{4,2}^3 = \langle x\partial_x + y\partial_y + (qu + y^{q-1}x)\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_u, y^{q-1}\partial_u, \partial_x \rangle, \quad q \neq 0; 1 :$

$$\Delta u = \frac{q-2}{y} u_y + y^{q-2} G(u_x y^{1-q} - \ln y).$$

$A_{4,3}$ -інваріантні рівняння:

1. $A_{4,3}^1 = \langle x\partial_x + y\partial_y \rangle \oplus \langle \partial_x, \partial_u, -\ln y \partial_u \rangle : \Delta u = -\frac{u_y}{y} + u_x^2 G(yu_x);$
2. $A_{4,3}^2 = \langle \partial_y + (u + xe^y)\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_u, e^y \partial_u, \partial_x \rangle :$

$$\Delta u = u_y + e^y G(e^{-y} u_x - y).$$

$A_{4,4}$ -інваріантні рівняння:

$$A_{4,4}^1 = \langle x\partial_x + y\partial_y + (u - x \ln y)\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_u, -\ln y \partial_u, \partial_x \rangle : \\ \Delta u = -\frac{u_y}{y} + \frac{1}{y} G(2u_x + \ln^2 y).$$

$A_{4,5}$ -інваріантні рівняння:

1. $A_{4,5}^1 = \langle x\partial_x + y\partial_y + p u \partial_u \rangle \oplus \langle \partial_x, \partial_y, \partial_u \rangle, \quad p \neq 0; 1, \quad q = 1 :$

$$\Delta u = (u_x u_y)^r G\left(\frac{u_x}{u_y}\right), \quad r = \frac{p-2}{2(p-1)};$$
2. $A_{4,5}^2 = \langle x\partial_x + y\partial_y + qu\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_x, \partial_u, y^{q-p}\partial_u \rangle,$

$$-1 \leq p < q \leq 1, \quad pq \neq 0 :$$

$$\Delta u = \frac{q-p-1}{y} u_y + y^{q-2} G(u_x y^{1-q}) ;$$

$$3. A_{4.5}^3 = \langle qx\partial_x + qy\partial_y + u\partial_u \rangle \ominus \langle \partial_u, \partial_x, y^{(1-p)/q} \partial_u \rangle,$$

$$-1 \leq p < 1, \quad -1 \leq q \leq 1, \quad pq \neq 0 :$$

$$\Delta u = \frac{1-q-p}{qy} u_y + y^{(1-2q)/q} G(u_x y^{(q-1)/q}) .$$

$A_{4.6}$ -інваріантні рівняння:

$$1. A_{4.6}^1 = \langle (px+y)\partial_x + (py-x)\partial_y + qu\partial_u \rangle \ominus \langle \partial_u, \partial_x, \partial_y \rangle,$$

$$q \neq 0, \quad p \geq 0 : \Delta u = \exp \left((q-2p) \operatorname{arctg} \frac{u_x}{u_y} \right) \\ \times G \left((u_x^2 + u_y^2) \exp \left(2(p-q) \operatorname{arctg} \frac{u_x}{u_y} \right) \right) ;$$

$$2. A_{4.6}^2 = \langle qx\partial_x + qy\partial_y + (p + \operatorname{tg}(q^{-1} \ln y)u)\partial_u \rangle$$

$$\ominus \langle \partial_x, \partial_u, -\operatorname{tg}(q^{-1} \ln y)\partial_u \rangle, \quad q \neq 0, \quad p \geq 0 :$$

$$\Delta u = \left(\frac{2 \operatorname{tg}(q^{-1} \ln y)}{qy} - \frac{1}{y} \right) u_y \\ + \frac{1}{\cos(q^{-1} \ln y) y^{(2q-p)/q}} G(u_x \cos(q^{-1} \ln y) y^{(q-p)/q}) .$$

$A_{4.7}$ -інваріантні рівняння:

$$A_{4.7}^1 = \langle x\partial_x + y\partial_y + \left(2u - \frac{x^2}{2} + \lambda xy \right) \partial_u \rangle \ominus \langle \partial_u, (\lambda y - x)\partial_u, \partial_x \rangle :$$

$$\Delta u = -\ln y + G \left(\frac{\lambda u_x + u_y}{y} - \lambda^2 \ln y \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$A_{4.8}$ -інваріантні рівняння:

$$1. A_{4.8}^1 = \langle x\partial_x + y\partial_y + 2u\partial_u \rangle \ominus \langle \partial_u, \partial_x, \partial_y + x\partial_u \rangle,$$

$$q = 1 : \Delta u = G \left(\frac{u_x - y}{u_y} \right) ;$$

$$2. A_{4.8}^2 = \langle x\partial_x + y\partial_y + (1+q)u\partial_u \rangle \ominus \langle \partial_u, \partial_x, (\lambda y + x)\partial_u \rangle, \quad |q| \leq 1 :$$

$$\Delta u = y^{q-1} G(y^{-q}(u_y - \lambda u_x)) ;$$

$$3. A_{4.8}^3 = \langle \partial_y + u\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_u, -x\partial_u, \partial_x + \lambda\partial_y \rangle, \quad q = 0 :$$

$$\Delta u = \exp(y - \lambda x) G(\exp(\lambda x - y) u_y);$$

$$4. A_{4.8}^4 = \langle qx\partial_x + qy\partial_y + (1+q)u\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_u, (\lambda y - x)\partial_u, \partial_x \rangle,$$

$$0 < |q| \leq 1 : \Delta u = y^{(1-q)/q} G\left(\frac{\lambda u_x + u_y}{y^{1/q}}\right).$$

$A_{4.9}$ -інваріантні рівняння:

$$A_{4.9}^1 = \langle (qx + y)\partial_x + (qy - x)\partial_y + \left(2qu + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\partial_u \rangle$$

$$\oplus \langle \partial_u, \partial_x, \partial_y + x\partial_u \rangle :$$

$$\Delta u = G\left(\left((u_x - y)^2 + u_y^2\right) \exp\left(-2q \operatorname{arctg}\left(\frac{u_x - y}{u_y}\right)\right)\right), \quad q \geq 0.$$

$A_{4.10}$ -інваріантні рівняння:

$$1. A_{4.10}^1 = \langle y\partial_x - x\partial_y + \partial_u \rangle \oplus \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y \rangle :$$

$$\Delta u = (u_x^2 + u_y^2) G\left(\operatorname{arctg} \frac{u_x}{u_y} - u\right);$$

$$2. A_{4.10}^2 = \langle \lambda_1\partial_x + \lambda_2\partial_y + u \operatorname{tg}(\lambda_2^{-1}y)\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_u, -\operatorname{tg}(\lambda_2^{-1}y)\partial_u, \partial_x + u\partial_u \rangle :$$

$$\Delta u = 2\lambda_2^{-1} \operatorname{tg}(\lambda_2^{-1}y) u_y + u_x G(\exp(\lambda_1 y / \lambda_2 - x) \cos(\lambda_2^{-1}y) u_x),$$

$$\lambda_2 \neq 0, \lambda_1 \in \mathbb{R};$$

$$3. A_{4.10}^3 = \langle y\partial_x - x\partial_y + \lambda\partial_u \rangle \oplus \langle \partial_x, \partial_y, x\partial_x + y\partial_y + \partial_u \rangle, \lambda \in \mathbb{R} :$$

$$\Delta u = (u_x^2 + u_y^2) G\left((u_x^2 + u_y^2) e^{2u} \exp\left(-2\lambda \operatorname{arctg}\left(\frac{u_x}{u_y}\right)\right)\right).$$

16.5 Завершення групової класифікації

На попередньому етапі ми отримали повний перелік суттєво нелінійних рівнянь вигляду (16.1), максимальними алгебрами інваріантності яких є чотиривимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії. Усі отримані рівняння містять довільні функції, які залежать від однієї змінної. Це дає можливість для завершення групової класифікації цих рівнянь, використати класичний алгоритм Овсяннікова.

Провівши відповідні дослідження усіх рівнянь, інваріантних відносно чотиривимірних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії, ми отримали одинадцять нееквівалентних класів рівнянь вигляду (16.1), які допускають максимальні п'ятивимірні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії.

17 Груповий аналіз та закони збереження рівнянь реакції–дифузії

17.1 Розширений груповий аналіз рівнянь реакції–дифузії зі степеневими нелінійностями

У роботі [69] виконано групову класифікацію класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь реакції–дифузії зі степеневими нелінійностями загального вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)u^n u_x)_x + h(x)u^m. \quad (17.1)$$

Тут $f = f(x)$, $g = g(x)$ та $h = h(x)$ — довільні гладкі функції змінної x , $fg \neq 0$; n, m — довільні сталі. Випадок $n = 0$ є особливим, тому його досліджено окремо в роботах [7, 121]. Спочатку знайдено звичайну, узагальнену розширену та різні типи умовних груп еквівалентності класу (17.1), перетворення з яких дозволили спростити вигляд рівнянь та отримати вичерпну групову класифікацію. Перетворення $t \rightarrow t$, $x \rightarrow \int g(x)^{-1} dx$, $u \rightarrow u$ зводить рівняння (17.1) до такого

$$f(x)u_t = (u^n u_x)_x + h(x)u^m. \quad (17.2)$$

Тому, без обмеження загальності, далі розглянуто клас (17.2). Результат групової класифікації можна підсумувати наступним чином.

Теорема 17.1. *Алгеброю Лі ядра основних груп класу рівнянь (17.2) є алгебра $A^{\ker} = \langle \partial_t \rangle$. З точністю до перетворень еквівалентності повний перелік розширень максимальних алгебр лівьської інваріантності рівнянь з класу (17.2) вичерпується такими випадками:*

Загальний випадок степеня m

$$1. f = f_1(x), h = \exp \int \frac{-(3(n+1) + m)ax + (1 + m - n)p - 2b}{(n+1)ax^2 + bx + c} dx:$$

$$\partial_t, (d + 2b - pn)t\partial_t + ((n+1)ax^2 + bx + c)\partial_x + (ax + p)u\partial_u;$$

$$2. f = 1, h = \varepsilon: \partial_t, \partial_x, 2(1 - m)t\partial_t + (1 + n - m)x\partial_x + 2u\partial_u;$$

$$m = 1, \quad h \neq 0, \quad (h/f)_x = 0$$

$$3. h = \varepsilon f: \partial_t, e^{-\varepsilon nt}(\partial_t + \varepsilon u\partial_u);$$

$$4. f = f_1(x), h = \varepsilon f:$$

$$\partial_t, e^{-\varepsilon nt}(\partial_t + \varepsilon u\partial_u), n((n+1)ax^2 + bx + c)\partial_x + (nax + 2b + d)u\partial_u;$$

$$5. n \neq -\frac{4}{3}, f = 1, h = \varepsilon: \partial_t, \partial_x, e^{-\varepsilon nt}(\partial_t + \varepsilon u\partial_u), nx\partial_x + 2u\partial_u;$$

$$6. n = -\frac{4}{3}, f = 1, h = \varepsilon:$$

$$\partial_t, \partial_x, e^{\frac{4}{3}\varepsilon t}(\partial_t + \varepsilon u\partial_u), -\frac{4}{3}x\partial_x + 2u\partial_u, -\frac{1}{3}x^2\partial_x + xu\partial_u;$$

$$m = n + 1 \quad \text{або} \quad h = 0$$

$$7. \partial_t, nt\partial_t - u\partial_u;$$

$$8. n \neq -\frac{4}{3}, f = 1, h = \alpha x^{-2}: \partial_t, nt\partial_t - u\partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x;$$

$$9. n \neq -\frac{4}{3}, f = 1, h = \varepsilon: \partial_t, \partial_x, nt\partial_t - u\partial_u;$$

$$10. n \neq -\frac{4}{3}, f = 1, h = 0: \partial_t, \partial_x, nt\partial_t - u\partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x;$$

$$11. n = -\frac{4}{3}, f = e^x, h = \alpha: \partial_t, t\partial_t + \frac{3}{4}u\partial_u, \partial_x - \frac{3}{4}u\partial_u;$$

$$12. n = -\frac{4}{3}, f = 1, h = 0:$$

$$\partial_t, \partial_x, t\partial_t + \frac{3}{4}u\partial_u, 2t\partial_t + x\partial_x, -\frac{1}{3}x^2\partial_x + xu\partial_u.$$

Тут α — довільна стала, $\alpha \neq 0$ у випадку 8, $\varepsilon = \pm 1$,

$$f_1(x) = \exp \int \frac{-(3n+4)ax + d}{(n+1)ax^2 + bx + c} dx.$$

З точністю до $\hat{G}_1^\sim$ -еквівалентності набір параметрів (a, b, c, d) приймає такі значення: $(\varepsilon, 0, 1, 0)$ при $n = -1$ та $(1, 0, 1, d')$ при $n \neq -1$, $(0, 1, 0, d')$, $(0, 0, 1, 1)$, де d' — довільна стала.

У теоремі 17.1 і надалі довільні елементи задовольняють лише явно зазначеним обмеженням і вважаються нееквівалентними довільним елементам, що мають додаткове розширення.

Знаходження усіх додаткових перетворень еквівалентності у досліджуваному класі дозволило отримати групову класифікацію також відносно всіх точкових перетворень.

Теорема 17.2. *З точністю до точкових перетворень повний перелік розширень максимальних алгебр лівської інваріантності рівнянь з класу (17.1) вичерпується випадками 1–2 та 7–12, наведеними в теоремі 17.1.*

У роботі [69] також прокласифіковано всі допустимі перетворення та локальні закони збереження для рівнянь з досліджуваного класу. Отримані результати підсумовують наступні твердження.

Теорема 17.3. *Нехай рівняння $f(x)u_t = (u^n u_x)_x + h(x)u^m$ та рівняння $\tilde{f}(\tilde{x})\tilde{u}_{\tilde{t}} = (\tilde{u}^{\tilde{n}}\tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \tilde{h}(\tilde{x})\tilde{u}^{\tilde{m}}$ пов'язані точковим перетворенням змінних t, x та u . Тоді $\tilde{n} = n$ та*

$$\text{або } \tilde{m} = m, \quad \text{або } (m, \tilde{m}) = (1, n+1), \quad \text{або } (m, \tilde{m}) = (n+1, 1).$$

Перетворення, що пов'язує ці рівняння, визначається перетворенням з узагальненої групи еквівалентності

$$a) \hat{G}_1^{\sim}, \text{ якщо або } m \neq 1, n+1, \text{ або } m = 1, (h/f)_x \neq 0;$$

$$b) \hat{G}_{1,m=n+1}^{\sim}, \text{ якщо } m = \tilde{m} = n+1;$$

$$c) \hat{G}_{1,m=1,(h/f)_x=0}^{\sim}, \text{ якщо } m = \tilde{m} = 1, (h/f)_x = 0,$$

тоді також $(\tilde{h}/\tilde{f})_x = 0$.

Якщо $m = 1$ та $\tilde{m} = n+1$, то $(h/f)_x = 0$ та перетворення є композицією двох перетворень з групи $\hat{G}_{1,m=1,(h/f)_x=0}^{\sim}$ та групи $\hat{G}_{1,m=n+1}^{\sim}$ через проміжне рівняння, в якому $h = 0$.

Випадок $(m, \tilde{m}) = (n+1, 1)$ є подібним до попереднього.

Тут $\hat{G}_1^\sim$ — узагальнена група еквівалентності класу (17.2), $\hat{G}_{1,m=n+1}^\sim$, $\hat{G}_{1,m=1,(h/f)_x=0}^\sim$ — умовні узагальнені групи еквівалентності класу (17.2) з умовами $m = n + 1$ та $m = 1$, $(h/f)_x = 0$, відповідно.

Теорема 17.4. *Перелік рівнянь (17.2), які мають нетривіальні закони збереження, вичерпується такими, що задовольняють одній з наступних умов:*

1. $m = n + 1$.

$$n \neq -1: \quad (\varphi^i f u, -\varphi^i u^n u_x + \varphi_x^i \frac{u^{n+1}}{n+1}), \quad \varphi^i, \quad i = 1, 2.$$

$$n = -1: \quad (x f u, -x u^{-1} u_x + \ln u), \quad x; \quad (f u, -u^{-1} u_x), \quad 1.$$

2. $m = 1, \quad h = \mu f$.

$$n \neq -1: \quad (x e^{-\mu t} f u, e^{-\mu t} (-x u^n u_x + \frac{u^{n+1}}{n+1})), \quad x e^{-\mu t};$$

$$(e^{-\mu t} f u, -e^{-\mu t} u^n u_x), \quad e^{-\mu t}.$$

$$n = -1: \quad (x e^{-\mu t} f u, e^{-\mu t} (-x u^{-1} u_x + \ln u)), \quad x e^{-\mu t};$$

$$(e^{-\mu t} f u, -e^{-\mu t} u^{-1} u_x), \quad e^{-\mu t}.$$

Тут β_1, β_2 та μ — довільні сталі. Функції $\varphi^i = \varphi^i(x)$, $i = 1, 2$, утворюють фундаментальну систему розв'язків лінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку $\varphi_{xx} + (n+1)h\varphi = 0$. (Разом з умовами на довільні елементи класу (17.2) також наведено вектори густини і характеристики базисних елементів відповідних просторів законів збереження.)

Наслідок 17.1. *Для будь-якого нелінійного рівняння з класу (17.1) розмірність простору законів збереження дорівнює або 0 або 2. В другому випадку рівняння можна звести точковим перетворенням до рівняння з того ж класу, в якому $g = 1$ та $h = 0$. Тоді базис відповідного простору характеристик складається з одиниці ($\varphi^1 = 1$) та функції $\varphi^2 = x$.*

Використовуючи знайдені симетрії, методом лівської редукції побуду-

довано деякі точні розв'язки.

17.2 Розширений груповий аналіз квазілінійних рівнянь реакції–дифузії зі степеневою нелінійністю

У роботах [7, 121] проведено розширений груповий аналіз класу $(1+1)$ -вимірних квазілінійних рівнянь реакції–дифузії вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m. \quad (17.3)$$

Тут $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$ — довільні гладкі функції змінної x , $fgh \neq 0$, $m \neq 0, 1$. Лінійний випадок, що відповідає значенням $m = 0$ та $m = 1$, виключено з розгляду, оскільки він добре вивчений. Для розв'язання задачі групової класифікації в цьому класі використано новий підхід, що базується на послідовному застосуванні перетворень з групи еквівалентності класу та відображень між класами, породженими сім'ями точкових перетворень. А саме, спочатку перетворенням

$$t \rightarrow \text{sign}(f(x)g(x))t, \quad x \rightarrow \int_{x_0}^x \sqrt{|f(y)/g(y)|} dy + x_0, \quad u \rightarrow u$$

зі звичайної групи еквівалентності класу (17.3) виконано калібрування $f = g$ довільних елементів з цього класу.

Отже, не втрачаючи загальності, можна обмежитися дослідженням класу

$$f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^m, \quad (17.4)$$

оскільки всі результати, що стосуються симетрій та розв'язків цього класу, можна поширити на клас (17.3) перетворенням з групи еквівалентності.

Сім'я точкових перетворень

$$v(t, x) = \sqrt{|f(x)|}u(t, x), \quad (17.5)$$

параметризованих довільним елементом f , породжує відображення класу (17.4) на клас

$$v_t = v_{xx} + H(x)v^m + F(x)v, \quad (17.6)$$

$$\text{де } F(x) = -\frac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}}{\sqrt{|f(x)|}}, \quad H(x) = \frac{h(x)}{(\sqrt{|f(x)|})^{m+1}}.$$

Підклас класу (17.6) зі значенням $m = 2$ відрізняється за своїми симетрійними властивостями від рівнянь з іншими значеннями параметра m . У випадку $m = 2$ необхідне додаткове калібрування з використанням відображення між класами [7]. А саме, сім'я точкових перетворень

$$w(t, x) = v(t, x) + \frac{F(x)}{2H(x)}, \quad (17.7)$$

породжує відображення класу (17.6) з $m = 2$ на клас рівнянь вигляду

$$w_t = w_{xx} + H(x)w^2 + G(x), \quad (17.8)$$

$$\text{де } G(x) = -\left(\frac{F(x)}{2H(x)}\right)_{xx} - \frac{F(x)^2}{4H(x)}.$$

Групові класифікації вихідного класу, його підкласу з $m = 2$ та їх образів відносно відображень, породжених сім'ями точкових перетворень, виконано з точністю до відповідних узагальнених розширених або звичайних груп еквівалентності та множин усіх точкових перетворень. Результати групової класифікації рівнянь (17.3) з точністю до всіх точкових перетворень сформульовано у наступному твердженні.

Теорема 17.5. *Алгеброю Лі ядра основних груп класу рівнянь (17.4) є алгебра $A^{\ker} = \langle \partial_t \rangle$. З точністю до всіх точкових перетворень перелік розширень максимальних алгебр лівьської інваріантності рівнянь з класу (17.3) вичерпується такими випадками:*

1. $f = \cos^2 x, \quad h = \delta \cos^{m+1} x: \quad \partial_t, \partial_x + \operatorname{tg} x u \partial_u;$
2. $f = e^x, \quad h = \delta e^{\frac{m+1}{2}x}: \quad \partial_t, 2\partial_x - u \partial_u;$

3. $f = 1, \quad h = \delta: \quad \partial_t, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x + \frac{2}{1-m}u\partial_u;$
4. $f = x^\lambda, \quad h = \delta x^\gamma: \quad \partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x + \frac{2-\lambda+\gamma}{1-m}u\partial_u;$
5. $f = x(\cos(\rho \ln |x|))^2, \quad h = \delta x^l(\cos(\rho \ln |x|))^{m+1}: \\ \partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x + \left(\rho \operatorname{tg}(\rho \ln |x|) + \frac{l+1}{1-m} \right) u\partial_u;$
6. $f = x^{-1}f_3(x)^2, \quad h = \delta x^{-\frac{m+1}{2}}e^{px^2}f_3(x)^{m+1}: \\ \partial_t, e^{2\beta t} \left[\partial_x - \left(4\beta x^2 - 1 - a_3 + (a_3 + 3)\frac{f_4(x)}{f_3(x)} \right) \frac{u}{2x}\partial_u \right].$

Тут $\delta = \pm 1, \rho \neq 0, \beta = \frac{2p}{m-1}; (\lambda, \gamma) \neq \{(0, 0), (2, m+1)\}$ при $m \neq 2$ та $(\lambda, \gamma) \neq \{(-6, -9), (0, 0), (2, 3), (8, 12)\}$ при $m = 2$. $f_3(x) = M_{\kappa, \mu}(\beta x^2), f_4(x) = M_{\kappa+1, \mu}(\beta x^2)$, де $M_{\kappa, \mu}$ — функція Уіттекера з параметрами $\kappa, \mu; \kappa = \frac{a_3}{4}, \mu = \frac{1}{4}; a_3 \neq \frac{5-m}{1-m}$ та додатково $a_3 \neq 5$ при $m = 2$.

Широкі сім'ї нових точних розв'язків досліджуваних рівнянь знайдено класичним методом лівської редукції та розмноженням відомих розв'язків інших рівнянь, пов'язаних з досліджуваними різними типами точкових перетворень (такими як додаткові перетворення еквівалентності та відображення між класами). Множину допустимих перетворень класу-образу вичерпно описано у загальному випадку $m \neq 2$.

Теорема 17.6. Звичайна група еквівалентності $G_{FH}^{\sim}$ класу (17.6) з $m \neq 0, 1, 2$ складається з перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \delta_1^2 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_1 x + \delta_3, \quad \tilde{v} = \delta_4 v, \\ \tilde{F} &= \frac{F}{\delta_1^2}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{\delta_1^2 \delta_4^{m-1}}, \quad \tilde{m} = m, \end{aligned}$$

де $\delta_j, j = 1, \dots, 4$, — довільні сталі, $\delta_1 \delta_4 \neq 0$. Параметр m інваріантний відносно будь-якого точкового перетворення у класі (17.6). Допустимі перетворення, що не породжуються перетвореннями з групи $G_{FH}^{\sim}$,

існують тільки між рівняннями з довільними елементами загального вигляду

$$H = \delta|x + \nu|^k e^{px^2+qx}, \quad F = s_2x^2 + s_1x + s_0 + \frac{\kappa}{(x + \nu)^2},$$

де $k, \kappa, \delta, \nu, p, q, s_2, s_1, s_0$ — сталі, що задовольняють умови

$$s_2 = -\frac{4p^2}{(m-1)^2}, \quad s_1 = -\frac{4pq}{(m-1)^2}$$

причому $k = \kappa = 0$ або $K_0 = q - 2p\nu = 0$, де

$$K_0 := s_0 + \frac{q^2 + 4p(k+2)}{(m-1)^2} - \frac{2p}{m-1}.$$

Множину рівнянь, що допускають нетривіальні допустимі перетворення, можна розбити на чотири підкласи, кожен з яких є нормалізованим в узагальненому сенсі та замкненим відносно точкових перетворень у класі (17.6). Для кожного з цих підкласів визначено додаткові обмеження на довільні елементи: $\mathcal{E}_1$: $K_0 \neq 0, k = \kappa = p = 0$; $\mathcal{E}_2$: $K_0 \neq 0, k = \kappa = 0, p \neq 0$; $\mathcal{E}_3$: $K_0 = 0, (k, \kappa) \neq (0, 0), q = 2p\nu$; $\mathcal{E}_4$: $K_0 = k = \kappa = 0$. Підклас $\mathcal{E}_2$ є напівнормалізованим у звичайному сенсі, причому його звичайна група еквівалентності індукується групою $G_{FH}^{\sim}$.

Множина допустимих перетворень в класі (17.6) породжується звичайною групою еквівалентності $G_{FH}^{\sim}$ та нетривіальними умовними узагальненими групами еквівалентності $\hat{G}^{\sim}(\mathcal{E}_j)$, $j = 1, \dots, 4$.

Також в роботі [121] запропоновано алгоритм проведення класифікації некласичних симетрій, який також ґрунтується на відображеннях між класами диференціальних рівнянь.

17.3 Груповий аналіз нелінійних рівнянь дифузії між пластинами

Роботи [92, 95] присвячено дослідженню класу $(1+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь дифузії між пластинами вигляду

$$u_t = (D(u)u_x)_x + h(x)u. \quad (17.9)$$

У роботі [95] для цього класу виконано вичерпну групову класифікацію відносно його звичайної групи еквівалентності $G^\sim$, що складається з перетворень

$$\tilde{t} = \delta_1 t + \delta_2, \quad \tilde{x} = \delta_3 x + \delta_4, \quad \tilde{u} = \delta_5 u, \quad \tilde{D} = \delta_1^{-1} \delta_3^2 D, \quad \tilde{h} = \delta_1^{-1} h,$$

де δ_i , $i = 1, \dots, 5$, — довільні сталі, $\delta_1 \delta_3 \delta_5 \neq 0$.

Теорема 17.7. *Алгеброю Лі ядра основних груп рівнянь з класу (17.9) є алгебра $A^{\ker} = \langle \partial_t \rangle$. З точністю до перетворень з групи еквівалентності $G^\sim$ повний перелік розширень максимальних алгебр ліївської інваріантності рівнянь з класу (17.9) вичерпується наступними випадками (разом з обмеженнями на довільні елементи наведено базиси відповідної алгебри $A^{\max}$):*

1. $h = 1$: ∂_t, ∂_x ;
2. $h = x^{-2}$: $\partial_t, 2t\partial_t + x\partial_x$;
3. $D = u^n$, $h = \varepsilon x^q$: $\partial_t, -qnt\partial_t + nx\partial_x + (q+2)u\partial_u$;
4. $D = u^n$, $h = \varepsilon e^x$: $\partial_t, -nt\partial_t + n\partial_x + u\partial_u$;
5. $D = u^{-4/3}$, $h = \varepsilon \exp \left[\int \frac{q}{x^2 + p} dx \right]$:
 $\partial_t, -4qt\partial_t + 4(x^2 + p)\partial_x - 3(4x + q)u\partial_u$;
6. $h = 0$: $\partial_t, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x$;
7. $D = (u+1)^{-1}$, $h = \varepsilon$: $\partial_t, \partial_x, e^{\varepsilon t}\partial_t + \varepsilon e^{\varepsilon t}(u+1)\partial_u$;
8. $D = e^u$, $h = 0$: $\partial_t, \partial_x, 2t\partial_t + x\partial_x, x\partial_x + 2\partial_u$;

$$9. D = u^n, n \neq -\frac{4}{3}, \quad h = \varepsilon:$$

$$\partial_t, \partial_x, e^{-\varepsilon nt}(\partial_t + \varepsilon u \partial_u), nx \partial_x + 2u \partial_u;$$

$$10. D = (u + \alpha)^n, n \neq -\frac{4}{3}, \quad h = 0:$$

$$\partial_t, \partial_x, 2t \partial_t + x \partial_x, nx \partial_x + 2(u + \alpha) \partial_u;$$

$$11. D = u^{-4/3}, \quad h = \varepsilon:$$

$$\partial_t, \partial_x, e^{\frac{4}{3}\varepsilon t}(\partial_t + \varepsilon u \partial_u), 2x \partial_x - 3u \partial_u, x^2 \partial_x - 3xu \partial_u;$$

$$12. D = (u + \alpha)^{-4/3}, \quad h = 0:$$

$$\partial_t, \partial_x, 2t \partial_t + x \partial_x, 2x \partial_x - 3(u + \alpha) \partial_u, x^2 \partial_x - 3x(u + \alpha) \partial_u.$$

Тут $p \in \{-1, 0, 1\} \bmod G^\sim$, $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha \in \{0, 1\} \bmod G^\sim$; $n \neq 0$, $q \neq 0$.

Знайдено додаткові перетворення еквівалентності та умовні групи еквівалентності цього класу. Ці результати використано для доведення наступного твердження.

Теорема 17.8. *Можливі випадки розширення максимальних алгебр лівської інваріантності рівнянь з класу (17.9) з точністю до всіх точкових перетворень вичерпуються випадками 1-4, $5_{p=1}$, 6-8, $10_{\alpha=0}$ та $12_{\alpha=0}$, наведеними в теоремі 17.7.*

Отримані лівські симетрії застосовано для побудови точних розв'язків.

Прокласифіковано локальні закони збереження рівнянь з класу (17.9). Доведено, що рівняння з класу (17.9) допускають нетривіальні закони збереження тільки для сталих значень довільного елемента h . Відповідні простори законів збереження є двовимірними і мають базисні елементи з такими векторами густини і характеристиками:

$$(xe^{-ht}u, e^{-ht}(-xDu_x + \int D)), xe^{-ht} \quad \text{та} \quad (e^{-ht}u, -e^{-ht}Du_x), e^{-ht}.$$

Із досліджуваного класу рівнянь виокремлено рівняння, що вирізняється прихованими симетрійними властивостями:

$$u_t = (|u|^{-3/2}u_x)_x + x^{-1}u. \tag{17.10}$$

У роботі [92], використовуючи метод ліївської редукції і такі сучасні техніки групового аналізу як функціональне відокремлення змінних, узагальнені умовні та приховані симетрії, для нього побудовано точні розв'язки:

$$\begin{aligned}
u &= \left(-\varepsilon^2 x^3 + 3\varepsilon x^2 - \frac{9}{4}x \right)^{-2/3}, \quad \varepsilon \in \{-1, 0, 1\} \bmod G_1, \\
u &= \left(\frac{3}{2} \frac{x^2}{t} - \frac{9}{4}x \right)^{-2/3}, \quad u = \left(x^3 - 3x^2 \operatorname{tg} 2t - \frac{9}{4}x \right)^{-2/3}, \\
u &= \left(-x^3 + 3x^2 \operatorname{th} 2t - \frac{9}{4}x \right)^{-2/3}, \quad u = \left(-x^3 + 3x^2 \operatorname{cth} 2t - \frac{9}{4}x \right)^{-2/3}, \\
\sqrt{\psi - \psi^2} - \frac{1}{2} \arcsin(2\psi - 1) &= \pm \frac{1}{x} + C_0, \quad \psi := -\frac{u^{-1/2}}{x}, \quad 0 < \psi < 1, \\
\sqrt{\psi + \psi^2} - \frac{1}{2} \ln(2\psi + 1 + \sqrt{\psi + \psi^2}) &= \pm \frac{1}{x} + C_0, \quad \psi < -1 \text{ або } \psi > 0.
\end{aligned}$$

Перші п'ять розв'язків треба розглядати тільки для тих значень (t, x) , для яких відповідна основа степені $-2/3$ є додатною.

Зауважимо, що з отриманих розв'язків можна отримати розв'язки рівнянь, які еквівалентні рівнянню (17.10) відносно точкових перетворень. Наприклад, перетворення $\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = x^{-1}$, $\tilde{u} = x^2 u$ пов'язує рівняння (17.10) з рівнянням

$$\tilde{x}^{-1} \tilde{u}_{\tilde{t}} = (\tilde{u}^{-3/2} \tilde{u}_{\tilde{x}})_{\tilde{x}} + \tilde{u}.$$

Обидва ці рівняння належать до класу (17.2), який досліджено у роботі [69]. Отже, вищенаведені розв'язки можна розмножити до розв'язків рівнянь з класу (17.2).

17.4 Потенціальні неklasичні симетрії рівнянь дифузії

У роботах [43, 67] досліджено потенціальні неklasичні симетрії рівняння швидкої дифузії вигляду

$$u_t = (u^{-1} u_x)_x, \tag{17.11}$$

які є некласичними симетріями його потенціального рівняння

$$v_t = v_x^{-1} v_{xx}. \quad (17.12)$$

Оператори некласичної симетрії рівняння (17.12) вичерпно прокласифіковано з точністю до G_2 -еквівалентності, де G_2 — максимальна група лівської інваріантності цього рівняння. Її утворюють перетворення

$$\tilde{t} = \varepsilon_3 t + \varepsilon_1, \quad \tilde{x} = \varepsilon_4 x + \varepsilon_2, \quad \tilde{v} = \varepsilon_3 \varepsilon_4^{-1} v \quad \text{та}$$

$$\tilde{t} = \varepsilon_3 t + \varepsilon_1, \quad \tilde{x} = \varepsilon_3 \varepsilon_4^{-1} v, \quad \tilde{v} = \varepsilon_4 x + \varepsilon_2,$$

де $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4$ — довільні сталі, $\varepsilon_3 \varepsilon_4 \neq 0$.

Теорема 17.9. G_2 -нееквівалентні нелінійські оператори редукції потенціального рівняння швидкої дифузії (17.12) вичерпуються такими:

$$1. \partial_t + \varepsilon \partial_x + f(\omega) \partial_v, \quad \text{де} \quad \omega = x + \varepsilon t;$$

$$2. \partial_t + f(\omega)(\partial_x + \partial_v), \quad \text{де} \quad \omega = x + v;$$

$$3. \partial_t + \xi \partial_x + (\varphi_t + \varphi_x \xi) \partial_v, \quad \text{де} \quad \xi = \frac{-2}{v + \varphi}, \quad \varphi \in \{t + e^x, t f(x)\};$$

$$4. \partial_t + \xi \partial_x - \frac{\chi_t + \chi_x \xi}{1 + \chi^2} \partial_v, \quad \text{де} \quad \xi = -\frac{1 + \chi \operatorname{tg}(v/2)}{\operatorname{tg}(v/2) - \chi},$$

$$\chi \in \{-\operatorname{tg} x \operatorname{th} t, \operatorname{th} x \operatorname{tg} t\};$$

$$5. \partial_t + \xi \partial_x + \frac{\chi_t + \chi_x \xi}{\chi} \partial_v, \quad \text{де} \quad \xi = \frac{1 - \chi e^v}{1 + \chi e^v},$$

$$\chi \in \left\{ \pm \frac{e^{2x} - e^{2t}}{2}, \frac{e^{2x} + e^{2t}}{2}, \pm \frac{\operatorname{sh}(x - t)}{\operatorname{sh}(x + t)}, \frac{\operatorname{sh}(x - t)}{\operatorname{ch}(x + t)}, \frac{\operatorname{ch}(x - t)}{\operatorname{ch}(x + t)} \right\}.$$

Тут $\varepsilon \in \{0, 1\}$, f — довільний несталий розв'язок звичайного диференціального рівняння $f f_\omega = f_{\omega\omega}$, тобто

$$f \in \{-2/\omega, -\operatorname{ctg}(\omega/2), -\operatorname{th}(\omega/2), -\operatorname{cth}(\omega/2)\} \bmod G_2.$$

У результаті знайдено широкі класи операторів потенціальної не-класичної симетрії та точних розв'язків рівняння швидкої дифузії.

У роботі [67] також виявлено зв'язок між операторами не-класичної та потенціальної не-класичної симетрії.

Твердження 17.1. *Оператор $Q = \partial_t + \xi \partial_x + \theta \partial_v$, де $\xi = \xi(t, x)$, $\theta = \theta(t, x)$, є оператором редукції рівняння $v_t = f(v_x)v_{xx}$ тоді і тільки тоді, коли оператор*

$$Q' = \partial_x + \frac{-\xi u + \theta}{f(u)} \partial_u$$

є оператором редукції рівняння $u_t = (f(u)u_x)_x$.

Потенціальна система $v_x = u$, $v_t = f(u)u_x$ встановлює зв'язок між відповідними множинами інваріантних розв'язків.

Також в цій роботі прокласифіковано не-класичні симетрії нелінійних рівнянь фільтрації вигляду

$$v_t = f(v_x)v_{xx}. \quad (17.13)$$

Теорема 17.10. *Нелінійні рівняння фільтрації (17.13) допускають нелінійські оператори редукції з ненульовими коефіцієнтами при ∂_t тільки у випадку нелінійностей типу Фуджити*

$$f(v_x) = \frac{1}{av_x^2 + bv_x + c},$$

де a, b, c — довільні сталі.

17.5 Потенціальні симетрії рівнянь дифузії у пористому середовищі

У роботі [106] виконано класифікацію потенціальних симетрій рівнянь дифузії у пористому середовищі вигляду

$$u_t = ((u^n)_x + f(x)u^m)_x, \quad (17.14)$$

з $n \neq 0$.

Групу еквівалентності $G^\sim$ класу (17.14) складають перетворення

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \delta_1 t + \delta_2, & \tilde{x} &= \delta_3 x + \delta_4, & \tilde{u} &= \delta_1^{-\frac{1}{n-1}} \delta_3^{\frac{2}{n-1}} u, \\ \tilde{f} &= \delta_1^{\frac{m-n}{n-1}} \delta_3^{\frac{n-2m+1}{n-1}} f, & \tilde{n} &= n, & \tilde{m} &= m,\end{aligned}$$

де $\delta_i, i = 1, \dots, 4$, — довільні сталі, $\delta_1 \delta_3 \neq 0$. Закони збереження та відповідні потенціальні системи рівнянь з класу (17.14) наведено у наступній теоремі.

Теорема 17.11. *Будь-яке рівняння з класу (17.14) має закон збереження $D_t F + D_x G = 0$ з густиною F та потоком G наступного вигляду*

$$1. \quad F = u, \quad G = -nu^{n-1}u_x - fu^m. \quad (17.15)$$

Повний перелік $G^\sim$ -нееквівалентних рівнянь з класу (17.14), що мають додаткові закони збереження (лінійно-незалежні з законом збереження (17.15)) вичерпується наступними випадками

$$\begin{aligned}2. \quad m = n \neq 1: \quad & F = u \int e^{\int f dx} dx, \\ & G = - \int e^{\int f dx} dx (nu^{n-1}u_x + fu^n) + e^{\int f dx} u^n, \\ 3. \quad n \neq 1, \quad m = 0: \quad & F = xu, \quad G = -x(nu^{n-1}u_x + f) + u^n + \int f dx, \\ 4. \quad n \neq 1, \quad m = 1, \quad f = 1: \quad & F = (t+x)u, \\ & G = -(t+x)(nu^{n-1}u_x + u) + u^n, \\ 5. \quad n \neq 1, \quad m = 1, \quad f = \varepsilon x: \quad & F = e^{\varepsilon t} xu, \\ & G = -e^{\varepsilon t} x(nu^{n-1}u_x + xu) + e^{\varepsilon t} u^n, \\ 6. \quad n = 1, \quad m = 0: \quad & F = \alpha u, \quad G = -\alpha(u_x + f) + \alpha_x u + \int \alpha_x f dx, \\ 7. \quad n = 1, \quad m = 1: \quad & F = \beta u, \quad G = -\beta(u_x + fu) + \beta_x u,\end{aligned}$$

де $\varepsilon = \pm 1 \bmod G^\sim$, $\alpha = \alpha(t, x)$ та $\beta = \beta(t, x)$ — довільні розв'язки лінійних рівнянь $\alpha_t + \alpha_{xx} = 0$ та $\beta_t + \beta_{xx} - f\beta_x = 0$, відповідно. (Разом з обмеженнями на значення довільних елементів f , n та m також наведено густини та потоки додаткових законів збереження.)

Отримані закони збереження застосовано для побудови потенціальних систем, досліджуючи які можна побудувати потенціальні симетрії рівнянь з класу (17.14).

Розглянемо найпростіші потенціальні системи вигляду

$$v_x = F, \quad v_t = -G.$$

Випадки 6 та 7 Теорема 17.11 виключено з розгляду, оскільки вони відповідають лінійним рівнянням з класу (17.14), закони збереження та потенціальні симетрії яких досліджено в роботі Р.О. Поповича, М. Кунзінгера та Н.М. Іванової. Рівняння з випадків 2, 4 та 5 зводяться точковими перетвореннями до рівнянь вигляду $f(x)u_t = (u^n u_x)_x$, потенціальні симетрії яких відомі (відповідні перетворення та потенціальні симетрії наведено у роботі [106]). Отже, залишається дослідити лише дві потенціальні системи

$$v_x = u, \quad v_t = nu^{n-1}u_x + fu^m, \quad (17.16)$$

$$v_x^* = xu, \quad v_t^* = x(nu^{n-1}u_x + f) - u^n - \int f dx, \quad (17.17)$$

що відповідають випадкам 1 та 3 Теорема 17.11.

Ліівські симетрії потенціальної системи (17.16) дають нетривіальні потенціальні симетрії рівняння (17.14) у наступних випадках:

1. $f = x^{-2}$, $n = -1$, $m = -2$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, x\partial_x - u\partial_u, 12t\partial_t + (3\ln x - v)x\partial_x + (3 - 3\ln x + xu + v)u\partial_u + 2(3v - t)\partial_v \rangle;$$

2. $f = \varepsilon x \ln |x|$, $\varepsilon = \pm 1$, $n = -1$, $m = 1$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, e^{-\varepsilon t}(x\partial_x - u\partial_u), e^{-\varepsilon t}(-\varepsilon xv\partial_x + \varepsilon(xu^2 + uv)\partial_u + 2\partial_v) \rangle;$$

3. $f = x$, $n = -1$, $m = 0$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, \partial_x + t\partial_v, 2t\partial_t - x\partial_x + 2u\partial_u + v\partial_v, t^2\partial_t + (v - tx)\partial_x + (2t - u)u\partial_u + tv\partial_v \rangle;$$

4. $f = 0, n = -1, m = 0$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, x\partial_x - u\partial_u, 2t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v, vx\partial_x - (v + xu)u\partial_u + 2t\partial_v, \\ 4t^2\partial_t + (v^2 - 2t)x\partial_x - (v^2 + 2vXu - 6t)u\partial_u + 4tv\partial_v, \beta\partial_x - \beta_v u^2\partial_u \rangle;$$

5. $f = 1, n = -1, m = 1$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, (x + t)\partial_x - u\partial_u, 2t\partial_t + 2x\partial_x - u\partial_u + v\partial_v, v(x + t)\partial_x - [(x + t)u + v]u\partial_u + 2t\partial_v, \\ 4t^2\partial_t + [(x + t)v^2 - 2tx - 6t^2]\partial_x - [v^2 - 6t + 2(x + t)vu]u\partial_u + 4tv\partial_v, \beta\partial_x - \beta_v u^2\partial_u \rangle;$$

6. $f = \varepsilon x, \varepsilon = \pm 1, n = -1, m = 1$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, x\partial_x - u\partial_u, 2t\partial_t - 2\varepsilon tx\partial_x + (1 + 2\varepsilon t)u\partial_u + v\partial_v, vx\partial_x - (xu + v)u\partial_u + 2t\partial_v, \\ 4t^2\partial_t + (v^2 - 2t - 4\varepsilon t^2)x\partial_x - (v^2 - 6t + 2xvu - 4\varepsilon t^2)u\partial_u + 4tv\partial_v, e^{-\varepsilon t}(\beta\partial_x - \beta_v u^2\partial_u) \rangle;$$

7. $n = -1, m = -1$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, \psi\partial_x - (1 - f\psi)u\partial_u, 2t\partial_t + u\partial_u + v\partial_v, \psi v\partial_x - ((1 - f\psi)v + \psi u)u\partial_u + 2t\partial_v, \\ 4t^2\partial_t + (v^2 - 2t)\psi\partial_x - [2\psi vu + (v^2 - 2t)(1 - f\psi) - 4t]u\partial_u + 4tv\partial_v, \\ \varphi(\beta\partial_x - (\beta_v u^2 - f\beta u)\partial_u) \rangle;$$

8. $f = 1, n = 1, m = 2$:

$$\langle \partial_t, \partial_x, \partial_v, 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, 2t\partial_x - \partial_u - x\partial_v, 4t^2\partial_t + 4tx\partial_x - 2(2tu + x)\partial_u - (2t + x^2)\partial_v, \\ e^{-v}[(\alpha u - \alpha_x)\partial_u - \alpha\partial_v] \rangle.$$

Тут $\alpha = \alpha(t, x)$ та $\beta = \beta(t, v)$ пробігають множину розв'язків лінійного рівняння теплопровідності $\alpha_t - \alpha_{xx} = 0$ та рівняння $\beta_t + \beta_{vv} = 0$, відповідно, $\varphi(x) = e^{-\int f dx}$, $\psi(x) = e^{-\int f dx} \int e^{\int f dx} dx$.

З точністю до $G^\sim$ -еквівалентності існує тільки одна потенціальна система вигляду (17.17), що дає нетривіальні потенціальні симетрії рів-

няння (17.14), а саме, система з наступними значеннями довільних елементів $f = x$, $n = -1$ та $m = 0$. Алгебра Лі потенціальної симетрії у цьому випадку має вигляд

9. $f = x$, $n = -1$, $m = 0$:

$$\langle \partial_t, \partial_v, 2t\partial_t - x\partial_x + 2u\partial_u, e^{-v^*/2}(2x\partial_x + (x^2u - 2)u\partial_u - 4\partial_{v^*}) \rangle.$$

Методом редукції за отриманими операторами потенціальної симетрії можна побудувати точні розв'язки рівнянь з класу (17.14).

17.6 Допустимі перетворення у класах узагальнених рівнянь Кортвега–де-Фріза

Розглянемо загальний клас $\mathcal{E}^3$ еволюційних рівнянь третього порядку вигляду

$$u_t = H(t, x, u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}),$$

де $H_{u_{xxx}} \neq 0$. Для знаходження допустимих перетворень у класі $\mathcal{E}^3$ та його повної групи еквівалентності використано прямий метод. Група еквівалентності $G_0^\sim$ класу $\mathcal{E}^3$ складається з перетворень

$$\tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x, u), \quad \tilde{u} = U(t, x, u), \quad (17.18)$$

$$\tilde{H} = \frac{\Delta}{T_t D_x X} H + \frac{U_t D_x X - X_t D_x U}{T_t D_x X}, \quad (17.19)$$

де T , X та U пробігають відповідні множини гладких функцій, що задовольняють умови невинороженості та D_x позначає оператор повного диференціювання за змінною x , $D_x = \partial_x + u_x \partial_u + u_{tx} \partial_{u_t} + u_{xx} \partial_{u_x} + \dots$. Клас $\mathcal{E}^3$ є нормалізованим.

Підклас $\mathcal{E}_{0,1}^3$, виокремлений з $\mathcal{E}^3$ умовою $H_{u_{xxx}u_{xxx}} = 0$ має таку саму групу еквівалентності $G_0^\sim$, а, отже, також є нормалізованим. Це твердження також має місце для підкласу $\mathcal{E}_{0,2}^3$ класу $\mathcal{E}_{0,1}^3$, асоційованого з умовою $H_{u_{xxx}u_{xx}} = 0$.

Накладання ще однієї умови $H_{u_{xxx}u_x} = 0$ призводить до нормалізованого підкласу $\mathcal{E}_{1.1}^3$ класу $\mathcal{E}_{0.2}^3$ чия група еквівалентності $G_1^\sim$ є підгрупою групи $G_0^\sim$, що складається з перетворень з $X_u = 0$. Нормалізований підклас $\mathcal{E}_{1.2}^3$, виокремлений з класу $\mathcal{E}_{1.1}^3$ умовою $H_{u_{xxx}u} = 0$ також має групу еквівалентності $G_1^\sim$.

Група еквівалентності $G_2^\sim$ нормалізованого підкласу $\mathcal{E}_2^3$ класу $\mathcal{E}_{1.2}^3$ та асоційованого з додатковою умовою $H_{u_{xxx}x} = 0$ є підгрупою групи $G_1^\sim$. Її елементи задовольняють умові $X_{xx} = 0$.

Інша можливість полягає в накладенні умови $H_{u_{xx}} = 0$ в підкласі $\mathcal{E}_{0.1}^3$. Відповідний підклас $\mathcal{E}_3^3$ є нормалізованим та допускає групу еквівалентності $G_3^\sim$, що складається з перетворень (17.18), для яких $X_u = 0$, $U_{uu} = 0$ та $2U_{ux}X_x = U_uX_{xx}$.

Підклас $\mathcal{E}_4^3 = \mathcal{E}_2^3 \cap \mathcal{E}_3^3$ є нормалізованим з групою еквівалентності $G_4^\sim = G_2^\sim \cap G_3^\sim$. Інтегруючи низку умов, накладених на довільний елемент H , та умови отримані для перетворень з групи $G_4^\sim$, отримуємо, що рівняння з класу $\mathcal{E}_4^3$ мають вигляд

$$u_t + g(t)u_{xxx} = F(t, x, u, u_x),$$

де $g \neq 0$. Група еквівалентності $G_4^\sim$ складається з наступних перетворень

$$\tilde{t} = \alpha(t), \quad \tilde{x} = \beta(t)x + \gamma(t), \quad \tilde{u} = \theta(t)u + \Phi(t, x), \quad (17.20)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ та Φ — довільні гладкі функції своїх змінних, $\alpha\beta\theta \neq 0$.

Тепер розглянемо два спеціальних підкласу класу $\mathcal{E}_4^3$. Перший підклас складається з узагальнених рівнянь Кортевега-де-Фріза зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$u_t + f(t)uu_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u + (p(t) + q(t)x)u_x + k(t)x + l(t) = 0, \quad (17.21)$$

де всі параметри є довільними гладкими функціями змінної t , $fg \neq 0$. Цей підклас є нормалізованим. Його групу еквівалентності можна виокремити з групи $G_4^\sim$ умовою $\Phi_{xx} = 0$. Отже, перетворення змінних мають вигляд

$$\tilde{t} = \alpha(t), \quad \tilde{x} = \beta(t)x + \gamma(t), \quad \tilde{u} = \theta(t)u + \varphi(t)x + \psi(t), \quad (17.22)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \varphi$ та ψ — довільні гладкі функції змінної t , $\alpha\beta\theta \neq 0$. Довільні елементи класу (17.21) перетворюються за формулами

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \frac{\beta}{\alpha_t \theta} f, \quad \tilde{g} = \frac{\beta^3}{\alpha_t} g, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\alpha_t} \left(h - \frac{\varphi}{\theta} f - \frac{\theta_t}{\theta} \right), \\ \tilde{q} &= \frac{1}{\alpha_t} \left(q - \frac{\varphi}{\theta} f + \frac{\beta_t}{\beta} \right), \quad \tilde{p} = \frac{1}{\alpha_t} \left(\beta p - \gamma q + \frac{\gamma \varphi - \beta \psi}{\theta} f + \gamma_t - \gamma \frac{\beta_t}{\beta} \right), \\ \tilde{k} &= \frac{1}{\alpha_t \beta} \left(\theta k - \varphi(h + q) + \frac{\varphi^2}{\theta} f - \varphi_t + \varphi \frac{\theta_t}{\theta} \right), \\ \tilde{l} &= \frac{1}{\alpha_t} \left(\theta l - \frac{\gamma}{\beta} \left(\theta k - \varphi(h + q) + \frac{\varphi^2}{\theta} f - \varphi_t + \varphi \frac{\theta_t}{\theta} \right) - \right. \\ &\quad \left. \psi \left(h - \frac{\varphi}{\theta} f - \frac{\theta_t}{\theta} \right) - \varphi p - \psi_t \right).\end{aligned}$$

Необхідна та достатня умова подібності таких рівнянь до стандартного рівняння КдФ є така

$$s_t = 2gs^2 - 3qs + \frac{f}{g}k, \quad \text{де} \quad s := \frac{2q - h}{g} + \frac{f_t g - f g_t}{f g^2}. \quad (17.23)$$

Другий підклас складається з модифікованих рівнянь Кортевега-де-Фріза зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + f(t)u^2 u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u + (p(t) + q(t)x)u_x + k(t)uu_x + l(t) = 0, \quad (17.24)$$

де всі параметри є довільними гладкими функціями змінної t . Цей підклас також є нормалізованим. Його групу еквівалентності можна виокремити з групи $G_4^\sim$ умовою $\Phi_x = 0$. Отже, перетворення змінних мають вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \frac{\beta}{\alpha_t \theta^2} f, \quad \tilde{g} = \frac{\beta^3}{\alpha_t} g, \quad \tilde{h} = \frac{1}{\alpha_t} \left(h - \frac{\theta_t}{\theta} \right), \\ \tilde{q} &= \frac{1}{\alpha_t} \left(q + \frac{\beta_t}{\beta} \right), \quad \tilde{p} = \frac{1}{\alpha_t} \left(\beta p - \gamma q + \beta \frac{\psi^2}{\theta^2} f - \beta \frac{\psi}{\theta} k + \gamma_t - \gamma \frac{\beta_t}{\beta} \right), \\ \tilde{k} &= \frac{\beta}{\alpha_t \theta} \left(k - 2 \frac{\psi}{\theta} f \right), \quad \tilde{l} = \frac{1}{\alpha_t} \left(\theta l - \psi h - \psi_t + \psi \frac{\theta_t}{\theta} \right)\end{aligned}$$

Будь-які п'ять з семи довільних елементів класу можна відкалібрувати до сталих значень. Наприклад, можна покласти $g = 1$ та $h = p = q = l =$

0. Будь-яке рівняння вигляду (17.24) до стандартного модифікованого рівняння КдФ тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$2h - 2q = \frac{f_t}{f} - \frac{g_t}{g}, \quad 2lf = k_t + kh - k\frac{f_t}{f}.$$

17.7 Потенціальні закони збереження та потенціальні системи

Результати цього розділу опубліковано в [23, 133].

Доведено, що для довільної системи **F** диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними $(x \text{ і } t)$, закони збереження довільної (найпростішої чи узагальненої) потенціальної системи з характеристиками, що залежать лише від x та t еквівалентні локальним законам збереження вихідної системи **F**. Це твердження узагальнено також на випадок багатовимірних систем диференціальних рівнянь.

Крім того, уточнено процедуру побудови потенціальних систем для систем диференціальних рівнянь, що допускають багатовимірні простори законів збереження. Більш точно, для побудови потенціальних систем у випадку, коли розмірність простору закону збереження не менше двох, замість використання лише базисних законів збереження пропонується використовувати їх довільні лінійні комбінації, що є нееквівалентними відносно групи симетрій фіксованої системи або групи еквівалентності класу систем диференціальних рівнянь. Виявляється, що базисні закони збереження можуть бути еквівалентними відносно групи симетрій (групи еквівалентності), або, навпаки, кількість нееквівалентних лінійних комбінацій законів збереження може перевищувати розмірність простору законів збереження. Перший випадок приводить до зайвого, часто надзвичайно складного та громіздкого дослідження еквівалентних систем, у другому випадку використання звичайної (неуточненої) процедури побудови потенціальних систем може привести до втрати значної кількості істотно нових нееквівалентних результатів. Наведено ілюстраційні приклади усіх цих варіантів.

Твердження про неіснування потенціальних законів збереження застосовано до дослідження нелінійних телеграфних рівнянь вигляду

$$u_{tt} - (F(u)u_x)_x - (G(u))_x = 0. \quad (17.25)$$

Проведено повну класифікацію локальних законів збереження з характеристиками, які залежать від незалежних та залежної змінної. Як наслідок, знайдено п'ять нових локальних законів збереження. Побудовано відповідні потенціальні системи. Прокласифіковано потенціальні симетрії рівнянь із степеневими нелінійностями. Досліджено закони збереження потенціальних систем. Таким чином побудовано 6 нових нелокальних (потенціальних) законів збереження нелінійних телеграфних рівнянь.

17.8 Закони збереження рівнянь конвекції–дифузії

Результати цього розділу опубліковано в [22].

Один з можливих шляхів знаходження законів збереження диференціальних рівнянь полягає у розповсюдженні лагранжевого підходу на нелагранжеві рівняння за допомогою введення допоміжних рівнянь таким чином, щоб отримана система була системою рівнянь Ейлера–Лагранжа для деякого варіаційного функціоналу. У якості таких допоміжних рівнянь виявилось надзвичайно зручним брати рівняння для приєднаної симетрії. Тоді закони збереження отриманої системи (які, звичайно, є законами збереження вихідного рівняння) можна легко побудувати за допомогою теореми Ньотер. Цей метод, що називається *композиційним варіаційним принципом* застосовано до знаходження законів збереження рівнянь конвекції–дифузії вигляду

$$u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x, \quad (17.26)$$

де $a = a(u)$ та $b = b(u)$ — довільні гладкі функції змінної u , $a(u) \neq 0$.

Закони збереження відповідної системи рівнянь Ейлера–Лагранжа

$$u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x, \quad v_t = -a(u)v_{xx} + b(u)v_x, \quad (17.27)$$

що не залежать явно від розв'язків приєднаного рівняння, є локальними для вихідного рівняння. Якщо ж вектори густини містять у явному вигляді розв'язки приєднаного рівняння, відповідні локальні закони збереження системи рівнянь Ейлера–Лагранжа є нелокальними законами збереження вихідного рівняння. Отримана нелокальність має істотно інший характер, ніж найбільш дослідженні потенціальні та псевдопотенціальні закони збереження. Знайдено локальні та нелокальні закони збереження рівнянь вигляду (17.26), що відповідають варіаційним симетріям нульового порядку системи рівнянь Ейлера–Лагранжа (17.27).

18 Диференціальні інваріанти та приховані симетрії

18.1 Відносні диференціальні інваріанти

Розроблено загальний метод опису та класифікації відносних диференціальних інваріантів. Метод базується на побудові та класифікації розширених представлень для алгебри, для якої ми шукаємо відносні диференціальні інваріанти. Запропоновано метод та наведені приклади опису векторних та тензорних відносних диференціальних інваріантів. Отримані результати дають, зокрема, можливість повного та систематичного опису рівнянь та систем рівнянь, інваріантних відносно заданої алгебри [70].

Опис та дослідження абсолютних диференціальних інваріантів були здійснені у класичних роботах Лі, Трессе та Спенсера. Проте, нещодавно диференціальні інваріанти стали досить популярним предметом для досліджень, і було розглянуто багато нових аспектів у цій темі.

Опис всіх диференціальних рівнянь, інваріантних відносно певного фіксованого зображення групи Лі, потребує опису всіх відносних диференціальних інваріантів. Звичайно вважається, що достатнім є опис лише абсолютних диференціальних інваріантів для конкретного зображення алгебри Лі, проте в загальному випадку потрібний опис саме відносних диференціальних інваріантів (ВДІ).

Ми розглядали класифікацію ВДІ для алгебр Лі Q , які містять інфінітезимальні оператори першого порядку вигляду $Q_i = \xi_i^s(x, u)\partial_{x_s} + \eta_i^r(x, u)\partial_{u^r}$. Тут $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $u = (u^1, \dots, u^m)$. Ми будемо припускати підсумовування за індексами, що повторюються.

Для розглядуваної задачі дуже важливим є поняття еквівалентності. Вибір відповідного означення еквівалентності для конкретної класифікаційної задачі завжди є суб'єктивним і має відповідати цілям класифікації.

Будь-який математично коректний опис нескінченної множини об'єктів потребує класифікації досліджуваних об'єктів з точністю до деякої еквівалентності.

Використовувані означення базуються на класичних роботах з цієї галузі, наприклад, Лі, та більш сучасних монографіях Овсяннікова та Олвера.

Означення. Функція F від x , u та від частинних похідних u порядку до l , і при цьому F може бути набором функцій $(F_1, \dots, F_N)$, називається *відносним диференціальним інваріантом* для алгебри $Q = \{Q_i\}$, якщо вона є інваріантом l -го продовження по Лі цієї алгебри:

$$Q_s^l F(x, u, u_1, \dots, u_l) = \lambda_s(x, u, u_1, \dots, u_l) F, \quad (18.1)$$

де λ_s - деякі функції; якщо $\lambda_i = 0$, F називається абсолютним диференціальним інваріантом (АДІ) алгебри Q ; якщо $\lambda_i \neq 0$ - це відносний інваріант.

Максимальний набір функціонально незалежних інваріантів порядку $r \leq l$ алгебри Лі Q називається функціональним абсолютних диференціальних інваріантів порядку l для алгебри Q .

Оператором інваріантного диференціювання називається оператор, дія якого на абсолютний диференціальний інваріант дає також абсолютний диференціальний інваріант.

Відомі методи та принципи опису та побудови функціональних базисів абсолютних диференціальних інваріантів — кількість інваріантів у

базисі дорівнює кількості всіх змінних для відповідного порядку диференціювання (залежних, незалежних та похідних) мінус загальний ранг відповідного продовження операторів алгебри Лі.

Абсолютні диференціальні інваріанти довільного порядку можуть бути одержані з інваріантів фундаментального базису за допомогою операторів інваріантного диференціювання.

Ніяких подібних методів до цього часу для відносних диференціальних інваріантів не існувало.

Ми будемо розглядати класифікацію ВДІ з огляду на опис інваріантних рівнянь, тому ми не фіксуємо функції λ .

Два відносних диференціальних інваріанта алгебри Q називаються *еквівалентними*, якщо вони є еквівалентними відносно перетворень з групи еквівалентності умов відносної інваріантності

$$Q_{is}^l F(x, u, u_1, \dots, u_l) = \lambda_s(x, u, u_1, \dots, u_l) F.$$

Ми можемо також розглядати еквівалентність пар (F, λ) ВДІ з їхніми відповідними мультиплікаторами.

Далі розглянемо поняття операторів розширеної дії та побудову таких операторів.

Ми вводимо додаткові змінні F_k та будемо шукати ВДІ як АДІ для операторів розширеної дії $\hat{Q}_i = Q_i + \lambda_{ijk} F_j \partial_{F_k}$ (або їхні відповідні продовження). Для фіксованого зображення алгебри Q ми можемо класифікувати всі зображення для розширеної дії з точністю до перетворень еквівалентності визначальних умов для ВДІ.

Функціональні базиси АДІ для таких нееквівалентних представлень дозволяють одержати всі нееквівалентні ВДІ. Застосування операторів інваріантного диференціювання до АДІ операторів розширеної дії дозволить одержати всі ВДІ більш високого порядку.

Розглянемо приклад побудови операторів розширеної дії для алгебри Пуанкаре.

Звичайне (лінійне) зображення алгебри Пуанкаре для однієї функції. Базисні оператори:

$$\begin{aligned}\partial_0, \quad \partial_1, \quad \partial_2, \quad J_{01} &= x_0\partial_1 + x_1\partial_0, \\ J_{02} &= x_0\partial_2 + x_2\partial_0, \quad J_{12} = x_1\partial_2 + x_2\partial_1,\end{aligned}$$

де

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \partial_u = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Перші продовження операторів:

$$\begin{aligned}J_{01}^1 &= J_{01} + u_0\partial_{u_1} + u_0\partial_{u_1}, \quad J_{02}^1 = J_{02} + u_0\partial_{u_2} + u_0\partial_{u_2}, \\ J_{12}^1 &= J_{12} + u_1\partial_{u_2} + u_2\partial_{u_1}.\end{aligned}$$

Оператори розширеної дії:

$$\tilde{J}_{01} = J_{01}^1 + \lambda_{01}R\partial_R, \quad \tilde{J}_{02} = J_{02}^1 + \lambda_{02}R\partial_R, \quad \tilde{J}_{12} = J_{12}^1 + \lambda_{21}R\partial_R.$$

7+1 змінна, ранг продовження алгебри дорівнює 4 — маємо три інваріанти $u_\mu u_\mu, u, R$. Немає “чистих” відносних інваріантів, лише абсолютні інваріанти $u_\mu u_\mu, u$.

Нелінійне зображення алгебри Пуанкаре для однієї функції. Базисні оператори алгебри Пуанкаре

$$\begin{aligned}\partial_0, \partial_1, \partial_2, J_{01} &= x_0\partial_1 + x_1\partial_0 + \sin u\partial_u, \\ J_{02} &= x_0\partial_2 + x_2\partial_0 - \cos u\partial_u, J_{12} = x_1\partial_2 + x_2\partial_1 - \partial_u.\end{aligned}$$

Перші продовження операторів:

$$\begin{aligned}J_{01}^1 &= J_{01} + \cos u(u_0\partial_{u_0} + u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + u_0\partial_{u_1} + u_0\partial_{u_1}, \\ J_{02}^1 &= J_{02} + \sin u(u_0\partial_{u_0} + u_1\partial_{u_1} + u_2\partial_{u_2}) + u_0\partial_{u_2} + u_0\partial_{u_2}, \\ J_{12}^1 &= J_{12} + u_1\partial_{u_2} + u_2\partial_{u_1}.\end{aligned}$$

Оператори розширеної дії:

$$\tilde{J}_{01} = J_{01}^1 + 2 \cos u R \partial_R, \quad \tilde{J}_{02} = J_{02}^1 + 2 \sin u R \partial_R, \quad \tilde{J}_{12} = J_{12}^1.$$

Абсолютні та відносні інваріанти:

$$I_1 = \frac{u_0^2 - u_1^2 - u_2^2}{R}, \quad I_2 = \frac{u_0 + u_1 \cos u + u_2 \sin u}{R},$$

$$R_1 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2, \quad R_2 = u_0 + u_1 \cos u + u_2 \sin u.$$

Оператор інваріантного диференціювання:

$$D = \partial_0 + \partial_1 \cos u + \partial_2 \sin u.$$

Одержані відносні диференціальні інваріанти другого порядку:

$$R_3 = u_0(u_{00} + u_{01} \cos u + u_{02} \sin u) - u_1(u_{01} + u_{11} \cos u + u_{12} \sin u) - u_2(u_{02} + u_{12} \cos u + u_{22} \sin u),$$

$$R_4 = u_{00} + u_{01} \cos u + u_{02} \sin u - (u_1 \sin u + u_2 \cos u) R_2 + \cos u(u_{01} + u_{11} \cos u + u_{12} \sin u) + \sin u(u_{02} + u_{12} \cos u + u_{22} \sin u).$$

Розглянемо побудову операторів розширеної дії та відносних диференціальних інваріантів для векторних і тензорних функцій. Ми можемо побудувати коваріантні вектори та тензори для довільної розмірності простору залежних та незалежних змінних.

Рівняння Максвелла для векторного потенціалу:

$$p_\mu p_\mu A_\nu - p_\nu p_\mu A_\mu = F_\nu(A_\alpha, A_\alpha^\beta).$$

Базисні оператори алгебри Пуанкаре $\{p_\mu, J_{\mu\nu}\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ $p_\mu = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$;

$$J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + A_\mu p_{A_\nu} - A_\nu p_{A_\mu}, \quad p_{A_\mu} = i g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial A_\mu}.$$

Нові функції — симетрична $B_{\mu\nu} = A_\mu^\nu + A_\nu^\mu$ та антисиметрична $L_{\mu\nu} = A_\mu^\nu - A_\nu^\mu$.

Перші продовження операторів:

$$\hat{J}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + B_{\mu\alpha}p_{B_{\nu\alpha}} - B_{\nu\alpha}p_{B_{\mu\alpha}} + L_{\mu\alpha}p_{L_{\nu\alpha}} - L_{\nu\alpha}p_{L_{\mu\alpha}}.$$

Оператори розширеної дії:

$$\tilde{J}_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + B_{\mu\alpha}p_{B_{\nu\alpha}} - B_{\nu\alpha}p_{B_{\mu\alpha}} + L_{\mu\alpha}p_{L_{\nu\alpha}} - L_{\nu\alpha}p_{L_{\mu\alpha}} + \lambda_{\mu\nu}^{\alpha\beta}F_{\alpha}\partial_{F_{\beta}}.$$

Коваріантний тензор F_{α} :

$$\lambda_{\mu\nu}^{\alpha\beta}F_{\alpha}\partial_{F_{\beta}} = F_{\mu}p_{F_{\nu}} - F_{\nu}p_{F_{\mu}}.$$

Знаходимо, що загальний вид коваріантного тензору: $F_{\nu} = A_{\nu}F(I)$, де I — АДІ першого порядку оператора $\tilde{J}_{\mu\nu}$.

Схема опису відносних диференціальних інваріантів:

1. Побудувати продовження операторів Q_i необхідного порядку.
2. Записати оператори розширеної дії з довільними коефіцієнтами.
3. Класифікувати зображення операторів розширеної дії з точністю до перетворень групи еквівалентності умов інваріантності.
4. Знайти фундаментальні базиси АДІ для нееквівалентних зображень.
5. Побудувати ВДІ та АДІ вихідної алгебри Q з абсолютних інваріантів шляхом виключення допоміжних змінних.

Опис всіх диференціальних рівнянь, інваріантних відносно певного фіксованого зображення групи Лі, потребує опису всіх саме диференціальних інваріантів. Звичайно вважається, що достатнім є опис лише абсолютних диференціальних інваріантів, проте в загальному випадку це не так. Можлива така ситуація: для групи масштабних перетворень виду $t' = at$, $x' = ax$, $u' = 2au$ рівняння $(\frac{\partial u}{\partial t})^2 - (\frac{\partial u}{\partial x})^2 = 0$ буде інваріантним, проте його ліву частину не можна виразити як функцію абсолютних інваріантів. Тобто для повного дослідження інваріантних рівнянь ми маємо досліджувати саме відносні диференціальні інваріанти.

Останні найбільш відповідні роботи щодо цієї задачі — це робота Фелса та Олвера 1997 року та робота Марі-Беффа та Сандерса 2007 року. В цих роботах ставилась така ж чи аналогічна задача, проте вона не була розв'язана.

Таким чином,

1. Запропонований метод знаходження кількості елементів базису ВДІ та опис ВДІ певного порядку для фіксованого зображення алгебри Лі.
2. Запропонований метод опису ДРЧП інваріантних відносно фіксованого зображення алгебри Лі.
3. Важливою перевагою запропонованого методу є те, що він дозволяє зменшити “чутливість” задачі опису інваріантних рівнянь до багатовиду, на якому розглядається ця задача.
4. Метод дозволяє описувати інваріантні нелінійні векторні, тензорні та спірні рівняння з фіксованою "складовою".

Опис диференціальних інваріантів для нескінченновимірних алгебр. Ми розглядали спеціальний клас нескінченновимірних алгебр — алгебри еквівалентності класів диференціальних рівнянь.

Створено новий алгоритм побудови диференціальних інваріантів для нескінченновимірних алгебр, зокрема, таких, які є алгебрами еквівалентності для класів диференціальних рівнянь. На основі цього побудовані приклади фундаментальних базисів диференціальних інваріантів для таких алгебр та приклади, коли такі набори інваріантів дають можливість характеристики рівнянь (тобто визначення належності конкретного рівняння до певного класу еквівалентності) [96].

Ми розглядаємо клас рівнянь

$$u_{tt} - u_{xx} = f(u, u_t^2 - u_x^2), \quad (18.2)$$

де $u = u(t, x)$,

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

f — довільна функція своїх аргументів (параметрична функція класу рівнянь).

Означення. Перетворення еквівалентності для класу рівнянь 18.2 — це заміна змінних вигляду

$$t' = \tau(t, x, u), \quad x' = \kappa(t, x, u), \quad u' = \omega(t, x, u), \quad f' = \varphi(t, x, u, f), \quad (18.3)$$

яка перетворює кожне рівняння вигляду 18.2 в інше рівняння такого ж вигляду

$$u'_{t't'} - u'_{x'x'} = f'(u', u'^2_{t'}, u'^2_{x'}). \quad (18.4)$$

Рівняння (18.2) та (18.4) називаються еквівалентними.

Оператори алгебри еквівалентності для класу (18.2) були знайдені в роботі Торрізі, Трачіна ($\sigma = u_t^2 - u_x^2$):

$$\begin{aligned} Y_0 &= x\partial_t + t\partial_x - u_x\partial_{u_t} - u_t\partial_{u_x}, & Y_1 &= \partial_t, Y_2 = \partial_x, \\ Y_3 &= x\partial_x + t\partial_t - 2f\partial_f - \sigma\partial_\sigma - 2f_u\partial_{f_u}, & & \\ Y_\phi &= \phi\partial_u + 2\phi'\sigma\partial_\sigma + 2(\phi'f + \phi''\sigma)\partial_f \\ &\quad + (\phi''f + \phi'''\sigma - 2\sigma f_\sigma\phi'')\partial_{f_u} + (\phi'' - f_\sigma\phi')\partial_{f_\sigma}, \end{aligned} \quad (18.5)$$

ϕ — довільна функція, ϕ' , ϕ'' та ϕ''' — її похідні.

Знаходження диференціальних інваріантів для нескінченновимірних алгебр розглядалось в багатьох статтях. Знаходження диференціальних інваріантів алгебри (18.5) розглядалось в роботі Торрізі, Трачіна для характеристики рівнянь з класу (18.2), які можуть бути лінеаризовані.

Проте підходи попередніх авторів не є систематичними і не дозволяють провести строгий математичний опис диференціальних інваріантів. Наш підхід дає можливість отримати такий опис, що важливо для застосувань.

Запропонований метод дозволяє використати диференціальні інваріанти для характеристики рівнянь — тобто для кожної пари рівнянь з класу, наприклад, (18.2) можна визначити, чи є ці рівняння еквівалентними відносно перетворень типу (18.3). У випадку ЗДР вже було показано, що знання таких інваріантів дає необхідні та достатні умови еквівалентності (Берт, Чіховські).

Випадок нескінченновимірних алгебр є більш складним ніж випадок скінченновимірних алгебр, тому що базиси таких алгебр містять нескінченну (зліченну) кількість операторів (наприклад, алгебри Вірасоро та Каца-Муді), та/або інфінітезимальні оператори, які мають у якості коефіцієнтів довільні функції (як, наприклад, алгебра еквівалентності (18.5)).

Проте виявляється, що незважаючи на назву “нескінченновимірні” та реальну наявність нескінченних базисів, такі алгебри, для фіксованого рангу продовжень та для цілі знаходження диференціальних інваріантів можуть розглядатись як скінченновимірні. Ранги l -х продовжень за Лі базисних операторів виявляються скінченними для кожного фіксованого l . Проте, на відміну від скінченновимірних алгебр, ці ранги не стабілізуються, тобто не досягають якогось фіксованого значення зі збільшенням рангу продовження.

Скінченність такого рангу обговорювалась у роботі Мунос, Мюріель, Родрігес, де доведена скінченність функціонального базису диференціальних інваріантів.

Для побудови диференціальних інваріантів для певної алгебри ми використовуємо процедуру дискретизації тих коефіцієнтів операторів, які є довільними функціями. Дискретизація операторів нескінченновимірних алгебр включає розклад довільних функцій у ряди Тейлора. Ці функції мають бути нескінченно диференційованими (за умовою комутування в означенні алгебри Лі), проте це не означає, що вони є аналітичними. Проте, для цілей обчислення диференціальних інваріантів нескінчен-

новимірних алгебр ми можемо обмежитись розглядом лише аналітичних функцій у коефіцієнтах базисних операторів, і скінченною кількістю таких довільних функцій у коефіцієнтах базисних операторів.

Розклад коефіцієнтів інфінітезимальних операторів у ряди дозволяє замінити оператори з довільними функціями у нескінченні ряди інфінітезимальних операторів без таких довільних функцій. Це дозволяє прямо обчислювати ранги продовжень (у деяких випадках цей ранг дорівнює кількості змінних та похідних, і тоді легко бачити без подальших обчислень, що абсолютних інваріантів відповідного порядку немає).

Твердження. Для фіксованого порядку l існує функціональний базис будь-якої алгебри Лі, включаючи нескінченновимірні алгебри, зі скінченною кількістю довільних функцій у коефіцієнтах базисних операторів або з зліченими нескінченними послідовностями базисних операторів без довільних функцій.

Для нашого прикладу ми маємо наступне представлення базисних операторів:

$$\begin{aligned}
Y_0 &= x\partial_t + t\partial_x, Y_1 = \partial_t, Y_2 = \partial_x, \\
Y_3 &= x\partial_x + t\partial_t - 2f\partial_f - \sigma\partial_\sigma - 2f_u\partial_{f_u}, \\
Y_\phi^k &= u^k\partial_u + 2ku^{k-1}\sigma\partial_\sigma + 2(ku^{k-1}f + k(k-1)u^{k-2}\sigma)\partial_f \\
&\quad + (k(k-1)u^{k-2}f + k(k-1)(k-2)u^{k-3}\sigma) \\
&\quad - 2\sigma f_\sigma k(k-1)u^{k-2}\partial_{f_u} + (k(k-1)u^{k-2} - f_\sigma ku^{k-1})\partial_{f_\sigma}.
\end{aligned} \tag{18.6}$$

Для знаходження диференціальних інваріантів для алгебри з дискретизованими базисними операторами (18.6) ми знаходимо так звану генеруючу множину операторів, тобто мінімальну скінченну множину операторів з набору (18.6), яка має той же загальний ранг, що й весь набір (18.6). Кількість інваріантів у функціональному базисі порядку l дорівнює різниці кількості змінних, що входять у ці диференціальні інваріанти (залежні та незалежні змінні та похідні відповідного порядку), та загального рангу потрібного продовження базисних операторів.

Базисні оператори містять перші похідні функції f і можуть в принципі дати диференціальні інваріанти першого порядку. Проте, ми маємо 7 змінних $(t, x, u, \sigma, f, f_u, f_\sigma)$, і загальний ранг операторів (18.6) дорівнює 7. Ми не маємо абсолютних диференціальних інваріантів першого порядку, а лише один відносний диференціальний інваріант

$$R = \sigma f_\sigma - f, \quad (18.7)$$

який представляє особливий многовид для алгебри (18.6), де її ранг дорівнює 6.

Функціональний базис диференціальних інваріантів другого порядку:

$$R_1 = \frac{\sigma f_{\sigma\sigma}}{\sigma f_\sigma - f}, R_2 = \frac{-2\sigma^2 f f_{\sigma\sigma} + \sigma(f_u - \sigma f_{\sigma u}) + f(\sigma f_\sigma - f)}{(\sigma f_\sigma - f)^2} \quad (18.8)$$

$(\sigma f_\sigma - f \neq 0)$.

Інваріанти R_1, R_2 були знайдені у роботі Торрізі, Трачіна. Наш підхід дозволяє довести, що вони утворюють функціональний базис диференціальних інваріантів другого порядку та використовувати їх для характеристики рівнянь класу (18.2).

Ми шукаємо інваріанти у вигляді $F = F(t, x, u, \sigma, f, f_u, f_\sigma, f_{uu}, f_{u\sigma}, f_{\sigma\sigma})$ — які залежать від 10 змінних. Тут можна відділити інваріанти, що залежать від других похідних u , та ми не потребуємо їх для характеристики рівнянь.

Ми не будемо виписувати складні вирази для першого продовження операторів (18.6), проте шляхом прямого обчислення можна довести, що його загальний ранг дорівнює 8, та ми маємо 10 змінних, тобто функціональний базис буде містити $10 - 8 = 2$ інваріантів. Також легко перевірити, що інваріанти R_1, R_2 функціонально незалежні, тобто формують функціональний базис.

Алгоритм знаходження функціонального базису абсолютних диференціальних інваріантів для нескінченновимірних алгебр з довільними функціями у базисних операторах:

1. Розкласти довільні функції у коефіцієнтах операторів у ряди Тейлора.
2. Перетворити набір операторів з довільними функціями у дискретний нескінченний набір без довільних функцій.
3. Знайти потрібні продовження базисних операторів алгебри еквівалентності.
4. Порахувати ранг продовження алгебри.
5. Знайти мінімальну “генеруючу множину” операторів, ранг продовження якої дорівнює рангу продовження алгебри.
6. Знайти функціональний базис, використовуючи “генеруючу множину”.

Характеризація диференціальних рівнянь. Дослідження характеристики ДРЧП використовує ідеї роботи Берта та Чіховські, де подібна проблема розглядалась для ЗДР.

Для конкретних видів рівнянь (18.2) значення інваріантів алгебри еквівалентності будуть деякими функціями u та σ : $R_1(u, \sigma, f) = \rho_1(u, \sigma)$, $R_2(u, \sigma, f) = \rho_2(u, \sigma)$. Ми можемо довести, що значення всіх диференціальних інваріантів вищих порядків можна представити як функції від $\rho_1(u, \sigma)$, $\rho_2(u, \sigma)$ (що означає, що вони утворюють фундаментальний базис для такої алгебри), та значення цих інваріантів визначатимуть класи еквівалентності для класу рівнянь (18.2).

Твердження. Два рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = f_1(u, \sigma), \quad (18.9)$$

та

$$u_{tt} - u_{xx} = f_2(u, \sigma), \quad (18.10)$$

еквівалентні, якщо і тільки якщо значення диференціальних інваріантів R_1 , R_2 для цих рівнянь однакові:

$$R_1(u, \sigma, f_1) = R_1(u, \sigma, f_2), \quad R_2(u, \sigma, f_1) = R_2(u, \sigma, f_2).$$

Розглядаючи вирази

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{\sigma f_{\sigma\sigma}}{\sigma f_\sigma - f} = \rho_1(u, \sigma), \\ R_2 &= \frac{-2\sigma^2 f f_{\sigma\sigma} + \sigma(f_u - \sigma f_{\sigma u}) + f(\sigma f_\sigma - f)}{(\sigma f_\sigma - f)^2} = \rho_2(u, \sigma) \end{aligned} \quad (18.11)$$

як систему ДРЧП на функцію f , можливо описати всі рівняння у конкретному класі еквівалентності.

18.2 Групова класифікація відносно прихованої симетрії

Описаний алгоритм знаходження всіх рівнянь, які мають задану приховану симетрію [146].

Розроблений метод та наведені приклади опису рівнянь, що мають задану приховану симетрію. Метод базується на описі та класифікації умовних диференціальних інваріантів — тобто виразів, які є диференціальними інваріантами за певної умови. Крім опису рівнянь з заданою прихованою симетрією, отримані результати дають можливість класифікації симетрій них та нелінійських редукції рівнянь [124, 146].

Поняття умовної симетрії є досить широко розвиненим та дозволяє знайти багато нових розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь (НДУЧП).

“Прихована симетрія” у різних контекстах - це симетрія, яка не одержується шляхом певної прямої процедури. Тут ми розглядаємо приховану симетрію ДРЧП аналогічно прихованій симетрії Типу II ЗДР у роботах Абрахам-Шронер та її співавторів. Для ДРЧП — це симетрія редукованого рівняння (з меншою кількістю незалежних змінних) якої не має вихідне рівняння.

Наведемо процедуру опису всіх рівнянь у загальному класі, які мають конкретну приховану симетрію.

Загальне ДРЧП першого порядку:

$$F = F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) = 0. \quad (18.12)$$

Ми описуємо всі такі рівняння, які мають симетрію Лі відносно оператора ∂_x та приховану симетрію відносно оператора ∂_y після редукції відносно ∂_x . Умова такої симетрії - інваріантність рівняння (18.12) відносно оператора ∂_y за умови $u_x = 0$:

$$\partial_x F|_{F=0} = 0, \quad \partial_y F|_{F=0, u_x=0} = 0. \quad (18.13)$$

Загальний розв'язок (18.13) - функція всіх інваріантів операторів ∂_x та ∂_y , тобто z, u, u_x, u_y, u_z , та умовного інваріанта $r = u_x R(y, z, u, u_x, u_y, u_z)$ (що є абсолютним інваріантом ∂_x), де R — довільна функція на многовиді $u_x = 0$:

$$F(r, z, u, u_x, u_y, u_z) = 0, \quad (18.14)$$

F має бути функцією інваріантів прихованої симетрії на многовиді, який визначається умовами редукції, та має довільну форму щодо іншого. Функція r in (18.14) не довільна: ми не можемо взяти

$$r = R_1(y, z, u, u_x, u_y, u_z) = u_x \frac{R_1}{u_x}$$

тому що $R = \frac{R_1}{u_x}$ в загальному випадку не визначена на многовиді $u_x = 0$.

Означення. Функція $F(x, u, u_1, \dots, u_k)$ є умовним диференціальним інваріантом оператора Q , якщо за умов $G(x, u, u_1, \dots, u_r) = 0$ виконуються співвідношення $Q[F] = 0$, $Q[G] = 0$. ми розглядаємо продовження операторів порядку $\max(k, r)$.

Набір інваріантів порядку $r \leq k$ оператора Q з умовами $G = 0$ називається *генеруючою множиною* умовних диференціальних інваріантів алгебри Q порядку k , якщо всі інші інваріанти можуть бути представлені як функції інваріантів з цього набору.

Ці інваріанти можуть бути абсолютними інваріантами Q та G -умовними відносно $G^{(l)} \times R_{(l)}$, де $G^{(l)}$ — похідні G порядку $l \leq k - r$, та $R_{(l)}$ довільні функції на $G^{(k)} = 0$ для всіх значень k .

Кількість функціонально незалежних Q -абсолютних інваріантів у генеруючій множині умовних диференціальних інваріантів розраховує-

ться подібно до кількості інваріантів у функціональному базисі диференціальних інваріантів, як $m - 1$, де m - кількість змінних $x, u, u_1, \dots, u_k$.

Рівняння (18.14) редукується за допомогою оператора ∂_x до $F(0, z, u, 0, u_y, u_z) = 0$, яке інваріантне відносно ∂_y . Якщо $R_y \neq 0$ у виразі для r у (18.14), тоді це рівняння не інваріантне відносно оператора ∂_y , тобто така симетрія є чисто прихованою.

Цей приклад легко узагальнюється на вищий порядок рівнянь або більшу кількість операторів редукції.

Алгоритм групової класифікації відносно прихованої симетрії.

Крок 1. Отримати редуковані рівняння для початкового класу ДРЧП.

Крок 2. Групова класифікація отриманих редукованих рівнянь.

Крок 3. Розмноження нееквівалентних редукованих рівнянь з застосуванням перетворень з групи еквівалентності цього класу.

Крок 4. Знайти рівняння з початкового класу ДРЧП, які відповідають розмноженим редукованим рівнянням.

Крок 5. Знайти всі нееквівалентні рівняння відносно перетворень з групи еквівалентності початкового класу ДРЧП.

Нетривіальна прихована симетрія для ДРЧП виникає, якщо редуковані рівняння мають ширшу групу еквівалентності, ніж початкові рівняння. Таким чином, групова класифікація щодо прихованої симетрії потребує дослідження груп еквівалентності таких класів, подібним чином до того, як здійснюється для класифікації відносно груп Лі. Опис прихованої симетрії рівнянь, які є цікавими з фізичної точки зору, дозволить виокремити ширші класи рівнянь, що допускають певні редукції, ніж це можливо з застосуванням симетрії Лі. Така класифікація є особливо цікавою тому, що редуковані рівняння часто мають нескінченні групи симетрії, що дозволяє отримати класи рівнянь з високим ступенем довільності.

Можливе використання: дослідження та застосування розширених зображень алгебр Лі, для дослідження умовних диференціальних інваріантів та рівнянь, що мають умовну симетрію та допускають нелінійські редукції. Також можливе її застосування для коригування традиційних методів симетрійної редукції диференціальних рівнянь та підходів до визначення еквівалентності відповідних анзаців та розв'язків.

Також проведений опис можливих редукцій хвильового рівняння до двовимірних рівнянь. Знайдені та уточнені необхідні умови редукції, а також відповідні редуковані рівняння. Досліджені можливі редуковані рівняння та побудовані нові нелінійські розв'язки [9, 125, 145].

Проведений повний опис умовної симетрії двовимірного хвильового рівняння. Побудована симетрійна класифікація загального класу двовимірних хвильових рівнянь з довільною не лінійністю відносно умовної симетрії. Побудовані нові нелінійські розв'язки використанням знайденої симетрії [124, 144].

19 Математичні моделі створення та експлуатації алмазних бурових долот

Відділ прикладних досліджень Інституту математики НАН України понад двадцять років співпрацює з Інститутом надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України в напрямку розробки математичних моделей створення і аналізу роботи алмазних інструментів. За останні п'ять років розроблені кінетичні моделі для опису фізико-хімічних процесів, які паралельно відбуваються при спіканні алмазовмісних композитів на основі твердосплавних матриць методом гарячого пресування [19, 20, 2, 21]. Це дозволило визначити енергетичні бар'єри для зародкоутворення нових фаз, дифузії і хімічних реакцій з однієї сторони, а з іншої - визначити залежність швидкості процесу від температури і тиску та запобігти проведенню трудомістких експериментів та використанню складного

обладнання при дослідженні молекулярної взаємодії. На основі цих моделей встановлено, що енергія активації дифузії, зародкоутворення нових фаз і хімічних реакцій несе у собі повну інформацію про структури і фізико-механічні властивості надтвердих композиційних алмазовмісних композитів (НКАМ), та виготовлені нові конкурентоспроможні на світовому ринку НКАМ нового складу, які за зносостійкістю перевищують стандартні композити. Проведені дослідження підсумовані в монографії [71].

Перспектива створення бурових долот з НКАМ, покращення технологій їх створення, розширення областей їх використання вимагають більш глибокого дослідження суті процесів, що виникають при зношуванні алмазних долот, та визначення основних факторів, що впливають на його перебіг. В роботах [3, 4, 5, 45, 46] було показано, що фізико-механічні властивості алмазних композитів, що застосовуються для виготовлення бурових долот, суттєво залежать від технологічних процесів спікання. В свою чергу зношування бурового долота залежить від форми профіля і розміщення алмазних вставок на робочій поверхні, умов взаємодії інструмента з породою. Ці особливості суттєво ускладнюють постановку задачі зношування, вибір математичних методів та побудови алгоритму розв'язування. Вони вимагають залучення математичних моделей механіки суцільних середовищ, теплопровідності, термопружності та зношування.

До особливостей такого моделювання варто віднести і такі фактори:

1. Бурове долото має неоднорідну структуру: теплофізичні і механічні властивості алмазовмісного шару суттєво відрізняється від аналогічних параметрів твердосплавної матриці.

2. Бурове долото в процесі роботи сильно нагрівається за рахунок інтенсивного тепловиділення в ковзному контакті і охолоджується потужним потоком рідини.

3. Складна геометрична форма долота і умови його контакту з за-

боєм свердловини приводять до спеціальних граничних умов для взаємозв'язаних задач теплопровідності, термопружності і зношування. При цьому задачу теплопровідності не можна розглядати ізольовано від забою, так як тепловий потік отвертя поширюється як до нього, так і до долота. В результаті повинна розв'язуватися нелінійна контактна задача взаємозв'язної термопружності, коли температурні напруження є джерелами такого теплового потоку. Щоб отримати аналітичні розв'язки таких задач, необхідно наблизити форму профіля долота до класичної (наприклад, сферичної, напівсферичної і т. д.).

4. При розв'язуванні задачі зношування алмазного долота необхідно використовувати моделі зношування, які визначають залежність швидкості зношування від тиску на контакт, швидкості відносного ковзання, температури, механічних і мікрогеометричних характеристик долота. Знання та розвиток уявлень про вплив фізичних величин надтвердих композиційних матеріалів на кінетику зношування алмазних бурових долот є важливими для технології виготовлення таких інструментів з широким спектром властивостей, розширення областей їх застосування і ефективної експлуатації. Проте в теперішній час ще не отриманий розв'язок контактної задачі термопружності для алмазного долота з повним відображенням специфічних особливостей надтвердих композиційних матеріалів і мікрогеометрії взаємодіючих тіл в процесі буріння свердловин. З достатньою повнотою висвітлити ці об'ємні і різноманітні аспекти важко, тому основну увагу приділяється не формально строгим математичним обґрунтуванням застосованих методів, а обґрунтуванню їх використання при розв'язуванні контактної задачі термопружності при наявності зношування алмазного долота напівсферичної форми.

19.1 Температурний стан алмазного сферичного долота

Як було вказано раніше, що фізико-механічні властивості бурових вставок складу алмаз–твердий сплав WC–6Co і алмаз–твердий сплав WC–

$6\text{Co}-\text{CrB}_2$, що виготовляються методом гарячого пресування, суттєво залежать від хімічного складу і передісторії вихідних речовин: природи пружного стану як в матриці вдалині від алмазу, так і в матриці в околі частинок алмазу, міцності контакту алмаз–матриця і $p - T - t$ умов спікання. Крім того, зношування бурової вставки суттєвим чином залежить від міцності і термостійкості алмазів, їх концентрації і зернистості. В свою чергу зношування бурових долот залежить від тепловиділення і відводу надмірного тепла із зони тертя. Контактні температури обумовлюють температурні напруження і визначають характер протікання процесів в алмазовмісному шарі, приводять до зміни міцності композиту.

Перспектива створення НКМ новітнього покоління і бурового інструменту на їх основі в значній мірі залежить від впливу температурних полів на кінетику зношування та працездатність бурового інструменту. Через складність геометричної форми і характеру взаємодії бурового інструменту з породою розв’язок задачі теплопровідності в загальній постановці стає неможливим. При цьому розв’язок задачі теплопровідності є проміжним етапом і в наступному використовується при вивченні зношування, температурних напружень, модельних ситуацій.

Алмазне бурове долото представимо у вигляді напівсферичного тіла з покриттям, яке наближено моделює роботу долота. В сферичній системі координат (r, φ, θ) візьмемо половину двошарової кулі $G_1 = \{(r, \varphi, \theta) | r \in [0, r_2], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi/2]\}$ (рис. 19.1), на яку нанесено покриття товщиною $h_a = r_2 - r_1$ і вилучений сферичний сектор $G_2 = \{(r, \varphi, \theta) | r \in [0, r_2], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \theta_0]\}$. Тоді область $\Omega = G_1 \setminus G_2$ буде представляти собою долото $\Omega = \{(r, \varphi, \theta) | r \in [0, r_2], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [\theta_0, \pi/2]\}$.

Область $\Omega_1 = \{(r, \varphi, \theta) | r \in [0, r_1], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [\theta_0, \pi/2]\}$ відповідає корпусу долота, а область $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1 = \{(r, \varphi, \theta) | r \in [r_1, r_2], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [\theta_0, \pi/2]\}$ — його ріжучої поверхні. Матеріал області Ω_2 є композитним, матриця якого виконана методом гарячого пресування з суміші частинок природних або штучних алмазів і менш крупних частинок кар-

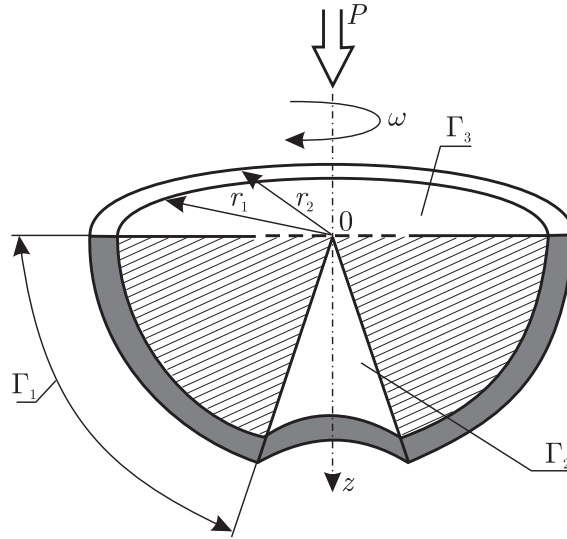


Рис. 19.1: Схема контакту профіля алмазного долота з породою: Γ_1 — поверхня контакту робочої частини долота з породою; Γ_2 — внутрішня (охолоджуюча) поверхня долота; P — вертикальне навантаження на долото; ω — кутова швидкість.

бїду вольфраму і кобальту. Ця суміш може містити добавки порошків тугоплавких спосук переходних металів (CrB_2 , W_2 , B_5 , B_4C и т. д.) в малих кількостях в порівнянні з основними компонентами, а Ω_1 виконаний з надміцного металу (сталі) з заданими теплофізичними властивостями. При цьому фізико-механічні властивості матриці суттєво відрізняються від аналогічних властивостей корпусу долота. В зоні контакту режучої частини долота із забоєм $\Gamma_1 = \{(r, \varphi, \theta) | r = r_2, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [\theta_0, \pi/2]\}$ алмазне долото нагрівається за рахунок сили тертя (взаємодії долота з породою), густина утвореного теплового потоку q_m пропорційна нормальному тиску, лінійній швидкості і довжині контактної ділянки:

$$q = q_m \sin \theta = q_m \sqrt{1 - \mu^2}, \quad (19.1)$$

де $\mu = \cos \theta$; $q_m = \frac{6k_1kr_2P\omega V_p}{100\pi d^2N}$ — загальний тепловий потік процесу буріння; P — вертикальне навантаження; V_p — об'ємна частка алмазів (в %) при відносній концентрації $K = 100$; $k_1 \sim 0,78$ — коефіцієнт, що враховує частку тепла, що поступає в долото [?]; k — коефіцієнт тертя; ω — кутова швидкість обертання долота; d — середній діаметр алмазного зерна. Будемо вважати, что на верхній поверхні такого долота

$\Gamma_3 = \{(r, \varphi, \theta) | r \in [0, r_2], \varphi \in [0, 2\pi], \mu = 0\}$ тепловий потік відсутній

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = 0. \quad (19.2)$$

На іншій поверхні долота $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ($\Gamma_2 = \{(r, \varphi, \theta) | r \in [0, r_2], \varphi \in [0, 2\pi], \mu \in [\mu_0, 1]\}$) відбувається охолодження рідиною шляхом конвективного теплообміну

$$q_1 = \alpha(T_n - T_q), \quad (19.3)$$

причому коефіцієнт теплообміну розраховується за формулою [?]

$$\alpha = \frac{2\lambda_q(\text{Re}^2 + \text{Gr})^{0,164}}{r_2}, \quad (19.4)$$

де

$$\text{Re} = \frac{4\omega r_2^2}{\nu}, \quad \text{Gr} = \frac{8\beta g r_2^3 \Delta T}{\nu^2}, \quad (19.5)$$

λ_q — коефіцієнт теплопровідності рідини; ν — кинетична в'язкість і β — коефіцієнт розширення рідини; r_2 — зовнішній радіус долота; g — прискорення сили тяжіння; $\Delta T = T_n - T_q$ — різниця температури робочої поверхні долота T_n і рідини T_q , причому властивості охолоджуючої рідини (води) враховуються при температурі кипіння. Аналіз співвідношень (19.4) и (19.5) показує, що числа Рейнольдса и Грасгофа при роботі долота ICM-214,3 Т ($r_1 = 0,103$ м; $r_2 = 0,107$ м; $\omega = 6$ с⁻¹) мають наступні значення: $\text{Re} = 9,346 \cdot 10^5$; $\text{Gr} = 8,111 \cdot 10^{11}$. Критеріальний безрозмірний параметр $\text{Gr}/\text{Re}^2 = 0,93 > 0,1$ засвідчує, що тепловіддача в процесі буріння відбувається за рахунок сумісної дії природної і вимушеної конвекції.

Задача знаходження нестационарного температурного поля алмазного долота зводиться до розв'язування системи рівнянь теплопровідності в сферичній системі координат:

$$\frac{1}{\nu_i} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (\rho, \mu) \in \Omega_i, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \quad (19.6)$$

при початкових умовах

$$T(\rho, \mu, 0) = u_0 = \frac{T_0 - T_q}{T_k - T_q}, \quad (19.7)$$

граничній умові спряження на границі шарів

$$[u] = \left[\lambda \frac{\partial u}{\partial \rho} \right] = 0, \quad \rho = \rho_1, \quad \mu \in [0, \mu_0], \quad (19.8)$$

умовах теплообміну на поверхні Γ_1

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + hu|_{\rho=1} = G\sqrt{1 - \mu^2}, \quad \mu \in [0, \mu_0], \quad (19.9)$$

и на поверхні Γ_2

$$-\frac{1}{\rho}\sqrt{1 - \mu^2}\frac{\partial u}{\partial \mu} + hu|_{\mu=\mu_0} = 0, \quad \rho \in [0, 1), \quad (19.10)$$

а також при відсутності теплового потоку на Γ_3

$$\frac{\partial u}{\partial \mu}|_{\mu=0} = 0, \quad \rho \in [0, 1), \quad (19.11)$$

Тут прийняті наступні позначення:

$$u = \frac{T - T_q}{T_k - T_q}, \quad \rho = \frac{r}{r_2}, \quad \nu_i = \kappa_i/r_2^2, \quad h = \frac{\alpha r_2}{\lambda_2},$$

$$G = \frac{q_m r_2}{\lambda_2(T_k - T_q)}, \quad \Delta = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \right]$$

— оператор Лапласа; індекс 1 відповідають сталевому корпусу долота, 2 — алмазовмісному шару (алмаз-(94WC + 6Co)), κ_i — коефіцієнт теплопровідності.

Особливістю задачі (19.6) є суттєво неоднорідна гранична умова на поверхні Γ_1 . Для її розв'язку використаємо метод Гальоркіна з спеціальним вибором системи координатних функцій.

Визначимо гільбертовий простір $H^{(p, s_1, s_2)}$ як ортогональний добуток просторів функцій $W_2^p(\Omega) \times W_2^{s_1}(\Gamma_1) \times W_2^{s_1}(\Gamma_2)$. Позначимо через $H^{p, r_1, r_2}(Q_T)$ гільбертовий простір функцій, які для всіх $t \in (0; t)$ приймають значення в $H^{(p, r_1, r_2)}$. Повертаючись до задачі (19.6)–(19.11), неважко довести наступне твердження:

оператор B , що відповідає задачі (19.6)–(19.11),

$$\begin{aligned} & [u(\rho, \mu, t), u(\rho, \mu, t)|_{\Gamma_1}, u(\rho, \mu, t)|_{\Gamma_2}] \rightarrow \\ & \rightarrow \left[-\Delta u + \frac{1}{\nu} \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial \rho} + hu|_{\Gamma_1}, -\frac{1}{\rho} \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial u}{\partial \mu} + hu|_{\Gamma_2} \right] \end{aligned} \quad (19.12)$$

є ізоморфізмом з простору функцій $W_2^p(Q_T)$, що задовольняють умови (19.8), (19.11) на $H^{p-2, p-3/2, p-3/2}(Q_T)$. Задачі (19.6)–(19.11) відповідає в $H^{p-2, p-3/2, p-3/2}(Q_T)$ операторне рівняння

$$BU = F \quad (19.13)$$

з правою частиною

$$F = [0, G\sqrt{1 - \mu^2}, 0] \quad (19.14)$$

і початковими умовами

$$U(\rho, \mu, 0) = [u_0, u_0, u_0]. \quad (19.15)$$

Наближений розв'язок рівняння (19.13) будемо шукати у вигляді

$$U^N(\rho, \mu, t) = \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} a_{nm}^N(t) \Phi_{nm}(\rho, \mu), \quad (19.16)$$

де $a_{nm}^N(t)$ — функції від часу, які належить визначити, а $\{\Phi_j(\rho, \mu)\}_{j=1}^{\infty}$ — система власних функцій оператора A з $W_2^2(G_1) \times W_2^{3/2}(\Gamma)$ в $L_2^2(G_1) \times W_2^{1/2}(\Gamma)$:

$$[u(\rho, \mu)/\overline{\nu(\rho)}, u(1, \mu)] \rightarrow \left[-\Delta u, \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} \right], \quad \overline{\nu(\rho)} = \frac{\nu(\rho)}{\nu_2}. \quad (19.17)$$

Скалярний добуток в $L_2(G_1) \times L_2(\Gamma)$ задамо співвідношенням

$$\begin{aligned} (U, V)_{L_2(G_1) \times L_2(\Gamma)} &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} u(\varrho, \mu) v(\varrho, \mu) \rho^2 d\rho d\mu + \\ &+ \frac{\lambda_2}{\nu_2} \int_0^1 u(1, \mu) v(1, \mu) d\mu, \end{aligned} \quad (19.18)$$

а норму —

$$\|U\|_{L_2(G_1) \times L_2(\Gamma)} = (U, U)_{L_2(G_1) \times L_2(\Gamma)}^{1/2}. \quad (19.19)$$

Задача на власні значення оператора A в диференціальній формі еквівалента задачі на власні значення з спектральним параметром в рівнянні і граничній умові:

$$-\Delta \varphi^{(1)} = \frac{\beta^2}{\nu_1} \varphi^{(1)}, \quad \mu \in (0, 1), \quad \rho \in (0, \rho_1), \quad (19.20)$$

$$-\Delta \varphi^{(2)} = \beta^2 \varphi^{(2)}, \quad \mu \in (0, 1), \quad \rho \in (\rho_1, 1), \quad (19.21)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \mu} = 0, \quad \mu = 0, \quad \rho \in (0, 1), \quad (19.22)$$

$$[\varphi] = \varphi^{(1)}(\rho_1, \mu) - \varphi^{(2)}(\rho_1, \mu) = 0, \quad \rho = \rho_1, \quad \mu \in (0, 1), \quad (19.23)$$

$$\left[\lambda(\rho) \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right] = \lambda_1 \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \rho} - \lambda_2 \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_1} = 0, \quad \mu \in (0, 1), \quad (19.24)$$

$$\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \rho} = \beta^2 \varphi^{(2)}, \quad \rho = 1, \quad \mu \in (0, 1). \quad (19.25)$$

Оператор A в просторі $L_2(G_1) \times L_2(\Gamma)$ самоспряжений, додатньо визначений, а обернений до нього цілком неперервний. Спектр власних значень оператора A ($A\Phi = \beta^2\Phi$) дискретний, невід'ємний: $\beta_i^2 \rightarrow +\infty$ при $i \rightarrow \infty$, а власні функції $\Phi_i(\rho, \mu) = \{\varphi_i(\rho, \mu), \varphi_i(1, \mu)\}$ утворюють в просторі $L_2(G_1) \times L_2(\Gamma)$ повну ортонормовану систему. Тут

$$\varphi_{n,m}(\rho, \mu) = \frac{\psi_{n,m}(\rho) P_{2n}(\mu)}{N_{n,m}}, \quad (19.26)$$

$$\psi_{n,m}(\rho) = \begin{cases} \left(\frac{\beta\rho}{\sqrt{\nu_1}} \right)^{-1/2} J_{2n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta\rho}{\sqrt{\nu_1}} \right), & \rho \in (0, \rho_1), \\ (\beta\rho)^{-1/2} (A_{n,m} J_{2n+\frac{1}{2}}(\beta\rho) + B_{n,m} J_{-(2n+\frac{1}{2})}(\beta\rho)), & \rho \in (\rho_1, 1), \end{cases} \quad (19.27)$$

$P_{2n}(\mu)$ — полиноми Лежандра парного порядку, $J_{2n+\frac{1}{2}}(z)$ и $J_{-(2n+\frac{1}{2})}(z)$ — беселеві функції напівцілого індексу. Коефіцієнти $A_{n,m}$ и

$B_{n,m}$ визначаються з умов спряження (19.23), (19.24) при $\rho = 1$:

$$A_{n,m} = \frac{\pi\sqrt[4]{\nu_1}}{2} \left\{ J_{2n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta\rho_1}{\sqrt{\nu_1}} \right) \left(\beta\rho_1 J'_{-(2n+\frac{1}{2})}(\beta\rho_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} J_{-(2n+\frac{1}{2})}(\beta\rho_1) \right) - \frac{\lambda_1}{\lambda_2\sqrt{\nu_1}} J_{-(2n+\frac{1}{2})}(\beta\rho_1) \times \right. \\ \left. \times \left(\beta\rho_1 J'_{2n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta\rho_1}{\sqrt{\nu_1}} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\nu_1} J_{2n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta\rho_1}{\sqrt{\nu_1}} \right) \right) \right\}, \quad (19.28)$$

$$B_{n,m} = \frac{\pi\sqrt[4]{\nu_1}}{2} \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2\sqrt{\nu_1}} J_{2n+\frac{1}{2}}(\beta\rho_1) \left(\beta\rho_1 J'_{2n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta\rho_1}{\sqrt{\nu_1}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \sqrt{\nu_1} J_{2n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta\rho_1}{\sqrt{\nu_1}} \right) \right) - J_{2n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta\rho_1}{\sqrt{\nu_1}} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\beta\rho_1 J'_{2n+\frac{1}{2}}(\beta\rho_1) - \frac{1}{2} J_{2n+\frac{1}{2}}(\beta\rho_1) \right) \right\}, \quad (19.29)$$

$N_{n,m}^2 = (\Phi_{nm}(\rho, \mu), \Phi_{nm}(\rho, \mu))_{L_2^2(G_1) \times L_2^2(\Gamma)}$, а β_{nm} , $n = 0, 1, \dots$, $m = 1, 2, \dots$, знаходимо як корені трансцендентного рівняння (з умови (19.25)):

$$\left(\beta^2 + \frac{1}{2} \right) \left(A_n J_{2n+\frac{1}{2}}(\beta) + B_n J_{-(2n+\frac{1}{2})}(\beta) \right) - \\ - \left(A_n J'_{2n+\frac{1}{2}}(\beta) + B_n J'_{-(2n+\frac{1}{2})}(\beta) \right) = 0. \quad (19.30)$$

Згідно до методу Гальоркіна у вигляді

$$(BU^N, \Phi_{n_1 m_1})_{H^{(0,0,0)}} = (F, \Phi_{n_1 m_1})_{H^{(0,0,0)}}, \quad (19.31) \\ n_1 = \overline{0, N_1}, \quad m_1 = \overline{0, N_2},$$

$a_{nm}^N(t)$ в (19.16) знаходимо з системи звичайних диференціальних рівнянь (при початковій температурі долота, що дорівнює температурі рідини):

$$D\dot{A}(t) + EA(t) = F, \quad A(0) = 0. \quad (19.32)$$

Тут $A(t) = (a_{01}(t), \dots, a_{N_1 N_2}(t))^T$, а точка над A позначає диференціювання по t . Елементи матриць D , E и F після обчислень мають вигляд

$$(n, n_1 = \overline{0, N_1}, m, m_1 = \overline{0, N_2})$$

$$D_{nm}^{n_1 m_1} = \left(\delta_n^{n_1} \delta_m^{m_1} (4n+1) - \frac{\lambda_2}{\nu_2} \frac{\psi_{nm}(1)}{N_{nm}} \frac{\psi_{n_1 m_1}(1)}{N_{n_1 m_1}} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{(4n+1)(4n_1+1)} \right) L_{nn_1}(\mu_0), \quad (19.33)$$

$$E_{nm}^{n_1 m_1} = \left(\delta_n^{n_1} \delta_m^{m_1} \beta_{nm}^2 (4n+1) + h \frac{\psi_{nm}(1) \psi_{n_1 m_1}(1)}{N_{nm} N_{n_1 m_1}} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{(4n+1)(4n_1+1)} \right) L_{nn_1}(\mu_0) + \quad (19.34)$$

$$+ \left(\sqrt{1-\mu_0^2} P'_{2n}(\mu_0) S_{nn_1, mm_1}^{(1)} + h P_{2n}(\mu_0) S_{nn_1, mm_1}^{(2)} \right) P_{2n_1}(\mu_0), \\ F_{nm}^{n_1 m_1} = \frac{\lambda_2 \psi_{n_1 m_1}(1)}{\nu_2 N_{n_1 m_1}} G \int_0^{\mu_0} \sqrt{1-\mu^2} P_{2n_1}(\mu) d\mu, \quad (19.35)$$

де

$$L_{nn_1}(\mu_0) = \int_0^{\mu_0} P_{2n}(\mu) P_{2n_1}(\mu) d\mu, \quad (19.36)$$

$$S_{nn_1, mm_1}^{(1)} = \frac{1}{N_{nm} N_{n_1 m_1}} \int_0^1 \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} \psi_{nm}(\rho) \psi_{n_1 m_1}(\rho) \rho d\rho, \quad (19.37)$$

$$S_{nn_1, mm_1}^{(2)} = \frac{1}{N_{nm} N_{n_1 m_1}} \int_0^1 \frac{\lambda(\rho)}{\nu(\rho)} \psi_{nm}(\rho) \psi_{n_1 m_1}(\rho) \rho^2 d\rho. \quad (19.38)$$

$\delta_n^{n_1}$ — символ Кронекера.

Особливість такого підходу полягає в тому, що елементи матриць (19.33)–(19.35) практично виражені в явному вигляді, тобто інтеграли від поліномів Лежандра легко знаходяться з допомогою формул Гаусса.

Для розв'язування системи (19.32) використовуємо різницеву схему Кранка–Нікольсона [71]:

$$\frac{D}{\tau} (A^{s+1} - A^s) + \frac{E}{2} (A^{s+1} + A^s) = \frac{1}{2} (F^{s+1} + F^s), \quad (19.39)$$

яка записана симетрично відносно $(s + \frac{1}{2})\tau$, де τ — крок по часу, $s = 0, 1, \dots$. Поскільки компоненти вектора-стовпця F не залежать від часу,

отримуємо

$$A^{s+1} \left(D + \frac{E}{2} \tau \right) = A^s \left(D - \frac{E}{2} \tau \right) + \tau F, \quad (19.40)$$

при $A^0 = 0$.

Таким чином, використання методу Гальоркіна з розкладом функцій по власних функціях спектральних задач з параметром в рівнянні і граничній умові дає можливість отримати розв'язок задачі теплопровідності для напівсферичного тела с покриттям, з якого вилучений сферичний сектор з центром в початку координат. При цьому теплофізичні властивості покриття суттєво відрізняються від аналогічних властивостей тіла основи. Модель враховує інтенсивне виділення тепла внаслідок взаємодії долота з породою і охолодження його рідиною за рахунок вимушеної і природної конвекції.

В якості об'єту дослідження використали алмазне долото ІСМ-214,3 Т з зовнішнім діаметром 214,3 мм, яке оснащене буровими вставками однакових розмірів (діаметром 10 и висотой 10 мм) при початковій товщині алмазовмісного шару $h_a = 3$ мм складу алмаз–твердий сплав WC–6Co. Контрольні розрахунки проведені для буріння граніту і піщанику при наступних вихідних даних: товщина алмазовмісного шару до зношування $h_a = 3$ мм; коефіцієнти теплопровідності матеріалу композиту $\lambda_2 = 100 \div 200$ Вт/(м·К) і основи долота $\lambda_1 = 20 \div 80$ (Вт/(м·К)); відносна концентрація алмазів $K = 75 \div 125$ (3,3–5,5 карат алмазів на 1 см³ шихти); зернистість алмазів 3 500/400–1250/1000 мкм; відносне значення коефіцієнта теплообміну $\alpha = 0,5 \div 3,5$ кВт/(м²·К); кутова координата $\theta_0 = 10 \div 90^\circ$; контактний тиск на режучі алмази $p = 1 \div 50$ МПа; лінійна швидкість обертання $V = 2,5 \div 5,0$ м/с; час буріння $t = 0,1 \div 1000$ с. На рис. 19.2, а, б зображені графіки залежності поля температур від часу t при бурінні граніту і піщанику, які отримані в результаті обрахунків по запропонованому розв'язку при $N_1 = 8$, $N_2 = 6$. З цього рисунка видно, що температурні поля в долоті в залежності від радіальної координати

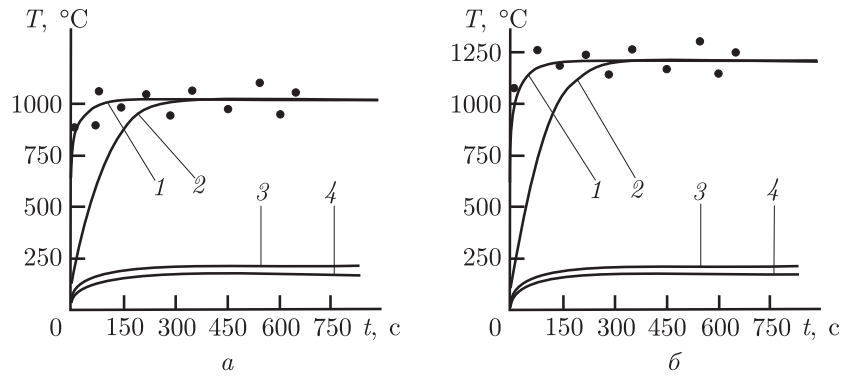


Рис. 19.2: Залежність поля температур від часу в алмазному долоті при $\rho = 1,0$ (1); 0,5 (2); 0,05 (3) и 0,005 (4) в процесі буріння граніту (а) і піщанику (б) для $p = 3,16$ ГПа, $\omega = 6 \text{ с}^{-1}$, $\lambda_1 = 40 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $\lambda_2 = 1000 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$, $\alpha_1 = 3,5 \text{ кВт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, $K = 100$, $Z = 800/630$ (— и • — розрахункові і експериментальні дані).

ρ досить швидко виходять на стаціонарний температурний режим. При цьому контактні температури при бурінні піщанику (рис. 19.2, б) мають відносно великі значення по відношенню до аналогічного параметру при бурінні граніту (рис. 19.2, а), що є наслідком відмінності фізико-механічних характеристик гірських порід. Співпадання розрахункових даних з експериментальними значеннями [71] свідчить про точність і адекватність даної моделі.

При збільшенні коефіцієнта теплопровідності алмазів λ_2 от 400 до $1200 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ спостерігається суттєве зменшення температури на робочій поверхні долота. Подальше його збільшення вже не створює такої дії, хоча і приводить до незначного зменшення температури (рис. 19.3, а). Тому важливо для збільшення теплопровідності природних алмазів і, як наслідок, стійкості до зношування композитів і долота в цілому є використання в процесі підготовки алмазовмісної шихти не звичайні сортові алмази зернистістю $800/630$ – $1000/800$, а тільки овальні, які не містять мікротріщин і сколів. З точки зору економічності, стійкості до зношування і надійності такого інструменту це є оптимальним рішенням. Збільшення коефіцієнта теплопровідності матеріалу композита λ_1 також позитивно впливає на температурний стан долота (рис. 19.3, б). Варто

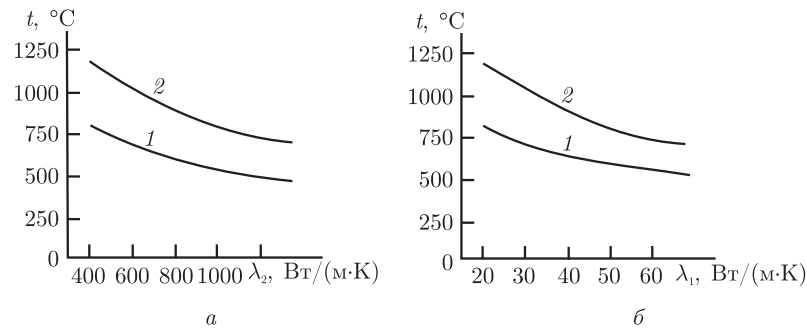


Рис. 19.3: Вплив коефіцієнтів теплопровідності алмазів (а) і композиту (б) при $p = 2,50$ (1) и $3,51$ ГПа (2) на контактну температуру в процесі буріння піщаника для $\alpha = 4$ кВт/(м²·К), $K = 100\%$, $Z = 800/630$, $t = 1000$ с, $v = 4$ м/с, $\rho = 1,0$: а — $\lambda_2 = 40$ Вт/(м·К), б — $\lambda_2 = 1000$ Вт/(м·К).

відмітити, що теплопровідність композитів складу алмаз–твердий сплав WC–6Co головним чином залежить від тиску пресування і температури спікання, збільшення яких на заключному етапі процесу сприяє покращенню структури і механічних характеристик за рахунок більш однорідної структури композиту. Введення у вихідну шихту теплопровідних порошків інших металів (хімічно неактивних), навіть в малих кількостях по відношенню до основних компонентів, може суттєво знизити стійкість до окислення і погіршити характеристики композиту щодо міцності.

Досить закономірно и адекватно реальним процесам виглядають залежності температури робочої поверхні долота в процесі буріння піщаника від концентрації K (рис. 19.4, а) и зернистості Z (рис. 19.4, б) алмазів. Для економії кошовної сировини (природних алмазів) доцільно використовувати при виробництві таких композитів концентрацію алмазов $K = 100\%$ с зернистістю 800/630–1000/800.

Аналізуючи далі температурні поля в долоті, слід відмітити, що температура поверхні суттєво залежить від кутової координати θ (рис. 19.5, а). збільшення θ приводить до збільшення лінійної швидкості ріжучих елементів, що і обумовлює нерівномірний розподіл температури на робочій поверхні і посилене зношування інструменту. Звідси випливає, що для забезпечення рівномірного зношування алмазного долота необхідно

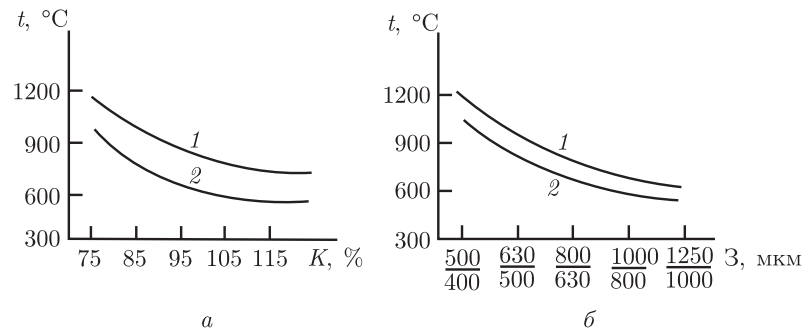


Рис. 19.4: Вплив концентрації (а) і зернистості алмазів (б) при $\theta = 60$ (1), 45° (2) на контактну температуру в процесі буріння піщанику для $\alpha = 3,75$ кВт/(м²·К), $t = 1000$ с, $v = 4$ м/с, $p = 2,73$ ГПа, $\lambda_1 = 40$ Вт/(м·К), $\lambda_2 = 1000$ Вт/(м·К): а — $Z = 800/630$, б — $K = 100$ %, $\rho = 1,0$.

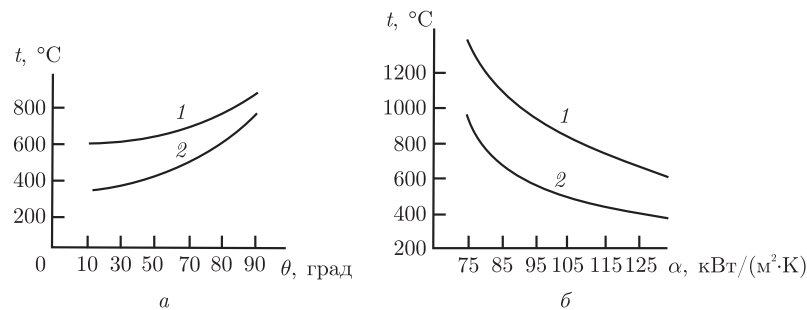


Рис. 19.5: Залежності температури робочої поверхні долота від кутової координати (а) при $p = 2,73$ (1) и $1,95$ МПа (2) і відносного значення коефіцієнта теплообміну (б) при $\theta = 88$ (1) и 65° (2) в процесі буріння піщанику для $K = 100\%$ $Z = 800/630$ (ті ж умови, що і на рис. 19.4).

його периферійну поверхню (в напрямку зростання кутової координати) оснащувати більшою кількістю бурових вставок. Температурне поле алмазних долот суттєво також залежить від відносного значення коефіцієнта теплообміну α (рис. 19.5, б), збільшення якого значно зменшує контактну температуру, що є додатковим резервом підвищення стійкості до зношування і надійної роботи такого інструменту. Остання обставина безпосередньо зв'язана з умовами подачі рідини, що охолоджує, в забій і конструктивними особливостями протокових пазів.

На рис. 19.6 побудовані залежності температури робочої поверхні долота при бурінні піщанику від контактного тиску (а) і швидкості ковзання (б). З рисунку видно, що збільшення технологічних режимів бу-

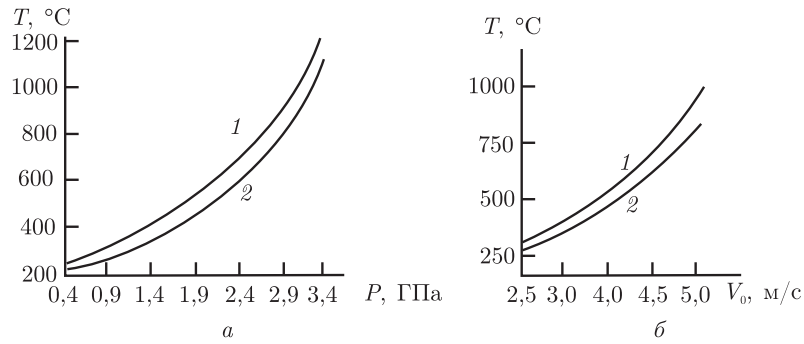


Рис. 19.6: Залежності температури робочої поверхні долота від навантаження (а) і лінійної швидкості обертання (б) при $\theta = 85$ (1) и 66° (2) (умови ті ж, що і на рис. 19.4).

ріння приводить до стрімкого зростання температури робочої поверхні алмазного долота. Тому варто використовувати раціональні режими буріння, які зможуть забезпечити суттєве зменшення зношування коштовних інструментів за рахунок зниження впливу температури на матеріал композиту. Таким образом, в этом пункті представлений розв'язок змішаної нестационарної задачі теплопровідності для алмазного долота в сферичних координатах при складних умовах теплообміну. Отриманий розв'язок дозволяє визначати тепловий стан алмазного долота в процесі буріння нафтових і газових свердловин і аналізувати його в залежності від концентрації і зернистості алмазів, теплофізичних властивостей композиту і його складових, відносного значення коефіцієнта теплообміну, режимів буріння, радіальної і кутової координат профілю.

19.2 Абразивне зношування алмазного долота

Для абразивного зношування алмазного долота використовуємо експериментальну залежність швидкості зношування від тиску p і лінійної швидкості обертання v [71]:

$$\frac{dw}{dt} = K_w p^{m_i} v^{n_i}, \quad (19.41)$$

де $w(t)$ — лінійне зношування за напрямком координати r ; K_w — коефіцієнт зношування. Інтегрування (19.41) спрощується, якщо прийняти

$m_i = 1, n_i = 1$, коефіцієнт зношування

$$K_w = k_1 + k_2 T(t, r_2, \mu), \quad (19.42)$$

нормальний тиск

$$p = P / \cos \theta = P / \mu, \quad (19.43)$$

і лінійна швидкість

$$v = \omega(r_2 - w) \sin \theta = \omega(r_2 - w) \sqrt{1 - \mu^2}. \quad (19.44)$$

Тоді рівняння (19.41) для визначення лінійного зношування алмазного долота має вигляд

$$\frac{dw}{dt} = (k_1 + k_2 T(t)) \omega P (r_2 - w) \sqrt{1/\mu^2 - 1}. \quad (19.45)$$

Інтегрування (19.45) дає

$$w(t) = r_2 \left(1 - \exp \left(- \omega P \sqrt{1/\mu^2 - 1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_0^t (k_1 + k_2 T(t, r_2, \mu)) dt \right) \right). \quad (19.46)$$

Врахуємо в (19.46) розв'язок задачі теплопровідності (19.16), (19.40)

$$w(\tau s) = r_2 \left(1 - \exp \left(- \omega P \sqrt{1/\mu^2 - 1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(k_1 t + k_2 \tau \sum_{l=0}^s \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} a_{nm}^l \Phi_{nm}(1, \mu) \right) \right) \right), \quad (19.47)$$

де $t = \tau s$, τ – крок по времени; $s = 0, 1, \dots$

Досліджувалися алмазні долота ІСМ-214,3 Т, які оснащені буровими вставками однакових розмірів (діаметром 10 мм, висотою 10 мм і початковою товщиною алмазовмісного шару $h_a = 3$ мм) двох різних складів. Бурові вставки першого типу отримані на основі вихідної шихти (в мас. %) алмаз–твердий сплав WC–6Co — долото 1, другого —

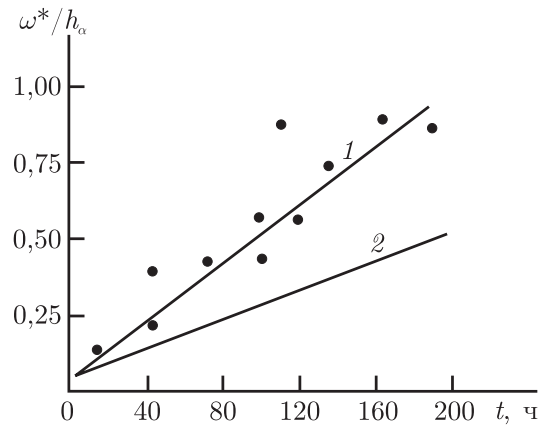


Рис. 19.7: Залежність зношування долот 1 и 2 від часу буріння при наступних умовах: $\lambda_2 = 1000$ Вт/(м·К), $\lambda_1 = 40$ Вт/(м·К), $p = 0,05$ ГПа, $v = 4$ м/с, $\theta = 90^\circ$, $\alpha = 3,5$ кВт/(м²·К), $K = 100$ % и $Z = 800/630$ (— и • — розрахункові і експериментальні дані).

алмаз–твердий сплав WC–6Co з добавками у вихідну суміш порошків CrB₂–W₂B₅ (диборид хрому–пентаборид дивольфраму) у незначних кількостях по відношенню до основних компонентів — долото 2. В обох випадках використані природні алмази. Контрольні розрахунки проведені при бурінні піщанику при наступних вихідних даних: коефіцієнти теплопровідності алмазів $\lambda_2 = 400 \div 1400$ Вт/(м·К) і матеріалу композиту $\lambda_1 = 20 \div 80$ Вт/(м·К); відносна концентрація алмазів $K = 75 \div 125$ % (що відповідає 3,3–5,5 карата алмазів на 1 см³ шихти); зернистість алмазов $Z = 500/400 \div 1250/1000$; відносне значення коефіцієнта теплообміну $\alpha = 75 \div 125$ кВт/(м²·К); кутова координата $\omega = 10 \div 90^\circ$; контактний тиск забою свердловини на ріжучі алмази $p = 0,01 \div 3,5$ ГПа (відношення осьового навантаження на долото до загальної площі ріжучих алмазів); лінійна швидкість обертання $v = 2,5 \div 5,0$ м/с.

На рис. 19.7 приведені графіки залежності зношування алмазних долот двох типів при бурінні піщанику від часу, які отримані в результаті розрахунків. Їх аналіз показує, що зношування долот 1 и 2 досить швидко виходить на квазістаціонарний режим і суттєво залежить від хімічного складу. Так, при однакових значеннях концентрації і зернистості алмазов швидкість зношування алмазного долота 2 більше, ніж

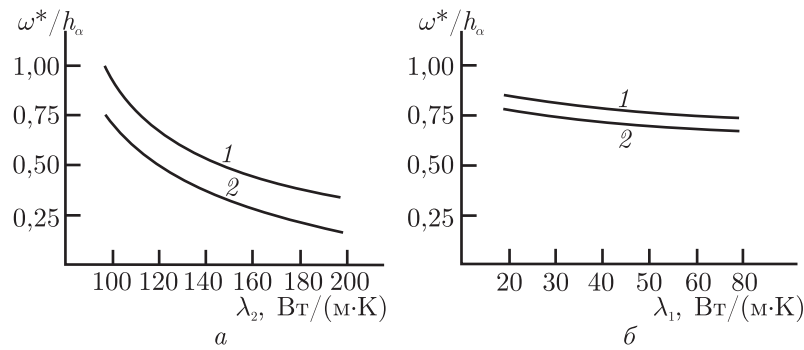


Рис. 19.8: Залежність зношування алмазного долота від коефіцієнтів теплопровідності алмазів (*а*) і композиту (*б*) в процесі буріння піщанику при $\theta = 70$ (1) и 50° (2) для $p = 0,05$ ГПа, $\alpha = 3,5$ кВт/(м²·К), $K = 100$ %, $Z = 800/630$; $t = 200$ ч, $v = 4$ м/с: *а* — $\lambda_1 = 40$ Вт/(м·К), *б* — $\lambda_2 = 1000$ Вт/(м·К).

в два рази менше аналогічного параметру долота 1 (рис. 19.7). Аналіз цих результатів показує, що введення у вихідну шихту добавок дибориду хрому CrB_2 і пентадибору вольфраму W_2B_5 покращує фізико-механічні властивості і структуру композиту і, тем самим, сприяє зменшенню зношування 2. Співпадання розрахункових значень з експериментальними даними [71] свідчить про точність і адекватність запропонованої моделі. Зношування алмазного бурового долота суттєво залежить від теплопровідності λ_i складових композиту (рис. 19.8). Так, при збільшенні коефіцієнта теплопровідності алмазів λ_2 от 400 до 1200 Вт/(м·К) спостерігається суттєве зменшення зношування такого інструменту (рис. 19.8, *а*). Подальше його збільшення вже не впливає так сильно, хоча і приводить до незначного зменшення зношування. Збільшення коефіцієнта теплопровідності матеріалу композита λ_1 від 20 до 80 Вт/(м·К) також сприяє зменшенню зношування долота (рис. 19.8, *б*). Тому для підвищення стійкості до зношування бурових долот необхідно підвищувати теплофізичні характеристики як алмазів, так і матриці в цілому. В свою чергу теплопровідність природних алмазів можна збільшити за рахунок їх оваліації, тобто використовуючи спеціальну обробку, що дозволяє зменшити у них мікротріщини і сколи. Збільшення теплопровідності матеріалу композиту алмаз–твердий сплав WC–6Co залежить від $p - T - t$ умов спікання, що забезпечує щільний контакт алмаз–матриця. Залежність зношу-

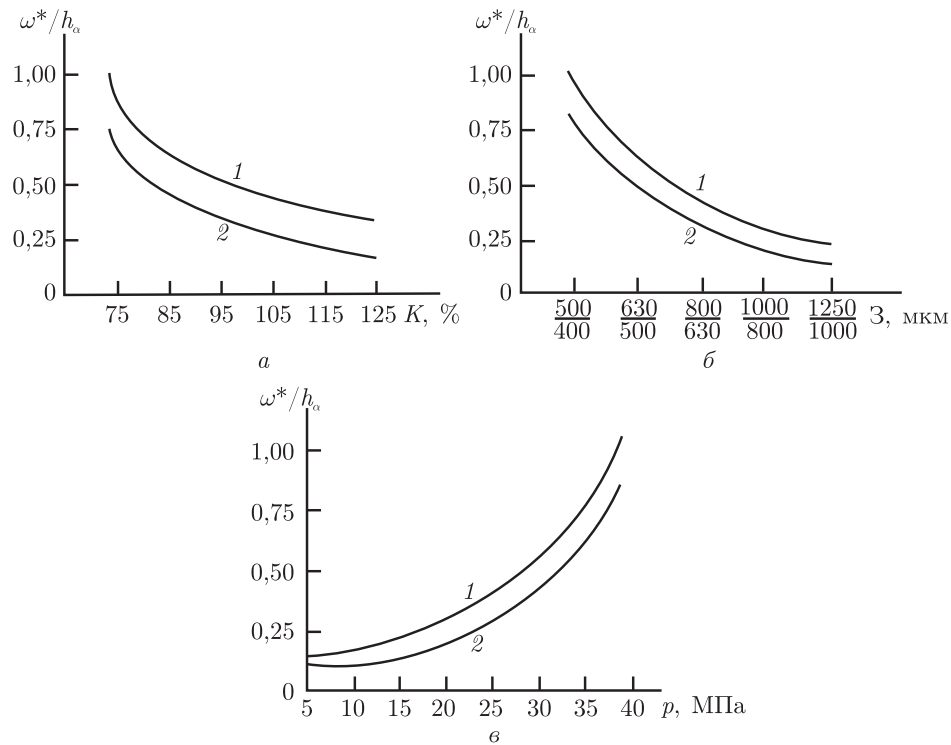


Рис. 19.9: Залежність зношування алмазного долота від концентрації алмазів (а), зернистості (б) при $\theta = 50$ (1) і 35° (2) і контактного тиску (в) при $\theta = 66$ (1) і 50° (2) в процесі буріння піщанику для $\alpha = 3,5$ кВт/(м²·К), $t = 200$ ч, $v = 4$ м/с, $\lambda_2 = 1000$ Вт/(м·К), $\lambda_1 = 40$ Вт/(м·К): а — $Z = 800/630$, $p = 0,05$ ГПа; б — $K = 100$ %, $p = 0,05$ ГПа; в — $Z = 800/630$.

вання долота від концентрації алмазів K (рис. 19.9, а), зернистості Z (рис. 19.9, б) і контактного тиску p (рис. 19.9, в) адекватні реальним результатам. Використовуючи отримані результати (рис. 19.9, а, б) і враховуючи вартість природних алмазів, доцільно використовувати в композитах концентрацію алмазів $K = 100$ % з зернистістю 800/630–1000/800. Зростання технологічних режимів буріння призводить до значного зношування долота (рис. 19.9, в), тому варто оптимізувати режими буріння. Відмітимо, що зношування суттєво залежить від кутової координати θ (рис. 19.10, а). Це пояснюється, в першу чергу, різними лінійними швидкостями ковзання ріжучих елементів на поверхні долота, що і приводить до нерівномірного зношування. Для забезпечення рівномірного зношування інструменту необхідно його периферійну робочу поверхню оснащувати більшою кількістю бурових вставок. На кінетику зношування впливає

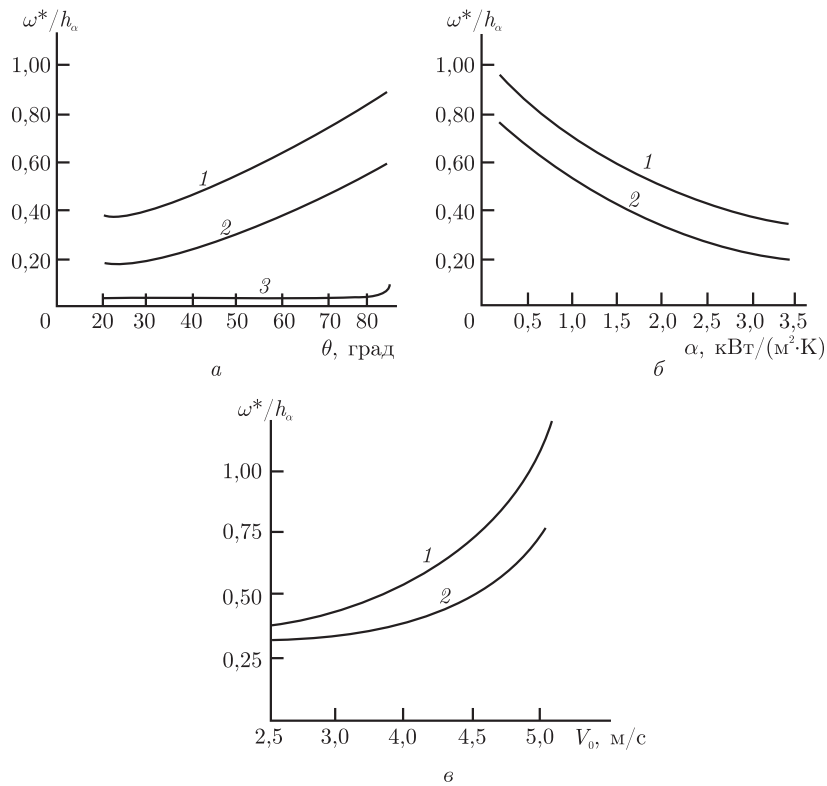


Рис. 19.10: Залежність зношування долота від кутової координати (а) при $t = 200$ (1), 100 (2) і 0,5 год (3), відносного значення коефіцієнта теплообміну (б) при $\theta = 85$ (1) і 66° (2) і швидкості обертання (в) при $\theta = 66$ (1) і 50 (2) в процесі буріння піщанику для $\lambda_2 = 1000$ Вт/(м·К), $\lambda_1 = 40$ Вт/(м·К), $K = 100$ %, $Z = 800/630$, $p = 0,05$ ГПа: а — $\alpha = 3,5$ кВт/(м²·К), $v = 4$ м/с; б — $t = 200$ ч, $v = 4$ м/с; в — $t = 200$ ч, $\alpha = 3,5$ кВт/(м²·К).

і відносно значення коефіцієнта теплообміну α (рис. 19.10, б) і швидкості обертання v (рис. 19.10, в). Збільшення коефіцієнта теплообміну α сприяє зменшенню зношування долота за рахунок зниження температури і відводу зруйнованої гірської породи з забою свердловини. Збільшення швидкості обертання долота призводить до збільшення температури на робочій поверхні і, як наслідок для даної конструкції інструменту, до додаткового зношування (рис. 19.10, в).

Таким чином, на основі проведених досліджень маємо наступні висновки.

1. Зношування алмазних бурових долот є наслідком процесів, які відбуваються як на контактні взаємодіючих поверхонь, так і при спіканні

надтвердого композиційного матеріалу.

2. Зношування алмазного долота суттєво залежить від теплопровідності алмаза і матеріала композиту, концентрації і зернистості алмазів і передісторії кристалів алмаза, кутової і радіальної координат профіля, відносного значення коефіцієнта теплообміну і параметрів буріння.

3. Причинами нерівномірного зношування долота є різні швидкості, контактні температури і тиск на робочій поверхні інструменту.

4. Зношування алмазного долота суттєво залежить від хімічного складу складових матриці композиту. Было показано, что введення CrB_2 – W_2B_5 у вихідну шихту зменшує зношування долота понад двох разів.

5. Для більш глибокого дослідження причин зміни зношування і явищ, які відбуваються навколо цього процесу, необхідно удосконалювати і розвивати запропоновані підходи. Один из них представимо в наступному пункті.

19.3 Зношування алмазного долота з врахуванням контакту

В работах І.Г. Горячевої процеси зношування вивчаються при контакті тіл (наприклад, кільцевий штамп, який обертається, на границі пружнього півпростору) за співвідношенням

$$w(x, y, t) + w_*(x, y, t) = \eta(t) + f(x, y), \quad (19.48)$$

де $z = f(x, y)$ — форма контактуючої поверхні, $\eta(t)$ — переміщення штампу вздовж осі z , $w(x, y, t)$ — пружні переміщення границі основи в напрямку осі z , $w_*(x, y, t)$ — переміщення точок основи за рахунок зношування по осі z . В работе В.М.Александрова до такого підходу додані термopужні переміщення границі основи штампу на шершавому півпростору з врахуванням тепловиділенням від тертя і абразивного зношування при обертанні кільцевого штампу. Огляд і література детально приведені нами в монографії [71].

При дослідженні зношування сферичного долота зробимо насту-

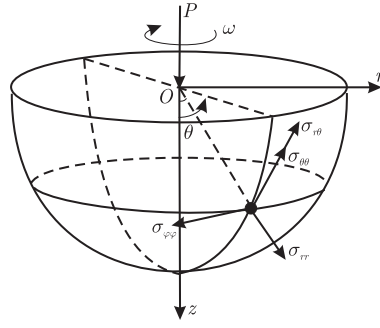


Рис. 19.11: Схема контакту алмазного долота з породою в сферичній системі координат; P — вертикальне навантаження; ω — кутова швидкість обертання; σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{\varphi\varphi}$ — компоненти загальних термопружних напружень; $\mu = \cos \theta$.

пні припущення. Як правило, час неперервної роботи сферичного долота складає 200–400 годин в залежності від його властивостей і породи. Тому при невеликих значеннях часу для контактної задачі можна знехтувати як переміщенням точок основи долота за рахунок зношування, так і переміщенням долота вздовж осі z . Тут нас, в першу чергу, будуть цікавити контактні радіальні напруження σ_{rr} з метою використання їх для інтегрування рівняння (19.41). З цими напруженнями за законом Кулона зв'язані і дотичні напруження на поверхні долота

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r_2, \theta, t) = k\sigma_{rr}(r_2, \theta, t), \quad (19.49)$$

де k — коефіцієнт тертя. Контактне навантаження $\sigma_{\varphi\varphi}(r_2, \theta, t)$ виконує в одиницю часу роботу

$$Q(\theta, t) = \omega r_2 k \sigma_{rr}(r_2, \theta, t), \quad (19.50)$$

переважна частина якої йде на тепловиділення. Тому на границі долото–порода використаємо для задачі теплопровідності умову ідеального контакту з тепловиділенням.

Розглядаємо в сферичній системі координат сферичне долото $\Omega_1 = \{(r, \varphi, \theta) | r \in [0, r_2], \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi/2]\}$, яке знаходиться в півпросторі $\Omega_2 = \{(r, \varphi, \theta) | r \in (r_2, +\infty), \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi/2]\}$ (рис. 19.11). При цьому умови симетричні відносно осі z , тобто не залежать від кута φ .

Щоб знайти температуру і термопружні напруження в області контакту, необхідно розв'язати зв'язану осесимметричну задачу термопружності для сферичного долота:

$$\frac{1}{\kappa_i} \frac{\partial T_i}{\partial t} = \Delta T_i, \quad t > 0, \quad i = 1, 2, \quad (19.51)$$

$$T_p(\theta, t) = T_1(r_2, \theta, t) = T_2(r_2, \theta, t), \quad \theta \in [0, \pi/2), \quad (19.52)$$

$$\left(\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} - \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_2} = \alpha(T_p(\theta, t) - T_l) + Q(\theta, t),$$

$$\theta \in [0, \pi/2), \quad (19.53)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial \theta} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \theta = \pi/2, \quad r \in [0, +\infty), \quad (19.54)$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{\theta\varphi} = 0, \quad \sigma_{rr} = \bar{\sigma}_{rr} + \bar{\bar{\sigma}}_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \bar{\sigma}_{\theta\theta} + \bar{\bar{\sigma}}_{\theta\theta},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} + \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi}, \quad \sigma_{r\theta} = \bar{\sigma}_{r\theta} + \bar{\bar{\sigma}}_{r\theta}, \quad \varepsilon_{kj} = \bar{\varepsilon}_{kj} + \bar{\bar{\varepsilon}}_{kj}. \quad (19.55)$$

Тут $i = 1$ відноситься до сферичного долота, $i = 2$ — до півпростору; σ_{kj} и ε_{kj} — відповідно напруження і деформації; доданки з однією рискою виражаються через термопружний потенціал Φ :

$$\Delta \Phi = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T (T - T_l), \quad (19.56)$$

а доданки з двома рисками задовольняють умови рівноваги в сферичній системі координат:

$$\frac{\partial \bar{\bar{\sigma}}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\bar{\sigma}}_{r\theta}}{\partial \theta} + 2\bar{\bar{\sigma}}_{rr} - \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} - \bar{\bar{\sigma}}_{\theta\theta} + \bar{\bar{\sigma}}_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta \right) +$$

$$+ \gamma \omega^2 r \sin^2 \theta = 0, \quad (19.57)$$

$$\frac{\partial \bar{\bar{\sigma}}_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \bar{\bar{\sigma}}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + (\bar{\bar{\sigma}}_{\theta\theta} - \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\bar{\bar{\sigma}}_{r\theta} \right) +$$

$$+ \gamma \omega^2 r \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (19.58)$$

Співвідношення для деформацій через переміщення мають вигляд

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \bar{\bar{\varepsilon}}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \bar{\bar{\varepsilon}}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} (u_r + u_\theta \operatorname{ctg} \theta), \quad (19.59)$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right), \quad \bar{\bar{\varepsilon}}_{r\varphi} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{\theta\varphi} = 0; \quad (19.60)$$

а для напругень —

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{rr} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\bar{\bar{\varepsilon}}_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right), \\ \bar{\bar{\sigma}}_{\theta\theta} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\bar{\bar{\varepsilon}}_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right), \end{aligned} \quad (19.61)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1+\nu} \left(\bar{\bar{\varepsilon}}_{\varphi\varphi} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right), \\ \bar{\bar{\sigma}}_{r\theta} &= \frac{E}{1+\nu} \bar{\bar{\varepsilon}}_{r\theta}, \quad \bar{\bar{\sigma}}_{r\varphi} = \bar{\bar{\sigma}}_{\theta\varphi} = 0, \end{aligned} \quad (19.62)$$

де E — модуль пружності, ν — коефіцієнт Пуассона,

$$e = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_\theta), \quad (19.63)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (19.64)$$

При дослідженні температурного поля і термопружного стану долота розглянемо стаціонарний режим, який більш за все підходить для дослідження бурових долот.

З врахуванням заміни

$$\rho = \frac{r}{r_2}, \quad \mu = \cos \theta, \quad u_i(\rho, \mu) = \frac{T_i(\rho, \mu) - T_l}{T_k - T_l} \quad (19.65)$$

для такого режиму маємо наступну задачу:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u_i}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial u_i}{\partial \mu} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (19.66)$$

$$u_1(1, \mu) = u_2(1, \mu) = u_*(\mu), \quad \mu \in (0; 1], \quad (19.67)$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \rho} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\partial u_1}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=1} = h u_*(\mu) + q_0 \sigma_{rr}(1, \mu), \quad \mu \in (0, 1], \quad (19.68)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \mu} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \mu = 0, \rho \in [0, +\infty), \quad (19.69)$$

де

$$h = \frac{\alpha_T r_2}{\lambda_2}, \quad q_0 = \frac{\omega r_2^2 k}{\lambda_2 (T_k - T_l)}. \quad (19.70)$$

До цієї задачі застосуємо скінченне парне перетворення Лежандра по змінній μ :

$$\bar{u}_{i,2n}(\rho) = \int_0^1 u_i(\rho, \mu) P_{2n}(\mu) d\mu \quad (19.71)$$

з формулою обертання

$$u_i(\rho, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \bar{u}_{i,2n}(\rho) P_{2n}(\mu). \quad (19.72)$$

В результаті отримаємо допоміжну задачу

$$\frac{d^2 \bar{u}_{i,2n}}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\bar{u}_{i,2n}}{d\rho} - \frac{2n(2n+1)}{\rho^2} \bar{u}_{i,2n} = 0, \quad i = 1, 2, \quad (19.73)$$

$$\bar{u}_{1,2n}(1) = \bar{u}_{2,2n}(1) = \bar{u}_*, \quad (19.74)$$

$$\left(\frac{d\bar{u}_{2,2n}}{d\rho} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{d\bar{u}_{1,2n}}{d\rho} \right) \Big|_{\rho=1} = h\bar{u}_* + q_0 b_{2n}, \quad (19.75)$$

де

$$b_{2n} = \int_0^1 \sigma_{rr}(1, \mu) P_{2n}(\mu) d\mu. \quad (19.76)$$

Розв'язок рівняння (19.73) представимо у вигляді

$$\bar{u}_{1,2n} = A_{2n} \rho^{2n}, \quad \rho \in [0, 1), \quad (19.77)$$

$$\bar{u}_{2,2n} = B_{2n} \rho^{-(2n+1)}, \quad \rho \in (1, \infty). \quad (19.78)$$

Тут коефіцієнти A_{2n} и B_{2n} знаходимо з умов (19.74), (19.75):

$$A_{2n} = B_{2n}, \quad -(2n+1)B_{2n} - 2n \frac{\lambda_1}{\lambda_2} A_{2n} = hA_{2n} + q_0 b_{2n}, \quad (19.79)$$

звідки

$$A_{2n} = -\frac{q_0 b_{2n}}{2n+1 + 2n\lambda_1/\lambda_2 + h}. \quad (19.80)$$

Тоді температурне поле алмазного долота

$$u_1(\rho, \mu) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_0 b_{2n} \rho^{2n} P_{2n}(\mu)}{2n(1 + \lambda_1/\lambda_2) + h + 1}. \quad (19.81)$$

Термопружний потенціал $\Phi(\rho, \mu)$ визначаємо з рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \right) = \\ = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T r_2^2 (T_k - T_l) u_1(\rho, \mu), \end{aligned} \quad (19.82)$$

де α_T — лінійний коефіцієнт температурного розширення.

Частинний розв'язок рівняння (19.82) шукаємо у вигляді

$$\tilde{\Phi}(\rho, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} P_{2n}(\mu). \quad (19.83)$$

Підставляючи (19.83) в (19.82), після розв'язку рівняння отримаємо термопружний потенціал

$$\tilde{\Phi}(\rho, \mu) = \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \alpha_T r_2^2 (T_k - T_l) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n + 1}{2(4n + 3)} A_{2n} \rho^{2n+2} P_{2n}(\mu). \quad (19.84)$$

Температурні напруження визначаємо за формулами

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{E}{(1 + \nu)r_2^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \rho^2} - \Delta \tilde{\Phi} \right) = \quad (19.85)$$

$$= \frac{E}{1 - \nu} \alpha_T (T_k - T_z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n + 1)(4n^2 - 2n - 4)}{4n + 3} A_{2n} \rho^{2n} P_{2n}(\mu),$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{E}{(1 + \nu)r_2^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \theta^2} - \Delta \tilde{\Phi} \right) = -\frac{E}{1 - \nu} \alpha_T (T_k - T_z) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n + 1}{4n + 3} A_{2n} \rho^{2n} ((2n + 2)^2 P_{2n}(\mu) - \mu P'_{2n}), \end{aligned} \quad (19.86)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\varphi\varphi} = \frac{E}{(1 + \nu)r_2^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \rho} + \frac{\mu}{\rho^2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mu} - \Delta \tilde{\Phi} \right) = -\frac{E}{1 - \nu} \alpha_T (T_k - T_z) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n + 1}{4n + 3} A_{2n} \rho^{2n} ((6n + 4) P_{2n}(\mu) - \mu P'_{2n}(\mu)), \end{aligned} \quad (19.87)$$

$$\bar{\sigma}_{r\varphi} = \frac{E}{2(1 + \nu)r_2^2} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \theta} \right) = \quad (19.88)$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu)} \alpha_T (T_k - T_z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+1}{4n+3} A_{2n} \rho^{2n} (2n+1) \sqrt{1-\mu^2} P'_{2n}(\mu).$$

Щоб задовольнити умови рівноваги (19.57), (19.58), виберемо складові напружень $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{rr} = & \frac{E}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} (2n(2n-1)(\rho r_2)^{2n-2} c_{2n} + \\ & + (2n+1)(4n^2-2n-2-2\nu)(\rho r_2)^{2n} d_{2n}) P_{2n}(\mu), \end{aligned} \quad (19.89)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{\theta\theta} = & -\frac{E}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} ((4n^2 P_{2n}(\mu) - \mu P'_{2n}(\mu))(\rho r_2)^{2n-2} c_{2n} + \\ & + ((2n+1)(4n^2+8n+2+2\nu)P_{2n}(\mu) - \\ & - (2n+5-4\nu)\mu P'_{2n}(\mu)) (\rho r_2)^{2n} d_{2n}), \end{aligned} \quad (19.90)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{\varphi\varphi} = & \gamma \omega^2 r^2 (1-\mu^2) + \\ & + \frac{E}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} ((2n P_{2n}(\mu) - \mu P'_{2n}(\mu))(\rho r_2)^{2n-2} c_{2n} + \\ & + ((2n+1)(2n-2-2\nu-8n\nu)P_{2n}(\mu) - \\ & - (2n+5-4\nu)\mu P'_{2n}(\mu)) (\rho r_2)^{2n} d_{2n}), \end{aligned} \quad (19.91)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_{r\theta} = & -\frac{E}{1+\nu} \sum_{n=0}^{\infty} ((2n-1)(\rho r_2)^{2n-2} c_{2n} + \\ & + (4n^2+4n-1+2\nu)(\rho r_2)^{2n}) \sqrt{1-\mu^2} P'_{2n}(\mu). \end{aligned} \quad (19.92)$$

Проектуючи сили на напрям z , отримуємо

$$\begin{aligned} P = & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \int_0^{r_2} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r_2^2 \sin \theta d\theta dr = \\ = & 2\pi r_2^2 \int_0^1 \int_0^1 (\mu \sigma_{rr} - \sqrt{1-\mu^2} \sigma_{r\theta}) d\mu \rho^2 d\rho, \end{aligned} \quad (19.93)$$

а на поверхні долота

$$\int_0^1 (k \sigma_{rr}(r_2, \mu) - \sigma_{r\theta}(r_2, \mu)) d\mu = 0. \quad (19.94)$$

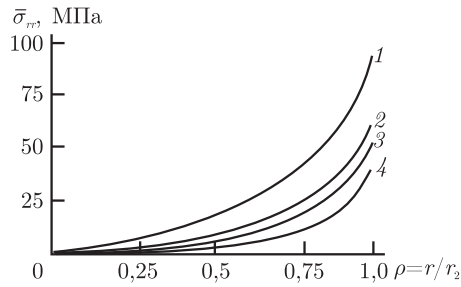


Рис. 19.12: Залежність радіальних температурних напружень $\bar{\sigma}_{rr}$ при бурінні кварцевого піщанику алмазним долотом ІСМ-214,3 Т від радіальної координати r для $\lambda_2 = 120$ Вт/(м·К); $\lambda_1 = 40$ Вт/(м·К); $\alpha_1 = 1,5$ кВт/(м²·К); $P = 12000$ кг; $K = 100$; $Z = 800/630$ мкм і наступних значень кутової швидкості ω , с⁻¹: 6 при $\theta = 36^\circ$ (крива 1); 4 при $\theta = 36^\circ$ (крива 2); 6 при $\theta = 0^\circ$ (крива 3); 4 при $\theta = 0^\circ$ (крива 4).

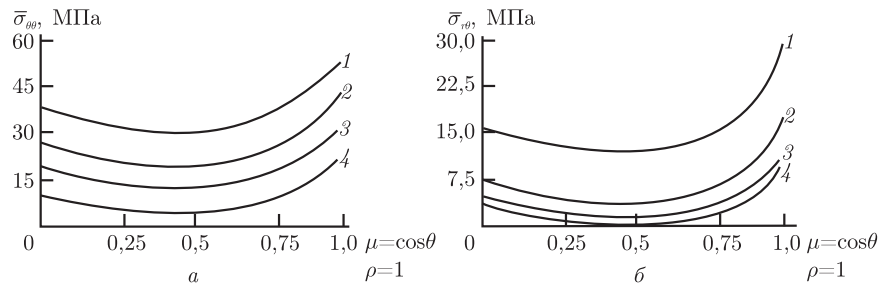


Рис. 19.13: Залежності тангенціальних $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ (а) і дотичних $\bar{\sigma}_{r\theta}$ (б) складових температурних напружень від кутової координати θ при бурінні кварцевого піщанику для $\rho = 1$ і тих самих умов, що і на рис. 19.12.

Особливість цієї задачі заключається в тому, що вона нелінійна в силу умови (19.53), причому самі напруження зависят от температури нелінійно (см. (19.68)). Найбільш прийнятний метод розв'язування такої задачі — ітераційний: напочатку розв'язуємо задачу теплопровідності для півпростору з долотом у вигляді півкулі, потім задачу термопружності, повертаємося до задачі теплопровідності і т. д. Розв'язки цих задач отримуємо у вигляді рядів по поліномах Лежандра і сферичних функціях. Збіжність процесу підтверджена експериментально (10–15 ітерацій).

Для реалізації запропонованого підходу були проведені розрахунки термопружного стану алмазного долота ІСМ-214,3 Т в процесі буріння кварцевого піщанику при наступних вихідних даних. НКМ (покриття): товщина алмазовмісного шару до зношування $h_\alpha = 3$ мм; коефі-

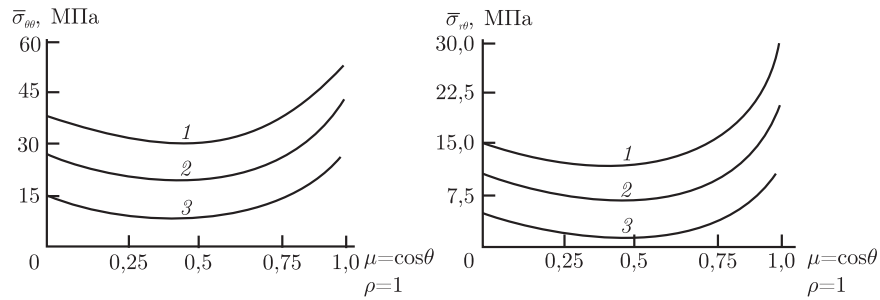


Рис. 19.14: Залежності тангенціальних $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ (а) і дотичних $\bar{\sigma}_{r\theta}$ (б) складових температурних напружень від μ при бурінні кварцевого піщанику долотом ІСМ-214,3 Т при $\beta = 1$, значеннях відносного коефіцієнта теплообміну α_1 , кВт/(м²·К): 1 — 1,5; 2 — 2,5 и 3 — 3,5 і тих самих умов, що і на рис. 19.12.

цієнти теплопровідності матеріалу композиту $\lambda_2 = 120$ Вт/(м·К) і корпусу долота (сталь) $\lambda_1 = 40$ Вт/(м·К); відносна концентрація алмазів $K = 100$ (що відповідає 4,4 каратів алмазів на 1 см³ шихти); зернистість алмазів $Z = 800/630$ мкм; відносне значення коефіцієнта теплообміну $\alpha = 0,5 \div 3,5$ кВт/(м²·К); кутова координата $\theta = 10 \div 80^\circ$; контактний тиск $p = 1 \div 80$ МПа; лінійна швидкість ковзання $v = 2,5 \div 5$ м/с; час буріння $t = 1000$ с; густина композиту $\rho_2 = 14,4$ Г/см³ і корпусу долота $\rho_1 = 1,8$ Г/см³; модуль Юнга $E = 640$ ГПа; границя міцності при стисненні $G = 5,6$ МПа; коефіцієнт Пуасона $\nu = 0,22$; коефіцієнт лінійного розширення $\alpha_T = 7,6 \cdot 10^{-10}$ К⁻¹. Кварцевий піщаник: $E = 0,47$ МПа; $G = 1,45$ МПа; $\nu = 0,25$; $\rho = 2,543$ Г/см³; $\lambda = 2,2$ Вт/(м·К). На рис. 19.12 приведені залежності радіальних температурних напружень σ_{rr} від радіальної координати r при бурінні кварцевого піщанику алмазним долотом ІСМ-214,3 Т для різних значень кутової швидкості v і кутової координати θ , які обчислені за формулою (19.55).

З рисунка видно, що максимальні значення досягаються на границі контакту робоча поверхня долота–гіська порода, вони суттєво залежать від швидкості обертання ω і координати θ . При збільшенні цих параметрів відбувається збільшення теплового потоку і відповідно $\bar{\sigma}_{rr}$. Тангенціальні $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ і дотичні $\bar{\sigma}_{r\theta}$ складові температурних напружень також суттєво залежать від координат ρ і θ (рис. 19.13, а, б). Їх максималь-

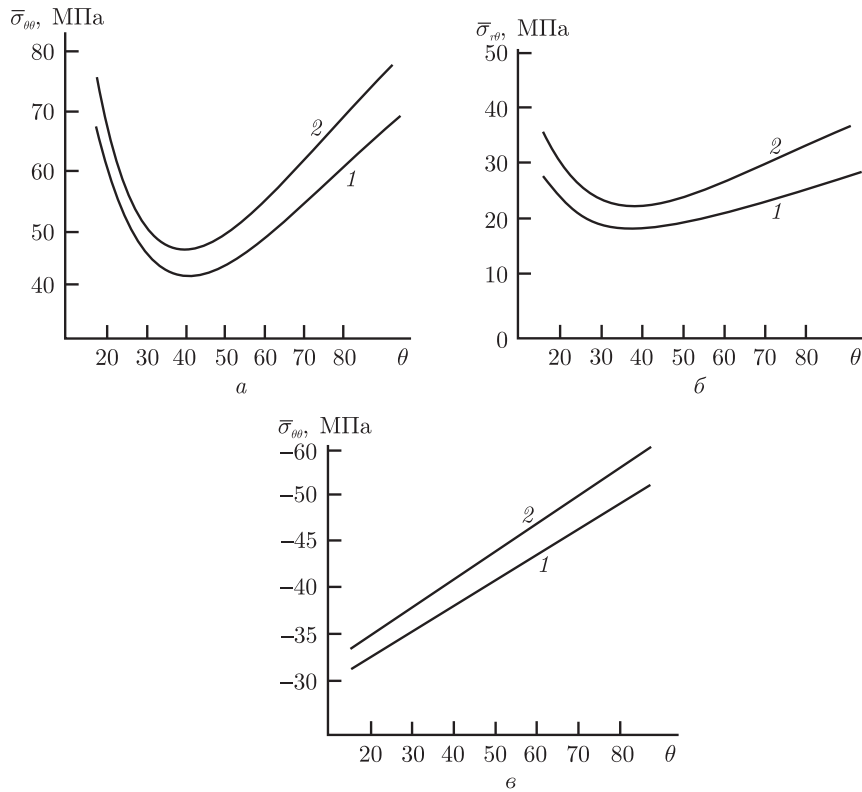


Рис. 19.15: Залежності радіальних (а), дотичних (б) і тангенціальних (в) складових загальних термопружних напружень від кутової координати θ при бурінні граніту (1) і кварцевого піщанику (2) алмазним долотом ІСМ-214,3 для тих самих умов, що і на рис. 19.12.

ні значення при бурінні кварцевого піщанику досягаються на границі контакту долото–порода. На відміну від $\bar{\sigma}_{rr}$ вони мають менші значення і відрізняються характером розподілу за кутовою координатою θ . Найменші значення $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ і $\bar{\sigma}_{r\theta}$ досягаються при $\mu = \cos \theta = 0,5$ (див. 19.14, а і б відповідно). Вони суттєво залежать від кутової швидкості ω , вертикального навантаження P , відносного значення коефіцієнта теплообміну α_1 . Наприклад, при збільшенні α_1 від 1,5 до 3,5 кВт/(м²·К) $\bar{\sigma}_{\theta\theta}$ і $\bar{\sigma}_{r\theta}$ зменшуються більш, ніж в 2 рази для всіх умов буріння.

Для загальних термопружних напружень σ_{ij} зберігаються в принципі ті ж тенденції, що і для температурних $\bar{\sigma}_{ij}$, хоча є і суттєві відмінності. Радіальні σ_{rr} і дотичні $\sigma_{r\theta}$ складові термопружних напружень завжди є стискуючими для всіх умов буріння (рис. 19.15, а, б), а тангенціальні $\sigma_{\theta\theta}$ можуть змінювати знак (рис. 19.15, в). Вони, як і температурні напру-

ження, залежать від кутової θ і радіальної ρ координат, вертикального навантаження P і швидкості ω . Максимальні значення радіальних σ_{rr} і дотичних $\sigma_{r\theta}$ складових загальних термопружних напружень досягаються на робочій поверхні долота при $\theta = 18$ и 90° (див. рис. 19.15, *a* и *б* відповідно), проте $\sigma_{r\theta}$ мають менші значення відносно σ_{rr} . На відміну від σ_{rr} і $\sigma_{r\theta}$ загальні тангенціальні напруження $\sigma_{\theta\theta}$ на робочій поверхні долота при $\theta = 18^\circ$ мають найменші значення (див. рис. 19.14, *в*), і при збільшенні θ вони лінійно зростають і досягають максимальних значень при $\theta = 90^\circ$. Слід відмітити, що при бурінні піщанику загальні термопружні напруження σ_{ij} мають більші значення, ніж при бурінні граніту (див. рис. 19.14, криві *2* і *1* відповідно). Це пов'язано з тим, що абразивні характеристики кварцевого піщанику перевищують аналогічні властивості граніту.

20 Апробація результатів, участь в конференціях, наукове співробітництво тощо

Результати, що ввійшли в підсумковий звіт доповідались виконавцями проекту на ряді міжнародних конференціях. Щодо цілої низки висвітлених тут досягнень проводиться тісне наукове співробітництво з науковцями світу (зокрема, Канади, Італії, Чехії, Англії, Кіпру, Ірану, Польщі тощо).

Силами співробітників відділу за звітний період проведено дві міжнародні конференції: Сьому та Восьму міжнародні конференції “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”, Київ, 2007, 2009 (див. інформацію на інтернет-сайті <http://www.imath.kiev.ua/~appmath/conf.html>) та у 2006 р. проведено конференцію “Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики” до 70-річчя від дня народження В.І. Фущича, за матеріалами якої видано збірник наукових праць [1]. Спільно з факультетом математики і статистики Університету Кіпру проведено 4-й та 5-

й міжнародний вквршопи “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (Протарас, Кіпр, 2008, 2010).

Спільні договори про наукове співробітництво

- 1) з Інститутом фізики Чеської академією наук, Прага, Чехія;
- 2) з факультетом математики та статистики університету Кіпру, Нікосія, Кіпр;
- 3) з факультетом фізики та астрономії університету Палермо, Палермо, Італія;
- 4) з факультетом математики університету Відня, Відень, Австрія;
- 5) з центром математичних досліджень та нелінійних явищ, Новий Сад, Сербія;
- 6) з центром математичних досліджень університету Монреалю, Монреаль, Канада;
- 7) з факультетом математики та статистики університету Саскачевану, Саскатун, Канада.

Наукові візити закордонних учених в Інститут математики

1. І.І. Рижков (Інститут обчислювального моделювання, Красноярськ, Росія), 2006;
2. А. Кадір (Національний університет науки і технологій, Равалпінді, Пакистан), 2006;
3. В.В. Пухначов (Інститут гідродинаміки СВ РАН, Новосибірськ, Росія), 2006.
4. М.В. Павлов (Фізичний інститут ім. П.Н. Лебедєва, Москва, Росія), 2007;
5. М.Г. Марчук (Інститут математики ім. А.В. Стеклова, Москва, Росія), 2010.

Короткотермінові наукові візити

1. Інститут фізики Чеської академії наук, Прага, Чеська Республіка (А.Г. Нікітін, березень, липень, листопад 2006; М.О. Нестеренко, липень–серпень 2006; А.Г. Нікітін, березень, липень, листопад 2007; А.Г. Нікітін, березень, липень, 2008; А.Г. Нікітін, березень та липень 2009; А.Г. Нікітін, липень 2010).
2. Інститут дослідження пустелі Якова Блауштейна, Університет Бен-Гуріона, Ізраїль (О.О. Ванєєва, О.Ю. Жалій, травень 2006).
3. Математичний інститут Обервольфаха, Німеччина (Р.М. Черніга, листопад 2006).
4. Університет Кіпру, Нікосія, Кіпр (О.О. Ванєєва, Н.М. Іванова, Р.О. Попович, вересень 2006; Н.М. Іванова, травень, жовтень, грудень 2007; О.О. Ванєєва, А.Г. Нікітін, Р.О. Попович, жовтень 2007; Н.М. Іванова, жовтень, 2008; Р.О. Попович, листопад 2010; М.О. Нестеренко, грудень 2010).
5. Центр математичних досліджень, Університет Монреалю, Канада (В.М. Бойко, лютий–березень, жовтень–листопад 2006; М.О. Нестеренко, листопад 2006; М.О. Нестеренко, квітень–травень, грудень 2008; М.О. Нестеренко, серпень–вересень 2009; І.А. Єгорченко, січень–лютий 2010).
6. Міжнародний інститут математичної фізики ім. Ервіна Шрьодінгера, м. Відень, Австрія (Н.М. Іванова, листопад–грудень 2006; М.О. Нестеренко, жовтень–листопад 2008).
7. Університет Вікторії, Канада (М.О. Нестеренко, листопад 2007 року).
8. Інститут біокібернетики ПАН, Польща (Р.М. Черніга, травень 2006; Р.М. Черніга, липень 2007; Р.М. Черніга, липень 2008; Р.М. Черніга, жовтень 2009; Р.М. Черніга, липень 2010).

9. Лабораторія фізики від CNRS при Університеті ім. Анрі Пуанкаре, Нансі, Франція (Р.М. Черніга, червень 2008; Р.М. Черніга, травень 2009;).
10. Університет м. Палермо, Італія (А.Г. Нікітін, грудень, 2008; А.Г. Нікітін, С.В. Спічак, лютий, 2010).
11. Інститут прикладної математики у науці та інженерії Університету Кастілла-Ла Манчі, Сіудад Реал, Іспанія (Н.М. Іванова, липень, 2008).
12. Університет м. Ахен, Німеччина (С.В. Спічак, грудень 2009).
13. Сектор математичної фізики Фізичного інституту РАН, Москва (Р.М. Черніга, грудень, 2009).
14. Чеський технічний університет у Празі, Чеська Республіка (М.О. Нестеренко, червень 2010).
15. Університет Саскачеваня, Саскатун, Канада (О.О. Ванєєва, жовтень 2010).
16. Університет Відня, Відень, Австрія (Р.О. Попович, жовтень–листопад, 2008; В.М. Бойко, серпень 2010; А.Г. Нікітін, грудень 2010).

Наукове стажування

1. Наукове стажування у університеті міста Нікосія, Кіпр (Н.М. Іванова, 2009–2010).
2. Наукове стажування в університеті Британської Колумбії, Ванкувер, Канада (Н.М. Іванова, 2006).
3. Наукове стажування в Віденському університеті, Австрія (Р.О. Попович, 2006–2007, 2009–2010).
4. Наукове стажування в Центрі математичних досліджень університету м. Монреаль, Канада (М.О. Нестеренко, 2007).

Міжнародні та національні відзнаки, гранти, стипендії, тощо

1. Медаль імені Ернста Маха Академії наук Чеської республіки (А.Г. Нікітін, 2006).
2. NATO Reintegration Grant NUKR.RIG 982038 (О.Ю. Жалій, 2006–2008).
3. Інтас-грант для аспірантів № 04-83-3217 (М.О. Нестеренко, 2006–2007).
4. Грант Президента України для підтримки наукових досліджень молодих вчених GP/F11/0061 (О.Ю. Жалій, Н.М. Іванова, М.О. Нестеренко, 2006).
5. Стипендія Президії НАН України для молодих вчених (Н.М. Іванова, 2006–2007).
6. Дослідницький грант Міжнародного інституту математичної фізики ім. Ервіна Шрьодінгера, м. Відень, Австрія (Н.М. Іванова, 2006).
7. Грант Lise Meitner, проект M923-N13, математичний факультет Віденського університету, Австрія (Р.О. Попович, 2006-2008).
8. Стипендія для молодих вчених Інституту Ервіна Шрьодінгера (М.О. Нестеренко, 2008).
9. Грант президента України для підтримки наукових досліджень молодих вчених GP/F26/0005 (О.О. Ванєєва, Н.М. Іванова, О.В. Курікша, М.О. Нестеренко, 2008).
10. Стипендія Президента для молодих вчених НАН України (Н.М. Іванова, 2008–2010).
11. Премія Верховної Ради України найталановитішим молодим ученим (Н.М. Іванова, О.Ю. Жалій, 2009).
12. Стипендія Президії НАН України для молодих вчених (М.О. Нестеренко, 2010).
13. Премія НАН України ім. М.М. Крилова (А.Г. Нікітін, 2010).

14. Премія Президента України для молодих вчених (О.О. Ванєєва, М.О. Нестеренко, 2010).

Участь у конференціях та наукових школах

За 2006–2010 рік співробітниками відділу зроблено понад 80 наукових доповідей на міжнародних конференціях.

21 Педагогічна діяльність, підготовка кадрів

Педагогічна діяльність

Нікітін А.Г.	Київський національний університет імені Тараса Шевченка	2006–2010
Бойко В.М.	Київський національний університет імені Тараса Шевченка	2006
Магда О.В.	Київський Національний економічний університет	2006
Р.М. Черніга	Інституту кібернетики Міжрегіональної Академії управління персоналом	2006–2009
Р.М. Черніга	Волинський національний університет ім. Л. Українки	2009–2010
Спічак С.В.	Національна академія управління	2007
Жуковський О.М.	Національна академія управління	2008–2010

Підготовка кадрів, д-р фіз.-мат. наук

Попович Р.О.	Класифікаційні задачі групового аналізу диференціальних рівнянь наук. конс. А.М. Самойленко	2009
--------------	---	------

Підготовка кадрів, канд. фіз.-мат. наук

Баранник Т.А.	Симетрія і точні розв'язки нелінійних дифузійних рівнянь наук. керів. А.Г. Нікітін	2006
Галкін О.В.	Парасупергрупа Пуанкаре та релятивістські хвильові рівняння наук. керів. А.Г. Нікітін	2006
Нестеренко М.О.	Контракції та реалізації алгебр Лі наук. керів. А.Г. Нікітін	2007
Ванеєва О.О.	Групова класифікація та некласичні симетрії рівнянь реакції-дифузії наук. керів. Р.О. Попович	2008
Плюхін О.Г.	Умовні симетрії та точні розв'язки систем типу реакції-дифузії зі степеневими коефіцієнтами дифузії наук. керів. Р.М. Черніга	2009

22 Публікації

В рамках проекту опубліковано 1 монографії, 1 збірник наукових праць, 143 наукових роботи, оформлено 1 патент на винахід. Перелік публікацій додається.

- [1] Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики (до 70-річчя від дня народження Вільгельма Ілліча Фушича) / Під ред. В.М. Бой-

- ко, А.Г. Нікітін, Р.О. Попович // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 2. — 400 с.
- [2] Бондаренко Н.А. Анализ основных теорий спекания материалов. 2. Химические реакции и процессы зародышеобразования. Основные положения моделирования спекания сверхтвердых композиционных алмазосодержащих материалов (обзор) / Н.А. Бондаренко, А.Н. Жуковский, В.А. Мечник // Сверхтвердые материалы. — 2006. — № 1. — С. 3–15.
- [3] Бондаренко Н.А. Температурное состояние алмазных буровых долот / Н.А. Бондаренко, А.Н. Жуковский, В.А. Мечник // Доп. НАН України. — 2006. — № 10. — С. 95–102.
- [4] Бондаренко Н.А. Исследование износа алмазных буровых долот. 1. Свойства, классификация и особенности рассматриваемой проблемы / Н.А. Бондаренко, А.Н. Жуковский, В.А. Мечник // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. — 2006. — № 1. — С. 49–56.
- [5] Бондаренко Н.А. Исследование износа алмазных буровых долот. 2. Нестационарная задача теплопроводности для алмазного бурового долота в процессе его работы / Н.А. Бондаренко, А.Н. Жуковский, В.А. Мечник // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. — 2006. — № 2. — С. 54–58.
- [6] Бондаренко Н.А. Температурное состояние долота, оснащенного сверхтвердыми материалами при работе в экстремальных условиях / Н.А. Бондаренко, А.Н. Жуковский, В.А. Мечник // Четвертая междунар. конф. “Материалы и покрытия в экстремальных условиях исследования, применение, экологически чистые технологии производства и утилизации изделий” (18–22 сент. 2006 г., Кацивели, Крым). — Киев: ИПМ АН Украины, 2006. — С. 103.
- [7] Ванеєва О.О. Групова класифікація рівнянь реакції-дифузії зі змінними коефіцієнтами та квадратичною нелінійністю / О.О. Ванеєва //

- Збірник праць Інституту математики НАН України. — **3**, №. 2. — 2006. — С. 49–62.
- [8] Гапонова О. Системи ЗДР другого порядку інваріантні відносно низькорозмірних алгебр Лі / О. Гапонова, М. Нестеренко // Збірник праць Інституту математики НАН України — 2006. — **3**, 2. — С. 71–91.
- [9] Єгорченко І.А. Редукція багатовимірного нелінійного рівняння д'Аламбера до двовимірних рівнянь: анзици, сумісність умов редукції / І.А. Єгорченко // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 2. — С. 81–95.
- [10] Жалій О.Ю. Про інтегровні тривимірні квантово-механічні системи в магнітному полі / О.Ю. Жалій // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 2. — С. 113–123.
- [11] Карагодов В.П. Однозначна розв'язність задач термоконвекції при крайових умовах другого та третього роду і метод ітерацій для їх розв'язування / В.П. Карагодов. — Київ, 2006. — 39 с. — (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 2006.3).
- [12] Лагно В.И., Спичак С.В. Предварительная групповая классификация квазилинейных уравнений эллиптического типа / В.И. Лагно, С.В. Спичак // Труды международной конференции “Современные методы в физико-математических науках” (Орловский Государственный университет, Россия) — 2006. — **1**. — С. 79–83.
- [13] Лёгенький В.И. рі-теорема в задачах параметрической редукции динамических систем equations / В.И. Лёгенький // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 2. — С. 187–196.
- [14] Лёгенький В.И. Исследование нелинейных управляемых систем второго порядка методом характеристического продолжения / В.И. Лёгенький // Тезисы докладов IX Международного семинара “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления” им.

- Е.С. Пятницкого (Москва, ИПУ РАН, 31 мая – 2 июня 2006 г.). — Москва: Изд-во ИПУ РАН, 2006. — С. 148—150.
- [15] Лёгенький В.И. О минимально-параметрических моделях в динамике полета / В.И. Лёгенький // Тезисы докладов V Международного аэрокосмического конгресса IAS'06 (Москва, 27–31 августа 2006 г.). — Москва: Изд-во МГТУ им. К.Э. Циолковского, 2006. — С. 70–71.
- [16] Магда О.В. Про групові властивості квазілінійних рівнянь гіперболічного типу / О.В. Магда // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 2006. — № 1. — С. 99–108.
- [17] Магда О.В. Симетрійна класифікація одного класу хвильових рівнянь / О.В. Магда // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 2. — С. 201–210.
- [18] Магда О.В. Інваріантність одного класу квазілінійних рівнянь відносно п'ятивимірних алгебр Лі / О.В. Магда // Матеріали XI міжнародної наукової конференції імені М. Кравчука (Київ, 18–20 травня 2006 р.). — 2006. — С. 197.
- [19] Новиков Н.В. Влияние диффузии и химических реакций на структуру и свойства буровых вставок. 1. Кинетическое описание систем Салмаз – ВК6 и Салмаз – (ВК6 – CrB_2 – W_2B_5 / Н.В. Новиков, Н.А. Бондаренко, А.Н. Жуковский и др. // Физ. мезомеханика. — 2006. — **9**, № 1. — С. 61–68.
- [20] Новиков Н.В., Бондаренко Н.А., Жуковский А.Н., Мечник В.А. Влияние диффузии и химических реакций на структуру и свойства буровых вставок. 2. Результаты аттестации структурного состояния сверхтвердых материалов состава алмаз – твердый сплав ВК6 / Н.В. Новиков, Н.А. Бондаренко, А.Н. Жуковский и др. // Физ. мезомеханика. — 2006. — **9**, № 2. — С. 107–116.
- [21] Пат. 63469 А Україна. МПК 51(2006) B22F7/02, E21B10/46, C04B35/52, B32B7/02. Алмазно-твердосплавна пластина / М.В. Но-

- віков, І.Й. Рибчич, Є.І. Крижанівський, М.О. Бондаренко, В.А. Мечник, О.М. Жуковський. — Заявл. 23.04.2003; Опубл. 16.01.2006, Бюл. № 1.
- [22] Іванова Н. Локальні та нелокальні закони збереження рівнянь конвекції–дифузії / Н. Іванова // Збірник праць Інституту математики НАН України. — **3**, №. 2. — 2006. — С. 148–158.
- [23] Bluman G. Framework for nonlocally related partial differential equation systems and nonlocal symmetries: Extension, simplification, and examples / G. Bluman, A.F. Cheviakov, N.M. Ivanova // J. Math. Phys. — 2006. — **47**. — 113505. — 23 pp.
- [24] Boyko V. Symmetry, equivalence and integrable classes of Abel equations / V. Boyko // Збірник праць Інституту математики НАН України. — **3**, №. 2. — 2006. — С. 39–48.
- [25] Boyko V. Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — **39**. — P. 5749–5762.
- [26] Cherniha R. Lie symmetries and conservation laws of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems with variable diffusivities / R. Cherniha, J.R. King // IMA J. Appl. Math. — 2006. — **71**. — P. 391–408.
- [27] Cherniha R.M. Symmetries, Ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term II / R.M. Cherniha, M.I. Serov // Euro. J. Appl. Math. — 2006. — **17**. — P. 597–605.
- [28] de Montigny M. Galilei invariant theories: I. Constructions of indecomposable finite-dimensional representations of the homogeneous Galilei group: directly and via contractions / M. de Montigny, J. Niederle, A.G. Nikitin // J. Phys. A: Math. and Theor. — 2006. — **39**. — P. 9365–9384.

- [29] Gaponova O. Systems of second-order ODEs invariant with respect to low-dimensional Lie algebras / O. Gaponova, M. Nesterenko // Physics AUC. — 2006. — **16**, II — P. 238–256.
- [30] Ivanova N.M. On the group classification of variable-coefficient nonlinear diffusion–convection equations / N.M. Ivanova, C. Sophocleous // J. Comp. Appl. Math. — 2006. — **197**. — P. 322–344.
- [31] Lahno V.I. Group classification and exact solutions of nonlinear wave equations / V.I. Lahno, R.Z. Zhdanov, O.V. Magda // Acta Appl. Math. — 2006. — **91**. — P. 253–313.
- [32] Nesterenko M. Transformation groups on real plane and their differential Invariants / M. Nesterenko // Internat. J. Math. Math. Sci. — 2006. — **2006**. — 17410. — 17 pp.
- [33] Nesterenko M. Contractions of low-dimensional lie algebras / M. Nesterenko, R. Popovych // J. Math. Phys. — 2006. — **47**. — 123515. — 45 pp.
- [34] Niederle J. Relativistic Coulomb problem for particles with arbitrary half-integer spin / J. Niederle, A.G. Nikitin // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — **39**. — 10931. — 14 pp.
- [35] Niederle J. Construction and classification of indecomposable finite-dimensional representations of the homogeneous Galilei group / J. Niederle, A.G. Nikitin // Czechoslovak J. Phys. — 2006. — **56**. — P. 1243–1250.
- [36] Niederle J. Relativistic Coulomb problem for massive charged particles with arbitrary half-integer spin / J. Niederle, A.G. Nikitin // Proc. of the International Workshop “Supersymmetries and quantum symmetries” (J. Inst. for Nuclear Research, Dubna). — 2006. — P. 256–261.
- [37] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. I. Generalized Ginsburg–Landau equations / A.G. Nikitin // J. Math. Anal. Appl. — 2006 — **324**. — P. 615–627.

- [38] Popovych R.O. Direct methods of construction of conservation laws / R.O. Popovych // Physics AUC. — 2006. — **16 (II)**. — P. 81–94.
- [39] Popovych R.O. Classification of admissible transformations of differential equations / R.O. Popovych // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 2. — С. 239–254.
- [40] Popovych R.O., No-go theorem on reduction operators of linear second-order parabolic equations / R.O. Popovych // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 2. — С. 231–238.
- [41] Popovych R.O. Normalized classes of nonlinear Schrödinger equations / R.O. Popovych // Bulg. J. Phys. — 2006. — **33**, suppl. 2. — P. 211–222.
- [42] Spichak S.V. Preliminary group classification of general two-dimensional quasi-linear elliptic type equations / S.V. Spichak // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2006. — **3**, № 2. — С. 284–292.
- [43] Vaneeva O.O. Reduction operators of nonlinear filtration equation / Proceedings of the VI International Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics edited by H.-D. Doebner and V.K. Dobrev / O.O. Vaneeva // Bulg. J. of Phys. — 2006. — **33(s2)**. — P. 227–230.
- [44] Zhalij A. Separation of variables in the hydrodynamic stability equations / A. Zhalij, G.I. Burde, I.Sh. Nasibullayev // J. Phys. A: Math. Gen. — 2006. — **39**. — P 7141–7160.
- [45] Бондаренко Н.А. Исследование износа алмазных буровых долот. 3. Анализ температурных полей / Н.А. Бондаренко, А.Н. Жуковский, В.А. Мечник // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. — 2007. — № 1. — С. 87–90.
- [46] Бондаренко Н.А. Исследование износа алмазных буровых долот. 3. Анализ температурных полей / Н.А. Бондаренко, А.Н. Жуковский, В.А. Мечник // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. — 2007. — № 1. — С. 87–90.

- [47] Бондаренко М.О. Буровий інструмент, оснащений термостійкими ріжучими вставками АТП / М.О. Бондаренко, А.Н. Жуковский, А.С. Осіпов // Міжн. наук.-техн. конф. “Ресурсозберігаючі технології у нафтогазовій енергетиці” (Івано-Франківськ, 16–20 квіт., 2007). — 2007. — С. 69.
- [48] Лагно В.І. Групова класифікація квазілінійних рівнянь еліптичного типу I. Інваріантність відносно алгебр Лі з нетривіальним розкладом Леві / В.І. Лагно, С.В. Спичак // Укр. мат. журн. — 2007. — **59**, № 11. — С. 1532–1545.
- [49] Лагно В.И. Групповая классификация квазилинейных уравнений эллипти-ческого типа, инвариантных относительно разрешимых алгебр Ли / В.И. Лагно, С.В. Спичак // Сборник научных трудов Всероссийской заочной научно-практической конференции “Актуальные проблемы обучения математике”. — Орловский государственный университет, 2007. — С. 203–210.
- [50] Спичак С.В. Групповая классификация квазилинейных уравнений эллиптического типа / С.В. Спичак // Международная конференция им. И.Г. Петровского: Тезисы докладов. — Москва: Изд-во МГУ, 2007. — С. 379.
- [51] Anco S.C. Conservation laws and symmetries of semilinear radial wave equations / S.C. Anco, N.M. Ivanova // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — **332**. — P. 863–876.
- [52] Boyko V. Invariants of Lie algebras with fixed structure of nilradicals / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — **40**. — P. 113–130.
- [53] Boyko V. Invariants of triangular Lie algebras / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — **40**. — P. 7557–7572.

- [54] Boyko V. Invariants of triangular Lie algebras with one nilindependent diagonal element / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — **40**. — P. 9783–9792.
- [55] Burde G.I. Stability analysis of a class of unsteady nonparallel incompressible flows via separation of variables / G.I. Burde, I.Sh. Nasibullayev, A. Zhalij // Phys. Fluids. — 2007. — **19**. — P. 114110. — 14 pp.
- [56] Cherniha R. New Q -conditional symmetries and exact solutions of some reaction-diffusion-convection equations arising in mathematical biology / R. Cherniha // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — **326**. — P. 783–799.
- [57] Cherniha R. Fluid transport in peritoneal dialysis: a mathematical model and numerical solutions / R. Cherniha, V. Dutka, J. Stachowska-Pietka // Mathematical Modeling of Biological Systems, V. 1, Editors A. Deutsch et al. — Boston: Birkhaeser Boston Inc., 2007. — P. 281–288.
- [58] Cherniha R. New conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction–diffusion–convection equations / R. Cherniha, O. Pliukhin // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — **40**. — P. 10049–10070.
- [59] Cherniha R., Symmetries and solutions of reaction-diffusion-convection equations with power diffusivities / R. Cherniha, O. Pliukhin // PAMM Proc. Math.Mech. — 2007. — **7**. — 2040065. — 6 pp.
- [60] Huang D.-J. Group analysis and exact solutions of a class of variable coefficient nonlinear telegraph equations / D.-J. Huang, N.M. Ivanova // J. Math. Phys. — 2007. — **48**. — 073507. — 23 pp.
- [61] Ivanova N.M. Conservation laws of multidimensional diffusion-convection equations / N.M. Ivanova // Nonlin. Dynamics. — 2007. — **49**. — P. 71–81.
- [62] Ivanova N.M. Equivalence of conservation laws and equivalence of potential systems / N.M. Ivanova, R.O. Popovych // Int. J. Theor. Phys. — 2007. — **46**. — P. 2658–2668.

- [63] Militello B. Three-mode two-boson Jaynes–Cummings model in trapped ions / B. Militello, A. Galkin, A. Nikitin // J. Phys. A: Math. Theor. — 2007. — **40**. — P. 533–563.
- [64] Nesterenko M. New families of cryptographic systems / M. Nesterenko, J. Patera, D. Zhavrotskyj. — 2007. — arXiv:0710.0021. — 14 pp.
- [65] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems / A.G. Nikitin // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — **332**. — P. 666–580.
- [66] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with triangular diffusion matrix / A.G. Nikitin // Укр. мат. журн. — 2007 — **59**. — С. 396–412.
- [67] Popovych R.O. Potential nonclassical symmetries and solutions of fast diffusion equation / R.O. Popovych, O.O. Vaneeva, N.M. Ivanova // Phys. Lett. A. — 2007. — **362**. — P. 166–173.
- [68] Spichak S.V. Group classification of quasi-linear elliptic type equations / S.V. Spichak // Proceedings of International Conference “Differential Equations and Related Topics”: Book of Abstracts. — Moscow: Moscow University Press, 2007. — P. 379.
- [69] Vaneeva O.O. Enhanced group analysis and conservation laws of variable coefficient reaction-diffusion equations with power nonlinearities / O.O. Vaneeva, A.G. Johnpillai, R.O. Popovych // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — **330**. — P. 1363–1386.
- [70] Yehorchenko I.A. Relative invariants for Lie algebras: construction and applications / I.A. Yehorchenko // Symmetry and Perturbation Theory, Proceedings of the International Conference on SPT 2007 (Otranto, Italy, 2–9 June 2007), G. Gaeta, R. Vitolo and S. Walcher (Eds.). — World Scientific, 2007. — P. 282–284.
- [71] Бондаренко Н.А. Основы создания алмазосодержащих композиционных материалов для породоразрушающих инструментов /

- Н.А. Бондаренко, А.Н. Жуковский, В.А. Мечник. — Киев: Институт сверхтвёрдых материалов им. В.Н. Бакуля НАН Украины, 2008. — 456 с.
- [72] Лагно В.И. Групповая классификация квазилинейных уравнений эллиптического типа относительно разрешимых алгебр Ли / В.И. Лагно, С.В. Спичак // Материалы научной конференции “Герценовские чтения - 2008” (14–19 апреля, 2008, Санкт-Петербург). — 2008. — С. 105–108.
- [73] Boyko V. Invariants of solvable Lie algebras with triangular nilradicals and diagonal nilindependent elements / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // Linear Algebra Appl. — 2008. — **428**. — P. 834–854.
- [74] Burde G.I. Stability analysis of nonparallel unsteady flows via separation of variables / G.I. Burde, I.Sh. Nasibullayev, A. Zhalij // New aspects of fluid mechanics and aerodynamics, WSEAS Mechanical Engineering Series. — 2008. — P. 152–157.
- [75] Burde G.I. Application of a symmetry-based method to stability analysis of nonparallel flows / G.I. Burde, I.Sh. Nasibullayev, A. Zhalij // Theoretical and experimental aspects of fluid mechanics, Mathematics and Computers in Science and Engineering. — 2008. — P. 267–272.
- [76] Cherniha R. New exact solutions of a nonlinear cross-diffusion system / R. Cherniha, L. Myroniuk // J. Phys. A: Math. and Theor. — 2008. — **41**. — 395204. — 15 pp.
- [77] Cherniha R. New conditional symmetries and exact solutions of reaction-diffusion systems with power diffusivities / R. Cherniha, O. Pliukhin // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — **41**. — 185208. — 14 pp.
- [78] Cherniha R. Lie Symmetries and form-preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations / R. Cherniha, M. Serov, I. Rassokha // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — **342**. — P. 1363–1379.

- [79] Demetriou E. Group analysis of (2+1)- and (3+1)-dimensional diffusion-convection equations / E. Demetriou, N.M. Ivanova, C. Sophocleous // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — **348**. — P. 55–65.
- [80] Demetriou E. Lie group classification of systems of diffusion equations / E. Demetriou, C. Sophocleous, N.M. Ivanova // Proceedings of International Conference “Nonlinear science and complexity” (NSC’08, session MOGRAN-12, Porto, Portugal, 2008). — We-SA-1_2NSC08094. — 10 pp.
- [81] Ivanova N.M. Exact solutions of diffusion-convection equations / N.M. Ivanova // Dynamics of PDEs. — 2008. — **5**. — P. 139–171.
- [82] Ivanova N.M. Conservation laws and potential symmetries of systems of diffusion equations / N.M. Ivanova, C. Sophocleous // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — **41**. — 235201. — 14 pp.
- [83] Kunzinger M. Singular reduction operators in two dimensions / M. Kunzinger, R.O. Popovych // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — **41**. — 505201. — 24 pp.
- [84] Kunzinger M. Potential conservation laws / M. Kunzinger, R.O. Popovych // J. Math. Phys. — 2008. — **49**. — 103506. — 34 pp.
- [85] Kuriksha O. Symmetries and exact solutions of Frohlich-Peierls Hamiltonian model / O. Kuriksha // Abstracts of “5th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics” (Institute of Physics, Belgrade, Serbia), Editors B. Cvetkovic, B. Dragovich and I. Salom. — 2008. — P. 32–33.
- [86] Moody R.V. Computing with almost periodic functions / R.V. Moody, M. Nesterenko, J. Patera // Acta Crystallographica A — 2008. — **A64**. — P. 654–669.
- [87] Nesterenko M. Three dimensional C-, S- and E-transforms / M. Nesterenko, J. Patera // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — **41**. — 475205. — 31 pp.

- [88] Patera J. Quasicrystals in cryptography / J. Patera, M. Nesterenko // Aspects of Networks and Information Security, eds. E. Kranakis, E. Haroutunian, E. Shahbazian, IOS Press, Amsterdam — 2008. — P. 274–282.
- [89] Popovych R.O. Reduction operators of linear second-order parabolic equations / R.O. Popovych // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — **41**. — 185202. — 31 pp.
- [90] Popovych R.O. Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations / R.O. Popovych, M. Kunzinger, N.M. Ivanova // Acta Appl. Math. — 2008. — **100**. — P. 113–185.
- [91] Popovych R.O. Local conservation laws of second-order evolution equations / R.O. Popovych, A.M. Samoilenko // J. Phys. A: Math. Theor. — 2008. — **41**. — 362002. — 11 pp.
- [92] Popovych R.O. Exact solutions of a remarkable fin equation / R.O. Popovych, C. Sophocleous, O.O. Vaneeva // Appl. Math. Lett. — 2008. — **21**. — P. 209–214.
- [93] Rajaei L. Multi-dimensional quasi-simple waves in weakly dissipative flows / L. Rajaei, H. Eshraghi, R.O. Popovych // Phys. D. — 2008. — **237**. — P. 405–419.
- [94] Vaneeva O. Group classification via mappings between classes of partial differential equations / O. Vaneeva // Abstracts of “5th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics” (Institute of Physics, Belgrade, Serbia). Editors: B. Cvetkovic, B. Dragovich and I. Salom. — 2008. — P. 59.
- [95] Vaneeva O.O. Group analysis of nonlinear fin equations / O.O. Vaneeva, C. Sophocleous, A.G. Johnpillai, R.O. Popovych // Appl. Math. Lett. — 2008. — **21**. — P. 248–253.
- [96] Yehorchenko I.A. Differential invariants of infinite-dimensional algebras that are equivalence algebras of classes of PDE / I.A. Yehorchenko // Bulg. J. Phys. — 2008. — **35**, No. 1. — P. 481–488.

- [97] Zhaliy A. Quantum integrable systems in three-dimensional magnetic fields: the Cartesian case / A. Zhaliy. — 2008. — arXiv:0812.2682. — 8 pp.
- [98] Курікша О.В. Системи двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, інваріантні відносно лінійних реалізацій алгебр Лі / О.В. Курікша // Доп. НАН України. — 2009. — № 10. — С. 7–14.
- [99] Bihlo A. Lie symmetries and exact solutions of barotropic vorticity equation / A. Bihlo, R.O. Popovych // J. Math. Phys. — 2009. — **50**. — 123102. — 12 pp.
- [100] Bihlo A. Symmetry analysis of barotropic potential vorticity equation / A. Bihlo, R.O. Popovych // Commun. Theor. Phys. — 2009. — **52**. — P. 697–700.
- [101] Boyko V. Invariants of Lie algebras via moving frames / V. Boyko, J. Patera, R. Popovych // Proceedings of 4th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus). — University of Cyprus, Nicosia, 2009. — P. 36–44.
- [102] Burde G.I. Stability analysis of unsteady nonparallel flows via separation of variables: synthesis of analytical and numerical computations / G.I. Burde, I.Sh. Nasibullayev, A. Zhaliy // AIP Conf. Proc. — 2009. — **1148**. — P. 50–52.
- [103] Cherniha R. Exact solutions of nonlinear boundary value problems of the Stefan type / R. Cherniha, S. Kovalenko // J. Phys. A: Math. and Theor. — 2009. — **42**. — 355202. — 13 pp.
- [104] Christou M.A. Sophocleous C. Similarity reductions of the (1+3)-dimensional Burgers equation / M.A. Christou, N.M. Ivanova // Appl. Math. Comp. — 2009. — **210**. — P. 87–99.
- [105] Ivanova N.M. On Lie symmetries of a class of reaction-diffusion equations / N.M. Ivanova // Proceedings of 4th Int. Workshop “Group Analysis

- of Differential Equations and Integrable Systems” (Protaras, Cyprus, 2008). — Univ. of Cyprus, 2009. — P. 84–86.
- [106] Ivanova N.M. Conservation laws and hierarchies of potential symmetries for certain diffusion equations / N.M. Ivanova, R.O. Popovych, C. Sophocleous // *Physica A*. — 2009. — **388**. — P. 343–356.
- [107] Kunzinger M. Is a nonclassical symmetry a symmetry? / M. Kunzinger, R.O. Popovych // *Proceedings of 4th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”* (26–30 October 2008, Protaras, Cyprus). — Univ. of Cyprus, 2009. — P. 107–120.
- [108] Larouche M. Branching rules for the Weyl group orbits of the Lie algebra A_n / M. Larouche, M. Nesterenko, J. Patera // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2009. — **42**. — 485203. — 15 pp.
- [109] Lahno V.I. Quasi-linear elliptic equations invariant under five-dimensional solvable Lie algebras / V.I. Lahno, S.V. Spichak // *Proceedings of the 4th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”*. — Nicosia, 2009. — P. 121–134.
- [110] Nesterenko M. Quasicrystal models in cryptography / M. Nesterenko, J. Patera // *AIP Conf. Proc.* — 2009. — **1191**. — P. 148–159.
- [111] Nesterenko M. On orbit functions, their properties and applications / M. Nesterenko, J. Patera // *Proceedings of the 4th Workshop “Group Analysis of Differential Equations & Integrable Systems”* — 2009. — P. 155–163.
- [112] Nesterenko M. Orbit functions of $SU(n)$ and Chebyshev polynomials / M. Nesterenko, J. Patera, A. Tereszkievich // *arXiv:0905.2925*. — 2009. — 15 pp.
- [113] Niederle J. Galilean equations for massless fields / J. Niederle, A.G. Nikitin // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2009. — **42**. — 105207. — 19 pp.

- [114] Niederle J. Galilei-invariant equations for massive fields / J. Niederle, A.G. Nikitin // J. Phys. A: Math. Theor. — 2009. — **42**. — 245209. — 25 pp.
- [115] Niederle J. Galilean massless fields / J. Niederle, A.G. Nikitin // Proceedings of 4th workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”. — Cyprus University, Protaras, Cyprus, 2009. — P. 164–174.
- [116] Niederle J. More on Galilean electromagnetism / J. Niederle, A.G. Nikitin // Proceedings of the 5th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics (July 6–17 2008, Belgrade, Serbia) / Ed. B. Dragovich and Z. Rakic. — Institute of Physics, Belgrade, Serbia, 2009. — P. 293–303.
- [117] Nikitin A.G. Symmetries and modeling functions for diffusion processes / A.G. Nikitin, S.V. Spichak, Yu.S. Vedula et al. // J. Phys. D: Appl. Phys. — 2009. — **42**. — 055301. — 12 pp.
- [118] Popovych D.R. Equivalence of diagonal contractions to generalized IW-contractions with integer exponents / D.R. Popovych, R.O. Popovych // Linear Algebra Appl. — 2009. — **431**. — P. 1096–1104.
- [119] Tracina R. Group classification of three-dimensional variable-coefficient Burgers equation / R. Tracina, N.M. Ivanova, C. Sophocleous // Proceedings of 15th Int. Conference “Waves and Stability in Continuous Media” (WASCOM’09). — Palermo, Italy, 2009. — P. 224–229.
- [120] Vaneeva O.O. Group classification via mapping between classes: an example of semilinear reaction-diffusion equations with exponential nonlinearity / O.O. Vaneeva // Proceedings of the 5th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics. — 2009. — P. 463–471.
- [121] Vaneeva O.O. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source /

- O.O. Vaneeva, R.O. Popovych, C. Sophocleous // *Acta Appl. Math.* — 2009. — **106**. — P. 1–46.
- [122] Vaneeva O.O. Reduction operators of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source / O.O. Vaneeva, R.O. Popovych, C. Sophocleous // *Proceedings of the 4th International Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”*. — 2009. — P. 191–209.
- [123] Yehorchenko I.A. General results on conditional symmetry for the two-dimensional nonlinear wave equation / I.A. Yehorchenko // *arXiv:0910.1946*. — 2009. — 9 pp.
- [124] Yehorchenko I.A. Infinite-dimensional symmetry for wave equation with additional condition / I.A. Yehorchenko, A.I. Vorobyova. — 2009. — *arXiv:0910.2380*. — 5 pp.
- [125] Yehorchenko I.A. Reduction of non-linear d’Alembert equations to two-dimensional equations / I.A. Yehorchenko // *Proceedings of the 4th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems”*. — Protaras, Cyprus, 2009. — P. 243–253.
- [126] Bihlo A. Symmetry justification of Lorenz maximum simplification / A. Bihlo, R.O. Popovych // *Nonlinear Dynam.* — 2010. — **61**. — P. 101–107.
- [127] Boyko V. Simplest potential conservation laws of linear evolution equations / V. Boyko, R. Popovych. — 2010. — *arXiv:1008.4851*. — 12 pp.
- [128] Boyko V. Extended symmetry analysis of a “nonconservative Fokker–Plank equation” / V. Boyko, N. Shapoval. — 2010. — *arXiv:1008.1405*. — 5 pp.
- [129] Cherniha R. Conditional symmetries for systems of PDEs: new definitions and their application for reaction-diffusion systems / R. Cherniha // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2010. — **43**. — 405207. — 15 pp.

- [130] Cherniha R. The exotic conformal Galilei algebra and nonlinear partial differential equations / R. Cherniha, M. Henkel // J. Math. Anal. Appl. — 2010. — **369**. — P. 120–132.
- [131] Cherniha R. Lie symmetries and exact solutions of a class of thin film equations / R. Cherniha, L. Myroniuk // J. Phys. Math. — 2010. — **2**. — 19 pp.
- [132] Ferraro E. Exactly solvable relativistic model with the anomalous interaction / E. Ferraro, N. Messina, A.G. Nikitin // Phys. Rev. A. — 2010. — **81**. — 042108. — 8 pp.
- [133] Ivanova N.M. Potential systems for PDEs having several conservation laws / N.M. Ivanova // J. Engin. Math. — 2010. — **66**. — P. 175–180.
- [134] Ivanova N.M. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. I. Enhanced group classification / N.M. Ivanova, R.O. Popovych, C. Sophocleous // Lobachevskii J. Math. — 2010. — **31**, no. 2. — P. 100–122.
- [135] Ivanova N.M. Group classification of a class of equations arising in financial mathematics / N.M. Ivanova, C. Sophocleous, P.G.L. Leach // J. Math. Anal. Appl. — 2010. — **372**. — P. 273–286.
- [136] Ivanova N.M. Lie group analysis of two-dimensional variable-coefficient Burgers equation / N.M. Ivanova, C. Sophocleous, R. Tracina // Z. Angew. Math. Phys. — 2010. — **61**. — P. 793–809.
- [137] Nesterenko M. Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups / M. Nesterenko, J. Patera, A. Tereszkiewicz. — 2010. — arXiv:1001.3683. — 30 pp.
- [138] Nesterenko M. Orthogonal polynomials of compact simple Lie groups: Branching rules for polynomials / M. Nesterenko, J. Patera, M. Szajewska // J. Phys. A: Math. Theor. — 2010. — **43**. — 495207. — 27 pp.

- [139] Niederle J. Maxwell–Chern–Simons models: their symmetries, exact solutions and non-relativistic limits. / J. Niederle, A.G. Nikitin, O. Kuriksha // *Acta Polytechnica* — 2010. — **50**. — P. 96–101.
- [140] Popovych R.O. Admissible point transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations / R.O. Popovych, M. Kunzinger, H. Eshraghi // *Acta Appl. Math.* — 2010. — **109**. — P. 315–359.
- [141] Popovych D.R. Lowest dimensional example on non-universality of generalized Inönü–Wigner contractions / D.R. Popovych, R.O. Popovych // *J. Algebra*. — 2010. — **324**. — P. 2742–2756.
- [142] Popovych R.O. Conservation laws and normal forms of evolution equations / R.O. Popovych, A. Sergyeyev // *Phys. Lett. A*. — 2010. — **374**. — P. 2210–2217.
- [143] Popovych R.O. More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations: Part I / R.O. Popovych, O.O. Vaneeva // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* — 2010. — **15**. — P. 3887–3899.
- [144] Yehorchenko I.A. Conditional symmetry and reductions for the two-dimensional nonlinear wave equation. I. General case / I.A. Yehorchenko. — 2010. — arXiv:1010.4913. — 10 pp.
- [145] Yehorchenko I.A. Reduction of multidimensional wave equations to two-dimensional equations: investigation of possible reduced equations / I.A. Yehorchenko. — 2010. — arXiv:1010.4977. — 14 pp.
- [146] Yehorchenko I.A. Differential invariants and hidden symmetry / I.A. Yehorchenko. — 2010. — arXiv:1010.5313. — 12 pp.