

УДК 517.95:517.958:517.928:512.81

КП XXXXXXXXX

№ держреєстрації 0101U000098

Інв. №

Національна Академія наук України

Інститут математики

01601, м. Київ, Терещенківська, 3;

тел. (044) 234 51 50, факс 235 20 10

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор Інституту
математики НАН України

академік НАН України

А.М. Самойленко

20.12.2005

ЗВІТ

ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ

**Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної
фізики, хімії, біології та економіки (заключний)**

Керівник НДР

доктор фіз.-мат. наук

А.Г. Нікітін

Рукопис закінчено 5 грудня 2005 р.

Результати цієї роботи розглянуто Вченою Радою Інституту
математики НАН України, протокол від 13.12.2005 № 12.

Київ–2005

Список авторів

Керівник проекту д-р фіз.-мат. наук, завідувач відділу	А.Г. Нікітін
д-р фіз.-мат. наук, пров. наук. співр.	Р.З. Жданов
д-р фіз.-мат. наук, пров. наук. співр.	Р.М. Черніга
д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співр.	В.І. Легенький
канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співр.	В.М. Бойко
канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співр.	І.А. Єгорченко
канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співр.	О.М. Жуковський
канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співр.	Р.О. Попович
канд. фіз.-мат. наук, старш. наук. співр.	С.В. Спічак
канд. фіз.-мат. наук, наук. співр.	О.Ю. Жалій
канд. фіз.-мат. наук, наук. співр.	В.П. Карагодов
канд. фіз.-мат. наук, мол. наук. співр.	Н.М. Іванова

канд фіз.-мат. наук,
мол. наук. співр.
мол. наук. співр.
інженер

О.В. Магда
М.О. Нестеренко
Л.І. Величко

Реферат

Звіт про НДР: 176 сторінок, 118 джерел.

Ключові слова: математична модель, диференціальне рівняння з частинними похідними, груповий аналіз, вищі симетрії, інваріантність, алгебри Лі, точний розв'язок.

Об'єкт дослідження: нелінійні задачі математичної фізики, хімії, біології та економіки.

Мета роботи: створення нових ефективних методів аналізу математичних моделей з використанням групових та алгебраїчних методів.

Методи дослідження: сучасні методи групового аналізу, теорії алгебр та груп Лі.

Звіт містить основні результати отримані в рамках виконання НДР по проекту “Теоретико-груповий аналіз нелінійних проблем математичної фізики, хімії, біології та економіки” та список наукових робіт опублікованих в рамках цієї НДР.

Зміст

1 Вступ	7
2 Основні наукові результати	8
3 Нові підходи в задачах групової класифікації та побудови точних розв’язків диференціальних рівнянь	15
3.1 Анзаци і редукція нелінійних рівнянь реакції-дифузії . . .	15
3.2 Нові точні розв’язки та їхні застосування для двох нелінійних моделей математичної біології	24
3.3 Групова класифікація рівнянь конвекції-дифузії [42, 99] .	35
3.4 Групова класифікація рівнянь Шрьодінгера [44, 41, 100, 101, 96]	37
3.5 Групова класифікація узагальнених рівнянь ейконала [91]	39
3.6 Закони збереження [45, 43, 97]	43
3.7 Потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії для класу $(1+1)$ -вимірних рівнянь конвекції-дифузії [98]	45
3.8 Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку [16]	45
3.9 Групова класифікація одно- та двовимірних рівнянь Фока-Планка [1]	48
3.10 Квазі-точно розв’язні моделі Шрьодінгера [2, 103, 8]	50
3.11 Нелінійні узагальнення рівнянь Максвелла [104]	55
3.12 Відокремлення змінних в рівняннях Шрьодінгера та Паулі [29, 31, 30, 32]	57
3.13 Алгебраїчний підхід до групової класифікації квазілінійних рівнянь гіперболічного типу [50, 57, 58, 59, 60, 49]	68

3.14	Симетрійний аналіз систем керування	87
4	Реалізації алгебр Лі та диференціальні інваріанти	89
4.1	Реалізації алгебр Лі низьких розмірностей [95]	89
4.2	Диференціальні інваріанти векторних полів Лі на дійсній площині [64]	100
4.3	Диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі [17, 94]	102
4.4	Умовні диференціальні інваріанти та побудова загальних класів умовно-інваріантних рівнянь [25, 26]	114
4.5	Новий метод побудови базисів диференціальних інваріантів для нескінченновимірних алгебр [28]	126
5	Задачі математичного моделювання	130
5.1	Пружньо-деформований стан півплощини в околі абсолютно жорсткої вставки під дією навантаження	130
5.2	Кінетичний аналіз процесів дифузії, зародковоутворення та хімічних реакцій при спіканні алмазовмісних матеріалів	141
5.3	Метод ітерацій при розв'язуванні нелінійних задач конвекції в'язкої нестисливої рідини	142
5.4	Однозначна розв'язність двовимірних задач про конвективні процеси в бінарній суміші рідин	148
6	Апробація результатів, участь в конференціях, наукове співробітництво тощо	155
7	Педагогічна діяльність, підготовка кадрів	161
8	Публікації	162

1 Вступ

Моделі фізичних явищ повинні задовольняти апріорі заданим принципам інваріантності та законам збереження, що обумовлює важливість групових методів як для математичного моделювання, так і для дослідження конкретних математичних об'єктів. Ці властивості відіграють особливу роль в складних нелінійних моделях, оскільки з одного боку вони гарантують виконання основних законів фізики (релятивістська інваріантність, справедливість законів збереження, тощо), а з іншого боку дозволяють робити важливі передбачення у ситуаціях, коли побудувати аналітичні чи чисельні розв'язки виявляється неможливим.

Розробка групових та інших алгебраїчних методів для дослідження саме нелінійних моделей було основною проблемою в рамках даної НДР.

За звітний період дослідження в рамках проекту було зосереджено у наступних напрямках:

- 1) групова класифікація диференціальних рівнянь, методи побудови точних розв'язків, законів збереження тощо;
- 2) дослідження хвильових рівнянь для частинок з довільним напівцілим спіном, суперсиметричні моделі квантової механіки;
- 3) класифікація реалізацій алгебр Лі векторними полями, теорія диференціальних інваріантів;
- 4) задачі математичного моделювання.

Дослідження, що виконувалися в рамках даної НДР були пов'язані з різноманітними методами дослідження модельних нелінійних систем сучасної математичної фізики, хімії, біології та економіки. Протягом звітного періоду в рамках даного проекту виконавцями в вітчизняних та закордонних виданнях опубліковано 2 монографії, 6 збірників наукових праць, 107 наукових робіт, оформлено 3 патенти на винаходи.

Основні результати, що отримані в рамках даного проекту, відображено нижче.

Ряд з одержаних результатів мають пріоритетний характер у світі. Результати НДР доповідались на багатьох міжнародних конференціях.

У звіті розділи 1, 2 підготували А.Г. Нікітін та В.М. Бойко; 3.1 — А.Г. Нікітін; 3.2 — Р.М. Черніга; 3.3 та 3.4 — Р.О. Попович та Н.М. Іванова; 3.5 — Р.О. Попович та І.А. Єгорченко; 3.6 та 3.7 — Р.О. Попович та Н.М. Іванова; 3.8 — В.М. Бойко; 3.9, 3.10, 3.11 — С.В. Спічак; 3.12 — О.Ю. Жалій та Р.З. Жданов; 3.13 — Р.З. Жданов та О.В. Магда; 3.14 — В.І. Легенький; 4.1 — В.М. Бойко, М.О. Нестеренко та Р.О. Попович; 4.2 — М.О. Нестеренко; 4.3 — В.М. Бойко та Р.О. Попович; 4.4, 4.5 — І.А. Єгорченко; 5.1, 5.2 — О.М. Жуковський; 5.3 — О.М. Жуковський та В.П. Карагодов; 5.4 — В.П. Карагодов; 6, 7, 8 — В.М. Бойко.

2 Основні наукові результати

Проведено повну групову класифікацію систем двох нелінійних рівнянь дифузії з матрицею дифузії загального вигляду. Зокрема, знайдено всі нееквівалентні нелінійні рівняння Шрьодінгера та знайдено їх групи симетрії. (**Нікітін А.Г.**).

Побудовано широкі класи солітоноподібних розв'язків для систем рівнянь дифузії. Ці розв'язки мають вигляд усамотнених хвиль, які є функціями від поліномів від незалежних змінних. (**Нікітін А.Г.**).

Побудовано релятивістські хвильові рівняння для частинок з довільним напівцілим спіном, що взаємодіють із зовнішнім електромагнітним полем. На відміну від інших відомих моделей для таких частинок, знайдені рівняння залишаються гіперболічними та описують розповсюдження хвиль з досвітовою швидкістю при довільних напруженостях зовнішнього поля. (**Нікітін А.Г.**).

З використанням отриманих рівнянь розв'язана задача про взаємодію частинки довольного спіну з полем Кулона. Відповідні моделі виявились інтегровними і такими, що описують зв'язані стани водноподібних

систем. (**Нікітін А.Г.**).

Побудовано і досліджено теоретико-польові моделі, що володіють симетрією відносно парасупералгебри Пуанкаре. Описано широкий клас квантовомеханічних систем, інваріантних відносно парасупералгебри з не тривіальними центральними зарядами. Показано, що до цього класу відноситься багато реальних фізичних систем, тобто згадана симетрія реалізується в природі. (**Нікітін А.Г.**).

Проведено вичерпну класифікацію реалізацій алгебр Лі розмірності не вище чотири в класі векторних полів в просторах довільної розмірності (ця класифікація виправляє і суттєво узагальнює попередні результати інших авторів). (**Бойко В.М., Нестеренко М.О., Попович Р.О.**).

Узагальнено прямий метод знаходження законів збереження. Виконано класифікацію всіх локальних законів збереження для класу $(1+1)$ -вимірних рівнянь конвекції–дифузії. Узагальнено ітераційну процедуру знаходження потенціальних законів збереження. За допомогою прямого ітераційного методу побудовано нелокальні (потенціальні) закони збереження для класу $(1+1)$ -вимірних рівнянь конвекції–дифузії та відповідні їм потенціальні системи. (**Іванова Н.М., Попович Р.О.**).

Побудовано потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії для класу $(1+1)$ -вимірних рівнянь конвекції–дифузії та досліджено зв'язок між потенціальними і класичними симетріями за допомогою потенціальних перетворень еквівалентності. (**Іванова Н.М., Попович Р.О.**).

Проведено повну групову класифікацію $(1+1)$ -вимірних рівнянь конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами відносно як загальної групи еквівалентності, так і усіх локальних перетворень змінних. За допомогою отриманих результатів проведено симетрійну редукцію і знайдено точні розв'язки рівнянь, що належать до даного класу. Досліджено різні види додаткових перетворень еквівалентності на підкласах класу $(1+1)$ -вимірних рівнянь конвекції–дифузії зі змінними коефіцієнтами. (**Івано-**

ва Н.М., Попович Р.О.).

Виконано групову класифікацію $(1+1)$ -вимірних рівнянь Шрьодінгера з довільним потенціалом та степеневою нелінійністю. Знайдено всі можливі перетворення еквівалентності між рівняннями у даному класі. Показано, що всі такі перетворення належать до групи еквівалентності вихідного класу. Проведено групову класифікацію $(1+n)$ -вимірних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом типу гармонійного осцилятора та нелінійністю вигляду $F = F(|\psi|)\psi$. (Іванова Н.М., Попович Р.О.).

За допомогою методу додаткових породжуючи умов побудовано нові нелінійські розв'язки для деяких нелінійних рівнянь, зокрема, рівняння Фішера зі змінним коефіцієнтом дифузії та системи рівнянь Шігесади–Кавасаки–Терамото, які виникають в задачах математичної біології. Особливість отриманих розв'язків полягає в тому, що вони у багатьох випадках задовольняють крайові умови, які є типовими для відповідних математичних моделей, а тому викликають інтерес щодо застосування в задачах математичної біології. (Черніга Р.М.).

Розв'язано задачу про вичерпний опис симетрій Лі для класу нелінійних систем двох багатовимірних рівнянь типу реакції-дифузії. Отримані результати застосовано для побудови точних розв'язків та дослідження їхніх властивостей деяких нелінійних систем рівнянь, які зустрічаються в математичній фізиці та математичній біології, зокрема, так званих альфа-омега систем реакції-дифузії та багатовимірного вимірного рівняння Шрьодінгера з критичною степеневою нелінійністю. (Черніга Р.М.).

Запропоновано клас нелінійних ґалілей-інваріантних узагальнень класичного рівняння теплопровідності. Виявилось, що всі представники цього класу рівнянь допускають нескінченно-вимірні алгебри Лі, які містять як підалгебру алгебру Ґалілея з так званим оператором нульової маси. Знайдено класи точних розв'язків для деяких представників цього класу рівнянь та зроблено порівняння з відомими розв'язками стандартного

рівняння нелінійної теплопровідності. Побудовано повний набір диференціальних інваріантів 1-го і 2-го порядків для двох нееквівалентних зображень алгебри Галілея з різними операторами нульової маси. (**Черніга Р.М.**).

Одержано повний розв'язок задачі класифікації $(1+3)$ -вимірних рівнянь Шредінгера з вектор-потенціалом електромагнітного поля, що допускають відокремлення змінних, в результаті якого отримуються звичайні диференціальні рівняння, одне першого та три другого порядку. Запропоновано конструктивний алгоритм побудови всіх систем координат, в яких $(1+3)$ -вимірне рівняння Шредінгера з фіксованим вектор-потенціалом допускає таке відокремлення змінних та відповідних розв'язків цього рівняння з відокремленими змінними. Доведено, що всі вектор-потенціали і системи координат, які забезпечують відокремлення змінних (в рамках сформульованого означення) для $(1+3)$ -вимірних рівнянь Шредінгера з вектор-потенціалом, також забезпечують відокремлення змінних і для $(1+3)$ -вимірного рівняння Гамільтона-Якобі з вектор-потенціалом. (**Жалій О.Ю., Жданов Р.З.**).

Повністю розв'язано задачу класифікації $(1+3)$ -вимірних рівнянь Паулі для частинки зі спіном $\frac{1}{2}$ в електромагнітному полі, що допускають відокремлення змінних, в результаті якого отримуються матричні звичайні диференціальні рівняння спеціального вигляду, одне першого та три другого порядку, за додаткової умови комутативності. (**Жалій О.Ю.**).

Доведено, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку однопараметричної групи локальних перетворень в просторі n незалежних та m залежних змінних будується через одну квадратуру і диференціювання. Знайдено зв'язок диференціальних інваріантів першого порядку з проблемою інтегрування систем рівнянь типу Ріккати. (**Бойко В.М., Попович Р.О.**).

Побудовано базиси диференціальних інваріантів, оператори інваріантного диференціювання та визначники Лі, для усіх реалізацій скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на дійсній площині. (**Нестеренко М.О.**).

Запропоноване нове поняття умовного диференціального інваріанту, яке дозволить описати в загальному вигляді рівняння, що мають визначену умовну симетрію з заданою додатковою умовою. Побудований функціональний базис умовних диференціальних інваріантів для проективного оператора з додатковою умовою. Запропоновано загальні алгоритми побудови загальних класів диференціальних рівнянь, що мають певну умовну інваріантність або можуть бути редуковані за допомогою визначеного анзацу. (**Єгорченко І.А.**).

Запропонований загальний алгоритм опису рівнянь, що мають визначену приховану симетрію. Досліджена умовна інваріантність деяких нелінійних рівнянь теплопровідності в сферичній системі координат та знайдені точні розв'язки та нові оператори умовної симетрії (**Єгорченко І.А.**).

Досліджена сумісність та симетрія умов редукції для систем хвильових рівнянь, знайдені нові оператори умовної симетрії для вихідних рівнянь (оператори прихованої умовної симетрії). (**Єгорченко І.А.**).

Запропоновано новий підхід до побудови повного базису диференціальних інваріантів нескінченновимірних алгебр Лі, що дозволяє, зокрема, ефективно будувати класифікаційні критерії для класів диференціальних рівнянь. (**Єгорченко І.А.**).

Запропонований новий підхід до групової класифікації нелінійного узагальнення рівняння ейконалу. (**Єгорченко І.А., Попович Р.О.**).

Проведено групову класифікацію в класі еволюційних рівнянь вигляду $u_t + uu_1 = F(u_n)$, що інваріантні відносно перетворень Галілея і узагальнюють рівняння Бюргерса і Кортевега–де Фріза. (**Бойко В.М.**).

Запропоновано новий підхід до опису інтегровних класів рівняння

Абе́ля, що базується на підвищенні порядку та використанні перетворень еквівалентності відповідного класу ЗДР другого порядку (**Бойко В.М.**).

Була здійснена повна групова класифікація одновимірного рівняння Фокера–Планка (ФП) для довільних коефіцієнтів зносу і дифузії. Для ряду відомих прикладних рівнянь побудовані перетворення, які зводять їх до одного із канонічних. Використовуючи класифікацію рівнянь ФП побудовані їх точні розв’язки. Також досліджено симетрійні властивості двовимірного рівняння ФП. (**Спічак С.В.**).

Було досліджено способи побудови класів квазіточно- і точно-розв’язних операторів Шредінгера, які діють на скінченновимірних інваріантних просторах, базисні елементи яких є квадратично-інтегровані функції. (**Спічак С.В.**).

Доведено, що рівняння Максвела умовно інваріантні відносно двох нелінійних зображень алгебри Пуанкаре. Також знайдено нелінійне узагальнення рівнянь Максвела, які інваріантні відносно цих зображень. (**Спічак С.В.**).

Здійснено повну групову класифікацію нелінійних рівнянь гіперболічного типу з довільним елементом, що залежить від чотирьох змінних. Доведено теореми про структуру допустимих алгебр інваріантності квазілінійних рівнянь. З використанням знайдених симетрій проведено редукцію та побудовані точні розв’язки квазілінійних рівнянь гіперболічного типу. (**Жданов Р.З., Магда О.В.**).

Для аналізу довільних систем керування другого порядку з одним керуючим впливом запропоновано нову геометричну конструкцію. Введено термін “характеристичне продовження” в термінах якого досліджені умова некерованості систем другого порядку, умови лінеаризації систем другого порядку, проблема знаходження симетрій для систем другого порядку. (**Легенький В.І.**).

Для нелінійних систем керування з симетрією запропоновано новий принцип керування (рекурсивне керування) для термінальних за-

дач і сформульовано алгоритм побудови закону керування. (**Легенький В.І.**).

Доведено теореми про збіжність запропонованого ітераційного процесу при розв'язуванні нелінійних задач для рівнянь Нав'є–Стокса (чисто гідродинамічного типу). У випадку двовимірних областей збіжність обумовлена лише розбиттям проміжку часу, на якому розглядається задача, на скінченну кількість відрізків, на кожному з яких ітерації збігаються до гальоркінських наближень її розв'язків. Ця умова залежить лише від вихідних даних задачі. В тривимірному випадку – також від координатного базису та його розміру. (**Жуковський О.М., Карагодов В.П.**).

Встановлено збіжність ітерацій на всьому заданому часовому проміжку при розв'язуванні нелінійних задач термоконвекції в двовимірній області. Доведено глобальні теореми про існування та єдиність розв'язків двовимірних задач про конвективні процеси в бінарній суміші нереагуючих між собою рідин. Розглянуто задачу при умові малої концентрації однієї з компонент суміші та задачу без такого обмеження. (**Карагодов В.П.**).

Отримано розв'язок задачі пружньо-деформованого стану півплощини навколо абсолютно жорсткої кругової вставки, що знаходиться під дією нормального та дотичного навантаження. Дану задачу можна розглядати як модель пружньо-деформованого стану зв'язки в околі алмазного зерна під навантаженням. Модель враховує розміри алмазного зерна, вплив зовнішніх навантажень і механічних властивостей (коефіцієнти Пуасона та модуль пружності). Компоненти напружень визначаються у вигляді суми трьох складових — розв'язків допоміжних задач при спеціальних умовах на контурі вставки (алмазного зерна). Їх наближений розв'язок отримано варіаційним методом, де в якості координатних функцій взято системи частинних розв'язків рівнянь Ламе. (**Жуковський О.М.**)

Запропоновано кінетичні моделі для опису процесів дифузії, зародковоутворень та хімічних реакцій при спіканні матеріалів, що містять алмази. Ці процеси відіграють важливу роль для формуванню структури композитних матеріалів та їх властивостей. Особлива увага приділена визначенню кінетичних параметрів і констант процесів при спіканні композиції алмаз-твердий сплав ВК6- CrV_2 та інших добавок на різних стадіях, узгоджуючи їх з експериментальними даними про швидкість усадки. (Жуковський О.М.)

3 Нові підходи в задачах групової класифікації та побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь

3.1 Анзаци і редукція нелінійних рівнянь реакції-дифузії

Розглянемо рівняння теплопровідності із степеневою нелінійністю

$$u_t - u_{xx} = -\lambda u^n, \quad \lambda = \frac{2(n+1)}{(n-1)^2}. \quad (1)$$

Нормуючи u параметр λ завжди можна звести до 1, якщо $n > 1$ або до -1 , якщо $n < 1$. Значення параметра λ , яке вибрано в (1) дозволяє зробити наступні обчислення менш громіздкими.

Для знаходження розв'язків рівняння (1) використаємо анзац

$$u = \left(\frac{z_x}{z} \right)^{\frac{2}{n-1}}, \quad (2)$$

який перетворює рівняння (1) в рівняння

$$z((n-1)(z_x z_{xt} - z_x z_{xxx}) + (n-3)z_{xx}^2) = z_x^2((n-1)z_t - (n+3)z_{xx}). \quad (3)$$

На відміну від (1) отримане рівняння (3) є однорідним відносно залежних змінних і містить нелінійності тільки третього порядку, в той час як рівняння (1) містить u в довільному (фіксованому) степені. Ми покажемо, що рівняння (3) є дуже зручним для проведення ефективної редукції.

Відзначимо, що рівняння (1) не є єдиним нелінійним рівнянням теплопровідності, яке може бути редуковане до трилінійної форми за допомогою анзацу (2). Більш загальне рівняння типу Колмогорова-Петровського-Піскунова (КПП), яке допускає таку процедуру, має вигляд

$$(n-1)^2(u_t - u_{xx}) = -2(n+1)u^n + 2\lambda_1(n-1)u + 2\lambda_2(n-1)u^{\frac{n+1}{2}} + 2\lambda_3(n-1)u^{\frac{3-n}{2}} + 2\lambda_4(n-1)u^{2-n}, \quad (4)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — довільні сталі.

Рівняння (4) є рівнянням типу КПП при умові, що

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{n+1}{n-1}. \quad (5)$$

Підстановка (2) перетворює рівняння (4) в рівняння

$$z[(n-1)(z_x z_{xt} - z_x z_{xxx} - \lambda_3 z z_x - \lambda_4 z^2) + (n-3)z_{xx}^2] = z_x^2[(n-1)(z_t + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x) - (n+3)z_{xx}]. \quad (6)$$

Отже, підстановку (2) можна використати для досить широкого класу рівнянь (4).

Редукція рівняння (6) досягається, якщо прирівняти до нуля обидві частини рівняння. Вважаючи, що $z \neq 0$ і $z_x \neq 0$, матимемо таку систему:

$$(n-1)(z_t + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x) - (n+3)z_{xx} = 0, \quad (7)$$

$$(n-1)(z_x z_{xt} - z_x z_{xxx} - \lambda_3 z z_x - \lambda_4 z^2) + (n-3)z_{xx}^2 = 0. \quad (8)$$

Розв'язавши (7) відносно z_t і підставивши z_t в (8), отримуємо звичайне диференціальне рівняння для z

$$4z_x z_{xxx} + (n-3)z_{xx}^2 - (n-1)(\lambda_1 z_x^2 + \lambda_2 z_x z_{xx} + \lambda_3 z z_x + \lambda_4 z^2) = 0. \quad (9)$$

Отже, ми редукували рівняння (6) до системи рівнянь (7) і (9), одне з яких лінійне, а друге — звичайне диференціальне рівняння. У випадку $n = 3$, $\lambda_4 = 0$ рівняння (9) також редукується до лінійного

$$2z_{xxx} - \lambda_1 z_x - \lambda_2 z_{xx} - \lambda_3 z = 0, \quad (10)$$

а рівняння (7) набуває вигляду

$$z_t + \lambda_1 z + \lambda_2 z_x - 3z_{xx} = 0. \quad (11)$$

Система (10), (11) повністю інтегровна і може бути легко розв'язана. Тип розв'язку залежить від коренів характеристичного рівняння, що відповідає рівнянню (10):

$$2k^3 - \lambda_2 k^2 - \lambda_1 k - \lambda_3 = 0.$$

Ці корені можуть бути

1) дійсні і різні; це має місце тоді, коли

$$\lambda_2 = 2(a+b+c), \quad \lambda_1 = -2(ab+ac+bc), \quad \lambda_3 = 2abc, \quad a \neq b, \quad a \neq c, \quad b \neq c \quad (12)$$

2) дійсні і два з них рівні; при цьому

$$\lambda_2 = 4a + 2b, \quad \lambda_1 = -2a^2 - 4ab, \quad \lambda_3 = 2a^2b, \quad a \neq b \quad (13)$$

3) дійсні і всі три рівні; відповідні параметри λ_i ($i = 1, 2, 3$) мають вигляд

$$\lambda_1 = -6a^2, \quad \lambda_2 = 6a, \quad \lambda_3 = 2a^3 \quad (14)$$

4) два корені комплексні:

$$\lambda_2 = 4a + 2c, \quad \lambda_1 = -2(a^2 + b^2 + 2ac), \quad \lambda_3 = 2c(a^2 + b^2). \quad (15)$$

Розв'язки системи (10), (11) залежать від трьох довільних параметрів k_1, k_2, k_3 і мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} 1) \quad & z = k_1 e^{ax+(a^2+2bc)t} + k_2 e^{bx+(b^2+2ac)t} + k_3 e^{cx+(c^2+2ab)t}, \\ 2) \quad & z = k_1 e^{bx+(b^2+2a^2)t} + (k_2 + k_3(x + 2(a-b)t)) e^{ax+(a^2+2ab)t}, \\ 3) \quad & z = k_1 e^{ax+3a^2t}(x^2 + k_2x + k_3 + 6at), \\ 4) \quad & z = k_1 e^{cx+(c^2+2a^2+2b^2)t} + e^{ax+(a^2-b^2+2ac)t}(k_2 \sin(bx + 2b(a-c)t) + \\ & + k_3 \cos(bx + 2b(a-c)t)). \end{aligned} \quad (16)$$

Підставивши (16) в (2), отримаємо точні розв'язки рівняння (4) у випадку $n = 3$, $\lambda_4 = 0$, тобто рівняння

$$u_t - u_{xx} = -2u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \lambda_3. \quad (17)$$

Ці розв'язки виражаються такими функціями, де значення параметрів a, b і c визначаються формулами (12)–(15):

$$1) \ u = \frac{ak_1 e^{ax+(a^2+2bc)t} + bk_2 e^{bx+(b^2+2ac)t} + ck_3 e^{cx+(c^2+2ab)t}}{k_1 e^{ax+(a^2+2bc)t} + k_2 e^{bx+(b^2+2ac)t} + k_3 e^{cx+(c^2+2ab)t}}; \quad (18)$$

$$2) \ u = \frac{bk_1 e^{bx+(b^2+2a^2)t} + [ak_2 + k_3 + ak_3(x + 2(a-b)t)]e^{ax+(a^2+2ab)t}}{k_1 e^{bx+(b^2+2a^2)t} + (k_2 + k_3(x + 2(a-b)t))e^{ax+(a^2+2ab)t}}; \quad (19)$$

$$3) \ u = \frac{2x + k_2}{x^2 + k_2 x + k_3 + 6at} + a; \quad (20)$$

$$4) \ u = \frac{ck_1 e^{(c-a)x+((c-a)^2+3b^2)t} + bk_2 \cos(bx + 2b(a-c)t) - bk_3 \sin(bx + 2b(a-c)t)}{k_1 e^{(c-a)x+((c-a)^2+3b^2)t} + k_2 \sin(bx + 2b(a-c)t) + k_3 \cos(bx + 2b(a-c)t)} \quad (21)$$

Отже, використавши підстановку (2), ми легко знаходимо точні розв'язки рівняння (17). Розв'язок (20) можна знайти з використанням класичної лієвської симетрійної редукції, в той час як розв'язки (18), (19) і (21) — з використанням умовної (некласичної) симетрії.

Однак, існує і більш загальний підхід, який ґрунтується на безпосередньому знаходженні розв'язків нередукованого рівняння (6). У випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, $n = 3$ це рівняння і вихідне рівняння (4) мають такий вигляд

$$z(z_{xt} - z_{xxx}) = z_x(z_t - 6z_{xx}), \quad (22)$$

$$u_t - u_{xx} = -2u^3. \quad (23)$$

З використанням умовної симетрії точний розв'язок рівняння (23) був знайдений у вигляді

$$u = 2x \operatorname{ds} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad y = x^2 + 6t, \quad (24)$$

де $\operatorname{ds}(y, k)$ — еліптична функція Якобі, що задовольняє рівняння

$$\left(\frac{d\eta}{dy} \right)^2 = k^2(k^2 - 1) + (2k^2 - 1)\eta^2 + \eta^4. \quad (25)$$

Далі ми наводимо інші розв'язки рівняння (23), насправді нескінченну їх множину. Вихідним пунктом наших міркувань є дослідження умовної симетрії рівняння (22).

Теорема. *Рівняння (22) умовно інваріантне відносно оператора*

$$X = \frac{\partial}{\partial t} + \xi(t, x) \frac{\partial}{\partial x}$$

тоді і тільки тоді, коли функція $\xi = \xi(t, x)$ є розв'язком такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \xi_t - 3\xi_{xx} + 2\xi\xi_x &= 0, \\ \xi_{xt} - \xi_{xxx} + 2\xi_x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Теорема доводиться з використанням формул другого продовження оператора X і критерію умовної інваріантності рівняння відносно даного оператора.

Одним з розв'язків системи (26) є функція $\xi = -\frac{3}{x}$. Це означає, що рівняння (22) умовно інваріантне відносно оператора

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{3}{x} \frac{\partial}{\partial x},$$

інваріантом якого є функція $y = x^2 + 6t$. Тому є сенс шукати розв'язок рівняння (22) у вигляді

$$z = \varphi(y), \quad y = x^2 + 6t. \quad (27)$$

Підставивши (27) в (22), отримуємо диференціальне рівняння третього порядку для визначення функції φ

$$\varphi\varphi_{yyy} = 3\varphi_y\varphi_{yy}. \quad (28)$$

Поділивши ліву і праву частини (28) на $\varphi\varphi_{yy}$ і проінтегрувавши, матимемо

$$\varphi_{yy} = C\varphi^3, \quad C = \pm 2, \quad (29)$$

де C — стала інтегрування, яка може бути зведена до 2 у випадку $C > 0$ і до -2 у випадку $C < 0$, нормуючи φ .

У відповідності з (2), (27) будь-який розв'язок рівняння (29) генерує розв'язок рівняння (22) виду

$$u = \frac{2x\varphi_y}{\varphi}. \quad (30)$$

Точним розв'язком рівняння (29) для $C = 2$ є еліптична функція Якобі

$$\varphi(y) = \operatorname{ds}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad y = x^2 + 6t, \quad (31)$$

а тому розв'язок (30) набуває вигляду

$$u = u_1 = \frac{2x \operatorname{cs}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\operatorname{ds}\left(y, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}. \quad (32)$$

Випадок $C = -2$ приводить до того самого розв'язку (32). Розв'язок (32) відсутній в списку розв'язків рівняння (23) в еліптичних функціях.

Зауважимо, що розв'язок (24) можна записати у вигляді

$$u = y_x\varphi(y), \quad (33)$$

де φ і y є функціями, які визначені формулами (31). Більше того, розв'язок (32) можна отримати із формули (33), якщо в ній виконати заміну

$\varphi \rightarrow \frac{\varphi_y}{\varphi}$. Це зауваження відкриває шлях для побудови нескінченної множини точних розв'язків рівняння (23). Ці розв'язки ми знаходимо з використанням деяких властивостей еліптичних функцій, які сформульовані в наступних трьох твердженнях.

Твердження 1. *Нехай $\varphi = \varphi^{(n)}$ є розв'язком рівняння (29) для $C = 2$ або $C = -2$. Тоді*

$$\varphi^{(n+1)} = \frac{\varphi_y^{(n)}}{\varphi^{(n)}} \quad (34)$$

також є розв'язком рівняння (29).

Доведення цього твердження і наступних двох тверджень зводиться до безпосередньої перевірки. Зауважимо, що рівняння (29) рівносильне рівнянню

$$(\varphi_y^{(n)})^2 = (\varphi^{(n)})^4 + C_n, \quad (35)$$

де C_n — стала інтегрування. Тоді функція φ^{n+1} , визначена формулою (34), задовольняє рівняння

$$(\varphi_y^{(n+1)})^2 = (\varphi^{(n+1)})^4 + C_{n+1}, \quad C_{n+1} = -4C_n.$$

Твердження 2. *Нехай $\varphi^{(n)}$ є розв'язком рівняння (35) для $C_n > 0$. Тоді функція*

$$\tilde{\varphi}^{(n)} = \frac{\sqrt{C_n}}{\varphi^{(n)}} \quad (36)$$

теж є розв'язком рівняння (35).

Твердження 3. *Нехай $\varphi^{(n)}$ є розв'язком рівняння (35) для $C_n = -B_n < 0$. Тоді функція*

$$\hat{\varphi}^{(n)} = \frac{\sqrt{B_n}}{\varphi^{(n)}} \quad (37)$$

є розв'язком рівняння (29) для $C = -2$ і виконується таке співвідношення:

$$(\hat{\varphi}_y^{(n)})^2 = -(\hat{\varphi}^{(n)})^4 + B_n^2. \quad (38)$$

Використовуючи твердження 1 і 2 і починаючи з (33), ми знаходимо нескінченні множини розв'язків рівняння (23):

$$u_n = 2x\varphi^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (39)$$

і

$$\tilde{u}_{2k+1} = \frac{2^{k+1}x}{\tilde{\varphi}^{(2k+1)}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (40)$$

де $\varphi^{(n)}$ і $\tilde{\varphi}^{(2k+1)}$ визначаються формулами (34) і (36), а також рекурентними співвідношеннями

$$\varphi^{(n)} = \frac{\varphi_y^{n-1}}{\varphi^{n-1}}, \quad \varphi^{(0)} = \text{ds} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (41)$$

Для $n = 0, 1$ ми отримуємо із (39) і (40) розв'язки, визначені формулами (24), (32), в той час як для $n = 2, 3, \dots$ і $k = 0, 1, \dots$ маємо

$$u_2 = 2x \left[\frac{\text{cd} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \text{dc} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\text{sn} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)} - \text{cn} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ds} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right],$$

$$u_3 = \frac{2x \left(\text{cs}^4 \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \text{dn}^4 \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)}{\text{dn} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{cs} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{9}{4} \sqrt{2} \text{cn}^2 \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \text{ds}^2 \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)}, \quad (42)$$

.....

і

$$\tilde{u}_1 = \frac{2x \text{dn} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\text{cs} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)},$$

$$\tilde{u}_3 = \frac{4x \text{dn} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{cs} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{9}{4} \sqrt{2} \text{cn}^2 \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \text{ds}^2 \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right)}{\text{cs}^4 \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \text{dn}^4 \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}, \quad (43)$$

.....

Формули (32), (42) і (43) і рекурентні співвідношення (41) доповнюють список розв'язків в еліптичних функціях для рівняння (23), які були відомі раніше. Більше того, беручи до уваги інваріантність рівняння (23) відносно трансляцій незалежних змінних t і x , можна побудувати більш загальні розв'язки, зробивши в (32), (42) і (43) заміну $x \rightarrow x + k_1$, $t \rightarrow t + k_2$, де k_1 , k_2 — довільні сталі.

Твердження 1 і 2 дають можливість побудувати нескінченні множини точних розв'язків і для інших рівнянь типу (4).

Розглянемо спочатку рівняння (4) для $n = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, тобто

$$u_t - u_{xx} = -2u^3 + \lambda_1 u. \quad (44)$$

Не зменшуючи загальності, можна покласти $\lambda_1 = \pm 1$. У випадку $\lambda_1 = -1$ рівняння (44) рівносильне рівнянню Ньюела-Вайтхедта, якщо змінні t і x помножити на відповідні скаляри. Відповідне рівняння (6) має вигляд

$$z(z_{xt} - z_{xxx}) = z_x(z_t + \lambda_1 z - 3z_{xx}). \quad (45)$$

Якщо шукати розв'язки рівняння (45) у вигляді

$$z = \varphi(\xi), \quad \xi = k_1 \cosh(x + k_2) \exp(3t), \quad \lambda_1 = 1, \quad (46)$$

$$z = \varphi(\eta), \quad \eta = k_1 \cos(x + k_2) \exp(3t), \quad \lambda_1 = -1, \quad (47)$$

то отримуємо редуковане рівняння (29) для функції φ . Це дозволяє побудувати нескінченні множини точних розв'язків рівняння (44) у вигляді (24), (39)–(43), якщо в цих розв'язках зробити заміни $y \rightarrow \xi$, $2x \rightarrow \xi_x$ для $\lambda_1 = 1$ і $y \rightarrow \eta$, $2x \rightarrow \eta_x$ для $\lambda_1 = -1$.

Нарешті відзначимо, що твердження 3 дає можливість побудувати нескінченні множини точних розв'язків для рівняння (4) у випадку $n = -1$, $\lambda_4 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, тобто для рівнянь

$$u_t - u_{xx} = 2u^3, \quad (48)$$

$$u_t - u_{xx} = 2(u^3 + \varepsilon u), \quad (49)$$

які відрізняються від (23) і (44) тільки знаком при u^3 в правій частині. Анзаци (33), (46) або (47) редукують відповідно рівняння (48) і (49) до рівняння

$$\varphi'' = -2\varphi^3, \quad (50)$$

де подвійний штрих означає другу похідну по відповідній змінній (тобто y , ξ або η).

Згідно з твердженням 3 точні розв'язки для рівняння (50) мають вигляд (37), де $\varphi^{(n)}$ є розв'язком рівняння (41) для парного n . Відповідний список точних розв'язків рівняння (48) визначається такими формулами:

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 &= x \operatorname{sd} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ \hat{u}_2 &= \frac{4x \operatorname{sn} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\operatorname{cd} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{dc} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{cn} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{dn} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{sn} \left(y, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \hat{u}_{2k} &= \frac{2^k x}{\varphi^{(2k)}}, \end{aligned} \quad (51)$$

де $\varphi^{(2k)}$ визначається рекурентними співвідношеннями (41).

Розв'язки рівняння (49) можна отримати із формул (51) в результаті заміни $y \rightarrow \xi$, $x \rightarrow \xi_x$ і $y \rightarrow \eta$, $x \rightarrow \eta_x$ для $\varepsilon = 1$ і $\varepsilon = -1$ відповідно.

3.2 Нові точні розв'язки та їхні застосування для двох нелінійних моделей математичної біології

У цьому підрозділі ми викладемо висліди опубліковані в роботі [112]. Ми продемонструємо ефективність запропонованого автором методу додаткових породжуючих умов (див. Cherniha R. A constructive method for construction of new exact solutions of nonlinear evolution equations //

Rep. Math. Phys. — 1996. — Vol. 38. — P. 301–312) для знаходження точних розв’язків деяких крайових задач сформульованих для узагальненого рівняння Фішера та системи рівнянь Шіґесади–Кавасаки–Терамото (див. відповідні цитування в [112]).

Отже, розгляньмо таке узагальнення рівняння Фішера (УРФ)

$$U_t = [(\lambda_0 U + \lambda_1)U_x]_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2, \quad (52)$$

де $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ та $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, а $U = U(t, x)$ — шукана функція (скрізь нижче нижні індекси t та x означають диференціювання за цими змінними).

Рівняння (52) містить як частковий випадок класичне рівняння Фішера

$$U_t = U_{xx} + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2 \quad (53)$$

вперше запропоноване як математична модель для опису поширення генів. Пізніше виявилось, що воно застосовне для опису низки інших процесів (див., наприклад, книгу J.D. Murray, Mathematical Biology, Springer, Berlin, 1989). З біологічної точки зору рівняння (52) є більш точною моделлю, ніж рівняння Фішера (53), оскільки воно містить коефіцієнт дифузії $D = \lambda_0 U + \lambda_1$, який залежить від концентрації (густини) U , що в свою чергу є реальним фактором. У рівнянні (52) скрізь нижче припускається $\lambda_2 \lambda_3 > 0$, що власне впливає з суті описуваних біологічних процесів.

Необхідно наголосити, що рівняння Фішера можна розглядати як деяке спрощення (редукція) класичної дифузійної системи Лотки–Вольтерри

$$\begin{aligned} U_t &= d_1 U_{xx} + U(a_1 - b_1 U - c_1 V), \\ V_t &= d_2 V_{xx} + V(a_2 - b_2 U - c_2 V), \end{aligned} \quad (54)$$

де невід’ємні функції $U(t, x)$ і $V(t, x)$ репрезентують густини двох популяцій тварин, які змагаються за виживання (модель хижак-жертва), а невід’ємні сталі $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2$ характеризують гостроту змагання як всередині популяції одного виду, так і між ними.

Повністю аналогічним є зв'язок рівняння (52) з моделлю Шіґесаді–Кавасаки–Терамото

$$\begin{aligned} U_t &= [(d_1 + \rho_1 V)U]_{xx} + U(a_1 - b_1 U - c_1 V), \\ V_t &= [(d_2 + \rho_2 U)V]_{xx} + V(a_2 - b_2 U - c_2 V). \end{aligned} \quad (55)$$

Ця модель враховує вплив мутацій при змаганні двох популяцій.

Варто зауважити, що, починаючи з піонерських робіт Conway E., Smoller J. та інших (див. відповідні цитування в [112]), умови існування, єдиності та стійкості розв'язків систем (54)–(55) досліджувалися багатьма авторами. Проте практично відсутні роботи, в яких власне були би побудовані відповідні розв'язки у явному вигляді.

Відомо, що нові висліди, отримані для деякого скалярного рівняння, при певних припущеннях можуть бути перенесені на системи подібних рівнянь. Ми покажемо нижче, що побудова точних розв'язків УРФ (52) дає можливість побудувати і розв'язки системи рівнянь (55).

Неважко встановити, що рівняння (52) при довільно заданих коефіцієнтах λ_i , $i = 0, \dots, 3$, інваріантне відносно тривіальної алгебри Лі, породженої операторами $P_t = \frac{\partial}{\partial t}$ і $P_x = \frac{\partial}{\partial x}$. Окрім того при вище прийнятому обмеженні $\lambda_2 \lambda_3 > 0$, є лише два випадки, коли рівняння (52) допускає додаткові ліївські оператори та побудовано відповідні ліївські розв'язки [112]. Тут будуть побудовані неліївські розв'язки більш загального вигляду.

Отже, при $\lambda_1 \neq 0$, не втрачаючи загальності, рівняння (52) можна записати у вигляді

$$U_t = [(1 + \lambda_0 U)U_x]_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2. \quad (56)$$

Теорема 1. *Будь-який розв'язок системи ЗДР*

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = Q_{i_1 i} \varphi_{i_1} + R_{i_1 i} (\varphi_{i_1})^2 + T_{i_1 i_2}^i \varphi_{i_1} \varphi_{i_2}, \quad i = 0, \dots, m-1 \quad (57)$$

породжує точний розв'язок вигляду

$$U = \varphi_0(t)g_0(t, x) + \dots + \varphi_{m-1}(t)g_{m-1}(t, x), \quad (58)$$

де $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{m-1}(t)$ — шукані функції, $g_0(t, x) = 1, g_1(t, x), \dots, g_{m-1}(t, x)$ — фіксовані функції, УРФ (56), якщо функції $g_i, i = 0, \dots, m-1$ задовольняють умови

$$g_{i,xx} + \lambda_2 g_i - g_{i,t} = g_{i_1} Q_{ii_1}(t), \quad (59)$$

$$\lambda_0 g_i g_{i,xx} + \lambda_0 (g_{i,x})^2 - \lambda_3 (g_i)^2 = g_{i_1} R_{ii_1}(t), \quad (60)$$

$$\lambda_0 (g_i g_{j,xx} + g_j g_{i,xx}) + 2\lambda_0 g_{i,x} g_{j,x} - 2\lambda_3 g_i g_j = g_{i_1} T_{ij}^{i_1}(t), \quad i < j, \quad (61)$$

де функції $Q_{ii_1}, R_{ii_1}, T_{ij}^{i_1}$ в правій частині — це деякі функції, що мають бути визначені через вирази у лівій частині.

Застосуємо цю теорему для побудови сімей розв'язків нелінійного рівняння (52) при $\lambda_1 = 1$ з використанням додаткової породжуючої умови

$$\alpha_1(t) \frac{dU}{dx} + \alpha_2(t) \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^3U}{dx^3} = 0. \quad (62)$$

У найбільш загальному випадку умова (62) породжує анзаци

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) \exp(\gamma_1(t)x) + \varphi_2(t) \exp(\gamma_2(t)x), \quad (63)$$

якщо $\gamma_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{D} - \alpha_2)$ та $D = \alpha_2^2 - 4\alpha_1 > 0$ або ж

$$U = \varphi_0(t) + \left[\psi_1(t) \cos\left(\frac{1}{2}(-D)^{1/2}x\right) + \right. \\ \left. + \psi_2(t) \sin\left(\frac{1}{2}(-D)^{1/2}x\right) \right] \exp\left(-\frac{\alpha_2 x}{2}\right), \quad (64)$$

якщо $D = \alpha_2^2 - 4\alpha_1 < 0$. Функції $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t), \psi_1(t), \psi_2(t)$ мають бути знайденими.

У випадку $D = 0$, умова (62) породжує інші типи анзаців, але вони тут не розглядаються, оскільки застосування теореми для них призводить до суперечності з накладеним вище обмеженням $\lambda_2 \lambda_3 > 0$.

Виявляється, що величина $\gamma_0 = \frac{\lambda_3}{2\lambda_0}$ відіграє важливу роль для знаходження точних розв'язків рівняння (56), оскільки є два різні випадки: (i) $\gamma_0 > 0$ і (ii) $\gamma_0 < 0$.

Розгляньмо випадок (і). Підставляючи функції $g_0 = 1$, $g_1 = \exp(\gamma_1(t)x)$, $g_2 = \exp(\gamma_2(t)x)$ з анзатцу (63) у співвідношення (59)–(61), одержуємо

$$\begin{aligned} Q_{00} &= \lambda_2, & Q_{11} &= \lambda_2 + \gamma_1^2(t), & Q_{22} &= \lambda_2 + \gamma_2^2(t), \\ R_{00} &= -\lambda_3, & T_{12}^0 &= -2\lambda_3, & T_{01}^1 &= T_{02}^2 = -\frac{3}{2}\lambda_3 \end{aligned} \quad (65)$$

і

$$R_{ii_1} = Q_{ii_1} = T_{ij}^{i_1} = 0 \quad (66)$$

для всіх інших комбінацій індексів i , i_1 , $j = 0, 1, 2$ і $k = 1, 2$ не перерахованих в (65). Одночасно з'являється обмеження

$$\gamma_{1,2}(t) = \pm \sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}}. \quad (67)$$

З допомогою співвідношень (65)–(67), система (57) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= -\lambda_3\varphi_0^2 + \lambda_2\varphi_0 - 2\lambda_3\varphi_1\varphi_2, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{2\lambda_0}\right)\varphi_1 - \frac{3}{2}\lambda_3\varphi_0\varphi_1, \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{2\lambda_0}\right)\varphi_2 - \frac{3}{2}\lambda_3\varphi_0\varphi_2, \end{aligned} \quad (68)$$

розв'язуючи яку, одержуємо три-параметричну сім'ю точних розв'язків нелінійного рівняння (56)

$$\begin{aligned} \lambda_0 U &= \varphi_0(t) - 1 + \exp \left[\left(\lambda_2 + \frac{2\lambda_3}{\lambda_0} \right) t - \frac{3\lambda_3}{2\lambda_0} \int \varphi_0(t) dt \right] \times \\ &\times \left[c_1 \exp \left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}} x \right) + c_2 \exp \left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}} x \right) \right], \end{aligned} \quad (69)$$

де $\varphi_0(t)$ — довільний розв'язок інтегро-диференціального рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= -\frac{\lambda_3}{\lambda_0}\varphi_0^2 + \left(\lambda_2 + \frac{2\lambda_3}{\lambda_0} \right) \varphi_0 - \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{\lambda_0} \right) - \\ &- 2c_1c_2\frac{\lambda_3}{\lambda_0} \exp \left[2 \left(\lambda_2 + \frac{2\lambda_3}{\lambda_0} \right) t - \frac{3\lambda_3}{\lambda_0} \int \varphi_0(t) dt \right], \end{aligned} \quad (70)$$

яке в загальному випадку не вдалося проінтегрувати. Однак у частковому випадку, коли на довільні параметри c_1 і c_2 накладено умову $c_1 c_2 = 0$, рівняння (70) зводиться до нелінійного ЗДР першого порядку, яке інтегрується. А отже, знаходимо дво-параметричні сім'ї точних розв'язків нелінійного рівняння (56)

$$U = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3} \left[1 + \tanh \frac{\lambda_2(t-c_0)}{2} \right] + \frac{\exp \frac{(2\lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2)t}{4\lambda_0}}{\left(\cosh \frac{\lambda_2(t-c_0)}{2} \right)^{3/2}} \exp \left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}} x \right) \quad (71)$$

і

$$U = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3} \left[1 + \tanh \frac{\lambda_2(t-c_0)}{2} \right] + \frac{\exp \frac{(2\lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2)t}{4\lambda_0}}{\left(\cosh \frac{\lambda_2(t-c_0)}{2} \right)^{3/2}} \exp \left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}} x \right) \quad (72)$$

відповідно при $c_1 = 0$ і $c_2 = 0$.

Будь-який розв'язок U^* вигляду (72) має такі властивості: $U^* \rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$, якщо $t \rightarrow \infty$ і $\lambda_3 < \lambda_0 \lambda_2$; $U^* \rightarrow \frac{\lambda_2}{2\lambda_3} \left[1 + \tanh \frac{\lambda_2(t-c_0)}{2} \right] < \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$, якщо $x \rightarrow +\infty$, $\lambda_0 \lambda_3 > 0$.

У випадку (ii) застосування анзацу (64) дозволяє отримати сім'ю періодичних розв'язків нелінійного рівняння (56)

$$U = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) \sin \left(\sqrt{-\frac{\lambda_3}{2\lambda_0}} x \right), \quad (73)$$

де $\varphi_0(t)$ і $\varphi_1(t)$ — довільні розв'язки системи ЗДР

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= \lambda_2 \varphi_0 - \lambda_3 \varphi_0^2 - \frac{1}{2} \lambda_3 \varphi_1^2, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_3}{2\lambda_0} \right) \varphi_1 - \frac{3}{2} \lambda_3 \varphi_0 \varphi_1. \end{aligned} \quad (74)$$

На жаль, ця нелінійна система не інтегрується при довільних значеннях коефіцієнтів λ_0 , λ_2 і λ_3 . Проте це можна зробити при певних обмеженнях.

Зокрема, при $\lambda_0 = -1$, вдалося отримати загальний розв'язок системи (74), а саме:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \frac{\lambda_2}{3\lambda_3} \frac{3c_1 \exp\left(\frac{\lambda_2 t}{2}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)}{c_1 \exp\left(\frac{\lambda_2 t}{2}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)}, \\ \varphi_1 &= \pm \frac{2\lambda_2}{3\lambda_3} \frac{c_2 \exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)}{c_1 \exp\left(\frac{\lambda_2 t}{2}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)}.\end{aligned}\tag{75}$$

Отже, знаходимо дво-параметричну сім'ю періодичних розв'язків нелінійного рівняння (56) при $\lambda_0 = -1$

$$\begin{aligned}U &= \frac{\lambda_2 \exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)}{3\lambda_3 \left[c_1 \exp\left(\frac{\lambda_2 t}{2}\right) + c_2 \exp\left(-\frac{\lambda_2 t}{2}\right)\right]} \times \\ &\times \left[3c_1 \exp(\lambda_2 t) + c_2 \pm 2c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_3}{2}}x\right) \right].\end{aligned}\tag{76}$$

Для довільних додатних λ_2 і λ_3 будь-який періодичний розв'язок U^* вигляду (76) обмежений в області $(t, x) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$, і має властивість: $U^* \rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким чином, ми побудували дво-, трипараметричні сім'ї точних розв'язків УРФ, які за структурою принципово відрізняються від ліівських розв'язків, отриманих у попередньому параграфі. Відзначимо, що у часткових випадках при $\lambda_3 = -\lambda_0\lambda_2$ неліівські розв'язки (69) і (76) породжують розв'язки, які було отримано за допомогою операторів симетрії Лі в першому підрозділі першого розділу.

При математичному моделюванні біологічних процесів як в обмежених так і в необмежених областях найбільш типовими є нульові умови Ноймана на краях областей. Беручи до уваги властивості розв'язків (71) і (72), можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 2. *Нелінійна крайова задача для УРФ (56) при $\lambda_0 > 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda > 0$, початковій умові*

$$U(0, x) = C_0 + C_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda_0}}|x|\right),\tag{77}$$

і крайових умовах Ноймана

$$U_x(t, -\infty) = 0, \quad U_x(t, +\infty) = 0, \quad (78)$$

в області $(t, x) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ має точний додатний обмежений розв'язок

$$U = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \frac{\lambda(t - c_0)}{2} \right] + c_1 \frac{\exp \frac{\lambda(2+\lambda_0)t}{4\lambda_0}}{\left(\cosh \frac{\lambda(t-c_0)}{2} \right)^{3/2}} \exp \left(-\sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda_0}} |x| \right), \quad (79)$$

де $C_0 = \frac{1}{2} [1 + \tanh \frac{-\lambda c_0}{2}]$, $C_1 = c_1 (\cosh \frac{-\lambda c_0}{2})^{-3/2}$ та $c_1 > 0$.

Зауважимо, що розв'язок (79) не є аналітичним в точці $x = 0$, однак друга похідна тут коректно довізначається $U_{xx} \Big|_{x \rightarrow 0+} = U_{xx} \Big|_{x \rightarrow 0-}$, окрім того $U_x^2 \Big|_{x \rightarrow 0+} = U_x^2 \Big|_{x \rightarrow 0-}$. Отже, розв'язок задовольняє рівняння (56) і в точці $x = 0$. З другого боку недостатня гладкість розв'язку (79) веде до того, що він не може бути отриманим наближеними числовими методами. Дійсно, застосування відповідної програми для отримання наближеного розв'язку задачі (56), (77) і (78) веде до іншого розв'язку, який при $t > 0$ в околі точки $x = 0$ суттєво відрізняється від (79) (детальніше див. [113]). Іншими словами, ми маємо випадок неєдиності розв'язку розглядуваної задачі Ноймана в класі кусково-диференційовних функцій. Зауважимо, що приклади неєдиності крайових задач для інших нелінійних рівнянь реакції-дифузії наведено, наприклад, в книзі Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

Беручи до уваги властивості розв'язків вигляду (76), можемо сформулювати таку теорему.

Теорема 3. *Точний обмежений розв'язок нелінійної крайової задачі для УРФ (56) при $\lambda_0 = -1$ and $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \neq 0$, початковій періодичній*

умові

$$U(0, x) = C_0 + C_1 \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} x \right), \quad (80)$$

і крайових умовах Ноймана

$$U_x(t, A) = 0, \quad U_x(t, B) = 0, \quad (81)$$

в області $(t, x) \in [0, +\infty) \times [A, B]$ має вигляд

$$U = \frac{\exp \left(-\frac{\lambda t}{2} \right)}{3 \left[c_1 \exp \left(\frac{\lambda t}{2} \right) + c_2 \exp \left(-\frac{\lambda t}{2} \right) \right]} \times \\ \times \left[3c_1 \exp(\lambda t) + c_2 \pm 2c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} x \right) \right], \quad (82)$$

де $C_0 = \frac{3c_1+c_2}{3(c_1+c_2)}$, $C_1 = \pm \frac{2c_2}{3(c_1+c_2)}$, $A = \left(\frac{1}{2} + k_1 \right) \pi_\lambda$, $B = \left(\frac{1}{2} + k_2 \right) \pi_\lambda$, $\pi_\lambda = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \pi$, та $k_1 < k_2 \in \mathbb{Z}$.

На противагу попередньому випадку, застосування згаданої вище програми для отримання наближеного розв'язку задачі (56), (80) і (81) веде до такого ж розв'язку (детальніше див. [113]). Більше того, було встановлено цікавий факт: якщо у початкову умову (80) вносити локальні збурення різноманітного характеру (у формі додаткової “сходинки”, куска синусоїди тощо), то отримані наближені розв'язки дуже швидко еволюціонують до точного розв'язку (82). Це дає підстави стверджувати, що знайдена сім'я точних розв'язків (76) має дуже важливе значення при розв'язанні крайових задач Ноймана для УРФ (56) з широким спектром початкових умов. Зауважимо, що аналогічний факт спостерігається і щодо відомого солітоноподібного розв'язку для класичного рівняння Фішера.

На закінчення продемонструємо приклад застосування знайдених розв'язків рівняння (56) для побудови розв'язків системи Шігесади–Кавасакі–Терамото (55). Розгляньмо систему (55) з додатковим обмеженням

$$V = \beta_0 + \beta U, \quad \beta \neq 0, \quad (83)$$

де β_0, β — деякі дійсні параметри. Підставляючи обмеження (83) в систему (55), отримуємо перевизначену систему, яка має нетривіальні розв'язки при таких обмеженнях на коефіцієнти:

$$d_1 = d_2 \equiv \lambda = 1, \quad \rho_2 = \beta \rho_1, \quad \beta_0 \left(\beta_0 - \frac{a_2}{c_2} \right) = 0. \quad (84)$$

У припущенні (83)–(84), система (55) зводиться до УРФ вигляду

$$U_t = [(1 + 2\rho_1\beta U)U_x]_x + \lambda_2 U - \lambda_3 U^2, \quad (85)$$

де $\beta = \frac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1}$, $c_2 \neq c_1$, $\lambda_3 = b_1 + c_1\beta$ і

$$\lambda_2 = \begin{cases} a_1, & \beta_0 = 0, \\ a_1 - c_1 \frac{a_2}{c_2}, & \beta_0 = \frac{a_2}{c_2}. \end{cases} \quad (86)$$

Нагадаємо, що в системі (55) функції U і V задають густини (концентрації) двох конкуруючих видів у просторі і часі, d_1 і d_2 — коефіцієнти дифузії, ρ_1 і ρ_2 задають так звані тиски поперечної дифузії, a_1 і a_2 — коефіцієнти росту видів всередині самої популяції, b_1 і c_2 — коефіцієнти внутрішньовидового змагання в межах популяції, b_2 і c_1 — коефіцієнти змагання між видами.

Маючи вже знайдені розв'язки (71) і (72) узагальненого рівняння Фішера, можна сформулювати такі теореми для нелінійної системи (55).

Теорема 4. *Точний обмежений розв'язок нелінійної крайової задачі для системи Шіґесади-Кавасаки-Терамото*

$$\begin{aligned} U_t &= [(1 + \rho_1 V)U]_{xx} + U(a_1 - b_1 U - c_1 V), \\ V_t &= [(1 + \rho_1 \beta U)V]_{xx} + V(a_2 - b_2 U - c_2 V) \end{aligned} \quad (87)$$

при початкових умовах

$$\begin{aligned} U &= \frac{\lambda_2}{2\lambda_3} + c \exp \left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{4\rho_1\beta}} |x| \right) \equiv U_0(x), \\ V &= \frac{a_2}{c_2} + \beta U_0(x) \end{aligned} \quad (88)$$

і крайових умовах Ноймана

$$U_x(t, \pm\infty) = 0, \quad V_x(t, \pm\infty) = 0 \quad (89)$$

в області $(t, x) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ має вигляд

$$U = \frac{\lambda_2}{2\lambda_3} \left[1 + \tanh \frac{\lambda_2 t}{2} \right] + c \frac{\exp \frac{(\lambda_3 + \rho_1 \beta \lambda_2)t}{4\rho_1 \beta}}{\left(\cosh \frac{\lambda_2 t}{2} \right)^{3/2}} \exp \left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{4\rho_1 \beta}} |x| \right), \quad (90)$$

$$V = \frac{a_2}{c_2} + \beta U,$$

де $\rho_1 \beta > \frac{b_1}{2a_1}$, $\rho_1 < 0$, $\beta < 0$, $\beta = \frac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1} = -\frac{a_2 b_1}{a_1 c_2}$, $\lambda_2 = a_1 - c_1 \frac{a_2}{c_2} > 0$, $\lambda_3 = b_1 + c_1 \beta > 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Теорема 5. Точний обмежений розв'язок нелінійної крайової задачі для системи Шіґесади–Кавасаки–Терамото (87) при $a_1 = a_2 = a$ та початкових умовах

$$U = \frac{a(c_1 - c_2)}{2(b_2 c_1 - b_1 c_2)} + c \exp \left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{4\rho_1 \beta}} |x| \right) \equiv U_0(x), \quad (91)$$

$$V = \beta U_0(x)$$

і крайових умовах Ноймана (89) в області $(t, x) \in [0, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$ має вигляд

$$U = \frac{a(c_1 - c_2)}{2(b_2 c_1 - b_1 c_2)} \left[1 + \tanh \frac{at}{2} \right] +$$

$$+ c \frac{\exp \frac{a(1 + \rho_1 \beta)t}{4\rho_1 \beta}}{\left(\cosh \frac{at}{2} \right)^{3/2}} \exp \left(-\sqrt{\frac{\lambda_3}{4\rho_1 \beta}} |x| \right), \quad (92)$$

$$V = \frac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1} U,$$

де $\rho_1 \beta > 1/2$, $\rho_1 > 0$, $\beta = \frac{b_1 - b_2}{c_2 - c_1} > 0$, $\lambda_3 = b_1 + c_1 \beta > 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Легко помітити, що розв'язок (90) має властивість

$$(U, V) \rightarrow \left(\frac{a_1}{b_1}, 0 \right) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (93)$$

Мовою біологічних термінів це означає, що змагання між популяціями двох видів U і V є безкомпромісним і, врешті-решт, ріст популяції виду U веде до повного зникнення виду V .

Розв'язок (92) на нескінченності поводитьсь по-іншому:

$$(U, V) \rightarrow \left(\frac{a(c_2 - c_1)}{b_1c_2 - b_2c_1}, \frac{a(b_1 - b_2)}{b_1c_2 - b_2c_1} \right) \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty. \quad (94)$$

Це інтерпретується як випадок “м'якого” змагання між двома популяціями, яке допускає як завгодно довге співіснування видів. Зауважимо, що теореми існування розв'язків системи Шіґесади–Кавасаки–Терамото з властивостями (93)–(94) було доведено у роботі: Lou Y. and Ni W.-M., Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion. // *J. Diff. Eqs.*, 1996, V.131, 79–131.

3.3 Групова класифікація рівнянь конвекції–дифузії [42, 99]

Виконано групову класифікацію та побудовано точні інваріантні розв'язки рівнянь вигляду

$$f(x)u_t = (g(u)a(u)u_x)_x + b(u)u_x,$$

де $f = f(x)$, $g = g(x)$, $a = a(u)$ і $b = b(u)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, $f(x)g(x)a(u) \neq 0$.

Використовуючи перетворення $t \rightarrow t$, $x \rightarrow \int g(x)^{-1}dx$, $u \rightarrow u$, можна звести це рівняння до рівняння з $g(x) = 1$. Тому, не обмежуючи загальності, надалі розглядаємо клас

$$f(x)u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x. \quad (95)$$

Результат класичної групової класифікації для класу рівнянь (95) можна підсумувати наступним чином.

Теорема. *Алгеброю Лі ядра основних груп класу рівнянь (95) є алгебра $A^{\ker} = \langle \partial_t \rangle$.*

Теорема. Алгеброю Лі групи еквівалентності G^{equiv} класу (95) є алгебра

$$A^{\text{equiv}} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, t\partial_t + f\partial_f, x\partial_x - 2f\partial_f - b\partial_b, u\partial_u, f\partial_f + b\partial_b + a\partial_a \rangle.$$

Тоді група G^{equiv} містить наступні неперервні перетворення:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= te^{\varepsilon_4} + \varepsilon_1, & \tilde{x} &= xe^{\varepsilon_5} + \varepsilon_2, & \tilde{u} &= ue^{\varepsilon_6} + \varepsilon_3, \\ \tilde{f} &= fe^{\varepsilon_4 - 2\varepsilon_5 + \varepsilon_7}, & \tilde{a} &= ae^{\varepsilon_7}, & \tilde{b} &= be^{-\varepsilon_5 + \varepsilon_7}, \end{aligned}$$

де $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_7$ — довільні сталі. Для класу (95) також існує нетривіальна група дискретних перетворень еквівалентності, яка генерується чотирма інволютивними перетвореннями зміни знаку у множинах $\{t, a, b\}$, $\{x, b\}$, $\{u\}$ і $\{f, a, b\}$.

Використовуючи прямий метод, можна довести, що G^{equiv} співпадає з групою, яка генерується наведеними неперервними та дискретними перетвореннями.

Знайдено всі нееквівалентні відносно перетворень з G^{equiv} рівняння з класу (95), для яких $A^{\text{max}} \neq A^{\text{ker}}$. З точністю до G^{equiv} існує 35 випадків розширення ядра основних груп класу рівнянь (95).

Серед прокласифікованих рівнянь є рівняння з густиною f , локалізованою у просторі змінної x , які інваріантні відносно більш широкої ніж $A^{\text{ker}} = \langle \partial_t \rangle$ алгебри Лі.

Знайдено всі додаткові перетворення еквівалентності, що зводять рівняння з класифікації до більш простого вигляду. Фактично, рівняння з (95) прокласифіковано з точністю до двох різних відношень еквівалентності, що генеруються групою еквівалентності та множиною всіх можливих перетворень.

Сукупність отриманих результатів описує наступне твердження.

Теорема. Якщо рівняння вигляду (95) інваріантне відносно алгебри Лі розмірності не менше 4, його можна звести локальними перетвореннями до рівняння з $f(x) = 1$.

Для деяких підкласів редукованих рівнянь побудовано оптимальну систему нееквівалентних підалгебр, відповідні ліївські анзаци та точні інваріантні розв'язки. За допомогою додаткових перетворень еквівалентності отримані розв'язки переведено у розв'язки більш цікавих та складних рівнянь з локалізованою густиною.

3.4 Групова класифікація рівнянь Шрьодінгера [44, 41, 100, 101, 96]

Розв'язано задачу групової класифікації у класі $(1+1)$ -вимірних нелінійних рівнянь Шрьодінгера з потенціалом вигляду

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^\gamma \psi + V\psi = 0 \quad (96)$$

та $(1+n)$ -вимірних рівнянь

$$i\psi_t + \Delta\psi + k|x|^2\psi - f(|\psi|)\psi = 0 \quad (97)$$

($V = V(t, x)$, $f = f(|\psi|)$ — довільні гладкі комплекснозначні функції своїх аргументів, $\gamma \neq 0$ і k — дійсні сталі).

Фактично, для класу рівнянь (96) розв'язується три суттєво різні задачі класифікації: класифікація потенціалів, що залежать тільки від t , класифікація стаціонарних потенціалів та класифікація у загальному випадку.

Теорема. Група еквівалентності G^{equiv} класу (96) генерується сім'єю неперервних перетворень

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T, \quad \tilde{x} = x\sqrt{T_t} + X, \quad \tilde{\gamma} = \gamma, \\ \tilde{\psi} &= \psi \frac{1}{(T_t)^{1/\gamma}} \exp \left(\frac{i}{8} \frac{T_{tt}}{T_t} x^2 + \frac{i}{2} \frac{X_t}{\sqrt{T_t}} x + i\Psi \right), \\ \tilde{V} &= \frac{1}{T_t} \left(V + \frac{1}{8} \left(\frac{T_{tt}}{T_t} \right)_t x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{X_t}{\sqrt{T_t}} \right)_t x + i\frac{\hat{\gamma}}{4} \frac{T_{tt}}{T_t} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{4} \frac{T_{tt}}{T_t} x + \frac{1}{2} \frac{X_t}{\sqrt{T_t}} \right)^2 + \Psi_t \right) \end{aligned} \quad (98)$$

і двома дискретними перетвореннями: просторовим віддзеркаленням I_x ($\tilde{t} = t$, $\tilde{x} = -x$, $\tilde{\psi} = \psi$, $\tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{V} = V$) та часовим віддзеркаленням Вігнера I_t ($\tilde{t} = -t$, $\tilde{x} = x$, $\tilde{\psi} = \psi^*$, $\tilde{\gamma} = \gamma$, $\tilde{V} = V^*$). Тут T , X і Ψ — довільні гладкі функції змінної t , $T_t > 0$, $\hat{\gamma} = \gamma^{-1}(4 - \gamma)$.

Теорема. Повний перелік нееквівалентних випадків потенціалів V , які допускають розширення максимальної алгебри Лі інваріантності рівнянь (96), вичерпується потенціалами, наведеними у табл. 1.

Таблиця 1

Результати класифікації. $W(t), \nu, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

N	V	Базис алгебри $A^{\max}$
0	$V(t, x)$	M
1	$iW(t)$	$M, \partial_x, G(t)$
2	$\frac{i}{2} \frac{\hat{\gamma}t + \nu}{t^2 + 1}$	$M, \partial_x, G(t), D(t^2 + 1)$
3	$ivt^{-1}, \nu \neq 0, \frac{\hat{\gamma}}{2}$	$M, \partial_x, G(t), D(t)$
4	i	$M, \partial_x, G(t), \partial_t$
5	$0, \gamma \neq 4$	$M, \partial_x, G(t), \partial_t, D(t)$
	$\gamma = 4$	$M, \partial_x, G(t), \partial_t, D(t), D(t^2)$
6	$V(x)$	M, ∂_t
7	$(\alpha + i\beta)x^{-2}, \gamma \neq 4$	$M, \partial_t, D(t)$
	$\gamma = 4$	$M, \partial_t, D(t), D(t^2)$

Запропонований метод класифікації дозволяє сформулювати необхідні і достатні умови взаємної еквівалентності для випадків розширення максимальної алгебри інваріантності в алгебраїчних термінах. Класичні стаціонарні потенціали (вільної частинки, гармонійного і репульсивного осцилятора, вільного падіння, радіальної вільної частинки, радіального гармонійного і репульсивного осциляторів) природно виникають у груповій класифікації в класі стаціонарних потенціалів відносно групи еквівалентності цього класу. Використовуючи повну групу еквівалентності класу (96), побудовано у явному вигляді перетворення, що зводять ці

x -залежні потенціали до x -незалежних.

3.5 Групова класифікація узагальнених рівнянь ейконала [91]

Розглянемо рівняння вигляду

$$u_a u_a = F(t, u, u_t) \quad (99)$$

для однієї дійсної функції $u = u(t, x)$ від $n+1$ незалежних змінних $t = x_0$ і $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $n \geq 2$. Тут і надалі нижній індекс функції позначає диференціювання за відповідною змінною. Індекси a і b змінюються від 1 до n . За індексами, що повторюються, йде підсумовування. Клас рівнянь (99) включає як частинні випадки деякі відомі рівняння:

$$\begin{aligned} F &= 2mu_t && \text{— рівняння Гамільтона-Якобі;} \\ F &= u_t^2 - 1 && \text{— релятивістське рівняння Гамільтона;} \\ F &= u_t^2 && \text{— рівняння ейконала.} \end{aligned}$$

Виконаємо групову класифікацію рівнянь вигляду (99) за довільним елементом — гладкою функцією $F = F(t, u, u_t) \neq 0$. (Тут і надалі гладкість означає неперервну диференційовність.)

Ядро основних груп і група еквівалентності. Нехай інфінітезімальний оператор

$$Q = \xi^0(t, x, u) \partial_t + \xi^a(t, x, u) \partial_a + \eta(t, x, u) \partial_u$$

породжує однопараметричну групу симетрії рівняння (99). Тоді з інфінітезімального критерію інваріантності після переходу на многовид, заданий рівнянням (99) в продовженому просторі, та розщеплення за незв'язаними змінними отримаємо такі визначальні рівняння на коефіцієнти оператора Q :

$$\xi_b^a + \xi_a^b = 0, \quad \xi_a^a = \xi_b^b, \quad a \neq b \quad (100)$$

(підсумовування по a і b тут немає),

$$(\xi_t^a + \xi_u^a u_t) F_{u_t} - 2\xi_u^a F + 2\eta_a - 2u_t \xi_a^0 = 0, \quad (101)$$

$$\xi^0 F_t + \eta F_u + (\eta_t + (\eta_u - \xi_t^0)u_t - \xi_u^0 u_t^2)F_{u_t} = 2(\eta_u - \xi_1^1 - \xi_u^0 u_t)F. \quad (102)$$

Якщо не фіксувати функцію F , то розщеплюючи в (101) та (102) за “змінними” F , F_t , F_u , F_{u_t} , u_t , отримаємо $\eta = \xi^0 = 0$, $\xi_1^1 = 0$, $\xi_t^a = \xi_u^a = 0$, звідки з урахуванням (100) маємо наступне твердження.

Твердження. *Перетином максимальних груп локальних симетрій рівнянь вигляду (99) є група Евкліда $E(n)$, алгебра Лі якої*

$$A^{\ker} = e(n) = \langle \partial_a, J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a \rangle.$$

Максимальна група еквівалентності рівнянь (99) (тобто множина локальних перетворень в просторі “змінних” t , x , u , F , що не виводять з класу рівнянь (99), причому перетворення по t , x і u не залежать від F) співпадає з групою, породженою сукупністю однопараметричних груп локальних симетрій системи

$$u_a u_a = F, \quad w = u_t, \quad F_a = 0, \quad (103)$$

інфінітезімальні оператори яких мають вигляд

$$\begin{aligned} \widehat{Q} = & \hat{\xi}^0(t, x, u) \partial_t + \hat{\xi}^a(t, x, u) \partial_a + \hat{\eta}(t, x, u) \partial_u \\ & + \hat{\theta}(t, x, u, w) \partial_w + \hat{\chi}(t, x, u, w, F) \partial_F. \end{aligned}$$

З інфінітезімального критерію інваріантності для системи (103) після розщеплення за незв’язаними змінними отримаємо визначальні рівняння на коефіцієнти оператора $\widehat{Q}$, з яких випливає, що інфінітезімальний оператор будь-якої однопараметричної групи еквівалентності рівняння (99) є лінійною комбінацією операторів

$$\partial_a, \quad J_{ab}, \quad x_a \partial_a - 2F \partial_F, \quad \bar{\xi} \partial_t + \bar{\eta} \partial_u + 2(\bar{\eta}_u - \bar{\xi}_u u_t) F \partial_F, \quad (104)$$

де $\bar{\xi}$ і $\bar{\eta}$ — довільні гладкі функції змінних t і u . Отже, перетворення еквівалентності, що нетривіально діють на параметр F , мають вигляд

$$\tilde{t} = \zeta(t, u), \quad \tilde{u} = \varphi(t, u), \quad \tilde{x} = \delta x,$$

$$\tilde{F} = \delta^{-2}(\varphi_u - \zeta_u \tilde{u}_{\tilde{t}})^2 F = \delta^{-2} \left(\frac{\zeta_t \varphi_u - \zeta_u \varphi_t}{\zeta_t + \zeta_u u_t} \right)^2 F, \quad (105)$$

де δ — ненульова стала, ζ та φ — довільні гладкі функції змінних t і u , причому $\zeta_t \varphi_u - \zeta_u \varphi_t \neq 0$.

Якщо обмежити клас рівнянь (99), наклавши додаткову умову $F_t = 0$ (цей підклас виділяється при класифікації), то для обчислення відповідної групи еквівалентності цю умову необхідно приєднати до системи (103). В результаті група еквівалентності звужується: інфінітезімальний оператор будь-якої однопараметричної групи еквівалентності рівняння (99) з $F = F(u, u_t)$ є лінійною комбінацією оператора $t\partial_t$ та операторів (104), де функції $\bar{\xi}$ і $\bar{\eta}$ тепер залежать лише від змінної u , а тому перетворення еквівалентності, що нетривіально діють на параметр F , мають вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \hat{\delta}t + \zeta(u), \quad \tilde{u} = \varphi(u), \quad \tilde{x} = \delta x, \\ \tilde{F} &= \delta^{-2}(\varphi_u - \zeta_u \tilde{u}_{\tilde{t}})^2 F = \delta^{-2} \left(\frac{\hat{\delta}\varphi_u}{\hat{\delta} + \zeta_u u_t} \right)^2 F, \end{aligned} \quad (106)$$

де $\delta, \hat{\delta}$ — ненульові сталі, ζ та φ — довільні гладкі функції змінної u , причому $\varphi_u \neq 0$.

Подальше обмеження класу рівнянь (99) може призводити до появи перетворень еквівалентності вигляду (105), відмінних від (106) (див. доведення).

Результат класифікації. *Всі можливі випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності рівнянь (99) з точністю до перетворень еквівалентності (105) вичерпуються випадками з таблиці 1.*

Таблиця 1

	F	Базисні оператори симетрії
0	$F(t, u, u_t)$	∂_a, J_{ab}
1	$e^{\delta t} f(u, u_t), \delta \in \{0; 1\}$	$\partial_a, J_{ab}, 2\partial_t - \delta x_a \partial_a$
2	$e^u h(u_t)$	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, 2\partial_u - x_a \partial_a$
3	$ u ^{2-\delta} h(u_t), \delta \neq 2$	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, 2t\partial_t + 2u\partial_u + \delta x_a \partial_a$
4	$h(u_t)$	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, \partial_u, D$
5	e^{u_t}	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, \partial_u, D, x_a \partial_a - 2t\partial_u$
6	$ u_t ^\beta, \beta \neq 0, 1, 2$	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, \partial_u, D, (\beta - 2)x_a \partial_a - 2u\partial_u$
7	u_t^2	$2g_{\mu\nu}c^\mu(u)x_\nu x_\varkappa \partial_\varkappa - c^\varkappa(u)g_{\mu\nu}x_\mu x_\nu \partial_\varkappa + g_{\mu\nu}b^{\mu\varkappa}(u)x_\nu \partial_\varkappa +$ $+d(u)x_\varkappa \partial_\varkappa + a^\varkappa(u)\partial_\varkappa + \eta(u)\partial_u$
8	$\varepsilon_2 u_t^2 + \varepsilon_1$	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, \partial_u, D, J_{ua} = u\partial_a + \varepsilon_1 x_a \partial_u, J_{ta} = t\partial_a + \varepsilon_2 x_a \partial_t,$ $J_{ut} = u\partial_t - \varepsilon_1 \varepsilon_2 t\partial_u, K_a = 2x_a D - s^2 \partial_a, K_u = 2uD + \varepsilon_1 s^2 \partial_u,$ $K_t = 2tD + \varepsilon_2 s^2 \partial_t, \text{ де } s^2 = x_a x_a - \varepsilon_1 u^2 - \varepsilon_2 t^2$
9	$\varepsilon_2 e^u u_t^2 + \varepsilon_1$	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, t\partial_t + 2\partial_u, (t^2 - 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 e^u)\partial_t + 4t\partial_u$
10	$\cos^{-2} u u_t^2 + 1$	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, \cos t \tan u \partial_t - \sin t \partial_u, \sin t \tan u \partial_t + \cos t \partial_u$
11	$\pm(\cos^{-2} u u_t^2 - 1)$	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, \cosh t \tan u \partial_t + \sinh t \partial_u, \sinh t \tan u \partial_t + \cosh t \partial_u$
12	$\cosh^{-2} u u_t^2 + 1$	$\partial_a, J_{ab}, \partial_t, \cosh t \tanh u \partial_t - \sinh t \partial_u, \sinh t \tanh u \partial_t -$ $\cosh t \partial_u$

В таблиці 1 $F = F(t, u, u_t)$, $f = f(u, u_t)$, $h = h(u_t)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів, δ — стала, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq (-1, -1)$, $J_{ab} = x_a \partial_b - x_b \partial_a$, $D = t\partial_t + u\partial_u + x_a \partial_a$. У випадку 7 $g_{\mu\nu}$ — метричний тензор простору Мінковського $\mathbb{R}^{1,n}$, тобто $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$; c^μ , $b^{\mu\varkappa}$, d , $a^\varkappa$, η — довільні гладкі функції змінної u (для того, щоб оператори такого вигляду утворювали алгебру, необхідно вимагати, щоб ці функції були нескінченно диференційовними або дійсно-аналітичними); індекси $\mu, \nu, \varkappa$ змінюються від 0 до 3.

Зауважимо, що відомі рівняння (рівняння Гамільтона-Якобі і ей-

конала та релятивістське рівняння Гамільтона) виділяються в сім'ї рівнянь (99) як представники класів еквівалентних рівнянь, що мають найширшу симетрію.

3.6 Закони збереження [45, 43, 97]

Розроблено поняття еквівалентності законів збереження відносно групи перетворень, введено поняття лінійної залежності законів збереження та локальної залежності потенціалів, узагальнено прямий метод знаходження локальних та ітераційний метод побудови нелокальних (потенціальних) законів збереження.

Виконано класифікацію всіх локальних законів збереження для класу $(1+1)$ -вимірних рівнянь конвекції–дифузії

$$f(x)u_t = (g(x)a(u)u_x)_x + h(x)b(u)u_x$$

з точністю як до звичайної групи еквівалентності, так в до узагальненої групи еквівалентності, що містить нелокальні відносно параметр-функцій перетворення.

За допомогою прямого ітераційного методу побудовано локальні та нелокальні (потенціальні) закони збереження та відповідні потенціальні системи для класу рівнянь

$$u_t = (a(u)u_x)_x + b(u)u_x. \quad (107)$$

Підсумовуючи отримані результати, можна побудувати вичерпну ієрархію законів збереження (включаючи локальні) для даного класу рівнянь з точністю до групи еквівалентності, яка виглядає наступним чином

- “загальний” локальний закон збереження для довільних значень параметр-функцій a та b вигляду $D_t u + D_x(-a u_x - \int b) = 0$ (тут і надалі D_t , D_x — оператори повного диференціювання за змінними D_t та D_x відповідно, $\int a = \int a(u)du$, $\int b = \int b(u)du$);

- два незалежні локальні закони збереження: один “загальний” локальний закон збереження та один локальний закон збереження вигляду $D_t(xu) + D_x(\int a - xau_x) = 0$ якщо $b = 0$ або $D_t(e^x(e^x + \varepsilon)^{-2}v) + D_x(-e^x(e^x + \varepsilon)^{-1} \int a)$ якщо $b = a$;
- один “загальний” локальний та один найпростіший потенціальний закон збереження вигляду $D_te^v + D_x(-e^v \int a) = 0$, якщо $b = \int a + ua$ (потенціальна змінна v визначається як $v_x = u$, $v_t = au_x + \int b$);
- нескінченна серія локальних законів збереження для лінійного рівняння теплопровідності вигляду $D_t(\alpha u) + D_x(\alpha_x u - \alpha u_x) = 0$, де $\alpha(t, x)$ — довільний розв’язок лінійного рівняння теплопровідності $\alpha_t + \alpha_{xx} = 0$;
- один “загальний” локальний закон збереження та нескінченна серія найпростіших потенціальних законів збереження для рівняння Бюргерса вигляду $D_t(\alpha e^v) + D_x(\alpha_x e^v - \alpha u e^v) = 0$, де потенціальна змінна v визначається як $v_x = u$, $v_t = au_x + u^2$, а $\alpha(t, x)$ — довільний розв’язок лінійного рівняння теплопровідності $\alpha_t + \alpha_{xx} = 0$;
- два незалежні локальні закони збереження для рівняння u^{-2} -дифузії та рівняння Фокаша–Йортсосу як підкласів з $b = 0$ та $b = a$ та додатково нескінченна серія найпростіших потенціальних законів збереження $(D_t\sigma + D_x(\sigma_v u^{-1}) = 0$ для рівняння u^{-2} -дифузії і $D_t(\sigma e^x) + D_x(\sigma_v u^{-1} e^x) = 0$ для рівняння Фокаша–Йортсосу). Тут потенціальна змінна v визначається як $v_x = u$, $v_t = au_x + \int b$, $\sigma(t, v)$ — довільний розв’язок лінійного рівняння теплопровідності $\sigma_t + \sigma_{vv} = 0$.

Показано, що ієрархія законів збереження генерує повний перелік локально нееквівалентних потенціальних систем для класу (107):

- “загальна” потенціальна система $v_x = u$, $v_t = au_x + \int b$;
- додаткові найпростіші потенціальні системи $v_x = xu$, $v_t = xau_x - \int a$ або $v_x = (e^x + \varepsilon)u$, $v_t = (e^x + \varepsilon)au_x + \varepsilon \int a$, якщо $b = 0$ або $b = a$ відповідно;

- потенціальні системи другого рівня $v_x = u$, $w_x = v$, $w_t = \int a$ та $v_x = u$, $w_x = e^x v$, $w_t = e^x \int a$ (які, фактично, еквівалентні об'єднанню потенціальних систем першого рівня) при $b = 0$ або $b = a$ відповідно;
- система $v_x = \alpha u$, $v_t = \alpha u_x - \alpha_x u$ з довільною кількістю локально незалежних потенціалів для лінійного рівняння теплопровідності.

3.7 Потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії для класу $(1+1)$ -вимірних рівнянь конвекції–дифузії [98]

Для потенціальної системи, що відповідає спільному для всіх значень параметр–функцій закону збереження рівняння (107) виконано повну групову класифікацію. Знайдено 8 нееквівалентних випадків розширення алгебри Лі ядра основних груп $A_{\text{pot}}^{\text{ker}} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_v \rangle$, оператори симетрії з яких генерують лише лівські симетрії вихідного рівняння та 12 нееквівалентних випадків розширення алгебри $A_{\text{pot}}^{\text{ker}}$, оператори симетрії з яких генерують потенціальні симетрії вихідного рівняння.

Побудовано потенціальні перетворення еквівалентності і потенціальні симетрії для даного класу рівнянь та досліджено зв'язок між потенціальними і класичними симетріями за допомогою потенціальних перетворень еквівалентності. Доведено, що всі потенціальні симетрії можна отримати з лівських симетрій рівнянь вигляду (107) за допомогою продовження на потенціал v і застосування потенціальних перетворень еквівалентності.

3.8 Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку [16]

Розглянемо клас еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t + uu_1 = F(u_2, u_3, \dots, u_n), \quad (108)$$

де $u = u(t, x)$, $u_t = \partial u / \partial t$, $u_k = \partial^k u / \partial x^k$, $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, F — довільна гладка функція змінних $u_2, u_3, \dots, u_n$. Важливість цього класу рівнянь і необхідність його дослідження обумовлена кількома причинами. Перш за все, він містить як частинні випадки низку відомих рівнянь математичної фізики:

$$\begin{aligned} F = 0 & \quad \text{— рівняння простої хвилі;} \\ F = \mu u_2 & \quad \text{— рівняння Бюргерса;} \\ F = \nu u_3 & \quad \text{— рівняння Кортевега-де Фріза;} \\ F = \mu u_2 + \nu u_3 & \quad \text{— рівняння Кортевега-де Фріза-Бюргерса;} \\ F = \mu u_2 + \gamma u_4 & \quad \text{— рівняння Курамото-Сивашинського.} \end{aligned}$$

Крім того, частинна похідна по часу входить в рівняння (108) у складі “матеріальної похідної” $\partial / \partial t + u \partial / \partial x$, яка співпадає з повною похідною по часу d/dt у випадку, коли u інтерпретують як швидкість переміщення частинок певного середовища (в ейлерових координатах). Наявність такого агрегату (разом із структурою функції F) гарантує виконання для всіх рівнянь з класу (108) принципу відносності Галілея, тобто інваріантність відносно групи Галілея $G(1, 1)$, що породжується перетвореннями зсуву за часом t і просторовою змінною x ($t' = t + a$, $x' = x + b$, $u' = u$) та перетвореннями Галілея ($t' = t$, $x' = x + vt$, $u' = u + v$).

В цій роботі виконано групову класифікацію в вужчому, ніж (108), класі рівнянь вигляду

$$u_t + uu_1 = F(u_n), \quad F_{u_n} \neq 0, \quad (109)$$

тобто розглянуто випадок, коли функція F залежить лише від старшої похідної u_n . Вперше класифікацію таких рівнянь для $n \in \{2; 3; 4\}$ проведено В.М. Бойком та В.І. Фушичем, де для них також побудовано класи точних розв’язків та отримано узагальнення, що мають широку симетрію. На відміну від попередніх результатів, значення n тут не фіксується, що суттєво ускладнює доведення класифікаційного результату.

2. Результат класифікації. Введемо позначення:

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \quad G = t\partial_x + \partial_u,$$

$$D^k = (nk - k + 1)t\partial_t + (2 - k)x\partial_x + (1 - nk)u\partial_u,$$

$$D = (n + 1)D^{3/(n+1)} = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u,$$

$$D' = 2D - (2n - 1)(t^2\partial_x + 2t\partial_u), \quad \widehat{D} = 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u,$$

$$R_1 = u\partial_x, \quad R_2 = (2tu - x)\partial_x + u\partial_u, \quad R_3 = (tu - x)(t\partial_x + \partial_u).$$

Результат групової класифікації щодо рівнянь вигляду (109) сформульовано у вигляді трьох наступних теорем.

Теорема 1. *Ядро основних груп рівнянь вигляду (109) співпадає з групою Галілея $G(1, 1)$, алгебра Лі якої $A^{\ker} = AG(1, 1) = \langle P_0, P_1, G \rangle$.*

Теорема 2. *Група еквівалентності G^{equiv} класу рівнянь (109) породжується операторами $P_0, P_1, G, t\partial_t + x\partial_x - F\partial_F, x\partial_x + u\partial_u + F\partial_F, t^2\partial_x + 2t\partial_u + 2\partial_F$. Для будь-якого перетворення еквівалентності на функцію F має вигляд*

$$\widetilde{F}(u_n) = \delta_1 F(\delta_2 u_n) + \delta_0, \quad \text{де} \quad \delta_0, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}, \quad \delta_1 \delta_2 \neq 0. \quad (110)$$

Зауваження. При виведенні формули (110) (щоб зняти вимогу додатності для констант δ_1 і δ_2) використовувались також два дискретних перетворення еквівалентності рівнянь (109):

$$\tilde{t} = -t, \quad \tilde{x} = -x, \quad \tilde{u} = u, \quad \tilde{F} = -F \quad \text{та}$$

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x} = -x, \quad \tilde{u} = -u, \quad \tilde{F} = -F.$$

Теорема 3. *З точністю до перетворень з G^{equiv} для рівнянь (109) існує лише чотири при $n = 2$ і три при $n > 2$ випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності $A^{\max} = A^{\max}(F)$ (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до $AG(1, 1)$):*

$$1. F = (u_n)^k, \quad k \neq 0, \frac{3}{n+1}: \quad D^k;$$

2. $F = \ln u_n: \quad D'$;
3. $F = (u_n)^{\frac{3}{n+1}}: \quad D, \Pi$;
4. $F = (u_2)^{\frac{1}{3}} \quad (n = 2): \quad \widehat{D}, R_1, R_2, R_3$.

В доведенні класифікаційного результату використовується така лема.

Лема 1. *Для довільного еволюційного рівняння*

$$u_t = H(t, x, u, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad \text{де } n \geq 2, \quad H_{u_n} \neq 0,$$

коефіцієнт ξ^t при ∂_t в будь-якому інфінезимальному операторі, що породжує однопараметричну групу локальних перетворень симетрії цього рівняння, не залежить від x і u .

3.9 Групова класифікація одно- та двовимірних рівнянь Фокера–Планка [1]

Здійснено повну групову класифікацію одновимірного рівняння ФП для довільних коефіцієнтів зносу і дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(t, x)u] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(t, x)u]. \quad (111)$$

Окрім цього, розглянуто ряд інших задач, які тісно зв'язані із теоретико-алгебраїчними дослідженнями рівняння (111). Для дослідження симетрійних властивостей рівняння (111) використано алгоритм Лі.

У подальших дослідженнях ми використовуємо заміни змінних

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = X(t, x), \quad u = v(t, x)\tilde{u}, \\ \frac{dT}{dt} &\neq 0, \quad X_x \neq 0, \quad v \neq 0, \end{aligned} \quad (112)$$

які зберігають вигляд рівняння (111) незмінним.

Теорема. *Якщо рівняння ФП (111) допускає хоча б один оператор симетрії Q ($Q \neq u\partial_u$, $Q \neq f(t, x)\partial_u$, де $f(t, x)$ — довільний розв'язок рівняння (111)), то існує перетворення вигляду (112), яке зводить його*

до рівняння (111), де $A = \tilde{A}(\tilde{x})$, $B = \tilde{B}(\tilde{x})$, або до рівняння теплопровідності.

Наслідок. Рівняння ФП (111) може мати алгебри інваріантностей розмірності 1, 2, 4, 6.

Найбільш цікавими із теоретико-групового погляду є випадки, коли задане рівняння має найбільш високі симетрійні властивості. Такими, очевидно, для рівняння ФП будуть випадки, коли воно допускає алгебри інваріантності розмірності 4 та 6. Знайдено умови інваріантності рівняння ФП (111) відносно 4- та 6-вимірних алгебр інваріантності.

У роботі [Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.: Физматгиз. — 1963. — 860 с.] показано, що будь-який дифузійний процес із коефіцієнтом знесення $A(t, x)$ і коефіцієнтом дифузії $B(t, x)$ можна звести за допомогою випадкової заміни часу $\tau(t)$ до дифузійного процесу із коефіцієнтами $\tilde{A}(t, x) = A(t, x)/B(t, x)$ і $\tilde{B}(t, x) = 1$. У роботі [Ciconga G., Vitali D. Classification on the extended symmetries of the Fokker-Planck equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1990. — 23. — L85–L88.] було показано, що рівняння ФП (111), де $A(t, x) = A(x)$, $B(t, x) = 1$, може мати шести-, чотири- і двопараметричну групи перетворень. Використовуючи результат теореми 3.1, проведено аналогічну групову класифікацію рівняння ФП для коефіцієнта $B(t, x) = 1$ і довільного коефіцієнта $A(t, x)$.

Теорема. Нехай в рівнянні ФП (111) $B(t, x) = 1$, а функція $A(t, x)$ задовольняє рівняння

$$A_t + \frac{1}{2}A_{xx} + AA_x = \lambda(x - H(t))^{-3} + F(t)x + G(t), \quad (113)$$

де H , F , G — довільні гладкі функції, $\lambda \in \mathbb{R}$. Тоді, якщо в (113) $\lambda \neq 0$, а G задовольняє рівність

$$G = H'' - FH, \quad (114)$$

то рівняння ФП допускає чотиривимірну алгебру інваріантності. Якщо в (113) $\lambda = 0$, то рівняння ФП допускає шестивимірну алгебру інваріантності.

Розглянуто рівняння

$$L \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [A_1(x, y) u] + \frac{\partial}{\partial y} [A_2(x, y) u] - \frac{1}{2} B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{2} B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (115)$$

де B_1, B_2 — сталі. Знайдено умови на коефіцієнти, за яких рівняння ФП (115) має 9-вимірну максимальну алгебру інваріантності, тобто такої ж розмірності як і алгебра інваріантності двовимірного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (116)$$

Теорема. *Рівняння ФП (115) допускає 9-вимірну алгебру інваріантності тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти знесення та дифузії задовольняють такі умови:*

$$\begin{aligned} A_{1x} + \frac{(A_1)^2}{B_1} + A_{2y} + \frac{(A_2)^2}{B_2} &= c_1 x^2 + c_2 x + c_3 y^2 + c_4 y + c_5, \\ A_{1y} B_2 &= A_{2x} B_1. \end{aligned} \quad (117)$$

Тут c_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) — довільні дійсні сталі інтегрування.

3.10 Квазі-точно розв'язні моделі Шрьодінгера [2, 103, 8]

В останній час багато робіт (див., напр. [Turbiner A.V. *Quasi-exactly solvable problems and sl_2 algebra* // *Commun. Math. Phys.* — 1988. — **118**. — P. 467–474., Ushveridze A.G. *Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics.* — Bristol: IOP Publishing, 1993.] було присвячено проблемі побудові точно та квазі-точно розв'язних моделей Шрьодінгера

$$\hat{H}[x]\psi(x) = [\partial_x^2 + V(x)]\psi(x) = \lambda\psi(x). \quad (118)$$

В роботі [Spichak S., Zhdanov R. *On algebraic classification of Hermitian quasi-exactly solvable matrix Schrödinger operators on line* // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1999. — **32**. — P. 3815–3831.] знайдено досить широкі класи квазі-точно розв'язних матричних моделей Шрьодінгера, які мають

Лі-алгебраїчну структуру. Щодо точно розв'язних моделей, то описано лише декілька конкретних прикладів [Shifman M.A., Turbiner A.V. *Quantal problems with partial algebraization of the spectrum* // *Commun. Math. Phys.* — 1989. — **126**. — P. 347–365., Finkel F., González-López A., Rodríguez M.A. *Quasi-exactly solvable spin 1/2 Schrödinger operators* // *hep-th/9509057*, 1995.].

Нами знайдено багато-параметричні сім'ї таких моделей. Наведемо вигляд цих моделей.

Випадок 1.

$$\begin{aligned}
& [\tilde{\beta}^2 < 0, \varepsilon \neq 0, \beta_1 \neq \beta_2] \wedge [\{\lambda, \gamma_0, \beta_0, \varepsilon(\beta_1 - \beta_2), \\
& \delta_1(\beta_1 - \beta_2) + \beta_3\delta_3, \delta_3\} \subset \mathbb{R}] \\
& \wedge \left[\mu = \alpha_0 = \alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} = -\gamma_0\lambda + 2\alpha_1\frac{\tilde{\beta}\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\beta}^2} = \right. \\
& \left. = \alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} + 2\alpha_2\frac{\tilde{\beta}\tilde{\varepsilon}}{\tilde{\beta}^2} = 0 \right], \\
& \hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2e^{2x} + \alpha_1e^x)} [(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\beta}^2)e^{2x} + \\
& + (8\alpha_1\gamma_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\beta}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\beta}^2 + \gamma_0^2)] + \\
& + \left(P \cos \left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\beta}^2} + \Omega \right) + \frac{\varepsilon(\beta_1 - \beta_2)}{\sqrt{-\tilde{\beta}^2}}e^{-x} \times \right. \\
& \times \cos \left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\beta}^2} \right) \Big) \sigma_1 + \left(P \sin \left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\beta}^2} + \Omega \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\varepsilon(\beta_1 - \beta_2)}{\sqrt{-\tilde{\beta}^2}}e^{-x} \sin \left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\beta}^2} \right) \right) \sigma_3 \Big|_{x=z^{-1}(y)},
\end{aligned}$$

где

$$P = \sqrt{\delta_3^2 - \frac{(\tilde{\beta}\tilde{\delta})^2}{\tilde{\beta}^2}}, \quad \cos \Omega = \frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{P\sqrt{-\tilde{\beta}^2}}, \quad \sin \Omega = \frac{\delta_3}{P},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\beta}\tilde{\varepsilon}}\tilde{\varepsilon}\sigma\right) \cdot \exp(\nu\sigma_3), \quad e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\beta}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Випадок 2.

$$[\tilde{\beta}^2 < 0, \varepsilon = 0, \beta_1 \neq \beta_2, (\tilde{\beta}\tilde{\delta})^2 - \tilde{\delta}^2\tilde{\beta}^2 > 0] \wedge [\lambda \in \mathbb{R}].$$

Підвипадок 2.1.

$$\begin{aligned} & \left[\delta_3 = \alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} = \alpha_1\lambda - \beta_0 - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} = \right. \\ & \quad \left. = -\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} = 0 \right] \wedge [\gamma_0, \beta_0 \in \mathbb{R}], \\ \hat{H}[y] &= \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2e^{2x} + \alpha_1e^x + \alpha_0)} [(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - \\ & \quad - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\beta}^2)e^{2x} + (4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 - \\ & \quad - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\beta}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\beta}^2 + \gamma_0^2)] + \\ & \quad + \frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\sqrt{-\tilde{\beta}^2}} \left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\beta}^2}\right)\sigma_1 + \right. \\ & \quad \left. + \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\beta}^2}\right)\sigma_3 \right] \Big|_{x=f^{-1}(y)}, \end{aligned}$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\beta}\tilde{\delta}}\right) \exp(\nu\sigma_3), \quad e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\beta}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Підвипадок 2.2.

$$\begin{aligned} & \left[\delta_3 = 0, \gamma_0 = -\alpha_0, \lambda = -2\frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right] \wedge [\gamma_0, i\beta_0 \in \mathbb{R}], \\ \hat{H}[y] &= \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2e^{2x} + \alpha_1e^x + \alpha_0)} [(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - \\ & \quad - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\beta}^2)e^{2x} + (4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\lambda\tilde{\beta}^2)e^x - \\ & \quad - 4(\lambda^2\tilde{\beta}^2 + \gamma_0^2)] + \frac{i\lambda\beta_0}{2(\alpha_2e^{2x} + \alpha_1e^x + \alpha_0)} \sqrt{-\tilde{\beta}^2}\sigma_2e^x + \end{aligned}$$

$$+ \frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\sqrt{-\tilde{\beta}^2}} \left[\cos \left(\theta(x) \sqrt{-\tilde{\beta}^2} \right) \sigma_1 + \right. \\ \left. + \sin \left(\theta(x) \sqrt{-\tilde{\beta}^2} \right) \sigma_3 \right] \Big|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp \left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\beta}\tilde{\delta}} \right) \exp(\nu\sigma_3), \quad e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\beta}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Підвипадок 2.3.

$$[\delta_1 = 0, \beta_1^2 - \beta_2^2 \neq 0] \wedge \left[\left\{ i \left(\alpha_2 \lambda - \beta_0 + 2\alpha_2 \frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right), \right. \right. \\ \left. \left. i \left(\alpha_1 \lambda - \beta_0 \lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1 \frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right), i \left(-\gamma_0 \lambda + 2\alpha_0 \frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right), \right. \right. \\ \left. \left. 2\alpha_2 \gamma_0 - \beta_0^2, \alpha_1 \gamma_0 - \alpha_0 \beta_0 - \gamma_0 \beta_0, \gamma_0^2 \right\} \subset \mathbb{R} \right],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)} [(\alpha_1^2 + 8\alpha_2 \gamma_0 - 4\beta_0^2 - \\ - 4\tilde{\beta}^2) e^{2x} + (4\alpha_0 \alpha_1 + 8\alpha_1 \gamma_0 - 8\alpha_0 \beta_0 - \\ - 8\gamma_0 \beta_0 - 8\lambda \tilde{\beta}^2) e^x - 4(\lambda^2 \tilde{\beta}^2 + \gamma_0^2)] + \\ + \frac{1}{2(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)} \left[\left(\alpha_2 \lambda - \beta_0 + 2\alpha_2 \frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right) e^{2x} + \right. \\ \left. + \left(\alpha_1 \lambda - \beta_0 \lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1 \frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right) e^x + \right. \\ \left. + \left(-\gamma_0 \lambda + 2\alpha_0 \frac{\tilde{\beta}\tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right) \right] i \sqrt{-\tilde{\beta}^2} \sigma_2 + \\ + \frac{\delta_3 \sqrt{\beta_1^2 - \beta_2^2}}{\sqrt{\tilde{\beta}^2}} \left[\cos \left(\theta(x) \sqrt{-\tilde{\beta}^2} \right) \sigma_3 - \right. \\ \left. - \sin \left(\theta(x) \sqrt{-\tilde{\beta}^2} \right) \sigma_1 \right] \Big|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp(\nu \sigma_3) \exp(\chi \sigma_1),$$

$$e^{2\nu} = \sqrt{\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1}}, \quad e^{2\chi} = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2} - \beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2} + \beta_3}}.$$

Підвипадок 2.4.

$$[\delta_1, \delta_3 \neq 0] \wedge \left[\left\{ i \left(\alpha_2 \lambda - \beta_0 + 2\alpha_2 \frac{\tilde{\beta} \tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right), \right. \right. \\ \left. \left. i \left(\alpha_1 \lambda - \beta_0 \lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1 \frac{\tilde{\beta} \tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right), i \left(-\gamma_0 \lambda + 2\alpha_0 \frac{\tilde{\beta} \tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right), \right. \right. \\ \left. \left. 2\alpha_2 \gamma_0 - \beta_0^2, \alpha_1 \gamma_0 - \alpha_0 \beta_0 - \gamma_0 \beta_0, \gamma_0^2 \right\} \subset \mathbb{R} \right],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)} [(\alpha_1^2 + 8\alpha_2 \gamma_0 - \\ - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\beta}^2) e^{2x} + (4\alpha_0 \alpha_1 + 8\alpha_1 \gamma_0 - 8\alpha_0 \beta_0 - \\ - 8\gamma_0 \beta_0 - 8\lambda \tilde{\beta}^2) e^x - 4(\lambda^2 \tilde{\beta}^2 + \gamma_0^2)] + \\ + \frac{1}{2(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)} \left[\left(\alpha_2 \lambda - \beta_0 + 2\alpha_2 \frac{\tilde{\beta} \tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right) e^{2x} + \right. \\ \left. + \left(\alpha_1 \lambda - \beta_0 \lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1 \frac{\tilde{\beta} \tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right) e^x + \right. \\ \left. + \left(-\gamma_0 \lambda + 2\alpha_0 \frac{\tilde{\beta} \tilde{\delta}}{\tilde{\beta}^2} \right) \right] i \sqrt{-\tilde{\beta}^2} \sigma_2 + \\ + \sqrt{\frac{\tilde{\delta}^2 \tilde{\beta}^2 - (\tilde{\beta} \tilde{\delta})^2}{\tilde{\beta}^2}} \left[\cos \left(\theta(x) \sqrt{-\tilde{\beta}^2} \right) \sigma_1 - \right. \\ \left. - \sin \left(\theta(x) \sqrt{-\tilde{\beta}^2} \right) \sigma_3 \right] \Big|_{x=f^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp(\nu \vec{\alpha} \vec{\sigma}) \cdot \exp(\chi \sigma_3), \quad \alpha = \frac{\delta_3 \tilde{\beta} - \beta_3 \tilde{\delta}}{\sqrt{\tilde{\beta}^2}},$$

$$e^{2\nu \vec{\alpha}^2} = \sqrt{\frac{\delta_1(\beta_1 - \beta_2) - \sqrt{\delta_3(\beta_1 - \beta_2)[\delta_3(\beta_1 + \beta_2) - 2\delta_1 \beta_3]}}{\delta_1(\beta_1 - \beta_2) + \sqrt{\delta_3(\beta_1 - \beta_2)[\delta_3(\beta_1 + \beta_2) - 2\delta_1 \beta_3]}}}.$$

Величина χ визначена наступним чином. Під дією перетворень Λ_1 на $\frac{\tilde{\beta}^2 \tilde{\delta} \sigma - (\tilde{\beta} \tilde{\delta}) \tilde{\beta} \sigma}{\tilde{\beta}^2}$ отримуємо деяку матрицю $\mathbf{b}\sigma$. Компоненти вектора $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$ пов'язані з χ таким співвідношенням

$$e^{2\chi} = \sqrt{\frac{ib_1 + b_2}{ib_1 - b_2}}.$$

У випадку, коли параметри не задовольняють вищевказаним умовам (випадки 1, 2), отримані ермітові оператори Шрьодінгера мають діагональний вигляд, а саме

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + h(x) + g(x)\sigma_3|_{x=f^{-1}(y)}. \quad (119)$$

3.11 Нелінійні узагальнення рівнянь Максвелла [104]

Розглянуто рівняння Максвелла в вакуумі записані в комплексній формі:

$$\vec{\nabla} \vec{\Sigma} = 0, \quad \partial_0 \vec{\Sigma} + i \vec{\nabla} \times \vec{\Sigma} = 0, \quad (120)$$

де $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$, $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{\Sigma} = \vec{E} + i \vec{H}$ є комплексно значний вектор електромагнітного поля.

Як відомо, система (120) інваріантна відносно лінійного представлення алгебри Пуанкаре $AP(1, 3)$ з базисними операторами

$$AP^{\text{lin}}(1, 3) = \langle P_\mu, J_{ab}^{\text{lin}}, J_{0a}^{\text{lin}} \rangle, \quad (121)$$

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{ab}^{\text{lin}} = x_a \partial_b - x_b \partial_a + \Sigma_a \partial_{\Sigma_b} - \Sigma_b \partial_{\Sigma_a},$$

$$J_{0a}^{\text{lin}} = x_0 \partial_a + x_a \partial_0 + N_a^{\text{lin}}, \quad \vec{N}^{\text{lin}} = (N_1^{\text{lin}}, N_2^{\text{lin}}, N_3^{\text{lin}}) = i \vec{\Sigma} \times \vec{\nabla}_\Sigma,$$

$$\mu = \overline{0, 3},$$

де $\vec{\nabla}_\Sigma = \left(\frac{\partial}{\partial \Sigma_1}, \frac{\partial}{\partial \Sigma_2}, \frac{\partial}{\partial \Sigma_3} \right)$.

В роботі [Fushchych W., Tsyfra I. and Boyko V., *Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields*, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 1994, V.1, N 2, 210–221.], було знайдено нелінійне представлення алгебри $AP(1, 3)$:

$$AP^{\text{nli}}(1, 3) = \langle P_\mu, J_{ab}^{\text{nli}}, J_{0a}^{\text{nli}} \rangle, \quad (122)$$

$$P_\mu = \partial_\mu, \quad J_{ab}^{\text{nli}} = J_{ab}^{\text{lin}}, \quad J_{0a}^{\text{nli}} = x_0 \partial_a + x_a \partial_0 + N_a^{\text{nli}},$$

$$\vec{N}^{\text{nli}} = (N_1^{\text{nli}}, N_2^{\text{nli}}, N_3^{\text{nli}}) = \vec{\nabla}_\Sigma - \vec{\Sigma}(\Sigma_k \partial_{\Sigma_k}), \quad k = 1, 2, 3.$$

Теорема. Рівняння Максвелла (120) інваріантне відносно представлення (122) алгебри $AP(1, 3)$ тоді і тільки тоді, коли задовольняються наступні умові:

$$\begin{aligned} [\partial_0 + \vec{\Sigma} \vec{\nabla}] \Sigma^k &= 0, \\ [\vec{\nabla} + \vec{\Sigma} \partial_0 - i \vec{\Sigma} \times \vec{\nabla}] \Sigma^k &= 0, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (123)$$

Окрім цього, система (120) інваріантна відносно лінійного представлення $AP^{\text{lin}}(1, 3)$ (121).

Наслідок. Існує інше представлення алгебри Пуанкаре, відносно якого розглянута система теж інваріантна:

$$AP^3(1, 3) = \langle P_\mu, J_{ab}^3, J_{0a}^3 \rangle, \quad J_{ab}^3 = x_a \partial_b - x_b \partial_a - \frac{i}{2} \varepsilon_{abc} (N_c^{\text{lin}} + N_c^{\text{nli}}) \quad (124)$$

$$J_{0a}^3 = x_0 \partial_a + x_a \partial_0 + N_a^3 = \frac{1}{2} (J_{0a}^{\text{lin}} + J_{0a}^{\text{nli}}).$$

У статті [Fushchych W. and Tsyfra I., On new Galilei and Poincaré invariant nonlinear equations for electromagnetic fields, *J. Nonlinear Math. Phys.*, 1997, V.4, N 1-2, 44-48.] розглядається наступне узагальнення рівнянь Максвелла:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{\Sigma} &= A(\omega) \partial_0 \omega, \\ \partial_0 \vec{\Sigma} + i \vec{\nabla} \times \vec{\Sigma} &= A(\omega) \vec{\nabla}(\omega), \end{aligned} \quad (125)$$

де ω є інваріант представлення (121) алгебри $AP^{\text{lin}}(1, 3)$.

Теорема. Система рівнянь

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \vec{\Sigma} &= A(\Omega) \partial_0 \Omega + B(\Omega) \vec{\Sigma} \vec{\nabla} \Omega, \\ \partial_0 \vec{\Sigma} + i \vec{\nabla} \times \vec{\Sigma} &= A(\Omega) \vec{\nabla}(\Omega) + B(\Omega) (\vec{\Sigma} \partial_0 \Omega - i \vec{\Sigma} \times \vec{\nabla} \Omega), \end{aligned} \quad (126)$$

інваріантна відносна лінійного представлення алгебри Пуанкаре (121) с довільними $A(\Omega)$, $B(\Omega)$, а відносно нелінійного представлення (122) тоді і тільки тоді, коли $A = B = 1$. В цьому випадку права частина цих рівнянь співпадає с лівими частинами рівнянь (123), якщо зробить підстановку $\Sigma^k \rightarrow \Omega$.

3.12 Відокремлення змінних в рівняннях Шрьодінгера та Паулі [29, 31, 30, 32]

В роботах [29, 32] одержано повний розв'язок як прямої так і оберненої класифікаційних задач відокремлення змінних в $(1+3)$ -вимірному рівнянні Шредінгера для частинки, що рухається в електромагнітному полі,

$$(p_0 - p_a p_a) \psi(t, \vec{x}) = 0, \quad (127)$$

де $\psi(t, \vec{x})$ — комплексна функція дійсних змінних t, x_1, x_2, x_3 . Тут і надалі використано позначення

$$p_0 = i\partial/\partial t - eA_0(t, \vec{x}), \quad p_a = -i\partial/\partial x_a - eA_a(t, \vec{x}), \quad a = 1, 2, 3, \quad (128)$$

де $A(t, \vec{x}) = (A_0(t, \vec{x}), A_1(t, \vec{x}), A_2(t, \vec{x}), A_3(t, \vec{x}))$ — вектор-потенціал електромагнітного поля, e — електричний заряд частинки. Також тут і надалі, за індексами a, b, c , що повторюються, передбачено підсумовування від 1 до 3.

Введемо нову систему координат $t, \omega_a = \omega_a(t, \vec{x})$, $a = 1, 2, 3$, де ω_a — дійсні функції, які є функціонально незалежними як функції змінних x_1, x_2, x_3 , тобто має місце умова

$$\det \left\| \frac{\partial \omega_a}{\partial x_b} \right\|_{a,b=1}^3 \neq 0. \quad (129)$$

Традиційним є таке розуміння методу відокремлення змінних, згідно з яким рівняння Шредінгера (127) допускає відокремлення змінних в системі координат $t, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, якщо кожен розв'язок рівняння (127) є лінійною комбінацією частинних розв'язків вигляду $F_0(t)F_1(\omega_1)F_2(\omega_2)F_3(\omega_3)$.

Але в рамках такого підходу до відокремлення змінних важко отримати якийсь класифікаційний результат. За основу береться таке означення відокремлення змінних.

Означення 1. Будемо казати, що рівняння Шредінгера (127) допускає відокремлення змінних в системі координат t , $\omega_a = \omega_a(t, \vec{x})$, $a = 1, 2, 3$, якщо існують деяка ненульова функція $Q(t, \vec{x})$ і чотири звичайні диференціальні рівняння

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_0(t) &= U_0(t, \varphi_0(t); \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ \ddot{\varphi}_a(\omega_a) &= U_a(\omega_a, \varphi_a(\omega_a), \dot{\varphi}_a(\omega_a); \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad a = 1, 2, 3,\end{aligned}\quad (130)$$

праві частини яких аналітично залежать від трьох незалежних комплексних параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (сталих відокремлення), такі, що для кожної трійки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ та для кожної множини розв'язків $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_3(\omega_3)$ системи (130) функція

$$\psi(t, \vec{x}) = Q(t, \vec{x})\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3) \quad (131)$$

є розв'язком рівняння (127).

Тут $Q(t, \vec{x})$, $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_3(\omega_3)$ — комплексні функції дійсних змінних.

Означення 2. Три комплексні параметри $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в системі рівнянь (130) називаються незалежними, якщо 4×3 — матриця

$$\left\| \frac{\partial U_\mu}{\partial \lambda_a} \right\|_{\mu=0}^3_{a=1} \quad (132)$$

має ранг 3 скрізь, де $\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1)\varphi_2(\omega_2)\varphi_3(\omega_3) \neq 0$.

Умова (132) гарантує істотну залежність розв'язків з відокремленими змінними від сталих відокремлення $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Зауважимо, що формули (131)–(132) є вхідними даними методу. Тобто, кожену із цих умов можна модифікувати, узагальнюючи тим самим традиційне означення відокремлення змінних. Наприклад, якщо добуток

функцій в (131) замінити на суму, то одержується анзац для адитивного відокремлення змінних у нелінійному рівнянні Гамільтона–Якобі. Окрім цього можна змінювати порядок редукованих рівнянь (130) і зменшувати кількість суттєвих параметрів λ_a .

Отже, коли ми стверджуємо, що отримано повний опис вектор–потенціалів та систем координат, в яких рівняння Шредінгера допускає відокремлення змінних, то розуміємо це лише в рамках нашого означення. Якщо ж використати інше означення, то, в принципі, можна побудувати нові вектор–потенціали та системи координат, в яких рівняння Шредінгера допускає відокремлення змінних. Перевагою означення, що використовується авторами, полягає в тому, що воно дає можливість отримати як всі відомі так і принципово нові розв’язки рівняння Шредінгера з відокремленими змінними.

Далі ми вводимо відношення еквівалентності на множині вектор–потенціалів $A_0(t, \vec{x})$, $\vec{A}(t, \vec{x})$, для яких рівняння Шредінгера допускає відокремлення змінних, а також на множині розв’язків з відокремленими змінними та множині відповідних систем координат. Зокрема, два вектор–потенціали $A(t, \vec{x})$ і $A'(t, \vec{x})$ є еквівалентними, якщо вони зв’язані між собою за допомогою калібровних перетворень, а дві системи координат $t, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ та $t', \omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$ є еквівалентними, якщо вони зв’язані між собою за допомогою оборотних перетворень такого вигляду:

$$t \rightarrow t' = f_0(t), \quad \omega_a \rightarrow \omega'_a = f_a(\omega_a), \quad a = 1, 2, 3, \quad (133)$$

$$Q \rightarrow Q' = Q l_0(t) l_1(\omega_1) l_2(\omega_2) l_3(\omega_3). \quad (134)$$

Дійсно, в результаті перетворень (133) та (134) структура анзацу (131) не змінюється. А тому, провівши відокремлення змінних в цих системах координат, отримаємо один і той же розв’язок з відокремленими змінними.

Далі у [29, 32] сформульовано алгоритм методу відокремлення змінних, який полягає у послідовному виконанні наступних кроків.

1. Здійснюється підстановка анзацу (131) в рівняння Шредінгера (127) і визначаються похідні $\dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2, \ddot{\varphi}_3$ в термінах функцій $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ із використанням рівнянь (130).
2. Функції $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ розглядаються як нові незалежні змінні $y_1, \dots, y_{10}$. Оскільки функції $Q, \omega_1, \omega_2, \omega_3, A_0, A_1, A_2, A_3$ не залежать від змінних $y_1, \dots, y_{10}$, то природною є вимога, щоб отримана рівність перетворювалася в тотожність для довільних $y_1, \dots, y_{10}$. Інакше кажучи, виникає можливість її розщеплення за цими змінними. Таке розщеплення приводить до перевизначеної системи нелінійних ДРЧП для невідомих функцій $Q, \omega_1, \omega_2, \omega_3, A_0, A_1, A_2, A_3$.
3. Для вичерпного опису вектор–потенціалів $A(t, \vec{x})$, для яких рівняння Шредінгера допускає відокремлення змінних, та відповідних систем координат проводиться розв’язування системи нелінійних ДРЧП, отриманої на попередньому кроці.

Окрім цього, у [31] доведено теорему про зв’язок між можливістю відокремлення змінних та симетрійними властивостями даного рівняння.

Теорема 1. *Нехай рівняння Шредінгера (127) допускає відокремлення змінних в сенсі означення 1. Тоді для відповідного розв’язку з відокремленими змінними завжди існують три взаємно комутуючі лінійні диференціальні оператори симетрії другого порядку рівняння Шредінгера, такі, що цей розв’язок з відокремленими змінними є спільною власною функцією цих операторів, а сталі відокремлення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ є їх власними значеннями.*

Для доведення цієї теореми здійснено побудову вищезгаданих операторів у явному вигляді.

В [31, 32] з використанням описаного вище алгоритму одержано повний розв’язок задачі відокремлення змінних в $(1+3)$ -вимірному рівнянні Шредінгера із вектор–потенціалом електромагнітного поля.

Використовуючи перетворення еквівалентності (134), завжди можна звести редуковані рівняння (130) до вигляду

$$\begin{aligned} i\dot{\varphi}_0 &= (T_0(t) - T_b(t)\lambda_b) \varphi_0, \\ \ddot{\varphi}_a &= (F_{a0}(\omega_a) + F_{ab}(\omega_a)\lambda_b) \varphi_a, \quad a = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (135)$$

де T_0, T_b, F_{a0}, F_{ab} — деякі гладкі функції відповідних аргументів.

На другому кроці алгоритму отримано систему десяти нелінійних ДРЧП для восьми функцій $A_0, A_1, A_2, A_3, Q, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, які залежать від чотирьох змінних t, x_1, x_2, x_3

$$\frac{\partial \omega_b}{\partial x_a} \frac{\partial \omega_c}{\partial x_a} = 0, \quad b \neq c, \quad b, c = 1, 2, 3; \quad (136)$$

$$\sum_{a=1}^3 F_{ab}(\omega_a) \frac{\partial \omega_a}{\partial x_c} \frac{\partial \omega_a}{\partial x_c} = T_b(t), \quad b = 1, 2, 3; \quad (137)$$

$$2 \left(\frac{\partial Q}{\partial x_b} - ieQA_b \right) \frac{\partial \omega_a}{\partial x_b} + Q \left(i \frac{\partial \omega_a}{\partial t} + \Delta \omega_a \right) = 0, \quad a = 1, 2, 3; \quad (138)$$

$$\begin{aligned} Q \sum_{a=1}^3 F_{a0}(\omega_a) \frac{\partial \omega_a}{\partial x_b} \frac{\partial \omega_a}{\partial x_b} + i \frac{\partial Q}{\partial t} + \Delta Q - 2ieA_b \frac{\partial Q}{\partial x_b} + \\ + Q \left(T_0(t) - ie \frac{\partial A_b}{\partial x_b} - eA_0 - e^2 A_b A_b \right) = 0. \end{aligned} \quad (139)$$

Зауважимо, що коефіцієнти T_0, T_a, F_{a0}, F_{ab} є довільними функціями, які мають бути визначеними в процесі інтегрування рівнянь (136)–(139). Побудовано загальний розв'язок цієї системи, що, зокрема, дає усі можливі форми вектор–потенціалу електромагнітного поля $A(t, \vec{x}) = (A_0(t, \vec{x}), \dots, A_3(t, \vec{x}))$, для яких рівняння (127) розв'язується методом відокремлення змінних, а також відповідні системи координат.

Інтегрування рівнянь (136)–(137) дає найбільш загальний вигляд систем координат $t, \omega_a = \omega_a(t, \vec{x})$, $a = 1, 2, 3$, в яких рівняння Шредінгера (127) допускає відокремлення змінних в сенсі означення 1. З точністю до відношення еквівалентності (133) ці системи координат визначаються такою формулою:

$$\vec{x} = \mathcal{O}(t) \mathcal{L}(t) (\vec{z}(\vec{\omega}) + \vec{w}(t)) \quad (140)$$

(тобто $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ є функціями $t, \vec{x}$, задані неявно). Тут $\mathcal{O}(t)$ — ортогональна 3×3 -матриця, яка визначається кутами Ейлера; $\vec{w}(t)$ — вектор-стовпчик, елементи якого $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ є довільними гладкими функціями t ; функції $\vec{z} = \vec{z}(\vec{\omega})$ визначаються однією із таких 11 формул:

1. $z_1 = \omega_1, \quad z_2 = \omega_2, \quad z_3 = \omega_3,$
 $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbf{R}.$
2. $z_1 = e^{\omega_1} \cos \omega_2, \quad z_2 = e^{\omega_1} \sin \omega_2, \quad z_3 = \omega_3,$
 $0 \leq \omega_2 < 2\pi, \quad \omega_1, \omega_3 \in \mathbf{R}.$
3. $z_1 = (\omega_1^2 - \omega_2^2)/2, \quad z_2 = \omega_1 \omega_2, \quad z_3 = \omega_3,$
 $\omega_1 > 0, \quad \omega_2, \omega_3 \in \mathbf{R}.$
4. $z_1 = a \cosh \omega_1 \cos \omega_2, \quad z_2 = a \sinh \omega_1 \sin \omega_2, \quad z_3 = \omega_3,$
 $\omega_1 > 0, \quad -\pi < \omega_2 \leq \pi, \quad \omega_3 \in \mathbf{R}, \quad a > 0.$
5. $z_1 = \omega_1^{-1} \operatorname{sech} \omega_2 \cos \omega_3,$
 $z_2 = \omega_1^{-1} \operatorname{sech} \omega_2 \sin \omega_3,$
 $z_3 = \omega_1^{-1} \tanh \omega_2,$
 $\omega_1 > 0, \quad \omega_2 \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \omega_3 < 2\pi.$
6. $z_1 = a \operatorname{csch} \omega_1 \operatorname{sech} \omega_2 \cos \omega_3, \quad a > 0,$
 $z_2 = a \operatorname{csch} \omega_1 \operatorname{sech} \omega_2 \sin \omega_3,$
 $z_3 = a \coth \omega_1 \tanh \omega_2,$
 $\omega_1 > 0, \quad \omega_2 \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \omega_3 < 2\pi.$ (141)
7. $z_1 = a \csc \omega_1 \operatorname{sech} \omega_2 \cos \omega_3, \quad a > 0,$
 $z_2 = a \csc \omega_1 \operatorname{sech} \omega_2 \sin \omega_3,$
 $z_3 = a \cot \omega_1 \tanh \omega_2,$
 $0 < \omega_1 < \pi/2, \quad \omega_2 \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \omega_3 < 2\pi.$
8. $z_1 = e^{\omega_1 + \omega_2} \cos \omega_3, \quad z_2 = e^{\omega_1 + \omega_2} \sin \omega_3,$
 $z_3 = (e^{2\omega_1} - e^{2\omega_2})/2,$
 $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \omega_3 \leq 2\pi.$

9. $z_1 = 2a \cosh \omega_1 \cos \omega_2 \sinh \omega_3, \quad a > 0,$
 $z_2 = 2a \sinh \omega_1 \sin \omega_2 \cosh \omega_3,$
 $z_3 = a(\cosh 2\omega_1 + \cos 2\omega_2 - \cosh 2\omega_3)/2,$
 $\omega_1, \omega_3 \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq \omega_2 < \pi.$
10. $z_1 = a \frac{1}{\operatorname{sn}(\omega_1, k)} \operatorname{dn}(\omega_2, k') \operatorname{sn}(\omega_3, k), \quad a > 0,$
 $z_2 = a \frac{\operatorname{dn}(\omega_1, k)}{\operatorname{sn}(\omega_1, k)} \operatorname{cn}(\omega_2, k') \operatorname{cn}(\omega_3, k),$
 $z_3 = a \frac{\operatorname{cn}(\omega_1, k)}{\operatorname{sn}(\omega_1, k)} \operatorname{sn}(\omega_2, k') \operatorname{dn}(\omega_3, k),$
 $0 < \omega_1 < K, \quad -K' \leq \omega_2 \leq K', \quad 0 \leq \omega_3 \leq 4K.$
11. $z_1 = \omega_1^{-1} \operatorname{dn}(\omega_2, k') \operatorname{sn}(\omega_3, k),$
 $z_2 = \omega_1^{-1} \operatorname{cn}(\omega_2, k') \operatorname{cn}(\omega_3, k),$
 $z_3 = \omega_1^{-1} \operatorname{sn}(\omega_2, k') \operatorname{dn}(\omega_3, k),$
 $\omega_1 > 0, \quad -K' \leq \omega_2 \leq K', \quad 0 \leq \omega_3 \leq 4K.$

Тут ми використали стандартні позначення для тригонометричних, гіперболічних функцій та еліптичних функцій Якобі з модулем k ($0 < k < 1$) та $k' = (1 - k^2)^{1/2}$. І, нарешті, $\mathcal{L}(t)$ — діагональна залежна від часової змінної t 3×3 матриця

$$\mathcal{L}(t) = \operatorname{diag}(l_1(t), l_2(t), l_3(t)), \quad (142)$$

де $l_1(t), l_2(t), l_3(t)$ — довільні гладкі функції, тотожно не рівні нулеві, що задовольняють такі умови:

- $l_1(t) = l_2(t)$ — для випадків частково розщеплюваних систем координат 2–4 із (141),
- $l_1(t) = l_2(t) = l_3(t)$ — для випадків нерозщеплюваних систем координат 5–11 із (141).

Зазначимо, що якщо в формулі (140) покласти сталими функції $\alpha, \beta, \gamma, l_1, l_2, l_3, w_1, w_2, w_3$, то ми отримаємо добре відомі системи координат,

що забезпечують відокремлення змінних для стаціонарного рівняння Шредінгера з трьома просторовими змінними.

Тепер неважко проінтегрувати рівняння (138) та (139), оскільки їх можна розглядати як алгебраїчні рівняння відносно функцій $A_b(t, \vec{x})$, $b = 1, 2, 3$ та $A_0(t, \vec{x})$ відповідно.

Доведено, що рівняння (127) допускає відокремлення змінних в сенсі означення 1 лише тоді, коли магнітне поле $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ є однорідним, тобто незалежним від $\vec{x}$. Більше того, просторові компоненти вектор-потенціалу електромагнітного поля з точністю до калібровних перетворень завжди можна звести до вигляду

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -H_3(t) & H_2(t) \\ H_3(t) & 0 & -H_1(t) \\ -H_2(t) & H_1(t) & 0 \end{pmatrix} \vec{x} = \frac{1}{2} \vec{H}(t) \times \vec{x}. \quad (143)$$

При цьому одержано 11 класів потенціалів A_0 , для яких рівняння (127) розв'язується методом відокремлення змінних принаймні в одній із 11 перерахованих вище систем координат. Наприклад, загальний вигляд потенціалу (в термінах $\omega_1, \omega_2, \omega_3$), для якого рівняння (127) допускає відокремлення змінних в класі сферичних координат 5, є таким:

$$eA_0 = -e^2 A_b A_b + T_0(t) + l_1^{-2} \omega_1^4 F_{10}(\omega_1) + l_1^{-2} \omega_1^2 \cosh^2 \omega_2 (F_{20}(\omega_2) + F_{30}(\omega_3)) - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 \left(\ddot{l}_1 l_1 (z_a + w_a)^2 + 2l_1 (l_1 \ddot{w}_a + 2\dot{l}_1 \dot{w}_a)(z_a + w_a) + l_1^2 \dot{w}_a^2 \right). \quad (144)$$

Тут $F_{10}(\omega_1), F_{20}(\omega_2), F_{30}(\omega_3), T_0(t)$ — довільні функції, функції z_1, z_2, z_3 задані формулами 5 із переліку (141), а $l_1(t), w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ — функції, що визначають вигляд нових систем координат (140). Окрім цього, явний вигляд ортогональної матриці $\mathcal{O}(t)$ з кутами Ейлера $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ визначається із системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} eH_1(t) &= -\dot{\gamma} \cos \alpha - \dot{\beta} \sin \alpha \sin \gamma, \\ eH_2(t) &= -\dot{\gamma} \sin \alpha + \dot{\beta} \cos \alpha \sin \gamma, \end{aligned}$$

$$eH_3(t) = -\dot{\alpha} - \dot{\beta} \cos \gamma.$$

Далі, для кожного із 11 класів отриманих потенціалів вказано явний вигляд редукованих рівнянь та розв'язків з відокремленими змінними. Наприклад, для рівняння Шредінгера з вектор-потенціалом (143)–(144) розв'язки з відокремленими змінними мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi = & l_1^{-\frac{3}{2}} \exp \left\{ \sum_{a=1}^3 \frac{i}{4} \left(l_1 l_1 (z_a + w_a)^2 + 2l_1^2 w_a (z_a + w_a) \right) \right\} \times \\ & \times \varphi_0(t) \varphi_1(\omega_1) \varphi_2(\omega_2) \varphi_3(\omega_3), \end{aligned}$$

де звичайні диференціальні рівняння для визначення функцій $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_3(\omega_3)$ такі:

$$\begin{aligned} i\dot{\varphi}_0 &= (T_0(t) - l_1^{-2} \lambda_1) \varphi_0, & \ddot{\varphi}_1 &= (\lambda_1 \omega_1^{-4} - \lambda_2 \omega_1^{-2} + F_{10}(\omega_1)) \varphi_1, \\ \ddot{\varphi}_2 &= (\lambda_2 \operatorname{sech}^2 \omega_2 - \lambda_3 + F_{20}(\omega_1)) \varphi_2, & \ddot{\varphi}_3 &= (\lambda_3 + F_{20}(\omega_1)) \varphi_3. \end{aligned}$$

Далі запропоновано конструктивний алгоритм побудови всіх систем координат, в яких (1+3)-вимірне рівняння Шредінгера з фіксованим вектор-потенціалом допускає відокремлення змінних. Ефективність цього алгоритму продемонстровано на прикладі вектор-потенціалу

$$2e\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 & -c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad eA_0 = \frac{q}{|\vec{x}|} - \frac{c^2}{12} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2), \quad (145)$$

де q , c — довільні ненульові сталі. Оскільки цей вектор-потенціал задовольняє рівняння Максвелла без струмів для вакууму, він є природним узагальненням стандартного потенціалу Кулона, який одержується з (145), коли $c \rightarrow 0$. Доведено, що рівняння Шредінгера (127) з потенціалом (145) допускає відокремлення змінних в сенсі означення 1 лише в сферичній, конічній системах координат, та в координатах витягнутого сфероїда. При цьому кожна із цих систем координат неперервно обертається за допомогою залежної від часової змінної ортогональної матриці поворотів 3×3 з кутами Ейлера $\alpha = \alpha(t) = -ct$, $\beta = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$.

Для кожної із перерахованих систем координат процедуру відокремлення змінних було здійснено в повному обсязі, а саме вказано явний вигляд редукованих рівнянь та розв'язків з відокремленими змінними. Також для кожної із цих систем координат побудовано відповідні трійки взаємно комутуючих лінійних диференціальних операторів симетрії другого порядку.

У кінці [32] отримано узагальнення відомого результату Ейзенхарта про класифікацію потенціалів $V(x_1, x_2, x_3)$, для яких тривимірне стаціонарне рівняння Шредінгера допускає відокремлення змінних.

Одержані результати застосовано для розв'язування задачі відокремлення змінних у рівнянні Гамільтона–Якобі із вектор–потенціалом

$$\frac{\partial u}{\partial t} + eA_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_a} - eA_a \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_a} - eA_a \right) = 0. \quad (146)$$

Для цього зафіксовано форму анзацу для відокремлення змінних у такому вигляді:

$$u(t, \vec{x}) = S(t, \vec{x}) + \varphi_0(t) + \sum_{a=1}^3 \varphi_a(\omega_a(t, \vec{x})), \quad (147)$$

та форму звичайних диференціальних рівнянь для функцій φ_0 , φ_1 , φ_2 , φ_3

$$\dot{\varphi}_0 = -T_0(t) - T_b(t)\lambda_b, \quad \dot{\varphi}_a = (-F_{a0}(\omega_a) + F_{ab}(\omega_a)\lambda_b)^{1/2}. \quad (148)$$

Доведено, що рівняння (146) розв'язується методом відокремлення змінних в описаному вище сенсі для тих самих вектор–потенціалів і в тих самих системах координат, в яких допускає відокремлення змінних рівняння Шредінгера (127).

У [30, 31] повністю розв'язано задачу класифікації $(1+3)$ -вимірних рівнянь Паулі для частинки зі спіном $\frac{1}{2}$ в електромагнітному полі

$$(p_0 - p_a p_a + e \vec{\sigma} \vec{H}) \psi(t, \vec{x}) = 0, \quad (149)$$

які допускають відокремлення змінних за допомогою анзацу

$$\psi(t, \vec{x}) = Q(t, \vec{x}) \varphi_0(t) \prod_{a=1}^3 \varphi_a(\omega_a(t, \vec{x}), \vec{\lambda}) \chi, \quad (150)$$

в результаті чого отримуються такі матричні звичайні диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned} i\dot{\varphi}_0 &= -(P_{00}(t) + P_{0b}(t)\lambda_b) \varphi_0, \\ \ddot{\varphi}_a &= (P_{a0}(\omega_a) + P_{ab}(\omega_a)\lambda_b) \varphi_a, \quad a = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (151)$$

Тут $\psi(t, \vec{x})$ — двокомпонентний спіно́р, $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ — магнітне поле, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — відомі матриці Паулі, Q , φ_μ , $P_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ — 2×2 -матричні функції вказаних аргументів, χ — двокомпонентний сталий стовпчик. Окрім цього, матриці φ_μ задовольняють таку додаткову умову:

$$[\varphi_\mu, \varphi_\nu] = \varphi_\mu \varphi_\nu - \varphi_\nu \varphi_\mu = 0, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (152)$$

Зауважимо, що це обмеження звужує клас рівнянь Паулі, які допускають відокремлення змінних за допомогою анзацу (150). Однак, без цієї умови ефективно застосування анзацу (150) для розв'язування рівняння Паулі методом відокремлення змінних здається нам малоімовірним. Принаймні, в усіх відомих нам роботах, присвячених проблемі відокремлення змінних в рівнянні Паулі, ця умова накладається (явно чи неявно).

Доведено, що рівняння Паулі (149) розв'язується методом відокремлення змінних в описаному вище сенсі тоді і тільки тоді, коли воно зводиться до системи двох рівнянь Шредінгера (127) за допомогою перетворення вигляду

$$\psi = \mathcal{U}(t) \tilde{\psi},$$

де $\mathcal{U}(t)$ — унітарна 2×2 матриця, яка є розв'язком матричного звичайного диференціального рівняння

$$i\dot{\mathcal{U}} = (-e\vec{\sigma}\vec{H}(t))\mathcal{U}. \quad (153)$$

Отже, рівняння Паулі (149) роз'язуються методом відокремлення змінних в описаному вище сенсі лише для тих вектор–потенціалів і лише в тих системах координат, в яких допускає відокремлення змінних рівняння Шредінгера (127).

3.13 Алгебраїчний підхід до групової класифікації квазілінійних рівнянь гіперболічного типу [50, 57, 58, 59, 60, 49]

Об'єктом наукового дослідження за звітний період є квазілінійні рівняння, які належать до класу хвильових рівнянь

$$u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u, u_x), \quad (154)$$

де функція F є довільною гладкою функцією своїх аргументів, $u = u(t, x)$. Тут і далі $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dots$. Рівняння вигляду (154) займають важливе місце серед диференціальних рівнянь математичної фізики. До таких рівнянь, зокрема, приводять задачі опису нелінійних хвиль з осьюовою та центральною симетрією, задачі поширення нелінійних хвиль в неоднорідному середовищі, задачі хвильової та газової динаміки.

Симетрія рівняння (154) залежить від явного вигляду функції F . Задача групової класифікації полягає в описі всіх нееквівалентних класів довільних елементів F і знаходження відповідних алгебр інваріантності.

Для дослідження симетрійних властивостей даного рівняння застосовується метод, що є синтезом методу Овсяннікова, методу апріорної специфікації алгебр Лі, які можуть виникнути при класифікації рівнянь, та перетворень еквівалентності. Основна ідея цього методу полягає в тому, що замість безпосереднього розв'язування визначальних рівнянь ми спочатку будуємо реалізації алгебр Лі, які можуть допускатися нашим рівнянням. Саме такий підхід дає змогу розв'язати до кінця задачу групової класифікації дуже складних нелінійних рівнянь.

Стосовно класу рівнянь (154) алгоритм методу групової класифікації передбачає виконання таких кроків.

Знаходимо групу еквівалентності рівняння (154), тобто сукупність перетворень, що зберігають форму рівняння, але можуть міняти конкретну форму функції F .

Використовуючи метод Лі, знаходимо систему визначальних рівнянь для коефіцієнтів інфінітезимального оператора та знаходимо загальний вигляд цього оператора.

Виходячи з загального вигляду інфінітезимального оператора будемо відповідні реалізації алгебр Лі A_n , $n = 1, 2, 3$. Як доведено, за одним винятком, усі такі алгебри повинні бути розв'язні. При цьому, наявність у розв'язної алгебри Лі так званого композиційного ряду дозволяє проводити поетапну групову класифікацію рівнянь вигляду (154), збільшуючи кожного разу розмірність алгебри інваріантності на одиницю.

Завершення групової класифікації полягає в знаходженні всіх нееквівалентних рівнянь вигляду (154) та відповідних максимальних алгебр інваріантності. Результатом виконання цього алгоритму є перелік нееквівалентних рівнянь, що належать до класу (154), для яких наведено їхні максимальні алгебри симетрії.

Було доведено, що загальна задача класифікації рівняння (154) розпадається на задачі класифікації таких частинних випадків цього рівняння:

$$u_{tt} = u_{xx} + g(t, x, u)u_x + f(t, x, u), \quad g_u \neq 0; \quad (155)$$

$$u_{tx} = g(t, x)u_x + f(t, x, u), \quad g \neq 0, \quad f_{uu} \neq 0; \quad (156)$$

$$u_{tx} = f(t, x, u), \quad f_{uu} \neq 0. \quad (157)$$

та рівняння (154) з $F_{u_x u_x} \neq 0$. Групу інваріантності рівняння (155) генерує інфінітезимальний оператор:

$$Q = (\lambda t + \lambda_1)\partial_t + (\lambda x + \lambda_2)\partial_x + [h(x)u + r(t, x)]\partial_u,$$

де дійсні сталі $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ та функції h, r, g, f задовольняють систему двох рівностей:

$$\begin{aligned} -2h' - \lambda g &= (\lambda t + \lambda_1)g_t + (\lambda x + \lambda_2)g_x + (hu + r)g_u, \\ -h''u + r_{tt} - r_{xx} + (h - 2\lambda)f &= (\lambda t + \lambda_1)f_t + (\lambda x + \lambda_2)f_x + \\ &+ (hu + r)f_u + g(h'u + r_x). \end{aligned}$$

Групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (155) складають такі невідроджені перетворення:

$$\bar{t} = kt + k_1, \quad \bar{x} = \epsilon kx + k_2, \quad v = X(x)u + Y(t, x), \quad (158)$$

де $k \neq 0, X \neq 0, \epsilon = \pm 1, k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}, X, Y$ — довільні гладкі функції своїх аргументів.

Основний результат з класифікації рівнянь (155), що допускають однопараметричні групи Лі, дає така теорема.

Теорема 1. *Існують п'ять нееквівалентних рівнянь вигляду (155), які допускають однопараметричні групи локальних перетворень. Відповідні реалізації інфінітезимальних операторів та функцій f і g в рівняннях (155) мають вигляд:*

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \langle t\partial_t + x\partial_x \rangle : g = x^{-1}\tilde{g}(\psi, u), \\ f &= x^{-2}\tilde{f}(\psi, u), \psi = tx^{-1}, \tilde{g}_u \neq 0; \\ A_1^2 &= \langle \partial_t + \beta\partial_x \rangle : g = \tilde{g}(\eta, u), f = \tilde{f}(\eta, u), \\ \eta &= x - \beta t, \beta \geq 0, \tilde{g}_u \neq 0; \\ A_1^3 &= \langle \partial_t + \sigma(x)u\partial_u \rangle : g = -2\sigma'\sigma^{-1}\ln|u| + \tilde{g}(\rho, x), \\ f &= (\sigma'\sigma^{-1})^2u\ln^2|u| - \sigma'\sigma^{-1}\tilde{g}(\rho, x)u\ln|u| - \sigma^{-1}\sigma''u\ln|u| + \\ &+ u\tilde{f}(\rho, x), \rho = ue^{-t\sigma}, \sigma \neq 0; \\ A_1^4 &= \langle \partial_x \rangle : g = \tilde{g}(t, u), f = \tilde{f}(t, u), \tilde{g}_u \neq 0; \\ A_1^5 &= \langle \sigma(x)u\partial_u \rangle : g = -2\sigma'\sigma^{-1}\ln|u| + \tilde{g}(t, x), \\ f &= (\sigma'\sigma^{-1})^2u\ln^2|u| - (\sigma^{-1}\sigma'' + \sigma^{-1}\sigma'\tilde{g}(t, x))u\ln|u| + \end{aligned}$$

$$+ u\tilde{f}(t, x), \quad \sigma' \neq 0.$$

Було доведено, що не існує нелінійних рівнянь вигляду (155), алгебри інваріантності яких ізоморфні напівпростим алгебрам Лі або містять їх як підалгебри. Згідно з теоремою Леві–Мальцева, це означає, що нелінійні рівняння вигляду (155) можуть мати тільки такі алгебри інваріантності, які є розв’язними. Це дозволяє ефективно проводити поетапну класифікацію рівнянь вигляду (155) відносно двох, трьох і більш високорозмірних алгебр Лі. Так, наступному вивченню підлягають нелінійні рівняння (155), алгебри інваріантності яких є двовимірними розв’язними алгебрами Лі. Доведено існування чотирьох рівнянь вигляду (155), які інваріантні відносно алгебри $A_{2.1}$, та шести рівнянь вигляду (155), які інваріантні відносно алгебри $A_{2.2}$ (тут і далі ми використовуємо позначення алгебр Лі, введені Мубаракзяновим). Дослідження показали також, що серед рівнянь (155) є вісім, максимальними алгебрами інваріантності яких є тривимірні розв’язні алгебри Лі. Рівнянь, що допускають алгебри інваріантності розмірності вище трьох, не існує. Нижче, наведено всі ці рівняння та вказані базисні елементи відповідних алгебр інваріантності.

$A_{3.2}$ –інваріантне рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + u_x \ln |u| + \frac{1}{4}u \ln^2 |u| - \frac{1}{4}u \ln |u| + nu, \quad n \in \mathbb{R},$$

$$\langle \partial_t, \partial_x, e^{-\frac{1}{2}x} u \partial_u \rangle;$$

$A_{3.4}$ –інваріантне рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + x^{-1}[2 \ln |u| + mx^{-1}t + n]u_x + x^{-2}u \ln |u| +$$

$$+ (mx^{-1}t + n - 2)x^{-2}u \ln |u| + \frac{1}{4}m^2x^{-4}t^2u +$$

$$+ \frac{1}{2}m(n - 3)x^{-3}tu + px^{-2}u, \quad m \neq 0, \quad n, p \in \mathbb{R},$$

$$\langle t\partial_t + x\partial_x, x^{-1}u\partial_u, \partial_t - \frac{m}{2}x^{-1} \ln |x| u \partial_u \rangle.$$

$A_{3.5}$ –інваріантні рівняння

$$1) \quad u_{tt} = u_{xx} + |u|^m u_x + n|u|^{1+2m}, \quad m \neq 0, \quad n \in \mathbb{R};$$

$$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t + x\partial_x - m^{-1}u\partial_u \rangle;$$

$$2) \ u_{tt} = u_{xx} + e^u u_x + ne^{2u}, \ n \in \mathbb{R};$$

$$\langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t + x\partial_x - \partial_u \rangle;$$

$$3) \ u_{tt} = u_{xx} - x^{-1}[2 \ln |u| - mx^{-1}t - n]u_x + x^{-2}u \ln^2 |u| - \\ - x^{-2}(mx^{-1}t + n)u \ln |u| + ux^{-2} \left[\frac{m}{4}x^{-2}t^2 + \frac{m}{2}(n-1)x^{-1}t + p \right],$$

$$m, n, p \in \mathbb{R};$$

$$\langle t\partial_t + x\partial_x, xu\partial_u, \partial_t + \frac{m}{4}x^{-1}u\partial_u \rangle.$$

A_{3.7}-інваріантне рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} - 2mx^{-1}u_x \ln |u| + mx^{-2}[mu \ln^2 |u| - \\ - (m-1)u \ln |u| + nu], \ m \neq 0, 1; \ n \in \mathbb{R},$$

$$\langle \partial_t, |x|^m u \partial_u, t\partial_t + x\partial_x \rangle.$$

A_{3.7}-інваріантні рівняння

$$2) \ u_{tt} = u_{xx} - x^{-1}[2k + \ln |u| - mx^{-1}t - n]u_x + k^2x^{-2}u \ln^2 |u| - \\ - kx^{-2}[mtx^{-1} + k + n - 1]u \ln |u| + \frac{1}{2}m(k-2+n)tx^{-3}u + \\ + \frac{1}{4}m^2t^2x^{-4}u + px^{-2}u, \ |k| \neq 0, 1; \ m \neq 0, n, p \in \mathbb{R}; \\ \langle t\partial_t + x\partial_x, |x|^k u \partial_u, \partial_t + \frac{m}{2(1+k)}x^{-1}u \partial_u \rangle.$$

Далі проведено групову класифікацію рівняння (156). Показано, що група інваріантності рівняння (156) генерується інфінітезимальним оператором

$$Q = \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x + [h(t)u + r(t, x)]\partial_u,$$

де функції τ , ξ , h , r , f , g задовольняють такі рівності:

$$r_{tx} + f[h - \tau_t - \xi_x] = gr_x + \tau f_t + \xi f_x + [hu + r]f_u, \quad h_t = \tau_t g + \tau g_t + \xi g_x.$$

Групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (156) складають такі перетворення:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \bar{t} = T(t), \quad \bar{x} = X(x), \quad v = U(t)u + Y(t, x), \quad t'X'U \neq 0; \\ (2) \quad & \bar{t} = T(x), \quad \bar{x} = X(t), \quad v = \Psi(x)\Phi(t, x)u + Y(t, x), \quad t'X'\Psi \neq 0, \\ & \Phi(t, x) = \exp \left[- \int g(t, x) dt \right], \quad g_x \neq 0. \end{aligned}$$

Подальші дослідження показали, що серед рівнянь вигляду (156) існують три рівняння, інваріантні відносно одновимірних алгебр Лі. Відповідні одновимірні алгебри Лі інфінітезимальних операторів, які генерують ці групи, а також функції f та g у відповідних рівняннях, наведені нижче:

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \langle t\partial_t + x\partial_x \rangle : g = t^{-1}\tilde{g}(\omega), \quad f = t^{-2}f(u, \omega), \quad \omega = tx^{-1}, \\ &\quad \tilde{g}_\omega \neq 0, \quad f_{uu} \neq 0; \\ A_1^2 &= \langle \partial_t \rangle : g = \tilde{g}(x), \quad f = \tilde{f}(x, u), \quad \tilde{g}' \neq 0, \quad \tilde{f}_{uu} \neq 0; \\ A_1^3 &= \langle \partial_x + tu\partial_u \rangle : g = x + \tilde{g}(t), \quad f = e^{tx}\tilde{f}(t, \omega), \quad \omega = e^{-tx}u, \quad \tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0. \end{aligned}$$

Опис рівнянь, інваріантних відносно двовимірних алгебр, подано в такій теоремі.

Теорема 2. *З точністю до еквівалентності, існують три нелінійні рівняння вигляду (156), що інваріантні відносно двовимірних алгебр Лі. Відповідні реалізації інфінітезимальних операторів та функцій f і g в рівняннях (155) мають вигляд:*

$$\begin{aligned} A_{2.2}^1 &= \langle t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + x^2\partial_x + mut\partial_u \rangle \quad (m \in \mathbb{R}) : \\ &\quad g = [mt + (k - m)x]t^{-1}(t - x)^{-1}, \quad k \neq 0, \\ &\quad f = |t - x|^{m-2}|x|^{-m}\tilde{f}(\omega), \quad \omega = u|t - x|^{-m}|x|^m, \quad \tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0; \\ A_{2.2}^2 &= \langle t\partial_t + x\partial_x, t^2\partial_t + mtu\partial_u \rangle \quad (m \in \mathbb{R}) : \\ &\quad g = t^{-2}[kx + mt], \quad k \neq 0, \quad f = |t|^{m-2}|x|^{-m}\tilde{f}(\omega), \\ &\quad \omega = |t|^{-m}|x|^m u, \quad \tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0; \end{aligned}$$

$$A_{2.2}^3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, x^2\partial_x + tu\partial_u \rangle : \\ g = (tx)^{-1}(mx - t) \ (m \in \mathbb{R}), \ f = x^{-2}e^{-tx^{-1}}\tilde{f}(\omega), \\ \omega = ue^{tx^{-1}}, \ \tilde{f}_{\omega\omega} \neq 0.$$

Нееквівалентні нелінійні рівняння вигляду (156), які мають нетривіальну симетрію, вичерпуються трьома рівняннями, які інваріантні відносно одновимірних алгебр Лі, та трьома рівняннями, що наведені в теоремі 2.

Знайдено, що група інваріантності рівняння (157) генерується інфінітезимальним оператором

$$Q = \tau(t)\partial_t + \xi(x)\partial_x + (ku + r(t, x))\partial_u,$$

де стала k та функції τ, ξ, r, f задовольняють рівність

$$r_{tx} + [k - \tau' - \xi']f = \tau f_t + \xi f_x + [ku + r]f_u.$$

Групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (157) складають перетворення

$$(1) \ \bar{t} = T(t), \ \bar{x} = X(x), \ v = mu + Y(t, x), \\ (2) \ \bar{t} = T(x), \ \bar{x} = X(t), \ v = mu + Y(t, x), \ T'X'm \neq 0.$$

Було доведено, що існують два нееквівалентні нелінійні рівняння вигляду (157), які інваріантні відносно однопараметричних груп локальних перетворень. Опис нелінійних рівнянь, які допускають алгебри інваріантності розмірності вищої ніж 1, ми розпочинаємо з класифікації рівнянь, алгебри інваріантності яких є напівпростими алгебрами Лі або містять такі алгебри як підалгебри. Виявляється, з точністю до еквівалентності, нелінійні рівняння (157), алгебри інваріантності яких є напівпростими алгебрами Лі або містять їх як підалгебри, вичерпуються такими рівняннями:

$$u_{tx} = (t - x)^{-2}\tilde{f}(u), \ \tilde{f}_{uu} \neq 0, \\ u_{tx} = \lambda e^u, \ \lambda \neq 0,$$

останнє з яких є рівняння Ліувілля. Це єдине рівняння з класу (154), що допускає нескінченнопараметричну групу локальних перетворень. Також існують ще дев'ять нееквівалентних рівнянь вигляду (157), максимальні алгебри інваріантності яких мають розмірність вищу ніж одиниця.

Далі проведено групову класифікацію рівняння (159).

$$u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u, u_x), \quad F_{u_x u_x} \neq 0. \quad (159)$$

Знайдено, що група інваріантності рівняння (159) генерується таким інфінітезимальним оператором

$$Q = (\lambda t + \lambda_1)\partial_t + (\lambda x + \lambda_2)\partial_x + [h(x)u + r(t, x)]\partial_u.$$

При цьому дійсні сталі λ , λ_1 , λ_2 та функції $h = h(x)$, $r = r(t, x)$, $F = F(t, x, u, u_x)$ задовольняють умову:

$$\begin{aligned} r_{tt} - r_{xx} - \frac{d^2 h}{dx^2} u - 2 \frac{dh}{dx} u_x + (h - 2\lambda)F - (\lambda t + \lambda_1)F_t - \\ - (\lambda x + \lambda_2)F_x - (hu + r)F_u - \left(r_x + \frac{dh}{dx} u + (h - \lambda)u_x \right) F_{u_x} = 0. \end{aligned}$$

Групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (159) складають перетворення

$$\bar{t} = kt + k_1, \quad \bar{x} = \epsilon kx + k_2, \quad v = X(x)u + Y(t, x),$$

де $\{k, k_1, k_2\} \subset \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$, $X \neq 0$.

Доведено, що існуює сім нееквівалентних класів нелінійних рівнянь вигляду (159), максимальними алгебрами інваріантності яких є одновимірні алгебри Лі.

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \langle t\partial_t + x\partial_x \rangle : \quad F = t^{-2}G(\xi, u, \omega), \quad \xi = tx^{-1}, \quad \omega = xu_x; \\ A_1^2 &= \langle \partial_t + k\partial_x \rangle \quad (k > 0) : \quad F = G(\eta, u, u_x), \quad \eta = x - kt; \\ A_1^3 &= \langle \partial_x \rangle : \quad F = G(t, u, u_x); \\ A_1^4 &= \langle \partial_t \rangle : \quad F = G(x, u, u_x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1^5 &= \langle \partial_t + f(x)u\partial_u \rangle (f \neq 0) : \\
&\quad F = -tf''u + t^2(f')^2u - 2tf'u_x + e^{tf}G(x, v, \omega), \\
&\quad v = e^{-tf}u, \quad \omega = u^{-1}u_x - f'f^{-1} \ln |u|; \\
A_1^6 &= \langle f(x)u\partial_u \rangle (f \neq 0) : \quad F = -f^{-1}f''u \ln |u| - \\
&\quad -2f^{-1}f'u_x \ln |u| + f^{-2}(f')^2u \ln^2 |u| + uG(t, x, \omega), \\
&\quad \omega = u^{-1}u_x - f'f^{-1} \ln |u|; \\
A_1^7 &= \langle f(t, x)\partial_u \rangle (f \neq 0) : \quad F = f^{-1}(f_{tt} - f_{xx})u + G(t, x, \omega), \\
&\quad \omega = u_x - f^{-1}f_x u.
\end{aligned}$$

Також було доведено, що нелінійні рівняння вигляду (159) допускають тільки розв'язні алгебри інваріантності. Тому подальшому вивченню підлягають нелінійні рівняння (159), алгебри інваріантності яких є двовимірними розв'язними алгебрами Лі. Було знайдено, що існують 14 нееквівалентних нелінійних рівнянь вигляду (159), максимальними алгебрами інваріантності яких є двовимірні алгебри Лі, ізоморфні алгебрі $A_{2,1}$, та 16 нееквівалентних нелінійних рівнянь вигляду (159), максимальними алгебрами інваріантності яких є двовимірні алгебри Лі, ізоморфні алгебрі $A_{2,2}$.

$$\begin{aligned}
A_{2,1}^1 &= \langle t\partial_t + x\partial_x, u\partial_u \rangle : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} + x^{-2}uG(\xi, \omega), \\
&\quad \xi = tx^{-1}, \quad \omega = u^{-1}xu_x; \\
A_{2,1}^2 &= \langle t\partial_t + x\partial_x, \sigma(\xi)\partial_u \rangle (\sigma \neq 0, \xi = tx^{-1}) : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} + x^{-2}[\sigma^{-1}((1 - \xi^2)\sigma'' - 2\xi\sigma')u + G(\xi, \omega)], \\
&\quad \omega = \xi\sigma'u + \sigma xu_x; \\
A_{2,1}^3 &= \langle \partial_t + k\partial_x, u\partial_u \rangle (k > 0) : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} + uG(\eta, \omega), \\
&\quad \eta = x - kt, \quad \omega = u^{-1}u_x;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2.1}^4 &= \langle \partial_t + k\partial_x, \varphi(\eta)\partial_u \rangle \ (k > 0, \ \eta = x - kt, \ \varphi \neq 0) : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} + (k^2 - 1)\varphi''\varphi^{-1}u + G(\eta, \omega), \ \omega = \varphi u_x - \varphi' u; \\
A_{2.1}^5 &= \langle \partial_t + k\partial_x, \ \partial_x + u\partial_u \rangle \ (k > 0) : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} + e^\eta G(\omega, v), \ \eta = x - kt, \ \omega = ue^{-\eta}, \\
&\quad v = u^{-1}u_x; \\
A_{2.1}^6 &= \langle \partial_t, \ \partial_x \rangle : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} + G(u, u_x); \\
A_{2.1}^7 &= \langle \partial_x, \ u\partial_u \rangle : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} + uG(t, \omega), \ \omega = u^{-1}u_x; \\
A_{2.1}^8 &= \langle \partial_x, \ \varphi(t)\partial_u \rangle \ (\varphi \neq 0) : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} + \varphi^{-1}\varphi''u + G(t, u_x); \\
A_{2.1}^9 &= \langle \partial_t, \ \partial_u \rangle : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} + G(x, u_x); \\
A_{2.1}^{10} &= \langle \partial_t, \ f(x)u\partial_u \rangle \ (f \neq 0) : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 + uG(x, \omega); \\
&\quad \omega = u^{-1}u_x - f'f^{-1}\ln|u|. \\
A_{2.1}^{11} &= \langle \partial_t + f(x)u\partial_u, \ g(x)u\partial_u \rangle \ (\delta = f^{-1}f' - g^{-1}g' \neq 0) : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} - g^{-1}g''u\ln|u| - 2g^{-1}g'u_x\ln|u| \\
&\quad \quad + g^{-2}(g')^2u\ln^2|u| - 2f\delta tu_x + 2f\delta g'g^{-1}tu\ln|u| \\
&\quad \quad + f^2\delta^2t^2u + f(g^{-1}g'' - f^{-1}f'')tu + uG(x, \omega), \\
&\quad \omega = u^{-1}u_x - g'g^{-1}\ln|u| - tf\delta; \\
A_{2.1}^{12} &= \langle \partial_t + f(x)u\partial_u, \ e^{tf}\partial_u \rangle \ (f \neq 0) : \\
&\quad u_{tt} = u_{xx} + [f^2 - tf'' + t^2(f')^2]u - 2tf'u_x + e^{tf}G(x, \omega), \\
&\quad \omega = e^{-tf}(u_x - tf'u);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2.1}^{13} &= \langle f(x)u\partial_u, g(x)u\partial_u \rangle (\delta = f'g - g'f \neq 0) : \\
&u_{tt} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 - \delta^{-1}\delta'u_x + \\
&\quad + \delta^{-1}[f''g' - g''f']u \ln |u| + uG(t, x); \\
A_{2.1}^{14} &= \langle \varphi(t)\partial_u, \psi(t)\partial_u \rangle (\varphi'\psi - \varphi\psi' \neq 0) : \\
&u_{tt} = u_{xx} + \varphi^{-1}\varphi''u + G(t, x, u_x), \quad \varphi''\psi - \varphi\psi'' = 0; \\
A_{2.2}^1 &= \langle t\partial_t + x\partial_x, xu\partial_u \rangle : \\
&u_{tt} = u_{xx} + x^{-2}u \ln^2 |u| - \\
&\quad - 2x^{-1}u_x \ln |u| + t^{-2}uG(\xi, \omega), \quad \xi = tx^{-1}; \\
&\omega = xu^{-1}u_x - \ln |u|; \\
A_{2.2}^2 &= \langle t\partial_t + x\partial_x, t\varphi(\xi)\partial_u \rangle (\varphi \neq 0, \xi = tx^{-1}) : \\
&u_{tt} = u_{xx} + t^{-2}(1 - \xi^2)\varphi^{-1}\xi(2\varphi' + \xi\varphi'')u + t^{-2}G(\xi, \omega), \\
&\omega = x\varphi u_x + \xi\varphi'u; \\
A_{2.2}^3 &= \langle \partial_t + k\partial_x, e^{k^{-1}x}u\partial_u \rangle (k > 0) : \\
&u_{tt} = u_{xx} + k^{-2}u \ln^2 |u| - 2k^{-1}u_x \ln |u| - k^{-2}u \ln |u| \\
&\quad + uG(\eta, \omega), \quad \eta = x - kt, \quad \omega = u^{-1}u_x - k^{-1} \ln |u|; \\
A_{2.2}^4 &= \langle \partial_t + k\partial_x, e^t\varphi(\eta)\partial_u \rangle (\eta = x - kt, k > 0, \varphi \neq 0) : \\
&u_{tt} = u_{xx} + ((k^2 - 1)\varphi''\varphi^{-1} - 2k\varphi'\varphi^{-1} + 1)u + G(\eta, \omega), \\
&\omega = \varphi u_x - \varphi'u, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{d\eta}. \\
A_{2.2}^5 &= \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + k\partial_x \rangle (k > 0) : \\
&u_{tt} = u_{xx} + \eta^{-2}G(u, \omega), \quad \eta = x - kt, \quad \omega = u_x\eta; \\
A_{2.2}^6 &= \langle -t\partial_t - x\partial_x + mu\partial_u, \partial_t + k\partial_x \rangle (k > 0, m \neq 0) : \\
&u_{tt} = u_{xx} + |\eta|^{-2-m}G(v, \omega), \quad \eta = x - kt, \\
&\omega = u|\eta|^m, \quad v = u_x|\eta|^{m+1}; \\
A_{2.2}^7 &= \langle \partial_x, e^xu\partial_u \rangle :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_{tt} = u_{xx} + u \ln^2 |u| - u \ln |u| - 2u_x \ln |u| + \\
& + uG(t, \omega), \quad \omega = u^{-1}u_x - \ln |u|; \\
A_{2.2}^8 &= \langle \partial_x, e^x \varphi(t) \partial_u \rangle \quad (\varphi \neq 0) : \\
& u_{tt} = u_{xx} + (\varphi^{-1} \varphi'' - 1)u + G(t, \omega), \quad \omega = u_x - u; \\
A_{2.2}^9 &= \langle -t \partial_t - x \partial_x, \partial_x \rangle : \\
& u_{tt} = u_{xx} + t^{-2} G(u, tu_x); \\
A_{2.2}^{10} &= \langle -t \partial_t - x \partial_x + ku \partial_u, \partial_x \rangle, \quad (k \neq 0) : \\
& u_{tt} = u_{xx} + |t|^{-2-k} G(v, \omega), \quad v = |t|^k u, \quad \omega = |t|^{k+1} u_x; \\
A_{2.2}^{11} &= \langle \partial_t, e^t \partial_u \rangle : \\
& u_{tt} = u_{xx} + u + G(x, u_x); \\
A_{2.2}^{12} &= \langle -t \partial_t - x \partial_x, \partial_t \rangle : \\
& u_{tt} = u_{xx} + x^{-2} G(u, \omega), \quad \omega = xu_x; \\
A_{2.2}^{13} &= \langle \partial_t + f(x)u \partial_u, e^{(1+f)t} \partial_u \rangle \quad (f \neq 0) : \\
& u_{tt} = u_{xx} - (tf'' - t^2(f')^2 - (1 + f^2))u - 2tf' u_x \\
& + e^{tf} G(x, \omega), \quad \omega = e^{-tf} (u_x - f'(t + f^{-1})u) . \\
A_{2.2}^{14} &= \langle -t \partial_t - x \partial_x, \partial_t + kx^{-1}u \partial_u \rangle \quad (k > 0); \\
& u_{tt} = u_{xx} - 2ktx^{-3}u + k^2 t^2 x^{-4}u + 2ktx^{-2}u_x + \\
& + x^{-2} e^{ktx^{-1}} G(v, \omega), \quad v = e^{-kx^{-1}t} u, \\
& \omega = xu^{-1}u_x + \ln |u|; \\
A_{2.2}^{15} &= \langle k(t \partial_t + x \partial_x), |x|^{k-1} u \partial_u \rangle \quad (k \neq 0, 1) : \\
& u_{tt} = u_{xx} - k^{-2}(1 - k)x^{-2}u \ln |u| - 2k^{-1}x^{-1}u_x \ln |u| \\
& + k^{-2}x^{-2}u \ln^2 |u| + x^{-2}u G(v, \omega), \\
& v = tx^{-1}, \quad \omega = xu^{-1}u_x - k^{-1} \ln |u|; \\
A_{2.2}^{16} &= \langle k(t \partial_t + x \partial_x), |t|^{k-1} \varphi(\xi) \partial_u \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (k \neq 0, 1, \varphi \neq 0, \xi = tx^{-1}) : \\
& u_{tt} = u_{xx} + [k^{-1}(k^{-1} - 1) + 2\xi(k^{-1} - \xi^2)\varphi^{-1}\varphi' \\
& \quad + \xi^2(1 - \xi)^2\varphi^{-1}\varphi'']t^{-2}u + t^{-2}G(\xi, \omega), \\
& \omega = x\varphi u_x + \xi\varphi' u.
\end{aligned}$$

Також проведено групову класифікацію рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 + A(x)u_x + B(x)u \ln |u| + uD(t, x), \quad (160)$$

де $A(x)$, $B(x)$, $D(t, x)$ — довільні гладкі функції своїх аргументів. Групова класифікація наведеного вище рівняння виконана з використанням методу Овсяннікова. Виявляється, що в цьому випадку саме цей метод дозволяє відносно просто розв'язувати задачу групової класифікації до кінця. Проведено класифікація цього рівняння відносно алгебр, що мають розмірність більшу ніж два. Подальші дослідження показали, що існують 26 нееквівалентних класів рівнянь, інваріантних відносно тривимірних алгебр Лі, 36 нееквівалентних класів рівнянь, інваріантних відносно чотиривимірних алгебр Лі, та одне рівняння, інваріантне відносно п'ятивимірної алгебри Лі.

Знайдено, що існує 43 рівняння вигляду (159), інваріантних відносно тривимірних розв'язних алгебр Лі, та 15 рівнянь розглядуваного виду, максимальними алгебрами інваріантності яких є чотиривимірні розв'язні алгебри Лі. Для прикладу наведемо кілька рівнянь та відповідні їм реалізації алгебри інваріантності:

$A_{3.3}$ —інваріантні рівняння

$$A_{3.3}^1 = \langle u\partial_u, \partial_t + k\partial_x, m\partial_t + k^{-1}xu\partial_u \rangle \quad (k > 0, m \neq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 + uG(\omega), \quad \omega = x - kt + mk^2u^{-1}u_x;$$

$$A_{3.3}^2 = \langle u\partial_u, \partial_x, m\partial_t + xu\partial_u \rangle \quad (m > 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 + uG(\omega), \quad \omega = t - mu^{-1}u_x;$$

$$\begin{aligned}
A_{3.3}^3 &= \langle |t|^{\frac{1}{2}} \partial_u, -|t|^{\frac{1}{2}} \ln |t| \partial_u, t \partial_t + x \partial_x + \frac{1}{2} u \partial_u \rangle : \\
&u_{tt} = u_{xx} - \frac{1}{4} t^{-2} u + u_x^3 G(\xi, \omega), \quad \xi = tx^{-1}, \omega = xu_x^2; \\
A_{3.3}^4 &= \langle \partial_u, -t \partial_u, \partial_t + k \partial_x \rangle \quad (k \geq 0); \\
&u_{tt} = u_{xx} + G(\eta, u_x), \quad \eta = x - kt.
\end{aligned}$$

$A_{3.4}$ –інваріантні рівняння

$$\begin{aligned}
A_{3.4}^1 &= \langle |\eta|^{m-1} \partial_u, \partial_t + k \partial_x, t \partial_t + x \partial_x + (mu + t|\eta|^{m-1}) \partial_u \rangle \\
&(\eta = x - kt, \quad k > 0, m \neq 1) : \\
&u_{tt} = u_{xx} + (k^2 - 1)(m - 1)(m - 2) \eta^{-2} u - \\
&- 2k(m - 1) \eta^{m-2} \ln |\eta| + |\eta|^{m-2} G(\omega), + \\
&\omega = [\eta u_x - (m - 1)u] |\eta|^{-m}; \\
A_{3.4}^2 &= \langle \partial_u, -t \partial_u, \partial_t + k \partial_x + u \partial_u \rangle \quad (k \geq 0) : \\
&u_{tt} = u_{xx} + e^t G(\eta, \omega), \quad \eta = x - kt, \quad \omega = e^{-t} u_x; \\
A_{3.4}^3 &= \langle |t|^{\frac{1}{2}} \partial_u, -|t|^{\frac{1}{2}} \ln |t| \partial_u, t \partial_t + x \partial_x + \frac{3}{2} u \partial_u \rangle : \\
&u_{tt} = u_{xx} - \frac{1}{4} t^{-2} u + u_x^{-1} G(\xi, \omega), \quad \xi = tx^{-1}, \quad \omega = x^{-1} u_x^2; \\
A_{3.4}^4 &= \langle kx^{-1} u \partial_u, \partial_t - kx^{-1} \ln |x| u \partial_u, t \partial_t + x \partial_x \rangle \quad (k > 0) : \\
&u_{tt} = u_{xx} - 3ktx^{-3} u - 2x^{-2} u \ln |u| - u^{-1} u_x^2 + x^{-2} u G(\omega), \\
&\omega = xu^{-1} u_x + \ln |u| + ktx^{-1}. \\
A_{3.4}^5 &= \langle e^{ktx^{-1}} \partial_u, \partial_t + kx^{-1} u \partial_u, t \partial_t + x \partial_x + (u + te^{ktx^{-1}}) \partial_u \rangle \quad (k > 0) : \\
&u_{tt} = u_{xx} + k^2 x^{-4} u (t^2 + x^2) + 2x^{-1} (ktx^{-1} + 1) u_x + \\
&+ 2ke^{ktx^{-1}} x^{-1} \ln |x| + x^{-1} e^{ktx^{-1}} G(\omega), \\
&\omega = e^{-ktx^{-1}} (u_x + ktx^{-2} u).
\end{aligned}$$

$A_{3.5}$ –інваріантні рівняння

$$A_{3.5}^1 = \langle |\eta|^{m-1} \partial_u, \partial_t + k \partial_x, t \partial_t + x \partial_x + m u \partial_u \rangle \quad (k > 0, \quad m \neq 1)$$

$$u_{tt} = u_{xx} + (k^2 - 1)(m - 1)(m - 2) \eta^{-2} u + |\eta|^{m-2} G(\omega),$$

$$\omega = |\eta|^{-m} [\eta u_x - (m - 1)u], \quad \eta = x - kt;$$

$$A_{3.5}^2 = \langle \partial_t, \partial_x, t \partial_t + x \partial_x \rangle :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + u_x^2 G(u);$$

$$A_{3.5}^3 = \langle \partial_t, \partial_x, t \partial_t + x \partial_x + m u \partial_u \rangle \quad (m \neq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + |u|^{1-\frac{2}{m}} G(\omega), \quad \omega = |u_x|^m |u|^{1-m};$$

$$A_{3.5}^4 = \langle \partial_t, \partial_x, t \partial_t + x \partial_x + \partial_u \rangle :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + e^{-2u} G(\omega), \quad \omega = e^u u_x;$$

$$A_{3.5}^5 = \langle \partial_t, x^{-1} u \partial_u, t \partial_t + x \partial_x \rangle :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - u^{-1} u_x^2 - 2x^{-2} u \ln |u| + x^{-2} u G(\omega),$$

$$\omega = x u^{-1} u_x + \ln |u|;$$

$$A_{3.5}^6 = \langle \partial_t + k x^{-1} u \partial_u, e^{ktx^{-1}} \partial_u, t \partial_t + x \partial_x + u \partial_u \rangle \quad (k > 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + k x^{-4} u [kt^2 - 2tx + kx^2] +$$

$$+ 2ktx^{-2} u_x + x^{-1} e^{ktx^{-1}} G(\omega),$$

$$\omega = e^{-ktx^{-1}} (u_x + ktx^{-2} u);$$

$$A_{3.5}^7 = \langle \varphi(t) \partial_u, \psi(t) \partial_u, \partial_x + u \partial_u \rangle \quad (\varphi' \psi - \varphi \psi' \neq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + \varphi^{-1} \varphi'' u + u_x G(t, \omega),$$

$$\omega = e^{-x} u_x, \quad \varphi'' \psi - \varphi \psi'' = 0.$$

$A_{3.6}$ –інваріантні рівняння

$$A_{3.6}^1 = \langle \partial_t + k \partial_x, |\eta|^{m+1} \partial_u, t \partial_t + x \partial_x + m u \partial_u \rangle \quad (k > 0, \quad m \neq -1) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + m(k^2 - 1)(m + 1)\eta^{-2}u + |\eta|^{m-2}G(\omega),$$

$$\omega = |\eta|^{1-m}[u_x - \eta^{-1}(m + 1)u], \eta = x - kt;$$

$$A_{3.6}^2 = \langle \partial_t + mx^{-1}u\partial_u, xu\partial_u, t\partial_t + x\partial_x \rangle \ (m \geq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 - 2mtx^{-3}u + x^{-2}uG(\omega),$$

$$\omega = xu^{-1}u_x - \ln|u| + 2mtx^{-1};$$

$$A_{3.6}^3 = \langle \partial_t + kx^{-1}u\partial_u, e^{ktx^{-1}}\partial_u, t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u \rangle \ (k > 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + x^{-4}[k^2x^2 - 2ktx + k^2t^2]u +$$

$$+ 2ktx^{-2}u_x + x^{-3}e^{ktx^{-1}}G(\omega),$$

$$\omega = e^{-ktx^{-1}}(x^2u_x + ktu);$$

$$A_{3.6}^4 = \langle e^{-t}\partial_u, e^t\partial_u, \partial_t + k\partial_x \rangle \ (k \geq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + u + G(\eta, u_x), \ \eta = x - kt;$$

$$A_{3.6}^5 = \langle |t|^{-\frac{1}{2}}\partial_u, |t|^{\frac{3}{2}}\partial_u, t\partial_t + x\partial_x + \frac{1}{2}u\partial_u \rangle :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{3}{4}t^{-2}u + |t|^{-\frac{3}{2}}G(\xi, \omega), \ \xi = tx^{-1}, \ \omega = x^{-1}u_x^2.$$

$A_{3.7}$ –інваріантні рівняння

$$A_{3.7}^1 = \langle \partial_t + k\partial_x, |\eta|^{m-q}\partial_u, t\partial_t + x\partial_x + mu\partial_u \rangle$$

$$(k > 0, m \neq q, \ 0 < |q| < 1) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + (k^2 - 1)(m - q)(m - q - 1)\eta^{-2}u + |\eta|^{m-2}G(\omega),$$

$$\omega = |\eta|^{1-m}[u_x - (m - q)\eta^{-1}u], \ \eta = x - kt;$$

$$A_{3.7}^2 = \langle \partial_t + kx^{-1}u\partial_u, e^{ktx^{-1}}\partial_u, t\partial_t + x\partial_x + qu\partial_u \rangle$$

$$(k > 0, \ 0 < |q| < 1) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + [k^2x^{-2} + k^2x^{-4}t^2 - 2ktx^{-3}]u + 2ktx^{-2}u_x +$$

$$+ |x|^{q-2}e^{ktx^{-1}}G(\omega),$$

$$\omega = |x|^{1-q}e^{-ktx^{-1}}(u_x + ktx^{-2}u).$$

$$A_{3.7}^3 = \langle |t|^{\frac{1}{2}q} \partial_u, |t|^{1-\frac{1}{2}q} \partial_u, t \partial_t + x \partial_x + (1 + \frac{1}{2}q) u \partial_u \rangle \quad (q \neq 0, \pm 1) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{4} q(q-2) t^{-2} u + |t|^{\frac{1}{2}(q-2)} G(\xi, \omega),$$

$$\xi = tx^{-1}, \quad \omega = |t|^{-\frac{1}{2}q} u_x;$$

$$A_{3.7}^4 = \langle e^{\frac{1}{2}(q-1)t} \partial_u, e^{\frac{1}{2}(1-q)t} \partial_u, \partial_t + k \partial_x + \frac{1}{2}(1+q) u \partial_u \rangle$$

$$(q \neq 0, \pm 1; k \geq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{4} (q-1)^2 u + e^{\frac{1}{2}(1+q)t} G(\eta, \omega),$$

$$\eta = x - kt, \quad \omega = e^{-\frac{1}{2}(1+q)t} u;$$

$$A_{3.7}^5 = \langle \partial_t + kx^{-1} u \partial_u, |x|^{-q} u \partial_u, t \partial_t + x \partial_x \rangle \quad (k \geq 0, q \neq 0, \pm 1) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - u^{-1} u_x^2 - q(q+1) x^{-2} u \ln |u| +$$

$$+ k(q-1)(q+2) tx^{-3} u + ux^{-2} G(\omega),$$

$$\omega = xu^{-1} u_x + q \ln |u| + k(1-q) tx^{-1}.$$

$A_{3.8}$ –інваріантні рівняння

$$A_{3.8}^1 = \langle \cos t \partial_u, -\sin t \partial_u, \partial_t + k \partial_x \rangle \quad (k \geq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - u + G(\eta, u_x), \quad \eta = x - kt;$$

$$A_{3.8}^2 = \langle |t|^{\frac{1}{2}} \cos(\ln |t|) \partial_u, -|t|^{\frac{1}{2}} \sin(\ln |t|) \partial_u, t \partial_t + x \partial_x + \frac{1}{2} u \partial_u \rangle :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{5}{4} t^{-2} u + |t|^{-\frac{3}{2}} G(\xi, \omega),$$

$$\xi = tx^{-1}, \quad \omega = |t|^{\frac{1}{2}} u_x.$$

$A_{3.9}$ –інваріантні рівняння

$$A_{3.9}^1 = \langle \sin t \partial_u, \cos t \partial_u, \partial_t + k \partial_x + qu \partial_u \rangle \quad (k \geq 0, q > 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - u + e^{qt} G(\eta, \omega), \quad \eta = x - kt, \quad \omega = e^{-qt} u_x;$$

$$A_{3.9}^2 = \langle |t|^{\frac{1}{2}} \sin(\ln |t|) \partial_u, |t|^{\frac{1}{2}} \cos(\ln |t|) \partial_u, t \partial_t + x \partial_x + (\frac{1}{2} + q) u \partial_u \rangle$$

$$(q \geq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{5}{4} t^{-2} u + |t|^{q-\frac{3}{2}} G(\xi, \omega),$$

$$\xi = tx^{-1}, \quad \omega = |t|^{\frac{1}{2}-q}u_x.$$

$$A_4 \sim A_{3.7} \oplus A_1, \quad A_4 = \langle \partial_x, |t|^{\frac{1}{2}(1-q)}\partial_u, |t|^{\frac{1}{2}(1+q)}\partial_u, \\ t\partial_t + x\partial_x + \frac{1}{2}(1+q)u\partial_u \rangle \quad (q \neq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{4}(q+1)(q-1)t^{-2}u + |t|^{\frac{1}{2}(q-3)}G(\omega),$$

$$\omega = |t|^{\frac{1}{2}(1-q)}u_x;$$

$$A_4 \sim A_{4.2}, \quad A_4 = \langle \partial_x, \sqrt{|t|}\partial_u, \sqrt{|t|}\ln|t|\partial_u, \\ t\partial_t + x\partial_x + (q + \frac{1}{2})u\partial_u \rangle \quad (q \neq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{1}{4}t^{-2}u + |t|^{q-\frac{3}{2}}G(\omega), \quad \omega = |t|^{\frac{1}{2}-q}u_x;$$

$$A_4 \sim A_{4.3}, \quad A_4 = \langle \partial_x, t\partial_u, \partial_u, t\partial_t + x\partial_x \rangle :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + t^{-2}G(\omega), \quad \omega = tu_x;$$

$$A_4 \sim A_{4.3}, \quad A_4 = \langle e^{kt}\partial_u, \partial_t + ku\partial_u, \beta\partial_x + te^{kt}\partial_u, e^{-kt}\partial_u \rangle \\ (k > 0, \beta > 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + k^2u + 2k\beta^{-1}xe^{kt} + e^{kt}G(\omega), \quad \omega = e^{-kt}u_x;$$

$$A_4 \sim A_{4.3}, \quad A_4 = \langle e^{kt}\partial_u, \partial_x, \partial_t + (ku + xe^{kt})\partial_u, e^{-kt}\partial_u \rangle \quad (k > 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + k^2u + e^{kt}G(\omega), \quad \omega = e^{-kt}u_x - t;$$

$$A_4 \sim A_{4.5} \quad (p = \alpha, q = 2m - \alpha - 1), \quad A_4 = \langle \partial_x, |t|^{m-\alpha}\partial_u, |t|^{1-m+\alpha}\partial_u, \\ t\partial_t + x\partial_x + mu\partial_u \rangle$$

$$(m \neq \frac{1}{2}(1+\alpha), \frac{1}{2} + \alpha; \alpha \neq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + (m - \alpha)(m - \alpha - 1)t^{-2}u + |t|^{m-2}G(\omega),$$

$$\omega = |t|^{1-m}u_x;$$

$$A_4 \sim A_{4.5} \quad (p = -2, q = 1 - 2m), \quad A_4 = \langle \partial_x, |t|^{m-1}\partial_u, |t|^{2-m}\partial_u, \\ t\partial_t + x\partial_x - mu\partial_u \rangle$$

$$(m \neq 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + (m-1)(m-2)t^{-2}u + |t|^{-m-2}G(\omega),$$

$$\omega = |t|^{m+1}u_x.$$

$$A_4 \sim A_{4.8}, \quad A_4 = \langle |x|^{m-q}\partial_u, \partial_t, t|x|^{m-q}\partial_u, t\partial_t + x\partial_x + mu\partial_u \rangle$$

$$(m \in \mathbb{R}, q \neq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} - (m-q)(m-q-1)x^{-2}u + \\ + |x|^{m-2}G(\omega),$$

$$\omega = |x|^{1-m}[u_x - (m-q)x^{-1}u];$$

$$A_4 \sim A_{4.8}, \quad A_4 = \langle \partial_t + k\partial_x, \partial_u, t\partial_u, t\partial_t + x\partial_x + qu\partial_u \rangle \quad (k \geq 0) :$$

$$u_{tt} = u_{xx} + |\eta|^{q-2}G(\omega), \quad \omega = |\eta|^{1-q}u_x, \quad \eta = x - kt.$$

Групову класифікацію рівнянь, що містять довільні функції однієї змінної проведено з використанням стандартних методів. Отримано повний перелік таких рівнянь (159), інваріантних відносно чотиривимірних та п'ятивимірних розв'язних алгебр Лі. Цей перелік наведено нижче.

$$u_{tt} = u_{xx} + mu^{-1}u_x^2 \quad (m \neq 0, -1),$$

$$A_4 \sim A_{3.5} \oplus A_1, \quad A_4 = \langle \partial_t, \partial_x, t\partial_t + x\partial_x, u\partial_u \rangle;$$

$$u_{tt} = u_{xx} + e^{u_x},$$

$$A_5^1 = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, t\partial_u, t\partial_t + x\partial_x + (u-x)\partial_u \rangle,$$

$$u_{tt} = u_{xx} + m \ln |u_x|, \quad m > 0,$$

$$A_5^2 = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, t\partial_u, t\partial_t + x\partial_x + (2u + \frac{1}{2}mt^2)\partial_u \rangle;$$

$$u_{tt} = u_{xx} + |u_x|^k, \quad k \neq 0, 1,$$

$$A_5^3 = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u, t\partial_u, t\partial_t + x\partial_x + \frac{k-2}{k-1}u\partial_u \rangle.$$

3.14 Симетрійний аналіз систем керування

Математичні моделі систем з керуванням мають вигляд:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x, u), \quad i = \overline{1, n} \quad (161)$$

На відміну від систем звичайних диференціальних рівнянь, які містять тільки фазові координати x та час t , праві частини систем з керуванням також включають керуючі впливи u . В залежності від апріорних припущень u можуть розглядатися як функції часу $u(t)$ (програмне керування), або як функції і часу і фазових координат $u(t, x)$ (керування із зворотнім зв'язком). Таким чином, головна відмінність систем з керуванням — це те, що вони є недовизначеними системами, тобто кількість рівнянь менша за сумарне число фазових координат і керувань. Друга особливість цих систем полягає у існуванні апріорних вимог до керованості системи, тобто відсутності у неї інваріантних поверхонь. Існування таких поверхонь є паразитним явищем і, як правило, подібні системи не розглядаються.

В рамках моделі (161) можуть бути поставлені як суто теоретичні, так і практичні задачі: проблема керованості, оптимального та термінального керування і таке інше. При вирішенні цих задач суттєвою є інформація про симетрійні властивості системи (161), тобто про існування та обчислення операторів симетрії вигляду

$$X = \tau(t, x, u)\partial_t + \xi^i(t, x, u)\partial_{x^i} + \varphi^j(t, x, u)\partial_{u^j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, r} \quad (162)$$

Початок дослідження інваріантних властивостей систем (161) слід віднести до 30-х років минулого сторіччя, коли з'явилися перші праці професора Г.В.Щіпанова (а згодом - відомий критерій Щіпанова—Лузіна). До цього часу зусиллями вітчизняних і зарубіжних вчених найбільш дослідженими слід вважати деякі важливі підкласи системи (161): лінійні, білінійні, так звані L -системи і таке інше. В той же час, дослідження нелінійних систем загального вигляду зроблено не було. Деякою

мірою це пояснюється відсутністю в теорії керування специфічних класів рівнянь (як, наприклад, в математичній фізиці — рівняння теплопровідності, рівняння Шрьодінгера та інші). Інша причина — відсутність розвиненої теорії. Тому єдиний спосіб розпочати цю справу — розглянути нелінійні системи малих порядків (починаючи від $n = 2$ та $r = 1$).

В публікаціях [51, 52, 55] об’єктом аналізу стали системи керування другого порядку з одним керуючим впливом:

$$\dot{x}^1 = F(t, x, u), \quad \dot{x}^2 = u \quad (163)$$

де: $F(\cdot)$ — довільна, двічі диференційована функція своїх аргументів. Для подальшого аналізу запропонована нова геометрична конструкція, а саме — асоційоване з вихідною системою векторне поле X , внутрішнє (intrinsic) визначення якого дається формулою

$$X \rfloor \Omega = \omega \wedge d\omega, \quad (164)$$

де: Ω — стандартний елемент об’єму, ω — диференціальна 1-форма, що визначає похідну систему (derived system). Для векторного поля X запропоновано назву: “характеристичне продовження”. В термінах цього продовження сформульовані наступні результати:

- а) умова некерованості систем другого порядку є тотожною умові виродження поля X ;
- б) умови лінеаризації систем другого порядку еквівалентні умовам існування інваріантів поля X ;
- с) проблема знаходження симетрій для систем другого порядку редукується до проблеми пошуку розв’язків лінійного рівняння в частинах похідних

$$X\sigma = F_{uu}F_{x^1}\sigma \quad (165)$$

де: σ — генеруюча функція симетрій. Це рівняння також відкриває шлях до повної групової класифікації систем другого порядку;

d) проблема оптимального синтезу (знаходження закону керування із зворотнім зв'язком) для систем другого порядку редукується до проблеми пошуку розв'язків задачі Коши

$$Xu = 0, \quad x^1(T) = x_k^1, \quad x^2(T) = x_k^2 \quad (166)$$

В статті [53] для керованих систем з параметром $G(t, x, \dot{x}, \dots) + \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \dots) = 0$ отримані достатні умови (критерій) редукції до вигляду $G(\hat{t}, \hat{x}, \hat{\dot{x}}, \dots) = 0$. Сформульовано теорему: для редукції достатньо, щоб вихідне рівняння було абсолютно інваріантне відносно оператора

$$Z = \tau(t, x)\partial_t + \xi(t, x)\partial_x + \partial_\varepsilon, \quad (167)$$

де: $\tau^2 + \xi^2 \neq 0$. Редукуючі заміни – це інваріанти означеного оператора. У якості приклада розглянута проблема редукції рівнянь руху літака з вертикальним зльотом та посадкою.

В статті [54] для нелінійних систем керування з симетрією запропоновано новий принцип керування (“рекурсивне керування”) при вирішенні термінальних задач та сформульовано алгоритм побудови закона керування. Основу алгоритму складає знаходження зв'язку між “узагальненими керуваннями” та “узагальненими похибками”, що є інваріантами групи симетрій, яка лишає бажаний термінальний многовид інваріантним. Розглянуто приклад застосування алгоритму для нелінійних керованих систем другого порядку.

4 Реалізації алгебр Лі та диференціальні інваріанти

4.1 Реалізації алгебр Лі низьких розмірностей [95]

Нехай M — n -вимірний гладкий многовид, а $\text{Vect}(M)$ — алгебра Лі гладких векторних полів вигляду

$$\xi^i(x)\partial_{x_i}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (168)$$

зі стандартним комутатором векторних полів.

Тут і далі $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, функції $\xi^i(x)$ вважаємо нескінченно диференційовними. За індексами, що повторюються, проводиться підсумовування, якщо не вказано інше.

Означення. Реалізацією R алгебри Лі A в векторних полях на M називається гомоморфізм $R: A \rightarrow \text{Vect}(M)$.

Класифікацію реалізацій дійсних розв'язних алгебр Лі проводимо починаючи з одновимірної алгебри. При класифікації реалізацій алгебр Лі більшої розмірності використовуються реалізації її підалгебр, ізоморфних вже дослідженим алгебрам меншої розмірності. При цьому розрізняємо сильно та слабо еквівалентні реалізації і використовуємо підхід, що базується на понятті мегаідеалу, запропонованому Р.О. Поповичем у [95]. Це дозволяє значно зменшити громіздкість обчислень, ефективно доводити нееквівалентність отриманих реалізацій і, як наслідок, уникнути помилок в класифікації.

Сформулюємо відповідні означення.

Означення. Дві реалізації $R_1: A \rightarrow \text{Vect}(M_1)$ та $R_2: A \rightarrow \text{Vect}(M_2)$ називаються *сильно еквівалентними*, якщо існує дифеоморфізм f з M_1 на M_2 такий, що $R_2(v) = f_* R_1(v)$ для всіх $v \in A$. Якщо такого дифеоморфізму не існує, то реалізації R_1 та R_2 називаються *сильно нееквівалентними*.

Тут f_* — ізоморфізм з $\text{Vect}(M_1)$ в $\text{Vect}(M_2)$, індукований f . В рамках локального підходу, який застосовується, M можна розглядати як деяку відкриту підмножину $\mathbb{R}^n$ і всі дифеоморфізми є локальними.

Нехай $\text{Aut}(A)$ — група всіх автоморфізмів алгебри A , G — деяка підгрупа групи $\text{Aut}(A)$.

Означення. Мегаідеалом алгебри A називаємо векторний підпростір алгебри A , який є інваріантним відносно довільних перетворень з $\text{Aut}(A)$.

Означення. Реалізації R_1 та R_2 називаються G -еквівалентними, якщо існує $\varphi \in G$ та дифеоморфізм f з M_1 на M_2 такі, що $R_2(v) = f_* R_1(\varphi(v))$

для всіх $v \in A$. Якщо $G = \text{Aut}(A)$, то реалізації R_1 та R_2 називаються *слабо еквівалентними*. Обмеження реалізації R на підалгебру A_0 алгебри A називається *реалізацією, індукованою R* , та позначається $R|_{A_0}$.

Класифікацію реалізацій алгебр Лі було проведено відносно слабкої еквівалентності тому, що така класифікація має більше застосувань і може бути представлена в більш компактній формі.

Нехай V — підмножина $\text{Vect}(M)$ і $r(x) = \dim\langle V(x) \rangle$, $x \in M$. Рангом $\text{rank} V$ підмножини V називається загальне значення $r(x)$ на M .

Нехай $\mathcal{I}$ — мегаідеал і R_1 та R_2 — реалізації алгебри A .

Лема. *Якщо $R_1|_{\mathcal{I}}$ та $R_2|_{\mathcal{I}} \in \text{Aut}(A)|_{\mathcal{I}}$ -нееквівалентними, то R_1 та R_2 є слабо нееквівалентними.*

Як наслідки з цієї леми отримаємо наступні твердження.

Якщо $R_1|_{\mathcal{I}}$ та $R_2|_{\mathcal{I}} \in \text{Aut}(A)|_{\mathcal{I}}$ -нееквівалентними, то R_1 та R_2 також є слабо нееквівалентними.

Якщо алгебра A має мегаідеал $\mathcal{I}$ такий, що $\text{rank} R_1(\mathcal{I}) \neq \text{rank} R_2(\mathcal{I})$, то реалізації R_1 та R_2 є слабо нееквівалентними.

Класифікація нееквівалентних реалізацій дійсних розв'язних та нерозв'язних алгебр Лі розмірності $m \leq 4$, спираючись на класифікацію Г.М. Мубаракзянова (Иzv. высш. учебн. завед. Математика, 1963, № 1, С. 114–123) проводилась окремо.

У випадку розв'язних алгебр Лі було використано такий підхід.

Для кожної з розглядуваних алгебр було знайдено групу автоморфізмів $\text{Aut}(A)$ та множину мегаідеалів алгебри (відповідні переліки наведено наприкінці розділу).

Вибираємо максимальну власну підалгебру B алгебри A . Найбільш простим є випадок, коли B — мегаідеал A . Серед розв'язних алгебр розмірності $m \leq 4$ тільки алгебри mA_1 , $A_{3,1}$, $A_{3,1} \oplus A_1$ та $2A_{2,1}$ не містять $(m-1)$ -вимірних мегаідеалів.

Припустимо, що повний список сильно нееквівалентних реалізацій підалгебри B вже побудовано. Якщо B є мегаідеалом A і реалізації ал-

гебри A класифікуємо тільки відносно слабкої еквівалентності, то достатньо використовувати тільки $\text{Aut}(A)|_B$ -нееквівалентні реалізації B . Для кожної реалізації $R(B)$ з цього списку виконуємо таку процедуру. Знаходимо множину $\text{Diff}^{R(B)}$ локальних дифеоморфізмів простору змінних x , які зберігають реалізації $R(B)$. Подаємо базисний вектор $e_m \notin B$ в найбільш загальному вигляді $e_i = \xi^{ia}(x)\partial_a$, де $\partial_a = \partial/\partial x_a$, і вимагаємо, щоб він задовольняв комутаційні співвідношення алгебри A з базисними векторами з $R(B)$. В результаті отримуємо систему диференціальних рівнянь з частинними похідними для коефіцієнтів ξ^i і, проінтегрувавши її, розглядаємо всі можливі випадки. Для кожного випадку зводимо знайдений розв'язок до найпростішого вигляду, використовуючи дифеоморфізми з $\text{Diff}^{R(B)}$ та автоморфізми алгебри A .

Для перевірки нееквівалентності побудованих реалізацій співставимо N -й реалізації $R(A, N)$ алгебри A впорядкований набір цілих чисел (r_{Nj}) , де r_{Nj} дорівнює рангу базису j -го мегаідеалу $\mathcal{I}_j$ у реалізації $R(A, N)$ з $\dim \mathcal{I}_j > 1$. Реалізації, яким відповідають різні набори рангів, нееквівалентні згідно з наслідком леми.

Теорема 1. *Нееквівалентні реалізації тривимірних та чотиривимірних розв'язних алгебр Лі у просторі довільної скінченної кількості змінних вичерпуються наведеними у наступних таблицях.*

Алгебра	N	Реалізація
$3A_1$	1 2 3 4 5	$\partial_1, \partial_2, \partial_3$ $\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + x_4\partial_2$ $\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + \varphi(x_3)\partial_2$ $\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1$ $\partial_1, x_2\partial_1, \varphi(x_2)\partial_1$
$A_{2,1} \oplus A_1$ $[e_1, e_2] = e_1$	1 2 3 4	$\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3, \partial_2$ $\partial_1, x_1\partial_1 + x_3\partial_2, \partial_2$ $\partial_1, x_1\partial_1, \partial_2$ $\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_2\partial_1$
$A_{3,1}$ $[e_2, e_3] = e_1$	1 2 3	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3$ $\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + x_3\partial_2$ $\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1$
$A_{3,2}$ $[e_1, e_3] = e_1$ $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$	1 2 3	$\partial_1, \partial_2, (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$ $\partial_1, \partial_2, (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2$ $\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 - \partial_2$
$A_{3,3}$ $[e_1, e_3] = e_1$ $[e_2, e_3] = e_2$	1 2 3 4	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$ $\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2$ $\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3$ $\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1$
$A_{3,4}^a, a \leq 1, a \neq 0, 1$ $[e_1, e_3] = e_1$ $[e_2, e_3] = ae_2$	1 2 3	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + ax_2\partial_2 + \partial_3$ $\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + ax_2\partial_2$ $\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 + (1 - a)x_2\partial_2$
$A_{3,5}^b, b \geq 0$ $[e_1, e_3] = be_1 - e_2$ $[e_2, e_3] = e_1 + be_2$	1 2 3	$\partial_1, \partial_2, (bx_1 + x_2)\partial_1 + (-x_1 + bx_2)\partial_2 + \partial_3$ $\partial_1, \partial_2, (bx_1 + x_2)\partial_1 + (-x_1 + bx_2)\partial_2$ $\partial_1, x_2\partial_1, (b - x_2)x_1\partial_1 - (1 + x_2^2)\partial_2$

Алгебра	N	Реалізація
$4A_1$	1	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4$
	2	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, x_4\partial_1 + x_5\partial_2 + x_6\partial_3$
	3	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, x_4\partial_1 + x_5\partial_2 + \theta(x_4, x_5)\partial_3$
	4	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, x_4\partial_1 + \varphi(x_4)\partial_2 + \psi(x_4)\partial_3$
	5	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + x_4\partial_2, x_5\partial_1 + x_6\partial_2$
	6	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + x_4\partial_2, x_5\partial_1 + \theta(x_3, x_4, x_5)\partial_2$
	7	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + \varphi(x_3, x_4)\partial_2, x_4\partial_1 + \psi(x_3, x_4)\partial_2$
	8	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + \varphi(x_3)\partial_2, \theta(x_3)\partial_1 + \psi(x_3)\partial_2$
	9	$\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, x_4\partial_1$
	10	$\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, \theta(x_2, x_3)\partial_1$
	11	$\partial_1, x_2\partial_1, \varphi(x_2)\partial_1, \psi(x_2)\partial_1$
$A_{2,1} \oplus 2A_1$ $[e_1, e_2] = e_1$	1	$\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_4, \partial_2, \partial_3$
	2	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_4\partial_2 + x_5\partial_3, \partial_2, \partial_3$
	3	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_4\partial_2 + \varphi(x_4)\partial_3, \partial_2, \partial_3$
	4	$\partial_1, x_1\partial_1, \partial_2, \partial_3$
	5	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_3\partial_3, \partial_2, x_3\partial_1 + x_4\partial_2$
	6	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_3\partial_3, \partial_2, x_3\partial_1$
	7	$\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_4, \partial_2, x_3\partial_2$
	8	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_4\partial_2, \partial_2, x_3\partial_2$
	9	$\partial_1, x_1\partial_1 + \varphi(x_3)\partial_2, \partial_2, x_3\partial_2$
	10	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_3\partial_3, x_2\partial_1, x_3\partial_1$
$2A_{2,1}$ $[e_1, e_2] = e_1$ $[e_3, e_4] = e_3$	1	$\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3, \partial_2, x_2\partial_2 + \partial_4$
	2	$\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3, \partial_2, x_2\partial_2 + x_4\partial_3$
	3	$\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3, \partial_2, x_2\partial_2 + C\partial_3$
	4	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_3\partial_2, \partial_2, x_2\partial_2 + x_3\partial_3$
	5	$\partial_1, x_1\partial_1, \partial_2, x_2\partial_2$
	6	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_2\partial_1, -x_2\partial_2 + \partial_3$
	7	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_2\partial_1, -x_2\partial_2$
$A_{3,1} \oplus A_1$ $[e_2, e_3] = e_1$	1	$\partial_1, \partial_3, x_3\partial_1 + \partial_4, \partial_2$
	2	$\partial_1, \partial_3, x_3\partial_1 + x_4\partial_2 + x_5\partial_3, \partial_2$
	3	$\partial_1, \partial_3, x_3\partial_1 + \varphi(x_4)\partial_2 + x_4\partial_3, \partial_2$
	4	$\partial_1, \partial_3, x_3\partial_1 + x_4\partial_2, \partial_2$
	5	$\partial_1, \partial_3, x_3\partial_1, \partial_2$
	6	$\partial_1, \partial_3, x_3\partial_1 + \partial_4, x_2\partial_1$
	7	$\partial_1, \partial_3, x_3\partial_1 + x_4\partial_3, x_2\partial_1$
	8	$\partial_1, \partial_3, x_3\partial_1 + \varphi(x_2)\partial_3, x_2\partial_1$

Алгебра	N	Реалізація
$A_{3,2} \oplus A_1$ $[e_1, e_3] = e_1$ $[e_2, e_3] = e_1 + e_2$	1	$\partial_1, \partial_2, (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, \partial_4$
	2	$\partial_1, \partial_2, (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, x_4\partial_3$
	3	$\partial_1, \partial_2, (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2, \partial_3$
	4	$\partial_1, \partial_2, (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, x_4e^{x_3}(x_3\partial_1 + \partial_2)$
	5	$\partial_1, \partial_2, (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, e^{x_3}(x_3\partial_1 + \partial_2)$
	6	$\partial_1, \partial_2, (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, e^{x_3}\partial_1$
	7	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 - \partial_2, \partial_3$
	8	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 - \partial_2, x_3e^{-x_2}\partial_1$
	9	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 - \partial_2, e^{-x_2}\partial_1$
$A_{3,3} \oplus A_1$ $[e_1, e_3] = e_1$ $[e_2, e_3] = e_2$	1	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, \partial_4$
	2	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, x_4\partial_3$
	3	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \partial_3$
	4	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, e^{x_3}(\partial_1 + x_4\partial_2)$
	5	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, e^{x_3}\partial_1$
	6	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3, \partial_4$
	7	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3, x_4\partial_3$
	8	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3, \varphi(x_2)\partial_3$
	9	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3, e^{x_3}\partial_1$
$A_{3,4}^a \oplus A_1$ $ a \leq 1, a \neq 0, 1$ $[e_1, e_3] = e_1$ $[e_2, e_3] = ae_2$	1	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + ax_2\partial_2 + \partial_3, \partial_4$
	2	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + ax_2\partial_2 + \partial_3, x_4\partial_3$
	3	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + ax_2\partial_2, \partial_3$
	4	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + ax_2\partial_2 + \partial_3, e^{x_3}\partial_1 + x_4e^{ax_3}\partial_2$
	5	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + ax_2\partial_2 + \partial_3, e^{x_3}\partial_1 + e^{ax_3}\partial_2$
	6	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + ax_2\partial_2 + \partial_3, e^{x_3}\partial_1$
	7	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 + (1-a)x_2\partial_2, \partial_3$
	8	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 + (1-a)x_2\partial_2, x_3 x_2 ^{\frac{1}{1-a}}\partial_1$
	9	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 + (1-a)x_2\partial_2, x_2 ^{\frac{1}{1-a}}\partial_1$
$a \neq -1$	10	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + ax_2\partial_2 + \partial_3, e^{ax_3}\partial_2$

Алгебра	N	Реалізація
$A_{3.5}^b \oplus A_1, \quad b \geq 0$ $[e_1, e_3] = be_1 - e_2$ $[e_2, e_3] = e_1 + be_2$	1	$\partial_1, \partial_2, (bx_1 + x_2)\partial_1 + (-x_1 + bx_2)\partial_2 + \partial_3, \partial_4$
	2	$\partial_1, \partial_2, (bx_1 + x_2)\partial_1 + (-x_1 + bx_2)\partial_2 + \partial_3, x_4\partial_3$
	3	$\partial_1, \partial_2, (bx_1 + x_2)\partial_1 + (-x_1 + bx_2)\partial_2, \partial_3$
	4	$\partial_1, \partial_2, (bx_1 + x_2)\partial_1 + (-x_1 + bx_2)\partial_2 + \partial_3, x_4e^{bx_3}(\cos x_3\partial_1 - \sin x_3\partial_2)$
	5	$\partial_1, \partial_2, (bx_1 + x_2)\partial_1 + (-x_1 + bx_2)\partial_2 + \partial_3, e^{bx_3}(\cos x_3\partial_1 - \sin x_3\partial_2)$
	6	$\partial_1, x_2\partial_1, (b - x_2)x_1\partial_1 - (1 + x_2^2)\partial_2, \partial_3$
	7	$\partial_1, x_2\partial_1, (b - x_2)x_1\partial_1 - (1 + x_2^2)\partial_2, x_3\sqrt{1 + x_2^2}e^{-b \arctan x_2}\partial_1$
	8	$\partial_1, x_2\partial_1, (b - x_2)x_1\partial_1 - (1 + x_2^2)\partial_2, \sqrt{1 + x_2^2}e^{-b \arctan x_2}\partial_1$
$A_{4.1}$ $[e_2, e_4] = e_1$ $[e_3, e_4] = e_2$	1	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, x_2\partial_1 + x_3\partial_2 + \partial_4$
	2	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, x_2\partial_1 + x_3\partial_2 + x_4\partial_3$
	3	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, x_2\partial_1 + x_3\partial_2$
	4	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + x_4\partial_2, x_2\partial_1 + x_4\partial_3 - \partial_4$
	5	$\partial_1, \partial_2, -\frac{1}{2}x_3^2\partial_1 + x_3\partial_2, x_2\partial_1 - \partial_3$
	6	$\partial_1, x_2\partial_1, \partial_3, x_2x_3\partial_1 - \partial_2$
	7	$\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, -\partial_2 - x_2\partial_3$
	8	$\partial_1, x_2\partial_1, \frac{1}{2}x_3^2\partial_1, -\partial_2$
$A_{4.2}^b, \quad b \neq 0$ $[e_1, e_4] = be_1$ $[e_2, e_4] = e_2$ $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$	1	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, bx_1\partial_1 + (x_2 + x_3)\partial_2 + x_3\partial_3 + \partial_4$
	2	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, bx_1\partial_1 + (x_2 + x_3)\partial_2 + x_3\partial_3$
	3	$\partial_1, \partial_2, x_4\partial_1 + x_3\partial_2, bx_1\partial_1 + x_2\partial_2 + (b - 1)x_4\partial_4 - \partial_3$
	4	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_2, bx_1\partial_1 + x_2\partial_2 - \partial_3$
	5	$\partial_1, x_2\partial_1, \partial_3, (bx_1 + x_2x_3)\partial_1 + (b - 1)x_2\partial_2 + x_3\partial_3$
	6	$\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, bx_1\partial_1 + (b - 1)x_2\partial_2 + ((b - 1)x_3 - x_2)\partial_3$
$b \neq 1$	7	$\partial_1, \partial_2, e^{(1-b)x_3}\partial_1 + x_3\partial_2, bx_1\partial_1 + x_2\partial_2 - \partial_3$
	8	$\partial_1, x_2\partial_1, \frac{x_2}{1-b} \ln x_2 \partial_1, bx_1\partial_1 + (b - 1)x_2\partial_2$
$b = 1$	7	$\partial_1, x_2\partial_1, \partial_3, (x_1 + x_2x_3)\partial_1 + x_3\partial_3 + \partial_4$
$A_{4.3}$ $[e_1, e_4] = e_1$ $[e_3, e_4] = e_2$	1	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, x_1\partial_1 + x_3\partial_2 + \partial_4$
	2	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, x_1\partial_1 + x_3\partial_2 + x_4\partial_3$
	3	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, x_1\partial_1 + x_3\partial_2$
	4	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + x_4\partial_2, x_1\partial_1 + x_3\partial_3 - \partial_4$
	5	$\partial_1, \partial_2, \varepsilon e^{-x_3}\partial_1 + x_3\partial_2, x_1\partial_1 - \partial_3$
	6	$\partial_1, x_2\partial_1, \partial_3, (x_1 + x_2x_3)\partial_1 + x_2\partial_2$
	7	$\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + (x_3 - x_2)\partial_3$
	8	$\partial_1, x_2\partial_1, -x_2 \ln x_2 \partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2$

Алгебра	N	Реалізація
$A_{4,4}$ $[e_1, e_4] = e_1$ $[e_2, e_4] = e_1 + e_2$ $[e_3, e_4] = e_2 + e_3$	1	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, (x_1 + x_2)\partial_1 + (x_2 + x_3)\partial_2 + x_3\partial_3 + \partial_4$
	2	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, (x_1 + x_2)\partial_1 + (x_2 + x_3)\partial_2 + x_3\partial_3$
	3	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + x_4\partial_2, (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 + x_4\partial_3 - \partial_4$
	4	$\partial_1, \partial_2, -\frac{1}{2}x_3^2\partial_1 + x_3\partial_2, (x_1 + x_2)\partial_1 + x_2\partial_2 - \partial_3$
	5	$\partial_1, x_2\partial_1, \partial_3, (x_1 + x_2x_3)\partial_1 - \partial_2 + x_3\partial_3$
	6	$\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, x_1\partial_1 - \partial_2 - x_2\partial_3$
	7	$\partial_1, x_2\partial_1, \frac{1}{2}x_2^2\partial_1, x_1\partial_1 - \partial_2$
$A_{4,5}^{a,b,c}, abc \neq 0$ $[e_1, e_4] = ae_1$ $[e_2, e_4] = be_2$ $[e_3, e_4] = ce_3$	1	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + cx_3\partial_3 + \partial_4$
	2	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + cx_3\partial_3$
	3	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + x_4\partial_2, ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + (a - c)x_3\partial_3 + (b - c)x_4\partial_4$
	4	$\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, ax_1\partial_1 + (a - b)x_2\partial_2 + (a - c)x_3\partial_3$
$a = b = c = 1$	5	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + x_4\partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_5$
	6	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + \varphi(x_3)\partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_4$
	7	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + \varphi(x_3)\partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2$
	8	$\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_4$
	9	$\partial_1, x_2\partial_1, \varphi(x_2)\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3$
	10	$\partial_1, x_2\partial_1, \varphi(x_2)\partial_1, x_1\partial_1$
$a = b = 1, c \neq 1$	5	$\partial_1, x_2\partial_1, \partial_3, x_1\partial_1 + cx_3\partial_3 + \partial_4$
	6	$\partial_1, x_2\partial_1, \partial_3, x_1\partial_1 + cx_3\partial_3$
	7	$\partial_1, \partial_2, e^{(1-c)x_3}\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$
$-1 \leq a < b < c = 1$ $b > 0$ if $a = -1$	5	$\partial_1, \partial_2, \varepsilon_1 e^{(a-1)x_3}\partial_1 + \varepsilon_2 e^{(b-1)x_3}\partial_2, ax_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + \partial_3$
	6	$\partial_1, x_2\partial_1, \partial_3, ax_1\partial_1 + (a - b)x_2\partial_2 + x_3\partial_3$
	7	$\partial_1, e^{(a-b)x_2}\partial_1, e^{(a-1)x_2}\partial_1, ax_1\partial_1 + \partial_2$

Алгебра	N	Реалізація
$A_{4,6}^{a,b}, a > 0$	1	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, ax_1\partial_1 + (bx_2 + x_3)\partial_2 + (-x_2 + bx_3)\partial_3 + \partial_4$
$[e_1, e_4] = ae_1$	2	$\partial_1, \partial_2, \partial_3, ax_1\partial_1 + (bx_2 + x_3)\partial_2 + (-x_2 + bx_3)\partial_3$
$[e_2, e_4] = be_2 - e_3$	3	$\partial_1, \partial_2, x_3\partial_1 + x_4\partial_2, (ax_1 - x_2x_3)\partial_1 + (b - x_4)x_2\partial_2 + (a - b - x_4)x_3\partial_3 - (1 + x_4^2)\partial_4$
$[e_3, e_4] = e_2 + be_3$	4	$\partial_1, \partial_2, \varepsilon e^{(b-a)\arctan x_3} \sqrt{1 + x_3^2} \partial_1 + x_3\partial_2,$ $(ax_1 - \varepsilon x_2 e^{(b-a)\arctan x_3} \sqrt{1 + x_3^2}) \partial_1 + (b - x_3)x_2\partial_2 - (1 + x_3^2)\partial_3$
	5	$\partial_1, x_2\partial_1, x_3\partial_1, ax_1\partial_1 + ((a - b)x_2 + x_3)\partial_2 + (-x_2 + (a - b)x_3)\partial_3$
	6	$\partial_1, e^{(a-b)x_2} \cos x_2\partial_1, -e^{(a-b)x_2} \sin x_2\partial_1, ax_1\partial_1 + \partial_2$
$A_{4,7}$	1	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3, (2x_1 + \frac{1}{2}x_3^2)\partial_1 + (x_2 + x_3)\partial_2 + x_3\partial_3 + \partial_4$
$[e_2, e_3] = e_1$	2	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3, (2x_1 + \frac{1}{2}x_3^2)\partial_1 + (x_2 + x_3)\partial_2 + x_3\partial_3$
$[e_1, e_4] = 2e_1$	3	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + x_3\partial_2, 2x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - \partial_3$
$[e_2, e_4] = e_2$	4	$\partial_1, x_2\partial_1, -\partial_2, (2x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$
$[e_3, e_4] = e_2 + e_3$	5	$\partial_1, x_2\partial_1, -\partial_2, (2x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)\partial_1 + x_2\partial_2$
$A_{4,8}^b, b \leq 1$	1	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3, (1 + b)x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + bx_3\partial_3 + \partial_4$
$[e_2, e_3] = e_1$	2	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3, (1 + b)x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + bx_3\partial_3$
$[e_1, e_4] = (1 + b)e_1$	3	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + x_3\partial_2, (1 + b)x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + (1 - b)x_3\partial_3$
$[e_2, e_4] = e_2$	4	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1, (1 + b)x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3$
$[e_3, e_4] = be_3$	5	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1, (1 + b)x_1\partial_1 + x_2\partial_2$
$b = 1$	6	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + x_3\partial_2, 2x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_4$
$b = -1$	6	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3, x_4\partial_1 + x_2\partial_2 - x_3\partial_3$
	7	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1, x_3\partial_1 + x_2\partial_2$
$b \neq \pm 1$	6	$\partial_1, x_2\partial_1, -\partial_2, (1 + b)x_1\partial_1 + bx_2\partial_2 + \partial_3$
	7	$\partial_1, x_2\partial_1, -\partial_2, (1 + b)x_1\partial_1 + bx_2\partial_2$
$b = 0$	8	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + x_4\partial_3$
	9	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + C\partial_3$
$A_{4,9}^a, a \geq 0$	1	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3, \frac{1}{2}(4ax_1 + x_3^2 - x_2^2)\partial_1 + (ax_2 + x_3)\partial_2 + (-x_2 + ax_3)\partial_3 + \partial_4$
$[e_2, e_3] = e_1$	2	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3, \frac{1}{2}(4ax_1 + x_3^2 - x_2^2)\partial_1 + (ax_2 + x_3)\partial_2 + (-x_2 + ax_3)\partial_3$
$[e_1, e_4] = 2ae_1$	3	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + x_3\partial_2, (2ax_1 - \frac{1}{2}x_2^2)\partial_1 + (a - x_3)x_2\partial_2 - (1 + x_3^2)\partial_3$
$[e_2, e_4] = ae_2 - e_3$		
$[e_3, e_4] = e_2 + ae_3$		
$a = 0$	4	$\partial_1, \partial_2, x_2\partial_1 + \partial_3, \frac{1}{2}(x_3^2 - x_2^2 + 2x_4)\partial_1 + x_3\partial_2 - x_2\partial_3$
$A_{4,10}$	1	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \partial_4$
$[e_1, e_3] = e_1$	2	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + x_4\partial_3$
$[e_2, e_3] = e_2$	3	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \partial_3, x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + C\partial_3$
$[e_1, e_4] = -e_2$	4	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1 + \partial_3, -x_1x_2\partial_1 - (1 + x_2^2)\partial_2$
$[e_2, e_4] = e_1$	5	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_2\partial_1 - x_1\partial_2 + \partial_3$
	6	$\partial_1, \partial_2, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_2\partial_1 - x_1\partial_2$
	7	$\partial_1, x_2\partial_1, x_1\partial_1, -x_1x_2\partial_1 - (1 + x_2^2)\partial_2$

Окремо було знайдено усі нееквівалентні реалізації нерозв'язних алгебр Лі розмірностей три та чотири. Техніка знаходження реалізацій та доведення їх нееквівалентності була опублікована в роботі [66].

Теорема 2. *Нееквівалентні реалізації тривимірних та чотиривимірних нерозв'язних алгебр Лі у просторі довільної скінченної кількості змінних вичерпуються наведеними у наступній таблиці.*

Алгебра	N	Реалізація
$sl(2, \mathbb{R})$ $[e_1, e_2] = e_1$ $[e_2, e_3] = e_3$ $[e_1, e_3] = 2e_2$	1	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + x_2\partial_3$
	2	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, (x_1^2 - x_2^2)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2$
	3	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, (x_1^2 + x_2^2)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2$
	4	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2$
	5	$\partial_1, x_1\partial_1, x_1^2\partial_1$
$sl(2, \mathbb{R}) \oplus A_1$ $[e_1, e_2] = e_1$ $[e_2, e_3] = e_3$ $[e_1, e_3] = 2e_2$	1	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + x_2\partial_3, \partial_4$
	2	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + x_2\partial_3, x_2\partial_1 + 2x_2x_3\partial_2 + (x_3^2 + x_4)\partial_3$
	3	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + x_2\partial_3, x_2\partial_1 + 2x_2x_3\partial_2 + (x_3^2 + c)\partial_3, c \in \{-1; 0; 1\}$
	4	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, (x_1^2 + x_2^2)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2, \partial_3$
	5	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, (x_1^2 - x_2^2)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2, \partial_3$
	6	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2, \partial_3$
	7	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2, x_2x_3\partial_2$
	8	$\partial_1, x_1\partial_1 + x_2\partial_2, x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2, x_2\partial_2$
	9	$\partial_1, x_1\partial_1, x_1^2\partial_1, \partial_2$
$so(3)$ $[e_2, e_3] = e_1$ $[e_3, e_1] = e_2$ $[e_1, e_2] = e_3$	1	$-\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2, -\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2, \partial_1$
	2	$-\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2 + \sin x_1 \sec x_2 \partial_3, -\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2 + \cos x_1 \sec x_2 \partial_3, \partial_1$
$so(3) \oplus A_1$ $[e_2, e_3] = e_1$ $[e_3, e_1] = e_2$ $[e_1, e_2] = e_3$	1	$-\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2, -\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2, \partial_1, \partial_3$
	2	$-\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2 + \sin x_1 \sec x_2 \partial_3, -\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2 + \cos x_1 \sec x_2 \partial_3, \partial_1, \partial_3$
	3	$-\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2 + \sin x_1 \sec x_2 \partial_3, -\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2 + \cos x_1 \sec x_2 \partial_3, \partial_1, x_4 \partial_3$
	4	$-\sin x_1 \tan x_2 \partial_1 - \cos x_1 \partial_2 + \sin x_1 \sec x_2 \partial_3, -\cos x_1 \tan x_2 \partial_1 + \sin x_1 \partial_2 + \cos x_1 \sec x_2 \partial_3, \partial_1, \partial_4$

4.2 Диференціальні інваріанти векторних полів Лі на дійсній площині [64]

Використовуючи алгоритм запропонований Л.В. Овсянніковим було побудовано базиси диференціальних інваріантів, оператори інваріантного диференціювання та визначники Лі, для усіх реалізацій скінченновимірних алгебр Лі векторними полями на дійсній площині.

N	Фунд. диф. інваріанти	Оператор інв. диф-ня	Визначник Лі
1	y	D_x	const
1*	x, y'	D_x	const
2	y', y''	D_x	const
3	$y, \frac{y'^3}{y''}$	$\frac{1}{y'} D_x$	$-(y')^2$
3*	x, y''	D_x	const
4	y'	$y D_x$	y
5	$y, \frac{(y')^2}{y''}$	$\frac{1}{y'} D_x$	y'
5*	$x, \frac{y''}{y'}$	D_x	y'
6	$x, y'' \varphi'''(x) - y''' \varphi''(x)$	D_x	$\varphi''(x)$
7	$\frac{y'}{y''}$	D_x	y'
8	$y' + y''$	D_x	$-e^{-x}$
9	y''	D_x	const
10	$y'' e^{y'}$	$e^{y'} D_x$	const
11	$y'' + 2y' + y$	D_x	$-e^{-2x}$
12	$\frac{y'''}{(y'')^2}$	$\frac{1}{y''} D_x$	$-y''$
13	$x, \frac{y''}{y'''}$	D_x	$-y''$
14	$y'' y'^{\frac{2-a}{a-1}}$	$(y')^{\frac{1}{a-1}} D_x$	$(a-1)y'$
15	$y'' + (a+1)y' + ay$	D_x	$(1-a)e^{-(1+a)x}$
16	$y'' e^{-c \arctan y'} P_1^{-3/2}$	$e^{-c \arctan y'} P_1^{-1/2} D_x$	P_1
17	$y'' + 2by' + (b^2 + 1)y$	D_x	$-(c_1^2 + c_2^2)e^{-2bx}$
18	$(y''y + (y')^2 + 1)P_1^{-3/2}$	$2yP_1^{-1/2} D_x$	$2y^2 P_1$
19	$(2y'(1+y') + y''(x-y))(y')^{-3/2}$	$(x-y)(y')^{-1/2} D_x$	$2y'(x-y)^2$

N	Фунд. диф. інваріанти	Оператор інв. диф-ня	Визначник Лі
20	$y^3 y''$	$y^2 D_x$	y^2
21	$x, \frac{Q_3}{(y')^2}$	D_x	$y(y-x)y'$
21*	$y, (3y''^2 - 2y'y''')(y')^{-4}$	$\frac{1}{y'} D_x$	y'
22	$y''(1+x^2+y^2)P_1^{-3/2} + 2(y-xy')P_1^{-1/2}$	$(1+x^2+y^2)P^{-1/2} D_x$	$P_0 P_1$
23	$x, y''P_{4,3}(\varphi, \psi) + y'''P_{2,4}(\varphi, \psi) + y^{(4)}$	D_x	$P_{2,3}(\varphi, \psi)$
24	$\frac{y'y'''}{(y'')^2}$	$\frac{y'}{y''} D_x$	$y'y''$
25	$\frac{y''+y'}{y''' + y''}$	D_x	$-e^{-x}(y' + y'')$
26	$y''' + 2y'' + y'$	D_x	$-e^{-2x}$
27	$y''' + (1+a)y'' + ay'$	D_x	$a(a-1)e^{-(1+a)x}$
28	$y''' + 2by'' + (1+b^2)y'$	D_x	$\frac{(1+b^2)(c_1^2+c_2^2)}{-e^{2bx}}$
29	$S_3 Q_2^{-3/2}$	$\sqrt{\frac{y}{y''}} D_x$	$-2y^2 y''$
30	$Q_3(y')^{-4}$	$\frac{1}{y'} D_x$	$2y'^2$
31	y'''	D_x	const
32	$y''' + (b+2)y'' + (2b+1)y' + by$	D_x	$(b-1)^2 e^{-(b+2)x}$
33	$y''' + y''$	D_x	$-e^{-x}$
34	$y''' + 3y'' + 3y' + y$	D_x	$-e^{-3x}$
35	$x, \frac{P_{2,3}(y, \varphi)}{P_{2,4}(y, \varphi)}$	D_x	$P_{3,2}(y, \varphi)$
36	$y''' + (a+b+c)y'' + (ab+ac+bc)y' + abcy$	D_x	$\frac{(b-a)(c-a)(c-b)}{e^{(a+b+c)x}}$
37	$y''' + (2b+a)y'' + (b^2+2ab+1)y' + a(b^2+1)y$	D_x	$\frac{(c_1^2+c_2^2)((b-a)^2+1)}{e^{(2b+a)x}}$
38	$y''' e^{\frac{y''}{2}}$	$e^{\frac{y''}{2}} D_x$	const

N	Фунд. диф. інваріанти	Оператор інв. диф-ня	Визначник Лі
39	$b = 1, \quad y'', \quad y^{\text{IV}}(y''')^{-2}$ $b \neq 1, \quad y''^{\frac{2-b}{b-1}}$	$\frac{1}{y'''} D_x$ $y''^{\frac{1}{b-1}} D_x$	y''' $(1-b)y''$
40	$\frac{y''}{y'''}$	D_x	$-y''$
41	$\frac{y''' P_1}{(y'')^2} - 3y'$	$\frac{P_1}{y''} D_x$	$3y'' P_1$
42	$\frac{y''+y}{y''' + y'}$	D_x	$y'' + x$
43	$\frac{3y'' y^{\text{IV}} - 5(y''')^2}{(y'')^{8/3}}$	$\frac{1}{(y'')^{1/3}} D_x$	y''
44	$\frac{S_5}{R_4^{3/2}}$	$\frac{y''}{R_4^{1/2}} D_x$	$(y'')^2 R_4$
45	$\frac{\tilde{U}_5}{\tilde{Q}_3^2}$	$\frac{P_1}{\tilde{Q}_3^{1/2}} D_x$	$-16P_1 \tilde{Q}_3^2$
46	$\frac{U_5}{Q_3^2}$	$\frac{y'}{Q_3^{1/2}} D_x$	$-4y' Q_3^2$
47	$\frac{V_7}{S_5^{8/3}}$	$\frac{y''}{S_5^{1/3}} D_x$	$-2y'' S_5^2$
48	$x, W(y', \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_r)$	D_x	$L(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_r)$
49	$x, \frac{W(y', \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_r)}{D_x W(y', \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_r)}$	D_x	$L(y', \xi'_1, \dots, \xi'_r)$
50	$K_r(\eta_1, \dots, \eta_r)$	D_x	$L(\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_r)$
51	$\frac{K_r(\eta_1, \dots, \eta_r)}{D_x K_r(\eta_1, \dots, \eta_r)}$	D_x	$L(y', \eta'_1, \dots, \eta'_r)$
52	$c \neq r+1, \quad (y^{(r+1)})^{\frac{2-c+r}{c-r-1}} y^{(r+2)}$ $c = r+1, \quad y^{(r+1)}, \quad \frac{y^{(r+3)}}{(y^{(r+2)})^2}$	$(y^{(r+1)})^{\frac{1}{c-r-1}} D_x$ $\frac{1}{y^{(r+2)}} D_x$	$y^{(r+1)}$ $y^{(r+2)}$
53	$y^{(r+1)} e^{\frac{y^{(r)}}{r!}}$	$e^{\frac{y^{(r)}}{r!}} D_x$	const
54	$\frac{y^{(r+1)} y^{(r+3)}}{(y^{(r+2)})^2}$	$\frac{y^{(r+1)}}{y^{(r+2)}} D_x$	$y^{(r+1)} y^{(r+2)}$
55	$\frac{Q_{r+3}}{(y^{(r+1)})^{\frac{2r+8}{r+2}}}$	$\frac{1}{(y^{(r+1)})^{\frac{2}{r+2}}} D_x$	$y^{(r+1)}$
56	$\frac{S_{r+4}}{Q_{r+3}^{3/2}}$	$\frac{y^{(r+1)}}{Q_{r+3}^{1/2}} D_x$	$y^{(r+1)} Q_{r+3}$

4.3 Диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі [17, 94]

Диференціальні інваріанти широко застосовуються при інтегруванні в квадратурах або пониженні порядку звичайних диференціальних рівнянь, а також для опису класів інваріантних диференціальних рівнянь, тому їх теорія є важливою складовою групового аналізу диференціальних рівнянь. В теорії диференціальних інваріантів особливу роль віді-

грають різні варіанти теореми про скінчений базис диференціальних інваріантів, що нестрого формулюється наступним чином: *для довільної групи G локальних перетворень існує такий скінчений набір диференціальних інваріантів, що кожен диференціальний інваріант групи G є функцією цих інваріантів та їх похідних*. Вперше твердження такого типу (для однопараметричної групи локальних перетворень у просторі двох змінних) отримано ще С. Лі наприкінці XIX ст. і невдовзі суттєво узагальнено А. Трессом. Прогрес останнього часу в цьому напрямі пов'язаний з роботами Л.В. Овсяннікова і П. Олвера, де введено поняття оператора інваріантного диференціювання, інваріантного кофрейму диференціальних форм та ін., отримано, зокрема, результати зі стабілізації рангу продовженої дії групи і оцінки кількості диференціальних інваріантів.

Далі висвітлюються результати, щодо диференціальних інваріантів однопараметричних груп локальних перетворень в просторі n незалежних та m залежних змінних ($m, n \in \mathbb{N}$). (Випадок $n = m = 1$ розглянуто в [16], а результати для випадку $n = 1$ при довільному $m \in \mathbb{N}$ опубліковано в [93].) Важливість такої задачі обумовлена тим, що побудова диференціальних інваріантів однопараметричної групи локальних перетворень є складовою задачі пошуку диференціальних інваріантів для групи довільної розмірності. Узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень проведено не тільки за кількістю залежних і незалежних змінних, але й і безпосереднім посиленням її твердженням. А саме, доведено, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку такої групи будується через одну квадратуру і диференціювання. Проаналізовано зв'язок між диференціальними інваріантами першого порядку і інтегруванням систем рівнянь типу Ріккати.

2. Узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти. Не-

хай $Q = \xi^a(x, u)\partial_{x_a} + \eta^i(x, u)\partial_{u^i}$ — інфінітезімальний оператор однопараметричної групи G локальних перетворень, що діє на множині $M \subset J_{(0)} = X \times U$, де $X \simeq \mathbb{R}^n$ — простір незалежних змінних $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $U \simeq \mathbb{R}^m$ — простір залежних змінних $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$, $G^{(r)}$ — продовження дії групи G на підмножину $M_{(r)} = M \times U^{(1)} \times U^{(2)} \times \dots \times U^{(r)}$ продовженого простору $J_{(r)} = X \times U_{(r)}$ струменів r -го порядку над простором $X \times U$ (тут $U_{(r)} = U \times U^{(1)} \times U^{(2)} \times \dots \times U^{(r)}$, $r \geq 1$, $Q^{(r)}$ — r -те продовження оператора Q). Диференціальним інваріантом r -го порядку групи G (або оператора Q) називається функція $I: M_{(r)} \rightarrow \mathbb{R}$, яка є інваріантом продовженої дії $G^{(r)}$. Необхідною і достатньою умовою для того, щоб функція I була диференціальним інваріантом r -го порядку групи G , є співвідношення $Q^{(r)}I = 0$.

Тут і надалі, якщо не обумовлено інше, індекси a, b, c, d змінюються від 1 до n , індекси i, j, k, l — від 1 до m . За індексами, що повторюються, йде підсумовування.

Нехай $I = I(x, u) = (I^1(x, u), I^2(x, u), \dots, I^{m+n-1}(x, u))$ — повний набір функціонально незалежних інваріантів (або *універсальний інваріант*) оператора Q , а $J(x, u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$. Тоді функції $I^1(x, u), I^2(x, u), \dots, I^{m+n-1}(x, u)$ і $J(x, u)$ — функціонально незалежні. Виконаємо локальну заміну змінних: $y_c = I^c(x, u)$, $c = \overline{1, n-1}$, $y_n = J(x, u)$ — нові незалежні змінні та $v^i = I^{i+n-1}(x, u)$ — нові залежні змінні. В змінних $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ і $v = (v^1, v^2, \dots, v^m)$ оператор Q має вигляд ∂_{y_n} . Отже, для будь-якого $r \geq 1$ вигляд продовженого оператора $Q^{(r)}$ співпадає з $Q = \partial_{y_n}$, а тому

$$\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}),$$

$$v_{(r)} = \left\{ v_{\alpha}^i = \frac{\partial^{|\alpha|} v^i}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} \mid \alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}, |\alpha| = \sum_{a=1}^n \alpha_a \leq r \right\}$$

(тут $v_{\alpha}^i = v^i$, якщо $|\alpha| = 0$) утворюють повний набір його функціонально незалежних інваріантів, тобто $(\hat{y}, v_{(r)})$ — універсальний інваріант групи $G^{(r)}$. (Функціональна незалежність компонент $\hat{y}$ і $v_{(r)}$ очевидна, бо

$(y, v_{(r)})$ є набором змінних у просторі $J_{(r)}$.) Це означає, що $(\hat{y}, v)$ є фундаментальним набором диференціальних інваріантів оператора Q , тобто будь-який диференціальний інваріант оператора Q можна зобразити як функцію від $\hat{y}$ і v та похідних v за операторами G -інваріантного диференціювання, які співпадають тут з операторами $D_{y_a} = \partial_{y_a} + v_{y_a}^i \partial_{v^i} + v_{y_a y_b}^i \partial_{v_{y_b}^i} + \dots$ повних похідних за змінними y_a .

Повернемося до змінних x, u . В цих змінних

$$\begin{aligned} D_{y_c} &= \frac{(-1)^{c+a}}{\Delta} \frac{D(I^d, d=\overline{1, n-1}, d \neq c, J)}{D(x_b, b=\overline{1, n}, b \neq a)} D_{x_a}, \quad c = \overline{1, n-1}, \\ D_{y_n} &= \frac{(-1)^{n+a}}{\Delta} \frac{D(I^d, d=\overline{1, n-1})}{D(x_b, b=\overline{1, n}, b \neq a)} D_{x_a}, \end{aligned} \quad (169)$$

де $D_{x_a} = \partial_{x_a} + u_{x_a}^i \partial_{u^i} + u_{x_a x_b}^i \partial_{u_{x_b}^i} + \dots$ — оператор повної похідної за змінною x_a , а

$$\frac{D(I^d, d=\overline{1, n-1}, d \neq c, J)}{D(x_b, b=\overline{1, n}, b \neq a)}, \quad \frac{D(I^d, d=\overline{1, n-1})}{D(x_b, b=\overline{1, n}, b \neq a)}, \quad \Delta = \frac{D(I^d, d=\overline{1, n-1}, J)}{D(x_b, b=\overline{1, n})}$$

позначають якобіани (з повних похідних)

функцій $I^d, d = \overline{1, n-1}, d \neq c, J$ за змінними $x_b, b = \overline{1, n}, b \neq a$,

функцій $I^d, d = \overline{1, n-1}$ за змінними $x_b, b = \overline{1, n}, b \neq a$,

функцій $I^d, d = \overline{1, n-1}, J$ за змінними $x_b, b = \overline{1, n}$,

відповідно.

Як результат отримаємо наступну теорему.

Теорема 1. Нехай $I(x, u) = (I^1(x, u), I^2(x, u), \dots, I^{m+n-1}(x, u))$ — універсальний інваріант оператора Q , $J(x, u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$. Тоді функції

$$I^c(x, u), \quad D_{y_1}^{\alpha_1} D_{y_2}^{\alpha_2} \dots D_{y_n}^{\alpha_n} I^{i+n-1}(x, u),$$

де $c = \overline{1, n-1}$, $\alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sum_{a=1}^n \alpha_a \leq r$, а оператори D_{y_a} визначаються формулами (169), утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів (або універсальний диференціальний інваріант) r -го порядку оператора Q .

Наслідок 1. Для будь-якого оператора Q існує повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів r -го порядку, в якому кожен інваріант є раціональною функцією змінних u_α^i ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \sum_{a=1}^n \alpha_a \leq r$) продовженого простору $J_{(r)}$ з коефіцієнтами, що залежать від x_a та u^j .

Наслідок 2. Якщо $I = (I^1(x, u), I^2(x, u), \dots, I^{m+n-1}(x, u))$ — універсальний інваріант оператора Q і $J = J(x, u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$, то функції

$$\begin{aligned} D_{y_c} I^{i+n-1} &= \frac{(-1)^{c+a}}{\Delta} \frac{D(I^d, d=\overline{1, n-1}, d \neq c, J)}{D(x_b, b=\overline{1, n}, b \neq a)} D_{x_a} I^{i+n-1}, \\ D_{y_n} I^{i+n-1} &= \frac{(-1)^{n+a}}{\Delta} \frac{D(I^d, d=\overline{1, n-1})}{D(x_b, b=\overline{1, n}, b \neq a)} D_{x_a} I^{i+n-1} \end{aligned} \quad (170)$$

($c = \overline{1, n-1}$) утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів строго першого порядку оператора Q .

Зауважимо, що за відомого універсального інваріанта I оператора Q частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$ легко знаходиться через одну квадратуру. Наприклад, у випадку, коли для деякого фіксованого a $\xi^a \neq 0$, маємо частинний розв'язок

$$J(x, u) = \int dx_a / \xi^a (X^1 \dots, X^{a-1}, x_a, X^{a+1}, \dots, X^n, U^1, \dots, U^m),$$

де $x_b = X^b(x_a, C)$, $b \neq a$, $u^j = U^j(x, C)$ — розв'язок системи алгебраїчних рівнянь $I(x, u) = C := (C_1, C_2, \dots, C_{m+n-1})$ відносно змінних x_b , $b \neq a$, u^j , а після інтегрування необхідно виконати зворотню підстановку $C = I(x, u)$ (підсумовування по a тут немає). Аналогічно, коли $\eta^i \neq 0$ для деякого фіксованого i , тоді можна покласти

$$J(x, u) = \int du^i / \eta^i (X^1, \dots, X^n, U^1, \dots, U^{i-1}, u^i, U^{i+1}, \dots, U^m)$$

(підсумовування по i тут немає), де $x_b = X^b(u^i, C)$, $u^j = U^j(u^i, C)$, $j \neq i$, — розв'язок системи алгебраїчних рівнянь $I(x, u) = C$ відносно змінних x_b , u^j , $j \neq i$.

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо знайдено універсальний інваріант оператора Q , то повний набір його функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку будується через одну квадратуру і диференціювання.*

3. Інваріантні диференціали. Введемо поняття інваріантного диференціала що є частинним випадком більш загального поняття контактно-інваріантної диференціальної форми першого порядку у продовженому просторі.

Означення. Диференціал $dW(x, u)$ назовемо інваріантним відносно групи G (оператора Q), якщо він не змінюється під дією перетворень з групи G .

Необхідною і достатньою умовою інваріантності диференціала є рівність $dQW(x, u) = 0$. Можливі два принципово різні випадки:

- 1) функція $W(x, u)$ є інваріантом оператора Q , тобто $QW(x, u) = 0$; диференціал $dW(x, u)$ автоматично є інваріантним відносно оператора Q (інваріантний диференціал першого роду);
- 2) функція $W(x, u)$ не є інваріантом оператора Q , але диференціал $dW(x, u)$ інваріантний відносно оператора Q (інваріантний диференціал другого роду); тоді $QW(x, u)$ — ненульова стала.

Якщо відомо деякий набір функцій $I(x, u) = (I^q(x, u))_{q=\overline{1, m+n-1}}$ і $J(x, u)$, що задають універсальний інваріант і інваріантний диференціал оператора Q другого роду відповідно, то всі такі набори, очевидно, можна знайти за формулами

$$\hat{I}(x, u) = F(I(x, u)), \quad \hat{J}(x, u) = J(x, u) + H(I(x, u)), \quad (171)$$

де $F = (F^1, F^2, \dots, F^{m+n-1})$ і H — диференційовні функції своїх аргументів, $|\partial F / \partial I| \neq 0$. Формули (171) визначають відношення еквівалентності Ω на множині $\mathcal{M}$ наборів з $m + n$ гладких функцій від $m + n$

змінних з ненульовим якобіаном. Відповідну множину класів еквівалентності позначимо через $\mathcal{M}/\Omega$.

Твердження 1. Між $\mathcal{M}/\Omega$ і множиною ненульових операторів $\{Q\}$ в просторі змінних (x, u) існує взаємно-однозначна відповідність: сукупність $\{(I(x, u); J(x, u))\}$ розв'язків системи $QI^q = 0$, $q = \overline{1, m+n-1}$, $QJ = 1$, де I^q — функціонально незалежні, є елементом множини $\mathcal{M}/\Omega$, і навпаки, якщо $(I(x, u); J(x, u))$ — деякий представник класу еквівалентності з $\mathcal{M}/\Omega$, то система $QI^q = 0$, $q = \overline{1, m+n-1}$, $QJ = 1$ є визначеною системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів відповідного оператора Q .

4. Випадок $n = 1$. Розглянемо докладніше випадок однієї незалежної змінної x ($n = 1$), в якому можна значно компактніше сформулювати теорему 1 та її наслідки, а також отримати деякі додаткові результати.

Теорема 1'. Нехай $I = I(x, u) = (I^1(x, u), I^2(x, u), \dots, I^m(x, u))$ — універсальний інваріант оператора Q , $J(x, u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$. Тоді функції

$$I^j(x, u), \quad \left(\frac{1}{D_x J} D_x \right)^s I^j(x, u), \quad s = \overline{1, r},$$

де $D_x = \partial_x + u_x^i \partial_{u^i} + u_{xx}^i \partial_{u_x^i} + \dots$ — оператор повної похідної за змінною x , утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів (або універсальний диференціальний інваріант) r -го порядку оператора Q .

Наслідок 1'. Для будь-якого оператора Q існує повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів n -го порядку, в якому кожен інваріант є раціональною функцією змінних $u_x^i, u_{xx}^i, \dots, (u^i)^{(n)}$ продовженого простору з коефіцієнтами, що залежать від x та u^i .

Наслідок 2'. Якщо $I = (I^1(x, u), I^2(x, u), \dots, I^m(x, u))$ — універсальний інваріант оператора Q і $J = J(x, u)$ — частинний розв'язок рівняння

$QJ = 1$, то функції

$$I_{(1)}^j = I_{(1)}^j(x, u_{(1)}) = \frac{dI^j}{dJ} = \frac{D_x I^j}{D_x J} = \frac{I_x^j + I_{u^i}^j u_x^i}{J_x + J_{u^i} u_x^i} \quad (172)$$

утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів строго першого порядку оператора Q .

Наслідок 3. Компоненти строго першого порядку універсального диференціального інваріанту оператора Q можна шукати у вигляді дробово-лінійних функцій змінних u_x^i продовженого простору з коефіцієнтами, що залежать від x та u^i .

Наслідок 2' можна переформулювати, використовуючи поняття інваріантного диференціала.

Наслідок 4. Відношення інваріантних диференціалів оператора Q першого і другого роду є його диференціальним інваріантом строго першого порядку. Якщо $dI^1, dI^2, \dots, dI^m$ утворюють повний набір незалежних інваріантних диференціалів оператора Q першого роду, то їх відношення з його інваріантним диференціалом другого роду вичерпують функціонально незалежні диференціальні інваріанти строго першого порядку оператора Q .

Наслідок 5 (теорема Лі). Нехай $n = m = 1$, $I(x, u)$ і $I_{(1)}(x, u, u_x)$ — диференціальні інваріанти нульового і строго першого порядку оператора Q . Тоді функції

$$I, \quad I_{(1)}, \quad \frac{d^s I_{(1)}}{dI^s} = \left(\frac{1}{D_x I} D_x \right)^s I_{(1)}, \quad s = \overline{1, r-1},$$

утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів n -го порядку оператора Q .

Оператори G -інваріантного диференціювання у випадку однієї незалежної змінної традиційно шукається у вигляді

$$\mathcal{D} = \frac{1}{D_x I^0} D_x,$$

де I^0 — диференціальний інваріант групи G (див., наприклад, наслідок 5). Тому для побудови універсального диференціального інваріанта довільного порядку однопараметричної групи локальних перетворень з допомогою оператора G -інваріантного диференціювання такого вигляду необхідно знати $m+1$ функціонально незалежних диференціальних інваріантів групи G мінімально можливого порядку, тобто m функціонально незалежних диференціальних інваріантів нульового порядку (або просто інваріантів) і один диференціальний інваріант строго першого порядку. Запропонований в теоремі 1' алгоритм дозволяє взагалі уникнути прямої побудови диференціальних інваріантів.

Приклад 1. Нехай $n = m = 1$, а $G = \text{SO}(2)$ — група поворотів, що діє на $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, з інфінітезімальним оператором $Q = u\partial_x - x\partial_u$. $I = \sqrt{x^2 + u^2}$ — інваріант групи G (оператора Q), а тому (в позначеннях з доведення теореми 2) $U(x, C) = \pm\sqrt{C^2 - x^2}$. Тоді

$$J = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \pm \arcsin \frac{x}{C} = \pm \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + u^2}}$$

(тут константу інтегрування покладено рівною нулю), звідки

$$I_{(1)} = \frac{I_x + I_u u_x}{J_x + J_u u_x} = \frac{x + uu_x}{-u + xu_x} \sqrt{x^2 + u^2}, \quad \text{або} \quad \tilde{I}_{(1)} = \frac{x + uu_x}{-u + xu_x}$$

— диференціальний інваріант першого порядку оператора Q .

5. Стандартний підхід та інтегрування систем рівнянь типу Рікати. Прямим методом диференціальні інваріанти строго першого порядку знаходяться як інваріанти першого продовження

$$Q^{(1)} = \xi^a \partial_{x_a} + \eta^i \partial_{u^i} + (\eta_c^k + \eta_{u^j}^k u_c^j - \xi_{x_c}^b u_b^k - \xi_{u^j}^b u_c^j u_b^k) \partial_{u_c^k}$$

оператора Q , тобто як перші інтеграли відповідної характеристичної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_a}{\xi^a} = \frac{du^i}{\eta^i} = \frac{du_c^k}{\eta_c^k + \eta_{u^j}^k u_c^j - \xi_{x_c}^b u_b^k - \xi_{u^j}^b u_c^j u_b^k}, \quad (173)$$

що залежать не тільки від x та u , а й від інших змінних простору $J_{(1)}$. (Тут u_a^i — змінна продовженого простору $J_{(1)}$, що відповідає похідній $\partial u^i / \partial x_a$; нижні індекси функцій означають диференціювання за відповідними змінними; в останньому рівнянні підсумовування по a, c, i та k немає). Інтегрування системи (173) як правило є технічно складною задачею. За відомого універсального інваріанта $I(x, u)$ оператора Q воно зводиться до інтегрування систем рівнянь типу Ріккаті вигляду

$$\frac{du_c^k}{dx_a} = -\frac{\xi_{uj}^b}{\xi^a} u_c^j u_b^k + \frac{\eta_{uj}^k}{\xi^a} u_c^j - \frac{\xi_{x_c}^b}{\xi^a} u_b^k + \frac{\eta_{x_c}^k}{\xi^a} \Bigg|_{\substack{u=U(x_a, C) \\ x_d=X^d(x_a, C), d \neq a}}, \quad (174)$$

якщо $\xi^a \neq 0$ для деякого фіксованого a , або

$$\frac{du_c^k}{du^i} = -\frac{\xi_{uj}^b}{\eta^i} u_c^j u_b^k + \frac{\eta_{uj}^k}{\eta^i} u_c^j - \frac{\xi_{x_c}^b}{\eta^i} u_b^k + \frac{\eta_{x_c}^k}{\eta^i} \Bigg|_{\substack{x=X(u^i, C), \\ u^l=U^l(u^i, C), l \neq i}}, \quad (175)$$

якщо $\eta^i \neq 0$ для деякого фіксованого i . Тут $x_d = X^d(x_a, C)$, $d \neq a$, $u = U(x, C)$ та $x = X(u^i, C)$, $u^l = U^l(u^i, C)$, $l \neq i$, — розв'язки системи алгебраїчних рівнянь $I(x, u) = C$ відносно змінних x_d , $d \neq a$, u та x , u^l , $l \neq i$, відповідно. Константи $C = (C_1, C_2, \dots, C_{m+n-1})$ в системах (174) і (175) вважаються параметрами. Випадок $\eta^i \neq 0$ зводиться до випадку $\xi^a \neq 0$ з допомогою перетворення годографа:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_a &= u^i, & \tilde{x}_d &= x_d, & \tilde{u}^i &= x_a, & \tilde{u}^l &= u^l, & d &\neq a, & l &\neq i, \\ \tilde{u}_a^i &= \frac{1}{u_a^i}, & \tilde{u}_d^i &= -\frac{u_d^i}{u_a^i}, & \tilde{u}_a^l &= \frac{u_a^l}{u_a^i}, & \tilde{u}_d^l &= u_d^l - \frac{u_d^i}{u_a^i} u_a^l. \end{aligned}$$

Тому надалі детально розглядається лише випадок $\xi^a \neq 0$.

Запропонований нами в наслідку 2 метод знаходження диференціальних інваріантів строго першого порядку на відміну від стандартного метода дозволяє уникнути прямого інтегрування систем рівнянь типу Ріккаті (174) або (175) і знайти розв'язок задачі через одну квадратуру і диференціювання. Це означає, що за відомого універсального інваріанта $I(x, u)$ оператора Q системи (174) і (175) завжди інтегруються

однією квадратурою. Дійсно, загальний розв'язок системи (174) задається неявно m незачепленими системами лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D_{x_b} \hat{I}^j \left| \begin{array}{l} u=U(x_a, C) \\ x_d=X^d(x_a, C), d \neq a \end{array} \right. = 0,$$

де $\hat{I}^j = I^{j+n-1} + \sum_{d=1}^{n-1} \tilde{C}_{jd} I^d + \tilde{C}_{jn} J$, $\tilde{C}_{ib}$ — довільні сталі. Щоб записати розв'язок в явному вигляді, додатково введемо позначення:

$$\bar{x} = (x_d)_{d=1, d \neq a}^n, \quad \bar{X} = (X^d)_{d=1, d \neq a}^n, \quad z = x_a,$$

$$I^{\bar{x}} = (I^d)_{d=1}^{n-1}, \quad I^u = (I^{j+n-1})_{j=1}^m,$$

$$C^{\bar{x}} = (C_d)_{d=1}^{n-1}, \quad C^u = (C_{j+n-1})_{j=1}^m,$$

$$\tilde{C}' = (\tilde{C}_{jd})_{j=1}^m \quad {}^{n-1}_{d=1}, \quad \tilde{C}'' = (\tilde{C}_{jn})_{j=1}^m, \quad \hat{I} = I^u + \tilde{C}' I^{\bar{x}} + \tilde{C}'' J.$$

Тоді загальний розв'язок системи (174) дається формулами

$$(u_b^j)_{j=1}^m \quad {}^n_{b=1} = -\hat{I}_u^{-1} \hat{I}_x \left| \begin{array}{l} u=U(x_a, C) \\ \bar{x}=\bar{X}(x_a, C) \end{array} \right. ,$$

або

$$(u_a^j)_{j=1}^m = U_z - U_{C^{\bar{x}}} \bar{X}_{C^{\bar{x}}}^{-1} \bar{X}_z + H((\tilde{C}' + \tilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}}) \bar{X}_{C^{\bar{x}}}^{-1} \bar{X}_z - \tilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}}),$$

$$(u_b^j)_{j=1}^m \quad {}^n_{b=1, b \neq a} = U_{C^{\bar{x}}} \bar{X}_{C^{\bar{x}}}^{-1} - H(\tilde{C}' + \tilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}}) \bar{X}_{C^{\bar{x}}}^{-1},$$

де $H = (U_{C^u} - U_{C^{\bar{x}}} \bar{X}_{C^{\bar{x}}}^{-1} \bar{X}_{C^u})(E + \tilde{C}'' J_{C^u} - (\tilde{C}' + \tilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}}) \bar{X}_{C^{\bar{x}}}^{-1} \bar{X}_{C^u})^{-1}$, E — одинична матриця розміру $m \times m$; значки вектор-функцій з нижніми індексами з наборів змінних позначають відповідні матриці Якобі. Для існування в деякому околі фіксованої точки (x^0, u^0) всіх обернених матриць, що зустрічаються вище, достатньо вважати сталі $\tilde{C}_{ib}$ малими і виконати попередньо невинорожену лінійну заміну в множині інваріантів таким чином, щоб матриця $I_{(\bar{x}, u)}(x^0, u^0)$ була одиничною.

Якщо покласти $\tilde{C}_{ib} = 0$, то отримаємо частинний розв'язок

$$(u_a^j)_{j=1}^m = U_z - U_{C^{\bar{x}}} \bar{X}_{C^{\bar{x}}}^{-1} \bar{X}_z, \quad (u_b^j)_{j=1}^m \quad {}^n_{b=1, b \neq a} = U_{C^{\bar{x}}} \bar{X}_{C^{\bar{x}}}^{-1}.$$

Розв'язок системи (174) в явному вигляді при $n = 1$ необхідно виписувати окремо. Так як в цьому випадку $u = U(x, C)$ — загальний розв'язок системи $du^j/dx = \eta^j(x, u)/\xi(x, u)$, то легко перевірити, що $u_x = U_x(x, C)$ є частинним розв'язком системи (174) (тут, як і в (174), C — набір параметрів). Загальний розв'язок системи (174) має вигляд

$$u_x = -(I_u - \tilde{C} \otimes J_u)^{-1} (I_x + \tilde{C} J_x) \Big|_{u=U(x, C)} = U_z - U_C (E + \tilde{C} \otimes J_C)^{-1} \tilde{C} J_z \quad (176)$$

(в останній рівності виконано заміну $x = z$, $u = U(z, C)$), де E — одинична матриця розміру $m \times m$, $\tilde{C} = (\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_m)^T$ — стовпчик довільних констант, $I_u = (I_{u^j}^i)$, $I_x = (I_x^i)$, $U_z = (U_z^k)$, $U_C = (U_{C_j}^i)$. Обернені матриці в (176) завжди існують для достатньо малих $\tilde{C}_i$.

Приклад 2. Нехай $n = m = 1$, $Q = e^{x+u}(\partial_x + 2x\partial_u)$. $I(x, u) = u - x^2$ — інваріант оператора Q , звідки $u = U(x, C) = x^2 + C$. Тоді

$$J = \int e^{-x-x^2-C} dx = e^{-C} \int e^{-x-x^2} dx = e^{x^2-u} \int e^{-x-x^2} dx,$$

а тому

$$I_{(1)} = \frac{I_x + I_u u_x}{J_x + J_u u_x} = \frac{(u_x - 2x)e^u}{e^{-x} - (u_x - 2x) \int e^{-x-x^2} dx}$$

— диференціальний інваріант першого порядку оператора Q . Рівняння (174) для оператора Q має вигляд

$$\frac{du_x}{dx} = -u_x^2 + (2x - 1)u_x + 2x + 2,$$

а функція $u_x = U_x = 2x$ є його частинним розв'язком.

Приклад 3. Нехай $n = m = 1$, $Q = xu(x\partial_x + ku\partial_u)$, $k \in \mathbb{R}$. $I(x, u) = ux^{-k}$ — інваріант оператора Q , звідки $U(x, C) = Cx^k$. Тоді

$$J = \int \frac{dx}{Cx^{k+2}} = \begin{cases} \frac{\ln x}{C} = \frac{\ln x}{xu}, & \text{якщо } k = -1, \\ -\frac{x^{-(k+1)}}{(k+1)C} = -\frac{1}{(k+1)xu}, & \text{якщо } k \neq -1 \end{cases}$$

(тут константу інтегрування покладено рівною 0). Відповідне рівняння Ріккати

$$\frac{du_x}{dx} = -\frac{1}{Cx^k}u_x^2 + \frac{2(k-1)}{x}u_x + kCx^{k-2}.$$

Функція $u_x = kCx^{k-1}$ є частинним розв'язком цього рівняння, а його загальний розв'язок задається формулою

$$u_x = -\frac{C}{x^2} \left(1 + \frac{1}{\widehat{C} - \ln x} \right), \quad \text{якщо } k = -1, \quad \text{або}$$

$$u_x = Cx^{k-1} \left(k - \frac{k+1}{1 + \widehat{C}x^{k+1}} \right), \quad \text{якщо } k \neq -1,$$

де $\widehat{C}$ — довільна стала.

Зауваження. Для добре відомих груп перетворень на площині (тобто $n = m = 1$) інтегровність в квадратурах рівнянь (174) і (175) як правило очевидно випливає з вигляду цих рівнянь. Так, коли $\xi_u = 0$ або $\eta_x = 0$, вони є лінійними рівнянням або рівняннями Бернуллі відповідно. Якщо G — однопараметрична група конформних перетворень, то $\xi_x = \eta_u$ і $\xi_u = -\eta_x$, а тому в рівняннях (174) і (175) змінні розділяються:

$$\frac{dv}{v^2 + 1} = \frac{\eta_x}{\xi} dx \Big|_{u=U(x,C)} \quad \text{і} \quad \frac{dv}{v^2 + 1} = \frac{\eta_x}{\eta} du \Big|_{x=X(u,C)}.$$

4.4 Умовні диференціальні інваріанти та побудова загальних класів умовно-інваріантних рівнянь [25, 26]

У наступних двох підрозділах представлені нові методи для побудови функціональних базисів для умовних диференціальних інваріантів, а також інваріантів нескінченновимірних алгебр Лі.

Вивчення неklasичної, або умовної симетрії, було почате ще в кінці 1960-х років. Дослідження такого типу симетрій почало розвиватись у 1980-то роки в роботах В.І. Фушича та його учнів, а також численних зарубіжних вчених — Дж. Блюмена, П. Олвера, П. Розенау, П. Кларксона,

М. Крускала, П. Вінтернітца та багатьох інших. Проте ці роботи стосувались в основному знаходження умовної симетрії для конкретних рівнянь чи класів рівнянь, та відповідних розв'язків цих рівнянь. Проте, до цих пір не було запропоновано методів побудови загальних класів рівнянь, що мають певну умовну симетрію. Актуальність цієї задачі обумовлюється тим, що такий опис є одночасно загальним описом класу рівнянь, які можна редукувати за допомогою певного анзацу (що відповідає оператору умовної інваріантності). Ця задача вирішується за допомогою побудови функціонального базису умовних диференціальних інваріантів.

Побудову функціонального базису умовних диференціальних інваріантів буде розглянуто на прикладі алгебри Пуанкаре у скалярному представленні та умовної інваріантності щодо проективного оператора.

Розглянемо нелінійне хвильове рівняння

$$\square u = F(u, u^*) \quad (177)$$

для комплексозначної функції $u = u(x_0, x_1, \dots, x_n)$, де $x_0 = t$ — часова змінна, $x_1, \dots, x_n$ — n просторових змінних, F — деяка довільна функція, $\square u$ — оператор д'Аламбера:

$$\square u = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}. \quad (178)$$

Відомо, що рівняння (177) може бути редуковане до нелінійного рівняння Шрьодінгера, число просторових змінних у якому менше за одиницю числа просторових змінних у початковому нелінійному хвильовому рівнянні, коли нелінійність F має спеціальний вигляд $F = uf(|u|)$, де $|u| = (uu^*)^{1/2}$, зірочка означає комплексне спряження.

Далі ми узагальнимо цей зв'язок між нелінійним хвильовим рівнянням та нелінійним рівнянням Шрьодінгера у зв'язок між диференціальними інваріантами для відповідних алгебр інваріантності, введемо нові поняття редукції фундаментальних базисів та умовних диференціальних інваріантів. Умовні диференціальні інваріанти можуть використовуватись для опису рівнянь, що умовно інваріантні відносно конкретних

операторів та за додаткових умов, таким же чином, як абсолютні диференціальні інваріанти алгебри Лі можуть використовуватись для опису всіх рівнянь, інваріантних відносно цієї алгебри.

Тут ми будемо використовувати наступне означення умовної симетрії (В.И. Фушич, В.М. Штелені, Н.И. Серов “Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наукова думка, 1989. — 336 с.).

Означення 1. Рівняння $F(x, u, u_1, \dots, u_l) = 0$, де u_k - множина всіх часткових похідних k -го порядку функції $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$, називається умовно інваріантним відносно оператора

$$Q = \xi^i(x, u)\partial_{x_i} + \eta^r(x, u)\partial_{u^r}, \quad (179)$$

якщо існує така додаткова умова

$$G(x, u, u_1, \dots, u_{l_1}) = 0, \quad (180)$$

що система двох рівнянь $F = 0$, $G = 0$ є інваріантною відносно оператора Q .

Якщо умова (180) має вигляд $G = Qu$, тоді рівняння $F = 0$ називається Q -умовно інваріантним відносно оператора Q .

Далі ми наведемо ще кілька базових означень, які ми будемо потім узагальнювати. В рамках цих означень ми будемо розглядати алгебри Лі, що складаються з інфінітезимальних операторів

$$X = \xi^i(x, u)\partial_{x_i} + \eta^r(x, u)\partial_{u^r}. \quad (181)$$

Тут $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$.

Означення 2. Функція $F = F(x, u, u_1, \dots, u_l)$, називається диференціальним інваріантом для алгебри Лі L з базисними елементами X_i вигляду (181) ($L = \langle X_i \rangle$), якщо вона є інваріантом l -го продовження цієї алгебри:

$$X_{l\ s} F(x, u, u_1, \dots, u_l) = \lambda_s(x, u, u_1, \dots, u_l) F, \quad (182)$$

де λ_s - деякі функції; якщо $\lambda_i = 0$, F називається абсолютним інваріантом; якщо $\lambda_i \neq 0$, це відносний інваріант.

Далі, коли ми говоримо “диференціальний інваріант”, ми матимемо на увазі “абсолютний диференціальний інваріант”.

Означення 3. Максимальна множина функціонально незалежних інваріантів порядку $r \leq l$ алгебри Лі L називається функціональним базисом l -го порядку диференціальних інваріантів алгебри L .

У наведених нижче списках інваріантів будуть використовуватись наступні позначення

$$\begin{aligned} u_a &\equiv \frac{\partial u}{\partial x_a}, & u_{ab} &\equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_a \partial x_b}, & S_k(u_{ab}) &\equiv u_{a_1 a_2} u_{a_2 a_3} \cdots u_{a_{k-1} a_k} u_{a_k a_1}, \\ S_{jk}(u_{ab}, v_{ab}) &\equiv u_{a_1 a_2} \cdots u_{a_{j-1} a_j} v_{a_j a_{j+1}} \cdots v_{a_k a_1}, \\ R_k(u_a, u_{ab}) &\equiv u_{a_1} u_{a_k} u_{a_1 a_2} u_{a_2 a_3} \cdots u_{a_{k-1} a_k}. \end{aligned} \quad (183)$$

У всіх списках інваріантів j приймає значення від 0 до k . Ми не будемо розрізняти верхні та нижчі індекси стосовно підсумовування: для всіх латинських індексів $x_a x_a \equiv x_a x^a \equiv x^a x_a = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

Фундаментальні базиси диференціальних інваріантів для стандартних скалярних представлень алгебр Пуанкаре та Галілея типу (193), (188) були знайдені в роботі Fushchych W.I. та Yehorchenko I.A. Second-order differential invariants of the rotation group $O(n)$ та of its extensions: $E(n)$; $P(1,n)$; $G(1,n)$, Acta Appl. Math., 1992, V. 28, N 1, 69-92.

Означення 4 Функція $F = F(x, u, u_1, \dots, u_l)$ називається умовним диференціальним інваріантом для оператора X вигляду (181), якщо за умови

$$G(x, u, u_1, \dots, u_{l_1}) = 0, \quad (184)$$

$$X_{l_{\max}} F(x, u, u_1, \dots, u_l) = 0, \quad X_{l_{\max}} G(x, u, u_1, \dots, u_{l_1}) = 0, \quad (185)$$

де $X_{l_{\max}} \in l_{\max}$ -м продовженням оператора X . Порядок продовження дорівнює $l_{\max} = \max(l, l_1)$.

Алгебра Галілея для $n - 1$ просторових змінних є підалгеброю алгебри Пуанкаре для n просторових змінних, що дозволяє редукування нелінійного хвильового рівняння (177) до рівняння Шрьодінгера, яке інваріантне відносно такої алгебри Галілея. Ми будемо далі розглядати нелінійні хвильові рівняння для трьох просторових змінних і їхні симетрійні властивості разом з симетрійними властивостями нелінійного рівняння Шрьодінгера для двох просторових змінних. Проте, відповідні результати можуть бути легко узагальнені для довільної кількості просторових змінних.

Редукція нелінійного хвильового рівняння (177) може бути здійснена за допомогою анзаца

$$u = \exp((-im/2)(x_0 + x_3))\Phi(x_0 - x_3, x_1, x_2). \quad (186)$$

Підстановка виразу (186) в (177) дає рівняння

$$\exp((-im/2)(x_0 + x_3))(2im\Phi_\tau + \Phi_{11} + \Phi_{22}) = F(u, u^*).$$

Тут ми використовуємо наступні позначення: $\tau = x_0 + x_3$ — нова часова змінна, $\Phi_\tau = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau}$, $\Phi_a = \frac{\partial\Phi}{\partial x_a}$, $\Phi_{ab} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_a \partial x_b}$.

Далі ми маємо на увазі сумування за індексами, що повторюються. Якщо не вказане інше, індекси, позначені малими латинськими літерами, приймають значення від 1 до 2.

Якщо нелінійність у рівнянні (177) має вигляд $F = uf(|u|)$, тоді це рівняння редукується до рівняння Шрьодінгера

$$2im\Phi_\tau + \Phi_{11} + \Phi_{22} = \Phi f(|\Phi|). \quad (187)$$

Така редукція дозволяє побудову численних нових розв'язків нелінійного хвильового рівняння з використанням розв'язків рівняння Шрьодінгера. Ми покажемо, що така редукція також дозволяє описати додаткові симетрійні властивості для рівняння (177), що пов'язані з симетрійними властивостями рівняння (187).

Рівняння (187) з довільною функцією f інваріантне відносно алгебри Галілея з базисними операторами

$$\begin{aligned}\partial_\tau &= \frac{\partial}{\partial \tau}, & \partial_a &= \frac{\partial}{\partial x_a}, & J_{12} &= x_1 \partial_2 - x_2 \partial_1, \\ G_a &= t \partial_a + i x_a (\Phi \partial_\Phi - \Phi^* \partial_{\Phi^*}) \quad (a = 1, 2), & J &= (\Phi \partial_\Phi - \Phi^* \partial_{\Phi^*}).\end{aligned}\tag{188}$$

Якщо $f = \lambda |u|^2$, де λ є довільною сталою, рівняння (187) інваріантне відносно розширеної алгебри Галілея, що містить, крім операторів (188), також оператор дилатації

$$D = 2\tau \partial_\tau + x_a \partial_a - I, \tag{189}$$

де $I = \Phi \partial_\Phi + \Phi^* \partial_{\Phi^*}$, та проективний оператор

$$A = \tau^2 \partial_\tau + \tau x_a \partial_a + \frac{im}{2} x_a x_a J - \tau I. \tag{190}$$

Ліівські редукції та відповідні багатопараметричні множини розв'язків для багатовимірного рівняння Шрьодінгера були знайдені в роботах В.І. Фущича та М.І. Серова, а також Р. Вінтернітца та Л. Ганьона.

Відзначимо, що анзац (186) є загальним розв'язком рівняння

$$u_0 + u_3 + im u = 0. \tag{191}$$

Ми можемо розглядати рівняння (191) як додаткову умову, що накладається на нелінійне хвильове рівняння з нелінійністю $F = \lambda u |u|^2$. Розв'язок такої системи має вигляд

$$\square u = \lambda u |u|^2, \tag{192}$$

і при цьому умова (191) дозволяє зменшити кількість незалежних змінних на одиницю, та одержати відповідне редуковане рівняння, яке інваріантне відносно розширеної алгебри Галілея з проективним оператором. Це дозволяє встановити умовну інваріантність нелінійного хвильового рівняння (192) відносно проективного оператора. Добре відомо, що такої інваріантності у сенсі лі немає.

Максимальна алгебра інваріантності рівняння (177), яка може бути знайдена у відповідності до алгоритму Лі, визначається наступними базисними операторами:

$$p_\mu = ig_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad (193)$$

де μ, ν take the values $0, 1, \dots, 3$; мається на увазі підсумовування за індексами, що повторюються (якщо ці індекси - малі грецькі літери) за наступною формулою: $x_\nu x_\nu \equiv x_\nu x^\nu \equiv x^\nu x_\nu = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2$, $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$.

Проте, підсумовування для всіх похідних функції u здійснюється наступним чином: $u_\nu u_\nu \equiv u_\nu u^\nu \equiv u^\nu u_\nu = -u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$.

На відміну від стандартної домовленості щодо підсумовування верхніх та нижніх індексів, що повторюються, ми вважаємо x_ν та x^ν рівними у смислі підсумовування, з метою уникнення плутанини між позначеннями похідної та номерами функцій.

Теорема 1. *Нелінійне хвильове рівняння (192) є умовно інваріантним за умови (191) відносно проективного оператора*

$$A_1 = \frac{1}{2}(x_0 - x_3)^2(\partial_0 - \partial_3) + (x_0 - x_3)(x_1\partial_1 + x_2\partial_2) + \frac{imx^2}{2}(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}) + \frac{n-1}{2}(x_0 - x_3)(u\partial_u + u^*\partial_{u^*}). \quad (194)$$

Для доведення Теорема 1 достатньо показати, що система (192), (191) інваріантна відносно оператора (194) за допомогою звичайного алгоритму Лі.

Далі ми розглядаємо побудову загального класу Пуанкаре-інваріантних рівнянь, які мають таку ж властивість щодо умовної інваріантності. Спочатку ми наведемо фундаментальні базиси диференціальних інваріантів, які будуть використані у нашому прикладі для побудови Now we умовних диференціальних інваріантів.

Функціональний базис диференціальних інваріантів алгебри Пуанкаре (193) другого порядку для комплекснозначної скалярної функції

$u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ складається з 24 інваріантів

$$\begin{aligned} u^r, \quad R_k(u_\mu^r, u_{\mu\nu}^1), \quad S_{jk}(u_{\mu\nu}^r, u_{\mu\nu}^1); \\ r = 1, 2; \quad u^1 = u, \quad u^2 = u^*. \end{aligned} \quad (195)$$

В (195) завжди $k = 1, \dots, 4; j = 0, \dots, k$. Функціональний базис диференціальних інваріантів алгебри Галілея (188), маса $m \neq 0$, другого порядку для комплекснозначної скалярної функції $\Phi = \Phi(\tau, x_1, x_2)$ складається з 16 інваріантів.

Для спрощення виразів диференціальних інваріантів ми вводимо наступні позначення:

$$\Phi = \exp \phi, \quad \text{Im } \Phi = \arctan \frac{\text{Re } \phi}{\text{Im } \phi}.$$

Елементи функціонального базису такої алгебри Галілея можна вибрати наступним чином:

$$\begin{aligned} \phi + \phi^*, \quad M_1 = 2im\phi_t + \phi_a\phi_a, \quad M_1^*, \\ M_2 = -m^2\phi_{tt} + 2im\phi_a\phi_{at} + \phi_a\phi_b\phi_{ab}, \quad M_2^*, \\ S_{jk}(\phi_{ab}, \phi_{ab}^*), \quad R_j^1 = R_j(\theta_a, \phi_{ab}), \quad R_j^2 = R_j(\theta_a^*, \phi_{ab}), \\ R_j^3 = R_j(\phi_a + \phi_a^*, \phi_{ab}). \end{aligned} \quad (196)$$

Тут $\theta_a = im\phi_{at} + \phi_a\phi_{ab}$, ϕ_{ab} - коваріантні тензори для алгебри Галілея.

Функціональний базис диференціальних інваріантів алгебри Галілея (188), яка розширена оператором дилатації (189) та проективним оператором (190) можна вибрати наступним чином:

$$N_1 e^{-2(\phi + \phi^*)}, \quad \frac{N_1}{N_1^*}, \quad (197)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_2}{N_1^2}, \quad \frac{N_2^*}{(N_1^*)^2}, \quad S_{jk}(\rho_{ab}, \rho_{ab}^*), \quad R_j(\rho_a, \rho_{ab}), \\ R_j(\rho_a^*, \rho_{ab}), \quad R_j(\phi_a + \phi_a^*, \rho_{ab})N_1^{-1}, \quad (\phi_{aa} + \phi_{aa}^*)N_1^{-1}, \end{aligned} \quad (198)$$

де

$$N_1 = M_1 + \phi_{aa} = 2im\phi_t + \phi_{aa} + \phi_a\phi_a, \quad N_2 = \frac{1}{n}\phi_{aa}N_1 + \frac{\phi_{aa}^2}{2n} + M_2 \quad (199)$$

і коваріантні тензори мають вигляд

$$\rho_a = \theta_a N_1^{-3/2}, \quad \rho_{ab} = \left(\phi_{ab} - \frac{\delta_{ab}}{n} \phi_{cc} \right) N_1^{-1}.$$

Алгоритм для побудови умовних диференціальних інваріантів може бути одержаний безпосередньо з Означення 4. Такі інваріанти можуть бути знайдені шляхом розв'язання системи (184), (185).

Ми можемо побудувати умовні диференціальні інваріанти для алгебри Пуанкаре (193) та проективного оператора (194) шляхом розв'язання системи

$$A_1 F(\text{Inv}_P) = 0, \quad u_0 + u_3 + imu = 0,$$

де Inv_P - всі диференціальні інваріанти (195) алгебри Пуанкаре (193). Використовуючи той факт, що анзац (186) є загальним розв'язком додаткової умови (191), ми можемо прямо підставити цей анзац в диференціальні інваріанти (195). Для уникнення дуже громіздких виразів, ми не будемо виписувати тут вирази для всіх диференціальних інваріантів з (195).

Вираз $\square u$ перетворюється у наступний:

$$\square u = u(2im\phi_\tau + \phi_{aa} + \phi_a\phi_a),$$

де N_1 - вираз, який входить до виразів для диференціальних інваріантів (196). Далі ми одержуємо

$$\begin{aligned} u_\mu u_\mu &= u^2(2im\phi_t + \phi_a\phi_a), \\ u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} &= u^3(\phi_a\phi_b\phi_{ab} + (\phi_a\phi_a)^2 - m^2(\phi_{tt} + 4\phi_t^2) + \phi_a\phi_b\phi_{ab} + (\phi_a\phi_a)^2 \\ &\quad - m^2(\phi_{tt} + 4\phi_t^2) + 2im\phi_a\phi_{at} + 4im\phi_t\phi_a\phi_a), \end{aligned} \quad (200)$$

Підставляючи анзац (186) у всі елементи функціонального базису (195) диференціальних інваріантів другого порядку для алгебри Пуанкаре аналогічно (200), ми можемо одержати редукований базис диференціальних інваріантів, який може бути використаний для побудови всіх рівнянь, що

редуються за допомогою цього анзацу. Ми можемо представити наступний вираз для інваріантів алгебри Пуанкаре через вирази M_k (196) та N_k (198), де у формулах для M_k , N_k ($k = 1, 2$) часова змінна — це $\tau = x_0 - x_3$:

$$\begin{aligned}\square u &= uN_1, \quad u_\mu u_\mu = u^2 M_1, \quad u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} = u^3 (M_2 + M_1^2), \\ u_{\mu\nu} u_{\mu\nu} &= u^2 (2M_2 + M_1^2 + \phi_{ab} \phi_{ab}), \\ u_\mu u_\mu^* &= \frac{uu^*}{2} (M_1 + M_1^* - (\phi_a + \phi_a^*)(\phi_a + \phi_a^*)). \end{aligned} \quad (201)$$

Тут a, b приймають значення від 1 до 2.

Таким чином,

$$\begin{aligned}M_1 &= u_\mu u_\mu u^{-2}, \quad \phi_{aa} = N_1 - M_1 = \frac{u\square u - u_\mu u_\mu}{u^2}, \\ M_2 &= u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} u^{-3} - (u_\mu u_\mu)^2 u^{-4}, \quad N_1 = \frac{\square u}{u}, \\ N_2 &= \frac{1}{n} \phi_{aa} N_1 + \frac{\phi_{aa}^2}{2n} + M_2 = u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} u^{-3} - (u_\mu u_\mu)^2 u^{-4} \\ &\quad + \frac{1}{n} \frac{\square u}{u} \frac{u\square u - u_\mu u_\mu}{u^2} + \frac{1}{2n} \frac{(u\square u - u_\mu u_\mu)^2}{u^4}, \\ R_1(\phi_a + \phi_a^*, \rho_{ab}) N_1^{-1} &= (\phi_a + \phi_a^*)(\phi_a + \phi_a^*) N_1^{-1} \\ &= \left(N_1 + N_1^* - \frac{2}{uu^*} u_\mu u_\mu^* \right) N_1^{-1} = \frac{u^* \square u + u \square u^* - 2u_\mu u_\mu^*}{u^* \square u}. \end{aligned} \quad (202)$$

Ми будемо Пуанкаре-інваріантні умовні диференціальні інваріанти проективного оператора (194) за умови (191) з використанням диференціальних інваріантів (196)

$$\begin{aligned}I_1 &= N_1 e^{-4(\phi + \phi^*)} = \frac{\square u}{u(uu^*)^2}, \quad I_2 = \frac{N_1}{N_1^*} = \frac{u^* \square u}{u \square u^*}, \\ I_3 &= \frac{N_2}{N_1^2} = \left(uu_\mu u_\nu u_{\mu\nu} + \frac{3}{2} u^2 (\square u)^2 + \frac{1}{2} (u_\mu u_\mu)^2 - 2u \square u (u_\mu u_\mu) \right) \times \\ &\quad \times (u^2 (\square u)^2)^{-1}, \quad I_3^*, \\ I_4 &= \frac{(\phi_x + \phi_x^*)^2}{N_1} = \frac{u_\mu u_\mu u^{*2} + u_\mu^* u_\mu^* u^2 - 2u_\mu u_\mu^* uu^*}{uu^{*2} \square u}, \\ I_5 &= \frac{(\phi_{xx} + \phi_{xx}^*)}{N_1} = \frac{u^* \square u + u \square u^* - 2u_\mu u_\mu^*}{u^* \square u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6 = \frac{\theta}{2N_1} = & (-u^3 u_\mu^* u_\nu^* u_{\mu\nu} + u^{*2} (u u_\mu u_\nu u_{\mu\nu} - (u_\mu u_\mu)^2) \\
& + (u \square u - u_\mu u_\mu) (u_\mu u_\mu u^{*2} + u_\mu^* u_\mu^* u^2 - 2u_\mu u_\mu^* u u^*) \\
& + (u u_\mu u_\mu^*)^2) \left(u^2 u^* \square u (u_\mu u_\mu u^{*2} + u_\mu^* u_\mu^* u^2 - 2u_\mu u_\mu^* u u^*)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1}, \quad I_6^*.
\end{aligned} \tag{203}$$

Вирази (203) утворюють функціональний базис інваріантів, що є абсолютними диференціальними інваріантами для операторів розширеної алгебри Пуанкаре (193) та умовними інваріантами оператора A_1 (194) з додатковою умовою (191). Функціональну незалежність виразів (203) можна перевірити прямо. Найпростіше це можна зробити, використовуючи додаткову умову, тобто підставити анзац (186) в (203), і при цьому в результаті буде отриманий “редукований базис”. Редуковані інваріанти у цьому базисі будуть залежати від нових функцій без додаткової умови, та будуть абсолютними інваріантами операторів $\langle G, J, D, A \rangle$.

Розрахунок кількості інваріантів у такому базисі може розглядатись також наступним чином:

$$\begin{aligned}
& \text{Кількість інваріантів} = \text{кількість (змінних} + \text{похідних)} - \\
& - (\text{ранг набору операторів} + \text{кількість незалежних умов та їхніх похідних}).
\end{aligned}$$

Ми маємо 20 залежних змінних та похідних, 8 умов ((191) разом з комплексно спряженими та похідними), і ранг набору операторів $\langle J_{\mu\nu}, D, J, A_1 \rangle$ за умови (191) разом з комплексно спряженими та похідними дорівнює 6.

Проте, кількість умовних диференціальних інваріантів у нашому прикладі дорівнює 8, а не $6=20-8-6$, як може здаватись. Проте, якщо ми будемо застосовувати додаткову умову (191) та її перші похідні з відповідними комплексно спряженими (8 conditions) до фундаментального базису диференціальних інваріантів алгебри Пуанкаре (17 інваріантів), ми одержимо 11 незалежних редукованих інваріантів, що може перевірити шляхом прямих обчислень. Тобто дві з умов виявляються залежними на багатоманітстві інваріантів, і з трьома іншими умовами інваріантності відно-

сно операторів $\langle D, J, A_1 \rangle$ ми одержуємо 8 інваріантів у функціональному базисі умовних диференціальних інваріантів. Таким чином, ми одержуємо наступне твердження

Теорема 2. *Всі рівняння вигляду*

$$F(I_1, I_2, I_3, I_3^*, I_4, I_5, I_6, I_6^*) = 0 \quad (204)$$

є умовно інваріантними відносно оператора A_1 (194) з додатковою умовою (191). Всі рівняння, які є інваріантними відносно алгебри (193) та умовно інваріантними відносно оператора A_1 (194) з додатковою умовою (191) мають вигляд (204).

Відзначимо, що у цьому прикладі ми вимагали, щоб шукані рівняння були інваріантними відносно алгебри Пуанкаре (193) у сенсі Лі, а умова (191) не є інваріантною відносно цієї алгебри. Таким чином, ми не маємо умовних інваріантів з довільними функціями типу $(u_0 + u_2 + i t u) \times$ (довільна функція). Відзначимо також, що оператори $\langle J_{\mu\nu}, D, J, A_1 \rangle$ не утворюють алгебри, і ми не могли б використовувати абсолютні диференціальні інваріанти у смислі Лі для побудови інваріантних рівнянь.

Висновки. Окреслена вище процедура побудови умовних диференціальних інваріантів може бути використана для інших випадків, коли додаткова умова (184) має загальний розв'язок, що може бути використаний у якості анзацу, та коли функціональний базис для оператора (185) у змінних, що використовуються для редукції, вже відомий.

Крім знаходження нових умовно інваріантних рівнянь, подальшим розвитком представлених ідей може бути опис всіх рівнянь, що редукуються з застосуванням певного анзацу та пошук методів відновлення вихідних рівнянь з редукованих рівнянь.

Симетрія нелінійного хвильового рівняння, що обговорювалась вище, може бути також проінтерпретована як прихована симетрія, що визначається додатковою симетрією редукованого рівняння. Тому описаний метод (побудови умовних диференціальних інваріантів) може також

використовуватись для опису рівнянь, що мають приховану симетрію.

4.5 Новий метод побудови базисів диференціальних інваріантів для нескінченновимірних алгебр [28]

Теорія та методи пошуку диференціальних інваріантів скінченновимірних алгебр добре розвинуті. Всі абсолютні інваріанти можуть бути представлені як функції інваріантів з функціонального базису. Кількість інваріантів (певного визначеного порядку r) визначається як різниця між кількістю всіх похідних залежних змінних до r -го порядку та залежних і незалежних змінних, та рангу r -го продовження згідно Лі базисних операторів алгебри, що розглядається.

Випадок нескінченновимірної алгебри є більш складним, тому що базиси цих алгебр містять нескінченну (зліченну) кількість операторів (наприклад, алгебри Вірасоро та Каца–Муді), або інфінітезимальні оператори, коефіцієнтами яких є довільні функції.

Проте, виявляється, що незважаючи на назву “нескінченновимірні”, ранги r -х продовжень Лі для базисних операторів є скінченними для кожного фіксованого r . На відміну від скінченновимірних алгебр ці ранги не стабілізуються, тобто не досягають якогось фіксованого значення. Така скінченність є досить очевидною, тому що ранг r -го продовження базисних операторів не може перевищувати кількості всіх похідних залежних змінних до r -го порядку та залежних і незалежних змінних.

Обчислення диференціальних інваріантів для нескінченновимірних алгебр є особливо цікавим з огляду на застосування до алгебр еквівалентності класів диференціальних рівнянь, тому що знання таких інваріантів дає критерії еквівалентності диференціальних рівнянь з одного класу відносно локальних перетворень змінних. У випадку звичайних рівнянь доведено, що знання таких інваріантів дає як необхідні, так і достатні умови еквівалентності рівнянь (M. Berth and G. Czichowski, Using Invariants to Solve the Equivalence Problem for Ordinary Differential Equati-

ons //AAECC. — 2001, v. 11. — p. 359-376).

У низці статей Н.Х. Ібрагімова та співавторів, а також М. Торрізі, А. Валенті та інших, диференціальні інваріанти для алгебр еквівалентності класів диференціальних рівнянь рахуються шляхом прямих обчислень. Це можливо, проте цей метод вимагає надзвичайно складних обчислень, і на практиці знайдені лише окремі приклади таких інваріантів для невеликих порядків, як правило, 1 та 0.

Ми пропонуємо систематичну процедуру, яка дозволяє значно спростити ці розрахунки. Замість довільних функцій, які звичайно містять базисні оператори алгебр еквівалентності, ми використовуємо розклад цих функцій у ряди Тейлора. Ми, звичайно, маємо пам'ятати, що ми маємо справи саме з довільними функціями. Хоча вони мають бути нескінченно диференційованими (враховуючи умову комутування в означенні алгебри $\mathcal{L}_1$), це не означає, що вони аналітичні. Проте, для цілей розрахунку диференціальних інваріантів нескінченновимірних алгебр ми можемо обгрунтовано обмежити наш розгляд аналітичними функціями в коефіцієнтах базисних операторів, та випадком скінченної кількості таких довільних функцій в коефіцієнтах базисних операторів.

Використовуючи розклад коефіцієнтів в ряди, ми можемо замінити оператори з довільними функціями на нескінченні множини операторів без таких довільних функцій. Цей підхід дозволяє значно простіше рахувати ранг продовжень операторів (у деяких випадках цей ранг дорівнює кількості змінних та похідних, і тоді без будь-яких подальших розрахунків легко бачити, що для відповідного порядку не існує абсолютних інваріантів).

Теорема 3. *Для фіксованого порядку r існує функціональний базис диференціальних інваріантів для будь-якої алгебри $\mathcal{L}_1$, включаючи нескінченновимірні алгебри зі скінченною кількістю довільних функцій в коефіцієнтах базисних операторів, або з нескінченними послідовностями базисних операторів без довільних функцій.*

Ми проілюструємо наш підхід на прикладі пошуку абсолютних диференціальних інваріантів для нескінченновимірної алгебри типу Пуанкаре, яка є алгеброю інваріантності рівняння ейконалу.

Добре відомо, що найпростіше релятивістське рівняння першого порядку — рівняння ейконала, або Гамільтона, для n незалежних просторових змінних x_n та часової змінної x_0 , та скалярної залежної змінної u ,

$$u_\alpha u_\alpha \equiv u_0^2 - u_1^2 - \dots - u_n^2 = 0 \quad (205)$$

є інваріантним відносно нескінченновимірної алгебри, яка генерується операторами

$$X = (b^{\mu\nu} x_\nu + a^\mu) \partial_\mu + \eta(u) \partial_u, \quad (206)$$

при цьому $-b^{\mu\nu} = b^{\nu\mu}$, a^μ , η є довільними нескінченно диференційованими функціями від u , $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$. Застосовується звичайне підсумовування за повторюваними грецькими індексами: $u_\mu u_\mu = u_0^2 - u_1^2 - \dots - u_n^2$. Рівняння (205) широко використовується у, наприклад, геометричній оптиці.

Ми будуємо диференціальні інваріанти порядків 1 та 2. Замість операторів (206), після розкладу функцій $-b^{\mu\nu} = b^{\nu\mu}$, a^μ , η у ряди Тейлора, ми ми можемо розглядати наступні послідовності операторів:

$$J_{\mu\nu}^k = u^k (x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad P_\mu^k = u^k \partial_\mu, \quad P_u^k = u^k \partial_u. \quad (207)$$

Для порядків 1 та 2 ми маємо $n+2$ змінних та $n+1$ перших похідних, і ранг продовження операторів (206) дорівнює $2n+3$. Абсолютних інваріантів немає, і є один очевидний відносний інваріант $u_\mu u_\mu$. Цікаво відзначити, що для першого порядку інваріантність функції відносно операторів (206) означає також інваріантність відносно оператора дилатації $D = x_\mu \partial_\mu$.

Ранг продовження фіксованого порядку є скінченним - тобто для обчислення диференціальних інваріантів такого порядку непотрібно розглядати всю нескінченну послідовність базисних операторів - достатньо

розглядати лише скінченний набір (генеруючий набір) операторів, тому що всі інші оператори відповідного продовження будуть лінійними комбінаціями цього генеруючого набору.

Генеруючий набір операторів для першого продовження має вигляд $J_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$, D , P_u^0 , P_μ^0 .

Ранг першого продовження для цього набору операторів дорівнює $2n+3$, і інваріантність відносно цих операторів еквівалентна інваріантності відносно першого продовження нескінченновимірної алгебри (207).

Знаходження такого простого генеруючого набору (ранг та кількість операторів якого дорівнюють рангу першого продовження) значно спрощує знаходження диференціальних інваріантів та дозволяє використовувати відповідне програмне забезпечення.

Тензор рангу 2 (див. Fushchych W.I. та Yehorchenko I.A. Second-order differential invariants of the rotation group $O(n)$ та of its extensions: $E(n)$; $P(1,n)$; $G(1,n)$, Acta Appl. Math., 1992, V. 28, N 1, 69-92)

$$\theta_{\mu\nu} = u_\mu u_{\lambda\nu} u_\lambda + u_\nu u_{\lambda\mu} u_\lambda - u_\mu u_\nu u_{\lambda\lambda} - u_\lambda u_\lambda u_{\mu\nu} \quad (208)$$

є коваріантним відносно алгебри (207) (для спрощення означення цього поняття. ми говоритимемо, що тензор є коваріантним відносно певної алгебри, якщо всі згортки цього тензора є відносними чи абсолютними інваріантами цієї алгебри).

Коваріантність може бути перевірена прямо шляхом застосування алгоритму Лі.

Обчислення рангу другого продовження (207) дає можливість зробити висновок, що існує n незалежних інваріантів другого порядку:

$$S_k / (u_\mu u_\mu)^{(3/2)k}, \quad (209)$$

де $S_k = \theta_{\mu_1\mu_2} \theta_{\mu_2\mu_3} \cdots \theta_{\mu_{n-1}\mu_1}$.

Теорема 4. Множина (209) є функціональним базисом абсолютних диференціальних інваріантів другого порядку алгебри (207).

Тут ми також можемо навести коментар щодо достатності розгляду аналітичних функцій в (206) та коректності переходу до алгебри (207).

Ми знайшли набір функціонально незалежних інваріантів, використовуючи алгебру (207) та її ранг; ранг другого продовження (206) не може бути більшим, тому що у цьому випадку кількість функціонально незалежних інваріантів була б меншою.

Далі ми наводимо перелік кроків для обчислення функціонального базису абсолютних диференціальних інваріантів нескінченновимірної алгебри, базисні оператори якої містять довільні функції:

1. Розкласти довільні функції у ряди Тейлора.
2. Перетворити набір операторів з довільними функціями на дискретну нескінченну послідовність без довільних функцій.
3. Знайти необхідні продовження алгебри.
4. Обчислити ранг продовження алгебри.
5. Знайти мінімальний “генеруючий набір” операторів, ранг продовження яких дорівнює рангу продовження алгебри.
6. Знайти функціональний базис з використанням “генеруючого набору”.

5 Задачі математичного моделювання

5.1 Пружно-деформований стан півплощини в околі абсолютно жорсткої вставки під дією навантаження

Розглянуто півплощину з півкруговим вирізом радіусу R_0 на її границі. В цей виріз вставлена жорстка кругова шайба, що спаяна з півплощиною вздовж кола. Якщо введемо систему координат Oxy на півплощині, вісь Oy співпадає з прямолінійною межею півплощини, вісь Ox направлена

всередину півплощини, а початок координат O помістимо в центрі кругової вставки. Вважаємо, що до вставки в точці O' прикладені нормальна F_x та дотична F_y складові навантаження.

В полярній системі координат умови рівноваги мають вигляд [Тимошенко С.П., Гуд'єр Дж. Теория упругости. — М.: Наука, 1975. — 654 с.]:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0, \quad (210)$$

де σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ — відповідно радіальні, тангенціальні та дотичні напруження. При цьому як завжди приймається, що нормальні напруження додатні, якщо вони розтягуючі. За додатний напрямок дотичних напружень приймаються напрямки координат, якщо розтягуюче напруження співпадає з додатним напрямком відповідної координати.

Позначимо через u і v компоненти переміщення в точці P за напрямком зміни полярних координат r та θ . Тоді відносні деформації в радіальному та тангенціальному напрямках, а також деформації зсуву визначаються формулами:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (211)$$

В свою чергу закон Гука для плоского напруженого стану має вигляд

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_\theta), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu \sigma_r), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{G} \tau_{r\theta}, \quad (212)$$

де ν — коефіцієнт Пуасона, E — модуль повздовжньої пружності, $G = E/(2(1 + \nu))$ — модуль пружності при ссуві.

З співвідношень (212) можемо отримати і вирази для напружень через деформації:

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta), \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r), \quad \tau_{r\theta} = G \varepsilon_{r\theta}. \quad (213)$$

Використовуючи співвідношення (210)–(212), отримуємо рівняння відносно переміщень u та v :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) - \nu_1 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r^2} \right) + \nu_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right) = 0, \quad (214)$$

де $\nu_1 = (1 - \nu)/2$.

Умови рівноваги абсолютно жорсткої вставки, що знаходиться під дією прикладених зовнішніх навантажень та внутрішніх пружних сил з сторони вставки, дозволяють отримати наступні інтегральні рівняння:

$$\begin{aligned} F_x &= R_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta} \sin \theta - \sigma_r \cos \theta]_{r=R_0} d\theta, \\ F_y &= -R_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta} \cos \theta + \sigma_r \sin \theta]_{r=R_0} d\theta, \\ F_z &= R_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta}]_{r=R_0} d\theta. \end{aligned} \quad (215)$$

Перші два співвідношення отримані з умови рівності нулю рівнодійної всіх сил, що діють на вставку, в проекціях її на осі Ox і Oy . Останнє отримане з умови рівності нулю головного моменту всіх сил відносно точки O .

Кінематичні умови на лінії контакту абсолютно жорсткої вставки і пружної півплощини (жорстке щеплення) мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_{0x} \cos \theta + u_{0y} \sin \theta &= u, \\ -u_{0x} + u_{0y} \cos \theta + R_0 \varphi_z &= v, \end{aligned} \quad (216)$$

де $\vec{u}_0 = u_{0x} \vec{i} + u_{0y} \vec{j}$ — вектор малого поступального переміщення, а φ_z — кут малого повороту вставки відносно системи координат Oxy .

Для завершення постановки задачі необхідно ще додати граничні умови відсутності навантаження на сторонах півплощини:

$$\{\sigma_\theta\}_{\theta=\pm\pi/2} = 0, \quad \{\tau_{r\theta}\}_{\theta=\pm\pi/2} = 0. \quad (217)$$

Крім приведених співвідношень на переміщення u і v необхідно накласти певні обмеження на швидкість їх росту при $r \rightarrow \infty$ для любого кута θ .

Таким чином, розв'язок даної задачі звівся до знаходження розв'язків системи рівнянь в частинних похідних (214), що задовольняють рівняння (215), кінематичні умови спряження (216) і граничні умови (217).

Розв'язок сформульованої задачі шукаємо як суму розв'язків наступних трьох задач:

1. Перша задача полягає в розв'язуванні рівнянь (214), що задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta} \sin \theta - \sigma_r \cos \theta]_{r=R_0} d\theta &= 0, \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta} \cos \theta + \sigma_r \sin \theta]_{r=R_0} d\theta &= 0, \\ F_y &= R_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta}]_{r=R_0} d\theta, \end{aligned} \quad (218)$$

кінематичні умови на контурі вставки:

$$u = 0, \quad v = R_0 \varphi_z, \quad (219)$$

і граничні умови (217). Фактично це є задача про кручення абсолютно жорсткої вставки відносно осі, що перпендикулярна до площини і проходить через точку O , під дією заданого моменту $R_0 F_y$. Введемо в розгляд наступні безрозмірні величини:

$$\begin{aligned} r^* &= r/R_0, \quad \{u^*, v^*\} = \{u, v\}/R_0, \\ \{\sigma_r^*, \sigma_\theta^*, \tau_{r\theta}^*\} &= \{\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\}/G, \\ \{F_x^*, F_y^*\} &= \{F_x, F_y\}/(GR_0). \end{aligned} \quad (220)$$

Нижче всі співвідношення представлені у безрозмірному вигляді, а зірочки для простоти викладок опускаються.

Далі для цієї задачі вводимо змінні:

$$\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}_r, \hat{\sigma}_\theta, \hat{\tau}_{r\theta}\} = \{u, v, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\}/\varphi_z.$$

Тоді маємо

$$\hat{u}|_{r=1} = 0, \quad \hat{v}|_{r=1} = 1, \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2);$$

$$F_y = \varphi_z \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\hat{\tau}_{r\theta}]_{r=1} d\theta. \quad (221)$$

Наближений розв'язок цієї задачі представимо у вигляді:

$$\vec{u}^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{u}_i, \quad (222)$$

де $\vec{u}^{(n)} = \{\hat{u}^{(n)}, \hat{v}^{(n)}\}$, а систему координатних функцій $\vec{u}_i = \{u_i^{(1)}, u_i^{(2)}\}$ визначаємо як фундаментальні рівняння Ламе (система (214)), якщо шукати їх у вигляді:

$$u_i^{(1)} = r^\alpha p(\theta), \quad u_i^{(2)} = r^\alpha q(\theta),$$

при умовах (217)).

Тут ми обмежились побудовою таких розв'язків системи (214), які для точок півплощини, віддаленим від початку координат, задовольняють наступні асимптотичні оцінки:

$$\{u_i^{(1)}, u_i^{(2)}\} = O(R^{-1}), \quad \{\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\} = O(R^{-2})$$

де R – відстань цих точок від початку координат. Ця умова приводить до того, що варто покласти в загальному випадку $\alpha = -k$ ($k = 1, 2, \dots$).

Для умов (221) маємо:

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= r^{1-2i} (g_i \sin 2(1-i)\theta - \sin 2i\theta), \\ u_i^{(2)} &= r^{1-2i} (g_i \cos 2(1-i)\theta - m_i \cos 2i\theta) \end{aligned} \quad (223)$$

де

$$g_i = \frac{i(1-\nu_1)}{i+\nu_1(1-i)}, \quad m_i = \frac{(1-i)+\nu_1 i}{i+\nu_1(1-i)}$$

Розв'язок (222) задовольняє рівняння (214) та перші два співвідношення (218). Постійні x_i будемо визначати з умови мінімуму функціоналу:

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\vec{u}^{(n)} - \vec{f} \right]_{r=1}^2 d\theta, \quad (224)$$

де $\vec{f} = [0, 1]$.

Це приводить до розв'язування системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} d_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & d_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & d_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & d_n & a_{n-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & b_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (225)$$

де $d_i = \pi(1 + 2g_i^2 + m_i^2)$, $i = \overline{1, n}$; $a_i = \pi g_{i+1}(1 - m_i)$, $i = \overline{1, n-1}$; $\gamma_1 = 2\pi g_1$; $b_i = a_{i-2}$, $i = \overline{2, n}$.

Система (225) з симетричною трьохдіагональною матрицею досить просто розв'язується методом прогонки. Тоді кутове переміщення абсолютно жорсткої вставки і компоненти тензора напружень півплощини обчислюється за формулами:

$$\begin{aligned} \varphi_z &= \frac{F_y}{2\pi g_1 x_1}, \\ \sigma_r &= \varphi_z \sum_{i=1}^n x_i r^{-2i} \{2(1-2i)g_i \sin 2(1-i)\theta + \gamma_2^{(i)} \sin 2i\theta\}, \\ \sigma_\theta &= -\varphi_z \sum_{i=1}^n x_i r^{-2i} \{2(1-2i)g_i \sin 2(1-i)\theta + \gamma_1^{(i)} \sin 2i\theta\}, \\ \tau_{r\theta} &= \varphi_z \sum_{i=1}^n x_i r^{-2i} \{2(1-2i)g_i \cos 2(1-i)\theta + \gamma_3^{(i)} \cos 2i\theta\}, \end{aligned} \quad (226)$$

де $\gamma_1^{(i)} = 2(1-i)(m_i-1)$, $\gamma_2^{(i)} = 2(1+i)(m_i-1)$, $\gamma_3^{(i)} = 2i(m_i-1)$.

2. Друга задача полягає в знаходженні розв'язків рівняння (214), що задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta} \sin \theta - \sigma_r \cos \theta]_{r=R_0} d\theta &= F_x, \\ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta} \cos \theta + \sigma_r \sin \theta]_{r=R_0} d\theta &= 0, \end{aligned}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta}]_{r=R_0} d\theta = 0, \quad (227)$$

кінематичні умови на контурі вставки:

$$u = u_{0x} \cos \theta, \quad v = -u_{0x} \sin \theta, \quad (228)$$

і граничні умови (217). Ця задача зв'язана з визначенням пружно-деформованого стану півплощини при вдавлюванні в нього вставки силою, що направлена вздовж осі $0x$.

Після заміни (220) та

$$\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}_r, \hat{\sigma}_\theta, \hat{\tau}_{r\theta}, \} = \{u, v, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\} / u_{0x}$$

кінематичні умови (228) приймуть вид

$$\hat{u}|_{r=1} = \cos \theta, \quad \hat{v}|_{r=1} = -\sin \theta, \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (229)$$

а переміщення вставки в напрямку осі $0x$ знайдемо з співвідношення

$$u_{0x} = \frac{F_x}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\hat{\tau}_{r\theta} \sin \theta - \hat{\sigma}_r \cos \theta]_{r=1} d\theta}. \quad (230)$$

Розв'язок задачі представимо у вигляді:

$$\vec{u}^{(n)} = \sum_{j=1}^m C_j \vec{u}_j^{(1)} + D_1 \vec{u}_1^{(2)}, \quad (231)$$

де компоненти вектор-функцій $\vec{u}_j^{(1)}$ та $\vec{u}_1^{(2)}$ визначаються так:

$$\begin{aligned} \vec{u}_j^{(1)} &= \{ [f_j \cos(j-1)\theta + \cos(j+1)\theta] r^{-j}; \\ &\quad [f_j \sin(j-1)\theta - m(-j) \sin(j+1)\theta] r^{-j} \}, \\ \vec{u}_1^{(2)} &= \{ \ln r \cos \theta + \nu_1(\theta \sin \theta - \cos \theta); -\ln r \sin \theta - \nu \sin \theta + \nu_1 \theta \cos \theta \}, \end{aligned}$$

а постійні C_j та D_j знаходяться з мінімуму функціоналу

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\vec{u}^{(n)} - \vec{f} \right]_{r=1}^2 d\theta, \quad (232)$$

де $\vec{f} = \{\cos \theta, -\sin \theta\}$.

Координатні функції $\vec{u}_1^{(2)}$ є розв'язками системи (214) при $\alpha = -1$.
В цьому випадку для компонент напружень маємо значення

$$\sigma_r = \frac{2(1+\nu)A}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

а для компонент тензора деформацій:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{A \cos \theta}{r} = \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= -A\nu \frac{\cos \theta}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи останню систему методом виключення, отримаємо

$$\begin{aligned} u &= A \cos \theta \ln r - A \frac{1-\nu}{2} (\cos \theta - \theta \sin \theta) - C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta, \\ v &= -A \left(\ln r \sin \theta + \nu \sin \theta - \frac{1-\nu}{2} \theta \cos \theta \right) - C_1 \cos \theta \\ &\quad - C_2 \sin \theta + C_3 r. \end{aligned}$$

Поклавши C_1 , C_2 та C_3 рівними нулю, так як виражають переміщення площини як одного цілого, отримаємо $\vec{u}_1^{(2)}$ вказаного вище виду.

В результаті отримуємо наступну систему алгебраїчних рівнянь з симетричною і розріженою матрицею коефіцієнтів:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 & . & \dots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} & 0 & \dots & 0 & \beta_2 \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 & \alpha_{35} & \dots & 0 & \beta_3 \\ . & . & . & . & \dots & . & . & \\ 0 & . & . & . & . & \dots & \alpha_{nn} & \beta_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & . & . & \dots & \beta_n & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ \vdots \\ C_n \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (233)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_j i &= \pi(1 + 2f_i^2 + m(-1)^2), & \alpha^* &= \pi(2\nu_1^2 \pi^2/3 + 2\nu_1^2 + \nu^2 + \nu\nu_1), \\ \beta_i &= \frac{2\pi\nu_1(-1)^{i+1}}{i} \left[f_i - \frac{1 + (i+1)m(-1)}{i+2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i &= 1, 3, \dots, n; & \gamma &= \pi(\nu - \nu_1); \\
\beta_2 &= \frac{1}{4}\pi\nu_1(1 + 3m(-2)) - \pi f_2(\nu + \nu_1); \\
\alpha_{i,j+2} &= \pi f_{i+2}(1 - m(-i)).
\end{aligned} \tag{234}$$

Розв'язавши систему (233), обчислення повздовжнього переміщення під дією безрозмірної сили F_x та компонент тензора напружень проводимо за формулами:

$$\begin{aligned}
u_{0x} &= \frac{F_x}{\pi(1 + \nu)D_1}, \\
\sigma_r &= \sum_{i=1}^n C_i r^{-i-1} \left\{ -2if_i \cos(i-1)\theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{1-\nu} [\nu(m_i(i+1) - 1) + i] \cos(i+1)\theta \right\} + \frac{2(1+\nu) \cos \theta}{r} D_1, \\
\sigma_\theta &= u_{0x} \sum_{i=1}^n C_i r^{-i-1} \left\{ 2if_i \cos(i-1)\theta \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{1-\nu} [-m_i(i+1) + 1 - \nu_1] \cos(i+1)\theta \right\}, \\
\tau_{r\theta} &= u_{0x} \sum_{i=1}^n C_i r^{-i-1} \left\{ -2if_i \sin(i-1)\theta \right. \\
&\quad \left. + (i+1)(m_i - 1) \sin(i+1)\theta \right\}.
\end{aligned} \tag{235}$$

3. Третя задача полягає у визначенні розв'язків рівнянь (233), що задовольняють інтегральним співвідношенням

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta} \sin \theta - \sigma_r \cos \theta]_{r=R_0} d\theta = 0, \\
&-R_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta} \cos \theta + \sigma_r \sin \theta]_{r=R_0} d\theta = F_y, \\
&\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\tau_{r\theta}]_{r=R_0} d\theta = 0,
\end{aligned} \tag{236}$$

кінематичні умови на контурі вставки:

$$u = u_{0y} \sin \theta, \quad v = -u_{0y} \cos \theta, \tag{237}$$

і граничні умови (217).

З фізичної точки зору ця задача є задачею про визначення пружньо-деформованого стану півплощини при зміщенні вставки в напрямку осі Oy під дією сили F_y при відсутності моментів як з сторони зовнішніх, так і внутрішніх сил.

Після заміни (220) та

$$\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{\sigma}_r, \hat{\sigma}_\theta, \hat{\tau}_{r\theta}\} = \{u, v, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\} / u_{0y}$$

кінематичні умови (237) приймуть вигляд

$$\hat{u}|_{r=1} = \sin \theta, \quad \hat{v}|_{r=1} = \cos \theta, \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2) \quad (238)$$

а переміщення вставки в напрямку осі Oy знайдемо з співвідношення

$$u_{0y} = \frac{-F_y}{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\hat{\tau}_{r\theta} \cos \theta + \hat{\sigma}_r \sin \theta]_{r=1} d\theta}. \quad (239)$$

Розв'язок задачі представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \sum_{j=2}^n D_{j-1} r^{-j} [-q_j \sin(j-1)\theta - \sin(j+1)\theta] \\ &\quad + D_n [\ln r \sin \theta - \nu_1 (\sin \theta + \theta \cos \theta)], \\ \hat{v} &= \sum_{j=2}^n D_{j-1} r^{-j} [q_j \cos(j-1)\theta - m_j \cos(j+1)\theta] \\ &\quad + D_n [\ln r \cos \theta + \nu_1 \theta \sin \theta + \theta \cos \theta], \end{aligned} \quad (240)$$

де компоненти вектор-функцій f_j , q_j , $m(\alpha)$ визначаються співвідношеннями:

$$f_j = \begin{cases} \frac{\gamma_1}{2j}, & (j = 1, 3, 5) \\ -\frac{\gamma_3}{2j}, & (j = 2, 4, 6) \end{cases} \quad q_j = \begin{cases} -\frac{\gamma_3}{2j}, & (j = 1, 3, 5) \\ \frac{\gamma_1}{2j}, & (j = 2, 4, 6) \end{cases}$$

а постійні D_j знаходимо з мінімуму функціонала (232), де

$$m(\alpha) = \frac{(\alpha + 1) - \nu_1(\alpha - 1)}{\nu_1(\alpha + 1) - (\alpha - 1)}, \quad m_j = m(-j), \quad \alpha = -j,$$

$$\gamma_1 = \frac{2}{1-\nu}[(\alpha-1)m(\alpha) + 1 + \nu\alpha], \quad \gamma_3 = (\alpha - \nu(1 - m_\alpha)),$$

$$\vec{f} = \{\sin \theta, \cos \theta\}$$

В результаті отримаємо систему (233) з симетричною і розріженою матрицею коефіцієнтів

$$\begin{aligned} \alpha_{ii} &= \pi(1 + 2g_i^2 + m(-i)^2), \quad \alpha_{i,j+2} = \pi g_{i+2}[1 - m(-i)], \quad i > 1, \\ \gamma &= \pi(\nu - \nu_1), \quad \alpha* = \pi[\nu_1(2\nu_1\pi^2/3 - \nu) + \nu^2], \\ \beta_2 &= \pi \left[\nu g_2 - \frac{\nu_1(3 + m(-2))}{4} \right], \\ \beta_j &= \frac{(-1)^{j+1} 2\pi\nu_1}{j} \left[g_j - \frac{m(-j) + j + 1}{j + 2} \right], \quad j = 1, 3, 4, \dots, n. \end{aligned} \quad (241)$$

де

$$\gamma_j = \frac{2}{1-\nu} [\nu m(j)(j-1) + \nu + j]. \quad (242)$$

Після знаходження розв'язків алгебраїчної системи (241) обчислення повздовжнього переміщення під дією безрозмірної сили F_y і компонентів тензора напружень відбувається за формулами:

$$\begin{aligned} u_{0n} &= -\frac{2F_y}{\pi(1+\nu)D_n}, \\ \sigma_r &= u_{0y} \sum_{j=2}^n D_{j-1} r^{-j-1} \left\{ -2jg_j \sin(j-1)\theta \right. \\ &\quad \left. - \gamma_2^{(j)} \sin(j+1)\theta \right\} + D_n \frac{2(1+\nu)u_{0y} \sin \theta}{r}, \\ \sigma_\theta &= \sum_{j=1}^n D_{j-1} r^{-j-1} \left\{ 2jg_j \sin(j-1)\theta - \gamma_1^{(j)} \sin(j+1)\theta \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= \sum_{j=1}^n D_{j-1} r^{-j-1} \left\{ -2jg_j \cos(j-1)\theta + \gamma_3^{(j)} \sin(j+1)\theta \right\}. \end{aligned} \quad (243)$$

Дану задачу можна розглядати як модель пружньо-деформованого стану зв'язки в околі алмазного зерна під навантаженням. Модель враховує розміри алмазного зерна, вплив зовнішніх навантажень і механічних

властивостей (коефіцієнти Пуасона та модуль пружності). Компоненти напружень визначаються у вигляді суми трьох складових - розв'язків допоміжних задач при спеціальних умовах на контурі вставки (алмазного зерна). Їх наближений розв'язок отримано варіаційним методом, де в якості координатних функцій взято системи частинних розв'язків рівнянь Ламе. Проаналізовано результати чисельних розрахунків для переміщень алмазного зерна, кута його повороту, компонентів тензора напружень для зв'язки відрізного круга в процесі його роботи при зміні радіальної та дотичної складових навантаження та пружних характеристик зв'язки.

5.2 Кінетичний аналіз процесів дифузії, зародковоутворення та хімічних реакцій при спіканні алмазовмісних матеріалів

Запропоновано кінетичні моделі для опису процесів дифузії, зародковоутворень та хімічних реакцій при спіканні матеріалів, що містять алмази. Ці процеси відіграють важливу роль для формуванню структури композитних матеріалів та їх властивостей. Особлива увага приділена визначенню кінетичних параметрів і констант процесів при спіканні композиції алмаз-твердий сплав ВК6- CrB_2 на різних стадіях, узгоджуючи їх з експериментальними даними про швидкість усадки¹.

Аналіз отриманих результатів показує, що введення спеціальних добавок (наприклад, CrB_2) у звичайну шихту активізує процес спікання, змінює механізми масопереносу і енергетичний бар'єр, які повинні подолати атоми системи для того, щоб відбулися процеси дифузії, зародковоутворення нових фаз і поверхневі хімічні реакції між компонентами. По результатах досліджень отримано один патент на винахід та 3 деклараційні патенти.

¹Робота виконувалась разом з співробітниками Інституту надтвердих матеріалів ім.В.Н. Бакуля НАН України: М.О. Бондаренко, В.А. Мечник та ін.

5.3 Метод ітерацій при розв'язуванні нелінійних задач конвекції в'язкої нестисливої рідини

Наведені нижче результати стосуються початково–крайових задач, пов'язаних з рівняннями Нав'є–Стокса [37, 46, 47]. При цьому розглядається узагальнена постановка задач і, відповідно, їх узагальнені розв'язки. Це не тільки розширює клас функцій, в якому відшукуються розв'язки, але й дозволяє виділити визначення складової розв'язку задачі тиску в рідині та інших складових розв'язку в дві окремі задачі, що значно спрощує дослідження розв'язку задачі. При дослідженні цих задач використовувалась методика послідовних наближень. Ця методика ґрунтується на застосуванні методу Бубнова–Гальоркіна і є ефективною також при конструктивній побудові розв'язків (Галицын А.С., Жуковский А.Н., Карагодов В.П. О применении метода Галеркина к решению осесимметричной задачи конвекции жидкости в замкнутом объеме. — Киев, 1985. — 48 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 85.40), Галицын А.С., Жуковский А.Н., Карагодов В.П. Решение нелинейных задач конвекции в замкнутом объеме вязкой жидкости проекционно-разностным методом. — Киев, 1987. — 44 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 87.9)).

Розглядається наступна система нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, що описує динаміку в'язкої нестисливої рідини при заданому початковому її стані під дією зовнішньої сили збурення [37]:

$$v_t + (v \cdot \nabla)v = \nu \Delta v - \nabla p + f, \quad (244)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in Q_T, \quad t \in [0, T], \quad (245)$$

$$v(x, 0) = a(x), \quad v(x, t)|_{S_T} = 0. \quad (246)$$

Тут шукані величини: вектор швидкості руху рідини $v(x, t)$ та тиск в рідині $p(x, t)$ в точці $x \in Q$ ($Q \subset E_2$ або $Q \subset E_3$) в момент часу $t \in [0, T]$; $f(x, t)$ — сила зовнішнього збурення рідини; ν — кінематичний

коефіцієнт в'язкості рідини; S ($S_T = S \times [0, T]$) — границя області Q ($Q_T = Q \times [0, T]$) вважається кусково-гладкою. Вважається також, що $\operatorname{div} a = 0$ і $\operatorname{div} f = 0$.

В результаті застосування методу Бубнова–Гальоркіна задача (244)–(246) зводиться до задачі Коші для системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

$$(v_t^n, a_i) + ((v^n \cdot \nabla)v^n, a_i) + \nu(v_x^n, a_{ix}) = (f, a_i), \quad i = \overline{1, n}. \quad (247)$$

Тут гальоркінське наближення

$$v^n(x, t) = \sum_{k=1}^n c_k^n(t) a_k(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (248)$$

де $c(t) = \{c_k(t), k = \overline{1, n}\}$ — шуканий вектор–стовпчик коефіцієнтів гальоркінського наближення, n — розмір координатного базису, $a_k(x)$ — функції координатного базису. В матричному вигляді система (247) може бути представлена наступним чином:

$$\frac{dc}{dt} + c^T D c + A c = F, \quad (249)$$

де $c^T(t)$ — вектор-рядок, що складається з елементів вектора $c(t)$, A — квадратна симетрична матриця, D — тривимірний числовий масив, що складається з n квадратних матриць розміром $n \times n$; $F(t) = (f, a_k)$ — вектор–стовпчик розміру n . Елементи в A , D — відомі константи. Початкове значення $c(0)$ визначається з початкової умови (246), а саме:

$$c_k(0) = (a(x), a_k(x)), \quad k = \overline{1, n}. \quad (250)$$

Тут і далі позначення $(*, *)$ означає скалярний добуток в $L_2(Q)$.

Для розв'язання задачі (247), (250) або, що те саме, задачі (249), (250) запропоновано наступний ітераційний процес. Відрізок $[0, T]$ розбивається на M частин $[t_i, t_{i+1}]$ так, що $t_0 = 0$, $t_M = T$. Це розбиття, взагалі кажучи, може бути нерівномірним, але, як доведено, воно буде

скінченним при певних умовах. Тут же зазначимо, що у випадку двовимірних областей число M залежить лише від вихідних даних задачі, а у випадку коли $Q \subset E_3$, — також від розміру координатного базису. На кожному відрізку $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$ розглядаються наступні задачі:

$$\left(\overset{s+1}{v}_t, a_k \right) + \left(\left(\overset{s}{v} \cdot \nabla \right) \overset{s+1}{v}, a_k \right) + \nu \left(\overset{s+1}{v}_x, a_{kx} \right) = (f, a_k), \quad (251)$$

$$\overset{s+1}{c}_k = \left(\overset{s+1}{v}_t(x, t_i), a_k \right) = \overset{S}{c}_k(t_i), \quad k = \overline{1, n}, \quad (252)$$

де $s = 0, 1, 2, \dots$ — номер ітерації, $\overset{S}{c}_k(t_i)$, $k = \overline{1, n}$ — наближений розв'язок задачі (251), (252) на відрізку $[t_{i-1}, t_i]$ при виконанні S ітерацій. Якщо на даному відрізку ітерації збігаються до гальоркінського наближення v^n , то можна вважати, що $\overset{S}{c}_k(t_i) = (v^n(x, t_i), a_k(x))$, $k = \overline{1, n}$ (на відрізку $[0, t_1]$, тобто при $i = 0$ це очевидно). Вважається, що $\overset{0}{v} = 0$.

Для різниці розв'язків $v = v_{s+1} = \overset{s+1}{v} - v^n$ отримуються співвідношення вигляду (251), (252), з яких виводяться енергетичні рівності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y^2)' + \nu \varphi^2 &= ((v_s \cdot) v, v^n), \\ y(t_i) &= 0, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, M-1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (253)$$

Оцінивши праву частину в (253) і вибравши розбиття відрізка $[0, T]$ так, щоб виконувалась умова

$$\nu^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\varphi^n)^2 dt < 1, \quad (254)$$

отримаємо нерівність

$$\begin{aligned} \|v_{s+1}\|_{V_2^{1,0}(Q_{t_i}^{t_{i+1}})}^2 &< \|v_s\|_{V_2^{1,0}(Q_{t_i}^{t_{i+1}})}^2, \\ \text{де } \|v_{s+1}\|_{V_2^{1,0}(Q_{t_i}^{t_{i+1}})}^2 &= \frac{1}{2} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} y^2(t) + \nu \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi^2 dt. \end{aligned} \quad (255)$$

з якої випливає рівномірна по t збіжність $\overset{s}{v}(t)$ до $v^n(t)$ при $s \rightarrow \infty$. Отриманий результат сформульований у вигляді наступного твердження.

Теорема 1. *Якщо в задачі (244)–(246) $a(x) \in W_2^2(Q) \cap H(Q)$, $f(x, t) \in L_{2,1}(Q_T)$, $x \in Q \subset E_2$, $t \in [0, T]$, то відрізок $[0, T]$ завжди можна розбити на скінченну кількість M відрізків $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, на кожному з яких ітерації $\dot{v}(t)$ процесу (251)–(252) збігаються в нормі (255) при $s \rightarrow \infty$ до точного гальоркінського наближення v^n розв’язку задачі (244)–(246). Це розбиття визначається лише вихідними даними задачі і не залежить від координатного базису.*

У випадку тривимірних областей [37] доведення збіжності ітерацій проводиться в основному так само. Тут для оцінки правої частини в (253) гальоркінське наближення (248) представляється у вигляді скалярного добутку векторів $c(t)$ та $A_i(x) = \{a_{ki}(x), k = \overline{1, n}\}$, $i = \overline{1, 3}$, де $a_{ki}(x)$ — складові вектор-функцій $a_k(x)$ і використовується теорема про вкладення $W_2^2(Q)$ в $C(Q)$. При цьому для збіжності ітерацій на кожному з M відрізків $[t_i, t_{i+1}]$ вказане вище розбиття відрізка $[0, T]$ повинно задовольняти умову

$$n(2\nu)^{-1}C_1^2B^2(t_{i+1} - t_i) < 1, \quad (256)$$

де величина B залежить від розмірності базису n . В даному випадку маємо наступне твердження.

Теорема 2. *У випадку тривимірної області Q при інших ідентичних умовах теореми 1 виконуються її твердження, обумовлені розміром координатного базису, а саме, умовою (256).*

Одними із задач, пов’язаних з рівняннями Нав’є–Стокса, що широко використовуються при дослідженні різних природних явищ та технологічних процесів, є задачі про гравітаційно–температурні конвективні процеси в рідині. Розглядається наступна початково–крайова задача для вказаних рівнянь [46]:

$$v_t + (v \cdot \nabla)v = \nu \Delta v - \nabla p - \beta \vec{g}u + f, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (257)$$

$$v(x, 0) = a(x), \quad v|_{S_T} = 0, \quad (258)$$

$$u_t + (v \cdot \nabla u) = \chi \Delta u + q, \quad (259)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u|_{S_T} = 0, \quad (260)$$

$$x \in Q \subset E_2, \quad t \in [0, T], \quad S_T = S \times [0, T],$$

Умови гладкості функцій $f(x, t)$ і $q(x, t)$ та початкових умов такі самі, які були визначені в задачі (244)–(246) для функції $f(x, t)$ та початкової умови (246).

В результаті застосування методу Бубнова–Гальоркіна задача (257)–(260) зводиться до задачі Коші для системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь

$$(v_t^n, a_k) + ((v^n \cdot \nabla)v^n, a_k) + \nu(v_x^n, a_{kx}) = (f - \beta gu, a_k), \quad k = \overline{1, n}, \quad (261)$$

$$(u_t^m, \theta_l) + ((u^m \cdot \nabla)u^m, \theta_l) + \chi(u_x^m, \theta_{lx}) = (q, \theta_l), \quad l = \overline{1, m}. \quad (262)$$

Тут $v^n(x, t)$ має вигляд (248), а

$$u^m(x, t) = \sum_{l=1}^m b_l^m(t) \theta_l(x), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (263)$$

де $b(t) = \{b_l^m(t), l = \overline{1, m}\}$ — шуканий вектор коефіцієнтів гальоркінського наближення, m — розмір координатного базису, $\theta_l(x)$ — функції координатного базису. В матричному вигляді система (261), (262) може бути представлена наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} + c^T D_1 c + A_1 c &= F + Pb, \\ \frac{dc}{dt} + c^T D_2 c + A_2 b &= F_q, \end{aligned} \quad (264)$$

де A_1, A_2 — квадратні симетричні матриці розміром $n \times n$ та $m \times m$ відповідно, D_1, D_2 — тривимірні числові масиви, що складаються з n квадратних матриць розміром $n \times n$ та $m \times m$ відповідно; $F(t) = (f, a_k)$, $F_q(t) = (q, \theta_l)$ — вектори-стовпчики розміром n та m , B — прямокутна матриця розміром $n \times m$. Елементи в A_1, A_2, D_1, D_2, P — відомі константи. Початкове значення $c(0), b(0)$ визначається з початкових умов

$a(x)$, $u_0(x)$, а саме:

$$\begin{aligned} c_k(0) &= (a(x), a_k(x)), \quad k = \overline{1, n}, \\ b_l(0) &= (u_0(x), \theta_l(x)), \quad l = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (265)$$

Ітераційний процес для розв'язування задачі, (261), (262), (265) ((264), (265)) будується аналогічно (251), (252). Для різниці розв'язків $v = v_{s+1} = v^{s+1} - v^n$, $u = u_{s+1} = u^{s+1} - u^m$ отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned} (v_t, a_k) + \left((\overset{s}{v} \cdot \nabla) v, a_k \right) + ((v_s \cdot \nabla) v^n, a_k) + \nu(v_x, a_{kx}) &= -\beta(gu, a_k), \\ (u_t, \theta_l) + \left((\overset{s}{v} \cdot \nabla) u, \theta_l \right) + ((v_s \cdot \nabla) u^m, \theta_l) + \chi(u_x, \theta_{lx}) &= 0, \\ (v(x, t_i), a_k) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (u(x, t_i), \theta_l) = 0, \quad l = \overline{1, m}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

з яких виводяться наступні рівності:

$$\frac{1}{2}(y^2)' + \nu\varphi^2 = ((v_s \cdot \nabla) v, v^n), \quad y(t_i) = 0, \quad (266)$$

$$\frac{1}{2}(z^2)' + \chi\zeta^2 = ((v_s \cdot \nabla) u, u^m), \quad z(t_i) = 0, \quad (267)$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, M-1}, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Тут $z(t) = \|u(x, t)\|$, $\zeta(t) = \|u_x(x, t)\|$.

Вибравши розбиття відрізка $[0, T]$ таким, щоб виконувались умови

$$\begin{aligned} (4\chi)^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \zeta^2 dt &\leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}\nu^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\varphi^n)^2 dt + \beta^2 |g|^2 (t_{i+1} - t_i) &\leq \frac{1}{2}, \\ \nu^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\varphi^n)^2 dt + 4\zeta\nu^{-1} |g|^2 (t_{i+1} - t_i) &\leq \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (268)$$

отримаємо спочатку збіжність $\overset{s}{v}$ до v^n при $s \rightarrow \infty$ в нормі (255), з якої випливає також збіжність $\overset{s}{u}$ до u^m при $s \rightarrow \infty$ в нормі $L_2(Q)$. Отже виконується наступне твердження.

Теорема 3. Якщо в задачі (257)–(260) $a(x) \in W_2^2(Q) \cap H(Q)$, $u_0(x) \in W_2^2(Q) \cap W_2^1(Q)$, $f(x, t), q(x, t) \in L_{2,1}(Q_T)$, $x \in Q \subset E_2$, $t \in [0, T]$, то

відрізок $[0, T]$ завжди можна розбити на скінченну кількість M відрізків $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$ таких, що на кожному з них ітерації $\{\overset{s}{v}, \overset{s}{u}\}$ збігаються при $s \rightarrow \infty$ до гальоркінських наближень $\{v^n, u^m\}$: v^n — в нормі (255), а u^m — в нормі простору $L_2(Q)$. Це розбиття визначається умовами (268), які залежать лише від вихідних даних задачі і не залежить від координатних базисів.

5.4 Однозначна розв'язність двовимірних задач про конвективні процеси в бінарній суміші рідин

Задачі про конвективні процеси в бінарній (двокомпонентній) суміші нереагуючих між собою рідин досить складні як за фізичним змістом процесів, які вони описують, так і за математичною постановкою. Конвективні процеси в бінарній суміші рідин зумовлені поряд з тепловими та дифузійними потоками рідини, викликаними градієнтами температури (теплопровідність) та концентрації (дифузія).

Постановка задач, які розглядаються в роботі, задається для рівнянь, виведених І. Шапошніковим (К теории конвективных явлений бинарной смеси. ПММ. — 1953. — **17**. — № 5. — С. 604–606), які є спрощеним варіантом рівнянь, що були отримані Л. Ландау та Є. Ліфшицем (Механика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1944).

Розглянуто дві задачі. Перша стосується простіших рівнянь, виведених І. Шапошніковим за умови, що концентрація однієї з компонент мала (задача I). Відповідно дослідження розв'язків задач для цих рівнянь є доступнішим. В другій задачі (задача II) така умова не накладається. Знаходження апіорних оцінок для розв'язків цієї задачі, на основі яких доводиться існування її узагальненого розв'язку, та доведення його єдиності значно складніше, ніж у випадку першої задачі.

Задача I. Розглядається наступна система нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними:

$$v_t + (v \cdot \nabla)v = \nu \Delta v - \nabla p - \vec{g}(\beta_1 u + \beta_2 c) + f_1, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad (269)$$

$$u_t + (v \cdot \nabla u) = \chi \Delta u + \gamma \Delta c + f_2, \quad \gamma = \frac{ku^2}{mC_p} \lambda' D, \quad (270)$$

$$c_t + (v \cdot \nabla c) = D \Delta c + f_3, \quad (271)$$

$$v(x, 0) = a(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad (272)$$

$$v|_{S_T} = 0, \quad u|_{S_T} = 0, \quad c|_{S_T} = 0, \quad (273)$$

$$x \in Q \subset E_2, \quad t \in [0, T], \quad S_T = S \times [0, T],$$

де S — границя області Q ($Q_T = Q \times [0, T]$).

Тут шукані величини: вектор швидкості руху рідини $v(x, t) = \{v_1, v_2\}$, тиск в рідині $p(x, t)$, температура рідини $u(x, t)$ та концентрація однієї з компонент суміші рідин $c(x, t)$. Зауважимо, що $p(x, t)$, $u(x, t)$, $c(x, t)$ — це відхилення від відповідних величин в рівноважному стані суміші. Функції $f_1(x, t)$ — сила зовнішнього збурення рідини, $f_2(x, t)$ — джерела внутрішньої теплової енергії. Функцію $f_3(x, t)$ формально можна трактувати як деякий внутрішній фактор в Q , що впливає на зміну концентрації $c(x, t)$. Вважається також, що $\operatorname{div} a = 0$ і $\operatorname{div} f_1 = 0$, границя S області Q кусково-гладка, а початкові умови (272) задовольняють умови гладкості

$$a(x) \in W_2^2(Q) \cap J_2^{0(1)}(Q), \quad u_0(x) \text{ та } c_0(x) \in W_2^2(Q) \cap W_2^1(Q). \quad (274)$$

Ми розглядаємо задачу (269)–(273) з однорідними крайовими умовами першого роду (273). Разом з тим, крайові умови можуть бути так само неоднорідними першого та другого і третього роду.

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (269)–(273) при $t \in [0, T]$, $x \in Q$ називається сукупність функцій $v(x, t) \in J_2^{0(1)}(Q_T) = J(Q_T) \cap W_2^1(Q_T)$, $u(x, t)$ і $c(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, які задовольняють тотожності:

$$\begin{aligned} & \int_0^t [(v_t, \Phi_1) - ((v \cdot \nabla) \Phi_1, v) + \nu(v_x, \Phi_{1x})] dt = \\ & = \int_0^t ([-\vec{g}(\beta_1 u + \beta_2 c) + f_1], \Phi_1) dt, \\ & \int_0^t [(u_t, \Phi_2) - ((v \cdot \nabla) \Phi_2, u) + \chi(u_x, \Phi_{2x}) + \gamma(c_x, \Phi_{2x})] dt = \end{aligned} \quad (275)$$

$$= \int_0^t (f_2, \Phi_2) dt, \quad (276)$$

$$\int_0^t [(c_t, \Phi_3) - ((v \cdot \nabla) \Phi_3, c) + D(c_x, \Phi_{3x})] dt = \int_0^t (f_3, \Phi_3) dt \quad (277)$$

при довільних $\Phi_1(x, t) \in J_2^{0(1,0)}(Q_T)$, $\Phi_2(x, t)$ та $\Phi_3(x, t) \in W_2^{0,1,0}(Q_T)$ і таких, що мають зміст всі інтеграли в (6)–(8).

Отримано для цієї задачі наступні оцінки:

$$\begin{aligned} y_c(t) &\leq y_c(0) + \int_0^T \|f_3\| dt \equiv A_1, \\ [2mm] \frac{1}{2} y_c^2 + D \int_0^t \varphi_c^2 dt &\leq \frac{1}{2} y_c^2(0) + A_1 \int_0^T \|f_3\| dt \equiv A_2^2, \\ [2mm] y_u^2(t) &\leq \left[y_u^2(0) + \chi^{-1} \gamma^2 D^{-1} A_2^2 + \int_0^T \|f_2\|^2 dt \right] e^T \equiv A_3^2, \\ [2mm] y_u^2(t) + \chi \int_0^t \varphi_u^2 dt &\leq y_u^2(0) + A_3^2 T + \chi^{-1} \gamma^2 D^{-1} A_2^2 + \\ &+ 2A_3 \int_0^T \|f_2\| dt \equiv A_4^2, \\ y_v(t) &\leq y_v(0) + gT(\beta_1 A_3 + \beta_2 A_1) + \int_0^T \|f_1\| dt \equiv A_5, \\ \frac{1}{2} y_v^2(t) + \nu \int_0^t \varphi_v^2 dt &\leq \frac{1}{2} y_v^2(0) + \\ &+ A_5 \left[(\beta_1 A_3 + \beta_2 A_1) gT + \int_0^T \|f_1\| dt \right] \equiv A_6^2, \quad t \in [0, T]. \quad (278) \\ \psi_v^2(t) &\leq \left[\psi_v^2(0) + \int_0^T \|f_{1t}\|^2 dt + \alpha_1 (\chi \nu)^{-1/2} A_4 A_6 + \right. \\ &+ \alpha_2 \chi^{-1} A_4^2 + \alpha_3 D^{-1} A_2^2 + \alpha_4 (D \nu)^{-1/2} A_2 A_6 + \alpha_5 D^{-1} A_2^2 \left. \right] \times \\ &\times \exp(12 \nu^{-2} A_6^2 + T) \equiv A_7^2, \\ \psi_v^2(t) + \nu \int_0^t F_v^2 dt &\leq \psi_v^2(0) + A \equiv A_8^2, \\ \psi_c^2(t) &\leq \left[\psi_c^2(0) + 2(D \nu)^{-1/2} A_1 A_2 A_7 A_8 + \int_0^T \|f_{3t}\|^2 dt \right] e^T \equiv A_9^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_c^2 + D \int_0^t F_c^2 dt &\leq \psi_c^2(0) + B \equiv A_{10}^2, \\
\psi_u^2(t) &\leq \left[\psi_u^2(0) + 2\chi^{-1}(2\chi^{-1/2}\nu^{-1/2}A_3A_4A_7A_8 + \right. \\
&\quad \left. + \gamma^2 D^{-1/2}A_{10}) + \int_0^T \|f_{2t}\|^2 \right] e^T \equiv A_{11}^2, \\
\psi_u^2(t) + \chi \int_0^t F_u^2 &\leq \psi_u^2(0) + C \equiv A_{12}^2, \\
\nu\varphi^2(t) &\leq A_5 \left[(\beta_1 A_3 + \beta_2 A_1)g + A_7 + C_{01} \right] \equiv A_{13}^2, \\
D\varphi_c^2(t) &\leq A_1(A_9 + C_{03}) \equiv A_{14}^2, \\
\chi\varphi_u^2(t) &\leq \chi^{-1}\gamma^2 D^{-1}A_{14}^2 + 2A_3(A_{11} + C_{02}) \equiv A_{15}^2,
\end{aligned} \tag{279}$$

де $C_{0i} = \max_{t \in [0, T]} \|f_i(x, t)\| < \infty, i = \overline{1, 3}$. Всі оцінки (279), (279) глобальні, тобто виконуються без будь-яких обмежень, крім умов гладкості, на вихідні дані задачі.

Надалі доведено наступні твердження.

Теорема 4. Якщо в задачі (269)–(273) $a(x) \in W_2^2(Q) \cap J_2^{0(1)}(Q)$, $u_0(x)$ та $c_0(x) \in W_2^2(Q) \cap W_2^1(Q)$, а $f_i(x, t)$ та $f_{it}(x, t) \in L_2(Q_T)$ і $C_{0i} = \max_{t \in [0, T]} \|f_i(x, t)\| < \infty, i = \overline{1, 3}$, то на всьому проміжку $[0, T]$ існує узагальнений розв'язок цієї задачі, який є єдиний та для якого виконуються оцінки (278), (279). При цьому норми $y(t), \varphi(t), \psi(t)$, що відповідають функціям $v(x, t), u(x, t), c(x, t)$, тобто для розв'язку даної задачі, неперервні на $[0, T]$, а $v_{tx}(x, t), u_{tx}(x, t), c_{tx}(x, t)$ належать до простору $L_2(Q_T)$.

Задача II. Розглядається наступна система нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними:

$$v_t + (v \cdot \nabla)v = \nu \Delta v - \nabla p - \vec{g}(\beta_1 u + \beta_2 c), \quad \operatorname{div} v = 0, \tag{280}$$

$$u_t + (v \cdot \nabla)u = (\chi + \alpha^2 DN) \Delta u + \alpha DN \Delta c, \tag{281}$$

$$c_t + (v \cdot \nabla)c = D \Delta c + \alpha D \Delta u, \tag{282}$$

$$v(x, 0) = a(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x), \tag{283}$$

$$v|_{S_T} = 0, \quad u|_{S_T} = 0, \quad c|_{S_T} = 0, \quad (284)$$

$$x \in Q \subset E_2, \quad t \in [0, T], \quad S_T = S \times [0, T],$$

де S — границя області Q ($Q_T = Q \times [0, T]$). Надалі для спрощення запису будемо користуватись позначенням $\gamma = (\chi + \alpha^2 DN)$.

Тут коефіцієнт $N \equiv \left(\frac{u}{C_p} \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_0 > 0$ — термодинамічний параметр, де $\mu = \mu_1/m_1 - \mu_2/m_2$ — ефективний хімічний потенціал, μ_1, μ_2 — хімічні потенціали, а m_1, m_2 — маси молекул, відповідно, першої (легшої) і другої компонент суміші (тут індекс 0 означає, що всі величини в дужках віднесені до рівноважного стану суміші), C_p — теплоємність суміші при постійних значеннях тиску та концентрації. Так само вважається, що $\operatorname{div} a = 0$, а границя S області Q кусково-гладка.

Поняття узагальненого розв'язку задачі (280)–(282) вводиться аналогічно, як в попередній задачі. Так само отримуються співвідношення

$$\frac{1}{2}(y_v^2)' + \nu \varphi_v^2 = -\left((\beta_1 u + \beta_2 c) \vec{g}, v \right), \quad y_v(0) = \|a(x)\|, \quad (285)$$

$$\frac{1}{2}(y_u^2)' + \gamma \varphi_u^2 = -\alpha DN(u_x, c_x), \quad y_u(0) = \|u_0(x)\|, \quad (286)$$

$$\frac{1}{2}(y_c^2)' + D \varphi_c^2 = -\alpha D(u_x, c_x), \quad y_c(0) = \|c_0(x)\|, \quad (287)$$

$$\frac{1}{2}(\psi_v^2)' + \nu F_v^2 = -\left(\vec{g}(\beta_1 u_t + \beta_2 c_t), v_t \right) - ((v_t \cdot \nabla) v, v_t), \quad (288)$$

$$\frac{1}{2}(\psi_u^2)' + \gamma F_u^2 = ((v_t \cdot \nabla) u_t, u) - \alpha DN(u_{tx}, c_{tx}), \quad (289)$$

$$\frac{1}{2}(\psi_c^2)' + D F_c^2 = ((v_t \cdot \nabla) c_t, c) - \alpha D(u_{tx}, c_{tx}), \quad (290)$$

$$t \in [0, T].$$

В результаті визначені наступні оцінки:

$$y_c^2(t) \leq B_5 B_6^{-1} \equiv A_{16}^2, \quad t \in [0, T],$$

$$\int_0^t \varphi_c^2 dt \leq B_5 D^{-1} B_7^{-1} \equiv A_{17}^2, \quad t \in [0, T],$$

$$y_u^2(t) + \gamma \int_0^t \varphi_u^2 dt \leq y_u^2(0) + \gamma^{-1} (\alpha DN)^2 A_{17}^2 \equiv A_{18}^2,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \varphi_u^2 dt &\leq \gamma^{-1} A_{18}^2 \equiv A_{19}^2, \\
y_v(t) &\leq y_v(0) + gT(\beta_1 A_{18} + \beta_2 A_{16}) \equiv A_{20}, \\
\int_0^t \varphi_v^2 dt &\leq \nu^{-1} B_8 \equiv A_{21}^2, \quad t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{291}$$

де $B_5 = y_c^2(0) + \frac{1}{2}\alpha^2 D\gamma^{-1} y_u^2(0)$, $B_6 = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 DN\gamma^{-1}$, $B_7 = 1 - \alpha^2 D\gamma^{-1}$, $\gamma = \chi + \alpha^2 DN$. Константи $A_{16} - A_{21}$ залежать лише від вихідних даних задачі, тобто від початкових даних та коефіцієнтів, що входять в рівняння (281), (282).

$$ab \leq \frac{1}{2}\epsilon a^2 + \frac{1}{2}\epsilon^{-1}b^2, \tag{292}$$

де a, b, ϵ — довільні додатні величини. Завдяки цьому вдається довести, що ці оцінки будуть глобальними. При цьому отримується наступне співвідношення:

$$B_{13}\psi_c^2(t) + B_{14}D \int_0^t F_c^2 dt \leq B_{12}, \tag{293}$$

де

$$\begin{aligned}
B_{12} &= B_{11} + 2\epsilon_4^{-1}\epsilon_3^{-2}(2 - \epsilon_1)^{-2}\alpha^4 D\gamma^{-2}N^2 A_{16}A_{17}A_{22}A_{23}, \\
B_{13} &= \{\epsilon_3(2 - \epsilon_1)\chi + [\epsilon_3(2 - \epsilon_1) - 1]\alpha^2 DN\} [\epsilon_3(2 - \epsilon_1)\gamma]^{-1}, \\
B_{14} &= [B\chi + (B - 2)\alpha^2 DN][\epsilon_3(2 - \epsilon_1)\gamma]^{-1}, \\
B &= \epsilon_3(2 - \epsilon_1)(2 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4).
\end{aligned}$$

Оцінка (293) змістовна, коли $B_{13} > 0$ і $B_{14} > 0$ (додатність B_{12} — очевидна). Доведено, що при довільних заданих вихідних задачі (280)–(284) значення $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_4$ (визначено, що доцільно покласти $\epsilon_3 = 1 - (\epsilon_2 + \epsilon_4)/2$) завжди можна вибрати такими, що коефіцієнти B_{13}, B_{14} будуть додатні.

Для узагальненого розв'язку задачі (280)–(284) отримано наступні глобальні апіорні оцінки:

$$\psi_v^2(t) \leq \left(\psi_v^2(0) + 7\nu^{-1}g^2 \left\{ \beta_1^2 \left[2A_{18}A_{20} \left(\int_0^T \varphi_v^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \varphi_u^2 dt \right)^{1/2} + \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \gamma^2 \int_0^T \varphi_u^2 dt + (\alpha DN)^2 \int_0^T \varphi_c^2 dt \Big] + \beta_2^2 \left[2A_{16}A_{20} \left(\int_0^T \varphi_v^2 dt \right)^{1/2} \times \right. \\
& \times \left. \left(\int_0^T \varphi_c^2 dt \right)^{1/2} + D^2 \int_0^T \varphi_c^2 dt + (\alpha D)^2 \int_0^T \varphi_u^2 dt \right] \Big\} \times \\
& \times \left(14\nu^{-1} \int_0^T \varphi_v^2 dt \right) \equiv A_{22}^2, \\
& \int_0^t F_v^2 dt \leq \nu^{-1}(\psi_v^2(0) + B_9) \equiv A_{23}^2, \\
& \psi_c^2(t) \leq B_{12}B_{13}^{-1} \equiv A_{25}^2, \\
& \int_0^t F_c^2 dt \leq B_{12}B_{14}^{-1}D^{-1} \equiv A_{26}^2, \\
& \psi_u^2(t) \leq B_{10} + N(A_{25}^2 + 2DA_{26}^2) \equiv A_{27}^2, \\
& \int_0^t F_u^2(t)dt \leq (2 - \epsilon_1)^{-1}\gamma^{-1}A_{27}^2 \equiv A_{28}^2, \\
& \varphi_v^2(t) \leq \nu^{-1}A_{20}[A_{22} + g(\beta_1A_{18} + \beta_2A_{16})] \equiv A_{24}^2, \\
& \varphi_u^2(t) \leq [2\alpha^2DN^2A_{16}A_{25} + 2A_{18}A_{27}(\chi + \alpha^2DN)] \times \\
& \times (\chi^2 + 2\chi\alpha^2DN)^{-1} \equiv A_{29}^2, \\
& \varphi_c^2 \leq 2D^{-1}A_{16}A_{25} + \alpha^2A_{26}^2 \equiv A_{30}^2, \quad t \in [0, T].
\end{aligned} \tag{294}$$

Тут $B_9 = \text{const.}$

Отримані оцінки дозволяють довести існування і єдиність узагальненого розв'язку задачі (280)–(284):

Теорема 6. *Якщо в задачі (280)–(284) $a(x) \in W_2^2(Q) \cap \overset{0}{J}(Q)$, $u_0(x) \in W_2^2(Q) \cap \overset{0}{W}_2^1(Q)$, де $Q \subset E_2$, то для всіх $t \in [0, T]$ існує узагальнений розв'язок цієї задачі, який є єдиний. Для цього розв'язку виконуються оцінки (294). При цьому норми $y(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ відповідних функцій $v(x, t)$, $u(x, t)$, $c(x, t)$, тобто для розв'язку даної задачі, будуть неперервні на $[0, T]$, а v_{tx} , u_{tx} , c_{tx} належатимуть $L_2(Q_T)$.*

6 Апробація результатів, участь в конференціях, наукове співробітництво тощо

Результати, що ввійшли в підсумковий звіт доповідались виконавцями проекту на ряді міжнародних конференціях. Щодо цілої низки висвітлених тут досягнень проводиться тісне наукове співробітництво з науковцями світу (зокрема, Канади, Італії, Чехії, Англії, Кіпру, Ірану, Польщі тощо).

Силами співробітників відділу за звітний період проведено три міжнародні конференції: Четверта, П'ята та Шоста міжнародні конференції "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Київ, 2001, 2003, 2005. Детальну інформацію про ці конференції можна знайти на інтернет-сайті <http://www.imath.kiev.ua/~appmath/conf.html>. Праці Четвертої та П'ятої конференцій опубліковані як праці Інституту математики [5, 6], загальний обсяг — 2312 сторінок.

Спільні договори про наукове співробітництво

- 1) з Інститутом фізики Чеської академією наук, Прага, Чехія;
- 2) з факультетом математики та статистики університетом Кіпру, Нікосія, Кіпр;
- 3) з факультетом фізики та астрономії університету Палермо, Палермо, Італія.

Наукові візити закордонних учених в Інститут математики

1. член-кор. РАН, професор В.В. Пухначова (Інститут гідродинаміки ім. М. Лаврентєва, Новосибірск), 2003;
2. професор Р. Смірнова (Університет Далхаузі, Галіфакс, Канада), 2004;
3. професор Х. Софоклеуса (Університет Кіпру), 2004;

4. професор О. Боровських (Московський державний університет), 2004;
5. професор Дж. Давоул (Університет бен-Гуріона, Ізраїль), 2005;
6. професор В. Робук (Об'єднаний інститут ядерних досліджень, Дубна), 2005;
7. К. Джуст (Університет Арізони, США), 2005.

Короткотермінові наукові візити

1. Інститут фізики Чеської академією наук, Прага, Чехія, 2001 (**Нікітін А.Г.**);
2. Факультет математики університету м. Лінчопінг, Швеція, 2001 (**Магда О.В.**);
3. Інституті біокібернетики та біомедичної інженерії ПАН, Варшава, Польща, 2001 (**Черніга Р.М.**);
4. Інститут фізики Чеської академією наук, Прага, Чехія, 2002 (**Нікітін А.Г.**);
5. Альберта університет, Канада, 2002 (**Нікітін А.Г.**);
6. Факультет математики університету м. Лінчопінг, Швеція, 2002 (**Магда О.В.**);
7. Ноттінгамський університет, Великобританія, 2002 (**Черніга Р.М.**);
8. Інститут біокібернетики та біомедичної інженерії ПАН, Варшава, Польща, 2002 (**Черніга Р.М.**);
9. Університети м. Палермо та м. Болонья, Італія, 2003 (**Нікітін А.Г.**);
10. Інститут фізики Чеської академією наук, Прага, Чехія, 2003 (**Нікітін А.Г.**);
11. Мексиканський автономний університет, Мексика, 2003 (**Нікітін А.Г.**);
12. Факультет математики та статистики університету Кіпру, Нікосія, Кіпр, 2003 (**Іванова Н.М.**);

13. Інститут досліджень в теоретичній фізиці і математиці, Тегеран, Іран, 2003 (**Попович Р.О.**);
14. Лабораторія теоретичної фізики ім. М. Боголюбова, Об'єднаний інститут ядерних досліджень, Дубна, Росія, 2003 (**Магда О.В., Попович Р.О., Спічак С.В.**);
15. Технічний університет Дрездена, Дрезден, Німеччина, 2003 (**Легенський В.І.**);
16. Інститут фізики Чеської академією наук, Прага, Чехія, 2004 (**Нікітін А.Г.**);
17. Інститут досліджень в теоретичній фізиці і математиці, Тегеран, Іран, 2004 (**Попович Р.О.**);
18. Інститут математики університету м. Білосток, Польща, 2004 (**Бойко В.М.**);
19. Центр математичних досліджень університету м. Монреаль, Канада, 2004 (**Попович Р.О.**);
20. Інститут фізики Чеської академією наук, Прага, Чехія, 2005 (**Нікітін А.Г.**);
21. Альберта університет, Канада, 2005 (**Нікітін А.Г.**);
22. Юта університет, США, 2005 (**Нікітін А.Г.**);
23. Центр математичних досліджень університету м. Монреаль, Канада, 2005 (**Бойко В.М.**);
24. Факультет математики та статистики університет Кіпру, Нікосія, Кіпр, 2004 (**Іванова Н.М., Попович Р.О.**);
25. Факультет математики та статистики університет Кіпру, Нікосія, Кіпр, 2005 (**Попович Р.О.**);
26. Інститут фізики Чеської академією наук, Прага, Чехія, 2005 (**Нестеренко М.О.**).

Наукове стажування

1. Університет м. Опава, Чехія, 2001–2003 (**Сергєєв А.Г.**)
2. Університет бен-Гуріона, Ізраїль, 2002 (**Жалій О.Ю.**);
3. Центр математичних досліджень університету м. Монреаль, Канада, 2002–2004 (**Жалій О.Ю.**);
4. Факультет математики університет Британської Колумбії, Ванкувер, Канада, 2005 (**Іванова Н.М.**).

Участь у конференціях та наукових школах

1. Четверта, П'ята, Шоста міжнародні конференції “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”, Київ, 2001, 2003, 2005 (**усі співробітники відділу**);
2. 33 Симпозіум з математичної фізики, Торунь, Польща, 2001 (**Єгорченко І.А., Черніга Р.М.**);
3. Workshop on Superintegrability in Classical and Quantum Systems, Монреальський університет, Канада, 2002 (**Нікітін А.Г., Жалій О.Ю.**).
4. 24-й міжнародний колоквиум “Теоретико-групові методи в математичній фізиці”, Париж, Франція, 2002 (**Нікітін А.Г., Черніга Р.М.**);
5. Всесвітня конференція з теоретичної фізики під егідою ЮНЕСКО, Париж, Франція, 2002 (**Черніга Р.М.**);
6. Міжнародна конференція “Inverse Problem and Nonlinear Equations”, Харків, 2002 (**Магда О.В.**);
7. V міжнародна конференція “Породоруйнівний та металооброблюючий інструмент - техніка і технологія його виготовлення та застосування”, селище Морське, 2002 (**Жуковський О.М.**);
8. Workshop on Group Theory and Numerical Analysis, Монреальський університет, Канада, 2003 (**Жалій О.Ю.**).

9. Четверта міжнародна конференція “Авіа–2003”, Національний авіаційний університет, Київ, 2003 (**Іванова Н.М.**);
10. III Voronoi Conference on Analytic Number Theory and Spatial Tesselations, Київ, 2003 (**Нестеренко М.О.**);
11. NATO ASI 2003 “Data Fusion for Situation Monitoring, Incident Detection, Alert and Response Management”, Цахкадзор, Арменія, 2003 (**Попович Р.О.**);
12. 10th International Conference on Symmetry Methods in Physics, Цахкадзор, Арменія, 2003 (**Попович Р.О.**);
13. International Workshop “Nonlinear control systems”, Бедлево, Польща, 2003 (**Легенький В.І.**);
14. Міжнародна конференції “Найновіші технології в порошковій металургії і кераміці”, Київ, 2003 (**Жуковський О.М.**);
15. VI міжнародна конференція “Породоруйнівний та металооброблюючий інструмент - техніка і технологія його виготовлення та застосування”, селище Морське, 2003 (**Жуковський О.М.**);
16. 8-й Міжнародний семінар “Устойчивость и колебания нелинейных систем управления”, Москва, Росія, 2004 (**Легенький В.І.**);
17. Міжнародна конференція пам’яті В.Я. Буняковського, Київ, 2004 (**Магда О.В.**);
18. Міжнародна конференція “Recent Trends in Kinetic Theory and Its Applications”, Київ, 2004 (**Магда О.В.**);
19. Міжнародна конференція “Symmetry Methods in Physics”, Прага, Чехія, 2004 (**Нікітін А.Г.**);
20. Міжнародна конференція “Modern Problems of Mathematics and Theoretical Physics”, Київ, 2004 (**Нікітін А.Г.**);
21. Міжнародна конференція “Classical and Quantum Integrable Systems”, Дубна, Росія, 2004 (**Бойко В.М., Іванова Н.М., Нестеренко**

- М.О.);**
22. 2-nd Winter school on Theoretical Physics, Дубна, Росія, 2004 (**Бойко В.М., Іванова Н.М., Нестеренко М.О.);**
 23. III Summer School in Modern Mathematical Physics, Златібор, Сербія і Чорногорія, 2004 (**Іванова Н.М., Нестеренко М.О., Спічак С.В.);**
 24. X міжнародна конференція “Modern Group Analysis (MOGRAN X)”, Ларнака, Кіпр, 2004 (**Іванова Н.М., Попович Р.О.);**
 25. International Workshop on Nonlinear Partial Differential Equations, Тегеран, Іран, 2004 (**Попович Р.О.);**
 26. 11th Regional Conference on Mathematical Physics and Mathematics, Тегеран, Іран, 2004 (**Попович Р.О.);**
 27. Міжнародна конференція “Symmetry and Perturbation Theory”, кала Гоньоне, Італія, 2004 (**Єгорченко І.А.);**
 28. Міжнародна конференція “Invariant Theory and Differential Geometry”, Ватерлоо, Канада, 2005 (**Нікітін А.Г.);**
 29. IFAC Congress, Прага, Чехія, 2005 (**Легенький В.І.);**
 30. Міжнародна конференція “Classical and Quantum Integrable Systems”, Дубна, Росія, 2005 (**Жалій О.Ю., Іванова Н.М., Нестеренко М.О., Нікітін А.Г.);**
 31. Міжнародна науково-технічна конференція “Порошковая металлургия: достижения и проблемы”, Мінськ, Білорусія, 2005 (**Жуковский О.М.);**
 32. IV International Symposium Quantum Theory and Symmetries, Варна, Болгарія, 2005 (**Іванова Н.М., Попович Р.О.).**

7 Педагогічна діяльність, підготовка кадрів

Педагогічна діяльність

Нікітін А.Г.	Київський національний університет імені Тараса Шевченка	2001–2005
Жданов Р.З.	Київський національний університет імені Тараса Шевченка	2001
Жалій О.Ю.	Українська академія зовнішньої торгівлі	2001
Жалій О.Ю.	Національна академія управління	2001
Спічак С.В.	Національна академії управління	2002
Бойко В.М.	Київський національний університет імені Тараса Шевченка	2005
Іванова Н.М.	Політехнічний Ліцей НТУУ “КПІ”	2001–2003
Іванова Н.М.	Національного авіаційного університету	2002–2003
Магда О.В.	Київський Національний економічний університет	2003–2005

Підготовка кадрів, канд. фіз.-мат. наук

Жалій О.Ю.	Симетрія та відокремлення змінних в багатовимірних рівняннях математичної фізики параболічного типу наук. керів. Р.З. Жданов	2001
Подошвелев Ю.Г.	Класична та умовна симетрія нелінійних хвильових рівнянь наук. керів. М.І. Сєров	2001
Магда О.В.	Групова класифікація та точні розв'язки квазілінійних рівнянь гіперболічного тип наук. керів. А.Г. Нікітін	2004
Лутфуллін М.В.	Реалізації алгебр Лі невисоких розмірностей та інваріантні системи нелінійних диференціальних рівнянь наук. керів. А.Г. Нікітін	2005
Іванова Н.М.	Класифікаційні задачі для рівнянь конвекції-дифузії та рівнянь Шрьодінгера наук. керів. А.Г. Нікітін	2005

8 Публікації

В рамках проекту опубліковано 2 монографії, 6 збірників наукових праць, 107 наукових робіт, оформлено 3 патенти на винаходи. Перелік публікацій додається.

- [1] Лагно В.І., Стогній В.І., Спічак С.В. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. — 360 с.
- [2] Лагно В.И., Стогний В.И., Спичак С.В. Симметричный анализ уравнений эволюционного типа. — Москва-Ижевск: РХД, 2004. — 392 с.

- [3] Бойко В.М., Горбачук М.Л., Луковський І.О., Нікітін А.Г., Попович Р.О., Самойленко А.М. (редактори) В.І. Фуцич. Вибрані праці. — Київ: Наукова думка, 2005. — 448 с.
- [4] Бойко В.М., Попович Р.О., Нікітін А.Г. (редактори) Групові та аналітичні методи в математичній фізиці / Праці Інституту математики НАН України. — Київ, 2001. — **36**. — 324 с.
- [5] Nikitin A.G., Boyko V.M., Popovych R.O. (editors) Proceedings of Fourth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics” / Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — Kyiv, 2002. — **43**, Parts 1–2. — 784 p.
- [6] Nikitin A.G., Boyko V.M., Popovych R.O., Yehorchenko I.A. (editors) Proceedings of Fifth International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”, Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — Kyiv, **50**, Parts 1–3. — 1528 p.
- [7] Boyko V.M. (editor) W.I. Fushchych, Scientific Works / Electronic collection of Fushchych’s research papers. — Kyiv, 2000–2004. — **1–6**. — 3149 p.
- [8] Абраменко А.О., Спічак С.В. Про нові класи ермітових точно розв’язних матричних операторів Шрьодінгера // Математичні студії. — 2001. — **15**, № 1. — С. 44–56.
- [9] Абраменко А.О., Спічак С.В. Багатопараметричні сім’ї ермітових точно розв’язних матричних моделей Шрьодынґера // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 12–24.
- [10] Barannyk T.A., Nikitin A.G. Solitary Wave Solutions for Heat Equations // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — **50**, Part 1. — P. 34–39.
- [11] Basarab-Horwath P., Zhdanov R.Z. Initial-value problems for evolutionary partial differential equations and higher-order conditional symmetries // J. Math. Phys. — 2001. — **42**, N 1. — P. 376–389.

- [12] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. Classifying evolution equations // *Nonlinear Analysis*. — 2001. — **47**. — P. 5135–5144.
- [13] Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R. The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // *Acta Appl. Math.* — 2001. — **69**, N 1. — P. 43–94.
- [14] Бондаренко Н.А., Мечник В.А., Жуковский А.Н., Панов В.А. Новые породоразрушающие элементы для алмазного бурового инструмента // В кн.: Породоразрушающий и металлообрабатывающий инструмент — техника и технология его изготовления и применения. — К., ИСМ, ИПЦ АЛКОН НАНУ. — 2003. — С. 35–40.
- [15] Бондаренко М.О., Мечник В.А., Жуковский О.М., Семенов О.І., Панов О.В. Деклараційний патент на винахід “Абразивовмісний матеріал”(№ 64274А від 16.02.2004), Бюл. № 2.
- [16] Бойко В.М., Попович В.О. Группова класифікація галілей інваріантних рівнянь високого порядку // *Праці Інституту математики НАН України*. — 2001. — **36**. — С. 45–50.
- [17] Бойко В.М., Попович Р.О. Диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі // *Праці Інституту математики НАН України*. — 2001. — **36**. — С. 51–62.
- [18] Boyko V. Nonlocal symmetry and integrable classes of Abel equation // *Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv*. — 2004. — **50**, Part 1. — P. 47–51 (see nlin.SI/0404020).
- [19] Burde G., Zhalij A. Separable non-parallel and unsteady flow stability problems // *Geometry, integrability and quantization, Softex, Sofia*. — 2004. — p. 131–143 (physics/0507071).
- [20] Gungor F., Lahno V., Zhdanov R. Symmetry classification of KdV-type nonlinear evolution equations // *Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv*. — 2004. — **50**, Part 1. — P. 125–130.

- [21] Gungor F., Lagno V.I., Zhdanov R.Z. Symmetry classification of Kdv-type nonlinear evolution equations // J. Math. Phys. — 2004. — **45**, N 6. — P. 2280–2313.
- [22] Doebner H.-D., Kopp A., Zhdanov R., Extensions of physical theories: quantum mechanics with internal degrees of freedom and nonlinear transformations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. — 2004. — **50**, Part 2. — P. 700–707.
- [23] Василенко О.Ф., Єгорченко І.А. Групова класифікація багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 63–66.
- [24] Eshraghi H., Abedini Y., Popovych R.O. Effect of external sources on finite time singularity // Physica Scripta. — 2005. — **71**, N 1. — P. 52–59.
- [25] Yehorchenko I.A. Differential invariants and construction of conditionally invariant equations, Symmetry in nonlinear mathematical physics // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. — 2002. — **43**, Part 1. — P. 256–262.
- [26] Yehorchenko I.A. Group classification with respect to hidden symmetry // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. — 2004. — **50**, Part 1. — P. 290–297.
- [27] Yehorchenko I.A., Vorobyova A.I. Sets of conditional symmetry operators and exact solutions for wave and generalised heat equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. — 2004. — **50**, Part 1. — P. 298–303.
- [28] Yehorchenko I.A. Differential invariants for infinite-dimensional algebras // Proceedings of the International Conference “Symmetry and Perturbation Theory”, Cala Gognone, Italy, June 2004. — Singapore: World Scientific. — 2005. — P. 308–312.

- [29] Жалій О.Ю. Відокремлення змінних в системі стаціонарних рівнянь Шрьодінгера-Лапласа // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — с. 83–92.
- [30] Zhalij A. Towards classification of separable Pauli equations // Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2002. — **43**. — с. 768–773.
- [31] Zhalij A. On separable Pauli equations // J. Math. Phys. — 2002. — **43**, N 3. — P. 1365–1389 (math-ph/0203001).
- [32] Zhalij A., Zhdanov R. Separation of variables in time-dependent Schrödinger equations // CRM Proceedings and Lecture Notes. — 2004. — **37**. — P. 317–331.
- [33] Zhdanov R., Lahno V. Symmetry and exact solutions of the Maxwell and $SU(2)$ Yang–Mills equations // Advances in Chemical Physics. Modern Nonlinear Optics. — 2001. — **119**, part II. — P. 269–352.
- [34] Zhdanov R.Z. Higher conditional symmetry and reduction of initial value problems // Nonlinear Dynamics. — 2002. — **28**. — P. 17–27.
- [35] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of the general evolution equation: local and quasilocal symmetries // SIGMA. — 2005. — **1**. — 7 pages.
- [36] Жуковский А.Н., Бондаренко Н.А., Мечник В.А. Термодинамический анализ процес сов спекания породоразрушающих элементов из славутича/ Тезисы докладов V Международной конференции / ИСМ им. В.Н. Бакуля НАН Украины. — Киев, 2002. — С. 145–151.
- [37] Жуковський О.М., Карагодов В.П. Метод ітерацій при дослідженні конвективного руху в'язкої нестисливої рідини // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 93–102.
- [38] Жуковский А.Н., Майстренко А.Л., Мечник В.А., Бондаренко Н.Н. Напряженно-деформированное состояние связки в окрестности ал-

- мазного зерна, находящегося под действием нормальной и касательной составляющих нагрузки. Ч.1. Модель // Трение и износ. — 2002. — **23**, № 2. — С. 146–153.
- [39] Жуковский А.Н., Майстренко А.Л., Мечник В.А., Бондаренко Н.Н. Напряженно-деформированное состояние связки в окрестности алмазного зерна, находящегося под действием нормальной и касательной составляющих нагрузки. Ч.2. Анализ // Трение и износ. — 2002. — **23**, № 4. — С. 393–396.
- [40] Жуковский А.Н., Майстренко А.Л., Мечник В.А., Бондаренко Н.А. Исследование механизма и кинетики спекания алмазосодержащих композиционных материалов// Тезисы докладов V Международной конференции/ИСМ им.В.Н.Бакуля НАН Украины. — Киев, 2002. — С. 128–133.
- [41] Ivanova N. Symmetry of nonlinear Schrödinger equations with harmonic oscillator type potential // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2002. — **43**, Part 1. — С. 149–150.
- [42] Іванова Н.М. Груповий аналіз нелінійних моделей реакції–дифузії // Матеріали V-ї науково-техн. конф. “Авіа-2003” — 2003. — **II**. — С. 22.25–22.28.
- [43] Ivanova N. Conservation laws and potential systems of diffusion–convection equations // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. — 2004. — **50**, Part 1. — P. 149–153 (math-ph/0404025).
- [44] Ivanova N.M., Popovych R.O., Eshraghi H. On symmetry properties of nonlinear Schrödinger equations with potentials // Sveske Fiz. Nauka. — 2005. — **18 (A1)**. — P. 451–456.
- [45] Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Conservation laws of variable coefficient diffusion–convection equations // Proc. of 10th International Conference MOGRAN X (Larnaca, Cyprus, 2004). — 2005. — P. 107–113 (math-ph/0505015).

- [46] Карагодов В.П. Дослідження збіжності ітераційного процесу при розв'язуванні задач термоконвекції // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 116–125.
- [47] Карагодов В.П. Однозначна розв'язність двовимірних задач про конвективні процеси в бінарній суміші рідин. — Київ, 2005. — 47 с. (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 2005.9).
- [48] Lahno V., Zhdanov R. Group classification of nonlinear wave equations // J. Math. Phys. — 2005. — **46**, N 5. — 053301, 37 pages.
- [49] Лагно В.И., Магда Е.В. Групповая классификация одного класса // Вісник Харківського національного університету. Серія “Математика, прикладна математика і механіка”. — 2003. — № 582. — С. 179–191.
- [50] Лагно В.И., Магда О.В., Жданов Р.З. Про інваріантність квазілінійних рівнянь гіперболічного типу відносно тривимірних алгебр Лі // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 136–158.
- [51] Lehenkyi V., Rudolph J. A characteristic prolongation for second order control systems // Preprint, IHES/M/03/54, 2003, 16 p.
- [52] Lehenkyi V., Rudolph J. Towards the Group Classification of Control Systems // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — **50**, Part 1. — 170–175.
- [53] Легенький В.И. Теоретико-групповой критерий редукции уравнения $G(t, x, \dot{x}, \dots) + \varepsilon F(t, x, \dot{x}, \dots) = 0$ к виду $G(\hat{t}, \hat{x}, \hat{\dot{x}}, \dots) = 0$ // Проблемы управления и информатики. — 2004. — № 2. — С. 94–102.
- [54] Легенький В.И. О построении систем управления с инвариантной программой // Математические машины и системы. — 2004. — № 1. — С. 115–121.
- [55] Lehenkyi V., Rudolph J. On a characteristic vector field for systems reducible to order two // Proceedings of the IFAC Congress, Praha. — 2005. — 6 p.

- [56] Lutfullin M.W., Popovych R.O. Realizations of real 4-dimensional solvable decomposable Lie algebras // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2002. — **43**, Part 2. — P. 466-468.
- [57] Магда О.В. Чотиривимірні алгебри Лі та точні розв'язки квазілінійних рівнянь гіперболічного типу // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 2002. — № 4. — С. 89-101.
- [58] Magda O. Invariance of quasilinear equations of hyperbolic type with respect to three-dimensional Lie algebras // Proceeding of Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine. — 2002. — **43**, Part 1. — P. 167-170.
- [59] Magda O. Group classification of one class of quasi-linear hyperbolic-type differential equations // Материалы Междунар. науч. конф. Обратные задачи и нелинейные уравнения, Харьков, 12-16 августа 2002 г. — Харьков, 2002. — С. 58-59.
- [60] Магда О.В. Тривимірні алгебри Лі квазілінійних рівнянь гіперболічного типу // Наукові вісті Національного технічного університету України “Київський політехнічний інститут”. — 2003. — № 2(28). — С. 151-156.
- [61] Мечник В.А., Бондаренко Н.А., Кулик О.Г., Жуковский А.Н., Панов В.А., Кузминская О.М. Моделирование влияния добавки на структуру и свойства алмазного композита / В кн.: Породоразрушающий и металлообрабатывающий инструмент - техника и технология его изготовления и применения. — К., ИСМ, ИПЦ АЛКОН НАНУ. — 2003. — С. 250-255.
- [62] Militello B., Nikitin A.G., Messina A. Symmetries and Supersymmetries in Trapped Ion Hamiltonian Models // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — **50**, Part 2. — P. 569-573.
- [63] Moshinsky M., Nikitin A.G. The many body problem in relativistic quantum mechanics // Revista Mexicana de Fisica. — 2004. — **50**, N 2. — P. 66-73.

- [64] Nesterenko M. Differential Invariants of Transformation Groups on the Real Plane // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — **50**, Part 1. — P. 211–213.
- [65] Nesterenko M.O., Boyko V.M. Realizations of indecomposable solvable 4-dimensional real Lie algebras // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2002. — **43**, Part 2. — P. 474–477.
- [66] Nesterenko M.O., Popovych R.O. Realizations of real unsolvable low-dimensional Lie algebras // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv — 2005. — **55**. — P. 163–168.
- [67] Niederle J., Nikitin A.G. Relativistic wave equations for interacting, massive particles with arbitrary half-integer spins // Physical Review D. — 2001. — **64**, N 12. — P. 125013-125024.
- [68] Niederle J., Nikitin A.G. Extended SUSY with central charges in quantum mechanics // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2002. — **43**, Part 2. — P. 497–507.
- [69] Nikitin A.G. Supersymmetries of the Dirac equation for a charged particle // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 197–205.
- [70] Nikitin A.G. Group classification of systems of reaction diffusion equations / Укр. мат.конгрес. Тези доповідей. Секція № 5 (математична фізика) // Інститут математики НАН України. — 2001. — С. 23.
- [71] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations // Ukr. Math. Bull. — 2005. — **2**, N 2. — P. 153–204.
- [72] Nikitin A.G., Barannyk T.A. Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations // Central European J. of Math. — 2005. — **2**, N 5. — P. 840–858.
- [73] Nikitin A.G., Galkin A.V. Extended Poincare parasuperalgebra with central charges and Wess–Zumino–Weinberg model // Nuclear Physics B (proc. Supl.). — 2001. — **102/103**. — P. 322–327.

- [74] Nikitin A.G., Galkin A.V. Tensor-bispinor equations for doublets // Hadronic Journal. — 2003. — **26**, N 1. — P. 351–367.
- [75] Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера // Укр. матем. журн. — 2001. — **51**, № 8. — С. 1053–1060.
- [76] Nikitin A.G., Wiltshire R.J. Systems of reaction diffusion equations and their symmetry properties // J. Math. Phys. — 2001. — **42**, № 4. — P. 1667–1688.
- [77] Новиков Н.В., Бондаренко Н.А., Жуковський А.Н., Мечник В.А. Моделирование физических процессов при спекании // Тезисы докладов международной конференции “Новейшие технологии в порошковой металлургии и керамике”. — К.: Ин-т проблем материаловедения НАНУ. — 2002. — С. 21–22.
- [78] Новиков Н.В., Бондаренко Н.А., Жуковський А.Н., Мечник В.А., Майстренко А.Л. Важнейшие направления в теории материаловедения сверхтвердых материалов // Порошковая металлургия: достижения и проблемы. Сб. докл. междунар. научн.-техн. конференции, Минск, 22–23 сентября 2005 г. — Минск: БНТУ, 2005. — С. 79–90.
- [79] Новиков Н.В., Бондаренко Н.А., Жуковський А.Н., Мечник В.А., Майстренко А.Л. Структурные особенности алмазосодержащих композитов и их проявление в кинетике неизотермического спекания // Порошковая металлургия: достижения и проблемы. Сб. докл. междунар. научн.-техн. конференции, Минск, 22–23 сентября 2005 г. — Минск: БНТУ, 2005. — С. 160–162.
- [80] Новиков Н.В., Бондаренко Н.А., Мечник В.А., Жуковский А.Н. Физико-математическое моделирование процессов спекания многокомпонентных алмазосодержащих композиций. 1. Математическая модель // Физическая мезо-механика. — 2004. — **7**, № 3. — С. 71–77.

- [81] Новиков Н.В., Бондаренко Н.А., Мечник В.А., Жуковский А.Н. Физико-математическое моделирование процессов спекания многокомпонентных алмазосодержащих композиций. 2. Физико-химические особенности формирования структуры и свойств // Физическая мезо-механика. — 2004. — 7, № 3. — С. 79–87.
- [82] Новиков Н.В., Бондаренко Н.А., Жуковский А.Н., Мечник В.А. Кинетика физико-химических процессов в алмазосодержащих композициях // Доп. НАН Украины. — 2005. — № 2. — С. 89–93.
- [83] Новиков Н.В., Бондаренко Н.А., Жуковский А.Н., Мечник В.А. Структура и свойства буровых вставок, спеченных методом горячего прессования // Доп. НАН Украины. — 2005. — № 3. — С. 93–97.
- [84] Новиков Н.В., Бондаренко Н.А., Жуковский А.Н., Мечник В.А. Влияние диффузии и химических реакций на структуру и свойства буровых вставок. 1. Кинетическое описание систем Салмаз-ВК6 и Салмаз-(ВК6- Cr_2 - W_2B_5) // Физическая мезо-механика. — 2005. — 8, № 2. — С. 99–106.
- [85] Новиков Н.В., Мечник В.А., Жуковский А.Н., Бондаренко Н.А. Феномено-логическая модель спекания сверхтвердых композиционных алмазосодержащих материалов // Доп. НАН Украины. — 2003. — № 10. — С. 102–104.
- [86] Новиков Н.В., Мечник В.А., Жуковский А.Н., Бондаренко Н.А., Ткач В.Н. Формирование структуры и свойств сверхтвердых композиционных алмазосодержащих материалов // Доп. НАН Украины. — 2003. — № 11. — С. 88–90.
- [87] Новіков М.В., Рибич І.Й., Крижанівський Є.І., Бондаренко М.О., Мечник В.А., Жуковський О.М. Деклараційний патент на винахід “Алмазно-твердосплавна пластина” (№ 63468А та №63469А від 15.01.2004), Бюл. № 1.

- [88] Новіков М.В., Рибич І.Й., Крижанівський Є.І., Бондаренко М.О., Мечник В.А., Жуковський О.М. Патент на винахід “Алмазно-твердосплавна пластина” (№ 63468 від 15.08.2005), Бюл. № 8.
- [89] Попович Р.О., Бойко В.М. Про диференціальні інваріанти в просторі двох змінних // Допов. НАН України. — 2001. — N 2. — С. 7–10.
- [90] Попович Р.О., Бойко В.М. Про групову класифікацію галілей-інваріантних еволюційних рівнянь другого порядку // Український математичний конгрес. Тези доповідей. Секція № 5 (математична фізика) — 2001. — С. 25–26.
- [91] Попович Р.О., Єгорченко І.А. Групова класифікація узагальнених рівнянь ейконала // Укр. матем. журн. — 2001. — **51**, № 11. — С. 1513–1520.
- [92] Попович Р.О., Черніга Р.М. Повна класифікація симетрій Лі системи нелінійних двовимірних рівнянь Лапласа // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 212–221.
- [93] Попович Р.О., Бойко В.М. Диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень: одна незалежна змінна // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, N 2. — С. 218–223.
- [94] Popovych R., Boyko V. Differential invariants and application to Riccati-type systems // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. — 2002. — **43**, Part 1. — P. 184–193 (see math-ph/0112057).
- [95] Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W. Realizations of real low-dimensional Lie algebras // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — **36**, N 26. — P. 7337–7360 (see math-ph/0301029).
- [96] Popovych R.O., Eshraghi H. Admissible point transformations of nonlinear Schrödinger equations // Proc. of 10th International Conference MOGRAN (Larnaca, Cyprus, 2004). — 2005. — P. 167–174.

- [97] Popovych R.O., Ivanova N.M. Hierarchy of conservation laws of diffusion–convection equations // J. Math. Phys. — 2005. — **46**. — 043502. — 22 p. (math-ph/0407008).
- [98] Popovych R.O., Ivanova N.M. Potential equivalence transformations for nonlinear diffusion–convection equations // J. Phys. A.: Math. Gen. — 2005. — **38**. — P. 3145–3155 (math-ph/0402066).
- [99] Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion–convection equations // J. Phys. A.: Math. Gen. — 2004. — **37**. — P. 7547–7565 (math-ph/0306035).
- [100] Popovych R.O., Ivanova N.M., Eshraghi H. Lie symmetries of (1+1)-dimensional cubic Schrödinger equation with potential // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. — 2004. — **50**, Part 1. — P. 219–224 (math-ph/0310039).
- [101] Popovych R.O., Ivanova N.M., Eshraghi H. Group classification of (1+1)-dimensional Schrödinger equations with potentials and power nonlinearities // J. Math. Phys. — 2004. — **45**, № 8. — P. 3049–3057 (math-ph/0311039).
- [102] Sergyeyev A. Nonlocal symmetries and formal symmetries for evolution equations // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 227–236.
- [103] Spichak S. On multi-parameter families of Hermitian exactly solvable matrix Schrodinger models // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. — 2002. — **43**, Part 2. — P. 688–690.
- [104] Spichak S. Invariance of Maxwell’s equations under nonlinear representations of Poincaré algebra // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. — 2004. — **50**, Part 2. — P. 961–964.
- [105] Sophocleous C., Ivanova N.M. Differential invariants of semilinear wave equations // Proc. of 10th International Conference MOGRAN X (Larnaca, Cyprus, 2004). — 2005. — P. 198–206.

- [106] Фильчакова В.П. Алгоритмы решения некоторых краевых задач // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 283–293.
- [107] Finkel F., Gomez-Ullate D., Gonzalez-Lopez A., Rodriguez M.A., Zhdanov R., A_N type Dunkl operators and new spin Calogero-Sutherland models // Comm. Math. Phys. — 2001. — **221**. — P. 477–497.
- [108] Finkel F., Gomez-Ullate D., Gonzalez-Lopez A., Rodriguez M.A., Zhdanov R. New spin Calogero–Sutherland models related to B_N -type Dunkl operators // Nuclear Physics B. — 2001. — **613**. — P. 472–496.
- [109] Finkel F., Gomez-Ullate D., Gonzalez-Lopez A., Rodriguez M.A., Zhdanov R. On the Sutherland model of B_N type and its associated spin chain // Comm. Math. Phys. — 2003. — **233**. — P. 191–209.
- [110] Finkel F., Gomez-Ullate D., Gonzalez-Lopez A., Rodriguez M.A., Zhdanov R., Dunkl operators and Calogero-Sutherland models / New Trends in Integrability and Partial Solvability, Proc. of Int. Conference. — Kluwer Academic Publishers, 2004. — P. 157–189.
- [111] Finkel F., Gomez-Ullate D., Gonzalez-Lopez A., Rodriguez M.A., Zhdanov R., A survey of quasi-exactly solvable and spin Calogero–Sutherland models // CRM Proceedings and Lecture Notes. — 2004. — **37**. — P. 173–185.
- [112] Черніга Р.М. Нові точні розв’язки та їхні властивості одного нелінійного рівняння математичної біології // Укр. мат. журн. — 2001. — Т. 53. — С. 1409–1421.
- [113] Cherniha R., Dutka V. Exact and numerical solutions of the generalized Fisher equation // Rept. Math. Phys. — 2001. — Vol. 47. — P. 393–411.
- [114] Черніга Р.М. Точні розв’язки багатовимірною рівняння Шрьодінґера з критичною нелінійністю // Праці Інституту математики НАН України. — 2001. — **36**. — С. 304–315.

- [115] Cherniha R. Nonlinear Galilei-invariant PDEs with infinite-dimensional Lie symmetry // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — Vol. 253. — P. 126–141.
- [116] Cherniha R., Serov M. Nonlinear diffusion-convection systems: Lie and Q -conditional symmetries // Proceedings of Institute of Mathematics, Kyiv. — 2002. — **43**, Part 1. — C. 102–110.
- [117] Cherniha R., King J. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems. II // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — Vol. 36. — P. 405–425.
- [118] Cherniha R., King J. Lie symmetries of nonlinear reaction-diffusion systems with variable diffusivities / Group 24 (15–20 July 2002, Paris). — Bristol: Institute of Physics Conference Series. — 2003. — **173**. — P. 717–720.