Групові
та аналітичні методи
в математичній фізиці

Національна академія наук України
Інститут математики

ПРАЦІ
Інституту математики НАН України

Математика та її застосування

Засновано в 1994 році

Праці Інституту математики НАН України
Математика та її застосування
Том 36

Групові
та аналітичні методи
в математичній фізиці

Київ • 2001

УДК 517.95:517.958:512.816(06)

Праці Інституту математики НАН України. Т. 36: Групові та аналітичні методи в математичній фізиці / Відп. ред.: А.Г. Нікітін. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2001. — 324 с.

Цей том присвячено розвитку і застосуванню групових та аналітичних методів в математичній фізиці і теорії диференціальних рівнянь. Основну увагу приділено дослідженню конкретних лінійних та нелінійних рівнянь і систем рівнянь математичної та теоретичної фізики. Застосовується весь спектр методів та ідей сучасного теоретико-групового аналізу — від класичного підходу С. Лі до використання умовних, нелокальних та дискретних симетрій досліджуваних рівнянь.

Розраховано на наукових працівників, аспірантів, які цікавляться застосуваннями теорії груп і алгебр Лі до диференціальних рівнянь.

This volume is devoted to development and application of group and analytic methods in mathematical physics and theory of differential equations. A majority of papers is focused at investigation of specific linear and nonlinear equations and systems of equations of mathematical and theoretical physics. The whole spectrum of methods and ideas of the modern symmetry analysis is used, i.e., the classical Lie approach and conditional, nonlocal and discrete symmetries as well.

The volume is intended for scientists and post-graduate students interested in applications of Lie groups and algebras to differential equations.

Рецензенти: *М.Я. Барняк, О.С. Парасюк*

Затверджено до друку вченою радою
Інституту математики НАН України
Протокол № 8 від 15.05.2001

ISBN 966–02–2049–9

Зміст

Contents

ПЕРЕДМОВА

Статті, включені в цей том “Праць Інституту математики”, в переважній більшості відносяться до області математичної фізики та теорії диференціальних рівнянь, яку прийнято називати симетрійним або груповим аналізом. Слід відмітити, що в збірнику також є ряд робіт, присвячених аналітичним, асимптотичним і наближеним методам теорії диференціальних рівнянь.

Основну увагу приділено дослідженню конкретних рівнянь та систем рівнянь математичної і теоретичної фізики. Для цього застосовується весь спектр методів та ідей сучасного симетрійного аналізу — від класичного підходу Лі до умовних і нелокальних симетрій.

Низка статтей присвячена розвитку класичного розділу симетрійного аналізу — теорії групової класифікації. Синтез інфінітезимального методу, методів перетворень еквівалентності, дослідження сумісності та класифікації скінченновимірних абстрактних алгебр Лі дав змогу розв’язати багато складних і актуальних класифікаційних задач в наступних класах: галілей-інваріантні еволюційні рівняння високого порядку, багатовимірні нелінійні хвильові рівняння, квазілінійні рівняння гіперболічного типу, системи нелінійних рівнянь Лапласа, системи другого порядку з керуванням та ін.

Збірник також містить статті, які присвячені теорії диференціальних інваріантів. Зокрема, узагальнено теорему Лі про диференціальні інваріанти однопараметричних груп локальних перетворень у просторі багатьох незалежних та залежних змінних. Описано диференціальні інваріанти різних реалізацій конформної алгебри, розширених алгебр Евкліда, алгебри Пуанкаре. Побудовано зображення деяких важливих груп руху і запропоновано нові актуальні моделі для сучасної релятивістської фізики. У ряді робіт групові методи (як класичні, так і некласичні) застосовано до побудови точних роз’язків диференціальних рівнянь математичної фізики.

Ще один напрямок, на якому зосереджена увага авторів збірника, — асимтотичний аналіз, дослідження якісних властивостей нелінійних моделей, оцінка швидкості збіжності ітераційних методів.

Ми сподіваємося, що цей збірник буде корисним для науковців, які цікавляться застованнями теоретико-групових та аналітичних методів до задач математичної фізики.

А.Г. Нікітін

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 12–24

УДК 517.958:530.145.6

Багатопараметричні сім'ї ермітових точно розв'язних матричних моделей Шрьодінгера

А.О. АБРАМЕНКО [†], ***С.В. СПІЧАК*** [‡]

† *Полтавський державний педагогічний університет*

‡ *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: spichak@imath.kiev.ua

Побудовано п'ять багатопараметричних сімей ермітових точно розв'язних матричних одновимірних операторів Шрьодінгера. Для цього використано одне із зображень чотиривимірної алгебри Лі, його інваріантний простір, а також додаткові оператори, які діють в цьому просторі.

Five multi-parameter families of Hermitian exactly solvable matrix Schrödinger operators in one variable was constructed. For this one of the representation of the four-dimensional Lie algebra was used, as well as invariant space under its operators and additional operators which act in this space.

1. Вступ. В останній час багато робіт (див., напр. [1, 2]) було присвячено проблемі побудові точно та квазі-точно розв'язних моделей Шрьодінгера

$$\hat{H}[x]\psi(x) = \left[\partial_x^2 + V(x)\right]\psi(x) = \lambda\psi(x). \tag{1}$$

В роботі [3] знайдено досить широкі класи квазі-точно розв'язних матричних моделей Шрьодінгера (1), які мають Лі-алгебраїчну структуру [4]. Щодо точно розв'язних моделей, то описано лише декілька конкретних прикладів [5, 6]. В даній роботі знайдено багато-параметричні сім'ї таких моделей. При цьому використано підходи, запропоновані в [3]. Нагадаємо коротко деякі основні поняття.

Оператор другого порядку будемо називати *Лі-алгебраїчним*, якщо виконуються такі умови:

- гамільтоніан H є квадратичною формою зі сталими коефіцієнтами операторів першого порядку $Q_1, \ldots, Q_n$, які утворюють алгебру Лі L
$$H[x] = \left(\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk} Q_j Q_k \right); \tag{2}$$
- алгебра L має скінченновимірний інваріантний підпростір $\mathcal{G}$ усього простору зображення. При цьому у випадку точно розв'язних моделей (на відміну від квазі-точно розв'язних) ці підпростори можуть мати яку завгодно розмірність.

Таким чином, якщо гамільтоніан є Лі-алгебраїчним, то після обмежень на простір $\mathcal{G}$ він стає матричним оператором $\mathcal{H}$, власні значення та власні функції якого обчислюються суто алгебраїчним шляхом.

В роботі [7] знайдено зображення чотиривимірних розв'язних алгебр Лі в класі матрично-диференціальних операторів
$$\mathcal{L} = \{Q : \; Q = a(x)\partial_x + A(x)\}, \tag{3}$$
а також відповідні інваріантні простори. Тут $a(x)$ — гладка дійсна функція, $A(x)$ — матриця розмірності 2×2, компоненти якої є гладкими комплекснозначними функціями від x. В даній роботі використано зображення алгебри Лі $L^2_{4,8}$ [7]. Однак, на основі лише операторів вказаних зображень алгебри Лі не вдається побудувати ермітові моделі. Для розв'язання цієї проблеми можна доповнити множину операторів зображення алгебри Лі операторами, які б залишали відповідний простір $\mathcal{G}$ інваріантним. Такий підхід ми вже використовували в [3]. Відмінність пропонованого методу в тому, що множина операторів алгебри L та додаткових операторів не утворюють, на відміну від [3], алгебру. У параграфі 3 регулярним чином описано всі відповідні ермітові точно розв'язні матричні моделі Шрьодінгера.

Як часткові приклади наведемо *Моделі 1, 2*, які мають важливу властивість: відповідні інваріантні простори є гільбертовими, тобто на елементах цих просторів можна ввести скалярний добуток
$$\langle \vec{f_1}(y), \vec{f_2}(y) \rangle = \int \vec{f_1}(y)^{\dagger} \vec{f_2}(y) \, dy,$$
де $\vec{f_1}(y)^{\dagger}$ — ермітове спряження вектора $\vec{f_1}(y)$.

Модель 1. $(\hat{H}(y)+E)\psi(y)=0$, де

$$\hat{H}(y)=\partial_y^2-\left(\sin y+\frac{1}{2}y\cos y\right)\sigma_1+\left(\cos y-\frac{1}{2}y\sin y\right)\sigma_3+\frac{3}{4}.$$

Ця модель відповідає випадку 1 з параграфу 3, де $\alpha_2=\beta_2=\delta_3=\gamma_0=1$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$, а решта коефіцієнтів дорівнює нулю. Інваріантний простір $\mathcal{G}$ має розмірність $2k+3$ і породжується векторами

$$\vec{f}_j=-ie^{-1/4y^2}y^j\exp\left(\frac{i\sigma_2}{2}y\right)\vec{e}_1,\quad \vec{g}_s=ie^{-1/4y^2}y^s\exp\left(\frac{i\sigma_2}{2}y\right)\vec{e}_2,$$

де $j=0,\dots,k+1$, $s=0,\dots,k$, $\vec{e}_1=(1,0)^T$, $\vec{e}_2=(0,1)^T$.

Модель 2.

$$\hat{H}(y)=\partial_y^2-\frac{1}{2}\left[\cos\left(2\ln\left|\frac{y}{2}\right|\right)\sigma_1+\right.$$
$$\left.+\sin\left(2\ln\left|\frac{y}{2}\right|\right)\sigma_3\right]+\frac{5}{4y^2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}y^2.$$

Ця модель відповідає підвипадку 2.1 з параграфу 3, де $\alpha_1=\beta_2=\gamma_0=1$, $\delta_1=\frac{1}{2}$, а решта коєфіцієнтів дорівнюють нулю. Інваріантний простір $\mathcal{G}$ породжується векторами

$$\vec{f}_j=-ie^{-1/8y^2}\left|\frac{y}{2}\right|^{2j+1/2}\exp\left(i\sigma_2\ln\left|\frac{y}{2}\right|\right)\vec{e}_1,$$
$$\vec{g}_s=ie^{-1/8y^2}\left|\frac{y}{2}\right|^{2s+1/2}\exp\left(i\sigma_2\ln\left|\frac{y}{2}\right|\right)\vec{e}_2,$$

де $j=0,\dots,k+1$, $s=0,\dots,k$.

2. Загальний вигляд ермітового точно розв'язного оператора Шрьодінгера для зображення $L^2_{4,8}$ алгебри Лі. В роботі [7] знайдено зображення алгебри Лі $L^2_{4,8}$ з операторами

$$Q_1=A,\qquad Q_2=Ae^{-x},\qquad Q_3=c^x(\partial_x+C),\qquad Q_4=\partial_x,\quad (4)$$

де $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}c&0\\0&c\end{pmatrix}$.

Оператори $Q_1,\dots,Q_4$ з (4) задовольняють комутаційні співвідношення (решта комутаційних співвідношень нульові):

$$[Q_2,Q_3]=Q_1,\qquad [Q_2,Q_4]=Q_2,\qquad [Q_3,Q_4]=-Q_3.$$

Відповідний інваріантний простір має вигляд

$$\begin{aligned}\mathcal{G} = \langle e^{-cx}\vec{e}_1, e^{-(c+1)x}\vec{e}_1, \ldots, e^{-(c+k+1)x}\vec{e}_1\rangle \\ \oplus \langle e^{-cx}\vec{e}_2, e^{-(c+1)x}\vec{e}_2, \ldots, e^{-(c+k)x}\vec{e}_2\rangle,\end{aligned} \tag{5}$$

де k — довільне натуральне число.

Оскільки в операторах (4) всі матриці верхньотрикутні, то для побудови ермітового гамільтоніана H природно було б доповнити множину операторів (4) новими операторами з нижньотрикутними матрицями. Причому ці оператори повинні залишати простір (5) інваріантним. Неважко переконатися, що в класі операторів (3), де $a(x)$ може бути матрицею 2×2, всі такі оператори мають вигляд

$$\begin{aligned}&R_1 = S_0, \quad R_2 = S_+ e^x \partial_x, \quad R_3 = S_+ \partial_x, \quad R_4 = S_0 e^x \partial_x, \\ &R_5 = S_0 \partial_x, \quad R_6 = S_+ e^{-x} \partial_x, \quad R_7 = S_- e^x \partial_x,\end{aligned} \tag{6}$$

де $S_0 = \frac{\sigma_3}{2}$, $S_\pm = \frac{i\sigma_2 \pm \sigma_1}{2}$, σ_i $(i = 1, 2, 3)$ — матриці Паулі 2×2 , а саме

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо основні етапи алгоритма побудови точно розв'язного оператора Шрьодінгера [3]. Загальна форма точно розв'язної моделі в рамках нашого підходу має вигляд

$$H[x] = \xi(x)\partial_x^2 + B(x)\partial_x + C(x), \tag{7}$$

де $\xi(x)$ — деяка дійсна функція, $B(x)$, $C(x)$ — матричні функції 2×2. Причому необхідно розглянути лише ті незалежні білінійні форми операторів (4), (6), в яких коефіцієнти при похідній другого порядку ∂_x^2 є дійсними скалярними функціями.

Нехай $U(x)$ — невироджена матрична функція, яка задовольняє системі звичайних диференціальних рівнянь

$$U'(x) = \frac{1}{2\xi(x)} \left(\frac{\xi'(x)}{2} - B(x) \right) U(x), \tag{8}$$

а функцію $z(x)$ визначено співвідношенням

$$z(x) = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{\xi(x)}}. \tag{9}$$

Виявляється, що заміна

$$
\begin{aligned}
&x \to y = z(x),\\
&H[x] \to \hat{H}[y] = \hat{U}^{-1}(y)H[z^{-1}(y)]\hat{U}(y),
\end{aligned}
$$

де z^{-1} — обернена до z функція, $\hat{U}(y) = U(z^{-1}(y))$, приводить гамільтоніан (7) до стандартного вигляду оператора Шрьодінгера

$$
\hat{H}[y] = \partial_y^2 + V(y) \tag{10}
$$

з

$$
\begin{aligned}
V(y) = \Bigg\{ &U^{-1}(x)\left[-\frac{1}{4\xi}B^2(x) - \frac{1}{2}B'(x) + \frac{\xi'}{2\xi}B(x) + C(x)\right]U(x)+\\
&+\frac{\xi''}{4} - \frac{3\xi'^2}{16\xi}\Bigg\}\Bigg|_{x=z^{-1}(y)}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Тут запис $W(x)|_{x=z^{-1}(y)}$ означає, що необхідно виконати заміну $x \to z^{-1}(y)$ у виразі $W(x)$. Зауважимо, що в силу історичних причин в моделі (1) для позначення незалежної зміної використано x, а не y як в (10).

Легко показати, що за допомогою заміни $U(x) = e^{-cx}$ можна позбутися параметра c в операторах (4), а також в базисних елементах (5), які позначимо через $\vec{b}_1(x), \ldots, \vec{b}_{2k+3}(x)$. Далі, перетворений інваріантний простір матиме вигляд

$$
\mathcal{G} = \langle \hat{U}^{-1}(y)\vec{b}_1(z^{-1}(y)), \ldots, \hat{U}^{-1}(y)\vec{b}_{2k+3}(z^{-1}(y))\rangle,
$$

де $\hat{U}(y) = U(x)|_{x=z^{-1}}$ — матриця з (8).

Оскільки метою даної роботи є побудова ермітових моделей, то необхідно, щоб рівняння (8) розв'язувалося в явному вигляді. Отже, виберемо з усіх лінійно незалежних квадратичних форм операторів (4), (6) такі, при яких матриця $B(x)$ відповідного гамільтоніана (7) має вигляд

$$
B(x) = g(x) + \sum_{i=1}^{3} \tilde{\varphi}_i \sigma_i h(x) = g(x) + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma} h(x), \tag{12}
$$

де $g(x)$, $h(x)$ — комплекснозначні скалярні функції, $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\varphi_1, i\varphi_2, \varphi_3)$ — комплекснозначні сталі, які залежать від параметрів α_{ij} (2),

$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (множник i перед довільним параметром φ_2 введено для зручності).

Всі можливі лінійно незалежні квадратичні форми операторів (4), (6) в класі операторів (7) наведено нижче

$$
\begin{aligned}
&Q_4^2 = \partial_x^2, \quad Q_3Q_4 = e^x\partial_x^2, \quad Q_3^2 = e^{2x}(\partial_x^2 + \partial_x),\\
&Q_3 = e^x\partial_x, \quad \tilde{R}_2 = R_2 - R_7 = Q_1Q_3 - R_7 = \sigma_1 e^x\partial_x,\\
&\tilde{R}_7 = R_2 + R_7 = Q_1Q_3 + R_7 = i\sigma_2 e^x\partial_x, \ \ 2R_4 = 2R_1Q_3 = \sigma_3 e^x\partial_x,\\
&Q_4 = \partial_x, \quad 2R_3 = 2Q_1Q_4 = (\sigma_1 + i\sigma_2)\partial_x, \quad 2R_5 = \sigma_3\partial_x,\\
&2R_6 = (\sigma_1 + i\sigma_2)e^{-x}\partial_x, \quad 2Q_1 = \sigma_1 + i\sigma_2, \quad 2R_1 = \sigma_3,\\
&2Q_2 = (\sigma_1 + i\sigma_2)c^{-x}.
\end{aligned}
$$

Відповідний гамільтоніан H (2), (7) має вигляд

$$
\begin{aligned}
H &= \alpha_0 Q_4^2 + \alpha_1 Q_3Q_4 + \alpha_2 Q_3^2 + \beta_0 Q_3 + \beta_1\tilde{R}_2 + \beta_2\tilde{R}_7 + 2\beta_3 R_4 +\\
&+\gamma_0 Q_4 + 2\gamma_1 R_3 + 2\gamma_3 R_5 + 2\kappa R_6 + 2\delta_1 Q_1 + 2\delta_3 R_1 + 2\varepsilon Q_2 =\\
&= [\alpha_0 + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x}]\partial_x^2 + [\alpha_2 e^{2x} + \beta_0 e^x + \tilde{\beta}_a\sigma^a e^x + \gamma_0 +\\
&+\gamma_1(\sigma_1 + i\sigma_2) + \gamma_3\sigma_3 + \kappa(\sigma_1 + i\sigma_2)e^{-x}]\partial_x + \delta_1(\sigma_1 + i\sigma_2) +\\
&+\delta_3\sigma_3 + \varepsilon(\sigma_1 + i\sigma_2)e^{-x} = \xi(x)\partial_x^2 + [g(x) + \tilde{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\sigma} e^x + \tilde{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{\sigma} +\\
&+\tilde{\boldsymbol{\kappa}}\boldsymbol{\sigma} e^{-x}]\partial_x + \tilde{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma} e^{-x},
\end{aligned} \tag{13}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&\xi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x}, \quad g(x) = \gamma_0 + \beta_0 e^x + \alpha_2 e^{2x},\\
&\tilde{\beta}_1 = \beta_1, \quad \tilde{\beta}_2 = i\beta_2, \quad \tilde{\beta}_3 = \beta_3, \quad \tilde{\gamma}_1 = \gamma_1, \quad \tilde{\gamma}_2 = i\gamma_1,\\
&\tilde{\gamma}_3 = \gamma_3, \quad \tilde{\kappa}_1 = \kappa, \quad \tilde{\kappa}_2 = i\kappa, \quad \tilde{\kappa}_3 = 0, \quad \tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = i\varepsilon,\\
&\tilde{\varepsilon}_3 = 0, \quad \tilde{\delta}_1 = \delta_1, \ \tilde{\delta}_2 = i\delta_1, \ \tilde{\delta}_3 = \delta_3.
\end{aligned} \tag{14}
$$

Матриця $B(x)$ гамільтоніана (7), (13) матиме вигляд (12) в одному з чотирьох таких випадків:

$$
\begin{aligned}
&1. \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}} \neq \mathbf{0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \lambda\tilde{\boldsymbol{\beta}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mu\tilde{\boldsymbol{\beta}};\\
&2. \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \neq \mathbf{0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mu\tilde{\boldsymbol{\gamma}},\\
&3. \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0}, \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}} \neq \mathbf{0};\\
&4. \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}} = \mathbf{0},
\end{aligned} \tag{15}
$$

де λ, μ — деякі сталі. Тоді гамільтоніан (13) можна записати так:

$$
\begin{aligned}
&H[x] = \xi(x)\partial_x^2 + [g(x) + h(x)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}]\partial_x + \tilde{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\sigma} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma} e^{-x},\\
&h = \omega e^x + \lambda + \mu e^{-x},
\end{aligned} \tag{16}
$$

причому в наведених випадках (15) параметри $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = (\varphi_1, i\varphi_2, \varphi_3)$, ω, λ, μ приймають значення:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \ \omega = 1;\\
&2) \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \omega = 0, \quad \lambda = 1;\\
&3) \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\kappa}}, \quad \omega = 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu = 1;\\
&4) \quad h = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (8) матиме вигляд

$$U(x) = \xi^{1/4}(x) \exp\left[-\frac{1}{2}\int \frac{g(x)}{\xi(x)}dx\right] \exp\left[\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}}{2}\theta(x)dx\right]\Lambda, \tag{18}$$

де $\theta(x) = -\int \frac{h(x)}{\xi(x)}dx$, Λ — довільна невироджена матриця 2×2.

З урахуванням формули Хаусдорфа–Кемпбела потенціал (11) прийме вигляд

$$\begin{aligned}
V(y) = \Lambda^{-1} \Bigg\{ &\frac{1}{16\xi}\left[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\omega^2\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2)e^{2x} + \right.\\
&+\left(4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\omega\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2\right)e^x -\\
&\left.-4\left(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 + 2\mu\omega\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 + \gamma_0^2\right) - 8\mu\lambda\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 e^{-x} - 4\mu^2\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2 e^{-2x}\right] +\\
&+\frac{1}{2\xi}\left[\left(\alpha_2\lambda - \beta_0\omega + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right)e^{2x} + \left(2\alpha_2\mu + \alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \right.\right.\\
&\left.-\gamma_0\omega - \alpha_0\omega + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2} + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right)e^x + 2\alpha_1\mu - \beta_0\mu - \gamma_0\lambda +\\
&\left.+2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2} + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2} + \left(\alpha_0\mu - \gamma_0\mu + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right)e^{-x}\right]\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma} +\\
&+\left(\tilde{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}\right)\operatorname{ch}\left(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right) + \left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{\sigma}\right)e^{-x}\times\\
&\times\operatorname{ch}\left(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right) + \frac{i([\tilde{\boldsymbol{\delta}}\times\tilde{\boldsymbol{\varphi}}],\boldsymbol{\sigma})}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}}\operatorname{sh}\left(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right) +\\
&+\frac{i([\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\times\tilde{\boldsymbol{\varphi}}],\boldsymbol{\sigma})}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}}e^{-x}\operatorname{sh}\left(\theta(x)\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^2}\right)\Bigg\}\Lambda\Bigg|_{x=z^{-1}(y)}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Таким чином, одержано оператор Шрьодінгера (10).

3. Сім'я ермітових потенціалів (19). Нижче описано повну багатопараметричну сім'ю потенціалів (19), які зводяться до ермітових. Зауважимо, що кожен з них має структуру

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \sum_{i=1}^{5} v_i(y)\Lambda^{-1}\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}\Lambda + v_0(y), \tag{20}$$

причому v_i — лінійно незалежні функції, $\mathbf{a}^{(i)} = \left(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}\right)$ — комплекснозначні сталі вектори, компоненти яких залежать від параметрів α_i, $\tilde{\varphi}_i$, ε_i, δ_i з формул (14), (17). Для того, щоб потенціал (20) був ермітовим, необхідно і достатньо, щоб матриці $\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}$ одночасно зводились до ермітових за допомогою деякого перетворення Λ. Умови такого зведення наведено в лемі нижче (доведення див. в [3]), з якої випливають необхідні і достатні умови, що накладають на параметри (14). Явні формули для знаходження перетворення Λ буде наведено нижче.

Лема. *Нехай* $\mathbf{a}^{(i)} = \left(a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)}\right)$ *— ненульові комплекснозначні вектори. Тоді справедливі такі твердження:*

(i) матриця $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}$ *зводиться до ермітової за допомогою перетворення* $A \to \Lambda^{-1}A\Lambda$ *тоді і лише тоді, коли* $\left(\mathbf{a}^{(1)}\right)^2 > 0$ *(зокрема, це означає, що* $\left(\mathbf{a}^{(1)}\right)^2 \in \mathbb{R}$*).*

(ii) матриці $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{a}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}$, *де* $\mathbf{a}^{(2)} \neq \lambda\mathbf{a}^{(1)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, *зводяться одночасно до ермітових тоді і лише тоді, коли*

$$\left(\mathbf{a}^{(1)}\right)^2 > 0, \quad \left(\mathbf{a}^{(2)}\right)^2 > 0, \quad \left[\mathbf{a}^{(1)} \times \mathbf{a}^{(2)}\right]^2 > 0, \quad \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)} \in \mathbb{R}.$$

(iii) матриці $\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{a}^{(2)}\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{a}^{(i)}\boldsymbol{\sigma}(i \neq 1, 2)$, *де* $\mathbf{a}^{(2)} \neq \lambda\mathbf{a}^{(1)}$, $\mathbf{a}^{(i)} \neq \mu\mathbf{a}^{(2)}$, λ, $\mu \in \mathbb{R}$, *зводяться одночасно до ермітових тоді і лише тоді, коли*

$$\left(\mathbf{a}^{(1)}\right)^2 > 0, \quad \left(\mathbf{a}^{(2)}\right)^2 > 0, \quad \left[\mathbf{a}^{(1)} \times \mathbf{a}^{(2)}\right]^2 > 0, \quad \mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(2)} \in \mathbb{R}.$$

$$\left\{\mathbf{a}^{(1)}\mathbf{a}^{(i)}, \quad \mathbf{a}^{(2)}\mathbf{a}^{(i)}, \quad \left(\left[\mathbf{a}^{(1)} \times \mathbf{a}^{(2)}\right]\mathbf{a}^{(i)}\right)\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Тут через $\left[\mathbf{a}^{(i)} \times \mathbf{a}^{(j)}\right]$ та $\mathbf{a}^{(i)}\mathbf{a}^{(j)}$ позначено векторний та скалярний добутки відповідно.

Перейдемо безпосередньо до відбору операторів Шрьодінгера (10), що зводяться до ермітових. В процесі відбору в залежності від параметрів (14) виникають різні класи таких операторів з ермітовою матрицею $V(y)$. Це, в свою чергу, дає повний опис точно-розв'язних матричних моделей (1), (16), які можна звести до ермітових матричних операторів Шрьодінгера. Враховуючи лему, нижче наводимо остаточні результати: умови на вибір параметрів, явний вигляд точно розв'язних ермітових операторів Шрьодінгера, а також відповідні перетворення Λ. Після цього, в якості прикладу, докладно зупинимось на виведенні відповідних формул випадку 1. Подальший аналіз показує, що ермітові моделі отримуються тількі тоді, коли в (15), (17) $\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \tilde{\boldsymbol{\beta}}$, $\omega = 1$, $\mu = 0$.

Випадок 1.

$$
\begin{gathered}
[\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 < 0,\ \varepsilon \neq 0,\ \beta_1 \neq \beta_2] \wedge [\{\lambda, \gamma_0, \beta_0, \varepsilon(\beta_1 - \beta_2),\\
\delta_1(\beta_1 - \beta_2) + \beta_3\delta_3, \delta_3\} \subset \mathbb{R}] \wedge \left[\mu = \alpha_0 = \alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = \right.\\
\left. -\gamma_0\lambda + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = \alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = 0\right].
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{H}[y] = \partial_y^2 + {}& \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x)}[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^{2x} + \\
&+(8\alpha_1\gamma_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}})e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^{\mathbf{2}} + \gamma_0^2)] + \\
&+\left(P\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} + \Omega\right) + \right.\\
&\left.+\frac{\varepsilon(\beta_1 - \beta_2)}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}e^{-x}\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\right)\sigma_1 + \\
&+\left(P\sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} + \Omega\right) + \right.\\
&\left.\left.+\frac{\varepsilon(\beta_1 - \beta_2)}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}e^{-x}\sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\right)\sigma_3\right|_{x = z^{-1}(y)},
\end{aligned}
$$

де

$$
P = \sqrt{\delta_3^2 - \frac{(\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}})^2}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}, \quad \cos\Omega = \frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{P\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}, \quad \sin\Omega = \frac{\delta_3}{P},
$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{\sigma}\right) \cdot \exp(\nu\sigma_3), \quad e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Тут і далі позначаємо через $z^{-1}(y)$ функцію обернену до (9), $\theta(x)$ — функція, яка визначається формулою (18). Запис $[A] \wedge [B]$ означає кон'юкцію двох тверджень A та B.

Випадок 2.

$$\left[\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 < 0,\ \varepsilon = 0,\ \beta_1 \neq \beta_2, (\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}})^2 - \tilde{\boldsymbol{\delta}}^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 > 0\right] \wedge [\lambda \in \mathbb{R}].$$

Підвипадок 2.1.

$$\left[\delta_3 = \alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = \alpha_1\lambda - \beta_0 - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = \right.$$

$$\left. = -\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2} = 0\right] \wedge [\gamma_0, \beta_0 \in \mathbb{R}],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^{2x} +$$

$$+(4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 + \gamma_0^2)] +$$

$$\left. + \frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\sigma_1 + \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\sigma_3\right]\right|_{x=z^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}\right)\exp(\nu\sigma_3), \quad e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Підвипадок 2.2.

$$\left[\delta_3 = 0,\ \gamma_0 = -\alpha_0,\ \lambda = -2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right] \wedge [\gamma_0,\ i\beta_0 \in \mathbb{R}],$$

$$\hat{H}[y] = \partial_y^2 + \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^{2x} +$$

$$+(4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 + \gamma_0^2)] +$$

$$+\frac{i\lambda\beta_0}{2(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\sigma_2 e^x +$$

$$\left. + \frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\sigma_1 + \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\sigma_3\right]\right|_{x=z^{-1}(y)},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp\left(\frac{\beta_3}{2\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}\right)\exp(\nu\sigma_3), \quad e^{2\nu} = \frac{\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Підвипадок 2.3.

$$\begin{gathered}
\left[\delta_1 = 0, \beta_1^2 - \beta_2^2 \neq 0\right] \wedge \\
\wedge \left[\left\{ i\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right),\ i\left(\alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right),\right.\right. \\
\left.\left. i\left(-\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right),\ 2\alpha_2\gamma_0 - \beta_0^2,\ \alpha_1\gamma_0 - \alpha_0\beta_0 - \gamma_0\beta_0,\ \gamma_0^2 \right\} \subset \mathbb{R}\right],
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}[y] = \partial_y^2 &+ \frac{1}{16(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}[(\alpha_1^2 + 8\alpha_2\gamma_0 - 4\beta_0^2 - 4\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^{2x} + \\
&+ (4\alpha_0\alpha_1 + 8\alpha_1\gamma_0 - 8\alpha_0\beta_0 - 8\gamma_0\beta_0 - 8\lambda\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2)e^x - 4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 + \gamma_0^2)] + \\
&+ \frac{1}{2(\alpha_2 e^{2x} + \alpha_1 e^x + \alpha_0)}\left[\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)e^{2x} + \right. \\
&+ \left(\alpha_1\lambda - \beta_0\lambda - \gamma_0 - \alpha_0 + 2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)e^x + \\
&+ \left.\left(-\gamma_0\lambda + 2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\right] i\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\sigma_2 + \\
&+ \frac{\delta_3\sqrt{\beta_1^2 - \beta_2^2}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\sigma_3 - \right. \\
&\left.\left. - \sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right)\sigma_1\right]\right|_{x = z^{-1}(y)},
\end{aligned}$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2 = \exp(\nu\sigma_3)\exp(\chi\sigma_1),$$

$$e^{2\nu} = \sqrt{\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1}}, \quad e^{2\chi} = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2} - \beta_3}{\sqrt{\beta_2^2 - \beta_1^2} + \beta_3}}.$$

Підвипадок 2.4.

$$[\delta_1, \delta_3 \neq 0] \wedge \left[\left\{ i\left(\alpha_2\lambda - \beta_0 + 2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2}\right),\right.\right.$$

$$i\left(\alpha_1\lambda-\beta_0\lambda-\gamma_0-\alpha_0+2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right), i\left(-\gamma_0\lambda+2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right),$$

$$\left.\left. 2\alpha_2\gamma_0-\beta_0^2,\ \alpha_1\gamma_0-\alpha_0\beta_0-\gamma_0\beta_0,\gamma_0^2\right\}\subset\mathbb{R}\right],$$

$$\hat{H}[y]=\partial_y^2+\frac{1}{16(\alpha_2e^{2x}+\alpha_1e^x+\alpha_0)}[(\alpha_1^2+8\alpha_2\gamma_0-4\beta_0^2-4\tilde{\boldsymbol\beta}^2)e^{2x}+$$

$$+(4\alpha_0\alpha_1+8\alpha_1\gamma_0-8\alpha_0\beta_0-8\gamma_0\beta_0-8\lambda\tilde{\boldsymbol\beta}^2)e^x-4(\lambda^2\tilde{\boldsymbol\beta}^2+\gamma_0^2)]+$$

$$+\frac{1}{2(\alpha_2e^{2x}+\alpha_1e^x+\alpha_0)}\left[\left(\alpha_2\lambda-\beta_0+2\alpha_2\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)e^{2x}+\left(\alpha_1\lambda-\beta_0\lambda-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\gamma_0-\alpha_0+2\alpha_1\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)e^x+\left(-\gamma_0\lambda+2\alpha_0\frac{\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta}}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\right]i\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\sigma_2+$$

$$+\sqrt{\frac{\tilde{\boldsymbol\delta}^2\tilde{\boldsymbol\beta}^2-(\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta})^2}{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}}\left[\cos\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_1-\right.$$

$$\left.\left.-\sin\left(\theta(x)\sqrt{-\tilde{\boldsymbol\beta}^2}\right)\sigma_3\right]\right|_{x=z^{-1}(y)},$$

$$\Lambda=\Lambda_1\cdot\Lambda_2=\exp(\nu\vec{\alpha}\vec{\sigma})\cdot\exp(\chi\sigma_3),\quad \boldsymbol\alpha=\frac{\delta_3\tilde{\boldsymbol\beta}-\beta_3\tilde{\boldsymbol\delta}}{\sqrt{\tilde{\boldsymbol\beta}^2}},$$

$$e^{2\nu\vec{\alpha}^2}=\sqrt{\frac{\delta_1(\beta_1-\beta_2)-\sqrt{\delta_3(\beta_1-\beta_2)[\delta_3(\beta_1+\beta_2)-2\delta_1\beta_3]}}{\delta_1(\beta_1-\beta_2)+\sqrt{\delta_3(\beta_1-\beta_2)[\delta_3(\beta_1+\beta_2)-2\delta_1\beta_3]}}}.$$

Величину χ визначаємо таким чином. При дії перетворення Λ_1 на $\left(\tilde{\boldsymbol\beta}^2\tilde{\boldsymbol\delta}\boldsymbol\sigma-(\tilde{\boldsymbol\beta}\tilde{\boldsymbol\delta})\tilde{\boldsymbol\beta}\boldsymbol\sigma\right)/\tilde{\boldsymbol\beta}^2$ одержуємо деяку матрицю $\boldsymbol{b}\boldsymbol\sigma$. Компоненти вектора $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,0)$ зв'язані з χ таким співвідношенням

$$e^{2\chi}=\sqrt{\frac{ib_1+b_2}{ib_1-b_2}}.$$

В цілому виведення вищевказаних формул для гамільтоніанів $\hat{H}[y]$, які не належать до діагонального класу, дуже громіздка, тому в роботі ми її не приводимо.

[1] Turbiner A.V. Quasi-exactly solvable problems and sl_2 algebra // Commun. Math. Phys. — 1988. — **118**. — P. 467–474.

[2] Ushveridze A.G. Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics. — Bristol: IOP Publishing, 1993.

[3] Spichak S., Zhdanov R. On algebraic classification of Hermitian quasi-exactly solvable matrix Schrödinger operators on line // J. Phys. A: Math. Gen. — 1999. — **32**. — P. 3815–3831.

[4] Zhdanov R.Z. On algebraic classification of quasi-exactly solvable matrix models // J. Phys. A: Math. Gen. — 1997. — **30**. — P. 8761–8770.

[5] Shifman M.A., Turbiner A.V. Quantal problems with partial algebraization of the spectrum // Commun. Math. Phys. — 1989. — **126**. — P. 347–365.

[6] Finkel F., González-López A., Rodríguez M.A. Quasi-exactly solvable spin 1/2 Schrödinger operators // Preprint hep-th/9509057, 1995.

[7] Abramenko A.O. Matrix realizations of four-dimensional Lie algebras and corresponding invariant spaces // Вісник Київського університету, Сер.: фіз.-мат. науки. — 1999. — **3**. — P. 11–17.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 25–31

UDC 517.95

Towards classification of nonlinear evolution equations admitting third-order conditional symmetries

A.Yu. ANDREYTSEV

Kyiv National Taras Shevchenko University

На прикладі нелінійних еволюційних рівнянь другого порядку викладено алгоритм побудови класів рівнянь, що допускають редукцію до систем звичайних диференціальних рівнянь. Класифікацію проведено за умови, що шукана функція задовольняє певному звичайному диференціальному рівнянню третього порядку. Наведено два приклади.

Algorithm enabling us to construct classes of second-order nonlinear evolution equations that can be reduced to systems of ordinary differential equations is suggested. Classification of these equations is performed under condition that a solution to be found satisfies a certain third-order ordinary differential equation. Two examples are given.

1. Introduction. Modeling dynamical processes in physics, chemistry and other fields of science requires solving evolution equations. Provided equations under study are linear, the methodology of constructing exact solutions is worked out quite well. However, in the case of nonlinear equations, there is no general methods for finding their solutions. Each specific equation requires special treatment. Among the most efficient methods for constructing exact solutions of nonlinear evolution equations are those based on their conditional symmetries [1, 2].

A number of papers by Galaktionov are devoted to constructing exact solutions of equations

$$u_t = F(u, u_x, u_{xx}), \tag{1}$$

where $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, with so called quadratic nonlinearities. To this end, technique based on the concept of invariant subspace [3, 4] (that is, of the space of smooth functions invariant with respect to the action of differential operator related to the equation under study) is employed. Some of the Galaktionov's results on reduction of evolution equations with quadratic nonlinearities have been recently recovered using a different technique in [6].

New approach to reduction of nonlinear evolution equations (1) using their higher conditional symmetries has been suggested in [5]. It has been employed to classify broad classes of conditionally invariant evolution equations [7]. Based on the approach in question a novel technique for dimensional reduction of initial-value problems for conditionally invariant evolution equations has been suggested in [8]. Employing this technique we have carried out reduction of a number of initial value problems to Cauchy problems for systems of nonlinear ordinary differential equations (ODEs) [9] (see, also [10]).

In all of the above mentioned papers the right-hand sides of equation (1) are quadratic polynomials or can be transformed to them by a certain change of variables. The purpose of this paper is to classify more general nonlinear evolution equations

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}), \tag{2}$$

which admit reduction to systems of ODEs. To this end we consider equation (2) together with additional condition

$$u_{xxx} = f(t, x, u, u_x, u_{xx}). \tag{3}$$

Equation (3) can be considered as ODE with the parameter t.

Before giving the principal results we introduce the notations to be used throughout the text. The subscripts denote differentiating with respect to the indicated variables, for example, $F_{u_x} = \frac{\partial F}{\partial u_x}$, $F_{uu_x} = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u_x}$. What is more,

$$H = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + f \frac{\partial}{\partial_{u_{xx}}}.$$

2. Classification algorithm for nonlinear evolution equations. Suppose that the function f in (3) is known. Then we need to describe the class of functions F, for which system (2), (3) is compatible. To achieve this goal, we differentiate (2) three times with respect to x, eliminating the derivative u_{xxx} by means of (3). Next, we differentiate (3) with respect to t and eliminate u_t, u_{tx} and u_{txx} by means of equation (2) and its differential consequences. This finally yields

$$F_{xxx} + u_x^3 F_{uuu} + u_{xx}^3 F_{u_x u_x u_x} + f^3 F_{u_{xx} u_{xx} u_{xx}} + 3u_x F_{xxu} +$$
$$+3u_{xx} F_{xxu_x} + 3f F_{xxu_{xx}} + 3u_x^2 F_{xuu} + 3u_x^2 u_{xx} F_{uuu_x} +$$

$$
\begin{aligned}
&+3u_x^2 fF_{uuu_{xx}} + 3u_{xx}^2 F_{xu_xu_x} + 3u_x u_{xx}^2 F_{uu_xu_x} + \\
&+3u_{xx}^2 fF_{u_xu_xu_{xx}} + 3f^2 F_{xu_{xx}u_{xx}} + 3u_x f^2 F_{uu_{xx}u_{xx}} + \\
&+3u_{xx} f^2 F_{u_xu_{xx}u_{xx}} + 6u_x u_{xx} F_{xuu_x} + 6u_x fF_{xuu_{xx}} + \\
&+6u_{xx} fF_{xu_xu_{xx}} + 6u_x u_{xx} fF_{uu_xu_{xx}} + 3u_x u_{xx} F_{uu} + \\
&+3u_{xx} fF_{u_xu_x} + 3fHfF_{u_{xx}u_{xx}} + 3u_{xx} F_{xu} + 3fF_{xu_x} + \\
&+3HfF_{xu_{xx}} + 3\left(u_{xx}^2 + u_x f\right) F_{uu_x} + 3\left(u_{xx} f + u_x Hf\right) F_{uu_{xx}} + \\
&+3\left(f^2 + u_{xx} Hf\right) F_{u_xu_{xx}} + fF_u + HfF_{u_x} + H\left(Hf\right) F_{u_{xx}} = \\
&= f_{u_{xx}} (F_{xx} + u_x^2 F_{uu} + u_{xx}^2 F_{u_xu_x} + f^2 F_{u_{xx}u_{xx}} + 2u_{xx} F_{xu} + \\
&+2fF_{xu_x} + 2HfF_{xu_{xx}} + 2u_x u_{xx} F_{uu_x} + 2u_x fF_{uu_{xx}} + \\
&+2u_{xx} fF_{u_xu_{xx}} + u_{xx} F_u + fF_{u_x} + HfF_{u_{xx}}) + \\
&+f_{u_x} \left(F_x + u_x F_u + u_{xx} F_{u_x} + fF_{u_{xx}}\right) + f_u F + f_t.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Equation (4) is the compatibility condition of system (2), (3). We consider this equation as third order partial differential equation (PDE) for the function F of four independent variables x, u, u_x, u_{xx}. It so happens that PDE (4) is of parabolic type and simplifies drastically when transformed to a canonical form. Following the ideas of [10] we introduce (functionally independent) auxiliary variables $\omega_i = \omega_i(x, u, u_x, u_{xx})$, $i = 1, 2, 3$ and $\eta = \eta\,(x, u, u_x, u_{xx})$ defined by the following relations:

$$
H\omega_i = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{5}
$$

Rewriting (4) in the new variables we get the remarkably simple equation

$$
\begin{aligned}
&(H\eta)^3 F_{\eta\eta\eta} + \left(3H\eta H(H\eta) - f_{u_{xx}}(H\eta)^2\right) F_{\eta\eta} + \\
&\quad +(H(H(H\eta)) - f_{u_{xx}} H(H\eta) - f_{u_x} H\eta) F_\eta - f_u F = f_t,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

since the variables ω_i and t become parametrical.

The general solution of linear equation (6) has the form $F = F^g + F^p$, where F^p is a particular solution of (6) and

$$
F^g = \sum_{i=1}^{3} F_i(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3) g_i(\eta, \omega_1, \omega_2, \omega_3)
$$

is the general solution of the corresponding homogeneous equation.

Notice that H is the total differentiation operator with respect to x, hence taking into account (5) we conclude that functions ω_i are independent of x.

Thus having solved (6) we obtain the explicit form of the function F for which system (2), (3) is compatible. According to the theorem proved in [5] substitution of the Ansatz, which is the general solution of equation (3), into (2), reduces (2) to a system of three ODEs.

3. Some examples. We will illustrate the above algorithm with two examples. Consider equation (2) with the following additional condition:

$$u_{xxx} = au_x, \qquad a \neq 0. \tag{7}$$

Equation (7) considered as ODE has the following independent integrals (solutions of (5)):

$$\omega_1 = au_x^2 - u_{xx}^2, \quad \omega_2 = au - u_{xx},$$
$$\omega_3 = \begin{cases} x - \dfrac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \dfrac{\sqrt{-a}u_x}{\sqrt{u_{xx}^2 - au_x^2}}, & a < 0, \\ x - \dfrac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \sqrt{a}u_x + u_{xx} \right|, & a > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Choosing $\eta = u$ we transform equation (4) to become

$$u_x^3 F_{\eta\eta\eta} + 3u_x u_{xx} F_{\eta\eta} = 0.$$

Dividing the above relation by u_x and expressing u_x, u_{xx} in terms of the transformed variables yield ODE

$$\left(\omega_1 + (a\eta - \omega_2)^2\right) F_{\eta\eta\eta} + 3a\,(a\eta - \omega_2)\, F\eta\eta = 0,$$

whose general solution reads as

$$F = F_1(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3) \sqrt{\omega_1 + (a\eta - \omega_2)^2} + $$
$$+ F_2(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3)\, \eta + F_3(t, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

Returning to the original variables, we have

$$F = F_1 u_x + F_2 u + F_3, \qquad F_i = F_i\left(t, au_x^2 - u_{xx}^2, au - u_{xx}, \omega_3\right), \tag{9}$$

where ω_3 is determined by one of the formulas (8) depending on sign of a.

General solution of equation (7) is of the form

$$u = \begin{cases} \varphi_1(t) \sin \sqrt{-a}x + \varphi_2(t) \cos \sqrt{-a}x + \varphi_3(t), & a < 0, \\ \varphi_1(t) \sinh \sqrt{a}x + \varphi_2(t) \cosh \sqrt{a}x + \varphi_3(t), & a > 0, \end{cases} \tag{10}$$

where φ_1, φ_2, φ_3 are arbitrary differentiable functions.

Thus, inserting Ansätze (10) into the corresponding equations (2), (9) reduces them to systems of ODEs

$$\dot\varphi_1 = \mp\sqrt{\mp a}F_1\varphi_2 + F_2\varphi_1, \qquad \dot\varphi_2 = \sqrt{\mp a}F_1\varphi_1 + F_2\varphi_2,$$
$$\dot\varphi_3 = F_2\varphi_3 + F_3,$$

$$F_i = F_i\left(t, \varphi_1^2+\varphi_2^2, \varphi_3, \arctan\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right), \qquad a<0,$$
$$F_i = F_i\left(t, \varphi_1^2-\varphi_2^2, \varphi_3, \ln|\varphi_1+\varphi_2|\right), \qquad a>0.$$

Here, the upper plus and minus signs correspond to the case $a<0$, while the lower ones correspond to the case $a>0$.

Note that putting $F_1=0$, $F_2=\mu_1$, $F_3=\omega_1-\omega_2^2+\mu_2$ yields the equation, investigated in [3, 6, 7]. Consequently, Galaktionov's Ansätze, obtained in [3] can be applied to reduction and construction of solutions of a wider class of evolution equations.

Suggested technique enables to handle nonlinear additional conditions, as opposed to the approach used in [3, 6]. We will demonstrate this by taking as an example equation (1) with additional condition

$$u_{xxx} = 2\frac{u_{xx}^2}{u_x}. \tag{11}$$

Taking into account that F does not depend on x explicitly we conclude that equation (11) has only two independent integrals

$$\omega_1 = \frac{u_x^2}{u_{xx}}, \qquad \omega_2 = u - \frac{u_x^2\ln u_x}{u_{xx}}.$$

As in the first example, we put $\eta=u$. In this case equation (4) contain no derivatives of F with respect to x and after the change of variables takes the form

$$F_{\eta\eta\eta} - \frac{1}{\omega_1}F_{\eta\eta} = 0.$$

System (1), (11) is compatible if

$$\begin{aligned} &F = F_1\exp\left(\frac{uu_{xx}}{u_x^2}\right) + F_2u + F_3,\\ &F_i = F_i\left(\frac{u_x^2}{u_{xx}}; u - \frac{u_x^2\ln u_x}{u_{xx}}\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Substitution of ansatz

$$u = \varphi_1(t)\ln(x + \varphi_2(t)) + \varphi_3,$$

which is a solution of equation (11), into equation (1), (12) reduces the latter to system of ODEs

$$\dot{\varphi}_1 = F_2\varphi_1, \qquad \dot{\varphi}_2 = F_1\frac{1}{\varphi_1}\exp\left(-\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\right),$$
$$\dot{\varphi}_3 = F_2\varphi_3 + F_3, \qquad F_i = F_i(-\varphi_1, \varphi_1\ln\varphi_1 + \varphi_3).$$

4. Conclusion. We emphasize that the described approach may be easily generalized for classification of higher order evolution equations. Let us, for example, apply it to equation

$$u_t = F(t, x, u, u_1, \dots, u_n) \tag{13}$$

with additional condition

$$u_{n+1} = f(t, x, u, u_1, \dots, u_n). \tag{14}$$

Here $u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}$. Compatibility condition is PDE, which after being written in the new variables ω_i, $i = \overline{1, n}$, η, where $H\omega_i = 0$, $H\eta = 1$ and

$$H = \frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + \dots + f\frac{\partial}{\partial u_n},$$

reduces to the form

$$\frac{\partial^n F}{\partial\eta^n} - f_{u_{n-1}}\frac{\partial^{n-1}F}{\partial\eta^{n-1}} - \dots - f_{u_1}\frac{\partial F}{\partial\eta} - f_u F = f_t.$$

Reduction of initial-value problems for equations obtained in the present paper can be performed within the approach developed in [8]–[10].

Some difficulties arise while applying our approach to the case when (14) has the order higher than $n+1$. Given this form of (14), a canonical form of the compatibility condition is no longer ODE with parameter but PDE. This case requires separate study. We note also that an extension of above approach to the case of multi-dimensional evolution equations is a promising line of research.

[1] Fushchych W., Zhdanov R. Anti-reduction of the nonlinear wave equation // Proc. Acad. of Sci. Ukraine. — 1993. — № 11. — P. 37 –40

[2] Fushchych W., Zhdanov R., Conditional symmetry and anti-reduction of nonlinear heat equation // Proc. Acad. of Sci. Ukraine. — 1994. — № 5. — P. 40–44.

[3] Galaktionov V. Invariant subspaces and new explicit solution to evolution equations with quadratic nonlinearities // Proc. of Royal Society of Edinburgh. — 1995. — **125A**. — P. 225–246.

[4] Galaktionov V. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications // Diff. and Int. Equations. — 1990. — **3**, № 5. — P. 863–874.

[5] Zhdanov R. Conditional Lie–Backlund symmetry and reduction of evolution equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1995. — **28**, № 13 — P. 3841–3850.

[6] Cherniha R. New non-Lie ansatze and exact solution of nonlinear reaction-diffusion-convection equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — **31**. — P. 8179–8198.

[7] Andreytsev A. On classification and reduction of conditionally invariant nonlinear evolution equations // Mathematical modeling in education and science. — Sankt–Petersburg, 2000. — P. 16–22.

[8] Zhdanov R., Higher conditional symmetries and reduction of initial value problems // Proceedings of the Institute of Mathematics. — 2000. — **30**. — Part 1. — 255–274.

[9] Zhdanov R., Andreytsev A. Non-classical reductions of initial-value problems for a class of nonlinear evolution equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — **33**. — P. 5763–5781.

[10] Basarab-Howath P., Zhdanov R. Initial-value problems for evolutionary partial differential equations and higher-order conditional symmetries // J. Math. Phys. — 2001. — **42**. — P. 376—389.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 32–39

УДК 517.95

Про нові точні розв'язки нелінійного рівняння Даламбера у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{R}_{2,2}$

А. БАРАННИК [†1], **Ю. МОСКАЛЕНКО** [†2], **І. ЮРИК** [†3]

[†1] *Педагогічний університет, Слупськ, Польща*

[†2] *Педагогічний університет, Полтава*

[†3] *Український державний університет харчових технологій, Київ*

Побудовано нові точні розв'язки нелінійного рівняння Даламбера в просторі $\mathbb{R}_{2,2}$, які містять довільні функції.

New classes of solutions with arbitrary functions for nonlinear d'Alembert equation in space $\mathbb{R}_{2,2}$ are constructed.

Розглянемо нелінійне рівняння Даламбера у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{R}_{2,2}$

$$\Box u + \lambda u^k = 0, \tag{1}$$

де $\Box u = u_{11} + u_{22} - u_{33} - u_{44}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. Рівняння (1) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(2,2)$ [1], яка реалізується такими операторами:

$$P_\alpha = \partial_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} = g^{\alpha\nu} x_\nu \partial_\beta - g^{\beta\nu} x_\nu \partial_\alpha, \quad D = -x^\alpha \partial_\alpha + \frac{2u}{k-1}\partial_u,$$

де $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, $\partial_u \equiv \frac{\partial}{\partial u}$, $g_{11} = g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$, якщо $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta, \nu = 1, 2, 3, 4$. В [2, 3] з використанням підалгебр рангу 3 алгебри $A\tilde{P}(2,2)$ побудовано симетрійні анзаци, які редукують рівняння (1) до звичайних диференціальних рівнянь. За розв'язками редукованих рівнянь знайдені деякі багатопараметричні класи точних розв'язків рівняння (1). Методом, запропонованим в [4–6], в роботі [7] побудовано більш загальні класи точних розв'язків рівняння (1), що містять довільні функції.

Метою даної статті є побудова нових широких класів точних розв'язків рівняння Даламбера, що містять довільні функції. Розглянемо симетрійний анзац $u = u(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, де $\omega_1 = x_1 - x_4$, $\omega_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$, $\omega_3 = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)^{-1}$. Анзац редукує рівняння (1) до двовимірного рівняння

$$4\omega_1 u_{12} + 4\omega_2 u_{22} + 8u_2 + \lambda u^k = 0. \tag{2}$$

Дослідимо симетрію рівняння (2).

Теорема 1. *Максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності рівняння (2) при $k \neq 2$ є нескінченновимірна алгебра Лі $A_\infty(4)$, яка породжується операторами $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \beta M$, де*

$$X_1 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - \frac{1}{k-1} u \frac{\partial}{\partial u}, \qquad X_3 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2},$$

$$X_2 = \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - \frac{1}{k-1} u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$M = \omega_1^{k-1} \left(\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - u \frac{\partial}{\partial u} \right),$$

а α_1, α_2, α_3, β — довільні гладкі функції від змінної ω_3.

Відзначимо, що X_1, X_2 і X_3 є операторами алгебри інваріантності рівняння (1), але записаними в нових змінних. Оператор M не є оператором симетрії рівняння (1).

Теорема 2. *Максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності рівняння (2) при $k = 2$ є нескінченновимірна алгебра Лі $B_\infty(4)$, яка породжується операторами $\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3 + \beta S$, де*

$$Z_1 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - u \frac{\partial}{\partial u}, \qquad Z_3 = \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2},$$

$$Z_2 = \omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - u \frac{\partial}{\partial u},$$

$$S = \omega_1 \ln \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} + \omega_2 \ln \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_2} - (\ln \omega_1 + 1) u \frac{\partial}{\partial u},$$

де α_1, α_2, α_3, β — довільні гладкі функції від змінної ω_3.

Оператор S не є оператором симетрії рівняння (1).

В залежності від значення параметра k розглянемо два випадки.

I. *Випадок* $k \neq 2$. Виділимо в алгебрі $A_\infty(4)$ скінченновимірну підалгебру $A(4)$, яка породжується операторами X_1, X_2, X_3, M і проведемо редукцію рівняння (2) за одновимірними підалгебрами алгебри $A(4)$. Розв'язок рівняння (2), що не залежить від змінної ω_2, є нульовим, а тому ми повинні виключити з розгляду одновимірну підалгебру $\langle X_3\rangle$. З врахуванням цього зауваження повний список не спряжених відносно внутрішніх автоморфізмів одновимірних підалгебр алгебри $A(4)$ і відповідних їм анзаців наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

№ п/п	Алгебра	Інваріантна змінна	Анзац
1	$\langle X_1+\alpha X_2\rangle$ $(\alpha\in\mathbb{R})$	$\omega=\omega_2\omega_1^{-\alpha-1}$	$u=\omega_1^{\frac{\alpha+1}{1-k}}\varphi(\omega)$
2	$\langle X_2\rangle$	$\omega=\omega_1$	$u=\omega_3^{\frac{1}{1-k}}\varphi(\omega)$
3	$\langle X_1+\varepsilon X_3\rangle$ $(\varepsilon=\pm1)$	$\omega=\dfrac{\omega_2}{\omega_1}-\varepsilon\ln\omega_1$	$u=\omega_1^{\frac{1}{1-k}}\varphi(\omega)$
4	$\langle M+\delta X_2\rangle$ $(\delta=0;\pm1)$	$\omega=\dfrac{\delta}{k-2}\omega_1^{-(k-2)}+\ln\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$	$u=\left(\omega_1^{k-2}\omega_2\right)^{\frac{1}{1-k}}\varphi(\omega)$
5	$\langle M+\varepsilon X_3\rangle$ $(\varepsilon=\pm1)$	$\omega=\dfrac{\omega_2}{\omega_1}+\dfrac{\varepsilon}{k-2}\omega_1^{-(k-2)}$	$u=\omega_1^{-1}\varphi(\omega)$

Анзаци 1–5, вказані в таблиці 1, редукують рівняння (2) до звичайних диференціальних рівнянь з невідомою функцією $\varphi=\varphi(\omega)$:

$$\begin{aligned}
&1^\circ\qquad -4\alpha\omega\ddot\varphi+\frac{4(k-2-\alpha k)}{k-1}\varphi+\lambda\varphi^k=0;\\
&2^\circ\qquad -\frac{4\omega}{k-1}\ddot\varphi-\frac{4(k-2)}{(k-1)^2}\varphi+\lambda\varphi^k=0;\\
&3^\circ\qquad -4\varepsilon\ddot\varphi+\frac{4(k-2)}{k-1}\varphi+\lambda\varphi^k=0;\\
&4^\circ\qquad -4\delta\ddot\varphi+\frac{4\delta}{k-1}\varphi+\lambda\varphi^k=0;\\
&5^\circ\qquad -4\varepsilon\ddot\varphi+\lambda\varphi^k=0.
\end{aligned}\tag{3}$$

Дослідимо редуковані рівняння. Якщо в рівнянні 1° (3) покласти

$\alpha = \frac{(k-2)(k-1)}{2}$, то воно набуває вигляду

$$-2(k-2)(k+1)\omega\ddot{\varphi} - 2(k-2)(k+2)\varphi + \lambda\varphi^k = 0.$$

Дане рівняння має розв'язок

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\left(\omega^{\frac{1}{2}} + C\omega^{\frac{k-1}{2(k+1)}}\right)^2.$$

Йому відповідає такий розв'язок рівняння (1):

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\left(\omega_2^{\frac{1}{2}} + C\omega_1^{\frac{k(k-1)}{2(k+1)}}\omega_2^{\frac{k-1}{2(k+1)}}\right)^2. \tag{4}$$

Рівняння 1° (3) при $\alpha = 0$ має розв'язок

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}(\omega + C).$$

В результаті отримуємо такий розв'язок рівняння (1):

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}(\omega_2 + C\omega_1). \tag{5}$$

Якщо $\alpha = \frac{2(k-2)}{k+1}$, то рівняння 1° (3) набуває вигляду

$$-\frac{8(k-2)}{k+1}\omega\ddot{\varphi} - \frac{4(k-2)}{k+1}\varphi + \lambda\varphi^k = 0.$$

Частинним розв'язком його є функція

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\left(\omega^{\frac{1}{2}} + C\right)^2.$$

Отже, рівняння (1) має такий розв'язок

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\left(\omega_2^{\frac{1}{2}} + C\omega_1^{\frac{3(k-1)}{2(k+1)}}\right)^2. \tag{6}$$

Рівнянння 4° і 5° (3) мають такі розв'язки:

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\left(1 + C\omega^{k-2}\right),$$

$$\varphi^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{8\varepsilon(k+1)}(\omega + C)^2.$$

В результаті отримуємо такі розв'язки рівняння (1):

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\omega_2\left(1 + C\omega_1^{k-2}\right), \tag{7}$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{8\varepsilon(k+1)}\omega_1^{k-3}\left(\omega_2 + \frac{\varepsilon}{k-2}\omega_1^{3-k} + C\omega_1\right)^2. \tag{8}$$

II. *Випадок* $k = 2$. Виділимо в алгебрі $B_\infty(4)$ скінченовимірну підалгебру $B(4)$, породжену операторами Z_1, Z_2, Z_3, S і проведемо редукцію рівняння (2) за одновимірними підалгебрами алгебри $B(4)$. Аналогічно випадку I ми повинні вилучити з розгляду одновимірну підалгебру $\langle Z_3\rangle$. Повний список не спряжених відносно внутрішніх автоморфізмів одновимірних підалгебр алгебри $B(4)$ і відповідних їм анзаців наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

№ п/п	Алгебра	Інваріантна змінна	Анзац
1	$\langle Z_1 + \delta Z_2\rangle$ $(\delta = 0; \pm 1)$	$\omega = \omega_2\omega_1^{-\delta-1}$	$u = \omega_2^{-1}\varphi(\omega)$
2	$\langle Z_2\rangle$	$\omega = \omega_1$	$u = \omega_2^{-1}\varphi(\omega)$
3	$\langle Z_1 + \varepsilon Z_3\rangle$ $(\varepsilon = \pm 1)$	$\omega = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} - \varepsilon\ln\omega_1$	$u = \omega_1^{-1}\varphi(\omega)$
4	$\langle S + \alpha Z_2\rangle$ $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\omega = \dfrac{\omega_1\ln^\alpha\omega_1}{\omega_2}$	$u = \left(\omega_1\ln^{\alpha+1}\omega_1\right)^{-1}\varphi(\omega)$
5	$\langle S + \varepsilon Z_3\rangle$ $(\varepsilon = \pm 1)$	$\omega = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} - \varepsilon\ln(\ln\omega_1)$	$u = (\omega_1\ln\omega_1)^{-1}\varphi(\omega)$

Анзаци 1–5, вказані в таблиці 2, редукують рівняння (2) до звичайних диференціальних рівнянь з невідомою функцією $\varphi = \varphi(\omega)$:

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad -4\delta\omega^2\ddot{\varphi} + \lambda\varphi^2 = 0;\\ &2^\circ \quad -4\omega\ddot{\varphi} + \lambda\varphi^2 = 0;\\ &3^\circ \quad -4\varepsilon\ddot{\varphi} + \lambda\varphi^2 = 0;\\ &4^\circ \quad -4\alpha\omega^3\ddot{\varphi} + 4\omega^2\varphi + \lambda\varphi^2 = 0;\\ &5^\circ \quad -4\varepsilon\ddot{\varphi} - 4\varphi + \lambda\varphi^2 = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Дослідимо редуковані рівняння 1°–5° (9). Рівняння 2° (9) має розв'язок

$$\varphi^2 = -\frac{\lambda}{4}(\ln\omega + C).$$

Отже, рівняння (2) має розв'язок

$$u^2 = -\frac{\lambda}{4}(\omega_2 \ln \omega_1 + C\omega_2). \tag{10}$$

Рівняння 3° (9) має частинний розв'язок

$$\varphi^2 = -\frac{\lambda}{24\varepsilon}(\omega + C)^2.$$

Йому відповідає такий розв'язок рівняння (2)

$$u^2 = \frac{\lambda}{24\varepsilon\omega_1}(\omega_2 - \varepsilon\omega_1 \ln \omega_1 + C\omega_1)^2. \tag{11}$$

Розв'яжемо задачу розмноження розв'язків (4)–(8), (10), (11) рівняння Даламбера. Кожен з них, записаний в змінних ω_1 і ω_2, є розв'язком редукованого рівняння (2). Оскільки відома алгебра інваріантності цього рівняння і вона містить симетрії, які не є симетріями рівняння (1), то на першому етапі розв'язуємо задачу розмноження розв'язків для рівняння (2). Отримані класи розв'язків рівняння (2), записані в змінних x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), є класами розв'язків рівняння (1) і ми їх розмножуємо з допомогою групи інваріантності цього рівняння.

Випишемо дію перетворень групи інваріантності рівняння (2) на змінні ω_1, ω_2, u. У випадку $k \neq 2$ позначимо через θ_t^0 перетворення, яке визначається елементом $\exp(tM)$. Маємо

$$\theta_t^0(\omega_i) = \omega_i \left[1 - (k-2)t\omega_1^{k-2}\right]^{\frac{1}{2-k}} \qquad (i = 1, 2),$$

$$\theta_t^0(u) = u \left[1 - (k-2)t\omega_1^{k-2}\right]^{\frac{1}{k-2}}.$$

Перетворення θ_t^1, θ_t^2, θ_t^3, що визначаються відповідними елементами $\exp(tX_1)$, $\exp(tX_2)$ і $\exp(tX_3)$, діють на змінні ω_1, ω_2 і u згідно таких формул:

$$\theta_t^1(\omega_1) = e^t\omega_1, \qquad \theta_t^1(\omega_2) = e^t\omega_2, \qquad \theta_t^1(u) = ue^{-\frac{t}{k-1}};$$

$$\theta_t^2(\omega_1) = \omega_1, \qquad \theta_t^2(\omega_2) = e^t\omega_2, \qquad \theta_t^2(u) = ue^{-\frac{t}{k-1}};$$

$$\theta_t^3(\omega_1) = \omega_1, \qquad \theta_t^3(\omega_2) = \omega_2 + t\omega_1, \qquad \theta_t^3(u) = u.$$

У випадку $k = 2$ позначимо через δ_t^0, δ_t^1, δ_t^2 і δ_t^3 перетворення, що відповідають елементам $\exp(tS)$, $\exp(tZ_1)$, $\exp(tZ_2)$ і $\exp(tZ_3)$. Тоді

$$\delta_t^0(\omega_i) = \omega_i \omega_1^{e^t - 1} \quad (i = 1, 2), \qquad \delta_t^0(u) = u e^{-t} \omega_1^{1 - e^t};$$

$$\delta_t^1(\omega_1) = e^t \omega_1, \qquad \delta_t^1(\omega_2) = e^t \omega_2, \qquad \delta_t^1(u) = e^{-t} u;$$

$$\delta_t^2(\omega_1) = \omega_1, \qquad \delta_t^2(\omega_2) = e^t \omega_2, \qquad \delta_t^2(u) = e^{-t} u;$$

$$\delta_t^3(\omega_1) = \omega_1, \qquad \delta_t^3(\omega_2) = \omega_2 + t\omega_1, \qquad \delta_t^3(u) = u.$$

Розглянемо, наприклад, однопараметричну сім'ю розв'язків (5). Будь-який розв'язок, що належить до сім'ї (5), інваріантний відносно перетворення θ_t^1, а перетворення θ_t^2 і θ_t^3 переводять розв'язки сім'ї (5) знову в розв'язки тієї ж сім'ї. Перетворення θ_t^0 переводить сім'ю розв'язків (5) в сім'ю

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} (\omega_2 + C_1 \omega_1) \left(1 + C_2 \omega_1^{k-2}\right),$$

де $C_1 = C$, $C_2 = (2 - k)t$. Отримана сім'я розв'язків містить в собі сім'ю розв'язків (5) і інваріантна відносно перетворень θ_t^i ($i = 0, 1, 2, 3$). Отже, отримано сім'ю розв'язків рівняння (2), яка далі не розмножується за допомогою групи $\{\theta_t^0, \theta_t^1, \theta_t^2, \theta_t^3\}$. Враховуючи далі, що алгебра інваріантності рівняння (2) є нескінченновимірна, отриманно більш широкий клас розв'язків рівняння (2), якщо сталі C_1 і C_2 замінити довільними гладкими функціями ψ_1 і ψ_2 від змінної ω_3. На завершальному етапі розмножуємо отриману сім'ю розв'язків рівняння (2), записану в змінних x_i ($i = 1, 2, 3, 4$), групою інваріантності рівняння (1).

Нехай $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $y_i = x_i + \alpha_i$, $(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 - a_4 b_4$, $t = (a, y)(b, y)^{-1}$, $(a, a) = (a, b) = (b, b) = 0$, $\psi_i(t)$ — довільні гладкі функції від змінної t; $\alpha_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Випишемо багатопараметричні класи розв'язків нелінійного рівняння Даламбера у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{R}_{2,2}$, отримані з розв'язків (4)–(8), (10), (11) за допомогою операції групового розмноження

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)} \Big\{ \left[\left((y, y) + \psi_1(t)(a, y) \right) \left(1 + \psi_3(t)(a, y)^{k-2} \right) \right]^{1/2}$$

$$+ \psi_2(t)(a, y)^{\frac{k(k-1)}{2(k+1)}} \left((y, y) + \psi_1(t)(a, y)^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \right) \Big\}^2 \quad (k \neq 2);$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{4(k-2)}\Big\{\left[((y,y)+\psi_1(t)(a,y))\left(1+\psi_3(t)(a,y)^{k-2}\right)\right]^{1/2}$$

$$+\,\psi_2(t)(a,y)^{\frac{3(k-1)}{2(k+1)}}\left(1+\psi_3(t)(a,y)^{k-2}\right)\Big\}^2 \quad (k\neq 2);$$

$$u^{1-k} = \frac{\lambda(k-1)^2}{8(k+1)(k-2)}(a,y)^{k-3}\psi_1(t)$$

$$\times\left((y,y)+\psi_1^{-1}(t)(a,y)^{3-k}+\psi_2(t)(a,y)\right)^2 \quad (k\neq 2);$$

$$u^{-1} = -\frac{\lambda}{4}((y,y)+\psi_1(t)(a,y))(\ln(a,y)+\psi_2(t)) \quad (k=2);$$

$$u^{-1} = \frac{\lambda}{24}\frac{\psi_1(t)}{(a,y)}\left[(y,y)-\frac{1}{\psi_1(t)}(a,y)\ln(a,y)+\psi_2(t)(a,y)\right]^2 \quad (k=2).$$

[1] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с.

[2] Фущич В.И., Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Ф. О точных решениях уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}_{2,2}$. I // Укр. матем. журн. — 1990. — **42**, № 8. — С. 1142–1148.

[3] Фущич В.И., Баранник А.Ф., Москаленко Ю.Ф. О точных решениях уравнений Даламбера и Лиувилля в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}_{2,2}$. II // Укр. матем. журн. — 1990. — **42**, № 9. — С. 1237–1243.

[4] Barannyk A., Yuryk I. On some exact solutions of nonlinear wave equations / Proc. of the Second International Conf. “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. — Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. — **1**. — P. 98–107.

[5] Barannyk A., Yuryk I. On a new method for constructing exact solutions of the nonlinear differential equations of mathematical physics // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — **31**. — P. 4899–4907.

[6] Баранник А.Ф., Юрик І.І. Новий метод побудови розв'язків нелінійних хвильових рівнянь // Укр. матем. журн. — 1999. — **51**, № 5. — С. 583–594.

[7] Юрик І.І. Нелінійні рівняння Даламбера у псевдоевклідовому просторі $\mathbb{R}_{2,n}$ і його розв'язки // Укр. матем. журн. — 2000. — **52**, № 6. — С. 681–687.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 40–44

УДК 517.95:512.816

Інваріантність квазілінійного рівняння другого порядку відносно конформної алгебри

Л.М. БЛАЖКО

Полтавський державний технічний університет, Полтава
E-mail: vschmat@pstu.pi.net.ua

Проведена класифікація квазілінійного рівняння другого порядку відносно алгебри Пуанкаре та конформної алгебри.

Classification of the quasilinear equation of order 2 under Poincaré and conformal algebra is conducted.

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку

$$F^{\mu\nu}(u,\underset{1}{u})u_{\mu\nu}+G(u,\underset{1}{u})=0, \tag{1}$$

де $F^{\mu\nu}(u,\underset{1}{u})$, $G(u,\underset{1}{u})$, $u=u(x)$ — гладкі функції, $x=(x_0,x_1)$, $\underset{1}{u}=(u_0,u_1)$, $u_\mu=\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu,\nu=\overline{0,1}$. Тут і далі за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування.

Поставимо задачу дослідити при яких функціях $F^{\mu\nu}$, G рівняння (1) конформно-інваріантне. Базисні елементи конформної алгебри $AC(1,1)$ будемо шукати у вигляді

$$\begin{gathered}\partial_0,\quad \partial_1,\quad I_{01}=x_0\partial_1+x_1\partial_0,\\ D=x_0\partial_0+x_1\partial_1+(ku+m)\partial_u,\quad K_\mu=2x_\mu D-s^2\partial^\mu,\end{gathered} \tag{2}$$

де $s^2=x^2-cu^2$, k, m — const, $c=0;1$.

Для того, щоб рівняння (1) було інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,1)$, необхідно, щоб воно було інваріантним відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$, базисні елементи якої мають вигляд:

$$\partial_0,\quad \partial_1,\quad I_{01}, \tag{3}$$

та розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,1)$, базисні елементи якої мають вигляд:

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad I_{01}, \quad D, \tag{4}$$

які є підалгебрами алгебри $AC(1,1)$. Дослідимо інваріантність рівняння (1) відносно алгебр (3), (4) та (2).

Теорема 1. *Рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$, базисні елементи якої задаються операторами (3), тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:*

$$1) \quad f^1 S_1 + f^2 S_2 + f^3 S_3 + f^4 = 0, \tag{5}$$

де $f^i = f^i(u,\omega)$ — гладкі функції, $i = \overline{1,4}$, $\omega = u_0^2 - u_1^2$,

$$S_1 = (u_0^2 + u_1^2)(u_{00} + u_{11}) - 4u_0u_1u_{01}, \qquad S_2 = u_{00} - u_{11},$$
$$S_3 = (u_0^2 + u_1^2)u_{01} - u_0u_1(u_{00} + u_{11});$$

$$2) \quad \left(1 + u_1^2\right) u_{01} - 2u_0u_1u_{01} + \left(u_0^2 - 1\right) u_{11} = 0 \tag{6}$$

Доведення. Для доведення теореми використаємо алгоритм Лі [1, 2]. Так як ліва частина рівняння (1) явно не залежить від x, при довільних функціях $F^{\mu\nu}$, G, то воно буде інваріантним відносно операторів зсуву ∂_0, ∂_1.

З умови інваріантності $\tilde{I}_{01}S|_{S=0} = 0$, де $\tilde{I}_{01}$ — продовження оператора I_{01}, S — ліва частина рівняння (1), одержуємо систему визначальних рівнянь, для визначення функцій $F^{\mu\nu}$, G

$$\begin{aligned} &u_0 z^{01}_{u_1} + u_1 z^{11}_{u_0} + 1 + z^{11} - 2(z^{01})^2 = 0, \\ &u_0 z^{11}_{u_1} + u_1 z^{11}_{u_0} - 2z^{01}z^{11} + 2z^{01} = 0, \\ &u_0 v_{u_1} + u_1 v_{u_0} - 2vz^{01} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

де $z^{01} = \frac{F^{01}}{F^{00}}$, $z^{11} = \frac{F^{11}}{F^{00}}$, $v = \frac{G}{F^{00}}$, $F^{00} \not\equiv 0$.

Загальним розв'язком системи (7) є функції

$$\begin{aligned} F^{01} &= \frac{2\left(u_0^2 + u_1^2 - u_0u_1\varphi^1\right)}{\left(u_0^2 + u_1^2\right)\varphi^1 - 4u_0u_1 + \varphi^2} F^{00}, \\ F^{11} &= \frac{\left(u_0^2 + u_1^2\right)\varphi^1 - 4u_0u_1 - \varphi^2}{\left(u_0^2 + u_1^2\right)\varphi^1 - 4u_0u_1 + \varphi^2} F^{00}, \\ G &= \frac{\varphi^3}{\left(u_0^2 + u_1^2\right)\varphi^1 - 4u_0u_1 + \varphi^2} F^{00}, \end{aligned} \tag{8}$$

де $F^{00} = F^{00}(u, \underset{1}{u})$, $\varphi^i = \varphi^i(u, \omega)$ — довільні гладкі функції, $i = \overline{1,3}$, $\omega = u_0^2 - u_1^2$; особливим розв'язком (7) є функції

$$F^{00} = 1 + u_1^2, \quad F^{01} = -u_0 u_1, \quad F^{11} = u_0^2 - 1, \quad G = 0. \tag{9}$$

Використовуючи (8), (9) одержуємо рівняння (5) і (6) відповідно. ■

Зауваження. Рівняння (6) — це рівняння Борна–Інфельда, симетрійні властивості якого добре відомі (див. [3]).

Теорема 2. *Рівняння (5) інваріантне відносно розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,1)$, базисні елементи якої задаються операторами (4), тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:*

$$1) \quad \varphi^1 S_1 + \omega\varphi^2 S_2 + \varphi^3 S_3 + \omega^2\varphi^4 = 0,$$

де $\varphi^i = \varphi^i(u)$ — гладкі функції, $i = \overline{1,4}$, $\omega = u_0^2 - u_1^2$ при $k = 0$, $m = 0$;

$$2) \quad \varphi^1 S_1 + e^{-u}\varphi^2 S_2 + \varphi^3 S_3 + e^{-2u}\varphi^4 = 0,$$

де $\varphi^i = \varphi^i(\omega e^u)$ — гладкі функції, $i = \overline{1,4}$, при $k = 0$, $m = 2$;

$$3) \quad \varphi^1 S_1 + u^{\frac{2(k-1)}{k}}\varphi^2 S_2 + \varphi^3 S_3 + u^{\frac{3k-4}{k}}\varphi^4 = 0,$$

де $\varphi^i = \varphi^i(\omega u^{-\frac{2(k-1)}{k}})$ — гладкі функції, $i = \overline{1,4}$, при $k \neq 0$, $m = 0$.

Доведення. Для доведення теореми використаємо алгоритм Лі [1, 2]. За теоремою 1 рівняння (5) інваріантне відносно операторів ∂_0, ∂_1, I_{01}. З умови інваріантності $\tilde{D}S|_{S=0} = 0$, де $\tilde{D}$ — продовження оператора D, одержуємо систему визначальних рівнянь для невідомих функцій f^i $(i = \overline{1,4})$

$$\begin{aligned}
&2(k-1)\omega\left(f^1_\omega f^2 - f^1 f^2_\omega\right) + (ku+m)\left(f^1_u f^2 - f^1 f^2_u\right) + \\
&\qquad + 2(k-1)f^1 f^2 = 0, \\
&2(k-1)\omega\left(f^1_\omega f^4 - f^1 f^4_\omega\right) + (ku+m)\left(f^1_u f^4 - f^1 f^4_u\right) + \\
&\qquad + (3k-4)f^1 f^4 = 0, \\
&2(k-1)\omega\left(f^2_\omega f^3 - f^2 f^3_\omega\right) + (ku+m)\left(f^2_u f^3 - f^2 f^3_u\right) - \\
&\qquad - 2(k-1)f^2 f^3 = 0, \\
&2(k-1)\omega\left(f^2_\omega f^4 - f^2 f^4_\omega\right) + (ku+m)\left(f^2_u f^4 - f^2 f^4_u\right) + \\
&\qquad + (k-2)f^2 f^4 = 0, \\
&2(k-1)\omega\left(f^3_\omega f^4 - f^3 f^4_\omega\right) + (ku+m)\left(f^3_u f^4 - f^3 f^4_u\right) + \\
&\qquad + (3k-4)f^3 f^4 = 0, \\
&2(k-1)\omega\left(f^1_\omega f^3 - f^1 f^3_\omega\right) + (ku+m)\left(f^1_u f^3 - f^1 f^3_u\right) = 0.
\end{aligned} \tag{10}$$

В залежності від значень коефіцієнтів k, m система визначальних рівнянь (10) має три суттєво різні розв'язки:

$$\begin{aligned}
1)\quad & f^1=\varphi^1,\ f^2=\omega\varphi^2,\ f^3=\varphi^3,\ f^4=\omega^2\varphi^4,\\
& \varphi^i=\varphi^i(u),\ i=\overline{1,4},\ k=0,\ m=0;\\
2)\quad & f^1=\varphi^1,\ f^2=e^{-u}\varphi^2,\ f^3=\varphi^3,\ f^4=e^{-2u}\varphi^4,\\
& \varphi^i=\varphi^i(\omega e^{-u}),\ i=\overline{1,4},\ k=0,\ m=2;\\
3)\quad & f^1=\varphi^1,\ f^2=u^{\frac{2(k-1)}{k}}\varphi^2,\ f^3=\varphi^3,\ f^4=u^{\frac{3k-4}{k}}\varphi^4,\\
& \varphi^i=\varphi^i\left(\omega u^{-\frac{2(k-1)}{k}}\right),\ i=\overline{1,4},\ \forall k\neq 0,\ m=0.
\end{aligned}\tag{11}$$

Із (11) одержуємо твердження теореми 2. ■

Теорема 3. *Рівняння (1) інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,1)$, базисні елементи якої задаються операторами (2) при $k=1$, $m=0$, $c=1$, тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд*

$$\begin{aligned}
&\left(1+u_1^2\right)u_{00}-2u_0u_1u_{01}-\left(1-u_0^2\right)u_{11}=\\
&\quad=\frac{2}{u}\left(1-u_0^2+u_1^2\right)\left(1+\lambda\sqrt{1-u_0^2+u_1^2}\right),\quad \lambda=\mathrm{const}.
\end{aligned}\tag{12}$$

Рівняння (12) можна розглядати як рівняння Борна–Інфельда з правою частиною. В роботі [3] було встановлено, що максимальною алгеброю інваріантності рівняння Борна–Інфельда є розширена алгебра Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n+1)$. З теореми 3 випливає, що права частина рівняння (12) розширює алгебру інваріантності рівняння Борна–Інфельда до конформної алгебри $AC(1,1)$. Узагальнимо результат теореми 3 на випадок довільної кількості незалежних змінних.

Теорема 4. *Рівняння*

$$(1-u_\mu u^\mu)\Box u+u^\mu u^\nu u_{\mu\nu}=F(u,\underset{1}{u})\tag{13}$$

інваріантне відносно конформної алгебри $AC(1,n)$, базисні елементи якої задаються операторами

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu,\quad I_{\mu\nu}=x_\mu\partial^\nu-x_\nu\partial^\mu,\quad D=x_\mu\partial_\mu+u\partial_u,\\
&K_\mu=2x_\mu D-s^2\partial^\mu,\quad s^2=x^2-u^2,\quad \mu,\nu=\overline{0,n},
\end{aligned}$$

тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:

$$\begin{aligned}
&(1-u_\mu u^\mu)\,\Box u+u^\mu u^\nu u_{\mu\nu}=\\
&\quad=\frac{n+1}{u}\left(1-u_\mu u^\mu\right)\left(1+\lambda\sqrt{1-u_\mu u^\mu}\right),\quad \lambda=\mathrm{const}.
\end{aligned}\tag{14}$$

Доведення теорем 3, 4 базуються на методі Лі [1, 2].

Відмітимо, що рівняння (12), (14) можна також отримати за допомогою диференціальних інваріантів, які одержано в [4].

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[2] Olver P. Applications of Lie group to differential equations. — New York: Springer, 1986. — 497 p.

[3] Fushchych W.I., Shtelen V.M., Serov N.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 436 p.

[4] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. Second order differential invariants of the rotation group $O(n)$ and of its extensions: $E(n)$, $P(1,n)$, $G(1,n)$ // Acta Appl. Math. — 1992. — **28** — P. 69–92.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 45–50

УДК 517.958:512.816

Групова класифікація галілей-інваріантних рівнянь високого порядку

В.М. БОЙКО †***, В.О. ПОПОВИЧ***

Інститут математики НАН України, Київ

† *E-mail: boyko@imath.kiev.ua*

Проведено групову класифікацію в класі еволюційних рівнянь вигляду $u_t + uu_1 = F(u_n)$, що інваріантні відносно перетворень Галілея і узагальнюють рівняння Бюргерса і Кортевега-де Фріза.

Group classification in the class of evolutionary equations of the form $u_t + uu_1 = F(u_n)$ is carried out. These equations are invariant under Galilei transformations and generalize the Burgers and Korteweg-de Vries equations.

1. Вступ. Розглянемо клас еволюційних рівнянь вигляду

$$u_t + uu_1 = F(u_2, u_3, \ldots, u_n), \tag{1}$$

де $u = u(t, x)$, $u_t = \partial u/\partial t$, $u_k = \partial^k u/\partial x^k$, $k = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, F — довільна гладка функція змінних u_2, u_3, …, u_n. Важливість цього класу рівнянь і необхідність його дослідження обумовлена кількома причинами. Перш за все, він містить як частинні випадки низку відомих рівнянь математичної фізики:

$F = 0$ — рівняння простої хвилі;
$F = \mu u_2$ — рівняння Бюргерса;
$F = \nu u_3$ — рівняння Кортевега-де Фріза;
$F = \mu u_2 + \nu u_3$ — рівняння Кортевега-де Фріза–Бюргерса;
$F = \mu u_2 + \gamma u_4$ — рівняння Курамото–Сивашинського.

Крім того, частинна похідна по часу входить в рівняння (1) у складі "матеріальної похідної" $\partial/\partial t + u\partial/\partial t$, яка співпадає з повною похідною по часу d/dt у випадку, коли u інтерпретують як швидкість переміщення частинок певного середовища (в ейлерових координатах). Наявність такого агрегату (разом із структурою функції F) гарантує виконання для всіх рівнянь з класу (1) принципу відносності Галілея, тобто інваріантність відносно групи Галілея $G(1,1)$, що породжується перетвореннями зсуву за часом t і просторовою змінною x ($t' = t+a$, $x' = x+b$, $u' = u$) та перетвореннями Галілея ($t' = t$, $x' = x + vt$, $u' = u + v$).

В цій роботі виконано групову класифікацію в вужчому, ніж (1), класі рівнянь вигляду

$$u_t + uu_1 = F(u_n), \quad F_{u_n} \neq 0, \tag{2}$$

тобто розглянуто випадок, коли функція F залежить лише від старшої похідної u_n. Вперше класифікацію таких рівнянь для $n \in \{2;3;4\}$ проведено в [1, 2], де для них також побудовано класи точних розв'язків та отримано узагальнення, що мають широку симетрію. На відміну від [1, 2], значення n тут не фіксується, що суттєво ускладнює доведення класифікаційного результату.

2. Результат класифікації. Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
&P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \quad G = t\partial_x + \partial_u,\\
&D^k = (nk - k + 1)t\partial_t + (2 - k)x\partial_x + (1 - nk)u\partial_u,\\
&D = (n + 1)D^{3/(n+1)} = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u,\\
&\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u,\\
&D' = 2D - (2n - 1)(t^2\partial_x + 2t\partial_u), \quad \widehat{D} = 4t\partial_t + 5x\partial_x + u\partial_u,\\
&R_1 = u\partial_x, \quad R_2 = (2tu - x)\partial_x + u\partial_u, \quad R_3 = (tu - x)(t\partial_x + \partial_u).
\end{aligned}$$

Результат групової класифікації щодо рівнянь вигляду (2) сформульовано у вигляді трьох наступних теорем.

Теорема 1. *Ядро основних груп рівнянь вигляду (2) співпадає з групою Галілея $G(1,1)$, алгебра Лі якої $A^{\mathrm{ker}} = AG(1,1) = \langle P_0,\ P_1,\ G\rangle$.*

Теорема 2. *Група еквівалентності G^{equiv} класу рівнянь (2) породжується операторами P_0, P_1, G, $t\partial_t + x\partial_x - F\partial_F$, $x\partial_x + u\partial_u + F\partial_F$, $t^2\partial_x + 2t\partial_u + 2\partial_F$. Дія будь-якого перетворення еквівалентності на функцію F має вигляд*

$$\widetilde{F}(u_n) = \delta_1 F(\delta_2 u_n) + \delta_0, \quad \text{де} \quad \delta_0, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R},\ \delta_1\delta_2 \neq 0. \tag{3}$$

Зауваження. При виведенні формули (3) (щоб зняти вимогу додатності для констант δ_1 і δ_2) використовувались також два дискретних перетворення еквівалентності рівнянь (2):

$$\tilde{t} = -t,\ \tilde{x} = -x,\ \tilde{u} = u,\ \widetilde{F} = -F \quad \text{та}$$
$$\tilde{t} = t,\ \tilde{x} = -x,\ \tilde{u} = -u,\ \widetilde{F} = -F.$$

Теорема 3. *З точністю до перетворень з G^{equiv} для рівнянь (2) існує лише чотири при $n = 2$ і три при $n > 2$ випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності $A^{\max} = A^{\max}(F)$ (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до $AG(1,1)$):*

1. $F = (u_n)^k$, $k \neq 0, \frac{3}{n+1}$: D^k;

2. $F = \ln u_n$: D';

3. $F = (u_n)^{\frac{3}{n+1}}$: D, Π;

4. $F = (u_2)^{\frac{1}{3}}$ $(n = 2)$: $\widehat{D}$, R_1, R_2, R_3.

В доведенні класифікаційного результату використовується така лема.

Лема 1. *Для довільного еволюційного рівняння*

$$u_t = H(t, x, u, u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad \text{де} \quad n \geqslant 2, \quad H_{u_n} \neq 0,$$

коефіцієнт ξ^t при ∂_t в будь-якому інфінезімальному операторі, що породжує однопараметричну групу локальних перетворень симетрії цього рівняння, не залежить від x і u.

Доведення. Перейдемо у відповідному інфінітезімальному критерії інваріантності [4, 5] на многовид, заданий рівнянням в продовженому просторі. Збираючи коефіцієнти при похідній $u_{n-1,t}$ в одержаній рівності, маємо, що $nH_{u_n}(\xi^t_x + \xi^t_u u_x) = 0$, тобто $\xi^t_x = \xi^t_u = 0$.

3. Доведення результату класифікації. Випадок $n = 2$ (доведення для якого має певні особливості порівняно з загальним випадком) повністю розглянуто в [1, 2]. Тому надалі вважамо, що $n > 2$.

Скористаємося для класифікації технікою, запропонованою в [3]. Так як рівняння (2) еволюційне, то в силу леми 1 для будь-якої однопараметричної групи локальних перетворень його симетрії відповідний інфінітезімальний оператор має вигляд

$$Q = \xi^t(t)\partial_t + \xi^x(t, x, u)\partial_x + \eta(t, x, u)\partial_u.$$

Інфінітезімальной критерій інваріантності [4, 5] для рівняння (2) і оператора Q після переходу на многовид, заданий рівнянням (2) в продовженому просторі, набуває вигляду

$$\eta_t+u\eta_x+(\eta-\xi^x_t)u_1+(\xi^t_t-\xi^x_x)uu_1+(\eta_u-\xi^t_t-\xi^x_u u_1)F=\eta^n F', \tag{4}$$

де η^n — коефіцієнт при ∂_{u_n} в n-му продовженні оператора Q [4, 5]:

$$\eta^n=u_n\{\eta_u-n\xi^x_x-(n+1)\xi^x_u u_1\}+u_{n-1}\{n\eta_{xu}+n\eta_{uu}u_1-$$
$$-\tfrac12 n(n-1)\xi^x_{xx}n^2\xi^x_{xu}u_1-\tfrac12 n(n+1)\xi^x_{uu}u_1^2-\tfrac12 n(n+1)\xi^x_u u_2\}+\cdots$$

(тут наведено лише члени, що містять старші похідні u_n та u_{n-1}).

Якщо F — довільна функція, то розщеплюючи спочатку по F і F', а потім по u_1, u_2, …, u_n, отримаємо, зокрема, такі визначальні рівняння: $\xi^x_u=0$, $\eta_u=\xi^t_t=n\xi^x_x$, $\eta=(\xi^x_x-\xi^t_t)u+\xi^x_t$, $\eta_t+u\eta_x=0$, звідки $\xi^x_u=\xi^x_x=\xi^t_t=0$, $\eta=\xi^x_t$, $\xi^x_{tt}=0$. При виконанні останнього набору умов рівняння (4) перетворюється в тотожність, що завершає доведення теореми 1.

Максимальна група еквівалентності рівнянь (2) (тобто множина локальних перетворень в просторі "незалежних змінних" t, x, u, u_1, u_2, …, u_n та "залежної змінної" F, що не виводять з класу рівнянь (2), причому перетворення по t, x і u не залежать від F [4]) співпадає з групою, породженою сукупністю однопараметричних груп локальних симетрій системи

$$u_t+uu_x=F,\quad F_t=F_x=0,\quad F_{u_k}=0,\ k=\overline{1,n-1}, \tag{5}$$

інфінітезімальні оператори яких мають вигляд

$$\widehat{Q}=\hat\xi^t(t,x,u)\partial_t+\hat\xi^x(t,x,u)\partial_x+\hat\eta(t,x,u)\partial_u+\hat\eta^k(t,x,u)\partial_{u_k}+$$
$$+\hat\chi(t,x,u,u_1,u_2,\dots,u_n,F)\partial_F,$$

де $\hat\eta^k=D^k_x(\hat\eta-\hat\xi^t u_t-\hat\xi^x u_x)+\hat\xi^t u_{k,t}+\hat\xi^x u_{k+1}$, $D_x=\partial_x+u_1\partial_u+\sum_{k=1}^{\infty}u_{k+1}\partial_{u_k}$ — оператор повної похідної за змінною x. З інфінітезімального критерію інваріантності для системи (5) після розщеплення за незв'язаними змінними отримаємо визначальні рівняння на коефіцієнти оператора $\widehat{Q}$, з яких випливає твердження теореми 2.

Опишемо тепер всі можливі розширення $A^{\max}$ в класі рівнянь (2). Якщо $\dim A^{\max}>\dim A^{\ker}$, то (4) є нетотожнім відносно F рівнянням загального вигляду

$$(au_n+b)F'=cF+d,\quad \text{де}\quad a,\ b,\ c,\ d \text{ — деякі сталі.} \tag{6}$$

Таких рівнянь може одне або два. Функція F задовольняє два рівняння вигляду (6) тоді і тільки тоді, коли вона лінійна.

Розглянемо перший випадок — (нелінійна) функція F задовольняє точно одне рівняння вигляду (6). Тоді $(a, b) \neq (0, 0)$, $(c, d) \neq (0, 0)$. Виразимо F' з (6) і підставимо в (4). В отриманій таким чином умові F виступає як ще одна незв'язана змінна. Зберемо послідовно коефіцієнти при $u_{n-1}u_2$, $u_{n-1}u_1$, uu_1, u^2, u_1, u, u_nF, u_n, F в цій умові і прирівняємо до нуля, враховуючи на кожному кроці вже знайдені визначальні рівняння. В результаті розщепимо (4) до такої системи визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q:

$$\begin{aligned}
&\xi^x_u = 0, \quad \eta_{uu} = 0 \quad (\text{тоді } \eta = \eta^1(t, x)u + \eta^0(t, x)),\\
&\eta^1 = \xi^x_x - \xi^t_t, \quad \eta^1_x = 0 \quad (\text{тоді } \xi^x_{xx} = 0), \quad \eta^0 = \xi^x_t,\\
&\eta^1_t + \eta^0_x = 0 \quad (\text{тоді } 2\xi^x_{xt} = \xi^t_{tt})
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&a(\eta^1 - \xi^t_t) = c(\eta^1 - n\xi^x_x), \quad d(\eta^1 - n\xi^x_x) = a\eta^0_t,\\
&b(\eta^1 - \xi^t_t) = 0, \quad b\eta^0_t = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Рівняння (8) — класифікуючі. Необхідно знайти такі значення параметрів a, b, c, d, щоб система (7)–(8) мала нетривіальні розв'язки.

Якщо $b \neq 0$, то $\eta^0_t = \eta^1 - \xi^t_t = \eta^1 - n\xi^x_x = 0$, тобто розширення $A^{\max}$ немає. Тому надалі $b = 0$, звідки $a \neq 1$. Без обмеження загальності можна вважати $a = 1$.

Якщо $c \neq 0$, то перетворенням еквівалентності функцію F приведемо до вигляду $F = (u_n)^k$, тобто $c = k$, $d = 0$. В залежності від значення k маємо або перший, або третій випадок теореми 3.

Коли $c = 0$, то $d = 0$, і перетворень еквівалентності (3) можна покласти $d = 1$. В результаті отримуємо другий випадок теореми 3.

У другому випадку, коли функція F лінійна, її можна привести до вигляду $F = u_n$. Додаткового розширення порівняно із загальною степеневою функцією $F = u_n^k$ в цьому випадку немає.

4. Висновки. Аналіз результатів, отриманих в [1, 2] і цій статті, показує, що в класі рівнянь (1) міститься, крім наведених в теоремі 3 для класу (2), ціла низка рівнянь з широкою симетрією. Зокрема, в [1, 2] описано всі рівняння вигляду (1), що інваріантні відносно групи симетрії рівняння Бюргерса (узагальненої групи Галілея), алгебра Лі якої $AG_2(1, 1) = \langle P_0, P_1, G, D, \Pi\rangle$. Питання ж про те, чи існують (і які) випадки більшого розширення групи симетрії, залишається відкритим. Не розглянуто поки і задачі повної групової класифікації в ширших, ніж (2), класах рівнянь вигляду (1), зокрема, коли $F = F(u_{n-1}, u_n)$ (навіть при $n = 2$, тобто $F = F(u_1, u_2)$). Цікаво також було б продовжити розпочате в [1] дослідження рівнянь, що містять квадрат оператора "матеріальної похідної". На нашу думку, перераховані проблеми можуть бути розв'язані з використанням підходу до групової класифікації, запропонованого в [3].

Автори висловлюють щиру подяку Р.О. Поповичу за плідні обговорення результатів, що містяться в статті.

[1] Фущич В.І., Бойко В.М. Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега-де Фріза високого порядку // Укр. матем. журн. — 1996. — **48**, № 12. — С. 1589–1601.

[2] Boyko V.M. On new generalizatios of the Burgers and Korteweg-de Vries equations // Proc. of the Second International Conf. "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics" (Kyiv, July 7–13, 1997). — Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. — **1**. — P. 122–129.

[3] Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера // Укр. матем. журн. — 2000. — **52**, Буде опубліковано.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[5] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 51–62

УДК 517.912:512.816

Диференціальні інваріанти однопараметричних груп Лі

В.М. БОЙКО †, ***Р.О. ПОПОВИЧ*** ‡

Інститут математики НАН України, Київ

† *E-mail: boyko@imath.kiev.ua*
‡ *E-mail: rop@imath.kiev.ua*

Доведено, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку однопараметричної групи локальних перетворень в просторі n незалежних та m залежних змінних будується через одну квадратуру і диференціювання.

It is proved that if universal invariant for one-parameter group of local transformations in the space of n independent and m dependent variables is known then the complete set of its functionally independent differential invariants can be constructed via one quadrature and differentiation.

1. Вступ. Диференціальні інваріанти широко застосовуються при інтегруванні в квадратурах або пониженні порядку звичайних диференціальних рівнянь, а також для опису класів інваріантних диференціальних рівнянь, тому їх теорія є важливою складовою групового аналізу диференціальних рівнянь. В теорії диференціальних інваріантів особливу роль відіграють різні варіанти теореми про скінчений базис диференціальних інваріантів, що нестрого формулюється наступним чином: *для довільної групи G локальних перетворень існує такий скінчений набір диференціальних інваріантів, що кожен диференціальний інваріант групи G є функцією цих інваріантів та їх похідних.* Вперше твердження такого типу (для однопараметричної групи локальних перетворень у просторі двох змінних) отримано ще С. Лі наприкінці XIX ст. [1] (див. також [2, 3]) і невдовзі суттєво узагальнено А. Трессом [4]. Прогрес останнього часу в цьому напрямі пов'язаний з роботами Л.В. Овсяннікова [5] і П. Олвера [6]–[9], де введено поняття оператора інваріантного диференціювання, інваріантного кофрейму дифренціальних форм та ін., отримано, зокрема, результати зі стабілізації рангу продовженої дії групи і оцінки кількості диференціальних інваріантів.

В цій статті вивчаються диференціальні інваріанти однопараметричних груп локальних перетворень в просторі n незалежних та m залежних змінних ($m, n \in \mathbb{N}$). (Випадок $n = m = 1$ розглянуто в [10], а результати для для випадку $n = 1$ при довільному $m \in \mathbb{N}$ опубліковано в [11].) Важливість такої задачі обумовлена тим, що побудова диференціальних інваріантів однопараметричної групи локальних перетворень є складовою задачі пошуку диференціальних інваріантів для групи довільної розмірності [3]. Узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти однопараметричної групи локальних перетворень проведено не тільки за кількістю залежних і незалежних змінних, але й і безпосереднім посиленням її твердженням. А саме, доведено, що за відомого універсального інваріанта повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку такої групи будується через одну квадратуру і диференціювання. Проаналізовано зв'язок між диференціальними інваріантами першого порядку і інтегруванням систем рівнянь типу Ріккаті.

2. Узагальнення теореми Лі про диференціальні інваріанти. Нехай $Q = \xi^a(x,u)\partial_{x_a} + \eta^i(x,u)\partial_{u^i}$ — інфінітезімальний оператор однопараметричної групи G локальних перетворень, що діє на множині $M \subset J_{(0)} = X \times U$, де $X \simeq \mathbb{R}^n$ — простір незалежних змінних $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $U \simeq \mathbb{R}^m$ — простір залежних змінних $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$, $G^{(r)}$ — продовження дії групи G на підмножину $M_{(r)} = M \times U^{(1)} \times U^{(2)} \times \dots \times U^{(r)}$ продовженого простору $J_{(r)} = X \times U_{(r)}$ струменів r-го порядку над простором $X \times U$ (тут $U_{(r)} = U \times U^{(1)} \times U^{(2)} \times \dots \times U^{(r)}$, $r \geq 1$, $Q^{(r)}$ — r-те продовження оператора Q (див. [3, 8]). Диференціальним інваріантом r-го порядку групи G (або оператора Q) називається функція $I\colon M_{(r)} \to \mathbb{R}$, яка є інваріантом продовженої дії $G^{(r)}$. Необхідною і достатньою умовою для того, щоб функція I була диференціальним інваріантом r-го порядку групи G, є співвідношення $Q^{(r)}I = 0$.

Тут і надалі, якщо не обумовлено інше, індекси a, b, c, d змінюються від 1 до n, індекси i, j, k, l — від 1 до m. За індексами, що повторюються, йде підсумовування.

Нехай $I = I(x,u) = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^{m+n-1}(x,u))$ — повний набір функціонально незалежних інваріантів (або *універсальний інваріант* [5]) оператора Q, а $J(x,u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$. Тоді функції $I^1(x,u)$, $I^2(x,u)$, $\dots$, $I^{m+n-1}(x,u)$

і $J(x,u)$ — функціонально незалежні. Виконаємо локальну заміну змінних: $y_c = I^c(x,u)$, $c = \overline{1,n-1}$, $y_n = J(x,u)$ — нові незалежні змінні та $v^i = I^{i+n-1}(x,u)$ — нові залежні змінні. В змінних $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ і $v = (v^1, v^2, \dots, v^m)$ оператор Q має вигляд ∂_{y_n}. Отже, для будь-якого $r \geq 1$ вигляд продовженого оператора $Q^{(r)}$ співпадає з $Q = \partial_{y_n}$, а тому

$$\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1}),$$
$$v_{(r)} = \left\{ v^i_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|} v^i}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \dots \partial y_n^{\alpha_n}} \;\middle|\; \alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ |\alpha| = \sum_{a=1}^{n} \alpha_a \leq r \right\}$$

(тут $v^i_\alpha = v^i$, якщо $|\alpha| = 0$) утворюють повний набір його функціонально незалежних інваріантів, тобто $(\hat{y}, v_{(r)})$ — універсальний інваріант групи $G^{(r)}$. (Функціональна незалежність компонент $\hat{y}$ і $v_{(r)}$ очевидна, бо $(y, v_{(r)})$ є набором змінних у просторі $J_{(r)}$.) Це означає, що $(\hat{y}, v)$ є фундаментальним набором диференціальних інваріантів оператора Q, тобто будь-який диференціальний інваріант оператора Q можна зобразити як функцію від $\hat{y}$ і v та похідних v за операторами G-інваріантного диференціювання, які співпадають тут з операторами $D_{y_a} = \partial_{y_a} + v^i_{y_a}\partial_{v^i} + v^i_{y_a y_b}\partial_{v^i_{y_b}} + \cdots$ повних похідних за змінними y_a.

Повернемося до змінних x, u. В цих змінних

$$\begin{aligned} D_{y_c} &= \frac{(-1)^{c+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1},\, d\neq c,\, J)}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)} D_{x_a}, \quad c = \overline{1,n-1}, \\ D_{y_n} &= \frac{(-1)^{n+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1})}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)} D_{x_a}, \end{aligned} \tag{1}$$

де $D_{x_a} = \partial_{x_a} + u^i_{x_a}\partial_{u^i} + u^i_{x_a x_b}\partial_{u^i_{x_b}} + \cdots$ — оператор повної похідної за змінною x_a, а

$$\frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1},\, d\neq c,\, J)}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)},\ \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1})}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)},\ \Delta = \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1},\, J)}{D(x_b,\, b=\overline{1,n})}$$

позначають якобіани (з повних похідних)

функцій I^d, $d = \overline{1,n-1}$, $d \neq c$, J за змінними x_b, $b = \overline{1,n}$, $b \neq a$,

функцій I^d, $d = \overline{1,n-1}$ за змінними x_b, $b = \overline{1,n}$, $b \neq a$,

функцій I^d, $d = \overline{1,n-1}$, J за змінними x_b, $b = \overline{1,n}$,

відповідно.

Як результат отримаємо наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай $I(x,u) = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^{m+n-1}(x,u))$ — універсальний інваріант оператора Q, $J(x,u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$. Тоді функції*

$$I^c(x,u), \quad D_{y_1}^{\alpha_1} D_{y_2}^{\alpha_2} \dots D_{y_n}^{\alpha_n} I^{i+n-1}(x,u),$$

де $c = \overline{1, n-1}$, $\alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\sum_{a=1}^n \alpha_a \le r$, а оператори D_{y_a} визначаються формулами (1), утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів (або універсальний диференціальний інваріант) r-го порядку оператора Q.

Наслідок 1. *Для будь-якого оператора Q існує повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів r-го порядку, в якому кожен інваріант є раціональною функцією змінних u^i_α ($\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 < \sum_{a=1}^n \alpha_a \le r$) продовженого простору $J_{(r)}$ з коефіцієнтами, що залежать від x_a та u^j.*

Наслідок 2. *Якщо $I = (I^1(x,u), I^2(x,u), \dots, I^{m+n-1}(x,u))$ — універсальний інваріант оператора Q і $J = J(x,u)$ — частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$, то функції*

$$\begin{aligned} D_{y_c} I^{i+n-1} &= \frac{(-1)^{c+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1},\, d\neq c,\, J)}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)} D_{x_a} I^{i+n-1}, \\ D_{y_n} I^{i+n-1} &= \frac{(-1)^{n+a}}{\Delta} \frac{D(I^d,\, d=\overline{1,n-1})}{D(x_b,\, b=\overline{1,n},\, b\neq a)} D_{x_a} I^{i+n-1} \end{aligned} \tag{2}$$

($c = \overline{1, n-1}$) утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів строго першого порядку оператора Q.

Зауважимо, що за відомого універсального інваріанта I оператора Q частинний розв'язок рівняння $QJ = 1$ легко знаходиться через одну квадратуру. Наприклад, у випадку, коли для деякого фіксованого a $\xi^a \neq 0$, маємо частинний розв'язок

$$J(x,u) = \int dx_a / \xi^a(X^1 \dots, X^{a-1}, x_a, X^{a+1}, \dots, X^n, U^1, \dots, U^m),$$

де $x_b = X^b(x_a, C)$, $b \neq a$, $u^j = U^j(x, C)$ — розв'язок системи алгебраїчних рівнянь $I(x,u) = C := (C_1, C_2, \dots, C_{m+n-1})$ відносно змінних x_b, $b \neq a$, u^j, а після інтегрування необхідно виконати зворотну підстановку $C = I(x,u)$ (підсумовування по a тут немає). Аналогічно, коли $\eta^i \neq 0$ для деякого фіксованого i, тоді можна покласти

$$J(x,u) = \int du^i / \eta^i(X^1, \dots, X^n, U^1, \dots, U^{i-1}, u^i, U^{i+1}, \dots, U^m)$$

(підсумовування по i тут немає), де $x_b = X^b(u^i, C)$, $u^j = U^j(u^i, C)$, $j \neq i$, — розв'язок системи алгебраїчних рівнянь $I(x,u) = C$ відносно змінних x_b, u^j, $j \neq i$.

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо знайдено універсальний інваріант оператора Q, то повний набір його функціонально незалежних диференціальних інваріантів будь-якого порядку будується через одну квадратуру і диференціювання.*

3. Інваріантні диференціали. Введемо поняття інваріантного диференціала що є частинним випадком більш загального поняття контактно-інваріантної диференціальної форми першого порядку у продовженому просторі [7].

Означення. *Диференціал $dW(x,u)$ назвемо інваріантним відносно групи G (оператора Q), якщо він не змінюється під дією перетворень з групи G.*

Необхідною і достатньою умовою інваріантності диференціала є рівність $dQW(x,u) = 0$. Можливі два принципово різні випадки:

1) функція $W(x,u)$ є інваріантом оператора Q, тобто $QW(x,u) = 0$; диференціал $dW(x,u)$ автоматично є інваріантним відносно оператора Q (*інваріантний диференціал першого роду*);

2) функція $W(x,u)$ не є інваріантом оператора Q, але диференціал $dW(x,u)$ інваріантний відносно оператора Q (*інваріантний диференціал другого роду*); тоді $QW(x,u)$ — ненульова стала.

Якщо відомо деякий набір функцій $I(x,u) = (I^q(x,u))_{q=\overline{1,m+n-1}}$ і $J(x,u)$, що задають універсальний інваріант і інваріантний диференціал оператора Q другого роду відповідно, то всі такі набори, очевидно, можна знайти за формулами

$$\hat{I}(x,u) = F(I(x,u)), \qquad \hat{J}(x,u) = J(x,u) + H(I(x,u)), \tag{3}$$

де $F = (F^1, F^2, \ldots, F^{m+n-1})$ і H — диференційовні функції своїх аргументів, $|\partial F/\partial I| \neq 0$. Формули (3) визначають відношення еквівалентності Ω на множині $\mathcal{M}$ наборів з $m+n$ гладких функцій від $m+n$ змінних з ненульовим якобіаном. Відповідну множину класів еквівалентності позначимо через $\mathcal{M}/\Omega$.

Твердження 1. *Між $\mathcal{M}/\Omega$ і множиною ненульових операторів $\{Q\}$ в просторі змінних (x,u) існує взаємно-однозначна відповідність: сукупність $\{(I(x,u); J(x,u))\}$ розв'язків системи $QI^q = 0$,*

$q=\overline{1,m+n-1}$, $QJ=1$, *де* I^q *— функціонально незалежні, є елементом множини* $\mathcal{M}/\Omega$, *і навпаки, якщо* $(I(x,u);J(x,u))$ *— деякий представник класу еквівалентності з* $\mathcal{M}/\Omega$, *то система* $QI^q=0$, $q=\overline{1,m+n-1}$, $QJ=1$ *є визначеною системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів відповідного оператора* Q.

4. Випадок $n=1$. Розглянемо докладніше випадок однієї незалежної змінної x ($n=1$), в якому можна значно компактніше сформулювати теорему 1 та її наслідки, а також отримати деякі додаткові результати.

Теорема 1′. *Нехай* $I=I(x,u)=(I^1(x,u),I^2(x,u),\dots,I^m(x,u))$ *— універсальний інваріант оператора* Q, $J(x,u)$ *— частинний розв'язок рівняння* $QJ=1$. *Тоді функції*

$$I^j(x,u),\qquad \left(\frac{1}{D_xJ}D_x\right)^s I^j(x,u),\quad s=\overline{1,r},$$

де $D_x=\partial_x+u^i_x\partial_{u^i}+u^i_{xx}\partial_{u^i_x}+\dots$ *— оператор повної похідної за змінною* x, *утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів (або універсальний диференціальний інваріант)* r*-го порядку оператора* Q.

Зауважимо, що ідею доведення теореми $1'$ у випадку $m=1$ наведено в [12].

Наслідок 1′. *Для будь-якого оператора* Q *існує повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів* n*-го порядку, в якому кожен інваріант є раціональною функцією змінних* u^i_x, u^i_{xx}, $\dots$, $(u^i)^{(n)}$ *продовженого простору з коефіцієнтами, що залежать від* x *та* u^i.

Наслідок 2′. *Якщо* $I=(I^1(x,u),I^2(x,u),\dots,I^m(x,u))$ *— універсальний інваріант оператора* Q *і* $J=J(x,u)$ *— частинний розв'язок рівняння* $QJ=1$, *то функції*

$$I^j_{(1)}=I^j_{(1)}(x,u_{(1)})=\frac{dI^j}{dJ}=\frac{D_xI^j}{D_xJ}=\frac{I^j_x+I^j_{u^i}u^i_x}{J_x+J_{u^{i'}}u^{i'}_x}\tag{4}$$

утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів строго першого порядку оператора Q.

Наслідок 3. *Компоненти строго першого порядку універсального диференціального інваріанту оператора Q можна шукати у вигляді дробово-лінійних функцій змінних u^i_x продовженого простору з коефіцієнтами, що залежать від x та u^i.*

Наслідок $2'$ можна переформулювати, використовуючи поняття інваріантного диференціала.

Наслідок 4. *Відношення інваріантних диференціалів оператора Q першого і другого роду є його диференціальним інваріантом строго першого порядку. Якщо dI^1, dI^2, ..., dI^m утворюють повний набір незалежних інваріантних диференціалів оператора Q першого роду, то їх відношення з його інваріантним диференціалом другого роду вичерпують функціонально незалежні диференціальні інваріанти строго першого порядку оператора Q.*

Наслідок 5 (теорема Лі). *Нехай $n=m=1$, $I(x,u)$ і $I_{(1)}(x,u,u_x)$ — диференціальні інваріанти нульового і строго першого порядку оператора Q. Тоді функції*

$$I, \quad I_{(1)}, \quad \frac{d^s I_{(1)}}{dI^s} = \left(\frac{1}{D_x I} D_x\right)^s I_{(1)}, \quad s=\overline{1,r-1},$$

утворюють повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів n-го порядку оператора Q.

Оператори G-інваріантного диференціювання у випадку однієї незалежної змінної традиційно шукається у вигляді

$$\mathcal{D} = \frac{1}{D_x I^0} D_x,$$

де I^0 — диференціальний інваріант групи G (див., наприклад, наслідок 5). Тому для побудови універсального диференціального інваріанта довільного порядку однопараметричної групи локальних перетворень з допомогою оператора G-інваріантного диференціювання такого вигляду необхідно знати $m+1$ функціонально незалежних диференціальних інваріантів групи G мінімально можливого порядку, тобто m функціонально незалежних диференціальних інваріантів нульового порядку (або просто інваріантів) і один диференціальний інваріант строго першого порядку. Запропонований в теоремі $1'$ алгоритм дозволяє взагалі уникнути прямої побудови диференціальних інваріантів.

Приклад 1. (Див. для порівняння [3].) Нехай $n = m = 1$, а $G = \mathrm{SO}(2)$ — група поворотів, що діє на $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$, з інфінітезімальним оператором $Q = u\partial_x - x\partial_u$. $I = \sqrt{x^2 + u^2}$ — інваріант групи G (оператора Q), а тому (в позначеннях з доведення теореми 2) $U(x, C) = \pm\sqrt{C^2 - x^2}$. Тоді

$$J = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{C^2 - x^2}} = \pm \arcsin \frac{x}{C} = \pm \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + u^2}}$$

(тут константу інтегрування покладено рівною нулю), звідки

$$I_{(1)} = \frac{I_x + I_u u_x}{J_x + J_u u_x} = \frac{x + u u_x}{-u + x u_x} \sqrt{x^2 + u^2}, \quad \text{або} \quad \widetilde{I}_{(1)} = \frac{x + u u_x}{-u + x u_x}$$

— диференціальний інваріант першого порядку оператора Q.

5. Стандартний підхід та інтегрування систем рівнянь типу Рікаті. Прямим методом диференціальні інваріанти строго першого порядку знаходяться як інваріанти першого продовження

$$Q^{(1)} = \xi^a \partial_{x_a} + \eta^i \partial_{u^i} + (\eta^k_c + \eta^k_{u^j} u^j_c - \xi^b_{x_c} u^k_b - \xi^b_{u^j} u^j_c u^k_b)\partial_{u^k_c}$$

оператора Q, тобто як перші інтеграли відповідної характеристичної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_a}{\xi^a} = \frac{du^i}{\eta^i} = \frac{du^k_c}{\eta^k_c + \eta^k_{u^j} u^j_c - \xi^b_{x_c} u^k_b - \xi^b_{u^j} u^j_c u^k_b}, \tag{5}$$

що залежать не тільки від x та u, а й від інших змінних постору $J_{(1)}$. (Тут u^i_a — змінна продовженого простору $J_{(1)}$, що відповідає похідній $\partial u^i / \partial x_a$; нижні індекси функцій означають диференціювання за відповідними змінними; в останньому рівнянні підсумовування по a, c, i та k немає). Інтегрування системи (5) як правило є технічно складною задачею. За відомого універсального інваріанта $I(x, u)$ оператора Q воно зводиться до інтегрування систем рівнянь типу Ріккаті вигляду

$$\frac{du^k_c}{dx_a} = -\frac{\xi^b_{u^j}}{\xi^a} u^j_c u^k_b + \frac{\eta^k_{u^j}}{\xi^a} u^j_c - \frac{\xi^b_{x_c}}{\xi^a} u^k_b + \frac{\eta^k_{x_c}}{\xi^a} \Bigg|_{\substack{u=U(x_a,C) \\ x_d = X^d(x_a,C),\ d\neq a}}, \tag{6}$$

якщо $\xi^a \neq 0$ для деякого фіксованого a, або

$$\frac{du^k_c}{du^i} = -\frac{\xi^b_{u^j}}{\eta^i} u^j_c u^k_b + \frac{\eta^k_{u^j}}{\eta^i} u^j_c - \frac{\xi^b_{x_c}}{\eta^i} u^k_b + \frac{\eta^k_{x_c}}{\eta^i} \Bigg|_{\substack{x=X(u^i,C), \\ u^l = U^l(u^i,C),\ l\neq i}}, \tag{7}$$

якщо $\eta^i \neq 0$ для деякого фіксованого i. Тут $x_d = X^d(x_a, C)$, $d \neq a$, $u = U(x, C)$ та $x = X(u^i, C)$, $u^l = U^l(u^i, C)$, $l \neq i$, — розв'язки системи алгебраїчних рівнянь $I(x, u) = C$ відносно змінних x_d, $d \neq a$, u та x, u^l, $l \neq i$, відповідно. Константи $C = (C_1, C_2, \ldots, C_{m+n-1})$ в системах (6) і (7) вважаються параметрами. Випадок $\eta^i \neq 0$ зводиться до випадку $\xi^a \neq 0$ з допомогою перетворення годографа:

$$\tilde{x}_a = u^i, \quad \tilde{x}_d = x_d, \quad \tilde{u}^i = x_a, \quad \tilde{u}^l = u^l, \quad d \neq a, \quad l \neq i,$$

$$\tilde{u}^i_a = \frac{1}{u^i_a}, \quad \tilde{u}^i_d = -\frac{u^i_d}{u^i_a}, \quad \tilde{u}^l_a = \frac{u^l_a}{u^i_a}, \quad \tilde{u}^l_d = u^l_d - \frac{u^i_d}{u^i_a} u^l_a.$$

Тому надалі детально розглядається лише випадок $\xi^a \neq 0$.

Запропонований нами в наслідку 2 метод знаходження диференціальних інваріантів строго першого порядку на відміну від стандартного метода дозволяє уникнути прямого інтегрування систем рівнянь типу Ріккаті (6) або (7) і знайти розв'язок задачі через одну квадратуру і диференціювання. Це означає, що *за відомого універсального інваріанта $I(x, u)$ оператора Q системи (6) і (7) завжди інтегруються однією квадратурою.* Дійсно, загальний розв'язок системи (6) задається неявно m незачепленими системами лінійних алгебраїчних рівнянь

$$D_{x_b} \hat{I}^j \Big|_{\substack{u=U(x_a, C) \\ x_d = X^d(x_a, C),\ d \neq a}} = 0,$$

де $\hat{I}^j = I^{j+n-1} + \sum_{d=1}^{n-1} \widetilde{C}_{jd} I^d + \widetilde{C}_{jn} J$, $\widetilde{C}_{ib}$ — довільні сталі. Щоб записати розв'язок в явному вигляді, додатково введемо позначення:

$$\bar{x} = (x_d)^n_{d=1,\, d \neq a}, \quad \bar{X} = (X^d)^n_{d=1,\, d \neq a}, \quad z = x_a,$$

$$I^{\bar{x}} = (I^d)^{n-1}_{d=1}, \quad I^u = (I^{j+n-1})^m_{j=1},$$

$$C^{\bar{x}} = (C_d)^{n-1}_{d=1}, \quad C^u = (C_{j+n-1})^m_{j=1},$$

$$\widetilde{C}' = (\widetilde{C}_{jd})^{m}_{j=1}{}^{n-1}_{d=1}, \quad \widetilde{C}'' = (\widetilde{C}_{jn})^m_{j=1}, \quad \hat{I} = I^u + \widetilde{C}' I^{\bar{x}} + \widetilde{C}'' J.$$

Тоді загальний розв'язок системи (6) дається формулами

$$(u^j_b)^{m}_{j=1}{}^{n}_{b=1} = -\hat{I}^{-1}_u \hat{I}_x \Big|_{\substack{u=U(x_a, C) \\ \bar{x} = \bar{X}(x_a, C)}},$$

або

$$(u^j_a)^m_{j=1} = U_z - U_{C^{\bar{x}}} \bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}} \bar{X}_z + H((\widetilde{C}' + \widetilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}}) \bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}} \bar{X}_z - \widetilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}}),$$

$$(u^j_b)^{m}_{j=1}{}^{n}_{b=1,\, b \neq a} = U_{C^{\bar{x}}} \bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}} - H(\widetilde{C}' + \widetilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}}) \bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}},$$

де $H = (U_{C^u} - U_{C^{\bar{x}}}\bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}}\bar{X}_{C^u})(E + \widetilde{C}'' J_{C^u} - (\widetilde{C}' + \widetilde{C}'' J_{C^{\bar{x}}})\bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}} X_{C^u})^{-1}$, E — одинична матриця розміру $m \times m$; значки вектор-функцій з нижніми індексами з наборів змінних позначають відповідні матриці Якобі. Для існування в деякому околі фіксованої точки (x^0, u^0) всіх обернених матриць, що зустрічаються вище, достатньо вважати сталі $\widetilde{C}_{ib}$ малими і виконати попередньо невироджену лінійну заміну в множині інваріантів таким чином, щоб матриця $I_{(\bar{x},u)}(x^0, u^0)$ була одиничною.

Якщо покласти $\widetilde{C}_{ib} = 0$, то отримаємо частинний розв'язок

$$(u^j_a)^m_{j=1} = U_z - U_{C^{\bar{x}}}\bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}}\bar{X}_z, \quad (u^j_b)^{m}_{j=1}{}^{n}_{b=1,\, b\neq a} = U_{C^{\bar{x}}}\bar{X}^{-1}_{C^{\bar{x}}}.$$

Розв'язок системи (6) в явному вигляді при $n = 1$ необхідно виписувати окремо. Так як в цьому випадку $u = U(x, C)$ — загальний розв'язок системи $du^j/dx = \eta^j(x, u)/\xi(x, u)$, то легко перевірити, що $u_x = U_x(x, C)$ є частинним розв'язком системи (6) (тут, як і в (6), C — набір параметрів). Загальний розв'язок системи (6) має вигляд

$$\begin{aligned} u_x &= -(I_u - \widetilde{C} J_u)^{-1}(I_x + \widetilde{C} J_x)\Big|_{u=U(x,C)} = \\ &= U_z - U_C(E + \widetilde{C} J_C)^{-1}\widetilde{C} J_z \end{aligned} \tag{8}$$

(в останній рівності виконано заміну $x = z$, $u = U(z, C)$), де E — одинична матриця розміру $m\times m$, $\widetilde{C} = (\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \ldots, \widetilde{C}_m)^{\mathrm{T}}$ — стовпчик довільних констант, $I_u = (I^i_{u^j})$, $I_x = (I^i_x)$, $U_z = (U^k_z)$, $U_C = (U^i_{C_j})$. Обернені матриці в (8) завжди існують для достатньо малих $\widetilde{C}_i$.

Приклад 2. Нехай $n = m = 1$, $Q = e^{x+u}(\partial_x + 2x\partial_u)$. $I(x, u) = u - x^2$ — інваріант оператора Q, звідки $u = U(x, C) = x^2 + C$. Тоді

$$J = \int e^{-x-x^2-C} dx = e^{-C}\int e^{-x-x^2} dx = e^{x^2-u}\int e^{-x-x^2} dx,$$

а тому

$$I_{(1)} = \frac{I_x + I_u u_x}{J_x + J_u u_x} = \frac{(u_x - 2x)e^u}{e^{-x} - (u_x - 2x)\int e^{-x-x^2} dx}$$

— диференціальний інваріант першого порядку оператора Q. Рівняння (6) для оператора Q має вигляд

$$\frac{du_x}{dx} = -u_x^2 + (2x - 1)u_x + 2x + 2,$$

а функція $u_x = U_x = 2x$ є його частинним розв'язком.

Приклад 3. Нехай $n = m = 1$, $Q = xu(x\partial_x + ku\partial_u)$, $k \in \mathbb{R}$. $I(x,u) = ux^{-k}$ — інваріант оператора Q, звідки $U(x,C) = Cx^k$. Тоді

$$J = \int \frac{dx}{Cx^{k+2}} = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{C} = \dfrac{\ln x}{xu}, & \text{якщо} \quad k = -1, \\ -\dfrac{x^{-(k+1)}}{(k+1)C} = -\dfrac{1}{(k+1)xu}, & \text{якщо} \quad k \neq -1 \end{cases}$$

(тут константу інтегрування покладено рівною 0). Відповідне рівняння Ріккаті

$$\frac{du_x}{dx} = -\frac{1}{Cx^k}u_x^2 + \frac{2(k-1)}{x}u_x + kCx^{k-2}.$$

Функція $u_x = kCx^{k-1}$ є частинним розв'язком цього рівняння, а його загальний розв'язок задається формулою

$$u_x = -\frac{C}{x^2}\left(1 + \frac{1}{\widehat{C} - \ln x}\right), \quad \text{якщо } k = -1, \quad \text{або}$$

$$u_x = Cx^{k-1}\left(k - \frac{k+1}{1 + \widehat{C}x^{k+1}}\right), \quad \text{якщо } k \neq -1,$$

де $\widehat{C}$ — довільна стала.

Зауваження. Для добре відомих груп перетворень на площині (тобто $n = m = 1$) інтегровність в квадратурах рівнянь (6) і (7) як правило очевидно випливає з вигляду цих рівнянь. Так, коли $\xi_u = 0$ або $\eta_x = 0$, вони є лінійними рівнянням або рівняннями Бернулі відповідно. Якщо G — однопараметрична група конформних перетворень, то $\xi_x = \eta_u$ і $\xi_u = -\eta_x$, а тому в рівняннях (6) і (7) змінні розділяються:

$$\frac{dv}{v^2+1} = \frac{\eta_x}{\xi}dx\,\Big|_{u=U(x,C)} \qquad \text{і} \qquad \frac{dv}{v^2+1} = \frac{\eta_x}{\eta}du\,\Big|_{x=X(u,C)}.$$

5. Висновки. Таким чином, пошук диференціальних інваріантів однопараметричної групи G локальних перетворень у просторі з однією незалежною змінною зводиться теоремами 1 і 2 до побудови універсального інваріанта групи G. Доведення цих теорем не є суттєво чутливим до кількості змінних і, крім того, допускає узагальнення на деякі класи багатопараметричних груп локальних перетворень (або алгебр Лі диференціальних операторів).

[1] Lie S. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit Bekannten Infinitesimalen Transformationen. — Leipzig: B.G. Teubner, 1891. — 568 s.

[2] Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. — М.: Знание, 1989. — 48 с.

[3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

[4] Tresse A. Sur les invariant différentiels des groupes continus de transformations // Acta Math. — 1894. — **18**. — P. 1–88.

[5] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[6] Olver P.J. Differential invariants and invariant differential equations // Lie Groups and their Appl. — 1994. — **1**. — P. 177–192.

[7] Olver P.J. Differential invariants // Acta Applicandae Math. — 1995. — **41**. — P. 271–284.

[8] Olver P.J. Equivalence, invariants, and symmetry. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995. — 541 p.

[9] Olver P.J. Pseudo-stabilization of prolonged group actions. I. The order zero case // J. Nonlin. Math. Phys. — 1997. — **4**, № 3–4. — P. 271–277.

[10] Бойко В.М., Попович Р.О. Про диференціальні інваріанти в просторі двох змінних // Доповіді НАН України. — 2001. — № 5. — С. 7–10.

[11] Попович Р.Е., Бойко В.Н. Дифференциальные инварианты однопараметрической группы локальных преобразований и интегрируемые уравнения Риккати // Вестник Самарского госуниверситета. — 2000, N 4.

[12] Аксенов А.В. Нахождение дифференциальных инвариантов группы обыкновенного дифференциального уравнения без использования продолженного оператора // Тезисы докладов IX Коллоквиума “Современный групповой анализ. Методы и приложения”. — Нижний Новгород, 1992. — С. 4.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 63–66

УДК 517.95:512.816

Групова класифікація багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь

О.Ф. ВАСИЛЕНКО †, ***І.А. ЄГОРЧЕНКО*** ‡

† *Приазовський державний технічний університет, Маріуполь*

‡ *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: iyegorch@imath.kiev.ua

Проведено групову класифікацію в класі багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь вигляду $u_{tt} = \nabla(f(u)\nabla u) + g(u)$.

Group classification in the class of multidimensional nonlinear wave equations of the form $u_{tt} = \nabla(f(u)\nabla u) + g(u)$ is carried out.

1. Вступ. В даній статті проведено групову класифікацію в класі багатовимірних нелінійних хвильових рівнянь вигляду

$$u_{tt} = \nabla(f(u)\nabla u) + g(u), \quad \text{або} \quad u_{tt} = (f(u)u_a)_a + g(u), \tag{1}$$

для однієї дійсної функції $u = u(t, x)$ від $n + 1$ незалежних змінних $t = x_0$ і $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тут і надалі нижній індекс функції позначає диференціювання за відповідною змінною. Індекси a і b змінюються від 1 до n. За індексами, що повторюються, йде підсумовування. $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$, $\partial_a = \partial/\partial x_a$. f і g — довільні гладкі функції залежної змінної u, причому $f(u) > 0$. Для класифікації використано техніку досліджень, запропоновану в [1].

Клас рівнянь (1) з використанням методів симетрійного аналізу, вивчався в багатьох роботах (див., наприклад, [2–5]). Але, наскільки нам відомо, задачу повної групової класифікації в цьому класі ніде не розглянуто. Не зважаючи на існування окремих результатів щодо симетрійних властивостей рівнянь вигляду (1), остаточне твердження щодо класифікації не сформульовано навіть для важливих підкласів, коли $f \equiv 1$ або $g \equiv 0$.

2. Результат класифікації. Введемо позначення:

$$\partial_t = \partial/\partial t, \quad \partial_a = \partial/\partial x_a, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a,\ a < b, \quad I = u\partial_u,$$
$$J_{0a} = t\partial_a + x_a\partial_t, \quad D = t\partial_t + x_a\partial_a, \quad D' = x_a\partial_a + 2\partial_u,$$
$$K_a = 2x_aD + (t^2 - x_bx_b)\partial_a - (n-1)x_aI,$$
$$K_0 = 2tD - (t^2 - x_bx_b)\partial_t - (n-1)tI.$$

Результат групової класифікації щодо рівнянь вигляду (1) сформульовано у вигляді трьох наступних теорем.

Теорема 1. *Ядро G^{ker} основних груп рівнянь вигляду (1) співпадає з групою $E(1) \otimes E(n)$ (прямим добутком груп Евкліда в просторах змінних t і $\vec{x}$ відповідно), алгебра Лі якої $A^{\text{ker}} = e(1) \oplus e(1) = \langle \partial_t,\ \partial_1 \rangle$ при $n = 1$ та $A^{\text{ker}} = e(1) \oplus e(n) = \langle \partial_t \rangle \oplus \langle \partial_a,\ J_{ab} \rangle$ при $n > 1$.*

Теорема 2. *Алгебра Лі A^{equiv} групи еквівалентності G^{equiv} класу рівнянь (1) породжується операторами ∂_t, ∂_a, J_{ab} (при $n \geqslant 2$), $a < b$, ∂_u, $t\partial_t + x_a\partial_a + 2u\partial_u$, $x_a\partial_a + 2f\partial_f$, $t\partial_t + x_a\partial_a - 2g\partial_g$. Дія будь-якого перетворення еквівалентності на функції f, g має вигляд*

$$\tilde{f}(u) = \delta_1 f(\delta_3 u + \delta_0), \quad \tilde{g}(u) = \delta_2 g(\delta_3 u + \delta_0), \tag{2}$$

де $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$, $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$.

Зауваження. Щоб зняти вимогу додатності для константи δ_2 (або δ_3) необхідно врахувати дискретне перетворення еквівалентності рівнянь (1): $\tilde{t} = t,\ \tilde{x} = x,\ \tilde{u} = -u,\ \tilde{f} = f,\ \tilde{g} = -g$.

Теорема 3. *З точністю до перетворень з G^{equiv} для рівнянь (1) існують лише наступні випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності $A^{\max} = A^{\max}(f, g)$ (нижче наведено лише базисні оператори з доповнення до A^{ker}; ε, $\hat{\varepsilon}$ — ненульові сталі, що перетвореннями еквівалентності можна одночасно звести до ± 1):*

I. $f = \text{const} > 0$.

1. $f = 1,\ g = g(u)$: $\quad J_{0a}$;
2. $f = 1,\ g = |u|^{\gamma}$, *де* $\gamma \notin \{0; 1\}$ *та або* $\gamma \neq \frac{n+3}{n-1}$, *або* $n = 1$:
   J_{0a}, $(1-\gamma)D + 2I$;
3. $f = 1,\ g = |u|^{\frac{n+3}{n-1}}$, *де* $n > 1$: $\quad J_{0a}$, $2D - (n-1)I$, K_a, K_0;
4. $f = 1,\ g = \varepsilon e^u$: $\quad J_{0a}$, $D - 2\partial_u$, *якщо* $n > 1$,
   або $\varphi^1\partial_t + \varphi^1\partial_x - 2\dot{\varphi}^1\partial_u$, $\varphi^2\partial_t - \varphi^2\partial_x + 2\dot{\varphi}^2\partial_u$, *якщо* $n = 1$,
   де $\varphi^1 = \varphi^1(x+t)$, $\varphi^2 = \varphi^2(x-t)$ *— довільні гладкі несталі функції своїх аргументів;*

5. $f = 1$, $g = \varepsilon u$: J_{0a}, I, $\chi(t, \vec{x})\partial_u$,
де $\chi = \chi(t, \vec{x})$ *— довільний розв'язок вихідного рівняння;*
6. $f = 1$, $g = 0$: J_{0a}, D, I, $\chi(t, \vec{x})\partial_u$, K_a, K_0,
де $\chi = \chi(t, \vec{x})$ *— довільний розв'язок вихідного рівняння.*

II. $f \neq \mathrm{const}$.

1. $f = f(u)$, $g = 0$: D;
2. $f = \varepsilon e^u$, $g = \hat{\varepsilon} e^{\alpha u}$: $\alpha D - D'$;
3. $f = \varepsilon e^u$, $g = 0$: D, D';
4. $f = \varepsilon |u|^\beta$, $g = \hat{\varepsilon}|u|^\gamma$: $\gamma D - \beta x_a \partial_a - 2u\partial_u$;
5. $f = \varepsilon |u|^\gamma$, $g = 0$, *де* $\gamma \notin \{-4; 0; \frac{-4}{n+2}\}$: D, $\gamma x_a \partial_a + 2u\partial_u$;
6. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = \hat{\varepsilon} u^{-3}$: $2t\partial_t + u\partial_u$, $t^2\partial_t + tu\partial_u$;
7. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = \hat{\varepsilon} u^{-3} - \frac{1}{4}u$: $2\cos t\, \partial_t - \sin t\, u\partial_u$, $2\sin t\, \partial_t + \cos t\, u\partial_u$;
8. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = \hat{\varepsilon} u^{-3} + \frac{1}{4}u$: $e^t(2\partial_t + u\partial_u)$, $e^{-t}(2\partial_t - u\partial_u)$;
9. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = 0$: $2t\partial_t + u\partial_u$, $t^2\partial_t + tu\partial_u$, $2x_a\partial_a - u\partial_u$;
10. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = -\frac{1}{4}u$: $2\cos t\, \partial_t - \sin t\, u\partial_u$, $2\sin t\, \partial_t + \cos t\, u\partial_u$,
$2x_a\partial_a - u\partial_u$;
11. $f = \varepsilon u^{-4}$, $g = \frac{1}{4}u$: $e^t(2\partial_t + u\partial_u)$, $e^{-t}(2\partial_t - u\partial_u)$, $2x_a\partial_a - u\partial_u$;

III. $f \neq \mathrm{const}$. *Випадки, коли і довільні елементи* f *і* g*, для яких є розширення, і склад самого розширення залежать від розмірності простору змінних* $\vec{x}$*.*

$n = 1:$

1. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = \hat{\varepsilon} u$: $2x\partial_x - 3u\partial_u$, $x^2\partial_x - 3xu\partial_u$;
2. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = \frac{3}{4}\varepsilon u^{-1/3} + \hat{\varepsilon} u$: $2\cos x\, \partial_x + 3\sin x\, u\partial_u$,
$2\sin x\, \partial_x - 3\cos x\, u\partial_u$;
3. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = -\frac{3}{4}\varepsilon u^{-1/3} + \hat{\varepsilon} u$: $e^x(2\partial_x - 3u\partial_u)$, $e^{-x}(2\partial_x + 3u\partial_u)$;
4. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = 0$: $2x\partial_x - 3u\partial_u$, $x^2\partial_x - 3xu\partial_u$, $2t\partial_t + 3u\partial_u$;
5. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = \frac{3}{4}\varepsilon u^{-1/3}$: $2\cos x\, \partial_x + 3\sin x\, u\partial_u$,
$2\sin x\, \partial_x - 3\cos x\, u\partial_u$, $2t\partial_t + 3u\partial_u$;
6. $f = \varepsilon u^{-4/3}$, $g = -\frac{3}{4}\varepsilon u^{-1/3}$: $e^x(2\partial_x - 3u\partial_u)$, $e^{-x}(2\partial_x + 3u\partial_u)$,
$2t\partial_t + 3u\partial_u$;

$n = 2:$

1. $f = \varepsilon u^{-1}$, $g = \hat{\varepsilon} u$: $\quad \xi^1\partial_1 + \xi^2\partial_2 - 2\xi^1_1 u\partial_u$;
2. $f = \varepsilon u^{-1}$, $g = 0$: $\quad \xi^1\partial_1 + \xi^2\partial_2 - 2\xi^1_1 u\partial_u$, $t\partial_t + 2u\partial_u$;

   тут $(\xi^1, \xi^2) = (\xi^1(x_1, x_2), \xi^2(x_1, x_2))$ *— довільний розв'язок системи Коші–Рімана* $\xi^1_1 = \xi^2_2$, $\xi^1_2 = -\xi^2_1$;

$n = 3:$

1. $f = \varepsilon|u|^{-\frac{4}{n+2}}$, $g = \hat{\varepsilon} u$:
   $x_a\partial_a - \frac{n+2}{2}u\partial_u$, $2x_a x_b\partial_b - x_b x_b\partial_a - (n+2)x_a u\partial_u$;
2. $f = \varepsilon|u|^{-\frac{4}{n+2}}$, $g = 0$:
   $x_a\partial_a - \frac{n+2}{2}u\partial_u$, $2x_a x_b\partial_b - x_b x_b\partial_a - (n+2)x_a u\partial_u$, $t\partial_t + \frac{n+2}{2}u\partial_u$.

3. Висновки. Отримані результати є цікавими з кількох причин. Проведено повну групову класифікацію в класі рівнянь (1), що дозволяє твердити про відсутність випадків розширення групи симетрії, нееквівалентних випадкам з теореми 3. З отриманого результату можна легко виокремити твердження щодо повної групової класифікації в двох важливих підкласах класу (1) (один — з $f \equiv 1$, інший — з $g \equiv 0$). Крім відомих випадків розширення симетрії (всі випадки з $f = \mathrm{const}$ та деякі випадки з $g = 0$), знайдено цілу низку нових випадків розширення. Серед них є такі, що мають неочевидну і нестандартну симетрію.

Наступним кроком симетрійного аналізу виокремлених рівнянь з широкою симетрією є ліївська редукція та побудова їх точних розв'язків. Ці результати разом з докладним доведенням класифікації будуть темою наступних публікацій.

Автори висловлюють щиру подяку Р.О. Поповичу за постановку задачі та плідні обговорення результатів, що містяться в статті.

[1] Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера // Укр. матем. журн. — 2001. — **53**, Буде опубліковано.

[2] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ // Arch. Math. — 1881. — **8**, № 1. — S. 112–125.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — К.: Наукова думка, 1989. — 336 с.

[4] Ames W.F., Adams E., Lohner R.J. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non. Mech. — 1981. — **16**, № 5–6. — P. 439–447.

[5] Oron A., Rosenau Ph. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. — 1986. — **118**, № 4. — P. 172–176.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 67–77

УДК 517.958:530.145.6

Tensor-bispinor equation for doublets

A.V. GALKIN

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: galkin@imath.kiev.ua

Розглянуто тензор-биспінорні рівняння для дублетів часток з довільним напівцілим спіном і ненульовою масою, що взаємодіють з зовнішним електромагнітним полем. Отримано формулу для енергії частки з спіном $\frac{3}{2}$ у постійному магнітному полі і знайдено умову, коли $\varepsilon^2 \geq 0$ для всіх значень магнітного полю і довільної величини гіромагнітного співвідношення.

In the present paper we consider tensor-bispinor equations, which describe doublets of particles with an arbitrary half-integer spin and nonzero masses interacting with external electromagnetic field by using nonminimal coupling. We also obtain the energy levels of the particle with spin $\frac{3}{2}$ in constant magnetic field and find the conditions when $\varepsilon^2 \geq 0$ for all values of magnetic field and an arbitrary gyromagnetic ratio g.

1. Introduction. The development of the theories of unification of fundamental particle interaction needs a consistent description of particle with higher spin. Moreover, so called baryon resonances with spin $s = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ has been descovered experimentally. Such resonances exsist in parity doublet and parity singlet as well.

The problem of description of motion equation for particles with arbitrary spin was first formulated and parity solved by Dirac [2]. In numerous paper which appear later a number of such equations were proposed and analyzed. However, all such equations except the Dirac equation for electron are not satisfactory [3]–[8]. The main deffect of these equation are acausal propagation of solutions, complex energies and incorrect value of the gyromagnetic ratio etc.

In the present paper we proposed the equation for doublets of massive particles with an arbitrary half-integer spins, interacting with external electromagnetic field, which does not have many defects enumerated above. In our approach the particle with spin $s = n + \frac{1}{2}$ is described by irreducible antisymmetric tensor-bispinor of rank $2n$.

Tensor-bispinor equations for particles with spin $\frac{3}{2}$ were considered in [7]–[10]. We generalize these results for particles of arbitrary half-integer spin and for the case of linear and quadratic anomalous interactions, with external electromagnetic field.

Finally we consider the motion of particle with spin $\frac{3}{2}$ in constant magnetic field and show that difficulty with the complex energy levels can be overcomed using non-linear anomalous interaction.

2. Free equation for doublets. In this section we propose the model describing particles with arbitrary half-integer spins in terms of irreducible antisymmetric tensor-bispinor $\Psi^{[\mu_1,\nu_1][\mu_2,\nu_2]\ldots[\mu_n,\nu_n]}$ of rank $2n$ ($n = s-\frac{1}{2}$) satisfyng the condition

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi^{[\mu\nu][\mu_1\nu_1]\ldots[\mu_{n-1}\nu_{n-1}]} = 0. \tag{1}$$

Moreover, $\Psi^{[\mu_1,\nu_1]\ldots[\mu_n,\nu_n]}$ satisfy the Dirac equation

$$(\gamma_\lambda p^\lambda - m)\Psi^{[\mu_1,\nu_1]\ldots[\mu_n,\nu_n]} = 0, \tag{2}$$

where $p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Commuting $\gamma_\mu\gamma_\nu$ and $(\gamma_\lambda p^\lambda - m)$, we come to the secondary constraint for $\Psi^{[\mu_1\nu_1][\mu_2\nu_2]\ldots[\mu_n\nu_n]}$

$$p_\mu\gamma_\nu\Psi^{[\mu\nu][\mu_1\nu_1]\ldots[\mu_{n-1}\nu_{n-1}]} = 0. \tag{3}$$

The wave function $\Psi^{[\mu_1\nu_1][\mu_2\nu_2]\ldots[\mu_n\nu_n]}$ belong to the carier space of the representation

$$\begin{gathered}\left[D\left(s-\frac{1}{2},0\right)\oplus D\left(0,s-\frac{1}{2}\right)\right]\otimes\left[D\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus D\left(0,\frac{1}{2}\right)\right]=\\ = D(s,0)\oplus D(0,s)\oplus D\left(s-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\oplus D\left(\frac{1}{2},s-\frac{1}{2}\right)\oplus\\ \oplus D(s-1,0)\oplus D(0,s-1).\end{gathered} \tag{4}$$

of the Lorentz group. Thus, the wave function $\Psi^{[\mu_1\nu_1][\mu_2\nu_2]\ldots[\mu_n\nu_n]}$ has $16s$ components.

Constraint (1) removed the states which correspond to the representation $D(s-1,0)\oplus D(0,s-1)$. The secondary constraint (3) nullifies the remaining part of non-physical components and as a result we have exactly $4(2s+1)$ independent components, i.e. twice more than it is necessary for describing particles with spin s.

In order to introduce interaction of higher spin particles with external electromagnetic field it is necessary to write equations (1)–(3) as a single equation. For this purpose we present the wave function $\Psi^{[\mu_1\nu_1]\dots[\mu_n\nu_n]}$ in the form

$$\Psi^{[\mu_1\nu_1]\dots[\mu_n\nu_n]} = \Phi^{[\mu_1\nu_1]\dots[\mu_n\nu_n]} + \frac{1}{2}\Big(\gamma^{[\mu_1}A^{\nu_1][\mu_2\nu_2]\dots[\mu_n\nu_n]} + \\ + \gamma^{[\mu_2}A^{\nu_2][\mu_1\nu_1][\mu_3\nu_3]\dots[\mu_n\nu_n]} + \dots + \gamma^{[\mu_n}A^{\nu_n][\mu_1\nu_1]\dots[\mu_{n-1}\nu_{n-1}]}\Big), \\ \gamma_{\mu_1}\Phi^{[\mu_1\nu_1][\mu_2\nu_2]\dots[\mu_n\nu_n]} = 0, \\ \gamma_\lambda A^{\lambda[\mu_2\nu_2]\dots[\mu_n\nu_n]} = \gamma_{\mu_2}A^{\lambda[\mu_2\nu_2]\dots[\mu_n\nu_n]} = 0. \tag{5}$$

Here we take into account that $\Psi^{[\mu_1\nu_1]\dots[\mu_n\nu_n]}$ satisfy the condition (1). Then the single equation for the spin $s = n + \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ has the form

$$(\gamma_\lambda p^\lambda - m)\Psi^{[\mu_1\nu_1][\mu_2\nu_2]\dots[\mu_n\nu_n]} - \frac{n}{2(8n-11)}\sum_{i=1}^{n} P_1(\mu_i\nu_i) + \\ + \frac{n}{(8n-11)}\sum_{i,j=1(j>i)}^{n} P_2(\mu_i\nu_i;\mu_j\nu_j) = 0, \\ \gamma_{\mu_1}\gamma_{\nu_1}\Psi^{[\mu_1\nu_1]\dots[\mu_n\nu_n]} = 0 \tag{6}$$

where $P_1(\mu_i\nu_i)$ and $P_2(\mu_i\nu_i;\mu_j\nu_j)$ are

$$P_1(\mu_i\nu_i) = [\gamma_{\mu_i}, \gamma_{\nu_i}]p_\lambda A^{\lambda[\mu_1\nu_1]\dots[\mu_{i-1}\nu_{i-1}][\mu_{i+1}\nu_{i+1}]\dots[\mu_n\nu_n]}, \\ P_2(\mu_i\nu_i;\mu_j\nu_j) = P_1(\mu_i\nu_j) - P_1(\mu_i\mu_j) + P_1(\nu_i\mu_j) - P_1(\nu_i\nu_j), \tag{7}$$

After contracting (6) with $p_{\mu_1}\gamma_{\nu_1} - p_{\nu_1}\gamma_{\mu_1}$ we come to constraint (3).

For an important particular case of spin $s = \frac{3}{2}$ equation (6) reads as

$$(\gamma_\lambda p^\lambda - m)\Psi^{\mu\nu} + \frac{1}{6}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]p_\lambda A^\lambda = 0, \\ \gamma_\mu\gamma_\nu\Psi^{\mu\nu} = 0, \tag{8}$$

where $\Psi^{\mu\nu} = \Phi^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\gamma^\mu A^\nu - \gamma^\nu A^\mu)$ and $\gamma_\mu\Phi^{\mu\nu} = \gamma_\mu A^\mu = 0$. We also can rewrite this equation in the form

$$(\gamma_\lambda p^\lambda - m)\Psi^{\mu\nu} + \frac{1}{12}(p^\mu\gamma^\nu - p^\nu\gamma^\mu)[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\Psi^{[\rho\sigma]} - \\ - \frac{1}{12}[\gamma^\mu, \gamma^\nu](p_\rho\gamma_\sigma - p_\sigma\gamma_\rho)\Psi^{[\rho\sigma]} + \\ + \frac{1}{24}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]\gamma_\lambda p^\lambda[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\Psi^{[\rho\sigma]} = 0, \tag{9}$$

If we contract (9) with $[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$ we obtain that $\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi^{\mu\nu}=0$ and after contracting (9) with $p_\mu\gamma_\nu - p_\nu\gamma_\mu$ we come to the constraint $p_\mu\gamma_\nu\Psi^{\mu\nu}=0$.

The propagator corresponding to this equation has the form

$$G^{\mu\nu\rho\sigma}(p)=\frac{(\gamma_\lambda p^\lambda+m)}{p^2-m^2}\Bigg(\frac{1}{2}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}-g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})-$$
$$-\frac{1}{12m}[\gamma^\mu,\gamma^\nu](p^\rho\gamma^\sigma-p^\sigma\gamma^\rho)+\frac{1}{12m}(p^\mu\gamma^\nu-p^\nu\gamma^\mu)[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]+ \quad (10)$$
$$+\frac{1}{24m}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\gamma_\lambda p^\lambda[\gamma^\rho,\gamma^\sigma]\Bigg).$$

Finally we note that equations (6) are equivalent to the equations for an arbitrary spins in the Dirac form introduced in [11]. However the tensor-bispinor formalism is more convenient for describing the minimal and anomalous interaction with electromagnetic field.

3. Anomalous interaction linear in electromagnetic field. We start with minimal interaction, which can be introduced in equation (6) by using the substitution

$$p_\mu \longrightarrow \pi_\mu = p_\mu - eA_\mu, \quad (11)$$

where A_μ is the vector-potential of electromagnetic field.

Let us analyse in detail equation (6) for spin-$\frac{3}{2}$. In this case we can use the equivalent form (9) and we have

$$(\gamma_\lambda\pi^\lambda-m)\Psi^{\mu\nu}+\frac{1}{12}(\pi^\mu\gamma^\nu-\pi^\nu\gamma^\mu)[\gamma_\rho,\gamma_\sigma]\Psi^{[\sigma\rho]}-$$
$$-\frac{1}{12}[\gamma^\mu,\gamma^\nu](\pi_\rho\gamma_\sigma-\pi_\sigma\gamma_\rho)\Psi^{[\rho\sigma]}+ \quad (12)$$
$$+\frac{1}{24}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\gamma_\lambda\pi^\lambda[\gamma_\rho,\gamma_\sigma]\Psi^{[\rho\sigma]}=0.$$

Contracting (12) with $\frac{i}{4}[\gamma_\mu,\gamma_\nu]$ and then with $(\pi_\mu\gamma_\nu-\pi_\nu\gamma_\mu)$ we come to the constraints:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\Psi^{\mu\nu}=0, \quad (13)$$

$$\pi_\mu\gamma_\nu\Psi^{\mu\nu}=\frac{ie}{m}(F_{\mu\nu}-\gamma^\lambda\gamma_\nu F_{\mu\lambda})\Psi^{\mu\nu}, \quad (14)$$

where $F_{\mu\nu}=i(p_\mu A_\nu-p_\nu A_\mu)$ is the tensor of electromagnetic field.

Substituting (13) and (14) in (12) we obtain an equation for $\Psi^{\mu\nu}$

$$(\gamma_\lambda \pi^\lambda - m)\Psi^{\mu\nu} - \frac{ie}{6m}[\gamma^\mu, \gamma^\nu](F_{\rho\lambda} - \gamma^\sigma\gamma_\lambda F_{\rho\sigma})\Psi^{\rho\lambda} = 0. \tag{15}$$

Equation (15) is equivalent introduced in [11]. It can be found by using the substitution

$$\Psi^{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\left(\Phi_c^{(1)} + \Phi_c^{(2)}\right), \qquad \Psi^{0c} = \frac{i}{2}\left(\Phi_c^{(2)} - \Phi_c^{(1)}\right), \tag{16}$$

$a, b, c = 1, 2, 3, \ldots$, $\Phi_c^{(1)}$ and $\Phi_c^{(2)}$ are bispinors.

Now let us generalize equation (12) by adding the term $T^{\mu\nu}_{\rho\sigma}\Psi^{\rho\sigma}$ which is linear in $F^{\mu\nu}$, i.e. introduce so-called anomalous interaction [3]:

$$\begin{aligned}(\gamma_\lambda\pi^\lambda - m)\Psi^{\mu\nu} &+ \frac{1}{12}(\pi^\mu\gamma^\nu - \pi^\nu\gamma^\mu)[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\Psi^{\rho\sigma} - \\ &- \frac{1}{12}[\gamma_\mu, \gamma_\nu](\pi_\rho\gamma_\sigma - \pi_\sigma\gamma_\rho)\Psi^{\rho\sigma} + \\ &+ \frac{1}{24}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\gamma_\lambda\pi^\lambda[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\Psi^{\rho\sigma} + T^{\mu\nu}_{\rho\sigma}\Psi^{\rho\sigma} = 0.\end{aligned} \tag{17}$$

We suppose that the following relation is satisfied

$$\gamma_\mu T^{\mu\nu}_{\rho\sigma} = 0. \tag{18}$$

It is possible to show that (18) is the necessary and sufficient condition to obtain consistent equation (17) whose solutions propagate with the velocity less then the velocity of light. Using $F^{\mu\nu}$, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, $g_{\mu\nu}$ and γ_μ one can construct the basis antisymmetric tensor-bispinors linear in $F^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
T^{\mu\nu}_{1\ \rho\sigma} &= F^\nu_\rho\gamma^\mu\gamma_\sigma - F^\mu_\rho\gamma^\nu\gamma_\sigma - F^\nu_\sigma\gamma^\mu\gamma_\rho + F^\mu_\sigma\gamma^\nu\gamma_\rho, \\
T^{\mu\nu}_{2\ \rho\sigma} &= F^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - F^\nu_\rho\delta^\mu_\sigma - F^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho + F^\nu_\sigma\delta^\mu_\rho, \\
T^{\mu\nu}_{3\ \rho\sigma} &= \gamma^\nu\gamma^\lambda F_{\rho\lambda}\delta^\mu_\sigma - \gamma^\mu\gamma^\lambda F_{\rho\lambda}\delta^\nu_\sigma - \gamma^\nu\gamma^\lambda F_{\sigma\lambda}\delta^\mu_\rho + \gamma^\mu\gamma^\lambda F_{\sigma\lambda}\delta^\nu_\rho + \\
&\qquad + \gamma_\rho\gamma^\lambda F^\nu_\lambda\delta^\mu_\sigma - \gamma_\rho\gamma^\lambda F^\mu_\lambda\delta^\nu_\sigma + \gamma_\sigma\gamma^\lambda F^\mu_\lambda\delta^\nu_\rho - \gamma_\sigma\gamma^\lambda F^\nu_\lambda\delta^\mu_\rho, \\
T^{\mu\nu}_{4\ \rho\sigma} &= (\delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho - \delta^\nu_\sigma\delta^\mu_\rho)\gamma_\alpha\gamma_\beta F^{\alpha\beta}, \\
T^{\mu\nu}_{5\ \rho\sigma} &= \gamma_4(\tilde{F}^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \tilde{F}^\nu_\rho\delta^\mu_\sigma - \tilde{F}^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho + \tilde{F}^\nu_\sigma\delta^\mu_\rho), \\
T^{\mu\nu}_{6\ \rho\sigma} &= \gamma_4(F^\mu_\alpha\epsilon^{\alpha\nu}_{\rho\sigma} - F^\nu_\alpha\epsilon^{\alpha\mu}_{\rho\sigma} + F_{\alpha\rho}\epsilon^{\alpha\mu\nu}{}_\sigma - F_{\alpha\sigma}\epsilon^{\alpha\mu\nu}{}_\rho),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}_{7\ \rho\sigma} &= (\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)F_{\rho\sigma} + F^{\mu\nu}(\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\rho),\\
T^{\mu\nu}_{8\ \rho\sigma} &= \gamma^\nu\gamma^\lambda F_{\rho\lambda}\delta^\mu_\sigma - \gamma^\mu\gamma^\lambda F_{\rho\lambda}\delta^\nu_\sigma - \gamma^\nu\gamma^\lambda F_{\sigma\lambda}\delta^\mu_\rho + \gamma^\mu\gamma^\lambda F_{\sigma\lambda}\delta^\nu_\rho -\\
&\quad - \gamma_\rho\gamma^\lambda F^\nu_\lambda\delta^\mu_\sigma + \gamma_\rho\gamma^\lambda F^\mu_\lambda\delta^\nu_\sigma - \gamma_\sigma\gamma^\lambda F^\mu_\lambda\delta^\nu_\rho + \gamma_\sigma\gamma^\lambda F^\nu_\lambda\delta^\mu_\rho, \qquad (19)\\
T^{\mu\nu}_{9\ \rho\sigma} &= \gamma_4(F^\mu_\alpha\epsilon^{\alpha\nu}_{\ \ \rho\sigma} - F^\nu_\alpha\epsilon^{\alpha\mu}_{\ \ \rho\sigma} - F_{\alpha\rho}\epsilon^{\alpha\mu\nu}{}_\sigma + F_{\alpha\sigma}\epsilon^{\alpha\mu\nu}{}_\rho),\\
T^{\mu\nu}_{10\ \rho\sigma} &= (\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)F_{\rho\sigma} - F^{\mu\nu}(\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\rho),
\end{aligned}
$$

here $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$.

Then the general form of $T^{\mu\nu}_{\rho\sigma}$ is the following

$$
T^{\mu\nu}_{\rho\sigma} = \sum_{i=1}^{10}\alpha_i T^{\mu\nu}_{i\ \rho\sigma}, \tag{20}
$$

where α_i are an arbitrary constants.

Using (18) and asking for existence of Hermitian Lagrangian correspondingly to (17) we come to the conditions:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = \alpha_6 = -\alpha_9 = \frac{\lambda}{2}, \qquad \alpha_2 = 2\lambda,\\
&\alpha_3 = \alpha_8 = \frac{\lambda}{4}, \qquad \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_{10} = 0,
\end{aligned} \tag{21}
$$

here λ is an arbitrary constant.

Substituting (19)–(21), into (17) we can write down equation (17) in the form

$$
\begin{aligned}
&(\gamma_\lambda\pi^\lambda - m)\Psi^{\mu\nu} + \frac{ie}{m}((1+\lambda)(F^\nu_\rho\gamma^\mu\gamma_\sigma - F^\mu_\rho\gamma^\nu\gamma_\sigma)\Psi^{\rho\sigma} +\\
&\quad + (1+\lambda)(\gamma^\nu\gamma^\lambda F_{\rho\lambda}\Psi^{\rho\mu} - \gamma^\mu\gamma^\lambda F_{\rho\lambda}\Psi^{\rho\nu}) +\\
&\quad + (1+4\lambda)(F^\mu_\rho\Psi^{\rho\nu} - F^\nu_\rho\Psi^{\rho\mu}) + (1+2\lambda)\gamma_4\epsilon^{\mu\nu\lambda}_{\sigma}F_{\rho\lambda}\Psi^{\rho\sigma}) = 0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Using (16) this equation can be expressed in the Dirac-like form

$$
\begin{aligned}
&\Big(\Gamma_\mu\pi^\mu - m + \frac{e}{4m}(1 - i\Gamma_4)\times\\
&\quad \times\left(\frac{i}{4}(g-2)[\Gamma_\mu,\Gamma_\nu] + g\tau_{\mu\nu}\right)F^{\mu\nu}\Big)\Psi^{(1)} = 0,
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\Gamma_\mu\pi^\mu - m + \frac{e}{4m}(1 + i\Gamma_4)\times\\
&\quad \times\left(\frac{i}{4}(g-2)[\Gamma_\mu,\Gamma_\nu] + g\tau_{\mu\nu}\right)F^{\mu\nu}\Big)\Psi^{(2)} = 0,
\end{aligned} \tag{24}
$$

here $g = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$, $\Psi^{(1)} = (\Phi_1^{(1)}, \Phi_2^{(1)}, \Phi_3^{(1)})^T$, $\Psi^{(2)} = (\Phi_1^{(2)}, \Phi_2^{(2)}, \Phi_3^{(2)})^T$, $S_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\Gamma_\mu, \Gamma_\nu] + \tau_{\mu\nu}$ and $\tau_{\mu\nu}$ satisfy the relations $\tau_{ab} = \epsilon_{abc}\tau_c$, $\tau_{0a} = i\tau_a$, $\tau_a\tau_a = \tau(\tau+1)$, $[\tau_a, \tau_b] = i\epsilon_{abc}\tau_c$, $a, b, c = 1, 2, 3$. Matrices Γ_μ and τ_a can be represented in the following forms $\Gamma_\mu = \gamma_\mu \otimes I_3$, $\tau_a = I_4 \otimes \hat{\tau}_a$, symbol $\otimes$ designates the direct product of matrices, $\hat{\tau}_a$ are 3×3 matrices, realizating the representation $D(1)$ of the algebra $AO(3)$, I_3 and I_4 are the unit matrices of demention 3×3 and 4×4 respectively.

In the representation (16) constraints (13) and (14) are reduced to the forms

$$[(\Gamma_\mu\pi^\mu + m)(1 + i\Gamma_4)(S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 3)]\Psi^{(1)} = 24m\Psi^{(1)}, \tag{25}$$

$$[(\Gamma_\mu\pi^\mu + m)(1 - i\Gamma_4)(S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 3)]\Psi^{(2)} = 24m\Psi^{(2)}. \tag{26}$$

We see that the value $g = 2$ for arbitrary parameter g correspond to the most simple form of equation (23), (24). It is interesting to note that exactly this value of g is predicted by string theory and is accepted to be correct.

4. Anomalous interaction quadratic in electromagnetic field. In section 3 we consider the anomalous interaction linear in $F^{\mu\nu}$. Here we analyze anomalous interaction quadratic in $F^{\mu\nu}$.

The simplest method to introduce such anomalous interaction consists of modernization equation (17) to the form

$$\begin{aligned}(\gamma_\lambda p^\lambda - m)\Psi^{\mu\nu} + \frac{1}{12}(\pi^\mu\gamma^\nu - \pi^\nu\gamma^\mu)[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\Psi^{\rho\sigma} -\\ - \frac{1}{12}[\gamma_\mu, \gamma_\nu](\pi_\rho\gamma_\sigma - \pi_\sigma\gamma_\rho)\Psi^{\rho\sigma} + \frac{1}{24}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\gamma_\lambda\pi^\lambda[\gamma_\rho, \gamma_\sigma]\Psi^{\rho\sigma} + \\ + T^{\mu\nu}_{\rho\sigma}\Psi^{\rho\sigma} + T^{\mu\nu}_{\rho\sigma}T^{\rho\sigma}_{\delta\epsilon}\Psi^{\delta\epsilon} = 0,\end{aligned} \tag{27}$$

with $T^{\mu\nu}_{\rho\sigma}$ found in section 3 (see (19)–(21)). Using (16) we come to the equations for $\Psi^{(1)}$ and $\Psi^{(2)}$ which generalize (23)–(24)

$$\begin{aligned}\Big(\Gamma_\mu\pi^\mu - m + \frac{e}{4m}(1 - i\Gamma_4)\times\\ \times \left(gS_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\Gamma_\mu\Gamma_\nu F^{\mu\nu} + g_1(S_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2\right)\Big)\Psi^{(1)} = 0,\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\Big(\Gamma_\mu\pi^\mu - m + \frac{e}{4m}(1 + i\Gamma_4)\times\\ \times \left(gS_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\Gamma_\mu\Gamma_\nu F^{\mu\nu} + g_1(S_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2\right)\Big)\Psi^{(2)} = 0.\end{aligned} \tag{29}$$

Thus in contrast with the anomalous interaction linear in $F^{\mu\nu}$ the anomalous interaction quadratic in $F^{\mu\nu}$ gives us more freedom (in this case we have two constants g and g_1). This additional freedom can be used to overcome the difficulty with complex energy levels for the particle in constant magnetic field when $g > \frac{2}{3}$, indicated below.

5. Particle with spin $s = \frac{3}{2}$ in constant magnetic field. Let us use proposed equations to solve the problem of interaction of charged particle of spin $\frac{3}{2}$ with the constant and homogeneous magnetic field.

We start equations (28)–(29)which can be written in the following equivalent form

$$\left(\pi_\mu\pi^\mu - m^2 + \frac{eg}{2}S_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{eg_1}{2}(S_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2\right)\Psi_+^{(1)} = 0, \tag{30}$$

$$(S_{\mu\nu}S^{\mu\nu} - 15)\Psi_+^{(1)} = 0, \tag{31}$$

$$\Psi_-^{(1)} = \frac{1}{m}\Gamma_\mu\pi^\mu\Psi_+^{(1)}, \qquad \Psi^{(1)} = \Psi_+^{(1)} + \Psi_-^{(1)} \tag{32}$$

(a similiar equation can be obtained for (29)).

The tensor-bispinor $F^{\mu\nu}$ corresponding to the constant and homogeneous magnetic field are of the form

$$F_{0a} = F_{23} = -F_{32} = F_{31} = -F_{13} = 0, \qquad a = 1, 2, 3,$$
$$F_{12} = -F_{21} = H_3 = H, \qquad H \geq 0,$$

H is a value of magnetic field.

The general form of the solution of equation (31), (32) is [11]

$$\Psi_+^{(1)} = \begin{pmatrix} \Phi_{\frac{3}{2}}^{(1)} \\ \hat{0} \\ \frac{1}{m}\left(\varepsilon + \frac{2}{3}S_a\pi_a\right)\Phi_{\frac{3}{2}}^{(1)} \\ -\frac{2}{3m}K_a^{\frac{3}{2}}\pi_a\Phi_{\frac{3}{2}}^{(1)} \end{pmatrix},$$

here

$$\left(K_3^{\frac{3}{2}}\right)_{mm'} = \delta_{mm'}\sqrt{\frac{9}{4} - m^2},$$

$$\left(K_1^{\frac{3}{2}}\right)_{mm'} \pm i\left(K_2^{\frac{3}{2}}\right)_{mm'} = \pm\delta_{m\pm m'}\sqrt{\frac{3}{2} \mp m(m \mp 1) \pm 3m},$$

$m, m' = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, $\hat{0} = (0,0)^T$, $\Phi^{(1)}_{\frac{3}{2}}$ is a 4 component spinor substituting $\Psi^{(1)}_{+}$ into (30) we come to the equation

$$\begin{aligned} &\left[p^2 + e^2H^2x_2^2 - eH(gS_3 + 2g_1S_3^2H + 2x_2p_1)\right]\Phi^{(1)}_{\frac{3}{2}} = \\ &\qquad = (\varepsilon^2 - m^2)\Phi^{(1)}_{\frac{3}{2}}. \end{aligned} \tag{33}$$

So the problem of describing the motion of particle with spin $\frac{3}{2}$ reduce to the solution of equation (33).

Using the eigenvectors $\Omega^{\frac{3}{2}}_{\nu}$, $(\nu = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ of matrix S_3 we can represent $\Phi_{\frac{3}{2}}$ in the form

$$\Phi^{(1)}_{\frac{3}{2}} = \exp(i(p_1x_1 + p_3x_3)) \sum_{\nu=-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} f^{\frac{3}{2}}_{\nu}(x_2)\Omega^{\frac{3}{2}}_{\nu},$$

here $f^{\frac{3}{2}}_{\nu}(x_2)$ are unknown functions, $\Omega^{\frac{3}{2}}_{\nu}$ are 4 components spinor eigenvectors of S_3, $S_3\Omega^{\frac{3}{2}}_{\nu} = \nu\Omega^{\frac{3}{2}}_{\nu}$ and $\Omega^{\frac{3}{2}}_{\nu}$ are:

$$\Omega^{\frac{3}{2}}_{-\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^{\frac{3}{2}}_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^{\frac{3}{2}}_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^{\frac{3}{2}}_{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

The functions $f^{\frac{3}{2}}_{\nu}$ satisfy the equation

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + y^2\right) f^{\frac{3}{2}}_{\nu}(y) = \eta f^{\frac{3}{2}}{}_{\nu}(y),$$

where $\eta = \frac{\varepsilon^2 - m^2 - p_3^2}{eH} + \nu(g + 2g_1\nu H)$, $x_2 = \frac{1}{eH}(p_1 + \sqrt{eH}y)$.

Requiring that $f^{\frac{3}{2}}{}_{\nu}(y) \to 0$ when $y \to \pm\infty$ we have

$$\eta = 2n + 1, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Then the energy levels for the particle with spin $s = \frac{3}{2}$ are

$$\varepsilon^2 = m^2 + p_3^2 + eH(2n + 1 - \nu(g + 2g_1\nu H)). \tag{34}$$

We note that for the case of anomalous interaction linear in $F^{\mu\nu}$ (i.e. for $g_1 = 0$) ε^2 can be negative provided $n = p_3 = 0$, $(\nu g - 1)eH < m^2$. Thus the diffuclty with complex energies indicated earlier for spin-1 equation [13] appears for our spin $\frac{3}{2}$ equation also. However, this difficulty is overcomed choosing $g_1 \neq 0$, namely

$$g_1 \leq -\frac{(3g-2)^2 e}{72m^2}. \tag{35}$$

6. Discussion. Thus in this paper we present the equations for doublets of particles with an arbitrary half-integer spin s, the equation for particles with spin-$\frac{3}{2}$ was considered in details, which include tensor-spinor. Using the approach proposed in [11] it is possible to prove that these equations are casual, i.e. thier solutions propagate with the velocity less than light velocity.

As we show the corresponding constants for anamalous interaction can be chosen in such way that the equation does not lead to the difficulties with complex energies of particle interact with the constant magnetic field, which are typical for higer spiun relativistic wave equations.

Acknowledgments. I would like to thank Prof. A. Nikitin for useful discussion and suggestion.

[1] Particle Data Group // Phys. Rev. D. — 1996. — **54**, № 1. — P. 1–30.

[2] Dirac P.A.M. Relativistic wave equations // Proc. R. Soc. A. — 1936. — **155**. — P. 447–459.

[3] Fierz M., Pauli W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field // Proc. R. Soc. A. — 1939. — **173**. — P. 211–232.

[4] Rarita W., Schwinger J. On a theory of particles with half-integer spin // Phys. Rev. — 1941. — **60**, № 1. — P. 61–62.

[5] Hurley W.J. Nonrelativistic quantum mechanics for particles with arbitrary spin // Phys. Rev. D. — 1971. — **4**, № 10. — P. 2339–2347.

[6] Velo G., Zwanziger D. Propagation and quantization of Rarita–Schwinger waves in an external electro-magnetic potential // Phys. Rev. — 1969. — **186**, № 5. — P. 218–226.

[7] Wightman A.S. Troubles in the external field problem for invariant wave equations // Proc. Sympos. Pure Math. — 1971. — **23**. — P. 441–453.

[8] Johnson K., Sudarshan E.C.G. The impossibility of a consistent theory of charged higher spin Fermi fields // Ann. Phys. N.Y. — 1961. — **13**, № 1. — P. 126–145.

[9] Lomont J.S., Moses H.E. Dirac-like wave equations for particles of nonzero rest masses and their quantizations // Phys. Rev. — 1996. — **118**, № 1. — P. 337–344.

[10] Loide R.K., Kôiv M., Saar R. Single mass equations for an antisymmetric tensor-bispinor// J. Phys. A. — 1983. — **16**, № 2. — P. 463–469.

[11] Fushchich W.I., Nikitin A.G. Symmetries of equations of quantum mechanics. — N.Y.: Allerton, 1994. — 400 p.

[12] Fouldy L.L., Wouthuysen S.A. On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit // Phys. Rev. — 1950. — **78**, № 1. — P. 29–37.

[13] Beckers J., Debergh N., Nikitin A.G. On parasupersymmetries and relativistic description for spin one particles: II. The interacting context with (electro)magnetic fields // Fortschritte der Physik. — 1995. — **43**, № 1. — P. 81–95.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 78–82

УДК 517.958

Про проблему взаємодії частинки довільного спіну з полем Кулона

Р.М. ГОЛОВНЯ

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: golovn@ukr.net.ua

З використанням рівнянь, запропонованих Мошинським із співавторами, знайдено спектр частинки довільного спіну, яка взаємодіє з полем Кулона.

Using equations proposed by Moshinski et al the energy spectrum of the particle of arbitrary spin interacting with Coulomb field is found.

В роботах [1, 2] запропоновано рівняння для частинки довільного спіну s, які можна записати у наступній формі:

$$H\psi \equiv \left(c\Lambda_{i4}p_i + mc^2\Lambda_{45}\right) = sE\psi, \qquad p_i = -\frac{\partial}{\partial r_i}, \quad i = 1,2,3, \tag{1}$$

де Λ_{i4} та Λ_{45} — матриці, які належать до зображення $D(s,s)$ групи $O(5)$.

При введенні мінімальної взаємодії з зовнішнім електромагнітним полем

$$p_i \to \pi_i - \frac{e}{c}A_i, \qquad i\frac{\partial}{\partial t} \to i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0,$$

ці рівняння набувають вигляду

$$\tilde{H}\psi \equiv \left(c\Lambda_{i4}\pi_i + mc^2\Lambda_{45}\right) = sE\psi. \tag{2}$$

Використаємо рівняння (2) як модель задачі про взаємодію частинки довільного спіну з полем Кулона, тобто коли

$$A_0 = \frac{ze}{r}, \quad A_i = 0, \quad E_i = \frac{\partial A_0}{\partial r_i} = \frac{zer_i}{r^3}, \quad r^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2.$$

Щоб розв'язати запропоновану задачу, доцільно застосувати серію наближених перетворень еквівалентності (узагальнені перетворення Фолді–Вуйтхойзена), що дозволяє записати гамільтоніан системи (2) у виді розкладу за степенями $1/c$.

Оператор наближеного перетворення виберемо у вигляді

$$W = U_3 U_2 U_1, \qquad W^{-1} = U_1^{-1} U_2^{-1} U_3^{-1},$$

де

$$U_1 = \exp\left(\frac{i}{c}\Lambda_{i5} p_i\right), \quad U_2 = \exp\left\{\frac{ei}{2c}\left(2s\Lambda_{i4}E_i - \frac{1}{3}\Lambda_{i5}[p_i, p^2]_+\right)\right\},$$

$$U_3 = \exp\left(-\frac{s}{8}[\Lambda_{i5}, \Lambda_{j4}]_+ \frac{\partial E_j}{\partial x_i}\right), \quad [AB]_+ = AB + AB, \ j = 1,2,3,$$

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Застосовуючи цей оператор до гамільтоніана $\tilde{H}$ та нехтуючи членами порядку вище $1/c^2$, отримаємо

$$\tilde{H}'\psi' = sE\psi', \tag{3}$$

де $\psi' = W\psi$,

$$\tilde{H}' = W\tilde{H}W^{-1} = \Lambda_{45}\left(mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{(p^2)^2}{8m^3c^2}\right) + \frac{sze^2}{2r} +$$
$$+ \frac{sze^2}{2m^2c^2}\Lambda_{ij}\left[p_i, \frac{r_j}{r^3}\right]_+ + \frac{2\pi ze^2 s}{3m^2c^2}\left(\Lambda_{i5}\Lambda_{i5} + \Lambda_{i4}\Lambda_{i4}\right)\delta(r).$$

Оскільки матриці Λ_{45}, $\Lambda_{i5}\Lambda_{i5} + \Lambda_{i4}\Lambda_{i4}$ комутують між собою і з усіма іншими матрицями, що входять в рівняння (3), вони можуть бути діагоналізовані.

Власні значення ν матриці Λ_{45} дорівнюють $\nu = s, s-1, \ldots, s_0$ [6], де s — ціле або напівціле число, $s_0 = 0$ для цілих s і $s_0 = 1/2$ для напівцілих s. Власні значення ν' матриці $\Lambda_{i5}\Lambda_{i5} + \Lambda_{i4}\Lambda_{i4}$ дорівнюють $\nu' = s, s-1, \ldots, s_0$.

Відповідні рівняння приймають вигляд

$$\tilde{H}''\psi' = sE\psi',$$

$$\tilde{H}'' = \nu\left(mc^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{(p^2)^2}{8m^3c^2}\right) + \frac{sze^2}{2r} + \frac{sze^2}{m^2c^2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + \tag{4}$$
$$+ \frac{2\pi ze^2 s}{3m^2c^2}\left(4s(s+1) - \nu(\nu+1) - \nu'^2\right)\delta(\boldsymbol{r}).$$

де $\boldsymbol{S} = (S_1, S_2, S_3)$ — матриці, що належать до зображення $D(\nu)$ групи $O(3)$.

Рівняння (4) будемо розв'язувати з використанням теорії збурень. Представимо гамільтоніан $\tilde{H}''$ у вигляді

$$\tilde{H}'' = H_0 + H_1 + H_2 + H_3,$$

де

$$H_0 = \frac{\nu p^2}{2m} + \frac{sze^2}{2r}, \qquad H_1 = -\frac{\nu(p^2)^2}{8m^3c^2}, \qquad H_2 = \frac{sze^2}{m^2c^2}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},$$
$$H_3 = \frac{2\pi ze^2 s}{3m^2c^2}\left(4s(s+1) - \nu(\nu+1) - \nu'^2\right)\delta(\boldsymbol{r}).$$

Тоді для $\nu \neq 0$ рівняння (4) зводяться до стаціонарного рівняння Шрьодінгера

$$H_0'\psi_\nu = E_\nu\psi_\nu, \tag{5}$$

де

$$E_\nu = \frac{s}{\nu}E - mc^2, \qquad H_0' = \frac{p^2}{2m} + \frac{\tilde{\alpha}}{r}, \qquad \tilde{\alpha} = \frac{sze^2}{2\nu}.$$

Власні значення оператора H_0' добре відомі [5]

$$E_\nu = E_{\nu lm} = -\frac{m\tilde{\alpha}^2}{4n^2}.$$

Знайдемо відповідні поправки до рівнів енергії [5]

$$E(a) = \int \psi^* H_a \psi dV,$$

де ψ є нормовані тензорні добутки власних векторів нерелятивістського рівняння Шрьодінгера на власні вектори матриці S_3.

Розкладаючи ці функції по повному базису, який утворюють сферичні спінори — власні вектори операторів $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{L}^2$, J_3, $\boldsymbol{S}^2$ [4]

$$\boldsymbol{J}^2\Omega^s_{jj-\lambda m} = j(j+1)\Omega^s_{jj-\lambda m},$$
$$\boldsymbol{L}^2\Omega^s_{jj-\lambda m} = (j-\lambda)(j-\lambda+1)\Omega^s_{jj-\lambda m},$$
$$\boldsymbol{S}^2\Omega^s_{jj-\lambda m} = s(s+1)\Omega^s_{jj-\lambda m}, \qquad J_3\Omega^s_{jj-\lambda m} = m\Omega^s_{jj-\lambda m},$$
$$\frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}}{r}\Omega^s_{jj-\lambda m} = h^{sj}_\lambda\Omega^s_{jj-\lambda m},$$

де $h_\lambda^{sj} = \frac{1}{2}(\lambda(2j+1) - \lambda^2 - s(s+1))$, j — довільні цілі або напівцілі невід'ємні числа,

$$m = -j, -j+1, \dots, j, \qquad \lambda = -s, -s+1, \dots, -s+2m_{sj},$$

$$m_{sj} = \min(s,j) = \begin{cases} s, & s \le j, \\ j, & s > j \end{cases}$$

та використовуючи результат роботи [3], отримаємо відповідні поправки у вигляді

$$E^{(1)} = -\frac{m\tilde{\alpha}^4}{2n^4}\left(\frac{n}{l+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right),$$

$$E^{(2)} = \frac{8m\tilde{\alpha}^4}{n^3}\frac{h_\lambda^{sj}}{(2j-2\lambda+1)^2(j+\frac{1}{2})},$$

$$E^{(3)} = \frac{4m\tilde{\alpha}^4}{3n^3}\left(4s(s+1) - \nu(\nu+1) - \nu'^2\right)\delta_{0j-\lambda}.$$

Відповідні значення енергії задаються формулою

$$E = \frac{\nu}{s}mc^2 - \frac{\nu}{s}\frac{m\alpha^2}{8n^2} - \frac{s^3}{\nu^3}\frac{m\alpha^4}{32n^4}\left(\frac{n}{i-\lambda+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right) +$$
$$+\frac{s^3}{\nu^3}\frac{\alpha^4}{4n^3}\frac{\left(\lambda(2j+1) - \lambda^2 - s(s+1)\right)}{(2j-2\lambda+1)^2\left(j+\frac{1}{2}\right)} +$$
$$+\frac{s^3}{\nu^3}\frac{m\alpha^4}{24n^2}\left(4s(s+1) - \nu(\nu+1) - \nu'^2\right) + o\left(\alpha^6\right),$$

яка узагальнює формулу Зоммерфельда для електрона на випадок частинки з довільним спіном.

Автор висловлює подяку доктору фіз.-мат. наук А.Г. Нікітіну за постановку задачі та змістовні консультації під час досліджень.

[1] Moshinsky M., Smirnov Yu.F. Supermultiplets and relativistic problems: I. The free particle with arbitrary spin in a magnetic field // J. Phys. A: Math. Gen. — 1996. — **29**. — P. 6027–6042.

[2] Sharma A., Nikitin A.G., Smirnov Yu.F. Mass and spin content of a free relativistic particle of arbitrary spin and the group reduction $Sp(4) \subset U(1) \otimes SU(2)$ // Rev. Mex. Fis. — 1998. — **44S2**. — P. 23–25.

[3] Barker W.A., Glover F.N. Reduction of relativistic two-particle wave equations to approximate form. III // J. Phys. Rev. — 1955. — **99**. — P. 317–324.

[4] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1990. — 400 с.

[5] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1972. — 368 с.

[6] Гельфанд И.М., Минлос А.Р., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958. — 368 с.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 83–92

УДК 517.958

Відокремлення змінних для стаціонарного рівняння Шрьодінгера з потенціалом, що задовольняє рівнянню Лапласа

О.Ю. ЖАЛІЙ

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: zhaliy@imath.kiev.ua

Отримано класифікацію потенціалів $V(x_1, x_2, x_3)$, які (a) забезпечують відокремлення змінних в тривимірному стаціонарному рівнянні Шредінгера хоча б в одній ортогональній системі координат та (b) задовільняють рівняння Лапласа.

We describe all explicit forms of the potential $V(x_1, x_2, x_3)$ that, (a) provide separability of the three-dimensional stationary Schrödinger equation at least in one orthogonal coordinate system, and (b) satisfy the Laplace equation.

Ейзенхарт в 1948 році отримав вичерпну класифікацію потенціалів $V(x_1, x_2, x_3)$, для яких тривимірне стаціонарне рівняння Шрьодінгера

$$(\Delta_3 - \lambda_1 - V(x_1, x_2, x_3))\,\psi(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{1}$$

де λ_1 — спектральний параметр, допускає відокремлення змінних [1]. В результаті було одержано 11 класів потенціалів $V(x_1, x_2, x_3)$, при яких рівняння (1) за допомогою анзацу

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \varphi_1(\omega_1(\vec{x}))\varphi_2(\omega_2(\vec{x}))\varphi_3(\omega_3(\vec{x})) \tag{2}$$

допускає відокремлення змінних хоча б в одній ортогональній системі координат $\omega_1(\vec{x})$, $\omega_2(\vec{x})$, $\omega_3(\vec{x})$.

Формули для потенціалів, одержані Ейзенхартом, є дуже громіздкими, оскільки вони містять довільні функції від $\omega_1(\vec{x})$, $\omega_2(\vec{x})$, $\omega_3(\vec{x})$, які в свою чергу задані неявно. Тому фізична інтерпретація одержаних результатів є дуже складною проблемою. Внаслідок цього виникає природня задача виділити підкласи потенціалів, які дозволяють розділити змінні в рівнянні Шрьодінгера, і задовольняють деякі додаткові фізично мотивовані обмеження. Саме з цих міркувань в роботі [2] було запропоновано накласти на шукані потенціали умову

$$\Delta V(x_1, x_2, x_3) = 0, \tag{3}$$

тобто вимагати, щоб функція V була розв'язком рівняння Лапласа. При такому виборі функції V чотири-вектор $\vec{A} = \vec{0}$, $A_0 = V(x_1, x_2, x_3)$ буде розв'язков системи рівнянь Макселла у вакуумі за відсутності струмів.

Нами отримано всі можливі форми потенціалів $V(x_1, x_2, x_3)$, які: (a) забезпечують відокремлення змінних в рівнянні (1) хоча б в одній ортогональній системі координат; (b) задовільняють рівняння Лапласа (3).

Зауважимо, що аналогічну задачу для випадку двох просторових змінних було розглянуто в роботі [2].

Ми не наводимо деталі обчислень, а зразу подаємо кінцеві результати у такій послідовності:

- система координат ω_1, ω_2, ω_3, в якій тривимірне стаціонарне рівняння Шрьодінгера (1) з відповідним потенціалом $V(x_1, x_2, x_3)$, що задовільняє рівняння Лапласа (3)), допускає відокремлення змінних;
- загальний вигляд згаданого потенціалу $V(x_1, x_2, x_3)$;
- редуковані рівняння на функції $\varphi_1(\omega_1)$, $\varphi_2(\omega_2)$, $\varphi_3(\omega_3)$, що отримуються в результаті відокремлення змінних за допомогою анзацу (2) в рівнянні Шрьодінгера (1) при вказаному потенціалі $V(x_1, x_2, x_3)$ в цій системі координат.

Зауважимо, що там де це можливо ми спрощуємо формули, використовуючи інваріантність системи рівнянь (1), (3) відносно групи переносів та поворотів в просторі змінних x_1, x_2, x_3. Окрім цього, координатні системи ω_1, ω_2, ω_3 визначені з точністю до перетворень

$$\omega_a \to \tilde{\omega}_a = f_a(\omega_a), \qquad a = 1, 2, 3,$$

де $f_a(\omega_a)$ — довільні гладкі функції. В даній роботі вони вибрані таким чином, що виконуються умови

$$\Delta \omega_a = 0, \qquad a = 1, 2, 3.$$

1. Декартові координати

$$x_1 = \omega_1, \quad x_2 = \omega_2, \quad x_3 = \omega_3, \qquad \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}.$$

Потенціал має вигляд:

$$V_1 = a_1\left(x_1^2 - x_3^2\right) + a_2\left(x_2^2 - x_3^2\right) + a_3x_1 + a_4x_2 + a_5x_3.$$

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\varphi_1'' &= \left(\lambda_1 + a_1\omega_1^2 + a_3\omega_1\right)\varphi_1,\\
\varphi_2'' &= \left(\lambda_2 + a_2\omega_2^2 + a_4\omega_2\right)\varphi_2,\\
\varphi_3'' &= \left(\lambda_3 - (a_1 + a_2)\omega_3^2 + a_5\omega_3\right)\varphi_3.
\end{aligned}$$

2. Циліндричні координати

$$\begin{aligned}
&x_1 = e^{\omega_1}\cos\omega_2, \quad x_2 = e^{\omega_1}\sin\omega_2, \quad x_3 = \omega_3,\\
&0 \le \omega_2 < 2\pi, \quad \omega_1, \omega_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Потенціал має вигляд:

$$\begin{aligned}
V_2 = a_1\log\left(x_1^2 + x_2^2\right) &+ \frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}\left(a_2\left(x_1^2 - x_2^2\right) + 2a_3x_1x_2\right) + \\
&+ a_4\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2\right) + a_5x_3.
\end{aligned}$$

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\varphi_1'' &= \left(\lambda_1e^{2\omega_1} - \lambda_2 + a_4e^{4\omega_1} + 2a_1\omega_1e^{2\omega_1}\right)\varphi_1,\\
\varphi_2'' &= (\lambda_2 + a_2\cos 2\omega_2 + a_3\sin 2\omega_2)\varphi_2,\\
\varphi_3'' &= (\lambda_3 - 2a_4\omega_3^2 + a_5\omega_3)\varphi_3.
\end{aligned}$$

3. Координати параболічного циліндра

$$\begin{aligned}
&x_1 = \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right)/2, \qquad x_2 = \omega_1\omega_2, \quad x_3 = \omega_3,\\
&\omega_1 > 0, \quad \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Потенціал має вигляд:

$$\begin{aligned}
V_3 = 2a_1x_1 + a_2\frac{\sqrt{R + x_1}}{2R} &+ a_3\frac{x_2}{2R\sqrt{R + x_1}} + \\
&+ a_4\left(4x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2\right) + a_5x_3, \quad R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.
\end{aligned}$$

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\varphi_1'' &= \left(\lambda_1\omega_1^2 - \lambda_2 + a_4\omega_1^6 + a_1\omega_1^4 + a_2\omega_1\right)\varphi_1,\\
\varphi_2'' &= \left(\lambda_1\omega_2^2 + \lambda_2 + a_4\omega_2^6 - a_1\omega_2^4 + a_3\omega_2\right)\varphi_2,\\
\varphi_3'' &= \left(\lambda_3 - 5a_4\omega_3^2 + a_5\omega_3\right)\varphi_3.
\end{aligned}$$

4. Координати еліптичного циліндра

$$x_1 = a\cosh\omega_1\cos\omega_2, \quad x_2 = a\sinh\omega_1\sin\omega_2, \quad x_3 = \omega_3,$$
$$\omega_1 > 0, \quad -\pi < \omega_2 \le \pi, \quad \omega_3 \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Потенціал має вигляд:

$$\begin{aligned} V_4 = {} & 2a_1\frac{a^2}{f}f_1\sqrt{f_1^2-1} + 2a_2\frac{x_1x_2}{ff_1\sqrt{f_1^2-1}} + \\ & + 2a_3\left(\frac{a^2}{f}f_1\sqrt{f_1^2-1}\,\operatorname{arccosh} f_1 + \frac{x_1x_2}{ff_1\sqrt{f_1^2-1}}\arccos\frac{x_1}{af_1}\right) + \\ & + a_4\left(x_1^2+x_2^2-2x_3^2\right) + a_5x_3, \end{aligned}$$

де

$$f = \sqrt{\left(a^2+R^2\right)^2 - 4a^2x_1^2}, \qquad f_1 = \sqrt{\frac{a^2+R^2+f}{2a^2}},$$
$$R = \sqrt{x_1^2+x_2^2}.$$

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varphi_1'' = {} & \big(\lambda_1a^2\cosh^2\omega_1 + \lambda_2 + a_4a^4\cosh^4\omega_1 + \\ & +a^2(a_3\omega_1+a_1)\sinh 2\omega_1\big)\,\varphi_1, \\ \varphi_2'' = {} & \big(-\lambda_1a^2\cos^2\omega_2 - \lambda_2 - a_4a^4\cos^4\omega_2 + \\ & +a^2(a_3\omega_2+a_2)\sin 2\omega_2\big)\,\varphi_2, \\ \varphi_3'' = {} & \big(\lambda_3 - 2a_4\omega_3^2 + a_5\omega_3\big)\,\varphi_3. \end{aligned}$$

5. Сферичні координати

$$x_1 = \omega_1^{-1}\operatorname{sech}\omega_2\cos\omega_3, \qquad x_2 = \omega_1^{-1}\operatorname{sech}\omega_2\sin\omega_3,$$
$$x_3 = \omega_1^{-1}\tanh\omega_2, \qquad \omega_1 > 0, \quad \omega_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 \le \omega_3 < 2\pi.$$

Потенціал має вигляд:

$$\begin{aligned} V_5 = {} & \frac{a_1}{r} + a_2\frac{x_3}{r^3} + \frac{a_3}{r^2}\left(\frac{x_3}{2r}\log\frac{r+x_3}{r-x_3} - 1\right) + \\ & + \frac{1}{\left(x_1^2+x_2^2\right)^2}\left(a_4\left(x_1^2-x_2^2\right) + 2a_5x_1x_2\right), \end{aligned}$$

де $r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1'' &= \left(\lambda_1\omega_1^{-4} - \lambda_2\omega_1^{-2} + a_1\omega_1^{-3}\right)\varphi_1,\\
\varphi_2'' &= \big(\lambda_2 \operatorname{sech}^2\omega_2 - \lambda_3 +\\
&\qquad + \cosh^{-2}\omega_2(a_2\tanh\omega_2 + a_3(\omega_2\tanh\omega_2 - 1))\big)\varphi_2,\\
\varphi_3'' &= (\lambda_3 + a_4\cos 2\omega_3 + a_5\sin 2\omega_3)\varphi_3.
\end{aligned}
$$

6. Координати витягнутого сфероїда

$$
\begin{aligned}
&x_1 = a\operatorname{csch}\omega_1\operatorname{sech}\omega_2\cos\omega_3, \quad a > 0,\\
&x_2 = a\operatorname{csch}\omega_1\operatorname{sech}\omega_2\sin\omega_3, \qquad x_3 = a\coth\omega_1\tanh\omega_2,\\
&\omega_1 > 0, \quad \omega_2\in\mathbb{R}, \quad 0 \le \omega_3 < 2\pi.
\end{aligned}
$$

Потенціал має вигляд:

$$
\begin{aligned}
V_6 = \frac{a_1}{r^+} + \frac{a_2}{r^-} + a_3\left(\frac{1}{r^+}\operatorname{arctanh}\frac{x_3^+}{r^+} - \frac{1}{r^-}\operatorname{arctanh}\frac{x_3^-}{r^-}\right) +\\
+ \frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}\left(a_4\left(x_1^2 - x_2^2\right) + 2a_5x_1x_2\right),
\end{aligned}
$$

де $x_3^\pm = x_3 \pm a$ та $r^\pm = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 \pm a)^2}$.

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1'' &= \big(\lambda_1 a^2\sinh^{-4}\omega_1 - \lambda_2\sinh^{-2}\omega_1 - \lambda_3 +\\
&\qquad + a(2a_3\omega_1 + a_1 + a_2)\cosh\omega_1\sinh^{-3}\omega_1\big)\varphi_1,\\
\varphi_2'' &= \big(\lambda_1 a^2\cosh^{-4}\omega_2 + \lambda_2\cosh^{-2}\omega_2 - \lambda_3 +\\
&\qquad + a(-2a_3\omega_2 - a_1 + a_2)\cosh^{-3}\omega_2\sinh\omega_2\big)\varphi_2,\\
\varphi_3'' &= (\lambda_3 + a_4\cos 2\omega_3 + a_5\sin 2\omega_3)\varphi_3.
\end{aligned}
$$

7. Координати сплющеного сфероїда

$$
\begin{aligned}
&x_1 = a\csc\omega_1\operatorname{sech}\omega_2\cos\omega_3, \quad a > 0,\\
&x_2 = a\csc\omega_1\operatorname{sech}\omega_2\sin\omega_3, \qquad x_3 = a\cot\omega_1\tanh\omega_2,\\
&0 < \omega_1 < \pi/2, \quad \omega_2\in\mathbb{R}, \quad 0 \le \omega_3 < 2\pi.
\end{aligned}
$$

Потенціал має вигляд:

$$
\begin{aligned}
V_7 = 2a_1 a\frac{f_1}{f} + 2a_2\frac{x_3}{ff_1} - 2a_3\left(a\frac{f_1}{f}\operatorname{arccot} f_1 - \frac{x_3}{ff_1}\operatorname{arctanh}\frac{x_3}{af_1}\right) +\\
+ \frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2}\left(a_4\left(x_1^2 - x_2^2\right) + 2a_5x_1x_2\right),
\end{aligned}
$$

де

$$f = \sqrt{\left(a^2 - r^2\right)^2 + 4a^2 x_3^2}, \qquad f_1 = \sqrt{\frac{-a^2 + r^2 + f}{2a^2}},$$
$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Зауважимо, що у цьому випадку вираз для V може бути переписано у вигляді

$$V_7 = \frac{a_1 + ia_2}{\tilde{r}^+} + \frac{a_1 - ia_2}{\tilde{r}^-} + ia_3 \left(\frac{1}{\tilde{r}^+} \operatorname{arctanh} \frac{\tilde{x}_3^+}{\tilde{r}^+} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\tilde{r}^-} \operatorname{arctanh} \frac{\tilde{x}_3^-}{\tilde{r}^-} \right) + \frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} \left(a_4 \left(x_1^2 - x_2^2 \right) + 2a_5 x_1 x_2 \right),$$

де $\tilde{x}_3^\pm = x_3 \pm ia$ та $\tilde{r}^\pm = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 \pm ia)^2}$.

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$\varphi_1'' = \left(\lambda_1 a^2 \sin^{-4} \omega_1 - \lambda_2 \sin^{-2} \omega_1 + \lambda_3 + \right.$$
$$\left. + 2a(-a_3\omega_1 + a_1) \cos\omega_1 \sin^{-3} \omega_1 \right) \varphi_1,$$
$$\varphi_2'' = \left(-\lambda_1 a^2 \cosh^{-4} \omega_2 + \lambda_2 \cosh^{-2} \omega_2 - \lambda_3 + \right.$$
$$\left. + 2a(a_3\omega_2 + a_2) \cosh^{-3} \omega_2 \sinh \omega_2 \right) \varphi_2,$$
$$\varphi_3'' = (\lambda_3 + a_4 \cos 2\omega_3 + a_5 \sin 2\omega_3)\varphi_3.$$

8. Параболічні координати

$$x_1 = e^{\omega_1 + \omega_2} \cos\omega_3, \quad x_2 = e^{\omega_1 + \omega_2} \sin\omega_3, \quad x_3 = (e^{2\omega_1} - e^{2\omega_2})/2,$$
$$\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}, \quad 0 \le \omega_3 \le 2\pi.$$

Потенціал має вигляд:

$$V_8 = \frac{a_1}{r} + 2a_2 x_3 + \frac{a_3}{r} \log \frac{r + x_3}{r - x_3} +$$
$$+ \frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} \left(a_4 \left(x_1^2 - x_2^2 \right) + 2a_5 x_1 x_2 \right),$$

де $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$\varphi_1'' = \left(\lambda_1 e^{4\omega_1} - \lambda_2 e^{2\omega_1} - \lambda_3 + e^{2\omega_1} \left(a_2 e^{4\omega_1} + 4a_3\omega_1 + a_1 \right) \right) \varphi_1,$$
$$\varphi_2'' = \left(\lambda_1 e^{4\omega_2} + \lambda_2 e^{2\omega_2} - \lambda_3 - e^{2\omega_2} \left(a_2 e^{4\omega_2} + 4a_3\omega_2 - a_1 \right) \right) \varphi_1,$$
$$\varphi_3'' = \left(\lambda_3 + a_4 \cos 2\omega_3 + a_5 \sin 2\omega_3 \right) \varphi_3.$$

9. Параболоїдальні координати

$$x_1 = 2a\cosh\omega_1\cos\omega_2\sinh\omega_3, \quad a>0,$$
$$x_2 = 2a\sinh\omega_1\sin\omega_2\cosh\omega_3,$$
$$x_3 = a(\cosh 2\omega_1 + \cos 2\omega_2 - \cosh 2\omega_3)/2,$$
$$\omega_1, \omega_3 \in \mathbb{R}, \quad 0 \le \omega_2 < \pi.$$

Потенціал має вигляд:

$$V_9 = 2a_1x_3 + a_2\frac{\sinh 2\omega_1}{LM} + a_3\frac{\sin 2\omega_2}{LN} + a_4\frac{\sinh 2\omega_3}{NM} + \\ + a_5\left(\omega_1\frac{\sinh 2\omega_1}{LM} + \omega_2\frac{\sin 2\omega_2}{LN} - \omega_3\frac{\sinh 2\omega_3}{NM}\right),$$

де

$$L = \cosh 2\omega_1 - \cos 2\omega_2, \quad M = \cosh 2\omega_1 + \cosh 2\omega_3,$$
$$N = \cos 2\omega_2 + \cosh 2\omega_3.$$

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$\varphi_1'' = \big(\lambda_1 a^2\cosh^2 2\omega_1 - \lambda_2 a\cosh 2\omega_1 - \lambda_3 + \\ +a^2\left(a_1 a\cosh^3 2\omega_1 + (a_2 + a_5\omega_1)\sinh 2\omega_1\right)\big)\varphi_1,$$
$$\varphi_2'' = \big(-\lambda_1 a^2\cos^2 2\omega_2 + \lambda_2 a\cos 2\omega_2 + \lambda_3 + \\ +a^2\left(-a_1 a\cos^3 2\omega_2 + (a_3 + a_5\omega_2)\sin 2\omega_2\right)\big)\varphi_2,$$
$$\varphi_3'' = \big(\lambda_1 a^2\cosh^2 2\omega_3 + \lambda_2 a\cosh 2\omega_3 - \lambda_3 + \\ +a^2\left(-a_1 a\cosh^3 2\omega_3 + (a_4 - a_5\omega_3)\sinh 2\omega_3\right)\big)\varphi_3.$$

10. Еліпсоїдальні координати

$$x_1 = a\,\frac{1}{\mathrm{sn}(\omega_1,\,k)}\,\mathrm{dn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{sn}(\omega_3,\,k), \quad a>0,$$
$$x_2 = a\,\frac{\mathrm{dn}(\omega_1,\,k)}{\mathrm{sn}(\omega_1,\,k)}\,\mathrm{cn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{cn}(\omega_3,\,k),$$
$$x_3 = a\,\frac{\mathrm{cn}(\omega_1,\,k)}{\mathrm{sn}(\omega_1,\,k)}\,\mathrm{sn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{dn}(\omega_3,\,k),$$
$$0<\omega_1<K, \quad -K' \le \omega_2 \le K', \quad 0 \le \omega_3 \le 4K,$$
$$k^2 + k'^2 = 1, \quad 0 < k, k' < 1.$$

Потенціал має вигляд:

$$\begin{aligned}V_{10} = a_1 \left(-\frac{c_1 d_1 (c_1 d_1 + s_1 E_1)}{s_1^4 LM} + \right.\\ \left. + k'^2 \frac{s_2 c_2 d_2 (\omega_2 - E_2)}{LN} + k^2 \frac{s_3 c_3 d_3 E_3}{NM}\right)\\ + a_2 \left(-\frac{\omega_1 c_1 d_1}{s_1^3 LM} + k'^2 \frac{\omega_2 s_2 c_2 d_2}{N} + k^2 \frac{\omega_3 s_3 c_3 d_3}{MN}\right) +\\ + a_3 \frac{c_1 d_1}{s_1^3 LM} + a_4 \frac{s_2 c_2 d_2}{LN} + a_5 \frac{s_3 c_3 d_3}{MN},\end{aligned}$$

де

$$L = \frac{d_1^2}{s_1^2} - k'^2 c_2^2, \quad M = \frac{d_1^2}{s_1^2} + k^2 c_3^2, \quad N = k'^2 c_2^2 + k^2 c_3^2.$$

Тут і надалі ми використовуємо позначення

$$\begin{array}{lll} s_1 = \mathrm{sn}(\omega_1,\, k), & c_1 = \mathrm{cn}(\omega_1,\, k), & d_1 = \mathrm{dn}(\omega_1,\, k),\\ s_2 = \mathrm{sn}(\omega_2,\, k'), & c_2 = \mathrm{cn}(\omega_2,\, k'), & d_2 = \mathrm{dn}(\omega_2,\, k'),\\ s_3 = \mathrm{sn}(\omega_3,\, k), & c_3 = \mathrm{cn}(\omega_3,\, k), & d_3 = \mathrm{dn}(\omega_3,\, k)\end{array} \tag{4}$$

для еліптичних функцій Якобі та

$$E_1 = E(\mathrm{am}\,\omega_1,\, k), \quad E_2 = E(\mathrm{am}\,\omega_2,\, k'), \quad E_3 = E(\mathrm{am}\,\omega_3,\, k) \tag{5}$$

для еліптичних інтегралів другого роду. Їх явна форма

$$E(\mathrm{am}\,\omega,\, k) = \int_0^\omega \mathrm{dn}^2(\theta,\, k) d\theta.$$

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned}\varphi_1'' = \left(\lambda_1 a^2 \frac{d_1^4}{s_1^4} - \lambda_2 \frac{d_1^2}{s_1^2} + \lambda_3 + \right.\\ \left. + a^2 \frac{c_1 d_1}{s_1^3} \left(-a_1 \left(\frac{c_1 d_1}{s_1} + E_1\right) - a_2 \omega_1 + a_3\right)\right) \varphi_1,\\ \varphi_2'' = \big(-\lambda_1 a^2 k'^4 c_2^4 + \lambda_2 k'^2 c_2^2 - \lambda_3 +\\ + a^2 s_2 c_2 d_2 (a_1 k'^2 (\omega_2 - E_2) + a_2 k'^2 \omega_2 + a_4)\big) \varphi_2,\\ \varphi_3'' = \big(\lambda_1 a^2 k^4 c_3^4 + \lambda_2 k^2 c_3^2 + \lambda_3 +\\ + a^2 s_3 c_3 d_3 (a_1 k^2 E_3 + a_2 k^2 \omega_3 + a_5)\big) \varphi_3.\end{aligned}$$

11. Конічні координати

$$
\begin{aligned}
&x_1=\omega_1^{-1}\mathrm{dn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{sn}(\omega_3,\,k),\\
&x_2=\omega_1^{-1}\mathrm{cn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{cn}(\omega_3,\,k),\\
&x_3=\omega_1^{-1}\mathrm{sn}(\omega_2,\,k')\,\mathrm{dn}(\omega_3,\,k),\\
&\omega_1>0,\quad -K'\le\omega_2\le K',\quad 0\le\omega_3\le 4K,\\
&k^2+k'^2=1,\quad 0<k,k'<1.
\end{aligned}
$$

Потенціал має вигляд:

$$
\begin{aligned}
V_{11}=\frac{a_1}{r}&+a_2\omega_1^2\frac{s_2c_2d_2}{k'^2c_2^2+k^2c_3^2}+a_3\omega_1^2\frac{s_3c_3d_3}{k'^2c_2^2+k^2c_3^2}+\\
&+a_4\omega_1^2\left(d_2^2-k^2c_3^2+\frac{k'^2s_2c_2d_2(E_2-\omega_2)-k^2E_3s_3c_3d_3}{k'^2c_2^2+k^2c_3^2}\right)+\\
&+a_5\omega_1^2\left(\frac{k'^2\omega_2s_2c_2d_2+k^2\omega_3s_3c_3d_3}{k'^2c_2^2+k^2c_3^2}-1\right),
\end{aligned}
$$

де використано позначення (4) і (5), та $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

Редуковані рівняння мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
\varphi_1''&=\left(\lambda_1\omega_1^{-4}-\lambda_2\omega_1^{-2}+\left(k^2a_4+a_5\right)\omega_1^{-2}+a_1\omega_1^{-3}\right)\varphi_1,\\
\varphi_2''&=\left(\lambda_2k'^2c_2^2-\lambda_3+a_4\left(d_2^4+k'^2s_2c_2d_2\left(E_2-\omega_2\right)\right)+\right.\\
&\qquad\left.+a_5k'^2\omega_2s_2c_2d_2+a_2s_2c_2d_2\right)\varphi_2,\\
\varphi_3''&=\left(\lambda_2k^2c_3^2+\lambda_3-a_4k^2\left(k^2s_3^4+E_3s_3c_3d_3\right)+\right.\\
&\qquad\left.+a_5k^2\omega_3s_3c_3d_3+a_3s_3c_3d_3\right)\varphi_3.
\end{aligned}
$$

Відмітимо, що деякі з одержаних потенціалів допускають безпосередню фізичну інтерпретацію. Наприклад, потенціали V_5, V_8, V_{11} за умови $a_2=a_3=a_4=a_5=0$ зводяться до стандартного потенціалу Кулона. Далі, функція V_6 при $a_3=a_4=a_5=0$ — це потенціал для відомої задачі двох центрів в квантовій механіці, тобто задачі знаходження хвильових функцій електрона, що рухається в полі двох закріплених зарядів a_1 та a_2, віддалених на відстань $2a$ (модель іонізованої молекули водню). Коулсон і Джозеф [3] показали, що відповідне рівняння Шрьодінгера (1) допускає відокремлення змінних лише в системі координат витягнутого сфероїда. Таким чином, ми одержали узагальнення цього потенціалу.

Автор вдячний Р.З. Жданову за цінні зауваження.

[1] Eisenhart L.P. Enumeration of potentials for which one-particle Schrödinger equations are separable // Phys. Rev. — 1948. — **74**, № 1 — P. 87—89.

[2] Zhdanov R., Lutfullin M. On separable Schrödinger–Maxwell equations // J. Math. Phys. — 1998. — **39**, № 12. — P. 6454—6458.

[3] Coulson C.A., Joseph A. Constant of the motion for the two-centre Kepler problem // Intern. J. Quant. Chem. — 1967. — **1**. — P. 337—347.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 93–102

УДК 517.944:536.2

Метод ітерацій при дослідженні конвективного руху в'язкої нестисливої рідини

О.М. ЖУКОВСЬКИЙ, В.П. КАРАГОДОВ

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: zhuk@imath.kiev.ua

В роботі досліджується ітераційний процес для розв'язування задач конвекції рідини з застосуванням методу Гальоркіна по просторових змінних та доводяться теореми про його збіжність.

In the paper we consider iterative process for solving convection problem by means Galerkin's method by space variables and prove theorems on their convergence.

Розглянемо початково-крайову задачу для рівнянь Нав'є–Стокса

$$v_t + (v \cdot \nabla)v = \nu\Delta v - \nabla p + f, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \qquad x \in Q_T, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$v(x,0) = a(x), \qquad v(x,t)|_{\Gamma_T} = 0. \tag{3}$$

Тут шукані величини — вектор швидкості $v(x,t)$ руху рідини та тиск $p(x,t)$ в точці $x \in Q$ ($Q \subset E_2$ або $Q \subset E_3$) в момент часу $t \in [0,T]$; Γ — границя області Q вважається кусково-гладкою ($Q_T = Q \times [0,T], \Gamma_T = \Gamma \times [0,T]$), $f(x,t)$ — сила зовнішнього збурення; $\nu = \mathrm{const}$ — в'язкість рідини. Вважається, що $a(x) \in W_2^2(Q) \cap H(Q)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(Q_T)$, де $W_2^2(Q)$ і $L_2(Q)$ — відповідно гільбертові простори Соболєва і Лебега, а також, що $\operatorname{div} a = 0$ і $\operatorname{div} f = 0$.

Якісне дослідження цієї задачі проведено в [1] на основі введення поняття узагальненого розв'язку і застосування методу Гальоркіна за просторовими змінними. Ця методика є ефективною також при конструктивній побудові розв'язків. Суттєвим в ній є те, що задача відшукання розв'язків зводиться до знаходження $v(x,t)$ та $p(x,t)$

з окремих задач. В даній роботі розглядається задача про визначення швидкості руху рідини $v(x,t)$.

Крім того, в результаті застосування методу Гальоркіна задача зводиться до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. При цьому, звичайно, нелінійність вихідних рівнянь (1) переноситься на рівняння отриманої системи і є однією з основних проблем при її розв'язуванні.

Зазначимо, що застосування даної методики гарантує виконання умови енергетичної нейтральності конвективного члена рівняння (1), тобто $((v \cdot \nabla)v, v) = 0$. Тут і далі $(\cdot,\cdot)$ позначає скалярний добуток в просторі $L_2(Q)$. Вказана умова є однією з визначальних при чисельному моделюванні конвективного руху рідини, поскільки при її порушенні виникає так звана "штучна" в'язкість, яка навіть при помірній швидкості руху рідини може досягати реальної в'язкості та перевищувати її. Про значний негативний вплив такої в'язкості на точність розв'язків свідчать роботи [2–4].

Що стосується питання нелінійності, то звичайно ця проблема вирішується шляхом лінеаризації рівнянь завдяки застосуванню методу ітерацій. Як приклад успішного застосування цього методу можна навести роботи [4, 5]. Проте, при цьому виникає питання про збіжність ітерацій взагалі і, зокрема, про збіжність до точного розв'язку. Дослідженню цього питання присвячена дана робота. Зауважимо, що застосування методу Гальоркіна і методу ітерацій при розв'язуванні поставленої задачі у випадках двовимірної та тривимірної областей Q принципово не відрізняються. Разом з тим умови збіжності ітерацій у вказаних випадках будуть різні.

При застосуванні методу Гальоркіна будемо керуватися тими ж самими вимогами до вибору фундаментальної системи базисних функцій $\{a_k(x)\}$, що й при доведенні однозначної розв'язності задачі (1)–(3) [1], а саме вважатимемо, що $a_k(x) \in W_2^2(Q) \cap H(Q)$ і ця система функцій ортонормована в $L_2(Q)$.

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді

$$v^n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k^n(t) a_k(x), \tag{4}$$

де $c_k^n(t)$, $k = \overline{1,n}$ — коефіцієнти, які необхідно визначити. Далі для спрощення запису індекс n при v^n та c_k^n в деяких випадках не будемо вказувати, маючи на увазі, що v — гальоркінське наближення (4), а $c(t) = \{c_k(t), k = \overline{1, n}\}$ — вектор-коефіцієнт в цьому наближенні в скінченному базисі розмірності n.

В результаті застосування методу Гальоркіна отримаємо для визначення розв'язку (4) наступні співвідношення:

$$(v_t, a_k) + ((v \cdot \nabla)v, a_k) + \nu(v_x, a_{kx}) = (f, a_k), \qquad k = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Формально ці співвідношення можна отримати, якщо розв'язок у вигляді (4) підставити в рівняння (1) і домножити їх скалярно в $L_2(Q)$ на $a_k(x)$, $k = \overline{1, n}$. Строге виведення співвідношень (5) на основі узагальненої постановки задачі (1)–(3) наведено в [1].

Співвідношення (5) представляють собою згадану вище систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь. В матричному вигляді вона може бути записана наступним чином:

$$\frac{dc}{dt} + cDc + Ac = F, \tag{6}$$

де $c(t) = \{c_k(t),\ k = \overline{1, n}\}$ — шуканий вектор коефіцієнтів гальоркінського наближення (4). Інші складові відомі: A — квадратна симетрична додатньо визначена матриця розмірності $n \times n$; D — тривимірна матриця розмірності $n \times n \times n$, F — вектор розмірності n. Початкове значення $c(0) = \{c_k(0),\ k = \overline{1, n}\}$ визначається з початкової умови (3), а саме:

$$c_k(0) = (a(x), a_k(x)), \qquad k = \overline{1, n}. \tag{7}$$

Для розв'язання задачі (6), (7) або, що те саме, задачі (5), (7) пропонується наступний ітерційний процес. Розіб'ємо відрізок $[0, T]$ на M частин $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, так, що $t_0 = 0$, $t_M = T$. Це розбиття, взагалі кажучи, нерівномірне, але число M розбиття, як буде показано, можна вибрати скінченним, керуючись певними умовами. Тут же зазначимо, що у випадку двовимірних областей $Q \subset E_2$ число M залежить лише від вихідних даних задачі (1)–(3), а у випадку, коли $Q \subset E_3$ — також від розміру n координатного базису.

На кожному відрізку $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, розглядатимемо наступні задачі:

$$\left(\overset{s+1}{v_t}, a_k\right) + \left(\left(\overset{s}{v} \cdot \nabla\right)\overset{s+1}{v}, a_k\right) + \nu\left(\overset{s+1}{v_x}, a_{kx}\right) = (f, a_k), \tag{8}$$

$$\overset{s+1}{c_k}(t_i) = \left(\overset{s+1}{v}(x, t_i), a_k\right) = c_k(t_i), \qquad k = \overline{1, n}, \tag{9}$$

де $c_k(t_i) = (v(x,t_i), a_k)$, $k = \overline{1,n}$ — точний розв'язок задачі Коші (5), (7) на відрізку $[t_{i-1}, t_i]$, тобто розв'язок системи (8), (9) на цьому відрізку при $s \to \infty$ (або наближений розв'язок при $s \le S$). Тут $s = 0, 1, 2, \ldots$ — номер ітерації.

Покажемо, що ітераційний процес (8), (9) збігається на кожному з відрізків $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, при відповідному розбитті відрізка $[0, T]$. Позначимо для зручності

$$y(t) = ||v(x,t)||, \qquad \varphi(t) = ||v_x(x,t)||,$$

де $||\cdot||$ позначає норму в $L_2(Q)$.

Як відомо [1], для гальоркінських наближень $v = v^n(x,t)$ мають місце наступні оцінки:

$$\begin{aligned} &y(t) \le y(0) + \int_0^T ||f|| dt \equiv C_1, \\ &\frac{1}{2} y^2(t) + \nu \int_0^t \varphi^2 d\tau \le \frac{1}{2} y^2(0) + C_1 \int_0^T ||f|| dt \equiv C_2. \end{aligned} \tag{10}$$

Такі ж оцінки виконуються і для наближень $\overset{s+1}{v}(x,t)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$. Вони виводяться так само як оцінки (10).

Домножимо кожне із співвідношень (8) на $\overset{s+1}{c}_{k+1}(t)$ і просумуємо їх по $k = \overline{1,n}$. Тоді отримаємо наступні рівності:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \left(\overset{s+1}{y^2} \right)' + \nu \overset{s+1}{\varphi^2} = \left(f, \overset{s+1}{v} \right), \\ &t \in [t_i, t_{i+1}], \quad i = \overline{0, M-1}, \quad s = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Інтегруючи (11) по t на $[t_i, t_{i+1}]$, отримаємо спочатку оцінку

$$\overset{s+1}{y}(t) \le \overset{s+1}{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f|| dt \equiv A_i, \qquad i = \overline{0, M-1},$$

а потім, з врахуванням цієї оцінки, наступну:

$$\frac{1}{2} \overset{s+1}{y^2}(t) + \nu \int_{t_i}^{t} \varphi^2 dt \le \frac{1}{2} y^2(t_i) + A_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} ||f|| dt, \qquad i = \overline{0, M-1}.$$

Звідси, як легко переконатись, матимемо оцінки для $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
&\overset{s+1}{y}(t) \le y(0) + \int\limits_0^T ||f||dt \equiv C_1,\\
&\frac{1}{2}\overset{s+1}{y^2}(t) + \nu \int\limits_0^t \varphi^2 dt \le \frac{1}{2} y^2(0) + C_1 \int\limits_0^T ||f||dt \equiv C_2,
\end{aligned} \tag{12}$$

де C_i — константи, що залежать лише від $a(x)$, ν та $f(x,t)$ ($y(0) = ||a(x)||$). Оцінки (12) мають місце при всіх $s = 0, 1, 2, \ldots$.

Віднімемо від співвідношення (8) співвідношення (5), записані для відрізка $[t_i, t_{i+1}]$. Зауважимо, що в (5) через v позначено гальоркінське наближення v^n розв'язку. Введемо для зручності нове позначення $v = v_{s+1} = \overset{s+1}{v} - v^n$. Тоді для $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, будемо мати:

$$\begin{aligned}
&(v_t, a_k) + \left(\left(\overset{s}{v} \cdot \nabla\right) v, a_k\right) + ((v_s \cdot \nabla) v^n, a_k) + \nu(v_x, a_{kx}) = 0,\\
&(v(x, t_i), a_k) = 0, \qquad k = \overline{1, n}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{13}$$

Звідси виводяться, так само як (10), наступні рівності:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(y^2\right)' + \nu\varphi^2 = ((v_s \cdot \nabla) v, v^n),\\
&y(t_i) = 0, t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = \overline{0, M-1}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{14}$$

Оцінка правої частини в (13) залежить від розмірності області Q: $Q \subset E_2$ чи $Q \subset E_3$.

Розглянемо спочатку випадок, коли Q — двовимірна. Слід зазначити, що при чисельному моделюванні конвективного руху рідини в більшості випадків розглядаються саме такі області. Це пов'язано з великим обсягом обчислень при розв'язуванні таких задач і обмеженими можливостями ЕОМ.

Використовуючи нерівності Гьольдера, Юнга та властивості функцій з $H(Q)$ при $Q \subset E_2$ [1], отримаємо, що

$$\begin{aligned}
J = |((v_s \cdot \nabla)\, v, v^n)| &= |((v_s \cdot \nabla)\, v^n, v)| \le\\
&\le \varphi^n \, \|v_s\|_{4,Q} \, \|v\|_{4,Q} \le \sqrt{2}\varphi^n y_s^{1/2} \varphi_s^{1/2} y^{1/2} \varphi^{1/2} \le\\
&\le \frac{1}{4}\nu^{-1} \left(\varphi^n\right)^2 y_s^2 + \frac{1}{2}\nu\varphi_s^2 + \frac{1}{4}\nu^{-1} \left(\varphi^n\right)^2 y^2 + \frac{1}{2}\nu\varphi^2.
\end{aligned} \tag{15}$$

Підставимо оцінку (15) в рівність (14) і проінтегруємо по t на $[t_i, t_{i+1}]$. Тоді отримаємо

$$
\begin{gathered}
y^2(t) + \nu \int\limits_{t_i}^{t} \varphi^2(t)dt \le \frac{1}{2}\nu^{-1} y_m^2 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (\varphi^n)^2 \, dt + \\
+\frac{1}{2}\nu^{-1} y_{sm}^2 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (\varphi^n)^2 \, dt + \frac{1}{2}\nu \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_s^2 dt,
\end{gathered} \tag{16}
$$

де $y_m = \max\limits_{t\in[t_i,t_{i+1}]} y(t)$, $y_{sm} = \max\limits_{t\in[t_i,t_{i+1}]} y_s(t)$.

Легко переконатись [6], що завдяки оцінці (10) відрізок $[0,T]$ можна розбити на скінченну кількість M відрізків $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, таких, що на кожному з них виконуватиметься умова

$$
\nu^{-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (\varphi^n)^2 dt < 1. \tag{17}
$$

Тоді з (16) випливає нерівність

$$
\frac{1}{2} y_m^2 + \nu \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi^2(t)dt < \frac{1}{2} y_{sm}^2 + \nu \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_s^2 dt,
$$

яка виконується для всіх $i = \overline{0, M-1}$ та $s = 0, 1, 2, \ldots$. Цю нерівність можна записати у вигляді

$$
||v_{s+1}||^2_{V_2^{1,0}\left(Q_{t_i}^{t_{i+1}}\right)} < ||v_s||^2_{V_2^{1,0}\left(Q_{t_i}^{t_{i+1}}\right)}, \tag{18}
$$

де

$$
||v_{s+1}||^2_{V_2^{1,0}\left(Q_{t_i}^{t_{i+1}}\right)} = \frac{1}{2} y_m^2 + \nu \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi^2 dt. \tag{19}
$$

Нерівність (18) означає, що $\left\| \overset{s+1}{v} - v^n \right\|_{V_2^{1,0}\left(Q_{t_i}^{t_{i+1}}\right)} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$ рівномірно по $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, незалежно від розміру n координатного базису.

Отже, має місце сильна збіжність послідовності $\overset{s}{v}$ до розв'язку v^n на кожному відрізку $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$. Виходячи з обмеженості $\overset{s}{v}$ в нормі $V_2^{1,0}(Q_T)$ (12) та однозначної розв'язності задачі (5), (7) ((6), (7)) [1] на $[0, T]$ заключаємо, що послідовність $\overset{s}{v}(x,t)$ збігається при $s \to \infty$ до точного розв'язку задачі (5), (7). З другого боку в [1] доведена збіжність гальоркінського наближення (4) при $n \to \infty$ до єдиного узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Таким чином, доведена теорема.

Теорема 1. *Якщо в задачі (1)–(3)* $a(x) \in W_2^2(Q) \cap H(Q)$, $f(x,t) \in L_{2,1}(Q_T)$, $x \in Q \subset E_2$, $t \in [0,t]$, *то відрізок* $[0,T]$ *завжди можна розбити на скінченну кількість* M *відрізків* $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, *на кожному з яких ітерційний процес (8), (9) збігається в нормі (19) при* $s \to \infty$ *до точного гальоркінського наближення* v^n *задачі (5), (7). Це розбиття визначається лише вихідними даними задачі, а саме, значеннями* $\nu, a(x)$ *та* $f(x,t)$ *і не залежить від розміру* n *координатного базису* $\{a_k(x)\}$, $k = \overline{1, n}$.

Зауваження. Якщо при виведенні співвідношення (13) прийняти $v = v_{s+1} = \overset{s+1}{v} - \overset{s}{v}$, то в результаті тієї ж послідовності дій отримаємо, що

$$\left\| \overset{s+1}{v} - \overset{s}{v} \right\|_{V_2^{1,0}\left(Q_{t_i}^{t_{i+1}}\right)} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{20}$$

тобто буде доведена фундаментальність послідовності $\overset{s}{v}$ в просторі $V_2^{1,0}(Q_T)$ на кожному з відрізків $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, при тій же умові (17), де замість v^n буде значення $\overset{s}{v}$. При доведенні цього використовується замість (10) оцінка (12).

Збіжність (20) має важливе прикладне значення. Це пов'язано з тим, що при чисельному розв'язуванні переважної більшості такого типу задач збіжність ітерацій можливо контролювати саме в цьому розумінні, поскільки точний результат $v^n(x,t)$ — невідомий. Винятком є лише тестові задачі, на яких перевіряється обчислювальний процес. У випадку тривимірної області $Q \subset E_3$ також мають місце твердження сформульованої вище теореми, але при цьому, як це показано в роботі [7], збіжність залежить також від розміру n координатного базису $\{a_k(x)\}$, $k = \overline{1, n}$. Це визначається тим, що умовою збіжності ітерацій $\overset{s}{v}$ на кожному відрізку $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$ є виконаня нерівності

$$2\sqrt(3)\nu^{-1}\lambda_n^{1/2}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\overset{s}{\varphi}{}^2\,dt < 1, \qquad i = \overline{0, M-1}, \tag{21}$$

де λ_n — найбільше власне значення дискретного аналога оператора

$$-\tilde{\Delta}v = -\Delta v + \nabla p, \qquad \operatorname{div} v = 0, \qquad v|_\Gamma = 0$$

в скінченному n-вимірному координатному базисі $\{a_k(x)\}$, $k = \overline{1, n}$, — симетричної додатньо визначеної матриці A розміру $n \times n$ в (6).

Наведемо інші умови збіжності ітерацій, в яких залежність від розміру n координатного базису виражається не через значення λ_n, як в (21), а безпосередньо через координатні функції $a_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, та коефіцієнти $c_k(t)$ гальоркінського наближення.

Як легко переконатись, враховуючи ортонормованість в $L_2(Q)$ координатних функцій $a_k(x)$, $k = \overline{1, n}$,

$$y^2(t) = \|v(x,t)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2(t),$$

і, отже, враховуючи (11), маємо, що

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2(t) \le C_1^2, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

де C_1 — константа, визначена в (10). Зазначимо, що оцінка (22) виконується для всіх значень $n = 0, 1, 2, \ldots$, $t \in [0, T]$, тобто є абсолютною.

З другого боку вибрані координатні функції $a_k(x) \in W_2^2(Q)$, а отже — неперервні по x в Q. Для них, як відомо [1], виконується оцінка

$$\max_{x \in Q} |a_k(x)| \le C(Q)||a_k(x)||_{2,0}^{(2)} \equiv A_k, \qquad k = \overline{1, n},$$

де $C(Q)$ — константа, що залежить від розміру області Q.

Позначимо $B(n) = \max\limits_k A_k$. Тоді, розглядаючи в (4) компоненти $v_i^n(x,t)$ вектора $v^n(x,t) = \{v_i^n(x,t), \overline{1,3}\}$ як скалярні добутки векторів $c^n(t) = \{c_k^n(t), \overline{1,n}\}$ та $\alpha_i(x) = \{a_{ki}(x), k = \overline{1,n}\}$, де $a_{ki}(x)$, $i = \overline{1,3}$ – компоненти вектора $a_k(x)$, отримаємо

$$|v^n(x,t)| \le |c^n(t)| \sum_{k=1}^{n} |a_k(x)| \le \sqrt{n} y(t) B(n) \le \sqrt{n} C_1 B(n),$$

звідки випливає оцінка

$$\max_{x\in Q, t\in[0,T]} |v^n(x,t)| \leq \sqrt{n} C_1 B(n). \tag{23}$$

Права частина в (14) оцінюється з використанням нерівностей Гьольдера, Юнга та (23) наступним чином:

$$\begin{aligned} |((v_s \cdot \nabla)v, v^n)| &\leq \max_{x\in Q, t\in[0,T]} |v^n| \, y_s \varphi \leq \\ &\leq \nu\varphi^2 + n(4\nu)^{-1} C_1^2 B^2(n) y_s^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Підставимо (24) в (14). Тоді отримаємо, що

$$\left(y^2\right)' \leq n(2\nu)^{-1} C_1^2 B^2(n) y_s^2, \qquad y(t_i) = 0, \qquad i = \overline{0, M-1}. \tag{25}$$

Інтегруючи (25) по t на $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, отримаємо нерівність

$$y^2(t) \leq n(2\nu)^{-1} C_1^2 B^2(n) y_{sm}^2 (t_{i+1} - t_i), \qquad i = \overline{0, M-1}, \tag{26}$$

де $y_{sm} = \max\limits_{t\in[t_i, t_{i+1}]} y_s(t)$. Поскільки нерівність (26) виконується для всіх $t \in [t_i, t_{i+1}]$, то вона матиме місце і для $y_m = \max\limits_{t\in[t_i, t_{i+1}]} y(t)$. Очевидно, що при заданому значенні розміру n координатного базису величину $t_{i+1} - t_i$ можна вибрати таку, що виконуватиметься нерівність

$$n(2\nu)^{-1} C_1^2 B^2(n)(t_{i+1} - t_i) < 1. \tag{27}$$

Як було прийнято вище, $y(t) = y_{s+1}(t) = \left\| \overset{s+1}{v}(x,t) - v^n(x,t) \right\|$. Отже, нарешті, матимемо, що

$$\max_{t\in[t_i, t_{i+1}]} y_{s+1}(t) < \max_{t\in[t_i, t_{i+1}]} y_s(t), \qquad i = \overline{0, M-1},$$

для всіх $s = 0, 1, 2, \ldots$. Це означає, що $\left\| \overset{s+1}{v}(x,t) - v^n(x,t) \right\| \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$, тобто послідовність ітерацій $\overset{s}{v}(x,t)$ збігається в нормі простору $L_2(Q)$ до точного гальоркінського наближення $V^n(x,t)$ розв'язку задачі (1)–(3) при $s \to \infty$. Отриманий результат сформулюємо у вигляді наступної теореми.

Теорема 2. *У випадку тривимірної області $Q \subset E_3$ при інших ідентичних умовах теореми 1 мають місце її твердження, обумовлені* *розміром n координатного базису $\{a_k(x),\ k = \overline{1,n}\}$, в якому будуються гальоркінські наближення розв'язку задачі (1)–(3), а саме значенням $B(n)$.*

Зауваження 2. Використана тут методика доведення збіжності ітераційного процесу дозволяє апріорі визначити розбиття відрізка $[0,T]$ на відповідну кількість M відрізків $[t_i, t_{i+1}]$, на яких задовольнятиметься умова (27). При цьому це розбиття буде рівномірним, а саме:

$$\tau = t_{i+1} - t_i < 2\nu(nC_1^2 B^2(n))^{-1}. \tag{28}$$

Поскільки величини C_1 на $B(n)$ визначаються безпосередньо з початкових умов задачі (1)–(3) та вибраного базису координатних функцій, це має важливе прикладне значення. Очевидно, що оцінка (28) так само може бути використана у випадку, коли $Q \subset E_2$.

[1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.

[2] Рождественский Б.Л. О применимости разностных методов решения уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. — 1973. — **211**, № 2. — С. 308–311.

[3] Галицын А.С., Карагодов В.П. Об одной экономичной разностной схеме численного решения системы уравнений тепловой конвекции в цилиндрической лакуне / Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. — С. 38–40.

[4] Галицын А.С., Жуковский А.Н., Карагодов В.П. Решение нелинейных задач конвекции в замкнутом обьеме вязкой жидкости проекционно-разностным методом. — Киев, 1987. — 44 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.9)

[5] Галицын А.С., Жуковский А.Н., Карагодов В.П. О применении метода Галеркина к решению осесимметричной задачи конвекции вязкой несжимаемой жидкости в замкнутом объеме. — Киев, 1985. — 48 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.40).

[6] Мосеенков В.Б. Качественные методы исследования задач конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. — 280 с.

[7] Карагодов В.П. Про збіжність ітераційного методу розв'язування нелінійних задач конвекції в'язкої нестисливої рідини / Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці. — Київ: Ін-т математики, 1998. — С. 111–115.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 103–110

УДК 517.957

Поточечная оценка градиента решения нелинейной параболической задачи

А.В. ЖУРАВСКАЯ

Институт математики НАН Украины, Киев

Для градієнта розв'язку нелінійної параболічної граничної задачі в області з виключеною замкненою множиною з використанням методу Мозера доведена поточкова оцінка.

The pointwise estimation was proved for the gradient of the solution of the nonlinear parabolic boundary value problem by means of Mozer's method.

Пусть Ω_1 — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ и F — замкнутое множество, содержащееся в шаре радиуса d, $d < 1$. В цилиндрической области $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $\Omega = \Omega_1 \backslash F$ рассматривается параболическая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i\left(x, t, \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0, \qquad (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$v(x, t) = kf(x, t), \qquad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \qquad k \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Обозначим

$$\frac{\partial}{\partial x_j} a_i(x, t, p) = a'_{ji}(x, t, p), \qquad \frac{\partial}{\partial p_l} a_i(x, t, p) = a''_{li}(x, t, p).$$

Функции $a_i(x, t, p)$, $i = \overline{1, n}$, определены при $(x, t) \in Q_T$, $p \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяют таким условиям:

A_1) для почти всех $t \in [0, T]$ функции $a_i\left(x, t, p\right)$, $i = \overline{1, n}$ дифференцируемы по x, p, измеримы по t для любых $p \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$ и $a_i(x, t, 0) = 0$, при $i = \overline{1, n}$.

A_2) С положительными C_1, K, C_2 выполнены неравенства

$$\sum_{l,i=1}^{n} a''_{li}(x, t, p) q_l q_i \geq C_1 |q|^2, \qquad |a''_{li}(x, t, p)| \leq K, \tag{3}$$

$$|a'_{ji}(x,t,p)| \le C_2|p|. \tag{4}$$

Из оценок (3) следуют оценки

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,p)p_i \ge \nu|p|^2, \qquad \sum_{i=1}^{n} |a_i(x,t,p)| \le \nu^{-1}|p|. \tag{5}$$

Предполагаем, что функция $f(x,t)$ принадлежит $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1)$ для $\forall\, t\in [0,T]$.

Под решением задачи (1)–(2) понимаем такую функцию $v(x,t) \in V_2(Q_T)$, что $v(x,t)-kf(x,t)\in \overset{0}{V}{}_2(Q_T)$ и для любых $\psi(x,t)\in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $t_1 \in [0,T]$ справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} v(x,t)\psi(x,t)dx - k\int\limits_{\Omega} f(x,0)\psi(x,0)dx +$$
$$+\int\limits_{0}^{t_1}\int\limits_{\Omega_s}\left\{-v(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x,t,\frac{\partial v}{\partial t}\right)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x_j}\right\}dxdt = 0.$$

Отметим также интегральное тождество

$$\begin{aligned}&\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{\Omega_s}\left\{\frac{\partial}{\partial t}v_h(x,t)\varphi(x,t)+\right.\\ &\quad\left.+\sum_{i=1}^{n}\left[a_i\left(x,t,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]_h\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial x_i}\right\}dxdt = 0.\end{aligned} \tag{6}$$

справедливое при $h > 0$, $0 < \tau < T-h$ для произвольной функции $\varphi(x,t) \in \overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$, где использовано обозначение

$$\eta_h(x,t) = [\eta(x,t)]_h = \frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h}\eta(x,s)ds$$

для усреднения по t. Определения пространств $V_2(Q_T)$, $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$, $\overset{0}{V}{}_2(Q_T)$ такие же, как в [1].

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* A_1–A_2. *Существует постоянная* C', *которая зависит только от* ν, n *и такая, что выполнена оценка*

$$\iint\limits_{\substack{\frac{2\rho}{3}\le|x-x_0|\le\frac{4\rho}{3}\\ t\in\left[\tau-\frac{\rho^2}{2},\tau+\frac{\rho^2}{2}\right]}} \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dxdt \le C'\frac{d^{2(n-2)}}{\rho^{n-4}} \tag{7}$$

при ρ: $d\le\rho\le 1$.

Доказательство. Подставляем в интегральное тождество (6) функцию $\varphi(x)$ из класса $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$

$$\varphi(x,t) = v_h(x,t)\psi^4(x)\chi^4(t),$$

где функция $\psi(x)$ равна единице при $\frac{2\rho}{3}\le|x-x_0|\le\frac{4\rho}{3}$ и нулю вне множества $\frac{\rho}{2}\le|x-x_0|\le\frac{3\rho}{2}$, а функция $\chi(t)$ равна единице при $t\in\left[\tau-\frac{\rho^2}{2},\tau+\frac{\rho^2}{2}\right]$ и нулю при $t\in\left[\tau-\rho^2,\tau+\rho^2\right]$ и такие что $0\le\psi\le1$, $|\frac{\partial\psi}{\partial x}|\le\frac{L}{\rho}$, $0\le\chi\le1$, $|\frac{\partial\chi}{\partial x}|\le\frac{B}{\rho^2}$.

Использовав условия (5), получим

$$\nu\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^2\psi^4\chi^4dxdt \le 2\nu^{-1}\frac{L}{\rho}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega v_h\frac{\partial v_h}{\partial x}\psi^3\chi^4dxdt -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_\Omega v_h^2\psi^4\chi^4dx|_0^\tau + \frac{2B}{\rho^2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega v_h^2\psi^4\chi^3dxdt.$$

Оценив первый интеграл правой части этого неравенства с помощью неравества Юнга, получим

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^2\psi^4\chi^4dxdt \le \frac{C_1}{\rho^2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega v_h^2\psi^3\chi^3dxdt.$$

Использовав определение функций $\psi(x)$, $\chi(t)$ и то, что

$$|v|\le C''\left(\frac{d}{\rho}\right)^{n-2},$$

получим утверждение леммы.

Теорема. *Пусть выполнены условия A_1–A_2. Тогда существует постоянная C, которая зависит только от n, ν, C_1, C_2, C' такая, что для решений $v(x,t)$ задачи (1)–(2) при $\frac{3\rho}{4} \le |x-x_0| \le \frac{4\rho}{3}$ выполнена оценка*

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \le C\frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{\rho}\right)^{n-2}. \tag{8}$$

Доказательство. Подставим в интегральное тождество (6) функцию $\varphi(x,t)$ из класса $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$

$$\varphi(x,t) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^r \frac{\partial v_h}{\partial x_i}\psi^{s+2}(x)\chi^{s+2}(t)\right\},$$

где функция $\psi(x)$ равна единице при $\frac{3\rho}{4} \le |x-x_0| \le \frac{5\rho}{4}$ и нулю вне множества $\frac{2\rho}{3} \le |x-x_0| \le \frac{4\rho}{3}$, а функция $\chi(t)$ равна единице при $t \in \left[\tau - \frac{\rho^2}{3}, \tau + \frac{\rho^2}{3}\right]$ и нулю при $t \in \left[\tau - \frac{\rho^2}{2}, \tau + \frac{\rho^2}{2}\right]$ и такие что $0 \le \psi \le 1$, $\mid \frac{\partial \psi}{\partial x} \mid \le \frac{L}{\rho}$, $0 \le \chi \le 1$, $\mid \frac{\partial \chi}{\partial x} \mid \le \frac{B}{\rho^2}$, получим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \frac{\partial v_h}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^r \frac{\partial v_h}{\partial x_i}\psi^{s+2}\chi^{s+2}\right\}dxdt + \\
&\quad + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \left[a_j\left(x,t,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]_h \times \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^r \frac{\partial v_h}{\partial x_i}\psi^{s+2}\chi^{s+2}\right)\right\}dxdt = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Для удобства домножим интегральное тождество на -1.

Рассмотрим каждое слагаемое отдельно. Проинтегрировав первое слагаемое по частям, использовав определение функции $\chi(t)$ и то, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial_2 v_h}{\partial x_i \partial t}\frac{\partial v_h}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^2$$

имеем

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|^r \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \psi^{s+2} \chi^{s+2} \right\} dxdt \leq \\
\leq \frac{r+1}{r+2} \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|^{r+2} \psi^{s+2} \chi^{s+2} dx \Big|_0^\tau - \\
- \frac{Br(s+2)}{\rho^2 (r+2)} \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|^{r+2} \psi^{s+2} \chi^{s+1} dxdt.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Проинтегрируем по частям второе слагаемое и, учитывая, что

$$
\frac{\partial}{\partial x_i} a_j \left(x, t, \frac{\partial v}{\partial x} \right) = a'_{ij}(x,t,p) + \sum_{l=1}^n a''_{lj}(x,t,p) \frac{\partial_2 v_h}{\partial x_l \partial x_i}
$$

и используя неравенства (3), (4), (5) и неравенство Юнга, получим

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^n \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial \left[a_j \left(x, t, \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]_h}{\partial x_i} \times \\
\times \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|^r \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \psi^{s+2} \chi^{s+2} \right\} \right) dxdt \leq \\
\leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5,
\end{gathered} \tag{11}
$$

где

$$
\begin{gathered}
R_1 = C_2 \varepsilon^2 \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|^r \psi^{s+2} \chi^{s+2} \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial_2 v_h}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 dxdt + \\
+ \frac{C_2}{\varepsilon^2} \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|^{r+2} \psi^{s+2} \chi^{s+2} dxdt,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
R_2 = r^2 C_2 n \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|^{r+2} \psi^{s+2} \chi^{s+2} dxdt + \\
+ n C_2 \int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial v_h}{\partial x} \right|^r \psi^{s+2} \chi^{s+2} \sum_{j,k=1}^n \left| \frac{\partial_2 v_h}{\partial x_j \partial x_k} \right|^2 dxdt,
\end{gathered}
$$

$$R_3 = (s+2)\frac{LC_2}{\rho^2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^{r+2}\psi^{s+1}\chi^{s+2}dxdt,$$

$$R_4 = C_1\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^{r}\psi^{s+2}\chi^{s+2}\sum_{i,l=1}^n\left|\frac{\partial_2 v_h}{\partial x_i\partial x_l}\right|^2 dxdt,$$

$$R_5 = (s+2)\frac{L}{\rho^2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^{r+1}\psi^{s+1}\chi^{s+2}\times$$
$$\times\sum_{j,i,l=1}^n\left|\left[a''_{lj}\left(x,t,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]_h\right|\cdot\left|\frac{\partial_2 v_h}{\partial x_l\partial x_i}\right|dxdt.$$

Из оценок (10), (11) для равенства (9) получим

$$\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^{r+2}\psi^{s+2}\chi^{s+2}dx\Big|_0^\tau +$$
$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^{r}\psi^{s+2}\chi^{s+2}\sum_{i,j=1}^n\left|\frac{\partial_2 v_h}{\partial x_i\partial x_j}\right|^2 dxdt \leq \tag{12}$$
$$\leq C_9\frac{(r+s)^3}{\rho^2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^{r+2}\psi^{s+1}\chi^{s+2}dxdt.$$

Воспользуемся теоремой включения пространства $V_2(Q_T)$ в пространство $L_{\frac{2(n+2)}{n}}(Q_T)$ и неравенством (12).

$$I(r+2,s+1) := \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^{r+2}\psi^{s+1}\chi^{s+1}dxdt \leq$$
$$\leq\left(C_{10}\frac{(r+s)^2n^2}{\rho^2(n+2)^2}\right)^{\frac{n+2}{n}}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^{\frac{(r+2)n}{(n+2)}}\psi^{\frac{(s+1)n}{(n+2)}-2}\chi^{\frac{(s+1)n}{(n+2)}-2}dxdt\right)^{\frac{n+2}{n}},$$

отсюда

$$
\begin{aligned}
&I(r+2,s+1)\le \\
&\le\left(C_{10}\frac{(r+s)^2n^2}{\rho^2(n+2)^2}\right)^{\frac{n+2}{n}}\left(I\left(\frac{(r+2)n}{n+2},\frac{(s+1)n}{n+2}-2\right)\right)^{\frac{n+2}{n}}.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Выберем последовательности r_i, s_i в виде $r_i = 2\left(\frac{n+2}{n}\right)^i - 2$, $s_i = (n+5)\left(\frac{n+2}{n}\right)^i - (n+3)$. Тогда $r_i + s_i = (n+7)\left(\frac{n+2}{n}\right)^i - (n+5)$.

Дальше положим

$$
z_i = \left(I(r_i+2, s_i+1)\right)^{\left(\frac{n}{n+2}\right)^i}.
$$

Последовательное применение неравенства (13) дает

$$
\begin{aligned}
z_i \le &\left(C_{10}\frac{n^2}{\rho^2(n+2)^2}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{i}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{(k-1)}}\times\\
\times&\left(\left((n+7)\left(\frac{n+2}{n}\right)\right)^{2\sum\limits_{k=1}^{i}k\left(\frac{n+2}{n}\right)^{(k-1)}}+(n+5)^{2\sum\limits_{k=1}^{i}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{(k-1)}}\right)z_0.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем оценку

$$
\begin{aligned}
&\left(\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^{2\left(\frac{n+2}{n}\right)^i}\psi^{s_i+1}\chi^{s_i+1}dxdt\right)^{\left(\frac{n}{n+2}\right)^i}\le\\
&\qquad\le\left(C_{12}\frac{C_{12}}{\rho^2(n+2)^2}\right)^{\frac{n+2}{n}}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^2\psi^3\chi^3dxdt.
\end{aligned}
$$

Воспользовавшись определением функций $\psi(x)$, $\chi(t)$, получим

$$
\left\|\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^2\right\|_{L_{\left(\frac{n}{n=2}\right)^i}(\Omega')}\le\left(\frac{C_{12}}{\rho^2(n+2)^2}\right)^{\frac{n+2}{n}}\iint\limits_{\Omega'}\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^2dxdt,
$$

где $\Omega' = \left\{(x,t) : \frac{3\rho}{4} \le |x-x_0| \le \frac{4\rho}{3}, t\in\left[\tau-\frac{\rho^2}{3}, \tau+\frac{\rho^2}{3}\right]\right\}$.

Перейдем к пределу при $i\to\infty$ и воспользуемся неравенством (7):

$$
\max_{(x,t)\in\Omega'}\left|\frac{\partial v_h}{\partial x}\right|^2\le C_{13}\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d}{\rho}\right)^{2(n-2)}.
$$

Окончательно имеем

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \le C\frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{\rho}\right)^{n-2}, \qquad (x,t) \in \Omega',$$

что и доказывает оценку (8).

[1] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М., 1967. — 376 с.

[2] Скрыпник И.В. Асимптотика решений нелинейных эллиптических задач в перфорированных областях // Математический сборник. — 1993. — **184**, № 10. — С. 67–90.

[3] Скрыпник И.В. Поточечная оценка решения модельной нелинейной параболической задачи // Нелинейные граничные задачи. — 1991. — вып. 3. — С. 72–86.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 111–115

УДК 517.928

Асимптотичні розв'язки сингулярно збурених диференціальних рівнянь з імпульсною дією

Ю.І. КАПЛУН

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Розглянуто сингулярно збурені диференціальні рівняння з імпульсною дією, а також рівняння з умовою імпульсної дії, яка містить малий параметр.

We study the problem of existence of solutions to singularly perturbed differential equations with impulsive effects as well as a similiar problem, when the condition of impulsive effects contains a small parameter.

В цій роботі досліджено задачу вигляду [1, 2]:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = g(t, x), \tag{1}$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = I_i(x), \qquad i \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де функція $g(t, x)$ визначена в $\mathbb{R}^2$; для моментів імпульсної дії $t_i \in \mathbb{R}^1$ існує $\delta > 0$ таке, що $t_{i+1} - t_i \geq \delta$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$. Функції $I_i(x)$, $i \in \mathbb{Z}$, неперервні на $\mathbb{R}^1$. Крім того, припустимо, що виконуються умови:

a) функція $g(t, x)$ нескінченно диференційовна в $\mathbb{R}^2$;

b) похідна $g'_x(t, x) < 0$ для всіх значень $(t, x) \in \mathbb{R}^2$;

c) породжуюча задача вигляду

$$g(t, x) = 0, \tag{3}$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = I_i(x), \qquad i \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

має розв'язок $x = x_0(t)$, який є нескінченно диференційовним за виключенням точок імпульсної дії;

d) функції $I_i(x)$ нескінченно диференційовні для всіх $x \in \mathbb{R}^1$;

e) значення $I'_i(x_0(t_i)) \neq 1$.

Розв'язок задачі (1)–(2) шукаємо у вигляді асимптотичного ряду:

$$x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau,\varepsilon), \tag{5}$$

де $\bar{x}(t,\varepsilon) = \bar{x}_0(t) + \varepsilon\bar{x}_1(t) + \ldots$ — регулярна частина асимптотики,

$$\Pi x(\tau,\varepsilon) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Pi x(\tau_i,\varepsilon), \ \text{ де } \ \Pi x(\tau_i,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \Pi_k x(\tau_i), \ \tau_i = \frac{t-t_i}{\varepsilon},$$

— сингулярна частина асимптотики. Примежева функція $\Pi_k x(\tau_i)$ визначена в деякому правому околі точки $\tau_i = 0$, $i \in \mathbb{Z}$.

Для знаходження в явному вигляді коефіцієнтів асимптотичного ряду підставимо (5) в рівняння (1) та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε:

$$\varepsilon\frac{d\bar{x}(t,\varepsilon)}{dt} + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{d\Pi x(\tau_i)}{d\tau_i} = \bar{g} + \Pi g, \tag{6}$$

де $\bar{g} = \bar{g}(t,\varepsilon) = g(t,\bar{x}(t,\varepsilon))$,

$$\Pi g = g(t_i + \varepsilon\tau_i, x(t_i + \varepsilon\tau_i,\varepsilon)) - g(t_i + \varepsilon\tau_i, \bar{x}(t_i + \varepsilon\tau_i,\varepsilon)).$$

Розклавши функцію $\bar{g}(t,\varepsilon)$ в асимптотичний ряд за ε і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях параметра ε, отримаємо з (6) систему рівнянь для знаходження членів регулярної частини асимптотики розв'язку (5), тобто систему співвідношень:

$$\begin{aligned}
&0 = g(t,\bar{x}_0(t));\\
&\frac{d\bar{x}_0(t)}{dt} = g_x(t,\bar{x}_0(t))\bar{x}_1(t);\\
&\frac{d\bar{x}_k(t)}{dt} = g_x(t,\bar{x}_0(t))\bar{x}_{k+1}(t) + G_k(t), \quad k \in \mathbb{N},
\end{aligned} \tag{7}$$

де функції $G_k(t)$ $(k \in \mathbb{N})$ залежать від функцій $\bar{x}_l(t)$, $l = \overline{0, k-1}$.

Враховуючи умову імпульсної дії (2), знайдемо, що функція $\bar{x}_0(t)$ задовольняє систему (3), (4), тобто $\bar{x}_0(t)$ є нескінченно диференційовною за виключенням точок імпульсної дії t_i. Підставивши $\bar{x}_0(t)$ в друге рівняння, знайдемо $\bar{x}_1(t)$, і т.д. Таким чином, ми отримуємо розклад регулярної частини асимптотики (5), причому функції $\bar{x}_k(t)$ є нескінченно диференційовними за змінною t за виключенням точок імпульсної дії t_i.

Знайдемо функції $\Pi x(\tau_i, \varepsilon)$, $i \in \mathbb{Z}$. Розглянемо розв'язок задачі (1), (2) на інтервалі $(-\infty, t_1]$. В околі точки t_1 необхідно побудувати примежеву функцію $\Pi x(\tau_1, \varepsilon) = \Pi_0 x(\tau_1) + \varepsilon \Pi_1 x(\tau_1) + \cdots$.

Підставивши розклад $\Pi x(\tau_1, \varepsilon)$ в (6), отримаємо:

$$\frac{d\Pi x(\tau_1, \varepsilon)}{d\tau_1} = \Pi_1 g, \tag{8}$$

де $\Pi_1 g = g(\tau_1 \varepsilon + t_1, \bar{x}(\tau_1 \varepsilon + t_1, \varepsilon) + \Pi x(\tau_1, \varepsilon)) - g(\tau_1 \varepsilon + t_1, \bar{x}(\tau_1 \varepsilon + t_1, \varepsilon))$.

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε в розкладі функції $\Pi_1 g$ в ряд Тейлора в околі точки $\varepsilon = 0$, знайдемо систему

$$\frac{d\Pi_0 x(\tau_1)}{d\tau_1} = g(t_1, \bar{x}_0(t_1) + \Pi_0 x(\tau_1)) - g(t_1, \bar{x}_0(t_1));$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi_1 x(\tau_1)}{d\tau_1} &= \tau_1 g'_t(t_1, \bar{x}_0(t_1) + \Pi_0 x(\tau_1)) + \\ &+ g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1) + \Pi_0 x(\tau_1))(\Pi_1 x(\tau_1) + \bar{x}_1(t_1) + \bar{x}'_0(t_1)\tau_1) - \\ &- g'_t(t_1, \bar{x}_0(t_1))\tau_1 - g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1))(\bar{x}_1(t_1) + \bar{x}'_0(t_1)\tau_1);\end{aligned}$$

$$\frac{d\Pi_k x(\tau_1)}{d\tau_1} = g'_x(t_1, \bar{x}_0(t_1) + \Pi_0 x(\tau_1))\Pi_k x(\tau_1) + F_k(\tau_1), \quad k \geq 2,$$

де $F_k(\tau_1)$, $k = 2, 3, \ldots$ — функції, що поліноміально залежать від $\Pi_l x(\tau_1)$, $l = \overline{1, k-1}$.

Розглянемо умову імпульсної дії (2):

$$\begin{aligned}I_1(x(t, \varepsilon)) &= I_1(\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1) + \varepsilon(\bar{x}_1(t) + \Pi_1 x(\tau_1)) + \cdots) = \\ &= I_1(\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1)) + \\ &+ \varepsilon I'_1(\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1))[\bar{x}_1(t) + \Pi_1 x(\tau_1)] + \\ &+ \varepsilon^2 \{I'_1(\bar{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau_1))[\bar{x}_2(t) + \Pi_2 x(\tau_1)] + J_2(t, \tau_1)\} + \cdots.\end{aligned}$$

Тут функції J_k $(k = 2, 3, \ldots)$ залежать від $\bar{x}_l, \Pi_l x(\tau_1)$, $l = \overline{1, k-1}$. Оскільки функція $\bar{x}_0(t)$ задовольняє умову імпульсної дії (2) при $\varepsilon = 0$, то можна покласти $\Pi_0 x(\tau_1) \equiv 0$.

Розглянемо рівняння для визначення $\Pi_1 x(\tau_1)$:

$$\frac{d\Pi_1 x(\tau_1)}{d\tau_1} = g'_{\bar{x}}(t_1, \bar{x}_0(t_1))\Pi_1 x(\tau_1). \tag{9}$$

Функція $\bar{x}_1(t)$ має в точці $t = t_1$ стрибок $\Delta\bar{x}_1 = \bar{x}_1(t_1+0)-\bar{x}_1(t_1-0)$. З розкладу функції $I_1(x)$ випливає, що

$$\Delta\bar{x}_1|_{t=t_1} + \Pi_1 x(0) = I_1'(\bar{x}_0(t_1))[\bar{x}_1(t_1) + \Pi_1\bar{x}(0)],$$

звідки знаходимо початкову умову для функції $\Pi_1 x(\tau_1)$:

$$\Pi_1 x(0) = \frac{-\Delta\bar{x}_1|_{t=t_1} + I_1'(\bar{x}_0(t_1))\bar{x}_1(t_1)}{1 - I_1'(\bar{x}_0(t_1))}. \tag{10}$$

Отже, функція $\Pi_1 x(\tau_1)$ задовольняє задачу Коші (9), (10). Аналогічно функція $\Pi_k x(\tau_1)$ є розв'язком задачі Коші вигляду:

$$\frac{d\Pi_k x(\tau_1)}{d\tau_1} = g_x'(t_1, \bar{x}_0(t_1))\Pi_k x(\tau_1) + F_k(\tau_1), \tag{11}$$

$$\Pi_k x(0) = \frac{-\Delta\bar{x}_k|_{t=t_1} + I_1'(\bar{x}_0(t_1))\bar{x}_k(t_1) + J_k(t_1, 0)}{1 - I_1'(\bar{x}_0(t_1))}. \tag{12}$$

Покажемо, що функції $\Pi_k x(\tau_1)$, $k = 0, 1, \ldots,$ є примежевими, тобто $\Pi_k x(\tau_1) \to 0$ при $\tau_1 \to \infty$. Справедлива лема.

Лема. *Функції* $\Pi_k x(\tau_1)$, $k = 0, 1, \ldots,$ *що є розв'язками задачі (11), (12) мають властивість:* $|\Pi_k x(\tau_1)| \to 0$ *при* $\tau_1 \to \infty$. *Більш того, існують такі сталі* $c, \gamma > 0$, *що для всіх* $k = 0, 1, \ldots$ *виконуються нерівності:* $|\Pi_k x(\tau_1)| \le c \exp(-\gamma\tau_1)$ *для всіх* $\tau_1 \ge 0$.

Аналогічно будуються примежеві функції $\Pi_k(\tau_i)$, $k = 0, 1, \ldots,$ в околах точок

$$\tau_i = \frac{t - t_i}{\varepsilon} = 0.$$

Введемо позначення

$$X_n(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k [\bar{x}_k(t) + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Pi_k x(\tau_i)].$$

Теорема 1. *При виконанні умов а)–е) ряд (5) є асимптотичним рядом для розв'язку* $x(t, \varepsilon)$ *задачі (1), (2) на довільному відрізку* $[a, b]$, *тобто справедлива оцінка:*

$$\max_{a\le t\le b} |x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)| = O\left(\varepsilon^{n+1}\right).$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови a)–e); задача (3), (4) має T-періодичний розв'язок. Тоді задача (1), (2) має асимптотичний на довільному відрізку $[a, b]$ розв'язок вигляду (5), для якого справедливе співвідношення:*

$$\max_{t\in[a,b]\setminus\{t_i, i\in\mathbb{Z}\}} |X_n(t+T,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)| = O\left(\varepsilon^m\right) \quad \textit{для} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Розглянемо сингулярно збурене диференціальне рівняння (1) з умовою імпульсної дії (2), що містить малий параметр:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = g(t,x), \tag{13}$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = \varepsilon I_i(x), \qquad i \in \mathbb{Z}, \tag{14}$$

де функція $g(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$; моменти імпульсної дії t_i такі, що існує $\delta > 0$, для якого $t_{i+1} - t_i \geq \delta$ для всіх $i \in \mathbb{Z}$. Функції $I_i(x)$, $i \in \mathbb{Z}$, неперервні на $\mathbb{R}^1$. Незбурена для (13), (14) задача має вигляд співвідношення $g(t,x) = 0$, щодо якого припустимо, що існує функція $x = \bar{x}_0(t)$, визначена на $\mathbb{R}^1$, така, що $g(t,\bar{x}_0(t)) \equiv 0$. Розв'язок задачі (13), (14) можна знайти у вигляді асимптотичного ряду аналогічно алгоритму побудови розв'язку задачі (1), (2), описаному вище.

Теорема 3. *При виконанні умов a), b), d) ряд (5) є асимптотичним рядом для розв'язку $x(t,\varepsilon)$ задачі (13), (14) на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}^1$, тобто справедлива оцінка:*

$$\max_{a\leq t\leq b} |x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)| = O\left(\varepsilon^{n+1}\right).$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови a), b), d); функція $\bar{x}_0(t)$ є T-періодичною та існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що для довільного $i \in \mathbb{Z}$ виконується рівність $t_{i+m} = t_i + T$.*

Тоді існує асимптотичний на довільному відрізку $[a,b]$ розв'язок задачі (13), (14) виду (5), для якого справедливе співвідношення:

$$\max_{t\in[a,b]\setminus\{t_i, i\in\mathbb{Z}\}} |X_n(t+T,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)| = O\left(\varepsilon^m\right) \quad \textit{для} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.

[2] Каранджулов Л.И. Краевая задача с импульсным воздействием для сингулярно возмущенных систем в некритическом случае // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 2. — С. 188–205.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 116–125

УДК 517.944:536.2

Дослідження збіжності ітераційного процесу при розв'язуванні задач термоконвекції

В.П. КАРАГОДОВ

Інститут математики НАН України, Київ

Запропоновано ітераційний проекційний метод розв'язування двовимірних задач термоконвекції рідини з вибором кроку по часу для всього часового проміжку. Доведено його збіжність до гальоркінських наближень таких задач.

We present an iterative projective method of solving two-dimensional thermoconvection problem with selected time step for all time interval. Its convergence to Galerkin's approximate solutions of this problem is proved.

Дослідження процесів, пов'язаних з тепловою конвекцією рідини, є актуальним у зв'язку з широким розповсюдженням фізичного явища конвекції як у природі, так і в багатьох галузях практичної діяльності людини, таких як енергетика, хімічна промисловість, металургія, метереологія, агротехніка тощо. При практичному дослідженні явищ термоконвекції часто використовують модель, що описується рівняннями Нав'є–Стокса в наближенні Обербека–Бусінеска. Виведення рівнянь цієї моделі детально розглянуто в [1]. Зазначимо, що їх отримують за умови сталості всіх теплофізичних параметрів рідини, крім архімедових сил, які повязані з її тепловим розширенням, тобто зміною густини рідини в залежності від температури.

Розглянемо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &v_t + (v\cdot\nabla)v = \nu\Delta v - \nabla p - \beta g u + f,\\ &\operatorname{div} v = 0, \qquad x\in Q_T, \qquad t\in[0,T], \end{aligned} \tag{1}$$

$$v(x,0) = a(x), \qquad v(x,t)|_{\Gamma_T} = 0, \tag{2}$$

$$u_t + (v\cdot\nabla)u = \chi\Delta u + q, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u(x,t)|_{\Gamma_T} = 0. \tag{4}$$

Задача полягає у визначенні вектора швидкості руху рідини $v(x,t)$, тиску $p(x,t)$ в рідині та температури $u(x,t)$ в точках x деякої заданої замкнутої області Q ($Q_T = Q \times [0,T]$) з границею Γ ($\Gamma_T = \Gamma \times [0,T]$) в момент часу $t \in [0,T]$. Границя Γ вважається кусково-гладкою; ν, β, χ — сталі коефіцієнти в'язкості, теплового розширення і температуропровідності рідини; $f(x,t)$ і $q(x,t)$ — густина відповідно сил зовнішнього збурення рідини та джерел теплової енергії в точці $x \in Q$ в момент часу $t \in [0,T]$; g — вектор прискорення сили земного тяжіння. Вважається також, що $\operatorname{div} a = 0$ і $\operatorname{div} f = 0$.

Задача (1)–(4) однозначно розв'язна у випадку двовимірних областей ($Q \subset E_2$). У випадку, коли $Q \subset E_3$, однозначна розв'язність має місце при певних обмеженнях на вихідні дані задачі, або на проміжок часу $[0,T]$, на якому вона розглядається [2, 3]. Основною проблемою як при якісному дослідженні, так і при чисельному моделюванні задачі (1)–(4), є нелінійність рівнянь (1), (3). Ефективним методом дослідження задач такого типу є застосування методу ітерацій, за допомогою якого нелінійні рівняння лінеаризують, що певною мірою спрощує вказану проблему. Прикладом успішного застосування методу ітерацій як в теоретичному, так і в прикладному аспектах можуть є [1, 4, 5].

В цій роботі розглянуто прикладний аспект вказаної проблеми, а саме доведено збіжність ітераційного процесу, за допомогою якого успішно досліджувались процеси конвективного руху рідини високої інтенсивності [4, 5]. Розглянуто узагальнені розв'язки задачі (1)–(4), отримані за допомогою методу Гальоркіна, що застосовується по просторових змінних. Зауважимо також, що проблема нелінійності рівнянь (1), (3) загалом однаково проявляється при розв'язуванні задачі як для двовимірних, так і тривимірних областей Q. В цій роботі вивчено випадок $Q \subset E_2$. Постановки задач для довимірних областей широко застосовуються при вивченні процесів термоконвекції. Це пов'язано з відносною простотою таких задач і можливістю чисельного моделювання.

Зупинимость спочатку на деяких апріорних оцінках, що випливають з рівнянь (1)–(4). Якщо рівняння (1) і (3) домножити відповідно на v та u скалярно в $L_2(Q)$ і врахувати, що $((v \cdot \nabla)v, v) = 0$, $((v \cdot \nabla)u, u) = 0$ та $(v, \nabla p) = 0$, то отримаємо наступні енергетичні співвідношення:

$$\frac{1}{2}\left(y^2\right)' + \nu\varphi^2 = (f,v) - \beta(gu,v), \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\left(z^2\right)' + \chi\zeta^2 = (q,u), \tag{6}$$

де $y(t) = ||v(x,t)||$, $\varphi(t) = ||v_x(x,t)||$, $z(t) = ||u(x,t)||$, $\zeta(t) = ||u_x(x,t)||$. Тут і далі $(\cdot,\cdot)$ і $||\cdot||$ позначають, відповідно, скалярний добуток і норму в $L_2(Q)$, а

$$||v_x||^2 = \int_Q |v_x|^2 dx, \qquad \text{де} \quad |v_x|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} v_{ix_j}^2,$$

$$||u_x||^2 = \int_Q |u_x|^2 dx, \qquad \text{де} \quad |u_x|^2 = \sum_{i=1}^{2} u_{x_i}^2,$$

v_i, $i = 1,2$ — компоненти вектора v. Інтегруючи спочатку (6), а потім (5) по t на $[0,T]$, отримаємо такі оцінки:

$$y(t) \le C_1, \qquad z(t) \le C_3, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}y^2(t) + \nu\int\limits_0^t \varphi^2 d\tau \le C_2, \qquad \frac{1}{2}z^2(t) + \chi\int\limits_0^t \zeta^2 d\tau \le C_4, \tag{8}$$

де C_i, $i = \overline{1,4}$ — константи, що визначаються лише вихідними даними задачі.

Легко переконатись [2], що ці оцінки мають місце і для гальоркінських наближень відповідного узагальненого розв'язку задачі (1)–(4), а саме для розв'язку у вигляді

$$\begin{aligned} v^n(x,t) &= \sum_{k=1}^{n} c_k^n(t) a_k(x), \qquad n = 1,2,\ldots, \\ u^m(x,t) &= \sum_{l=1}^{m} b_l^m(t)\theta_l(x), \qquad m = 1,2,\ldots, \end{aligned} \tag{9}$$

де $\{a_k(x)\}$, $k = \overline{1,n}$ — деяка повна в $W_2^2(Q) \cap H(Q)$ фундаментальна система координатних функцій, $\{\theta_l(x)\}$, $l = \overline{1,m}$ — повна в $W_2^2(Q) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ фундаментальна система функцій, а $c_k^n(t)$ та $b_l^m(t)$ — коефіцієнти, які визначаються з наведеної нижче системи звичайних диференціальних рівнянь. Тут і далі $W_p^l(Q)$ — простори Соболєва, $H(Q)$ — гільбертів простір соленоїдальних в Q вектор-функцій, рівних нулю на границі Γ, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ — гільбертів простір, функції якого задовольняють однорідну граничну умову (4). Вважатимемо, що $\{a_k(x)\}$ та $\{\theta_l(x)\}$ — ортонормовані в $L_2(Q)$.

Застосування методу Гальоркіна по просторових змінних до розв'язування задачі (1)–(4), коли розв'язки шукаються у вигляді (9), приводить до розв'язування задачі Коші для системи звичайних нелінійних диференціальних рівнянь. В матричному вигляді вона матиме такий вигляд [4, 5]:

$$\begin{aligned} &\frac{dc}{dt} + cD_1c + A_1c = F + Pb, \\ &\frac{db}{dt} + cD_2b + A_2b = Q, \end{aligned} \tag{10}$$

де $c(t) = \{c_k(t),\, k = \overline{1,n}\}$ та $b(t) = \{b_l(t),\, l = \overline{1,m}\}$ — невідомі вектор-коефіцієнти в (9). Інші складові системи (10) відомі: A_1, A_2 — квадратні симетричні додатньо визначені матриці розмірності $n \times n$ та $m \times m$ відповідно; D_1, D_2 — тривимірні матриці розмірності $n \times n \times n$ та $n \times m \times m$; P — прямокутна матриця розмірності $n \times m$, F і Q — вектори розмірності n та m відповідно. З початкових умов (2), (4) вихідної задачі отримаємо початкові умови для рівнянь (10), а саме:

$$\begin{aligned} &c_k(0) = (a(x), a_k(x)), \qquad k = \overline{1,n}, \\ &b_l(0) = (u_0(x), \theta_l(x)), \qquad l = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{11}$$

Зауважимо, що задача (10), (11) однозначно розв'язна на всьому проміжку $[0,T]$, оскільки всі члени рівнянь (10) залежать аналітично від невідомих $c(t)$ та $b(t)$ і, як легко переконатись, $c(t)$ та $b(t)$ рівномірно обмежені на $[0,T]$ [2, 6], а саме, враховуючи (7),

$$|c(t)|^2 = y^2(t) \le C_1, \qquad |b(t)|^2 = z^2(t) \le C_3.$$

Розглянемо ітераційний процес, за допомогою якого розв'язується задача (1)–(4), а точніше, — задача (10)–(11), поскільки метод ітерацій на практиці застосовується до рівнянь (10)–(11). Для спрощення викладок та наглядності будемо виходити з постановки (1)–(4). Розіб'ємо умовно проміжок часу $[0,T]$ на M відрізків $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$ так, що $t_0 = 0$, $t_M = T$. Це розбиття, взагалі кажучи, нерівномірне, а кількість M відрізків, як буде показано, скінченна.

На кожному відрізку $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, розглядаємо задачу

$$\begin{aligned}
&\overset{s+1}{v}_t + \left(\overset{s}{v} \cdot \nabla\right) \overset{s+1}{v} + \nu \Delta \overset{s+1}{v} - \nabla \overset{s+1}{p} - \beta g \overset{s+1}{u} + f, \\
&\operatorname{div} \overset{s}{v} = \operatorname{div} \overset{s+1}{v} = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\overset{s+1}{v}(x, t_i) = v(x, t_i), \qquad \overset{s+1}{v}\big|_{\Gamma_{t_i}^{t_{i+1}}} = 0, \tag{13}$$

$$\overset{s+1}{u}_t + \left(\overset{s}{v} \cdot \nabla\right) \overset{s+1}{u} = \chi \Delta \overset{s+1}{u} + q, \tag{14}$$

$$\overset{s+1}{u}(x, t_i) = u(x, t_i), \qquad u(x,t)\big|_{\Gamma_{t_i}^{t_{i+1}}} = 0, \tag{15}$$

$$x \in Q, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = \overline{0, M-1}, \qquad s = 0, 1, 2, \ldots,$$

де s — номер ітерації, $\{v(x, t_i), u(x, t_i)\}$ — граничне значення розв'язку задачі (12)–(15) при $s \to \infty$ на відрізку $[t_{i-1}, t_i]$. Для визначеності покладемо при $s = 0$ $\overset{\circ}{v}(x, t) = 0$, тобто при $s = 1$ отримаємо розв'язок $\overset{1}{v}(x, t)$, $\overset{1}{u}(x, t)$ відповідної лінійної задачі, коли в рівняннях (12) та (14) відсутні члени $(\overset{s}{v} \cdot \nabla) \overset{s+1}{v}$ і $\overset{s}{v} \cdot \nabla) \overset{s+1}{u}$, що відповідають нелінійним конвективним членам в рівняннях (1) і (3).

Далі будемо формально вважати, що розв'язок задачі (1)–(4) — це гальоркінське наближення, тобто $v = v^n$ і $u = u^m$ і введемо позначення

$$v = v_{s+1} = \overset{s+1}{v} - v^n, \quad u = u_{s+1} = \overset{s+1}{u} - u^m, \quad p = \overset{s+1}{p} - p^n. \tag{16}$$

Віднімемо від рівнянь (12)–(15) рівняння (1)–(4). Тоді в прийнятих позначеннях отримаємо такі співвідношення:

$$v_t + \left(\overset{s}{v} \cdot \nabla\right) v + (v_s \cdot \nabla) v^n = \nu \Delta v - \nabla p - \beta g u, \tag{17}$$

$$v(x, t_i) = 0, \qquad v(x,t)\big|_{\Gamma_{t_i}^{t_{i+1}}} = 0, \tag{18}$$

$$u_t + \left(\overset{s}{v} \cdot \nabla\right) u + (v_s \cdot \nabla) u^m = \chi \Delta u, \tag{19}$$

$$u(x, t_i) = 0, \qquad u(x,t)\big|_{\Gamma_{t_i}^{t_{i+1}}} = 0, \tag{20}$$

$$x \in Q, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad i = \overline{0, M-1}, \qquad s = 0, 1, 2, \dots .$$

Домножимо скалярно в $L_2(Q)$ рівність (17) і початкову умову (18) на $v(x,t)$ та рівність (19) і початкову умову (20) на $u(x,t)$, а початкові умови (18) і (20) — відповідно на $v(x,t_i)$ та $u(x,t_i)$. Враховуючи, що $((\overset{s}{v} \cdot \nabla) v, v) = 0$, $((\overset{s}{v} \cdot \nabla) u, u) = 0$, $(\nabla p, v) = 0$, отримаємо такі співвідношення:

$$\frac{1}{2}\left(y^2\right)' + \nu\varphi^2 = ((v_s \cdot \nabla)v, v^n) - \beta(gu, v), \tag{21}$$

$$\frac{1}{2}\left(z^2\right)' + \chi\zeta^2 = ((v_s \cdot \nabla)u, u^m), \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &y(t_i) = 0, \qquad z(t_i) = 0, \qquad t \in [t_i, t_{i+1}], \\ &i = \overline{0, M-1}, \qquad s = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{23}$$

де згідно введених вище позначень $y(t) = ||v(x,t)|| = ||\overset{s+1}{v} - v^n||$, $z(t) = ||u(x,t)|| = ||\overset{s+1}{u} - u^m||$. Аналогічно визначаються позначення $\varphi(t)$ та $\zeta(t)$.

Зазначимо, що виведення рівностей (17)–(20) і, отже, рівностей (21)–(23) проведено тут формально заради спрощення викладок. Разом з тим, легко переконатись, що співвідношення (21)–(23), на які ми будемо спиратись далі, отримуються, якщо строго виходити з узагальненої постановки задачі при застосуванні методу Гальоркіна по просторових змінних [6]. Отже, надалі вважаємо, що значення v^n та $\overset{s}{v}$ — це гальоркінські наближення відповідно задач (1)–(4) та (12)–(15).

Щоб отримати необхідні оцінки буде використано відомі нерівності Гьольдера та Юнга, а також нерівність, що виконується для функцій із простору $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ [6], а саме:

$$||u||_{4,Q}^4 \le 2||u||^2||u_x||^2, \qquad x \in Q \subset E_2. \tag{24}$$

Оцінимо праві частини в рівностях (21), (22):

$$\begin{aligned} J_1 = |((v_s \cdot \nabla)u, u^m)| = |((v_s \cdot \nabla)u^m, u)| \le ||u_x^m|| ||v_s||_{4,Q} ||u||_{4,Q} \le \\ \le \sqrt{2}\zeta^m y_s^{1/2}\varphi_s^{1/2} z^{1/2}\zeta^{1/2} \le 2^{-1/2}\zeta^m(y_s\varphi_s + z\zeta) \le \\ \le \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 y_s^2 \left(\zeta^m\right)^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_1^{-2}\varphi_s^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 z^2 (\zeta^m)^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_2^{-2}\zeta^2. \end{aligned}$$

Виберемо $\varepsilon_1^2 = 2\nu^{-1}$ та $\varepsilon_2^2 = (4\chi)^{-1}$. Підставивши отриману при цих значеннях оцінку J_1 в рівняння (22), матимемо нерівність

$$\left(z^2\right)' \leq 2\nu^{-1} y_s^2 \left(\zeta^m\right)^2 + \frac{1}{4}\nu\varphi_s^2 + (4\chi)^{-1} z^2 \left(\zeta^m\right)^2,$$

проінтегрувавши яку по t на $[t_i, t_{i+1}]$ і врахувавши умову $z(t_i) = 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} z^2(t) \leq 2\nu^{-1} y_{sm}^2 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (\zeta^m)^2 dt + \\ + \frac{1}{4}\nu \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_s^2 dt + (4\chi)^{-1} z_m^2 \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (\zeta^m)^2 dt. \end{aligned} \tag{25}$$

Тут і далі нижній індекс m позначає максимальне значення функції по t на $[t_i, t_{i+1}]$, а саме:

$$\begin{aligned} &y_m = \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} y(t), \qquad z_m = \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} z(t), \\ &y_{sm} = \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} y_s(t), z_{sm} = \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} z_s(t). \end{aligned}$$

Очевидно, що нерівність (25) виконується при всіх значеннях $t \in [t_i, t_{i+1}]$, і, отже, для максимального значення $z(t)$ в її лівій частині. Вважаємо довжину відрізка такою, що справедлива нерівність

$$(4\chi)^{-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (\zeta^m)^2 dt \leq \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Тоді

$$z_m^2 \leq 4\chi\nu^{-1} y_{sm}^2 + \frac{1}{2}\nu \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_s^2 dt. \tag{27}$$

Виконання умови (26) на всіх $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, досягається розбиттям відрізка $[0, T]$ на скінченну кількість M таких відрізків, завдяки оцінці (8). Доведення цього факту наведено в [1].

Аналогічно отримаємо наступну оцінку:

$$J_2 = |((v_s \cdot \nabla)v, v^n)| = |((v_s \cdot \nabla)v^n, v)| \le$$
$$\le \sqrt{2}\varphi^n y_s^{1/2} \varphi_s^{1/2} y^{1/2} \varphi^{1/2} \le$$
$$\le \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 y_s^2 (\varphi^n)^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_1^{-2}\varphi_s^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 y^2 (\varphi^n)^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_2^{-2}\varphi^2.$$

Виберемо тут $\varepsilon_1^2 = \nu^{-1}$ та $\varepsilon_2^2 = (2\nu)^{-1}$. Тоді

$$J_2 \le (2\nu)^{-1} y_s^2 (\varphi^n)^2 + \frac{1}{4}\nu\varphi_s^2 + (4\nu)^{-1} y^2 (\varphi^n)^2 + \frac{1}{2}\nu\varphi^2.$$

Накінець, скориставшись оцінкою (27), отримаємо, що

$$J_3 = \beta|(gu, v)| \le \beta|g|zy \le \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\beta^2|g|^2 y^2 \le$$
$$\le 2\chi\nu^{-1} y_{sm}^2 + \frac{1}{2}\nu \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_s^2 dt + \frac{1}{4}\beta^2 |g|^2 y^2.$$

Підставимо оцінки J_2 та J_3 в рівність (21):

$$\left(y^2\right)' + \nu\varphi^2 \le \left(\frac{1}{2}\nu^{-1}\left(\varphi^n\right)^2 + \beta^2|g|^2\right) y^2 +$$
$$+ \left(\nu^{-1}\left(\varphi^n\right)^2 + 4\chi\nu^{-1}\right) y_{sm}^2 + \frac{1}{2}\nu\varphi_s^2 + \frac{1}{2}\nu \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_s^2 dt.$$

Проінтегруємо цю нерівність по t на $[t_i, t_{i+1}]$, зважаючи на умову (23), тобто, що $y(t_i) = 0$.

$$y^2(t) + \nu\int\limits_{t_i}^{t} \varphi^2 dt \le y_m^2 \left(\frac{1}{2}\nu^{-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\varphi^n\right)^2 dt + \beta^2|g|^2 (t_{i+1} - t_i)\right) +$$
$$+ y_{sm}^2 \left(\nu^{-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\varphi^n\right)^2 dt + 4\chi\nu^{-1}(t_{i+1} - t_i)\right) + \tag{28}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(1 + t_{i+1} - t_i\right)\nu \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi_s^2 dt.$$

Нерівність (28) виконується для всіх $t \in [t_i, t_{i+1}]$, а отже, і для максимального значення лівої частини. Вважаємо, що відрізок $[0,T]$ розбито на M частин $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$, таких, що на кожному з них одночасно виконуються нерівності

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\nu^{-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(\varphi^n)^2dt + \beta^2|g|^2(t_{i+1}-t_i) \le \frac{1}{2}, \\ &\nu^{-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}(\varphi^n)^2dt + 4\chi\nu^{-1}(t_{i+1}-t_i) < \frac{1}{2}, \qquad t_{i+1}-t_i < 1, \end{aligned} \tag{29}$$

а також нерівність (26). Таке розбиття завжди можна зробити завдяки оцінкам (8).

Тоді з (28) випливає, що

$$\frac{1}{2}y_m^2 + \nu\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi^2dt < \frac{1}{2}y_{sm}^2 + \nu\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\varphi_s^2dt. \tag{30}$$

Нерівність (30) означає, що послідовність y_s збігається при $s \to \infty$ (зауважимо, що $y = y_{s+1} = ||\overset{s+1}{v} - v^n||$) до нуля, а відповідно $\overset{s}{v}$ — до v^n в нормі простору $V_2^{1,0}(Q_T)$. Норма в ньому визначається наступним чином:

$$||v(x,t)||^2_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \frac{1}{2}\max_t y^2(t) + \nu\int\limits_0^T\varphi^2dt. \tag{31}$$

З нерівності (27) випливає, відповідно, збіжність z_m до нуля і відповідно $\overset{s}{u}$ до u^m при $s \to \infty$. Отже, доведена наступна

Теорема. *Якщо в задачі (1)–(4) $a(x) \in W_2^2(Q) \cap H(Q)$, $u_0(x) \in W_2^2(Q) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q), f(x,t)$ та $q(x,t) \in L_{2,1}(Q_T)$, то у випадку двовимірної області $Q \subset E_2$ відрізок $[0,T]$ завжди можна розбити на скінченну кількість M відрізків $[t_i, t_{i+1}]$, $i = \overline{0, M-1}$ таких, що на кожному з них ітераційний процес (12)–(15) збігається, а саме, ітерації $\{\overset{s}{v}, \overset{s}{u}\}$ збігаються при $s \to \infty$ до гальоркінських наближень $\{v^n, u^m\}$: $\overset{s}{v}$ — в нормі (31), а $\overset{s}{u}$ — в нормі простору $L_2(Q)$. Це розбиття визначається нерівностями (26), (29), які залежать лише від* *вихідних даних задачі і не залежать від розмірності координатних базисів* $\{a_k(x),\ k=\overline{1,n}\}$ *та* $\{\theta_l(x),\ l=\overline{1,m}\}$.

Зауваження 1. Умови гладкості для $a(x)$, $u_0(x)$, $f(x,t)$ та $g(x,t)$ вибрано, виходячи з умов однозначної розв'язності задачі (1)–(4). При доведенні збіжності ітерацій досить вимагати, щоб $a(x)\in H(Q)$ та $u_0(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1$.

Зауваження 2. Якщо замість (16) покласти $v=v_{s+1}=\overset{s+1}{v}-\overset{s}{v}$, $u=u_{s+1}=\overset{s+1}{u}-\overset{s}{u}$, $p=\overset{s+1}{p}-\overset{s}{p}$, то повторивши всі викладки, отримаємо збіжність цих різниць до нуля при $s\to\infty$ у наведених вище нормах. Така збіжність контролюється при чисельному моделюванні задачі (1)–(4), оскільки розв'язки $\{v^n,u^m\}$ чи точні розв'язки $\{v,u\}$ невідомі. Виключенням є випадки перевірки алгоритмів на тестових задачах.

[1] Мосеенков В.Б. Качественные методы исследования задач конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. — 280 с.

[2] Коренев Н.К. О некоторых задачах в вязкой несжимаемой жидкости // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1971. — № 7. — С. 29–39.

[3] Карагодов В.П. О локальной разрешимости трехмерных задач тепловой конвекции вязкой несжимаемой жидкости. — Киев, 1991. — 17 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 91.20).

[4] Галицын А.С., Жуковский А.Н., Карагодов В.П. О применении метода Галеркина к решению осесимметричной задачи конвекции жидкости в замкнутом объеме. — Киев, 1985. — 48 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.40).

[5] Галицын А.С., Жуковский А.Н., Карагодов В.П. Решение нелинейных задач конвекции в замкнутом объеме вязкой жидкости проекционно-разностным методом. — Киев, 1987. — 44 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.9).

[6] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 288 с.

[7] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1973. — 736 с.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 126–135

УДК 517.95:512.816

Про конформно-інваріантні анзаци для довільного векторного поля

В.І. ЛАГНО

Полтавський державний педагогічний університет
E-mail: laggo@poltava.bank.gov.ua

Розглянуто загальну процедуру побудови конформно-інваріантних анзаців для довільного векторного поля.

General procedure of construction of conformally-invariant Ansätze for arbitrary vector field has been considered.

Розглянемо систему S диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$S : F_A(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \underset{1}{\mathbf{u}}, \ldots, \underset{r}{\mathbf{u}}) = 0, \qquad A = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

яка визначена на відкритій множині $M \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ простору p незалежних та q залежних змінних. В (1) $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p) \in X$, $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^q) \in U$, $\underset{l}{\mathbf{u}} = \left\{ \frac{\partial^l u^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_p^{\alpha_p}},\ 0 \le \alpha_i \le l,\ \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i = l \right\}$, $l = 1, 2, \ldots, r$; F_A — достатньо гладкі скалярні функції своїх аргументів.

Нехай G — локальна група перетворень, яка діє в M, — є групою інваріантності системи (1), і її векторні поля Лі мають вигляд

$$X_a = \xi_a^i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{x_i} + \eta_j^a(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \partial_{u^j}, \qquad a = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

де ξ_a^i, η_j^a — довільні гладкі функції в M, $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_{u^j} = \frac{\partial}{\partial u^j}$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$. Зауважимо, що оператори (2) складають базис алгебри Лі AG групи G, тобто мають місце співвідношення

$$[X_a, X_b] = C_{ab}^c X_c, \qquad a, b, c = 1, \ldots, n,$$

де C_{ab}^c — структурні константи.

Розв'язок $\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ системи (1), де $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^q)$, називається G-інваріантним розв'язком, якщо він залишається незмінним при всіх перетвореннях із групи G. Це означає, що для довільного $g \in G$

функції $\mathbf{f}$ та $g(\mathbf{f})$ (якщо вона визначена) збігаються в їх загальній області визначення.

Якщо G — група симетрії системи (1), то, при виконанні деяких додаткових припущень про регулярність дії групи G, ми можемо знайти всі G-інваріантні розв'язки системи S, розв'язавши редуковану систему диференціальних рівнянь S/G.

Для того, щоб побачити, як здійснюється процедура симетрійної редукції, розглянемо випадок, коли група G діє в M проектовно (саме такі групи перетворень і підлягають подальшому дослідженню). Це означає, що всі перетворення g із G мають вигляд

$$(\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{u}}) = g((\mathbf{x}, \mathbf{u})) = (\Psi_g(\mathbf{x}), \Phi_g(\mathbf{x}, \mathbf{u})),$$

тобто, закон перетворення незалежних змінних $\mathbf{x}$ не містить залежних змінних (якщо група G діє в M проектовно, то у векторних полях Лі (2) $\xi_a^i = \xi_a^i(\mathbf{x})$). Цим самим визначена проектовна дія групи G $\overline{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}) = \Psi_g(\mathbf{x})$ в довільній підмножині $\Omega \subset X$.

Надалі вважаємо, що дія групи G в M та її проектовна дія в Ω є регулярними й орбіти цих дій мають одну й ту ж розмірність s (цю розмірність ще називають рангом групи G або її алгебри Лі AG). Відзначимо, що умова $\operatorname{rank} G = s$ рівносильна умові [1]

$$\operatorname{rank} \|\xi_a^i(\mathbf{x}_0)\| = \operatorname{rank} \|\xi_a^i(\mathbf{x}_0), \eta_j^a(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)\| = s \tag{3}$$

в довільній точці $(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0) \in M$. Також, далі вважаємо, що $s < p$ (випадок $s = p$ є тривіальним, а для $s > p$ не існують G-інваріантні функції).

Якщо виконуються зроблені припущення, то існують [1] $p - s$ функціонально-незалежних інваріантів $y^1 = \omega^1(\mathbf{x}), y^2 = \omega^2(\mathbf{x}), \ldots,$ $y^{p-s} = \omega^{p-s}(\mathbf{x})$ (перша група інваріантів) проектовної дії групи G в Ω, кожен з яких є також інваріантом повної дії групи G в M, та q функціонально-незалежних інваріантів дії групи G в M вигляду $v^1 = g^1(\mathbf{x}, \mathbf{u}), v^2 = g^2(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \ldots, v^q = g^q(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ (друга група інваріантів). Запишемо коротко повний набір інваріантів групи G у вигляді

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{4}$$

Далі, оскільки має місце рівність

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial g^j}{\partial u^i} \right\| = q, \qquad i, j = 1, \ldots, q,$$

то, згідно з теоремою про існування неявної функції, другу систему (4) можна розв'язати відносно $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}). \tag{5}$$

Для першої системи (4) має місце умова

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \omega^j}{\partial x_i} \right\| = p - s, \qquad j = 1, \ldots, p - s; \quad i = 1, \ldots, p.$$

Виберемо $p - s$ незалежних змінних $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{p-s})$ так, що

$$\operatorname{rank} \left\| \frac{\partial \omega^j}{\partial \tilde{x}_i} \right\| = p - s, \qquad i, j = 1, \ldots, p - s,$$

і назвемо їх головними, а решту s незалежних змінних $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_s)$ назвемо параметричними (в усі подальші формули вони дійсно входять як параметри). Тоді першу систему (4) можна розв'язати відносно головних змінних

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{z}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}). \tag{6}$$

Підставивши (6) в (5) приходимо до рівності $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{z}, \mathbf{v})$ або

$$\mathbf{u} = \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{y}, \mathbf{v}). \tag{7}$$

Зауважимо, що в (5)–(7) $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}^1, \ldots, \tilde{r}^q)$, $\mathbf{r} = (r^1, \ldots, r^q)$, $\mathbf{z} = (z^1, \ldots, z^{p-s})$ — деякі коректно визначені функції. Побудована так G-інваріантна функція $\mathbf{u}$ (7) називається *анзацом.* В результаті підстановки анзацу (7) в систему (1) ми, згідно з теоремою про умовне існування інваріантних розв'язків [1], приходимо до системи рівнянь, яка не залежить від параметричних змінних, а є системою диференціальних рівнянь відносно $\mathbf{v}$ як функцій змінних $\mathbf{y}$. Це і є редукована система S/G, в якій кількість незалежних змінних $y^1, \ldots, y^{p-s}$ на s менша від кількості незалежних змінних в системі (1). Якщо $\mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ — розв'язок редукованої системи, то, підставивши його значення в (7), ми тим самим отримаємо G-інваріантний розв'язок системи (1).

Зупинимося далі на п'ятнадцятипараметричній групі конформних перетворень $C(1,3)$, яка діє у відкритій області $M \subset \mathbb{R}^{1,3} \times \mathbb{R}^q$ чотиривимірного простору-часу Мінковського незалежних змінних $x_0, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ та q-вимірного простору залежних змінних $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_0, \mathbf{x})$, $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^q)$. Ця група перетворень є групою інваріантності ряду важливих лінійних та нелінійних рівнянь з частинними похідними математичної та теоретичної фізики [2]–[4].

Конформна група $C(1,3)$ породжується генераторами трансляцій P_μ $(\mu = 0,1,2,3)$, поворотів J_{ab} $(a,b = 1,2,3,\ a<b)$, псевдоповоротів (перетворень Лоренца) J_{0a} $(a = 1,2,3)$, перетворень подібності (дилатації) D та конформних перетворень K_μ $(\mu = 0,1,2,3)$, які складають базис алгебри Лі $c(1,3)$ конформної групи й задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha,\\
&[J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\beta}J_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}J_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha}J_{\nu\beta} - g_{\nu\beta}J_{\mu\alpha},\\
&[P_\mu, D] = P_\mu, \quad [J_{\mu\nu}, D] = 0, \quad [K_\mu, J_{\alpha\beta}] = g_{\mu\alpha}K_\beta - g_{\mu\beta}K_\alpha,\\
&[D, K_\mu] = K_\mu, \quad [K_\mu, K_\nu] = 0, \quad [P_\mu, K_\nu] = 2(g_{\mu\nu}D - J_{\mu\nu}).
\end{aligned}
$$

Тут і нижче $\mu,\nu,\alpha,\beta = 0,1,2,3$, $g_{\mu\nu}$ — метричний тензор простору Мінковського $\mathbb{R}^{1,3}$:

$$
g_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu = 0;\\ -1, & \mu = \nu = 1,2,3;\\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases}
$$

Аналізуючи результати досліджень (в класичному підході Лі) симетрійних властивостей ряду фундаментальних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними, приходимо до висновку, що відомі реалізації в класі векторних полів Лі груп $P(1,3)$, $\tilde{P}(1,3)$, $C(1,3)$ (див., наприклад, [1]–[4]) можна подати у такому вигляді:

$$
\begin{aligned}
&P_\mu = \partial_{x_\mu},\\
&J_{\mu\nu} = x^\mu\partial_{x_\nu} - x^\nu\partial_{x_\mu} - (S_{\mu\nu}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}),\\
&D = x_\mu\partial_{x_\mu} - k(E\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}),\\
&K_0 = 2x_0D - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_0} - 2x_a(S_{0a}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}),\\
&K_1 = -2x_1D - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_1} + 2x_0(S_{01}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) -\\
&\qquad -2x_2(S_{12}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) - 2x_3(S_{13}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}),\\
&K_2 = -2x_2D - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_2} + 2x_0(S_{02}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) +\\
&\qquad +2x_1(S_{12}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) - 2x_3(S_{23}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}),\\
&K_3 = -2x_3D - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_3} + 2x_0(S_{03}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) +\\
&\qquad +2x_1(S_{13}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}) + 2x_2(S_{23}\mathbf{u}\cdot\partial_{\mathbf{u}}).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

У формулах (8) $S_{\mu\nu}$ — $(q\times q)$-матриці, що реалізують зображення алгебри Лі $o(1,3)$ групи перетворень Лоренца $O(1,3)$:

$$
[S_{\mu\nu}, S_{\alpha\beta}] = g_{\mu\beta}S_{\nu\alpha} + g_{\nu\alpha}S_{\mu\beta} - g_{\mu\alpha}S_{\nu\beta} - g_{\nu\beta}S_{\mu\alpha},
$$

E — одинична $q \times q$-матриця, $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \ldots, u^q)^T$, $\partial_{\mathbf{u}} = (\partial_{u^1}, \partial_{u^2}, \ldots, \partial_{u^q})^T$; символ $(* \cdot *)$ означає скалярний добуток двох вектор-стовпців у просторі $\mathbb{R}^q$. Також, тут і далі, піднімання та опускання індексів μ, ν здійснюється за допомогою метричного тензора простору Мінковського $\mathbb{R}^{1,3}$, а за індексами, що повторюються, передбачено підсумовування в межах їх зміни: від 0 до 3 за індексами μ, ν та від 1 до 3 за індексом a. Число k — деяке цілком визначене число, яке називається степенем конформності алгебри $c(1,3)$.

Як випливає із співвідношень (8), істотною особливістю інфінітезимальних операторів, які складають базис алгебри $c(1,3)$, є та, що вони мають вигляд (2), де функції ξ_a^i є функціями лише незалежних змінних $\mathbf{x} \in X = \mathbb{R}^p$, а функції η_j^a лінійно залежать від $\mathbf{u}$.

Отже, нехай локальна група перетворень G діє проектовно в M, $AG = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$ — її алгебра Лі, базис якої складають інфінітезимальні оператори вигляду

$$\begin{gathered} X_a = \xi_a^i(\mathbf{x})\partial_{x_i} + \rho_{jk}^a(\mathbf{x})u^k\partial_{u^j} \\ (a = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, p;\ j,k = 1, \ldots, q). \end{gathered} \tag{9}$$

Згідно із сказаним вище, у цьому випадкові група G має два класи інваріантів: перший клас складають $p - s$ (де s — ранг групи G) функціонально-незалежних інваріантів

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{w} = (\omega^1, \ldots, \omega^{p-s}), \tag{10}$$

а другий клас — q інваріантів

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad \mathbf{h} = (h^1, \ldots, h^q). \tag{11}$$

При цьому функції $\mathbf{w}$ та $\mathbf{h}$ є інваріантами групи G тоді і тільки тоді, коли вони є відповідно розв'язками таких двох систем диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку:

$$\xi_a^i(\mathbf{x})\frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \qquad \omega = \omega(\mathbf{x}), \tag{12}$$

$$\xi_a^i(\mathbf{x})\frac{\partial h}{\partial x_i} + \rho_{jk}^a(\mathbf{x})u^k\frac{\partial h}{\partial u^j}, \qquad h = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{13}$$

В (12), (13) $a = 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, p$; $j, k = 1, \ldots, q$.

У загальному випадку G-інваріантний анзац має вигляд (6), де $\mathbf{v} \equiv \mathbf{h}$. Але, як показано в [3], якщо інфінітезимальні оператори групи G мають вигляд (9), то G-інваріантний анзац для векторного поля $\mathbf{u}$ можна подати у лінійній формі

$$\mathbf{u} = \Lambda(\mathbf{x})\mathbf{h}(\mathbf{w}), \tag{14}$$

де $\Lambda(\mathbf{x})$ — деяка відома невироджена в $\Omega \subset M$ $q \times q$-матриця, $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^q)^T$, $\mathbf{h} = (h^1, \ldots, h^q)^T$.

Знайдемо умови, яким повинна задовольняти матриця $\Lambda(\mathbf{x})$ в анзаці (14).

Лема 1. *Нехай G-інваріантний анзац має вигляд (14). Тоді існує така невироджена в Ω $(q \times q)$-матриця $H(\mathbf{x}) = \Lambda^{-1}(\mathbf{x})$, яка є розв'язком матричного диференціального рівняння з частинними похідними*

$$\xi_a^i(\mathbf{x})\frac{\partial H(\mathbf{x})}{\partial x_i} + H(\mathbf{x})\Gamma_a(\mathbf{x}) = 0, \tag{15}$$

де $\Gamma_a(\mathbf{x})$ — деякі відомі $(q \times q)$-матриці, що визначаються виглядом інфінітезимальних операторів (9).

Доведення. Якщо G-інваріантний анзац має вигляд (14), то виконується рівність

$$\mathbf{h} = H(\mathbf{x})\mathbf{u},$$

де $H(\mathbf{x}) = \Lambda^{-1}(\mathbf{x})$, тобто другий клас інваріантів (11) групи G повинні складати функції, які є лінійними формами функцій u^j

$$h^b = h_{bl}(\mathbf{x})u^l, \qquad b, l = 1, \ldots, q.$$

Необхідною і достатньою умовою того, що функція h^b є інваріантом групи G, є те, що вона задовольняє рівняння (13)

$$\xi_a^i(\mathbf{x})\frac{\partial h_{bl}(\mathbf{x})}{\partial x_i}u^l + \rho_{jl}^a(\mathbf{x})u^l h_{bj}(\mathbf{x}) = 0$$

або

$$\xi_a^i(\mathbf{x})\frac{\partial h_{bl}(\mathbf{x})}{\partial x_i} + h_{bj}(\mathbf{x})\rho_{jl}^a(\mathbf{x}) = 0, \tag{16}$$

для всіх значень b. В (16) $a = 1, \ldots, n$; $i = 1, \ldots, p$; $b, j, l = 1, \ldots, q$. Поклавши $H(\mathbf{x}) = \|h_{bj}(\mathbf{x})\|$, $\Gamma_a(\mathbf{x}) = \|\rho_{jl}^a(\mathbf{x})\|$, бачимо, що другий доданок у лівій частині рівності (16) є елементом матриці $H(\mathbf{x})\Gamma_a(\mathbf{x})$ $(a = 1, \ldots, n)$, який записаний у клітинці (b, l), тобто, матриця $H(\mathbf{x})$ задовольняє рівняння (15), де матриця $\Gamma_a(\mathbf{x})$ цілком визначається виглядом інфінітезимальних операторів (9). ■

У лемі 1 кожному операторові X_a $(a = 1, \ldots, n)$ алгебри Лі AG співставлено деяку матрицю Γ_a. Використовуючи запис (8) інфінітезимальних операторів конформної групи, неважко переконатися, що аналогічними матрицями для базисних операторів алгебри $c(1,3)$ є такі матриці:

- генератори трансляцій P_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ — нульові $(q \times q)$-матриці;
- генератори поворотів та перетворень Лоренца $J_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ — $(q \times q)$-матриці $-S_{\mu\nu}$;
- оператор дилатації D — матриця $-kE$, де k — степінь конформності алгебри $c(1,3)$, а E — одинична $(q \times q)$-матриця;
- генератори конформних перетворень K_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ — матриці

$$\begin{aligned}
&-2x_0kE - 2x_aS_{0a} \quad (a = 1,2,3) && \text{для оператора } K_0, \\
&2x_1kE + 2x_0S_{01} - 2x_2S_{12} - 2x_3S_{13} && \text{для оператора } K_1, \\
&2x_2kE + 2x_0S_{02} + 2x_1S_{12} - 2x_3S_{23} && \text{для оператора } K_2, \\
&2x_3kE + 2x_0S_{03} + 2x_1S_{13} + 2x_2S_{23} && \text{для оператора } K_3.
\end{aligned}$$

Відома форма матриць Γ_a для операторів алгебри $c(1,3)$ дозволяє визначити і клас матриць $H = \Lambda^{-1}$ з анзацу (14).

Так, якщо алгебра AG є деякою підалгеброю алгебри Пуанкаре $p(1,3) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu} |\ \mu, \nu = 0, 1, 2, 3\rangle$, то матриці Γ_a належать множині матриць $S_{\mu\nu}$ і природним є пошук матриць H у класі матриць

$$\tilde{H} = \prod_j \exp(\theta_j S_j), \qquad j = 1, \ldots, 6, \tag{17}$$

де S_j — відомі матриці $S_{\mu\nu}$, а $\theta_j = \theta_j(x_0, \mathbf{x})$ — довільні гладкі функції, визначені в $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{1,3}$.

Якщо AG є деякою підалгеброю розширеної алгебри Пуанкаре $\tilde{p}(1,3) = p(1,3) \supset\!\!\!\!+ \langle D\rangle$, множина матриць S_j $(j = 1, \ldots, 6)$ доповнюється матрицею E, а тому тут

$$H = [\exp \theta E]\tilde{H}, \tag{18}$$

де $\theta = \theta(x_0, \mathbf{x})$ — довільна гладка в $\tilde{\Omega}$ функція, а $\tilde{H}$ — матриця (17).

Нарешті, якщо AG є деякою підалгеброю конформної алгебри $c(1,3)$, то тут матриці Γ_a є лінійними комбінаціями матриць E та $S_{\mu\nu}$, а тому і у цьому випадкові матрицю H природно шукати у вигляді (18).

Нехай $H_a = S_{0a} - S_{a3}$, $\tilde{H}_a = S_{0a} + S_{a3}$ $(a = 1, 2)$. Надалі ми використовуємо базис алгебри $o(1,3)$, який складають матриці S_{03}, S_{12}, H_a, $\tilde{H}_a$ $(a = 1, 2)$.

Врахувавши сказане вище, будемо шукати матрицю $H = H(x_0, \mathbf{x}) = \Lambda^{-1}(x_0, \mathbf{x})$ у вигляді

$$
\begin{aligned}
H = {} & \exp\{(-\ln\theta)E\}\exp(\theta_0 S_{03})\exp(-\theta_3 S_{12})\exp(-2\theta_1 H_1)\times \\
& \times\exp(-2\theta_2 H_2)\exp(-2\theta_4 \tilde{H}_1)\exp(-2\theta_5 \tilde{H}_2),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

де $\theta = \theta(x_0, \mathbf{x})$, $\theta_0 = \theta_0(x_0, \mathbf{x})$, $\theta_m = \theta_m(x_0, \mathbf{x})$ $(m = 1, 2, \ldots, 5)$ — довільні гладкі функції, визначені в деякій відкритій області $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{1,3}$.

Нехай $L = \langle X_a | a = 1, 2, 3\rangle$ — деяка підалгебра рангу s алгебри $c(1,3)$, базис якої, внаслідок (8), складають оператори, які можна подати у такому загальному вигляді:

$$
X_a = \xi_a^\mu(x_0, \mathbf{x})\partial_{x_\mu} + (\tilde{\Gamma}_a \mathbf{u} \cdot \partial_{\mathbf{u}}), \qquad a = 1, \ldots, s. \tag{20}
$$

В операторах (20) матриці $\tilde{\Gamma}_a = \tilde{\Gamma}_a(x_0, \mathbf{x})$ визначаються через відомі матриці Γ_a в базисних операторах конформної алгебри, а тому можемо покласти, що

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\Gamma}_a = f^a E + f_0^a S_{03} + f_1^a H_1 + f_2^a H_2 + f_3^a S_{12} + f_4^a \tilde{H}_1 + f_5^a \tilde{H}_2 \\
& (a = 1, \ldots, s),
\end{aligned}
\tag{21}
$$

де $f^a = f^a(x_0, \mathbf{x})$, $f_0^a = f_0^a(x_0, \mathbf{x})$, $f_m^a = f_m^a(x_0, \mathbf{x})$ $(m = 1, \ldots, 5)$ — деякі відомі гладкі функції.

Згідно з результатами леми 1, для побудови відповідного підалгебрі L анзаца (14) ми повинні знайти розв'язки систем (12) та (15), що у нашому випадкові набувають вигляду

$$
\xi_a^\mu \frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = 0, \tag{22}
$$

$$
\xi_a^\mu \frac{\partial H}{\partial x_\mu} + H \cdot \tilde{\Gamma}_a = 0, \tag{23}
$$

де $\xi_a^\mu = \xi_a^\mu(x_0, \mathbf{x})$, $\tilde{\Gamma}_a = \tilde{\Gamma}(x_0, \mathbf{x})$ визначаються виглядом базисних операторів підалгебри L (зокрема, $\tilde{\Gamma}_a$ мають вигляд (21)), H — матриця (19), $\omega = \omega(x_0, \mathbf{x})$, $a = 1, \ldots, s$; $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Розглянемо систему (23).

Лема 2. *Нехай H має вигляд (19). Тоді*

$$\xi_a^\mu \frac{\partial H}{\partial x_\mu} = H \Biggl\{ -\theta^{-1} \xi_a^\mu \frac{\partial \theta}{\partial x_\mu} E + \xi_a^\mu \frac{\partial \theta_0}{\partial x_\mu} [(1 + 8\theta_1\theta_4 + 8\theta_2\theta_5) S_{03} +$$

$$+ 8(\theta_1\theta_5 - \theta_2\theta_4) S_{12} + 2\theta_1 H_1 + 2\theta_2 H_2 - 2(\theta_4 + 4\theta_1\theta_4^2 +$$

$$+ 8\theta_2\theta_4\theta_5 - 4\theta_1\theta_5^2)\tilde{H}_1 - 2(\theta_5 + 4\theta_2\theta_5^2 + 8\theta_1\theta_4\theta_5 - 4\theta_2\theta_4^2)\tilde{H}_2] -$$

$$- \xi_a^\mu \frac{\partial \theta_3}{\partial x_\mu} [8(\theta_2\theta_4 - \theta_1\theta_5) S_{03} + (1 + 8\theta_1\theta_4 + 8\theta_2\theta_5) S_{12} +$$

$$+ 2\theta_2 H_1 - 2\theta_1 H_2 + 2(\theta_5 + 4\theta_2\theta_5^2 - 4\theta_2\theta_4^2 + 8\theta_1\theta_4\theta_5)\tilde{H}_1 -$$

$$- 2(\theta_4 + 4\theta_1\theta_4^2 - 4\theta_1\theta_5^2 + 8\theta_2\theta_4\theta_5)\tilde{H}_2] -$$

$$- 2\xi_a^\mu \frac{\partial \theta_1}{\partial x_\mu} [4\theta_4 S_{03} + 4\theta_5 S_{12} + H_1 + 4(\theta_5^2 - \theta_4^2)\tilde{H}_1 - 8\theta_4\theta_5\tilde{H}_2] -$$

$$- 2\xi_a^\mu \frac{\partial \theta_2}{\partial x_\mu} [4\theta_5 S_{03} - 4\theta_4 S_{12} + H_2 - 8\theta_4\theta_5\tilde{H}_1 + 4(\theta_4^2 - \theta_5^2)\tilde{H}_2] -$$

$$- 2\xi_a^\mu \frac{\partial \theta_4}{\partial x_\mu} \tilde{H}_1 - 2\xi_a^\mu \frac{\partial \theta_5}{\partial x_\mu} \tilde{H}_2 \Biggr\},$$

де $a = 1, 2, 3$, $\mu = 0, 1, 2, 3$.

Для доведення леми 2 потрібно використати відому формулу Кемпбелла–Хаусдорфа.

Теорема. *Система (23) зводиться до системи диференціальних рівнянь з частинними похідними для визначення значень функцій θ, θ_0, θ_m $(m = 1, 2, \ldots, 5)$:*

$$\xi_a^\mu \frac{\partial \theta}{\partial x_\mu} = f^a \theta, \qquad \xi_a^\mu \frac{\partial \theta_0}{\partial x_\mu} = 4(\theta_4 f_1^a + \theta_5 f_2^a) - f_0^a,$$

$$\xi_a^\mu \frac{\partial \theta_1}{\partial x_\mu} = 4(\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_5) f_1^a + 4(\theta_1\theta_5 - \theta_2\theta_4) f_2^a$$

$$- \theta_1 f_0^a - \theta_2 f_3^a + \frac{1}{2} f_1^a,$$

$$\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_2}{\partial x_\mu} = 4(\theta_2\theta_4 - \theta_1\theta_5)f_1^a + $$
$$+ 4(\theta_2\theta_5 + \theta_1\theta_4)f_2^a - \theta_2 f_0^a + \theta_1 f_3^a + \frac{1}{2} f_2^a,$$
$$\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_3}{\partial x_\mu} = 4(\theta_4 f_2^a - \theta_5 f_1^a) + f_3^a, \tag{24}$$
$$\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_4}{\partial x_\mu} = \theta_4 f_0^a - 2(\theta_4^2 - \theta_5^2)f_1^a - 4\theta_4\theta_5 f_2^a - \theta_5 f_3^a + \frac{1}{2} f_4^a,$$
$$\xi_a^\mu \frac{\partial\theta_5}{\partial x_\mu} = \theta_5 f_0^a - 4\theta_4\theta_5 f_1^a + 2(\theta_4^2 - \theta_5^2)f_2^a + \theta_4 f_3^a + \frac{1}{2} f_5^a.$$

В (24) $\mu = 0, 1, 2, 3$; $a = 1, \ldots, s$. *Вигляд лінійних операторів* $\xi_a^\mu \partial_{x_\mu}$ *та функцій* f^a, f_0^a, f_m^a $(m = 1, 2, \ldots, 5)$ *визначаєтьcя базисними операторами підалгебри* L *рангу* s *алгебри* $c(1,3)$.

Доведення. Підставивши знайдене в лемі 2 значення $\xi_a^\mu \frac{\partial H}{\partial x_\mu}$ в ліву частину рівності (23), бачимо, що ($H \neq 0$) вона рівносильна системі рівностей, ліві частини яких є лінійними комбінаціями матриць E, S_{01}, S_{12}, H_a, $\tilde{H}_a$ $(a = 1, 2)$. Тому рівність нулю лівої частини рівностей (23) еквівалентна рівності нулю коефіцієнтів біля цих матриць. Врахувавши вигляд (21) матриць $\tilde{\Gamma}_a$, в результаті досить громіздких перетворень приходимо до системи (24). ■

Підводячи підсумок, відмітимо, що побудова конформно-інваріантних анзаців зводиться до знаходження фундаментальної системи розв'язків лінійної системи (22) та множини частинних розв'язків системи (24), яка, взагалі кажучи, є нелінійною системою диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку.

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[2] Fushchich W., Shtelen W., Serov N. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 436 p.

[3] Fushchych W. and Zhdanov R. Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. — Kyiv: Mathematical Ukraina Publisher, 1997. — 383 p.

[4] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. — Киев: Наук. думка, 1983. — 200 с.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 136–158

УДК 517.958:512.816

Про інваріантність квазілінійних рівнянь гіперболічного типу відносно тривимірних алгебр Лі

В. ЛАГНО [†]***, О. МАГДА*** [‡]***, Р. ЖДАНОВ*** [‡]

[†] *Полтавський педагогічний університет, Полтава*

[‡] *Інститут математики НАН України, Київ*

В даній роботі повністю розв'язано задачу класифікації квазілінійних рівнянь гіперболічного типу з двома незалежними змінними, які інваріантні відносно одно- та двовимірних алгебр Лі. Крім того, одержано вичерпний опис рівнянь досліджуваного класу, які допускають тривимірні розкладні розв'язні алгебри Лі.

We have completely solved the problem of description of quasi-linear hyperbolic-type differential equations in two independent variables that are invariant under one- and two-dimensional Lie algebras. Moreover, we have obtained an exhaustive description of the equations under consideration admitting three-dimensional split solvable Lie algebras.

Вступ. Диференціальні рівняння з частинними похідними гіперболічного типу займають важливе місце серед фундаментальних рівнянь математичної фізики. До них, зокрема, приводять задачі (наближеного) опису процесів коливань різноманітної природи в термінах диференціальних рівнянь. При цьому, як правило, обмежуються першим наближенням, одержуючи лінійні рівняння. Основна перевага такого підходу полягає у тому, що лінійні диференціальні рівняння задовольняють принцип лінійної суперпозиції. Цей принцип обумовлює ефективність застосування існуючого на даний час математичного апарату для аналізу та розв'язування таких рівнянь.

В ряді випадків опис процесів коливань в термінах лінійних рівнянь є незадовільним, оскільки відповідна математична модель не "відчуває" більш тонких нелінійних ефектів, притаманних досліджуваному процесові. Класичним прикладом є солітонні рівняння, що описують суттєво нелійний ефект фазового зсуву взаємодіючих солітонних розв'язків. Розв'язки лінеаризованих солітонних рівнянь очевидно не мають такої властивості. Отже, наступному (більш точному) наближенню реального процесу відповідає нелінійна математична задача, для розв'язування і дослідження якої є досить обмежений математичний апарат. Більше цього, якщо досліджуються диференціальні рівняння з довільними функціями, то взагалі не існує загальних методів для їх точного інтегрування.

Ситуація суттєво змінюється, якщо нелінійні диференціальні рівняння мають нетривіальні симетрійні властивості. Дійсно, за такої умови для їх аналізу можна застосувати потужні методи теорії груп та алгебр Лі (див., наприклад, [1]–[4]). У зв'язку із цим актуальною є задача виокремлення із заданого класу нелінійних рівнянь тих, які допускають нетривіальні групи симетрії. Відзначимо, що задача класифікації рівнянь за їх групами симетрії є центральною проблемою класичного групового аналізу диференціальних рівнянь [1]. Відповідна процедура називається груповою класифікацією диференціальних рівнянь.

Дана стаття присвячена груповій класифікації квазілінійних диференціальних рівнянь гіперболічного типу

$$u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u, u_x). \tag{1}$$

Тут і далі, $u = u(t, x)$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ і т.п., F — довільна гладка функція.

Проблему групової класифікації лінійних рівнянь другого порядку з двома незалежними змінними вивчав ще С. Лі. Він, зокрема, довів теорему, яка стверджує, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку з двома незалежними змінними допускає не більш ніж трипараметричну групу нетривіальних перетворень [5]. Повний розв'язок задачі групової класифікації лінійних рівнянь вигляду (1) було одержано Л.В. Овсянніковим [6] (див., також, [1]). Також відзначимо роботу [7], де було проведено групову класифікацію лінійних хвильових рівнянь

$$u_{tt} = f^2(x) u_{xx}.$$

Наскільки нам відомо, задача групової класифікації нелінійних рівнянь загального вигляду (1) не розглядалася. Зауважимо, що частинний випадок цього рівняння, який одержується за умови $F = F(u)$, досліджував С. Лі [8]. Зокрема, він повністю дослідив симетрію рівняння Бонне $u_{tx} = \exp u$.

Також слід відзначити роботи, де одержано (повний або частковий) розв'язок задачі групової класифікації таких одновимірних нелінійних хвильових рівнянь:

$$
\begin{array}{ll}
u_{tt} = u_{xx} + F(t, x, u), & [3,\ 9], \\
u_{tt} = -\lambda u_{xx} + F(u, u_x), & [10], \\
u_{tt} = [f(u)u_x]_x, & [11,\ 12], \\
u_{tt} = f(u_x)u_{xx}, & [13], \\
u_{tt} = [f(x, u)u_x]_x, & [14], \\
u_{tt} = [f(u)u_x + g(x, u)]_x, & [15], \\
u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x)_x, & [16].
\end{array}
$$

Тут ми розглядаємо задачу групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1) відносно розкладних розв'язних алгебр Лі операторів симетрії за умови

$$F_{u_x u_x} \not\equiv 0. \tag{2}$$

Метод класифікації є модифікацією підходу до розв'язування задач групової класифікації диференціальних рівнянь з двома незалежними змінними, запропонованого нами в [17]. В рамках цього підходу здійснено повну групову класифікацію рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом

$$u_t = u_{xx} + F(t, x, u, u_x),$$

тобто явно вказані всі можливі функції F, для яких ці рівняння допускають нетривіальну групу симетрії.

Запропонований підхід базується на синтезі інфінітезимального методу Лі [1] (див., також, [18]), методу перетворень еквівалентності та методів класифікації абстрактних скінченновимірних дійсних алгебр Лі. Загальний опис підходу та ряд допоміжних тверджень про загальну структуру груп симетрії рівнянь вигляду (1), (2) подано в другій частині роботи. Третя частина присвячена класифікації нелінійних рівнянь (1), (2), які допускають тривимірні розкладні розв'язні алгебри Лі операторів симетрії.

Метод класифікації та деякі попередні результати. Основною перевагою запропонованого у [17] підходу до групової класифікації диференціальних рівнянь над традиційним методом перетворень еквівалентності є те, що він дозволяє ефективно класифікувати рівняння, які містять довільні функції вже двох, трьох і більше змінних. Тобто клас рівнянь, групові властивості яких можуть бути систематично вивчені, суттєво розширюється.

Стосовно класу рівнянь (1) алгоритм методу групової класифікації, розробленого в [17], передбачає виконання наступних кроків.

I. Із використанням інфінітезимального методу Лі знаходимо систему визначальних рівнянь для коефіцієнтів інфінітезимального оператора, що генерує групу симетрії рівняння (1). Визначальні рівняння, які явно залежать від функції F та її похідних, називаються класифікуючими. Інтегруючи ті з визначальних рівнянь, які не залежать від F, одержуємо найбільш загальний вигляд інфінітезимального оператора, що допускається рівняннями вигляду (1). Окрім цього, із використанням інфінітезимального методу (або прямими обчисленнями) будуємо групу еквівалентності $\mathcal{E}$ досліджуваного рівняння.

II. Другий крок передбачає побудову реалізацій алгебр Лі A_n розмірності $n \leq 3$ в класі отриманих на першому кроці інфінітезимальних операторів з точністю до еквівалентності, яка визначається перетвореннями із групи $\mathcal{E}$. Підставляючи одержані оператори в класифікуючі рівняння, виділяємо ті реалізації, які є алгебрами симетрії диференціального рівняння (1). Поступове розширення розмірності алгебр інваріантності призводить до зменшення ступеню довільності в невідомій функції F.

III. Третій крок передбачає завершення групової класифікації досліджуваного рівняння. Для цього можна використовувати як традиційні методи (якщо “довільні елементи” в досліджуваному рівнянні є функціями одного аргументу), так і подальше розширення вже відомих реалізацій алгебр Лі до реалізацій алгебр симетрії рівняння (1) наступної розмірності.

Результатом виконання цього алгоритму є перелік рівнянь, які належать до класу (1) разом з їх алгебрами симетрії. Задача групової класифікації вважається повністю розв’язаною, якщо доведено, що

1) побудовані алгебри Лі є максимальними алгебрами симетрії відповідних рівнянь;

2) в рамках сформульованої задачі отриманий перелік містить лише нееквівалентні рівняння (тобто, такі рівняння, які перетвореннями із групи $\mathcal{E}$ не зводяться одне в інше).

Перший та, частково, другий кроки алгоритму в рамках задачі групової класифікації нелінійних рівнянь вигляду (1), (2) було здійснено в [19]. Зупинимося на отриманих там результатах.

Згідно з методом Лі, інфінітезімальний оператор групи симетрії рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$X = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u,$$

де τ, ξ, η — деякі гладкі функції, визначені у відкритій області Ω простору $V = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^1$ незалежних t, x та залежної $u = u(t,x)$ змінних. З використанням інфінітезимального методу Лі доведено, що найбільш загальний інфінітезимальний оператор групи симетрії (1), (2) має вигляд

$$X = (\lambda t + \lambda_1)\partial_t + (\lambda x + \lambda_2)\partial_x + [h(x)u + r(t,x)]\partial_u. \tag{3}$$

При цьому дійсні сталі λ, λ_1, λ_2 та функції $h = h(x)$, $r = r(t,x)$, $F = F(t,x,u,u_x)$ задовольняють класифікуюче рівняння

$$\begin{aligned} r_{tt} - r_{xx} - \frac{d^2h}{dx^2}u - 2\frac{dh}{dx}u_x + (h-2\lambda)\,F- \\ -(\lambda t + \lambda_1)\,F_t - (\lambda x - \lambda_2)\,F_x - (hu + r)\,F_u \\ -\left(r_x + \frac{dh}{dx}u + (h-\lambda)u_x\right)F_{u_x} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Групу еквівалентності $\mathcal{E}$ рівняння (1), (2) складають невироджені перетворення постору V

$$\bar{t} = \alpha(t,x,u), \quad \bar{x} = \beta(t,x,u), \quad v = U(t,x,u), \quad \frac{D(\bar{t},\bar{x},v)}{D(t,x,u)} \neq 0,$$

які залишають клас рівнянь (1), (2) інваріантним. Інакше кажучи, якщо в (1), (2) перейти до нових змінних $\bar{t}$, $\bar{x}$, v, то одержується рівняння того ж самого вигляду:

$$v_{\bar{t}\,\bar{t}} = v_{\bar{x}\,\bar{x}} + \tilde{F}(\bar{t},\,\bar{x},\,v,\,v_{\bar{x}}), \qquad \tilde{F}_{v_{\bar{x}}\,v_{\bar{x}}} \neq 0.$$

В результаті безпосередніх обчислень ми довели, що групу $\mathcal{E}$ складають перетворення

$$\bar{t} = \gamma t + \gamma_1, \quad \bar{x} = \epsilon\gamma x + \gamma_2, \quad v = \rho(x)u + \theta(t,x), \tag{5}$$

де $\{\gamma,\gamma_1,\gamma_2\} \subset \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$, $\epsilon = \pm 1$, $\rho \neq 0$.

При виконанні другого кроку алгоритму суттєво використовується таке твердження [19].

Теорема 1. *Існують перетворення (5), які зводять оператор (3) до одного із таких семи операторів:*

$$
\begin{gathered}
Q_1 = k(t\partial_t + x\partial_x)\ (k \neq 0), \qquad Q_2 = \partial_t + k\partial_x\ (k \neq 0), \\
Q_3 = \partial_x, \qquad Q_4 = \partial_t, \qquad Q_5 = \partial_t + f(x)u\partial_u\ (f \neq 0), \\
Q_6 = f(x)u\partial_u\ (f \neq 0), \qquad Q_7 = f(t,x)\partial_u\ (f \neq 0).
\end{gathered}
$$

Із теореми 1 випливає, що існують сім нееквівалентних нелінійних рівнянь вигляду (1), (2), які допускають алгебри симетрії розмірності не нижчої за 1. Нижче подано перелік одновимірних алгебр Лі симетрії та відповідні їм значення функцій F в інваріантних рівняннях.

$$
\begin{aligned}
& A_1^1 = \langle t\partial_t + x\partial_x \rangle : \quad F = t^{-2}G(\xi, u, \omega),\ \xi = tx^{-1},\ \omega = xu_x, \\
& A_1^2 = \langle \partial_t + k\partial_x \rangle,\ (k > 0) : \quad F = G(\eta, u, u_x),\ \eta = x - kt, \\
& A_1^3 = \langle \partial_x \rangle : \quad F = G(t, u, u_x), \\
& A_1^4 = \langle \partial_t \rangle : \quad F = G(x, u, u_x), \\
& A_1^5 = \langle \partial_t + f(x)u\partial_u \rangle,\ (f \neq 0) : \quad F = -tf''u + t^2(f')^2u - \\
& \qquad - 2tf'u_x + e^{tf}G(x, v, \omega),\ v = e^{-tf}u, \\
& \qquad \omega = u^{-1}u_x - f'f^{-1}\ln|u|, \\
& A_1^6 = \langle f(x)u\partial_u \rangle,\ (f \neq 0) : \quad F = -f^{-1}f''u\ln|u| - \\
& \qquad - 2f^{-1}f'u_x\ln|u| + f^{-2}(f')^2u\ln^2|u| + uG(t, x, \omega), \\
& \qquad \omega = u^{-1}u_x - f'f^{-1}\ln|u|;, \\
& A_1^7 = \langle f(t,x)\partial_u \rangle,\ (f \neq 0) : \quad F = f^{-1}(f_{tt} - f_{xx})u + \\
& \qquad\quad + G(t, x, \omega),\ \omega = u_x - f^{-1}f_xu.
\end{aligned}
$$

Тут G — довільна гладка функція, символом $()'$ позначається похідна за відповідною змінною.

Далі, як доведено в [19], справедливе таке твердження.

Теорема 2. *В класі операторів (3) не існують реалізації алгебр* $so(3)$ *та* $sl(2,\mathbb{R})$.

Із теореми 2 випливають два важливих наслідки.

Наслідок 1. *В класі операторів (3) не існують реалізації напівпростих дійсних алгебр Лі.*

Наслідок 2. *Не існують нелінійні рівняння вигляду (1), (2), алгебри інваріантності яких ізоморфні напівпростим алгебрам Лі або містять їх як підалгебри.*

Підсумовуючи сказане вище, робимо висновок, що без втрати загальності можна обмежитися розглядом реалізацій розв'язних алгебр Лі. У відповідності із цим у [19] було проведено класифікацію нелінійних рівнянь (1), (2), алгебри інваріантності яких є двохвимірними розв'язними алгебрами Лі.

Добре відомо (див., наприклад, [20]), що з точністю до ізоморфізму існують дві дійсні розв'язні двохвимірні алгебри Лі $A_{2.i} = \langle e_1, e_2\rangle$, $(i = 1, 2)$:

$$A_{2.1}: \quad [e_1,\ e_2] = 0;$$
$$A_{2.2}: \quad [e_1,\ e_2] = e_2.$$

Розгляд реалізацій цих алгебр в класі операторів (3) і перевірка для них умови (4) показали, що існують 15 нееквівалентних рівнянь досліджуваного класу, алгебри симетрії яких є реалізаціями алгебри $A_{2.1}$. Аналогічно, існують 16 рівнянь вигляду (1), (2), алгебри симетрії яких являються реалізаціями алгебри $A_{2.2}$. Нижче ми подаємо переліки базисних операторів реалізацій двохвимірних алгебр Лі та відповідні їм значення функцій F в інваріантних рівняннях (1), (2).

$A_{2.1}$-інваріантні рівняння

$$\begin{aligned} A^1_{2.1} &= \langle t\partial_t + x\partial_x,\ u\partial_u\rangle: \quad F = x^{-2}uG(\omega, v),\\ &\omega = tx^{-1},\ v = u^{-1}xu_x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^2_{2.1} &= \langle t\partial_t + x\partial_x,\ \sigma(\xi)\partial_u\rangle,\ (\sigma \neq 0,\ \xi = tx^{-1}):\\ &F = x^{-2}[\sigma^{-1}((1-\xi^2)\sigma'' - 2\xi\sigma')u + G(\xi,\omega)],\\ &\omega = \xi\sigma' u + \sigma x u_x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3_{2.1} &= \langle \partial_t + k\partial_x,\ u\partial_u\rangle,\ (k > 0): \quad F = uG(\eta,\omega),\\ &\eta = x - kt,\ \omega = u^{-1}u_x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^4_{2.1} &= \langle \partial_t + k\partial_x,\ \varphi(\eta)\partial_u\rangle,\ (k > 0,\ \eta = x - kt,\ \varphi \neq 0):\\ &F = (k^2-1)\varphi''\varphi^{-1}u + G(\eta,\omega),\ \omega = \varphi u_x - \varphi' u; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^5_{2.1} &= \langle \partial_t + k\partial_x,\ \partial_x + mu\partial_u\rangle,\ (k > 0,\ m \neq 0):\\ &F = e^{m\eta}G(\omega, v),\ \eta = x - kt,\ \omega = ue^{-m\eta},\ v = u^{-1}u_x; \end{aligned}$$

$$A^6_{2.1} = \langle \partial_t,\ \partial_x \rangle : \quad F = G(u, u_x);$$

$$A^7_{2.1} = \langle \partial_x,\ \partial_t + ku\partial_u \rangle,\ (k > 0) : \\ F = e^{kt}G(\omega, v),\ \omega = e^{-kt}u,\ v = u^{-1}u_x;$$

$$A^8_{2.1} = \langle \partial_x,\ u\partial_u \rangle : \quad F = uG(t, \omega),\ \omega = u^{-1}u_x;$$

$$A^9_{2.1} = \langle \partial_x,\ \varphi(t)\partial_u \rangle,\ (\varphi \neq 0) : \quad F = \varphi^{-1}\varphi'' u + G(t, u_x);$$

$$A^{10}_{2.1} = \langle \partial_t,\ \partial_u \rangle : \quad F = G(x, u_x);$$

$$A^{11}_{2.1} = \langle \partial_t,\ f(x)u\partial_u \rangle,\ (f \neq 0) : \\ F = -f^{-1}f'' u \ln|u| - 2f^{-1}f' u_x \ln|u| + \\ + f^{-2}(f')^2 u \ln^2|u| + uG(x, \omega); \\ \omega = u^{-1}u_x - f' f^{-1} \ln|u|;$$

$$A^{12}_{2.1} = \langle \partial_t + f(x)u\partial_u,\ g(x)u\partial_u \rangle,\ (\delta = f^{-1}f' - g^{-1}g' \neq 0) : \\ F = -g^{-1}g'' u \ln|u| - 2g^{-1}g' u_x \ln|u| + \\ + g^{-2}(g')^2 u \ln^2|u| - 2f\delta t u_x + 2f\delta g' g^{-1} t u \ln|u| + \\ + f^2\delta^2 t^2 u + f(g^{-1}g'' - f^{-1}f'')tu + uG(x, \omega), \\ \omega = u^{-1}u_x - g' g^{-1} \ln|u| - tf\delta;$$

$$A^{13}_{2.1} = \langle \partial_t + f(x)u\partial_u,\ e^{tf}\partial_u \rangle,\ (f \neq 0) : \\ F = [f^2 - tf'' + t^2(f')^2]u - 2tf' u_x + e^{tf}G(x, \omega), \\ \omega = e^{-tf}(u_x - tf' u);$$

$$A^{14}_{2.1} = \langle f(x)u\partial_u,\ g(x)u\partial_u \rangle,\ (\delta = f' g - g' f \neq 0) : \\ F = -u^{-1}u_x^2 - \delta^{-1}\delta' u_x + \\ + \delta^{-1}[f'' g' - g'' f']u \ln|u| + uG(t, x);$$

$$A^{15}_{2.1} = \langle \varphi(t)\partial_u,\ \psi(t)\partial_u \rangle,\ (\varphi'\psi - \varphi\psi' \neq 0) : \\ F = \varphi^{-1}\varphi'' u + G(t, x, u_x),\ \varphi''\psi - \varphi\psi'' = 0.$$

$A_{2.2}$-інваріантні рівняння

$$A^1_{2.2} = \langle t\partial_t + x\partial_x,\ xu\partial_u \rangle : \quad F = x^{-2}u \ln^2|u| - \\ - 2x^{-1}u_x \ln|u| + t^{-2}uG(\xi, \omega),\ \xi = tx^{-1}; \\ \omega = xu^{-1}u_x - \ln|u|;$$

$$A^2_{2.2} = \langle t\partial_t + x\partial_x,\ t\varphi(\xi)\partial_u\rangle,\ (\varphi \neq 0,\ \xi = tx^{-1}) :$$
$$F = t^{-2}(1-\xi^2)\varphi^{-1}\xi(2\varphi' + \xi\varphi'')u + t^{-2}G(\xi,\omega),$$
$$\omega = x\varphi u_x + \xi\varphi' u;$$

$$A^3_{2.2} = \langle \partial_t + k\partial_x,\ e^{k^{-1}x}u\partial_u\rangle,\ (k > 0) :$$
$$F = k^{-2}u\ln^2|u| - 2k^{-1}u_x\ln|u| - k^{-2}u\ln|u| +$$
$$+ uG(\eta,\omega),\ \eta = x - kt,\ \omega = u^{-1}u_x - k^{-1}\ln|u|;$$

$$A^4_{2.2} = \langle \partial_t + k\partial_x,\ e^t\varphi(\eta)\partial_u\rangle,\ (\eta = x - kt,\ k > 0,\ \varphi \neq 0) :$$
$$F = \left((k^2-1)\varphi''\varphi^{-1} - 2k\varphi'\varphi^{-1} + 1\right)u + G(\eta,\omega),$$
$$\omega = \varphi u_x - \varphi' u,\ \varphi' = d\varphi/d\eta;$$

$$A^5_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x,\ \partial_t + k\partial_x\rangle,\ (k > 0) :$$
$$F = \eta^{-2}G(u,\omega),\ \eta = x - kt,\quad \omega = u_x\eta;$$

$$A^6_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + mu\partial_u,\ \partial_t + k\partial_x\rangle,\ (k > 0,\ m \neq 0) :$$
$$F = |\eta|^{-2-m}G(v,\omega),\ \eta = x - kt,$$
$$\omega = u|\eta|^m,\ v = u_x|\eta|^{m+1};$$

$$A^7_{2.2} = \langle \partial_x,\ e^x u\partial_u\rangle : \quad F = u\ln^2|u| - u\ln|u| - 2u_x\ln|u| +$$
$$+ uG(t,\omega),\ \omega = u^{-1}u_x - \ln|u|;$$

$$A^8_{2.2} = \langle \partial_x,\ e^x\varphi(t)\partial_u\rangle,\ (\varphi \neq 0) :$$
$$F = (\varphi^{-1}\varphi'' - 1)u + G(t,\omega),\ \omega = u_x - u;$$

$$A^9_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x,\ \partial_x\rangle : \quad F = t^{-2}G(u, tu_x);$$

$$A^{10}_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + ku\partial_u,\ \partial_x\rangle,\ (k \neq 0) :$$
$$F = |t|^{-2-k}G(v,\omega),\ v = |t|^k u,\ \omega = |t|^{k+1}u_x;$$

$$A^{11}_{2.2} = \langle \partial_t,\ e^t\partial_u\rangle : \quad F = u + G(x, u_x);$$

$$A^{12}_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x,\ \partial_t\rangle : \quad F = x^{-2}G(u,\omega),\ \omega = xu_x;$$

$$A^{13}_{2.2} = \langle \partial_t + f(x)u\partial_u,\ e^{(1+f)t}\partial_u\rangle,\ (f \neq 0) :$$
$$F = -\left(tf'' - t^2(f')^2 - (1+f)^2\right)u - 2tf'u_x +$$
$$+ e^{tf}G(x,\omega),\ \omega = e^{-tf}\left(u_x - f'(t + f^{-1})u\right);$$

$$A^{14}_{2.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x,\ \partial_t + kx^{-1}u\partial_u\rangle,\ (k > 0);$$
$$F = -2ktx^{-3}u + k^2t^2x^{-4}u + 2ktx^{-2}u_x +$$
$$+ x^{-2}e^{ktx^{-1}}G(v,\omega), v = e^{-kx^{-1}t}u,$$
$$\omega = xu^{-1}u_x + \ln|u|;$$

$$A^{15}_{2.2} = \langle k(t\partial_t + x\partial_x),\ |x|^{k^{-1}}u\partial_u\rangle,\ (k \neq 0, 1):$$
$$F = -k^{-2}(1-k)x^{-2}u\ln|u| - 2k^{-1}x^{-1}u_x\ln|u| +$$
$$+ k^{-2}x^{-2}u\ln^2|u| + x^{-2}uG(v,\omega),$$
$$v = tx^{-1},\ \omega = xu^{-1}u_x - k^{-1}\ln|u|;$$

$$A^{16}_{2.2} = \langle k(t\partial_t + x\partial_x),\ |t|^{k^{-1}}\varphi(\xi)\partial_u\rangle,\ (k \neq 0, 1,\ \varphi \neq 0,\ \xi = tx^{-1}):$$
$$F = [k^{-1}(k^{-1}-1) + 2\xi(k^{-1}-\xi^2)\varphi^{-1}\varphi' +$$
$$+ \xi^2(1-\xi)^2\varphi^{-1}\varphi'']t^{-2}u + t^{-2}G(\xi,\omega),$$
$$\omega = x\varphi u_x + \xi\varphi' u.$$

Тут G — довільна гладка функція, символом $()'$ позначається похідна за відповідною змінною.

Класифікація рівнянь (2), інваріантних відносно тривимірних розкладних розв'язних алгебр Лі. Нагадаємо, що серед рівнянь досліджуваного вигляду немає таких, алгебри інваріантності яких ізоморфні напівпростим алгебрам Лі або містять їх як підалгебри. Тому без втрати загальності розгляду, достатньо обмежитись розглядом розв'язних алгебр Лі.

Нехай $A_3 = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$. З точністю до ізоморфізму розрізняють дев'ять тривимірних розв'язних дійсних алгебр Лі (нижче наведено значенння лише ненульових комутаційних співвідношень між базисними елементами цих алгебр):

$$A_{3.1} = A_1 \oplus A_1 \oplus A_1 = 3A_1;$$
$$A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1: \quad [e_1,\ e_2] = e_2;$$
$$A_{3.3}: \quad [e_2,\ e_3] = e_1;$$
$$A_{3.4}: \quad [e_1,\ e_3] = e_1, \quad [e_2,\ e_3] = e_1 + e_2;$$
$$A_{3.5}: \quad [e_1,\ e_3] = e_1, \quad [e_2,\ e_3] = e_2;$$
$$A_{3.6}: \quad [e_1,\ e_3] = e_1, \quad [e_2,\ e_3] = -e_2;$$
$$A_{3.7}: \quad [e_1,\ e_3] = e_1, \quad [e_2,\ e_3] = qe_2,\ (0 < |q| < 1);$$

$$A_{3.8}: \quad [e_1,\ e_3] = -e_2, \quad [e_2,\ e_3] = e_1;$$
$$A_{3.9}: \quad [e_1,\ e_3] = qe_1 - e_2, \quad [e_2,\ e_3] = e_1 + qe_2,\ (q > 0).$$

Відзначимо, що алгебри $A_{3.1}$, $A_{3.2}$ розкладаються в пряму суму алгебр Лі нижчої розмірності, і у подальшому ми називаємо їх розкладними розв'язними алгебрами Лі. Решта тривимірних алгебр Лі є нерозкладними. Також зауважимо, що алгебра $A_{3.3}$ (відома в літературі, як алгебра Вейля) є нільпотентною.

Наявність у розв'язної алгебри Лі композиційного ряду дозволяє використовувати вже відомі результати класифікації для двохвимірних алгебр Лі для побудови реалізацій тривимірних алгебр Лі. Тому для вивчення реалізацій алгебр $A_{3.1}$ та $A_{3.2}$ достатньо провести розширення відомих реалізацій відповідно алгебр $A_{2.1}$ та $A_{2.2}$, доповнивши їх ще одним базисним оператором вигляду (3). При цьому, для спрощення вигляду цього оператора можна використовувати лише ті з перетворень (5), які не змінюють вигляд базисних операторів відповідної реалізації двохвимірної алгебри Лі.

Розглянемо два характерних приклади розширення реалізацій алгебри $A_{2.1}$ до реалізацій алгебри $A_{3.1}$.

Нехай має місце реалізація $A^1_{2.1}$. Доповнивши її оператором e_3 вигляду (3) і перевіривши комутаційні співвідношення, бачимо, що для коефіцієнтів оператора e_3 виконуються співвідношення

$$\lambda_1 = \lambda_2 = r(t, x) = 0, \qquad h = p = \mathrm{const}.$$

Тобто, оператор $e_3 = \lambda e_1 + pe_2$ є лінійною комбінацією перших двох базисних операторів реалізації $A^1_{2.1}$. Звідси випливає, що реалізація $A^1_{2.1}$ не допускає розширення до реалізації алгебри $A_{3.1}$.

Нехай, тепер, має місце реалізація $A^2_{2.1}$. Доповнивши її оператором e_3 вигляду (3) і перевіривши комутаційні співвідношення, бачимо, що має місце така реалізація алгебри $A_{3.1}$:

$$\langle t\partial_t + x\partial_x, \sigma(\xi)\partial_u, \gamma(\xi)\partial_u\rangle,\ \xi = tx^{-1},$$

де $\gamma'\sigma - \gamma\sigma' \neq 0$. Але, як показує безпосередня перевірка, за цієї умови відповідне інваріантне рівняння є лінійним.

Нехай, нарешті, має місце реалізація $A^3_{2.1}$. Безпосередні обрахунки показують, що і у цьому випадкові існує єдине розширення до реалізації алгебри $A_{3.1}$

$$\langle \partial_t, \partial_x, u\partial_u\rangle,$$

а відповідне інваріантне рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} + uG(\omega), \omega = u^{-1}u_x,$$

задовольняє сформульовану задачу за умови $G_{\omega\omega} \neq 0$.

Провівши аналогічний аналіз реалізацій $A^i_{2.1}$ $(i = 4, 5, \ldots, 13, 15)$, ми отримали ще шість нееквівалентних реалізацій алгебри $A_{3.1}$, таких що відповідні інваріантні рівняння задовольняють умову (2). Повний перелік значень функцій F в $A_{3.1}$-інваріантних рівняннях наведено в таблиці 1, де використано такі позначення:

$$
\begin{aligned}
&A^1_{3.1} = \langle \partial_t, \partial_x, u\partial_u \rangle;\\
&A^2_{3.1} = \langle \partial_t, \partial_x, \partial_u \rangle;\\
&A^3_{3.1} = \langle \partial_t + \beta\partial_x, e^{k\eta}\partial_u, \partial_x + ku\partial_u \rangle, \ \beta > 0, \quad k > 0, \quad \eta = x - \beta t;\\
&A^4_{3.1} = \langle \partial_x, \partial_t + ku\partial_u, e^{kt}\partial_u \rangle, \quad k > 0;\\
&A^5_{3.1} = \langle \partial_x, \varphi(t)\partial_u, \psi(t)\partial_u \rangle, \quad \sigma = \psi'\varphi - \psi\varphi' \neq 0, \ \sigma' = 0;\\
&A^6_{3.1} = \langle \partial_x, f(x)u\partial_u, \varphi(x)u\partial_u \rangle,\\
&\qquad\quad \sigma = f'\varphi - f\varphi' \neq 0, \quad \rho = \varphi' f'' - \varphi'' f';\\
&A^7_{3.1} = \langle f(x)u\partial_u, \varphi(x)u\partial_u, \partial_t + \psi(x)u\partial_u \rangle, \ \sigma = f'\varphi - \varphi' f \neq 0,\\
&\qquad\quad \rho = f''\varphi' - \varphi'' f', \ f'\psi - f\psi' \neq 0, \quad \varphi'\psi - \varphi\psi' \neq 0.
\end{aligned}
$$

Таблиця 1. $A_{3.1}$-інваріантні рівняння (1), (2)

№	Функція F	Реалізація $A_{3.1}$
1	$uG(\omega), \quad \omega = u^{-1}u_x$	$A^1_{3.1}$
2	$G(u_x)$	$A^2_{3.1}$
3	$k^2(\beta^2 - 1)u + e^{k\eta}G(\omega)$, $\eta = x - \beta t, \omega = e^{-k\eta}(u_x - ku)$	$A^3_{3.1}$
4	$k^2u + e^{kt}G(\omega), \ \omega = e^{-kt}u_x$	$A^4_{3.1}$
5	$\varphi^{-1}\varphi'' u + G(t, u_x), \ \varphi = \varphi(t)$	$A^5_{3.1}$
6	$-u^{-1}u_x^2 - \sigma^{-1}\sigma' u_x + \sigma^{-1}\rho u \ln\lvert u\rvert$, $\sigma = \sigma(x), \ \rho = \rho(x)$	$A^6_{3.1}$
7	$-u^{-1}u_x^2 - \sigma^{-1}\sigma' u_x + \sigma^{-1}\rho u \ln\lvert u\rvert +$ $+t\sigma^{-1}[\sigma'\psi' - \psi\rho - \sigma\psi'']u, \quad \sigma = \sigma(x)$, $\rho = \rho(x), \ \psi = \psi(x)$	$A^7_{3.1}$

Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що для першого, п'ятого, шостого і сьомого рівнянь із таблиці 1 відповідні реалізації алгебри $A_{3.1}$ є максимальними алгебрами інваріантності. Для решти рівнянь максимальними алгебрами інваріантності є такі чотиривимірні алгебри Лі:

$$\begin{array}{lll} A_{3.1}^2 & \Subset & \langle t\partial_u\rangle \quad \text{для другого рівняння,} \\ A_{3.1}^3 & \Subset & \langle e^{k(x+\beta t)}\partial_u\rangle \quad \text{для третього рівняння,} \\ A_{3.1}^4 & \Subset & \langle e^{-kt}\partial_u\rangle \quad \text{для четвертого рівняння.} \end{array}$$

Тут $k > 0$, $\beta > 0$.

Для повного опису $A_{3.1}$-інваріантних рівнянь необхідно проаналізувати розширення реалізації $A_{2.1}^{14}$ до реалізацій алгебри $A_{3.1}$. Для цього ми розглянемо більш загальне рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 + A(x)u_x + B(x)u\ln|u| + uD(t,x), \tag{6}$$

яке, очевидно, містить як частинні випадки $A_{2.1}^{14}$-інваріантне рівняння, та шосте і сьоме рівняння із таблиці 1. В наступній лемі подано повний опис рівнянь вигляду (6), максимальна алгебра інваріантності, яких має розмірність не вищу за 3.

Лема 1. *Якщо функції A, B, D є довільними, то максимальною алгеброю інваріантності рівняння (6) є двовимірна алгебра Лі, еквівалентна реалізації $A_{2.1}^{14}$, і (6) зводиться до $A_{2.1}^{14}$-інваріантного рівняння. За умови, що максимальна алгебра інваріантності рівняння (6) є тривимірною (ми позначаємо її A_3), мають місце такі випадки:*

I. $A_3 \sim A_{3.1}^6$, функції A, B, D зводяться до відповідних функцій в $A_{3.1}^6$-інваріантному рівнянні;

II. $A_3 \sim A_{3.1}^7$, функції A, B, D зводяться до відповідних функцій в $A_{3.1}^7$-інваріантному рівнянні;

III. $D = x^{-2}G(\xi),\ \xi = tx^{-1},\ G \neq 0:$

1) $A_3 \sim A_{3.2},\ A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, u\partial_u, |x|^{1-n}u\partial_u\rangle,$
   $A = nx^{-1}\ (n \neq 1),\ B = 0;$
2) $A_3 \sim A_{3.3},\ A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, u\partial_u, u\ln|x|\partial_u\rangle,\ A = x^{-1},\ B = 0;$
3) $A_3 \sim A_{3.4},\ A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, \sqrt{|x|}u\partial_u, \sqrt{|x|}\ln|x|u\partial_u\rangle,$
   $A = 0,\ B = \frac{1}{4}x^{-2};$

4) $A_3 \sim A_{3.9}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, \sqrt{|x|}\cos(\frac{1}{2}\beta\ln|x|)u\partial_u,$
$\sqrt{|x|}\sin(\frac{1}{2}\beta\ln|x|)u\partial_u\rangle$, $A = 0$, $B = mx^{-2}$,
$m > \frac{1}{4}$, $\beta = \sqrt{4m-1}$;

5) $A_3 \sim A_{3.7}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, (\sqrt{|x|})^{1+\beta}u\partial_u, (\sqrt{|x|})^{1-\beta}u\partial_u\rangle$,
$A = 0$, $B = mx^{-2}$, $m < \frac{1}{4}$, $m \neq 0$, $\beta = \sqrt{1-4m}$;

6) $A_3 \sim A_{3.8}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, \cos(\sqrt{m}\ln|x|)u\partial_u,$
$\sin(\sqrt{m}\ln|x|)u\partial_u\rangle$, $A = x^{-1}$, $B = mx^{-2}$, $m > 0$;

7) $A_3 \sim A_{3.6}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, |x|^{\sqrt{|m|}}u\partial_u, |x|^{-\sqrt{|m|}}u\partial_u\rangle$,
$A = x^{-1}$, $B = mx^{-2}$, $m < 0$;

8) $A_3 \sim A_{3.4}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, (\sqrt{|x|})^{1-n}u\partial_u, (\sqrt{|x|})^{1-n}\times$
$\times\ln|x|u\partial_u\rangle$, $A = nx^{-1}$ $(n \neq 0, 1)$, $B = \frac{1}{4}(n-1)^2x^{-2}$;

9) $A_3 \sim A_{3.9}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, (\sqrt{|x|})^{1-n}\cos(\frac{1}{2}\beta\ln|x|)u\partial_u,$
$(\sqrt{|x|})^{1-n}\sin(\frac{1}{2}\beta\ln|x|)u\partial_u\rangle$, $A = nx^{-1}$ $(n \neq 0, 1)$,
$B = mx^{-2}$ $(m > \frac{1}{4}(n-1)^2)$, $\beta = \sqrt{4m-(n-1)^2}$;

10) $A_3 \sim A_{3.7}$, $A_3 = \langle t\partial_t + x\partial_x, (\sqrt{|x|})^{1-\beta-n}u\partial_u,$
$(\sqrt{|x|})^{1-n+\beta}u\partial_u\rangle$, $A = nx^{-1}$ $(n \neq 0, 1)$, $B = mx^{-2}$
$(m < \frac{1}{4}(n-1)^2$, $m \neq 0)$, $\beta = \sqrt{(n-1)^2 - 4m}$.

IV. $D = G(t)$,

1) $A_3 \sim A_{3.3}$, $A_3 = \langle \partial_x, u\partial_u, xu\partial_u\rangle$, $A = B = 0$;

2) $A_3 = A_{3.2}$, $A_3 = \langle \partial_x, u\partial_u, e^xu\partial_u\rangle$, $A = -1$, $B = 0$;

3) $A_3 \sim A_{3.8}$, $A_3 = \langle \partial_x, \cos(x)u\partial_u, \sin(x)u\partial_u\rangle$, $A = 0$, $B = 1$;

4) $A_3 \sim A_{3.6}$, $A_3 = \langle \partial_x, e^xu\partial_u, e^{-x}u\partial_u\rangle$, $A = 0$, $B = -1$;

5) $A_3 \sim A_{3.4}$, $A_3 = \langle \partial_x, e^{\frac{1}{2}x}u\partial_u, e^{\frac{1}{2}x}xu\partial_u\rangle$, $A = -1$, $B = \frac{1}{4}$;

6) $A_3 \sim A_{3.7}$, $A_3 = \langle \partial_x, e^{\frac{1}{2}(1+\beta)x}u\partial_u, e^{\frac{1}{2}(1-\beta)x}u\partial_u\rangle$,
$A = -1$, $B = m$ $(m < \frac{1}{4})$, $m \neq 0, \beta = \sqrt{1-4m}$;

7) $A_3 \sim A_{3.9}$, $A_3 = \langle \partial_x, e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{1}{2}\beta x)u\partial_u, e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{1}{2}\beta x)u\partial_u\rangle$,
$A = -1$, $B = m$ $(m > \frac{1}{4})$, $\beta = \sqrt{4m-1}$;

V. $D = G(\eta)$, $\eta = x - kt$, $k > 0$,

1) $A_3 \sim A_{3.3}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, u\partial_u, xu\partial_u\rangle$, $A = B = 0$;

2) $A_3 = A_{3.2}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, u\partial_u, e^xu\partial_u\rangle$, $A = -1$, $B = 0$;

3) $A_3 \sim A_{3.8}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, \cos(x)u\partial_u, \sin(x)u\partial_u \rangle$,
$A = 0$, $B = 1$;

4) $A_3 \sim A_{3.6}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, e^x u\partial_u, e^{-x}u\partial_u \rangle$, $A = n$, $B = -1$;

5) $A_3 \sim A_{3.4}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{\frac{1}{2}x}u\partial_u, e^{\frac{1}{2}x}xu\partial_u \rangle$,
$A = -1$, $B = \frac{1}{4}$;

6) $A_3 \sim A_{3.7}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{\frac{1}{2}(1+\beta)x}u\partial_u, e^{\frac{1}{2}(1-\beta)x}u\partial_u \rangle$,
$A = -1, B = m$ $(m < \frac{1}{4})$, $m \neq 0, \beta = \sqrt{1-4m}$;

7) $A_3 \sim A_{3.9}$, $A_3 = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{\frac{1}{2}x}\cos(\frac{1}{2}\beta x)u\partial_u$,
$e^{\frac{1}{2}x}\sin(\frac{1}{2}\beta x)u\partial_u \rangle$, $A = -1$, $B = m$ $(m > \frac{1}{4})$ $\beta = \sqrt{4m-1}$.

Доведення. Підставивши в класифікуюче рівняння (4) вираз

$$F = -u^{-1}u_x^2 + A(x)u_x + B(x)u\ln|u| + uD(t,x),$$

одержуємо таку систему визначальних рівнянь для функцій $h(x)$, $r(t,x)$ та сталих λ, λ_1, λ_2 оператора симетрії (3):

$$\begin{aligned} &r = 0,\\ &(\lambda x + \lambda_2)A' + \lambda A = 0,\\ &(\lambda x + \lambda_2)B' + 2\lambda B = 0,\\ &h'' + Ah' + Bh = -(\lambda t + \lambda_1)D_t - (\lambda x + \lambda_2)D_x - 2\lambda D. \end{aligned} \tag{7}$$

Спочатку зупинимось на доведенні першої частини леми, вважаючи функції A, B, D довільними. Ліва частина четвертого рівняння системи (7) залежить лише від змінної x. Крім того, оскільки D — довільна функція своїх аргументів, то, взагалі кажучи, $D_t \neq 0$. Звідси випливає, що сталі λ, λ_1, λ_2 з необхідністю дорівнюють нулю. Тому четверте рівняння зводиться до лінійного звичайного диференціального рівняння другого порядку для функції $h(x)$

$$h'' + Ah' + Bh = 0. \tag{8}$$

Загальний розв'язок цього рівняння можна подати у вигляді

$$h = C_1 f(x) + C_2\varphi(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

де функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ складають фундаментальну систему розв'язків рівняння

$$y'' + Ay' + By = 0, \qquad y = y(x). \tag{9}$$

Далі, підставивши вираз для h у (8), маємо

$$A = -\sigma^{-1}\sigma', \qquad B = \sigma^{-1}(\varphi' f'' - f', \varphi''),$$

де $\sigma = \varphi f' - \varphi' f \neq 0$. Першу частину твердження доведено.

Припустимо тепер, що $D = 0$. Тоді, якщо хоча б одна із функцій A або B є довільною функцією від x, то $\lambda = \lambda_2 = 0$, а функція h задовольняє рівняння (8). Має місце перший випадок другої частини твердження.

Далі, якщо функції A і B не є довільними, то згідно із другим та третім рівняннями системи (7) вони, з точністю до еквівалентності, набувають одного із таких значень:

$$\begin{aligned} &1) \quad A = B = 0; \\ &2) \quad A = n,\ B = m,\ m, n \in \mathbb{R}, |n| + |m| \neq 0; \\ &3) \quad A = nx^{-1},\ B = mx^{-2}, m, n \in \mathbb{R},\ |n| + |m| \neq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

За цих умов, максимальна алгебра інваріантності відповідних рівнянь (6) має розмірність вищу за 3.

Таким чином, без втрати загальності розгляду, можна вважати, що $D \neq 0$. Інтегруючи рівняння

$$(\lambda t + \lambda_1)D_t + (\lambda x + \lambda_2)D_x + 2\lambda D = H(x)$$

за умови $D \neq 0$, одержуємо с точністю до еквівалентності такі вирази для функції $D(t, x)$

$$\begin{aligned} &D = x^{-2}G(\xi) + x^{-2}\textstyle\int xH(x)\,dx, \quad \xi = tx^{-1}; \\ &D = G(\eta) + k^{-1}\textstyle\int H(x)\,dx, \quad \eta = x - kt, \quad k > 0; \\ &D = G(t) + \textstyle\int H(x)\,dx, \\ &D = tH(x) + \tilde{H}(x). \end{aligned} \tag{11}$$

Неважко перевірити, що існують заміни змінних вигляду

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = x, \quad u = \theta(x)v(\overline{t}, \overline{x}), \quad \theta \neq 0, \tag{12}$$

де θ — розв'язок рівняння

$$\theta^{-1}\theta'' - \theta^{-2}(\theta')^2 + A\theta^{-1}\theta' + B\ln|\theta| + \Lambda(x) = 0,$$

які залишають вигляд рівняння (6) незмінним, а значення (11) функції D зводять до таких:

$$\begin{aligned}
&D = x^{-2}G(\xi), \quad \xi = tx^{-1};\\
&D = G(\eta), \quad \eta = x - kt, \quad k > 0;\\
&D = G(t),\\
&D = tH(x).
\end{aligned} \tag{13}$$

Для перших трьох значень функції D виконується рівність $H(x) \equiv 0$. Тому функція h задовольняє рівняння (8). За умови, що $D = tH(x)$ маємо

$$h'' + Ah' + Bh = -\lambda_1 H, \qquad (\lambda x + \lambda_2)H' + 3\lambda H = 0.$$

Таким чином, максимальна алгебра інваріантності відповідного рівняння (8) є тривимірною тоді і тільки тоді, коли $\lambda = \lambda_2 = 0$, що відповідає другому випадкові із другої частини твердження леми.

Нехай, тепер, $D = x^{-2}G(\xi)$, $\xi = tx^{-1}$. Тоді функція $G \neq 0$ задовольняє рівняння

$$(\lambda_2\xi - \lambda_1)G' + 2\lambda_2 G = 0. \tag{14}$$

Якщо G є довільною функцією, то $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ і, крім того, $\lambda \neq 0$ (інакше максимальна алгебра інваріантності буде двохвимірною). Тому виконуються рівності

$$xA' + a = 0, \qquad xB' + 2B = 0.$$

Звідси випливає, що функції A та B можуть набувати лише першого та третього значень із (10). Аналізуючи ці значення, одержуємо десять випадків пункту III другої частини твердження.

Якщо ж функція G не являється довільною, то, інтегруючи (14), маємо

$$\begin{aligned}
&G = p, \quad p \in \mathbb{R}, \quad p \neq 0;\\
&G = p(\xi - q)^{-2}, \quad p \neq 0, \quad q \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

За умови $G = p$, параметр λ_2 дорівнює нулю. Тому з вимоги того, щоб максимальна алгебра інваріантності була тривимірною, випливає, що λ також дорівнює нулю. Це відповідає випадкові, коли A і B в (6) є довільними функціями (перший випадок із другої частини твердження). Якщо ж $G = p(\xi - q)^{-2}$, $p \neq 0$, то маємо $\lambda_1 = \lambda_2 q$.

Звідси випливає, що максимальна алгебра інваріантності відповідного рівняння (6) є тривимірною тоді і тільки тоді, коли функції A, B задаються формулами 3) із (10) (при цьому $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а тому мають місце випадки, які містяться в третьому пунктові другої частини твердження), або коли функції A, B задаються формулами 2) із (10) (при цьому $\lambda = 0$, $D = p(t - qx)^{-2}$ і з точністю до позначення сталих маємо випадки четвертого ($q = 0$) або п'ятого ($q \neq 0$) пунктів другої частини твердження).

Нехай, тепер, $D = G(\eta)$, $\eta = x - kt$, $k > 0$. Тоді має місце рівність

$$\lambda(\eta G' + 2G) + (\lambda_2 - k\lambda_1)G' = 0.$$

Звідси випливає, що коли G — довільна функція змінної η, то $\lambda = 0$, $\lambda_2 = k\lambda_1$. Тому максимальна алгебра інваріантності рівняння (6) буде тривимірною тоді, коли $A = B = 0$ або A, B задаються формулами 2) із (10). Таким чином, одержуємо всі випадки із п'ятого пункту другої частини твердження.

Припустимо тепер, що $G = p$ ($p \neq 0$) або $G = p\eta^{-2}$ ($p \neq 0$). Тоді вимога того, щоб максимальна алгебра інваріантності рівняння (6) була тривимірною, приводить нас до випадків, одержаних вище.

Нехай, нарешті, $D = G(t)$, тоді справедлива рівність

$$(\lambda t + \lambda_1)G' + 2\lambda G = 0.$$

Звідси випливає, що коли G — довільна функція, то $\lambda = \lambda_1 = 0$ і максимальна алгебра інваріантності рівняння (6) буде тривимірною тоді, коли функції A, B задаються формулою 2) із (10). Таким чином, одержуємо всі випадки із четвертого пункту другої частини твердження. Якщо ж $G = p$ ($p \neq 0$) або $G = pt^{-2}$ ($p \neq 0$), то вимога того, щоб максимальна алгебра інваріантності рівняння (6) була тривимірною, приводить нас до випадків, одержаних вище. ■

Із доведеної леми, зокрема, випливає, що розширення реалізації $A_{2.1}^{14}$ до реалізацій алгебри $A_{3.1}$ приводить до вже відомих реалізацій $A_{3.1}^5, A_{3.1}^6$. Отже, $A_{3.1}$-інваріантні рівняння (1), (2) з точністю до еквівалентності вичерпуються рівняннями, значення функції F в яких наведені в таблиці 1.

Також, серед рівнянь (6) є ще три рівняння, максимальними алгебрами інваріантності яких є тривимірні алгебри Лі ізоморфні алгебрі $A_{3.2}$. Решта ж тривимірних алгебр інваріантності рівнянь вигляду (6) є реалізаціями нерозкладних розв'язних тривимірних алгебр Лі.

Далі ми проводимо класифікацію нелінійних диференціальних рівнянь (1), (2), алгебрами інваріантності яких є реалізації алгебри $A_{3.2}$. Оскільки $A_{3.2} = A_{2.2} \oplus A_1$, то для побудови реалізацій алгебри $A_{3.2}$ достатньо проаналізувати розширення відомих реалізацій алгебри $A_{2.2}$ ще одним оператором вигляду (3), який комутує з базисними операторами реалізацій $A^i_{2.2}$ $(i = 1, \ldots, 16)$. Розглянемо, наприклад, реалізацію $A^1_{2.2}$, для якої $e_1 = t\partial_t + x\partial_x$, $e_2 = xu\partial_u$. Поклавши e_3 рівним операторові (3) і перевіривши комутаційні співвідношення, які визначають алгебру $A_{3.2}$, одержуємо реалізацію

$$\langle t\partial_t + x\partial_x, xu\partial_u,\ u\partial_u\rangle,$$

яка є алгеброю інваріантності рівняння

$$u_{tt} = u_{xx} - u^{-1}u_x^2 + x^2uG(\xi), \qquad \xi = tx^{-1}.$$

Це рівняння належить до класу рівнянь (6) (перший випадок із третього пункту другої частини твердження леми при $n = 0$).

Провівши аналогічний аналіз решти п'ятнадцяти реалізацій алгебри $A_{2.2}$, ми отримали ще двадцять $A_{3.2}$-інваріантних рівнянь вигляду (1), (2). Повний перелік значень функцій F, які визначають ці рівняння, наведено в таблиці 2, де використано такі позначення:

$$A^1_{3.2} = \langle k(t\partial_t + x\partial_x), |x|^{k^{-1}}u\partial_u, u\partial_u\rangle,\ k \neq 0;$$
$$A^2_{3.2} = \langle \partial_t, \partial_x, e^x u\partial_u\rangle;$$
$$A^3_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{k^{-1}x}u\partial_u, u\partial_u\rangle,\ k > 0;$$
$$A^4_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{k^{-1}x}u\partial_u, \partial_t + mu\partial_u\rangle,\ k > 0,\ m \neq 0;$$
$$A^5_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + k\partial_x, u\partial_u\rangle,\ k \geq 0;$$
$$A^6_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + mu\partial_u, \partial_t + k\partial_x, |\eta|^{-m}\partial_u\rangle,$$
$$\eta = x - kt,\ k = m = 0 \text{ або } \ k > 0,\ m \in \mathbb{R};$$
$$A^7_{3.2} = \langle \partial_x, e^x u\partial_u, u\partial_u\rangle;$$
$$A^8_{3.2} = \langle \partial_x, e^x u\partial_u, \partial_t + mu\partial_u\rangle,\ m > 0;$$
$$A^9_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_x, u\partial_u\rangle;$$
$$A^{10}_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x + ku\partial_u, \partial_x, |t|^{-k}\partial_u,\rangle,\ k \in \mathbb{R};$$
$$A^{11}_{3.2} = \langle \partial_t + ku\partial_u, e^{(1+k)t}\partial_u, \partial_x\rangle,\ k \in \mathbb{R};$$
$$A^{12}_{3.2} = \langle \partial_t + ku\partial_u, e^{(1+k)t}\partial_u, \partial_x + m(\partial_t + (1+k)u\partial_u)\rangle,$$
$$k \in \mathbb{R},\ m > 0;$$
$$A^{13}_{3.2} = \langle \partial_t + k(\cos x)u\partial_u, e^{(1+k\cos x)t}\partial_u, e^{kt\cos x}\cos x\partial_u\rangle,\ k \neq 0;$$

$A^{14}_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + kx^{-1}u\partial_u, u\partial_u\rangle, k > 0;$

$A^{15}_{3.2} = \langle -t\partial_t - x\partial_x, \partial_t + kx^{-1}u\partial_u, e^{ktx^{-1}}\partial_u\rangle,\ k > 0;$

$A^{16}_{3.2} = \langle k(t\partial_t + x\partial_x), |t|^{k^{-1}}|\xi|^{\frac{k-1}{2k}}\partial_u, |\xi|^{\frac{k-1}{2k}}\partial_u\rangle,$
$\quad k \neq 0, 1,\ \xi = tx^{-1};$

$A^{17}_{3.2} = \langle \partial_x, e^{x+(m-k)t}\partial_u, \partial_t + k\partial_x + mu\partial_u\rangle,\ m, k \in \mathbb{R};$

$A^{18}_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{\frac{1}{2}k^{-1}(x+kt)}\partial_u, e^{\frac{1}{2}k^{-1}\eta}\partial_u\rangle,$
$\quad k > 0,\ \eta = x - kt;$

$A^{19}_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{t+m\eta}\partial_u, \partial_x + mu\partial_u\rangle,$
$\quad k > 0,\ m \neq 0,\ \eta = x - kt;$

$A^{20}_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{t+(k-\beta)^{-1}\eta}\partial_u, \partial_t + \beta\partial_x\rangle,$
$\quad k > 0,\ k \neq 1,\ \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq k,\ \eta = x - kt;$

$A^{21}_{3.2} = \langle \partial_t + k\partial_x, e^{t+\frac{1-m}{k-\beta}\eta}\partial_u, \partial_t + \beta\partial_x + mu\partial_u\rangle;$
$\quad k > 0,\ \beta \in \mathbb{R},\ k \neq \beta,\ m \in \mathbb{R}.$

Таблиця 2. $A_{3.2}$-інваріантні рівняння (1), (2)

№	Функція F	Реалізація $A_{3.2}$
1	$-u^{-1}u_x^2 - k^{-1}(1-k)x^{-1}u_x + x^{-2}uG(\xi)$, $\xi = tx^{-1}$	$A^1_{3.2}$
2	$u\ln^2\lvert u\rvert - u\ln\lvert u\rvert - 2u_x\ln\lvert u\rvert + uG(\omega)$, $\omega = u^{-1}u_x - \ln\lvert u\rvert$	$A^2_{3.2}$
3	$-u^{-1}u_x^2 - k^{-1}u_x + uG(\eta),\ \eta = x - kt$	$A^3_{3.2}$
4	$-u^{-1}u_x^2 - k^{-1}u_x + uG(\omega)$, $\omega = k^2u^{-1}u_x - k\ln\lvert u\rvert - m(x - kt)$	$A^4_{3.2}$
5	$u\eta^{-2}G(\omega), \eta = x - kt,\ \omega = \eta u_x u^{-1}$	$A^5_{3.2}$
6	$m(k^2-1)(m+1)\eta^{-2}u + \lvert\eta\rvert^{-2-m}G(\omega)$, $\eta = x - kt,\ \omega = \lvert\eta\rvert^m(mu + \eta u_x)$	$A^6_{3.2}$
7	$-u^{-1}u_x^2 - u_x + uG(t)$	$A^7_{3.2}$
8	$-u^{-1}u_x^2 - u_x + uG(\omega)$, $\omega = u^{-1}u_x - \ln\,\lvert u\rvert + mt$	$A^8_{3.2}$
9	$ut^{-2}G(\omega),\ \omega = tu^{-1}u_x$	$A^9_{3.2}$

Закінчення таблиці 2.

№	Функція F	Реалізація $A_{3.2}$
10	$k(k+1)t^{-2}u+\|t\|^{-2-k}G(\omega),\ \omega\ \|t\|^{k+1}u_x$	$A_{3.2}^{10}$
11	$(1+k)^2u+e^{tk}G(\omega),\ \omega=e^{-kt}u_x$	$A_{3.2}^{11}$
12	$(1+k)^2u+e^{kt+mx}G(\omega),$ $\omega=e^{-kt-mx}u_x$	$A_{3.2}^{12}$
13	$[k^2t^2\sin^2 x+kt\cos x+k^2\cos^2 x+2k\cos x+$ $+1]u+2kt(\sin x)u_x+e^{kt\cos x}G(\omega)$ $\omega=e^{-kt\cos x}[u_x+(\tan x+kt\sin x)u]$	$A_{3.2}^{13}$
14	$2ktx^{-2}u_x-2ktx^{-3}u+k^2t^2x^{-4}u+x^{-2}uG(\omega),$ $\omega=xu^{-1}u_x+ktx^{-1}$	$A_{3.2}^{14}$
15	$2ktx^{-2}u_x+(k^2t^2x^{-4}-2ktx^{-3}+k^2x^{-2})u+$ $+x^{-2}e^{ktx^{-1}}G(\omega),\ \omega=e^{-ktx^{-1}}(xu_x+ktx^{-1}u)$	$A_{3.2}^{15}$
16	$\left[\frac{1-k}{k}\xi^2+\frac{1-k^2}{4k^2}(1-\xi^2)\right]t^{-2}u+t^{-2}G(\xi,\omega),$ $\omega=\|\xi\|^{\frac{k-1}{2k}}\left[xu_x+\frac{k-1}{2k}u\right],\ \xi=tx^{-1}$	$A_{3.2}^{16}$
17	$[(m-k)^2-1]u+e^{mt}G(\omega),\omega=e^{-mt}(u_x-u)$	$A_{3.2}^{17}$
18	$\frac{1}{4}k^{-2}(k^2-1)u+G(\eta,\omega),\eta=x-kt,$ $\omega=e^{\frac{1}{2}k^{-1}\eta}(u_x-\frac{1}{2}k^{-1}u)$	$A_{3.2}^{18}$
19	$[(km-1)^2-m^2]u+e^{m\eta}G(\omega),$ $\eta=x-kt,\ \omega=e^{-m\eta}(u_x-mu)$	$A_{3.2}^{19}$
20	$[(k(k-\beta)^{-1}-1)^2-(k-\beta)^{-2}]u+G(\omega),$ $\omega=u_x-(k-\beta)^{-1}u$	$A_{3.2}^{20}$
21	$\left[\frac{(k^2-1)(1-m)^2}{(k-\beta)^2}-\frac{2k(1-m)}{k-\beta}+1\right]u+$ $+e^{(\beta-k)^{-1}\eta}G(\omega),\eta=x-kt,$ $\omega=e^{m(k-\beta)^{-1}\eta}\left(u_x-\frac{1-m}{k-\beta}u\right)$	$A_{3.2}^{21}$

Заключні зауваження. Одним із основних висновків, які можна зробити на основі проведених досліджень, є те що задача *повної* групової класифікації інварінтних рівнянь (1) — дуже нетривіальна математична проблема, розв’язання якої потребує нетрадиційних методів і підходів. Саме цей факт пояснює ту дивну обставину, що для такого класичного рівняння, як нелінійне хвильове рівняння (1), задачу групової класифікації до сих пір не розв'язано в повному обсязі.

В ряді робіт (короткий огляд яких подано у вступі) одержано частковий розв'язок задачі групової класифікації рівнянь вигляду (1). В цих роботах або вивчаються групові властивості рівнянь досліджуваного вигляду при спеціальному виборі функції F, або фіксується *a priori* вигляд шуканих операторів симетрії. Очевидно, що обидва підходи ведуть до втрати, як інваріантних рівнянь, так і нетривіальних алгебр інваріантності, які допускаються такими рівняннями.

Запропонований в [17] метод групової класифікації диференціальних рівнянь малої розмірності дозволяє в багатьох випадках одержати вичерпний опис інварінтних рівнянь, які належать до деякого наперед заданого класу диференціальних рівнянь з частинними похідними. В даній роботі повністю розв'язано задачу класифікації рівнянь (1), (2), які допускають двовимірні та тривимірні розкладні розв'язні алгебри Лі. Оскільки, не існує рівняннь досліджуваного вигляду, алгебри інваріантності яких були б напівпростими або містили напівпрості алгебри, як підалгебри, то для повного розв'язання задачі групової класифікації рівнянь (1), (2) необхідно дослідити випадки тривимірних нерозкладних розв'язних алгебр Лі та розширень тривимірних розв'язних алгебр Лі до розв'язних алгебр Лі розмірності $n > 3$.

Іншим важливим застосуванням нашого підходу є групова класифікація систем нелінійних диференціальних рівнянь гіперболічного типу з двома незалежними змінними. Є серйозні підстави вважати, що для таких рівнянь також можливо одержати повний розв'язок задачі групової класифікації.

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978 (translated into English by Academic Press, New York, 1982).

[2] Olver P.J. Applications of Lie Groups to Differential Equations. — New York: Springer-Verlag, 1986.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наукова думка, 1989 (translated into English by Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993).

[4] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. — Kyiv: Mathematical Ukraina Publishers, 1997.

[5] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Inegrale von einer Klasse linearer partiallen Differentialgleichungen // Arch. Math. — 1881. — **6**, № 3. — S. 328–368.

[6] Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений С.А. Чаплыгина // Журн. прикл. мех. и техн.физ. — 1960, № 3. — P. 126–145.

[7] Bluman G.W. and Kumei S. On invariance properties of the wave equation // J. Math. Phys. — 1987. — **28**, № 2. — P. 307–318.

[8] Lie S. Discussion der differential Gleichung $d^2z/dxdy = F(z)$ // Arch. Math. — 1881. — **8**, № 1. — S. 112–125.

[9] Pucci E., Salvatori M.C. Group properties of a class of semilinear hyperbolic equations // Int. J. Non. Mech. — 1986. — **21**, № 2. — P. 147–152.

[10] Pucci E. Group analysis of the equation $u_{tt} + \lambda u_{xx} = g(u, u_x)$ // Riv. Mat. Univ. Parma. — 1987. — **12**, № 4. — P. 71–87.

[11] Ames W.F., Adams E., Lohner R.J. Group properties of $u_{tt} = [f(u)u_x]_x$ // Int. J. Non. Mech. — 1981. — **16**, № 5–6. — P. 439–447.

[12] Oron A., Rosenau Ph. Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. — 1986. — **118**, № 4. — P. 172–176.

[13] Suhubi E.S., Bakkaloğlu A. Group poperties and similarity solutions for a quasi-linear wave equation in the plane // Int. J. Non. Mech. — 1991. — **26**, № 5 — P. 567–584.

[14] Torrisi M., Valenti A. Group properties and invariant solutions for infinitesimal transformations of a nonlinear wave equation // Int. J. Non. Mech. — 1985. — **20**, № 3 — P. 135–144.

[15] Torrisi M., Valenti A. Group analysis and some solutions of a nonlinear wave equation // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. — 1990. — **38**, № 2 — P. 445–458.

[16] Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. Preliminary group classification of equations $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. — 1991. — **32**, № 11. — P. 2988–2995.

[17] Zhdanov R.Z., Lahno V.I. Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source // J. Phys. A: Math. Gen. — 1999. — **32**. — 7405–7418.

[18] Ахатов Н.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. — 1989. — **34**. — С. 3–83.

[19] Magda O. The group classification of nonlinear wave equations invariant under two–dimensional Lie algebras // Proceeding of Institute of Mathematics of he NAS of Ukraine. — 2000. — **30**, Part 1. — P. 165–169.

[20] Barut A.O., Raczka R. Theory of group representations and applications. — Warszawa: PWN-Polish Scientific, 1977.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 159–166

УДК 517.95:512.816

Інваріантність рівнянь з частинними похідними другого порядку відносно прямої суми розширених алгебр Евкліда

Г.О. ЛАГНО

Полтавський державний педагогічний університет
E-mail: laggo@poltava.bank. gov.ua

Отримано повний опис скалярних диференціальних рівнянь з частинними похідними, інваріантних відносно прямої суми розширених алгебр Евкліда операторів симетрії.

Complete classification of second-order scalar partial differential equations invariant under direct sum of the extended Euclid algebras of symmetry operators has been obtained.

В статті розглядається задача опису скалярних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

$$F(x_0, \boldsymbol{x}, u, u_\mu, u_{\mu\nu}) = 0, \tag{1}$$

алгебри інваріантності яких ізоморфні прямій сумі розширених алгебр Евкліда. В (1) $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $u = u(x_0, \boldsymbol{x})$, $u_\mu = \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $u_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Під прямою сумою розширених алгебр Евкліда ми розуміємо алгебру $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3) = \langle P_0, D_1 \rangle \oplus \langle P_a, J_{ab}, D_2 \rangle$ $(a, b = 1, 2, 3)$, базисні оператори якої задовольняють такі комутаційні співвідношення:

$$\begin{aligned}
&[P_0, P_a] = [P_0, J_{ab}] = [P_a, P_b] = [P_0, D_2] = \\
&= [D_1, D_2] = [P_a, D_1] = [J_{ab}, D_1] = [J_{ab}, D_2] = 0, \\
&[P_a, J_{bc}] = \delta_{ab} P_c - \delta_{ac} P_b, \\
&[J_{ab}, J_{cd}] = \delta_{ad} J_{bc} + \delta_{bc} J_{ad} - \delta_{ac} J_{bd} - \delta_{bd} J_{ac}, \\
&[P_0, D_1] = P_0, \quad [P_a, D_2] = P_a,
\end{aligned} \tag{2}$$

де $a, b, c = 1, 2, 3$; δ_{ab} — символ Кронекера.

Інтерес до розглядуваної задачі викликаний, зокрема, тим, що алгебри інваріантності ряду відомих рівнянь математичної фізики ізоморфні алгебрі $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ або містять її як підалгебру (дивись, наприклад, монографію [1]).

Як відомо [2], загальний розв'язок цієї задачі передбачає побудову повної множини диференціальних інваріантів другого порядку для відомих реалізацій даної алгебри Лі в класі векторних полів Лі. Відзначимо, що аналогічна задача розглядалася в статтях [3]–[5], де було знайдено повну множину диференціальних інваріантів другого порядку для відомих реалізацій алгебр Пуанкаре $p(1,n)$, Евкліда $e(n)$ та Галілея $g(1,n)$.

Тут ми, слідуючи роботам [6]–[10], спочатку проводимо опис нееквівалентних реалізацій алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ в класі векторних полів Лі, а потім для кожної із них здійснюємо побудову диференціальних інваріантів. Зауважимо, що цей підхід дозволив отримати в [6]–[10] нові, раніше невідомі, реалізації алгебр Пуанкаре та Галілея й відповідні їм інваріантні рівняння.

1. Реалізації алгебри $\tilde{\boldsymbol{e}}(\mathbf{1}) \oplus \tilde{\boldsymbol{e}}(\mathbf{3})$. Нехай $V = \mathbb{R}^4 \oplus \mathbb{R}^1$ — простір чотирьох незалежних $\mathbb{R}^4 = \langle x_0, \boldsymbol{x} \rangle$ та однієї залежної $\mathbb{R}^1 = \langle u \rangle$ змінних. Під реалізаціями алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ в класі векторних полів Лі, ми розуміємо реалізації цієї алгебри в класі лінійних диференціальних операторів

$$Q = \tau(x_0, \boldsymbol{x}, u)\partial_{x_0} + \xi^a(x_0, \boldsymbol{x}, u)\partial_{x_a} + \eta(x_0, \boldsymbol{x}, u)\partial_u, \tag{3}$$

де τ, ξ^a, η — гладкі в деякій області простору V функції; $a = 1, 2, 3$; тут і надалі, за індексами, що повторюються, якщо не оговорено іншого, передбачено підсумовування в межах їх зміни.

Нехай

$$\overline{x}_0 = h(x_0, \boldsymbol{x}, u),\ \overline{x}_a = g^a(x_0, \boldsymbol{x}, u),\ \overline{u} = f(x_0, \boldsymbol{x}, u)\ (a = 1, 2, 3) \tag{4}$$

— деяка невироджена заміна змінних в просторі V. Дві реалізації алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ в класі операторів (3) будемо називати еквівалентними, якщо існує заміна змінних (4), яка зводить одну із цих реалізацій до іншої. Очевидно, що це відношення еквівалентності розбиває всю множину реалізацій алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ на нееквівалентні класи, і для повного опису реалізацій достатньо вказати по одному представнику із кожного класу.

Тут ми обмежуємося розглядом тих реалізацій алгебри $\tilde{e}(1)\oplus\tilde{e}(3)$, в яких генератори трансляцій мають вигляд

$$P_\mu = \partial_{x_\mu}, \qquad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{5}$$

Саме такі реалізації відіграють провідну роль в різних задачах математичної фізики.

Теорема 1. *Нееквівалентні реалізації алгебри $\tilde{e}(1)\oplus\tilde{e}(3)$ в класі операторів (3), де генератори трансляцій мають вигляд (5), вичерпуються п'ятьма реалізаціями, в яких генератори поворотів мають вигляд*

$$J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a}, \qquad a, b = 1, 2, 3, \tag{6}$$

а генератори D_1, D_2 збігаються із однією з таких пар операторів:

$$D_1 = x_0\partial_{x_0}, \qquad D_2 = x_a\partial_{x_a}; \tag{7}$$

$$D_1 = x_0\partial_{x_0}, \qquad D_2 = x_a\partial_{x_a} + 2u\partial_u; \tag{8}$$

$$D_1 = x_0\partial_{x_0} - u\partial_u, \qquad D_2 = x_a\partial_{x_a} + ku\partial_u, \quad k \neq 0; \tag{9}$$

$$D_1 = x_0\partial_{x_0} - u\partial_u, \qquad D_2 = x_a\partial_{x_a}; \tag{10}$$

$$D_1 = x_0\partial_{x_0} + u\partial_u, \qquad D_2 = u\partial_{x_0} + x_a\partial_{x_a}. \tag{11}$$

Доведення. Згідно із зробленими припущеннями, оператори трансляцій P_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) мають вигляд (5). Тому, провівши розширення комутативного ідеалу $T = \langle P_1, P_2, P_3\rangle$ генераторами поворотів $\langle J_{ab}|a, b = 1, 2, 3\rangle$ вигляду (3), ми, згідно з результатами роботи [10], отримуємо, що з точністю до еквівалентності існує єдина реалізація алгебри $T \niplus \langle J_{ab}\rangle$ з базисними операторами (5), (6).

Проведемо розширення реалізації алгебри $T \niplus \langle J_{ab}\rangle$ операторами D_1, D_2 вигляду (3) до реалізації алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$. З комутаційних співвідношень (2) випливає, що D_1 і D_2 можемо взяти у вигляді

$$D_1 = \left(x_0 + \tau^1(u)\right)\partial_{x_0} + \eta^1(u)\partial_u, \tag{12}$$

$$D_2 = \tau^2(u)\partial_{x_0} + x_a\partial_{x_a} + \eta^2(u)\partial_u, \tag{13}$$

де функції τ^1, τ^2, η^1, η^2 — гладкі функції змінної u, які задовольняють таку систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\eta^1\frac{d\tau^2}{d\,u}-\eta^2\frac{d\tau^1}{d\,u}=\tau^2,\qquad \eta^1\frac{d\eta^2}{d\,u}-\eta^2\frac{d\eta^1}{d\,u}=0. \tag{14}$$

Найбільш загальну заміну змінних (4), яка залишає незмінним вигляд операторів P_0, P_a та J_{ab} (6), де $a, b = 1, 2, 3$, складають перетворення

$$\overline{x}_0=x_0+h(u),\qquad \overline{x}_a=x_a,\qquad \overline{u}=f(u). \tag{15}$$

Нехай в (12) $\eta^1 = 0$. Тоді, якщо в (13) $\eta^2 = 0$, то із (14) випливає, що $\tau^2 = 0$. Отже, поклавши в (15) $h(u) = \tau^1$, бачимо, що у цьому випадку оператори (12), (13) еквівалентні операторам (7). Якщо ж в (13) $\eta^2 \neq 0$, то заміна змінних (15), де $h(u) = \tau^1$, $f = C\exp\left[2\int\frac{du}{\eta^2}\right]$, $C = \mathrm{const} \neq 0$, зводить оператори (12), (13) до операторів

$$D_1=\overline{x}_0\partial_{\overline{x}_0},\qquad D_2=\tilde{\tau}^2(\overline{u})\partial_{\overline{x}_0}+\overline{x}_a\partial_{\overline{x}_a}+2\overline{u}\partial_{\overline{u}},$$

для яких система (14) зводиться до рівності $\tilde{\tau}^2 = 0$. Отже, у цьому випадку оператори D_1, D_2 еквівалентні операторам (8).

Аналогічний розгляд при $\eta^1 \neq 0$ привів до реалізацій (9)–(11).

Нарешті, безпосередня перевірка показала, що отримані реалізації нееквівалентні.

2. Диференціальні інваріанти. Перелік нееквівалентних реалізацій алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ теореми 1 дозволяє перейти до опису рівнянь (1), алгебри інваріантності яких ізоморфні прямій сумі розширених алгебр Евкліда. Для цього нам потрібно для кожної із реалізацій здійснити побудову диференціальних інваріантів другого порядку.

Нехай $L = \langle X_m | m = 1, 2, \ldots, 9\rangle$ — одна із реалізацій алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ з теореми 1. Функція

$$\Phi=\Phi(x_0,\boldsymbol{x},u,u_\mu,u_{\mu\nu}),\qquad \mu,\nu=0,1,2,3,$$

називається диференціальним інваріантом другого порядку алгебри L, якщо вона є інваріантом другого продовження цієї алгебри [2].

Згідно з означенням, процедура побудови диференціальних інваріантів зводиться до побудови фундаментальної множини розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\underset{2}{X}_m\Phi(x_0,\boldsymbol{x},u,u_\mu,u_{\mu\nu})=0,\quad m=1,2,\ldots,9;\ \mu,\nu=0,1,2,3. \tag{16}$$

Система (16) — це система дев'яти рівнянь, а функція Φ — деяка гладка функція 19 аргументів. Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що ранг кожної двічі продовженої алгебри L дорівнює дев'яти. Тому базис диференціальних інваріантів для кожної із реалізацій алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ складатимуть десять функцій

$$\Lambda_i = \Lambda_i(x_0, \boldsymbol{x}, u, u_\mu, u_{\mu\nu}), \qquad i = 1, \dots, 10,$$

а найбільш загальне рівняння (1), алгебра інваріантності якого ізоморфна прямій сумі розширених алгебр Евкліда, матиме вигляд

$$F(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{10}) = 0.$$

Оскільки усі отримані реалізації алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ містять як підалгебру алгебру $e(1) \oplus e(3) = \langle P_0 \rangle \oplus \langle P_a, J_{ab} | a, b = 1, 2, 3 \rangle$ з базисними операторами (5), (6), спочатку побудуємо диференціальних інваріантів цієї алгебри.

Лема 1. *Функції*

$$\begin{array}{lll} u, & u_0, & u_{00}, \\ S_1 = u_a u_a, & S_2 = u_{aa}, & S_3 = u_a u_{ab} u_b, \\ S_4 = u_{ab} u_{ab}, & S_5 = u_a u_{ab} u_{bc} u_c, & S_6 = u_{ab} u_{bc} u_{ca}, \\ S_7 = u_a u_{0a}, & S_8 = u_{0a} u_{0a}, & S_9 = u_{0a} u_{0b} u_{ab} \end{array} \tag{17}$$

складають фундаментальну систему диференціальних інваріантів другого порядку алгебри $e(1) \oplus e(3)$. В (17) і далі $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$; $a, b, c = 1, 2, 3$.

Доведення. Оскільки $\underset{2}{P_\mu} = P_\mu = \partial_{x_\mu}$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, то із (16) випливає, що диференціальні інваріанти не залежать від змінних x_μ. Для генераторів поворотів J_{ab} рівняння (16) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \underset{2}{J_{ab}}\, \Phi(u, u_\mu, u_\nu) = [&J_{ab} + u_a \partial_{u_b} - u_b \partial_{u_a} + \\ &+ 2u_{ab}(\partial_{u_{bb}} - \partial_{u_{aa}}) + (u_{aa} - u_{bb})\partial_{u_{ab}} + u_{ac}\partial_{u_{bc}} - \\ &- u_{bc}\partial_{u_{ac}} + u_{0a}\partial_{u_{0b}} - u_{0b}\partial_{u_{0a}}]\Phi(u, u_\mu, u_{\mu\nu}) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Зауважимо, що в (18) за індексами, які повторюються, підсумовування немає.

Неважко переконатися, що базис фундаментальних розв'язків системи (18) складають дванадцять функцій. Безпосередньою підстановкою переконуємося, що функції (17) задовольняють рівняння (18).

Тому для доведення леми залишається показати, що вони складають базис фундаментальної системи розв'язків системи (18).

Розіб'ємо множину функцій (17) на три групи. До першої віднесемо функції u, u_0, u_{00}, до другої — функції S_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, а до третьої —функції S_7, S_8, S_9. Очевидною є незалежність функцій, які належать до різних груп. Також, неважко показати, що незалежними є функції, віднесені до першої групи. Функції, які віднесені до другої групи, разом із функцією u, як показано в [8], складають базис диференціальних інваріантів другого порядку алгебри $e(3)$. Нарешті, розглядаючи функції S_7, S_8, S_9 як функції змінних u_{0a} $(a = 1, 2, 3)$, бачимо, що

$$\frac{D(S_7, S_8, S_9)}{D(u_{01}, u_{02}, u_{03})} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 2u_{01} & 2u_{02} & 2u_{03} \\ 2u_{0a}u_{1a} & 2u_{0a}u_{2a} & 2u_{0a}u_{3a} \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

Доведена лема дозволяє здійснити побудову базису диференціальних інваріантів другого порядку алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ в класі функцій

$$\Phi = \Phi(u, u_0, u_{00}, S_1, \ldots, S_9).$$

Оскільки процедура побудови досить громіздка, то ми тут не наводимо проміжних обчислень, а відразу подаємо кінцевий результат у вигляді наступного твердження.

Теорема 2. *Наведені нижче функції Λ_j $(j = 1, 2, \ldots, 10)$ складають базиси диференціальних інваріантів другого порядку для кожної із отриманих реалізацій алгебри $\tilde{e}(1) \oplus \tilde{e}(3)$ у відповідності із їх переліком у теоремі 1:*

1) $\Lambda_1 = u_{00}u_0^{-2}$, $\Lambda_2 = S_2S_1^{-1}$, $\Lambda_3 = S_3S_1^{-2}$,
$\Lambda_4 = S_4S_1^{-2}$, $\Lambda_5 = S_5S_1^{-3}$, $\Lambda_6 = S_6S_1^{-3}$,
$\Lambda_7 = S_7u_0^{-1}S_1^{-1}$, $\Lambda_8 = S_8u_0^{-2}S_1^{-1}$,
$\Lambda_9 = S_9u_0^{-2}S_1^{-2}$, $\Lambda_{10} = u$;

2) $\Lambda_1 = S_1u^{-1}$, $\Lambda_2 = S_2$, $\Lambda_3 = S_3u^{-1}$, $\Lambda_4 = S_4$,
$\Lambda_5 = S_5u^{-1}$, $\Lambda_6 = S_6$, $\Lambda_7 = S_7u_0^{-1}$,
$\Lambda_8 = S_8u\,u_0^{-2}$, $\Lambda_9 = S_9u\,u_0^{-2}$, $\Lambda_{10} = u_{00}u\,u_0^{-2}$;

3) $\Lambda_1 = u^{4-2k}u_0^{-2}S_1^k$, $\Lambda_2 = u^2u_0^{-2}S_2^k$,
$\Lambda_3 = u^{8-3k}u_0^{-4}S_3^k$, $\Lambda_4 = u^{8-2k}u_0^{-4}S_4^k$,
$\Lambda_5 = u^{12-4k}u_0^{-6}S_5^k$, $\Lambda_6 = u^{12-3k}u_0^{-6}S_6^k$,

$$\Lambda_7 = u^{-k+4}u_0^{-k-2}S_7^k, \quad \Lambda_8 = u^4 u_0^{-2k-2}S_8^k,$$
$$\Lambda_9 = u^{-k+8}u_0^{-2k-2}S_9^k, \quad \Lambda_{10} = uu_0^{-2}u_{00};$$

4) $\Lambda_1 = u^{-3}u_{00}, \quad \Lambda_2 = uS_2S_1^{-1}, \quad \Lambda_3 = uS_3S_1^{-2},$
$$\Lambda_4 = u^2S_4S_1^{-2}, \quad \Lambda_5 = u^2S_5S_1^{-3}, \quad \Lambda_6 = u^3S_6S_1^{-3},$$
$$\Lambda_7 = u^{-1}S_7S_1^{-1}, \quad \Lambda_8 = u^{-2}S_8S_1^{-1}, \quad \Lambda_9 = u^{-1}S_9S_1^{-2},$$
$$\Lambda_{10} = u^{-2}u_0;$$

5) $\Lambda_1 = u_0^{-6}u_{00}^2\exp(2u_0^{-1})S_1,$
$$\Lambda_2 = u_0^{-6}u_{00}\exp(2u_0^{-1})[u_{00}S_1 + u_0^2S_2 - 2u_0S_7],$$
$$\Lambda_3 = u_0^{-14}u_{00}^3\exp(4u_0^{-1})[u_{00}S_1^2 - 2u_0S_1S_7 + u_0^2S_3],$$
$$\Lambda_4 = u_0^{-12}u_{00}^2\exp(4u_0^{-1})[2u_0^2(S_1S_8 + S_7^2) + u_{00}^2S_1^2 +$$
$$+u_0^4S_4 - 4u_0u_{00}S_1S_7 - 4u_0^3S_1^{-1}S_3S_7 + 2u_0^2u_{00}S_3],$$
$$\Lambda_5 = u_0^{-12}u_{00}^4\exp(6u_0^{-1})[u_0^{-4}S_5 - 4u^{-5}S_3S_7 +$$
$$+u_0^{-6}(3S_1S_7^2 + S_1^2S_8 + 2u_{00}S_1S_3) -$$
$$-4u_0^{-7}u_{00}S_1^2S_7 + u_0^{-8}u_{00}^2S_1^3],$$
$$\Lambda_6 = u_0^{-18}u_{00}^3\exp(6u_0^{-1})[u_0^6S_6 - 2u_0^5(S_3^2S_7S_1^{-2} + 2S_5S_7S_1^{-1}) +$$
$$+3u_0^4(S_1S_9 + S_3S_8 + 2S_7^2S_3S_1^{-1} + u_{00}S_5) -$$
$$-2u_0^3(3S_1S_7S_8 + S_7^3 + 6u_{00}S_3S_7) +$$
$$+3u_0^2u_{00}(S_1^2S_8 + 3S_1S_7^2 + u_{00}S_1S_3) - 6u_0u_{00}^2S_1^2S_7 + u_{00}^3S_1^3],$$
$$\Lambda_7 = u_0^{-7}u_{00}\exp(2u_0^{-1})(u_{00}S_1 - u_0S_7),$$
$$\Lambda_8 = u_0^{-6}\exp(2u_0^{-1})(u_{00}^2S_1 - 2u_0u_{00}S_7 + u_0^2S_8),$$
$$\Lambda_9 = u_0^{-12}u_{00}\exp(4u_0^{-1})[u_0^4S_9 - 2u_0^3(S_7S_8 + u_{00}S_3S_7S_1^{-1}) +$$
$$+u_0^2(3u_{00}S_7^2 + 2u_{00}S_1S_8 + u_{00}^2S_3) - 4u_0u_{00}^2S_1S_7 + u_{00}^3S_1^2],$$
$$\Lambda_{10} = uu_0^{-3}u_{00}.$$

[1] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.Н. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[3] Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Пуанкаре // Докл. АН УССР. — 1989. — № 5. — С. 46–53.

[4] Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Галилея // Докл. АН УССР. — 1989. — № 4. — С. 19–24.

[5] Fushchych W.I., Yehorchenko I.A. Second–order differential invariants of the rotations group $O(n)$ and its extensions: $E(n)$, $P(1,n)$ // Acta Appl. Math. — 1992. — **28**, № 1. — P. 69–92.

[6] Rideau G., Winternitz P. Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time // J. Math. Phys. — 1990. — **31,** № 9. — P. 1095–1105.

[7] Rideau G., Winternitz P. Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schrödinger group // J. Math. Phys. — 1993. — **34**, № 2. — P. 558–570.

[8] Yehorchenko I. Nonlinear representation of the Poincaré algebra and invariant equations / Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. — Kiev: Institute of Mathematics, 1992. — P. 40–43.

[9] Fushchich W. I., Lagno V.I., Zhdanov R.Z. On nonlinear representation of the conformal algebra $AC(2,2)$ // Доп. АН України. — 1993. — № 9. — C. 44–47.

[10] Fushchych W., Zhdanov R., Lahno V. On linear and nonlinear representations of the generalized Poincaré groups in the class Lie vector fields // J. Nonlin. Math. Physics. — 1994. — **1**, № 3. — P. 295–308.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 167–176

УДК 517.977.1

Групповая классификация управляемых систем второго порядка

В.И. ЛЁГЕНЬКИЙ [†], ***И. РУДОЛЬФ*** [‡]

[†] *Институт проблем моделирования в энергетике, Киев, Украина*
E-mail: Lehenkyi@yahoo.com

[‡] *Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie TU Dresden, Germany*
E-mail: Rudolph@erss11.et.tu-dresden.de

Розв'язано задачу группової класифікації для керованих систем другого порядку із скалярною функцією керування.

A group classification problem for single-input control systems of second order is solved.

1. Вводные замечания. Постановка задачи. Как известно, многие свойства управляемых систем — управляемость, наблюдаемость, декомпозируемость, приводимость к наперед заданному виду — носят инвариантный характер, а, следовательно, имеют теоретико-групповую природу и могут быть выявлены с использованием алгоритма Ли.

К настоящему времени выполнено значительное количество исследований по анализу конкретных управляемых систем. В то же время исследований, выполненных в самой общей постановке, достаточно мало. Под "общностью" будем понимать произвол в спецификации правых частей дифференциальных уравнений управляемой системы. Объект наших исследований — система вида

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= f^1\left(t, x^1, x^2, u^1, \ldots, u^r\right), \\ \dot{x}^2 &= f^2\left(t, x^1, x^2, u^1, \ldots, u^r\right), \end{aligned} \tag{1}$$

где (x_1, x_2) — фазовые координаты, $\left(u^1, \ldots, u^r\right)$ — управления, t — время, а $\left(f^1(\cdot),\ f^2(\cdot)\right)$ — произвольные аналитические функции указанных аргументов. Сделаем несколько замечаний относительно системы (1):

1) систему (1) и систему, полученную из нее невырожденной заменой фазовых координат $\hat{x} = \varphi(t, x)$, времени $\hat{t} = \tau(t, x)$ а также управлений $\hat{u} = \lambda(t, x, u)$ будем считать (локально) *эквивалентными*;

2) в силу введенного понятия эквивалентности, рассмотрение систем с числом управляющих воздействий больше трех ($r \geq 3$) сводится к системам с двумя управляющими воздействиями (остальные управления оказываются “несущественными”, а системы — “несущественно различными”; детали см. в [2]);

3) при $r = 2$ система (1) локально эквивалентна простейшей системе
$$\frac{dx^1}{dt} = \hat{u}^1, \qquad \frac{dx^2}{dt} = \hat{u}^2,$$
где $\hat{u}^1 = f^1\left(t, x^1, x^2, u^1, u^2\right)$, $\hat{u}^2 = f^2\left(t, x^1, x^2, u^1, u^2\right)$; так что рассмотрение систем второго порядка с двумя управляющими воздействиями (так же, как и систем n-го порядка с n управлениями) не представляет интереса;

4) при $r = 1$ в качестве новой управляющей функции в системе (1) можно, например, выбрать
$$\hat{u} = f^2\left(t, x^1, x^2, u\right).$$

Таким образом, без потери общности, задача групповой классификации для системы второго порядка со скалярным управлением может быть сформулирована (в соответствии с [1]) так: *для класса дифференциальных уравнений*

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= F\left(t, x^1, x^2, u\right), \\ \dot{x}^2 &= u \end{aligned} \tag{2}$$

найти ядро основных групп GE_0 и указать все специализации произвольного элемента $F(\cdot)$, дающие расширение группы GE_0.

2. Управляемость. Как будет видно из дальнейшего, важным свойством, приводящим к сужению допускаемой группы, является управляемость системы (2), поэтому остановимся на этом свойстве подробнее.

Под управляемостью системы (2) будем понимать отсутствие у нее инвариантных поверхностей вида $\omega\left(t, x^1, x^2\right) = C$.

Для получения спецификаций функции $F\left(t, x^1, x^2, u\right)$, соответствующих условию неуправляемости, заметим, что наличие инвариантов $\omega\left(t, x^1, x^2\right) = C$ можно рассматривать как существование нетривиальных решений системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + F\left(t, x^1, x^2, u\right)\frac{\partial \omega}{\partial x^1} + u\frac{\partial \omega}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0, \tag{3}$$

где первое уравнение означает, что ω должна быть первым интегралом системы (2), а второе условие означает, что этот первый интеграл не должен зависеть от управления u. Если ввести обозначения

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + F\left(t, x^1, x^2, u\right)\frac{\partial}{\partial x^1} + u\frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad U = \frac{\partial}{\partial u}, \tag{4}$$

систему (3) можно переписать в виде

$$X_0\omega = 0, \qquad U\omega = 0. \tag{5}$$

Для решения вопроса о количестве функционально-независимых решений системы (5), ее надо подвергнуть процедуре пополнения — подсчитать коммутаторы операторов (4) и исследовать их на линейную связанность. Последовательно будем иметь

$$\begin{aligned}
&X_1 = [U, X_0] = F_u\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2},\\
&X_2 = [U, X_1] = F_{uu}\frac{\partial}{\partial x^1},\\
&X_3 = [X_0, X_1] = \left(F_{ut} + FF_{ux^1} + uF_{ux^2} - F_uF_{x^1} - F_{x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^1},
\end{aligned} \tag{6}$$

где $[\cdot,\cdot]$ — коммутатор операторов, $F_u = \partial F/\partial u, \ldots$. Наличие первых интегралов означает одновременное выполнение условий линейной связанности систем операторов $\{U, X_0, X_1, X_2\}$ и $\{U, X_0, X_1, X_3\}$. В первом случае это приводит к обращению в нуль определителя матрицы коэффициентов

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & F & u\\ 0 & 0 & F_u & 1\\ 0 & 0 & F_{uu} & 0 \end{vmatrix} = F_{uu} = 0, \tag{7}$$

а во втором — к выполнению условия

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & F & u \\ 0 & 0 & F_u & 1 \\ 0 & 0 & F_{ut} + FF_{ux^1} + uF_{ux^2} - F_uF_{x^1} - F_{x^2} & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Из условий (7), (8) следует, что система (2) становится неуправляемой только при тех значениях F, которые удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} &F_{uu} = 0, \\ &F_{ut} + FF_{ux^1} + uF_{ux^2} - F_uF_{x^1} - F_{x^2} = 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

Из первого уравнения (9) следует, что функция F линейна по u, т.е.

$$F = \alpha\left(t, x^1, x^2\right) u + \beta\left(t, x^1, x^2\right), \qquad (10)$$

где $\alpha\left(t, x^1, x^2\right)$, $\beta\left(t, x^1, x^2\right)$ — произвольные функции. Подставляя (10) во второе уравнение системы (9), получим

$$\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2} = 0. \qquad (11)$$

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 1. *Система (2) неуправляема тогда и только тогда, когда* $F = \alpha\left(t, x^1, x^2\right) u + \beta\left(t, x^1, x^2\right)$, *а для коэффициентов* α, β *выполняется условие (11).*

Доказать теорему 1 можно также с использованием техники дифференциальных форм. Действительно, исключая из системы (2) управление u в соответствии с условием (10), получим уравнение Пфаффа

$$\Omega = dx^1 - \alpha\left(t, x^1, x^2\right) dx^2 - \beta\left(t, x^1, x^2\right) dt = 0.$$

Условие интегрируемости дифференциальной формы вида

$$d\Omega \wedge \Omega = 0$$

приводит в точности к соотношению (11).

Пример 1. Линейная система с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &\dot{x}^1 = a_1x^1 + a_2x^2 + bu, \\ &\dot{x}^2 = u \end{aligned}$$

становится неуправляемой (в соответствии с (11)) при выполнении соотношения $ba_1 + a_2 = 0$. Действительно, после исключения u, получается уравнение Пфаффа

$$dx^1 - bdx^2 + a_1 \left(bx^2 - x^1\right) dt = 0,$$

решение которого можно получить в виде

$$\left(bx^2 - x^1\right) e^{-a_1 t} = C.$$

3. Групповая классификация. Сразу же заметим, что так как функция F зависит от всех переменных, ядро основных групп пусто. Поэтому мы начинаем анализ с построения определяющих уравнений. Коэффициенты $\tau\left(t, x^1, x^2, u\right)$, $\xi^i\left(t, x^1, x^2, u\right)$, $\varphi\left(t, x^1, x^2, u\right)$ инфинитезимального оператора симметрий

$$X = \tau \frac{\partial}{\partial t} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \varphi \frac{\partial}{\partial u} \tag{12}$$

определяются условий [2]

$$\begin{aligned} &X f^i - X_0 \xi^i + f^i X_0 \tau = 0, \\ &U \xi^i + f^i U \tau = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

где $f^1 = F$, $f^2 = u$ в соответствии с системой (2). Подстановка $\xi^i = f^i \tau + \hat{\xi}^i$ упрощает уравнения (13) до вида

$$\begin{aligned} &\hat{X} f^i - X_0 \hat{\xi}^i = 0, \\ &U \hat{\xi}^i + U(f^i) \tau = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\hat{X} = \hat{\xi}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \hat{\xi}^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \varphi \frac{\partial}{\partial u}. \tag{15}$$

После подстановки в (14) значения $f^2 = u$ немедленно получаем

$$\varphi = X_0 \hat{\xi}^2, \qquad \tau = -U \hat{\xi}^2. \tag{16}$$

Подставляя теперь в (14) найденные значения (τ, φ) и $f^1 = F$, получим систему

$$\begin{aligned} &\hat{\xi}^1 F_{x^1} + \hat{\xi}^2 F_{x^2} + F_u X_0 \hat{\xi}^2 - X_0 \hat{\xi}^1 = 0, \\ &U \hat{\xi}^1 - F_u U \hat{\xi}^2 = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Классификацию начинаем со второго уравнения системы (17). В зависимости от значения F_{uu} возможны следующие варианты:

А. $F_{uu}=0$, т.е. $F=\alpha\left(t,x^1,x^2\right)u+\beta\left(t,x^1,x^2\right)$. В этом случае между $\hat{\xi}^1$ и $\hat{\xi}^2$ существует соотношение

$$\hat{\xi}^1=\alpha\hat{\xi}^2+\gamma, \tag{18}$$

где $\gamma=\gamma(t,x^1,x^2)$ — произвольная функция. После подстановки (18) в (17) получим

$$\hat{\xi}^2(\alpha\beta_{x^1}-\beta\alpha_{x^1}-\alpha_t+\beta_{x^2})=X_0\gamma-\gamma F_{x^1}.$$

Здесь появляются две возможности:

А1. Если $\alpha\beta_{x^1}-\beta\alpha_{x^1}-\alpha_t+\beta_{x^2}\neq 0$ (система управляема), то

$$\hat{\xi}^2=\frac{X_0\gamma-\gamma F_{x^1}}{\alpha\beta_{x^1}-\beta\alpha_{x^1}-\alpha_t+\beta_{x^2}}.$$

Выполняя обратные подстановки, получим следующие выражения для коэффициентов оператора симметрий:

$$\begin{aligned}
&\tau=-\frac{\alpha\gamma_{x^1}+\gamma_{x^2}-\gamma\alpha_{x^1}}{\alpha\beta_{x^1}-\beta\alpha_{x^1}-\alpha_t+\beta_{x^2}},\\
&\xi^1=\frac{\alpha\gamma_t+\gamma\beta_{x^2}-\gamma\alpha_t-\beta\gamma_{x^2}}{\alpha\beta_{x^1}-\beta\alpha_{x^1}-\alpha_t+\beta_{x^2}},\\
&\xi^2=\frac{\gamma_t+\beta\gamma_{x^1}-\gamma\beta_{x^1}}{\alpha\beta_{x^1}-\beta\alpha_{x^1}-\alpha_t+\beta_{x^2}},\\
&\varphi=X_0\left(\frac{X_0\gamma-\gamma(\alpha_{x^1}u+\beta_{x^1})}{\alpha\beta_{x^1}-\beta\alpha_{x^1}-\alpha_t+\beta_{x^2}}\right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Таким образом, в случае А1 система допускает бесконечномерную алгебру симметрий с коэффициентами (19), которые зависят от произвольной функции трех переменных $\gamma\left(t,x^1,x^2\right)$. Примечательно, что коэффициенты $\left(\tau,\xi^1,\xi^2\right)$ не зависят от управления u.

А2. Если $\alpha\beta_{x^1}-\beta\alpha_{x^1}-\alpha_t+\beta_{x^2}=0$ (система неуправляема), то

$$\hat{\xi}^2=\psi\left(t,x^1,x^2,u\right),$$

где ψ — произвольная функция указанных аргументов, а для определения функции γ получаем уравнение

$$X_0\gamma-\gamma F_{x^1}=0,$$

т.е.

$$\gamma_t + \beta\gamma_{x^1} + u(\alpha\gamma_{x^1} + \gamma_{x^2}) = \gamma\beta_{x^1} + u\gamma\alpha_{x^1}.$$

Расщепим полученное уравнение по u:

$$\begin{aligned} &\gamma_t + \beta\gamma_{x^1} = \gamma\beta_{x^1}, \\ &\alpha\gamma_{x^1} + \gamma_{x^2} = \gamma\alpha_{x^1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Вопрос о совместности системы (20) решается путем исследования на полноту набора операторов

$$\begin{aligned} &Y_1 = \partial_t + \beta\partial_{x^1} + \gamma\beta_{x^1}\partial_\gamma, \\ &Y_2 = \alpha\partial_{x^1} + \partial_{x^2} + \gamma\alpha_{x^1}\partial_\gamma. \end{aligned} \tag{21}$$

Найдем их коммутатор:

$$\begin{aligned} [Y_2, Y_1] = (\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2})\partial_{x^1} + \\ + (\alpha\beta_{x^1} - \beta\alpha_{x^1} - \alpha_t + \beta_{x^2})_{x_1}\partial_\gamma. \end{aligned} \tag{22}$$

В силу нашего предположения о неуправляемости и выполнении условия (11), коэффициенты при ∂_{x^1} и ∂_γ обращаются в нуль, т.е. $[Y_2, Y_1] = 0$. Это означает, что для любых α, β, удовлетворяющих условию (11), набор (21) всегда полон и система (20) имеет решение вида

$$\Gamma\left(\omega^1, \omega^2\right) = 0,$$

где $\omega^1\left(t, x^1, x^2\right)$, $\omega^2\left(t, x^1, x^2, \gamma\right)$ — два функционально независимых инварианта операторов Y_2, Y_1. Таким образом, для случая A2 коэффициенты принимают вид

$$\begin{aligned} &\tau = -\psi_u, \qquad \xi^1 = \alpha\psi - (\alpha u + \beta)\psi_u + \gamma, \\ &\xi^2 = \psi - u\psi_u, \qquad \varphi = X_0(\psi_u). \end{aligned} \tag{23}$$

B. $F_{uu} \neq 0$. Заметим, что в этом случае функция F нелинейна по u и, следовательно, система всегда управляема. Решение второго уравнения системы (17), выполненное в соответствии с работой [3], принимает вид

$$\hat{\xi}^1 = \sigma - \frac{F_u}{F_{uu}}\sigma_u, \qquad \hat{\xi}^2 = -\frac{1}{F_{uu}}\sigma_u. \tag{24}$$

где $\sigma = \sigma\left(t, x^1, x^2, u\right)$ — произвольная функция. Подставляя найденные значения $\hat{\xi}^1$, $\hat{\xi}^2$) в первое уравнение ситемы (17), получим уравнение на σ

$$\begin{gathered} F_{uu}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + F_{uu}F\frac{\partial\sigma}{\partial x^1} + uF_{uu}\frac{\partial\sigma}{\partial x^2} - F_{x^1}F_{uu}\sigma + \\ +(F_uF_{x^1} + F_{x^2} - F_{tu} - FF_{ux^1} - uF_{x^2})\frac{\partial\sigma}{\partial u} = 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Уравнение (25) — квазилинейное уравнение в частных производных относительно функции σ, которое может быть решено, например, методом характеристик. И хотя при некоторых спецификациях функции F это уравнение может заметно упрощаться (например, при $F_{x^1} = 0$ оно становится линейным; а при $F = F(u)$ превращается в уравнение $X_0\sigma = 0$), тем не менее с точки зрения "широты решения" (в смысле Э. Картана), функция σ будет определяться тремя функционально независимыми инвариантами уравнения (25). Коэффициенты оператора симметрий для случая B принимают вид:

$$\begin{gathered} \tau = U\left(\frac{1}{F_{uu}}\sigma_u\right), \qquad \xi^1 = FU\left(\frac{1}{F_{uu}}\sigma_u\right) + \sigma - \frac{F_u}{F_{uu}}\sigma_u, \\ \xi^2 = uU\left(\frac{1}{F_{uu}}\sigma_u\right) - \frac{1}{F_{uu}}\sigma_u, \qquad \varphi = -X_0\left(\frac{1}{F_{uu}}\sigma_u\right). \end{gathered} \tag{26}$$

Пример 2. Линейная нестационарная система

$$\begin{aligned} &\dot{x}^1 = tu + x^2, \\ &\dot{x}^2 = u \end{aligned} \tag{27}$$

неуправляема, т.к. удовлетворяется условие (11) и система допускает первый интеграл

$$x^1 - tx^2 = C.$$

Заметим, что замена переменных $y = x^1 - tx^2$ приводит систему (27) к "каноническому" виду

$$\begin{aligned} &\dot{y} = 0, \\ &\dot{x}^2 = u. \end{aligned}$$

Система (20) в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} &\gamma_t + x^2\gamma_{x^1} = 0, \\ &t\gamma_{x^1} + \gamma_{x^2} = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

и имеет своим решением $\gamma = \gamma\left(x^1 - tx^2\right)$. Поэтому алгебра инвариантности системы (27) образована прямой суммой операторов $X_1 \oplus X_2$, где

$$\begin{aligned}
X_1 &= \gamma(x^1 - tx^2)\partial_{x^1},\\
X_2 &= -\psi_u\partial_t + (t\psi - \left(tu + x^2\right)\psi_u)\partial_{x^1} + (\psi - u\psi_u)\partial_{x^2} +\\
&\quad + \left(\psi_{tu} + \left(tu + x^2\right)\psi_{ux^1} + u\psi_{ux^2}\right)\partial_u.
\end{aligned}$$

Пример 3. Линейная управляемая система в канонической форме Бруновского

$$\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= x^2,\\
\dot{x}^2 &= u,
\end{aligned}$$

в соответствии с (19) допускает оператор симметрии вида

$$X = -\gamma_{x^2}\partial_t + \left(\gamma - x^2\gamma_{x^2}\right)\partial_{x^1} + \left(\gamma_t + x^2\gamma_{x^1}\right)\partial_{x^2} + X_0^2(\gamma)\partial_u,$$

где $X_0 = \partial_t + x^2\partial_{x^1} + u\partial_{x^2}, \gamma = \gamma\left(t, x^1, x^2\right)$.

Пример 4. Нелинейная управляемая система вида

$$\begin{aligned}
\dot{x}^1 &= u^2,\\
\dot{x}^2 &= u,
\end{aligned}$$

в соответствии с (26) допускает оператор симметрии вида

$$\begin{aligned}
X &= \sigma_{uu}\partial_t + \left(u^2\sigma_{uu} - 2u\sigma_u + \sigma\right)\partial_{x^1} + (u\sigma_{uu} - \sigma_u)\partial_{x^2} -\\
&\quad - \left(\sigma_{tu} + u^2\sigma_{x^1u} + u\sigma_{x^2u}\right)\partial_u,
\end{aligned}$$

где, в соответствии с (25), $\sigma = \sigma\left(u, x^1 - tu^2, x^2 - tu\right)$.

4. Заключение. Результаты приведенной групповой классификации (см. табл. 1) свидетельствуют о том, что для систем второго порядка имеется 2 принципиальных возможности: в случае управляемой системы максимальная точечная алгебра симметрий бесконечномерна и определяется одной произвольной функцией трех переменных: в случае линейной системы эта функция зависит только от времени и фазовых координат, а для нелинейных систем — и от управлений. Расширение допускаемой группы наступает у неуправляемых систем, алгебра инвариантности которых представляет собой прямую сумму двух бесконечномерных алгебр, определяемых, соответственно, одной функцией четырех переменных и одной функцией одной переменной.

Таблица 1

Вариант	Спецификация	Кол-во ф-ций	Вид функций
A1	$F = \alpha u + \beta, K \neq 0$	1	$\gamma\left(t, x^1, x^2\right)$
A2	$F = \alpha u + \beta, K = 0$	2	$\psi\left(t, x^1, x^2, u\right)$, $\gamma\left(\omega^1\right)$
B	$F_{uu} \neq 0$	1	$\sigma\left(\omega^1, \omega^2, \omega^3\right)$

5. Благодарности. В.И. Легенький выражает благодарность Техническому Университету Дрездена (Германия) за частичную финансовую поддержку данной работы.

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[2] Lehenkyi V. Point symmetries of control systems and their applications // J. Nonlin. Math. Phys. — 1997. — **4**, № 1–2. — P. 168–172.

[3] Lehenkyi V. The integrability of some underdetermined systems // Proceedings of the Third International Conference “Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics”. — 2000. — **30**, part 1. — P. 157–164.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 177–186

УДК 517.95:512.816

Реалізації групи Пуанкаре в класі комплексних векторних полів Лі

М.В. ЛУТФУЛЛІН

Полтавський державний педагогічний університет

Проведено класифікацію реалізацій алгебр Лі групи поворотів $O(3)$ та групи Пуанкаре $P(1,3)$ в класі диференціальних операторів першого порядку в просторі трьох незалежних та n залежних змінних.

We classify realizations of Lie algebras of the rotation group $O(3)$ and of the Poincaré group $P(1,3)$ within the class of first-order differential operators in the space of three independent and n dependent variables.

Опис лінійних та нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних, інваріантних відносно деякої локальної групи перетворень Лі G, є однією з центральних проблем групового аналізу диференціальних рівнянь. Інфінітезимальний метод Лі дає можливість за відомими реалізаціями групи перетворень G будувати всі диференціальні рівняння, що допускають групу G [1, 2]. Тому для побудови всіх інваріантних диференціальних рівнянь з частинними похідними актуальною є задача класифікації всіх нееквівалентних реалізацій групи Лі G.

Однією з важливих груп Лі, які знаходять застосування в різних задачах математичної та теоретичної фізики, є група Пуанкаре (див., наприклад, [3]). Побудові реалізацій цієї групи та диференціальних рівнянь, які допускають групу Пуанкаре, присвячено багато робіт [4–10].

У даній роботі ми зупиняємось на дослідженні спеціального підкласу реалізацій, які називаються коваріантними (див., наприклад, [11, 12]).

Ми вивчаємо реалізації групи Пуанкаре $P(1,3)$ перетворень, яка діє у просторі $V = X \otimes U$, де $X = \mathbb{C}^{1,3}$ є простір комплексних змінних x_μ $(\mu = 0,1,2,3)$ з метричним тензором

$$g_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\{1,-1,-1,-1\}$$

та $U = \mathbb{C}^n$ — n-вимірний простір змінних u_α $(\alpha = 1,2,\ldots,n)$.

Зауважимо, що при побудові реалізацій групи Пуанкаре ми не розрізняємо x та u як незалежні та залежні змінні, проте, якщо розглядати групу Пуанкаре як групу інваріантності диференціальних рівнянь, то змінні u_α слід розглядати як функції $u_\alpha = u_\alpha(x)$.

Відомо, що дослідження реалізацій локальної групи перетворень Лі G зводиться до вивчення реалізацій її алгебри Лі AG, базисними елементами якої в даному випадку є диференціальні оператори першого порядку (векторні поля Лі) вигляду

$$Q = \xi^a(x,u)\partial_{x_a} + \eta^j(x,u)\partial_{u_j}. \tag{1}$$

Тут ξ^a та η^j деякі гладкі комплексні функції в просторі $X \otimes U$.

Ми використовуємо позначення

$$\partial_{x_a} = \frac{\partial}{\partial x_a}, \qquad \partial_{u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j}$$

і проводимо сумування за індексами, що повторюються ($a = 1,2,3$, $j = 1,2,\ldots,n$). Алгебру Лі групи Пуанкаре $P(1,3)$ будемо називати алгеброю Пуанкаре і позначати $p(1,3)$.

Означення. *Лінійно незалежні диференціальні оператори* $P_\mu, J_{\alpha\beta}$ (α, β, $\mu = 0,1,2,3$) *вигляду (1) складають реалізацію алгебри Пуанкаре* $p(1,3)$ *якщо вони задовольняють комутаційні співвідношення*

$$[P_\alpha, P_\beta] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\alpha\beta}] = i(g_{\mu\alpha}P_\beta - g_{\mu\beta}P_\alpha), \tag{2}$$

$$[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] = i(g_{\alpha\nu}J_{\beta\mu} + g_{\beta\mu}J_{\alpha\nu} - g_{\alpha\mu}J_{\beta\nu} - g_{\beta\nu}J_{\alpha\mu}). \tag{3}$$

Отже, задача опису реалізацій групи $P(1,3)$ зводиться до побудови операторів P_μ, $J_{\alpha\beta}$ вигляду (1), які є лінійно незалежними і задовольняють співвідношення (2)–(3).

Відомо [1, 2], що комутаційні співвідношення не змінюються в результаті виконання довільної невиродженої заміни змінних x, u

$$\tilde{x}_\alpha = f_\alpha(x,u), \quad \tilde{u}_\beta = g_\beta(x,u), \quad \alpha = 0,1,2,3, \ \beta = 1,2,\ldots,n, \tag{4}$$

де f_α, g_β — аналітичні функції визначені у просторі $X \otimes U$. Оборотні перетворення утворюють групу (групу *дифеоморфізмів*) і визначають бінарне відношення еквівалентності на множині реалізацій в класі векторних полів Лі алгебри $p(1,3)$. Дві реалізації алгебри Пуанкаре називаються еквівалентними, якщо існують такі оборотні перетворення (4), які трансформують дані реалізації одну в іншу.

Отже, для повного опису реалізацій алгебри $p(1,3)$ в класі операторів (1), досить знайти по одному представникові нееквівалентних класів.

Неважко переконатися, що $p(1,3) = so(1,3) \niplus I$, де $so(1,3) = \langle J_{\alpha\beta} | \alpha, \beta = 0,1,2,3 \rangle$ — алгебра Лі групи Лоренца, яка визначається співвідношеннями (3), $I = \langle P_0, P_1, P_2, P_3 \rangle$ — комутативний ідеал.

Зауважимо, що алгебри інваріантності основних рівнянь релятивістської фізики (рівнянь Максвелла, Вейля, Дірака, Даламбера, Янга–Міллса) утворюють реалізації алгебри Пуанкаре $p(1,3)$ з генераторами трансляцій

$$P_\mu = i\partial_{x_\mu}, \qquad \mu = 0,1,2,3. \tag{5}$$

Саме такі реалізації ми будемо вивчати.

Перевіривши комутаційні співвідношення (2), отримуємо, що

$$J_{\alpha\beta} = i(g^{\alpha\gamma} x_\gamma \partial_{x_\beta} - g^{\beta\gamma} x_\gamma \partial_{x_\alpha}) + \zeta^\gamma_{\alpha\beta}(u)\partial_{x_\gamma} + \eta^j_{\alpha\beta}(u)\partial_{u_j}. \tag{6}$$

Тут $\zeta^\gamma_{\alpha\beta}$, $\eta^j_{\alpha\beta}$ — довільні гладкі функції від u; $g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$; $\alpha, \beta, \gamma = 0,1,2,3$; $j = 1,2,\ldots,n$.

Нехай

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}{}^j(u)\partial_{u_j}, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3,\ j = 1,2,\ldots,n. \tag{7}$$

Підстановка операторів (6) в комутаційні співвідношення (3) показує, що оператори $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лоренца (3), де $J_{\alpha\beta} \to \mathcal{J}_{\alpha\beta}$.

Отже, для опису реалізацій алгебри Пуанкаре $p(1,3)$ в класі операторів (5) та (6) необхідно знайти реалізації алгебри Лоренца $so(1,3)$ в класі операторів (7).

Для побудови таких реалізацій використаємо той факт, що алгебра $so(1,3)$ розкладається в пряму суму двох алгебр Лі $so(3)$ групи поворотів.

Нехай

$$\begin{aligned} A_1 &= \tfrac{1}{2}(J_{23} + iJ_{01}), & B_1 &= \tfrac{1}{2}(J_{23} - iJ_{01}), \\ A_2 &= \tfrac{1}{2}(J_{31} + iJ_{02}), & B_2 &= \tfrac{1}{2}(J_{31} - iJ_{02}), \\ A_3 &= \tfrac{1}{2}(J_{12} + iJ_{03}), & B_3 &= \tfrac{1}{2}(J_{12} - iJ_{03}). \end{aligned} \tag{8}$$

Оператори A_k, B_k, $(k = 1,2,3)$ складають базис алгебри $so(1,3)$ і, відповідно до (3), задовольняють такі комутаційні співвідношення

$$[A_a, A_b] = i\varepsilon_{abc}A_c, \quad [B_a, B_b] = i\varepsilon_{abc}B_c, \quad [A_a, B_b] = 0. \tag{9}$$

Тут ε_{abc} — антисиметричний тензор третього порядку з $\varepsilon_{123} = 1$, $a, b, c = 1, 2, 3$.

Оператори A_k (B_k) утворюють базис алгебри Лі групи поворотів $O(3)$, тому ми почнемо побудову реалізацій алгебри $so(1,3)$ з класифікації нееквівалентних реалізацій алгебри $so(3)$ в класі операторів вигляду (7).

Теорема. *Нехай диференціальні оператори A_a ($a = 1, 2, 3$) вигляду (7) задовольняють комутаційні співвідношення (9). Тоді існують заміни змінних (4), які зводять дані оператори до однієї з таких трійок операторів:*

$$A_a = 0, \quad a = 1, 2, 3; \tag{10}$$

$$A_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad A_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad A_3 = i\partial_{u_1}; \tag{11}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -\sin u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2} + \varepsilon \frac{\sin u_1}{\operatorname{sh} u_2} \partial_{u_3}, \\ A_2 &= -\cos u_1 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2} + \varepsilon \frac{\cos u_1}{\operatorname{sh} u_2} \partial_{u_3}, \\ A_3 &= i\partial_{u_1}, \qquad \varepsilon = 0, 1; \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin u_1 \partial_{u_1} + \cos u_1 \partial_{u_2}, \\ A_2 &= \cos u_1 \partial_{u_1} - \sin u_1 \partial_{u_2}, \\ A_3 &= i\partial_{u_1}; \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \sin u_1 \partial_{u_1} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_2} + u_2 \sin u_1 \partial_{u_3}, \\ A_2 &= \cos u_1 \partial_{u_1} - u_2 \sin u_1 \partial_{u_2} + u_2 \cos u_1 \partial_{u_3}, \\ A_3 &= i\partial_{u_1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Доведення теореми внаслідок його громіздкості ми тут не наводимо.

Тепер, використовуючи результат теореми, проведемо класифікацію нееквівалентних реалізацій алгебри Лоренца $so(1,3)$.

З теореми випливає, що алгебра $so(3)$ має п'ять нееквівалентних реалізацій в класі векторних полів Лі (7), які визначаються формулами (11)–(14).

Для повного опису нееквівалентних реалізацій алгебри $so(1,3)$ в класі векторних полів Лі вигляду (7) потрібно отримати всі трійки лінійно-незалежних операторів B_1, B_2, B_3, які разом з операторами A_1, A_2, A_3 (11)–(14) задовольняють комутаційні співвідношення (9).

Аналіз комутаційних співвідношень (9) показує, що оператори B_b $(b = 1, 2, 3)$ мають такий вигляд:

1. $B_b = \sum_{j=2}^{n} \xi_{bj}(u_2, \ldots, u_n)\partial_{u_j}$ для трійки операторів A_a (11);

2. $B_b = \sum_{j=3}^{n} \xi_{bj}(u_3, \ldots, u_n)\partial_{u_j}$ для трійки операторів A_a (12);

3. $B_b = \sum_{j=2}^{n} \xi_{bj}(u_3, \ldots, u_n)\partial_{u_j}$ для трійки операторів A_a (13);

4. $B_b = \sum_{k=1}^{3} f_{bk}(u_4, \ldots, u_n)\mathcal{Q}_k + \sum_{j=4}^{n} \xi_{bj}(u_4, \ldots, u_n)\partial_{u_j}$

для решти операторів A_a.

У наведених вище формулах f_{bk}, ξ_{bj} — довільні гладкі функції, а оператори $\mathcal{Q}_k$ збігаються з однією з таких трійок операторів:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= \frac{\sin u_3}{\operatorname{sh} u_2}\partial u_1 + \cos u_3 \partial_{u_2} - \sin u_3 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_3}, \\
\mathcal{Q}_2 &= \frac{\cos u_3}{\operatorname{sh} u_2}\partial u_1 - \sin u_3 \partial_{u_2} - \cos u_3 \operatorname{cth} u_2 \partial_{u_3}, \\
\mathcal{Q}_3 &= i\partial_{u_3},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

якщо A_a мають вигляд (12), де $\varepsilon = 1$, та

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1 &= 2u_2\partial_{u_1} - 2u_2u_3\partial_{u_2} + (u_2^2 - u_3^2 + \frac{1}{4})\partial_{u_3}, \\
\mathcal{Q}_2 &= u_2\partial_{u_2} + u_3\partial_{u_3}, \\
\mathcal{Q}_3 &= i\left(2u_2\partial_{u_1} - 2u_2u_3\partial_{u_2} + (u_2^2 - u_3^2 - \frac{1}{4})\partial_{u_3}\right),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

якщо A_a мають вигляд (14).

Перша трійка операторів B_b діє у просторі змінних $u_2, u_3, \ldots, u_q$. Отже згідно теореми оператори B_b отримуються з формул (11)–(14) шляхом формальної заміни u_j на u_{j+1} $(j = 1, 2, 3)$.

Аналогічно ми можемо застосувати теорему до другої трійки операторів B_b, третьої трійки, де $\xi_{b2} \equiv 0$, та четвертої трійки, де $f_{bk} \equiv 0$. Відповідні оператори B_b отримаємо шляхом заміни u_j на u_{j+2} для другої та третьої трійок, та u_j на u_{j+3} для четвертої трійки.

Неважко переконатися, що отримані набори операторів A_a, B_b $(a, b = 1, 2, 3)$ утворюють базиси реалізацій алгебри $so(1,3)$. Такі реалізації будемо називати реалізаціями алгебри $so(1,3)$ першого класу.

Далі для скорочення записів ми використовуємо такі позначення

$$\Phi(j,\varepsilon) = -\sin u_j \operatorname{cth} u_{j+1}\partial_{u_j} + \cos u_j \partial_{u_{j+1}} + \varepsilon \frac{\sin u_j}{\operatorname{sh} u_{j+1}}\partial_{u_{j+2}},$$

$$\tilde{\Phi}(j,\epsilon) = -\cos u_j \operatorname{cth} u_{j+1}\partial_{u_j} - \sin u_j \partial_{u_{j+1}} + \varepsilon \frac{\cos u_j}{\operatorname{sh} u_{j+1}}\partial_{u_{j+2}},$$

$$\Psi(j) = \sin u_j \partial_{u_j} + \cos u_j \partial_{u_{j+1}},$$

$$\tilde{\Psi}(j) = \cos u_j \partial_{u_j} - \sin u_j \partial_{u_{j+1}},$$

$$\Omega(j) = \sin u_j \partial_{u_j} + u_{j+1}\cos u_j \partial_{u_{j+1}} + u_{j+1}\sin u_j \partial_{u_{j+2}},$$

$$\tilde{\Omega}(j) = \cos u_j \partial_{u_j} - u_{j+1}\sin u_j \partial_{u_{j+1}} + u_{j+1}\cos u_j \partial_{u_{j+2}}.$$

У таблиці 1 наведено повний список нееквівалентних реалізацій алгебри $so(1,3)$ першого класу.

Таблиця 1

A_1, A_2, A_3	B_1, B_2, B_3
$\sin u_1 \partial_{u_1},\ \cos u_1 \partial_{u_1},\ i\partial_{u_1}$	$\sin u_2 \partial_{u_2},\ \cos u_2 \partial_{u_2},\ i\partial_{u_2}$
$\sin u_1 \partial_{u_1},\ \cos u_1 \partial_{u_1},\ i\partial_{u_1}$	$\Phi(2,\varepsilon),\ \tilde{\Phi}(2,\varepsilon),\ i\partial_{u_2}$
$\sin u_1 \partial_{u_1},\ \cos u_1 \partial_{u_1},\ i\partial_{u_1}$	$\Psi(2),\ \tilde{\Psi}(2),\ i\partial_{u_2}$
$\sin u_1 \partial_{u_1},\ \cos u_1 \partial_{u_1},\ i\partial_{u_1}$	$\Omega(2),\ \tilde{\Omega}(2),\ i\partial_{u_2}$
$\Phi(1,\varepsilon),\ \tilde{\Phi}(1,\varepsilon),\ i\partial_{u_1}$	$\Phi(3+\varepsilon,\varepsilon_1),\ \tilde{\Phi}(3+\varepsilon,\varepsilon_1),\ i\partial_{u_{3+\varepsilon}}$
$\Phi(1,\varepsilon),\ \tilde{\Phi}(1,\varepsilon),\ i\partial_{u_1}$	$\Psi(3+\varepsilon),\ \tilde{\Psi}(3+\varepsilon),\ i\partial_{u_{3+\varepsilon}}$
$\Phi(1,\varepsilon),\ \tilde{\Phi}(1,\varepsilon),\ i\partial_{u_1}$	$\Omega(3+\varepsilon),\ \tilde{\Omega}(3+\varepsilon),\ i\partial_{u_{3+\varepsilon}}$
$\Psi(1),\ \tilde{\Psi}(1),\ i\partial_{u_1}$	$\Psi(3),\ \tilde{\Psi}(3),\ i\partial_{u_3}$
$\Psi(1),\ \tilde{\Psi}(1),\ i\partial_{u_1}$	$\Omega(3),\ \tilde{\Omega}(3),\ i\partial_{u_3}$
$\Omega(1),\ \tilde{\Omega}(1),\ i\partial_{u_1}$	$\Omega(4),\ \tilde{\Omega}(4),\ i\partial_{u_4}$

Тут ε, ε_1 незалежно набувають значень 0 та 1.

Аналіз інших трійок операторів B_k приводить до реалізацій алгебри $so(1,3)$ другого класу, тобто до операторів, які не можуть бути отримані із формул (11)–(14) шляхом заміни змінних.

Розглянемо тепер випадок 3, де не всі ξ_{b2} є нулі. Позначимо через $\mathcal{T}_a$ оператори

$$\mathcal{T}_a = \xi_{aj}(u_3, \ldots, u_n)\partial_{u_j}, \qquad a = 1, 2, 3, \quad j = 3, 4, \ldots, n.$$

Тоді оператори B_a, що відповідають цьому випадку, можна записати у такому вигляді

$$B_a = b_a(u_3, \ldots, u_n)\partial_{u_2} + \mathcal{T}_a.$$

Перевірка комутаційних співвідношень (9) показує, що оператори $\mathcal{T}_a$ задовольняють комутаційні співвідношення алгебри Лі групи поворотів $O(3)$. Крім того, обов'язково не всі $\mathcal{T}_a \equiv 0$. (Якщо всі $\mathcal{T}_a \equiv 0$, то $[B_k, B_j] = 0$.) Отже оператори $\mathcal{T}_a$ збігаються з однією з таких трійок операторів

$$\begin{aligned}
&1. \quad \mathcal{T}_1 = \sin u_3\partial_{u_3}, \quad \mathcal{T}_2 = \cos u_3\partial_{u_3}, \quad \mathcal{T}_3 = i\partial_{u_3};\\
&2. \quad \mathcal{T}_1 = \Phi(3, \varepsilon), \quad \mathcal{T}_2 = \tilde{\Phi}(3, \varepsilon), \quad \mathcal{T}_3 = i\partial_{u_3};\\
&3. \quad \mathcal{T}_1 = \Psi(3), \quad \mathcal{T}_2 = \tilde{\Psi}(3), \quad \mathcal{T}_3 = i\partial_{u_3};\\
&4. \quad \mathcal{T}_1 = \Omega(3), \quad \mathcal{T}_2 = \tilde{\Omega}(3), \quad \mathcal{T}_3 = i\partial_{u_3},
\end{aligned} \tag{17}$$

де $\varepsilon = 0$ або $\varepsilon = 1$.

Оскільки $\mathcal{T}_3 = i\partial_{u_3}$, то заміна змінної u_2 дозволяє звести оператор B_3 до $B_3 = i\partial_{u_3}$. Якщо оператори $\mathcal{T}_a$ збігаються з першою трійкою операторів (17) то із комутаційних співвідношень (9) випливає, що

$$\begin{aligned}
&B_1 = \alpha\cos u_3\partial_{u_2} + \sin u_3\partial_{u_3},\\
&B_2 = -\alpha\sin u_3\partial_{u_2} + \cos u_3\partial_{u_3},\\
&B_3 = i\partial_{u_3},
\end{aligned}$$

де з точністю до перетворень (4) $\alpha = u_4$ або $\alpha = \mathrm{const}$, $\alpha \neq 0$. (Якщо $\alpha = 0$ то ми приходимо до реалізацій першого класу.)

Аналогічно ми отримуємо реалізації, які відповідають іншим трійкам операторів $\mathcal{T}_a$ (17). У таблиці 2 наведено трійки операторів B_1, B_2, B_3, які разом з операторами $A_1 = \Psi(1)$, $A_2 = \tilde{\Psi}(1)$, $A_3 = i\partial_{u_1}$ утворюють нееквівалентні реалізації другого класу.

Таблиця 2

B_1	B_2	B_3
$\alpha\cos u_3\partial_{u_2}+\sin u_3\partial_{u_3}$	$-\alpha\sin u_3\partial_{u_2}+\cos u_3\partial_{u_3}$	$i\partial_{u_3}$
$\beta\dfrac{\sin u_3}{\operatorname{sh} u_4}\partial_{u_2}+\Phi(3,\varepsilon)$	$\beta\dfrac{\cos u_3}{\operatorname{sh} u_4}\partial_{u_2}+\tilde\Phi(3,\varepsilon)$	$i\partial_{u_3}$
$\beta \mathrm{e}^{u_4}\sin u_3\partial_{u_2}+\Psi(3)$	$\beta \mathrm{e}^{u_4}\cos u_3\partial_{u_2}+\tilde\Psi(3)$	$i\partial_{u_3}$
$\beta u_4\cos u_3\partial_{u_2}+\Omega(3)$	$\beta u_4\cos u_3\partial_{u_2}+\tilde\Omega(3)$	$i\partial_{u_3}$

Тут $\alpha=\mathrm{const}$, $\alpha\neq 0$ або $\alpha=u_4$ та $\beta=\mathrm{const}$, $\beta\neq 0$ або $\beta=u_5$.

Аналіз четвертого випадку проводиться аналогічно. Використовуючи позначення

$$\mathcal{R}_a=\xi_{aj}(u_4,\ldots,u_n)\partial_{u_j},\qquad a=1,2,3,\quad j=4,\ldots,n,$$

оператори B_1, B_2, B_3 можна подати у вигляді

$$B_a=f_a\mathcal{Q}_1+g_a\mathcal{Q}_2+h_a\mathcal{Q}_3+\mathcal{R}_a. \tag{18}$$

Тут f_a, g_a, h_a — довільні гладкі функції змінних $u_4,\ldots,u_n$. Перевірка комутаційних співвідношень (9) показує, що оператори $\mathcal{R}_a$ задовольняють співвідношення $[\mathcal{R}_a,\mathcal{R}_b]=i\varepsilon_{abc}\mathcal{R}_c$. Отже, з теореми випливає, що оператори $\mathcal{R}_a$ можна отримати з формул (10)–(14) в результаті заміни змінних u_j на u_{j+3} $(j=1,2,3)$.

Для подальшого спрощення вигляду операторів B_a разом із перетвореннями (4) ми будемо використовувати перетворення

$$X\to\tilde X=\mathcal{V}X\mathcal{V}^{-1},\qquad \mathcal{V}=\exp\{y_1\mathcal{Q}_1+y_2\mathcal{Q}_2+y_3\mathcal{Q}_3\}, \tag{19}$$

де y_1, y_2, y_3 — довільні функції змінних $u_4,\ldots,u_n$. Оскільки для відповідних операторів A_j вигляду (12), (14) та $\mathcal{Q}_k$ вигляду (15), (16) комутатори $[A_j,\mathcal{Q}_k]=0$, то перетворення (19) не змінюють вигляд операторів A_j $(j,k=1,2,3)$.

Якщо всі оператори $\mathcal{R}_a\equiv 0$, то, використовуючи перетворення (19), ми можемо звести оператор B_3 вигляду (18) до

$$B_3=r(u_4,\ldots,u_n)\mathcal{Q}_3.$$

Із комутаційних співвідношень (9) випливає, що $r=\pm 1$. Далі, за допомогою перетворень (19) зводимо оператори B_b до $B_b=\mathcal{Q}_b$ $(b=1,2,3)$.

Аналогічно розглядаємо випадки, коли оператори $\mathcal{R}_k$ отримуються з формул (11)–(14).

Всі нееквівалентні реалізації алгебри $so(1,3)$ другого класу, які відповідають операторам A_j (12) та (14), наведено в таблиці 3. Трійці операторів A_j (12) відповідають оператори $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ вигляду (15), а трійці операторів A_j (14) відповідають оператори $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ вигляду (16). Параметр γ набуває двох значень $\gamma = \mathrm{const}$, $\gamma \neq 0$ або $\gamma = u_6$.

Таблиця 3

B_1	B_2	B_3
$\mathcal{Q}_1$	$\mathcal{Q}_2$	$\mathcal{Q}_3$
$\gamma \dfrac{\sin u_4}{\operatorname{sh} u_5} \mathcal{Q}_3 + \Phi(4,0)$	$\gamma \dfrac{\cos u_4}{\operatorname{sh} u_5} \mathcal{Q}_3 + \tilde{\Phi}(4,0)$	$i\partial_{u_4}$
$\gamma \mathrm{e}^{u_5} \sin u_4 \mathcal{Q}_3 + \Psi(4)$	$\gamma \mathrm{e}^{u_5} \cos u_4 \mathcal{Q}_3 + \tilde{\Psi}(4)$	$i\partial_{u_4}$

Використаємо тепер отримані вище результати для опису реалізацій алгебри Пуанкаре $p(1,3)$ в класі векторних полів Лі. Обмежимося розглядом випадку, коли всі функції $\zeta^{\gamma}_{\alpha\beta}$ в операторах (6) дорівнюють нулю.

Тоді для того, щоб описати реалізації алгебри $p(1,3)$, потрібно в оператори (6) підставити знайдені значення операторів (7) з урахуванням формул (8).

Для повного опису реалізацій алгебри Пуанкаре $p(1,3)$ отриманий список наборів операторів A_j, B_k $(j,k = 1,2,3)$ слід доповнити такими:

1. $A_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad A_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad A_3 = i\partial_{u_1}, \quad B_k = 0,$
2. $A_1 = \Phi(1,\varepsilon), \quad A_2 = \tilde{\Phi}(1,\varepsilon), \quad A_3 = i\partial_{u_1}, \quad B_k = 0,$
3. $A_1 = \Psi(1), \quad A_2 = \tilde{\Psi}(1), \quad A_3 = i\partial_{u_1}, \quad B_k = 0,$
4. $A_1 = \Omega(1), \quad A_2 = \tilde{\Omega}(1), \quad A_3 = i\partial_{u_1}, \quad B_k = 0,$
5. $A_j = 0, \quad B_1 = \sin u_1 \partial_{u_1}, \quad B_2 = \cos u_1 \partial_{u_1}, \quad B_3 = i\partial_{u_1},$
6. $A_j = 0, \quad B_1 = \Phi(1,\varepsilon), \quad B_2 = \tilde{\Phi}(1,\varepsilon), \quad B_3 = i\partial_{u_1},$
7. $A_j = 0, \quad B_1 = \Psi(1), \quad B_2 = \tilde{\Psi}(1), \quad B_3 = i\partial_{u_1},$
8. $A_j = 0, \quad B_1 = \Omega(1), \quad B_2 = \tilde{\Omega}(1), \quad B_3 = i\partial_{u_1},$
9. $A_j = 0, \quad B_k = 0.$

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

[2] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

[3] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1990. — 400 с.

[4] Rideau G., Wintemitz P. Nonlinear equations invariant under the Poincaré, similitude and conformal groups in two-dimensional space-time // J. Math. Phys. — 1990. — **31**, № 9. — P. 1095–1105.

[5] Фущич В.І., Лагно В.І. Про нові нелінійні рівняння, інваріантні відносно групи Пуанкаре в двовимірному просторі-часі // Доповіді НАН України. — 1996. — № 11. — С. 60–65.

[6] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. Second-order differential invariants of the rotation group $O(n)$ and of its extention $E(n)$, $P(l,n)$ // Acta Appl. Math. — 1992. — **28**, № 1. — P. 69–92.

[7] Yehorchenko I.A. Nonlinear representation of the Poincaré algebra and invariant equations // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. — Kyiv: Institute of Math., 1992. — P. 62–66.

[8] Fushchych W., Tsyfra I., Boyko V. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields // J. Nonlin. Math. Phys. — 1994. — **1**, № 2. — P. 210–221.

[9] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Lahno V.I. On linear and nonlinear representations of the generalized Poincaré groups in the class of Lie vector fields // J. Nonlin. Math. Phys. — 1994. — **1**, № 3. — P. 295–308.

[10] Лагно В.І. Про нові зображення груп Пуанкаре і Евкліда // Доповіді НАН України. —1996. — № 8. — С. 14–19.

[11] Zhdanov R.Z., Lahno V.I., Fushchych W.I. On covariant realizations of Euclid group // Commun. Math. Phys. — 2000. — **212**. — P. 535–556.

[12] Lutfullin M. Realizations of the Euclidean algebra within the class of complex Lie vector fields // Proceeding of Institute of Mathematics of he NAS of Ukraine. — **30**, Part 1. — 2000. — P. 151–156.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 187–196

УДК 517.956

Асимптотична поведінка власних значень та власних функцій задачі Фур'є в густому з'єднанні типу 3:2:1

Т.А. МЕЛЬНИК

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
E-mail: melnyk@imath.kiev.ua

Доведено теореми про збіжність та асимптотичні оцінки (при $\varepsilon \to 0$) для власних значень та власних функцій крайової задачі Фур'є в густому з'єднанні, яке складається з деякої області та великої кількості N^2, $N = O\left(\varepsilon^{-1}\right)$, тонких циліндрів.

Convergence theorems and asymptotic estimates (as $\varepsilon \to 0$) are proved for eigenvalues and eigenfunctions of the Fourier problem in a thick junction, which consists of some domain and a large number N^2, $N = O(\varepsilon^{-1})$, of thin cylinders.

1. Вступ та постановка задачі. Під густим періодичним з'єднанням Ω_ε типу $m : k : d$ ми розуміємо область в $\mathbb{R}^n$, отриману приєднанням вздовж деякого многовиду (зона з'єднання) на границі області Ω_0 (тіло з'єднання) великої кількості ε-періодично розміщених тонких областей. Тип з'єднання $m : k : d$ вказує: m $(m \le n)$ — на граничну розмірність тіла з'єднання, k — на граничну розмірність зони з'єднання, а d — на граничну розмірність приєднувальних тонких областей.

Предметом дослідження крайових задач в таких з'єднаннях є вивчення асимптотичної поведінки розв'язків цих задач, коли $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких приєднувальних областей необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Огляд результатів по цій тематиці містять роботи [1, 2, 3]. Тут тільки зауважимо, що характерною особливістю таких областей є їх специфічна зв'язність: в таких областях існують точки, відстань між якими є порядку $O(\varepsilon)$, а довжина всіх кривих, які з'єднують ці точки і належать області, має порядок $O(1)$. За рахунок цього зявляються нові якісні особливості в асимптотичній поведінці розв'язків. Так, наприклад, еліптичні крайові задачі в густих з'єднаннях втрачають еліптичність, коли $\varepsilon \to 0$ [1]; спектральні задачі гублять компактність в граничному переході [2, 3].

Виявляється, що асимптотична поведінка спектру суттєво залежить від типу крайових умов на границях тонких приєднувальних областей. В роботах [4, 5, 6] ця залежність була вивчена відповідно для задач Неймана, Діріхлє та Стєклова в з'єднанні типу 2:1:1, а в [2] для задачі Неймана в з'єднання типу 3:2:1. В даній роботі розглядається змішана крайова спектральна задача в з'єднанні типу 3:2:1 з крайовими умовами Фур'є на границях тонких циліндрів.

Модельне з'єднання Ω_ε типу 3:2:1 є об'єднанням області

$$\Omega_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \, x' \in K, \quad 0 < x_3 < \gamma(x') \right\}$$

та великої кількості N тонких циліндрів $G_\varepsilon = \cup_{i,j=0}^{N-1} G_\varepsilon(i,j)$,

$$G_\varepsilon(i,j) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \, (\varepsilon^{-1}x_1 - i, \, \varepsilon^{-1}x_2 - j) \in \omega, \quad -l < x_3 < 0 \},$$

тобто Ω_ε — це внутрішність об'єднання $\overline{\Omega_0} \cup \overline{G_\varepsilon}$. Тут $x' = (x_1, x_2)$; $K = (0,a)^2$; $\gamma \in C^1(\overline{K})$ і $\gamma > 0$ на $\overline{K}$, N — велике натуральне число, тому величина $\varepsilon = a/N$ є малим дискретним параметром, який характеризує відстань між тонкими циліндрами та їх товщину; плоска область ω, границя якої є гладкою, разом із своїм замиканням належить кругу $\left\{ x' \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 < \rho_0^2 < 1/4 \right\}$ і є симетричною відносно прямих $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1/2$.

Розглянемо наступну спектральну задачу

$$\begin{aligned}
&-\Delta_x u(\varepsilon, x) = \lambda(\varepsilon) u(\varepsilon, x), && x \in \Omega_\varepsilon, \\
&\partial_\nu u(\varepsilon, x) = -\varepsilon k_0 u(\varepsilon, x), && x \in \Gamma_\varepsilon, \\
&\partial_\nu u(\varepsilon, x) = 0, && x \in \partial\Omega_\varepsilon \setminus (\Gamma_\varepsilon \cup Q_\varepsilon), \\
&u(\varepsilon, x) = 0, && x \in Q_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \cap \{x_3 = -1\},
\end{aligned} \tag{1}$$

де $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ — зовнішня нормальна похідна; Γ_ε бічні поверхні тонких циліндрів, де задаються умови Фур'є (коефіцієнт $k_0 > 0$).

Для кожного фіксованого значення $\varepsilon > 0$ існує злічена кількість власних значень (ВЗ) задачі (1):

$$0 < \lambda_1(\varepsilon) \le \cdots \le \lambda_n(\varepsilon) \le \cdots \to \infty, \qquad n \to \infty; \tag{2}$$

відповідні власні функції (ВФ) $\{u_n(\varepsilon, \cdot) : n \in \mathbb{N}\}$, які належать простору Соболєва $H^1(\Omega_\varepsilon)$, виберемо ортонормованими в $L_2(\Omega_\varepsilon)$.

Мета досліджень — вивчити асимптотичну поведінку ВЗ та ВФ задачі (1) при $\varepsilon \to 0$, та знайти інші граничні точки спектру.

2. Усереднена задача та її спектр. Для побудови асимптотики використаємо підхід розроблений в [4]. Будемо шукати перші члени асимптотики для ВФ $u_n(\varepsilon,\cdot)$ у вигляді (далі індекс n не пишемо)

$$u(\varepsilon,x)\approx v_0^+(x)+\varepsilon v_1^+(x)+\cdots,\quad \text{в області } \Omega_0, \tag{3}$$

а в тонкому циліндрі $G_\varepsilon(i,j)$ $(i,j=0,\ldots,N-1)$

$$u(\varepsilon,x)\approx v_0^-(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k v_k^-\left(x,\eta_1^{(i)},\eta_2^{(j)}\right), \tag{4}$$

де $\eta_1^{(i)}=\varepsilon^{-1}x_1-i$, $\eta_2^{(j)}=\varepsilon^{-1}x_2-j$. Асимптотику для ВЗ $\lambda_n(\varepsilon)$ шукаємо у вигляді: $\lambda(\varepsilon)\approx\mu+\cdots$.

Підставляючи μ і (3) в задачу (1) замість $\lambda_n(\varepsilon)$ та $u_n(\varepsilon,\cdot)$ відповідно, виписуємо співвідношення, яким мають задовільняти функція v_0^+ та число μ

$$\begin{aligned} &-\Delta_x\, v_0^+(x)=\mu\, v_0^+(x), && x\in\Omega_0,\\ &\partial_\nu\, v_0^+(x)=0, && x\in\partial\Omega_0\setminus K. \end{aligned} \tag{5}$$

В тонкому циліндрі $G_\varepsilon(i,j)$ розкладемо формально функції v_k^- у ряди Тейлора за змінними x_1 та x_2 в околі точки $\left(x_1^{(i)},x_2^{(j)}\right)=\left(\varepsilon\left(i+\frac{1}{2}\right),\varepsilon\left(j+\frac{1}{2}\right)\right)$. Після чого, (4) перепишеться у вигляді

$$u(\varepsilon,x)\approx v_0^-(i,j,x_3)+\sum_{k=1}^{2}\varepsilon^k V_k^{i,j}\left(x_3,\eta_1^{(i)},\eta_2^{(j)}\right)+O\left(\varepsilon^3\right), \tag{6}$$

де

$$V_k^{i,j}=\sum_{m=0}^{k}\frac{\left(\left(\eta_1^{(i)}-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\left(\eta_2^{(j)}-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^m}{m!}\times$$
$$\times\, v_{k-m}^-(i,j,x_3,\eta_1^{(i)},\eta_2^{(j)}),$$

$v_k^-(i,j,\ldots)=v_k^-\left(x_1^{(i)},x_2^{(j)},\ldots\right)$.

Підставляючи (6) та μ у відповідні рівняння задачі (1) та збираючи коефіцієнти при однакових степенях ε і прирівнюючи їх до нуля, отримаємо задачі $(p=1,2)$

$$-\Delta_{\eta'}V_p^{i,j}(x_3,\eta')=\partial_{x_3}^2V_{p-2}^{i,j}(i,j,x_3)+\mu V_{p-2}^{i,j}(i,j,x_3),\quad \eta'\in\omega,$$

$$\partial_{\nu_{\eta'}}V_2^{i,j}(x_3,t,\eta')=-k_0V_{p-2}^{i,j}(i,j,x_3),\quad \eta'\in\partial\omega.$$

де $\eta' = \left(\eta_1^{(i)}, \eta_2^{(j)}\right)$; $V_0^{i,j} = v_0^-(i,j,x_3)$, $V_{-1}^{i,j} = 0$; змінна $x_3 \in (-l,0)$ розглядається як параметр. З цих задач випливає, що при $p = 1$ функція $V_1^{i,j}$ не залежить від η'. Обмежуючись побудовою перших членів асимптотичних розвинень, покладемо $V_1^{i,j} = 0$. Тоді з означення $V_1^{i,j}$, маємо

$$v_1^-(i,j,x_3,\eta') = -\partial_{x_1} v_0^-(i,j,x_3)\left(\eta_1^{(i)} - \frac{1}{2}\right) - \\ - \partial_{x_2} v_0^-(i,j,x_3)\left(\eta_2^{(j)} - \frac{1}{2}\right).$$

Записуючи умову існування розв'язку задачі при $p = 2$, дістанемо співвідношення

$$|\omega|\ \partial_{x_3}^2 v_0^-(i,j,x_3) + (\mu|\omega| - l_\omega k_0)\, v_0^-(i,j,x_3) = 0, \quad x_3 \in (-1,0),$$

де l_ω — довжина границі плоскої області ω, а $|\omega|$ — її площа. Оскільки точки $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$, $i,j = 0,1,\ldots,N-1$, утворюють ε-сітку в K, то це рівняння при $\varepsilon \to 0$ матиме місце для всіх точок $x' \in K$, тобто

$$\begin{aligned} &|\omega|\partial_{x_3x_3}^2 v_0^-(x) + (\mu|\omega| - l_\omega k_0)\, v_0^-(x) = 0, \quad x \in D, \\ &v_0^-(x_1,x_2,-1) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

де $D = K \times (-1,0)$ — паралелепіпед, який заповнюється тонкими циліндрами в граничному переході. Друге співвідношення для v_0^- зявилось внаслідок умов Діріхлє на основах Q_ε тонких циліндрів. Слід зауважити, що на вертикальних сторонах цього паралелепіпеда не задається жодних крайових умов.

Таким чином, знайдені співвідношення, яким мають задовольняти перші члени зовнішніх асимптотичних розвинень (3), (6). Залишилось забезпечити неперервність цих асимптотичних наближень та їх градієнтів в зоні з'єднання циліндрів та тіла. Це робиться з допомогою процедури узгодження асимптотичних розвинень (3), (6) з внутрішнім асимптотичним розвиненням, яке шукаємо у вигляді:

$$u(\varepsilon,x) \approx v_0^+(x',0) + \varepsilon \sum_{i=1}^{3} Z_i(\eta)\partial_{x_i} v_0^+(x',0) + \cdots, \quad \eta = \varepsilon^{-1}x. \tag{8}$$

В (8) $\{Z_i\}$ — це функції типу примежового шару, які задано в об'єднанні нескінченних напівциліндрів $\Pi = \Pi^+ \cup \Pi^-$, $\Pi^+ = (0,1)\times(0,1)\times$

$(0,+\infty)$, $\Pi^- = \omega\times(-\infty,0]$. Зрозуміло, що в силу періодичності розміщення тонких циліндрів функції $\{Z_i\}$ мають бути 1-періодичними по змінних η_1 та η_2. Інші співвідношення для цих функцій отримуються під час підстановки (8) в задачу (1). В результаті маємо

$$\begin{aligned} &\Delta_\eta\ Z_i(\eta) = 0, && \eta\in\Pi^\pm,\\ &\partial_{\eta_3} Z_i(\eta',0) = 0, && (\eta',0)\in\partial\Pi^+\setminus\omega,\\ &\partial_{\nu_{\eta'}}\ Z_i(\eta) = -\delta_{1,i}\nu_1(\eta') - \delta_{2,i}\nu_2(\eta'), && \eta\in\partial\Pi^-\setminus\omega, \end{aligned}$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Існування таких функцій примежевого шару та їх властивості були вивчені в роботі [2]. З результатів цієї роботи випливає, що функції Z_i мають таку асимптотику:

$$Z_i(\eta) = \begin{cases} O(\exp(-\delta_i\eta_3)), & \eta_3\to+\infty,\\ -\eta_i + \frac{1}{2} + O(\exp(\delta_i\eta_3)), & \eta_3\to-\infty, \end{cases} \qquad i=1,2;$$

$$Z_3(\eta) = \begin{cases} C_3 + \eta_3 + O(\exp(-\delta_3\eta_3)), & \eta_3\to+\infty,\\ \frac{1}{|\omega|}\eta_3 + O(\exp(\delta_3\eta_3)), & \eta_3\to-\infty, \end{cases}$$

де δ_i, $i=1,2,3$, — деякі додатні константи. Крім того, ці функції володіють певною симетрією відносно осі $(1/2,1/2,0)$: Z_1 є непарною по η_1 і парною по η_2, Z_2 є парною по η_1 і непарною по η_2, а Z_3 є парною як по η_1, так і по η_2.

Узгоджуючи асимптотику зовнішніх асимптотичних розвинень (3), (6) та внутрішнього асимптотичного розвинення (8), а саме асимптотика перших членів зовнішніх розвинень при $x_3\to\pm0$ має співпадати з асимптотикою перших членів внутрішнього розвинення при $\eta_3\to\pm\infty$, отримаємо

$$v_0^+(x',0) = v_0^-(x',0), \quad \partial_{x_3}v_0^+(x',0) = |\omega|\partial_{x_3}v_0^-(x',0),\ x'\in K. \tag{9}$$

Таким чином, перші члени $v_0^\pm$ асимптотичних розвинень (3), (6) та число μ мають задовольняти співвідношенням (5), (7) та (9), які формують усереднену спектральну задачу для задачі (1).

Легко переконатись, що спектральний параметр μ в усередненій задачі є додатнім. Розв'язуючи звичайне диференціальне рівняння (7) з врахуванням крайової умови, знаходимо

$$v_0^-(x) = B(x')\sin\sqrt{\mu - \frac{l_\omega k_0}{|\omega|}}\ (x_3+1).$$

Підставляючи цей вираз в умови спряження (9), отримаємо спектральну задачу

$$
\begin{aligned}
&-\Delta\ v_0^+(x) = \mu\ v_0^+(x), && x \in \Omega_0,\\
&\partial_\nu\ v_0^+(x) = 0, && x \in \partial\Omega_0 \setminus K,\\
&\partial_3 v_0^+(x',0) = f(\mu)\ v_0^+(x',0), && x' \in K,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

де $f(\mu) = |\omega|\sqrt{\mu - |\omega|^{-1} l_\omega k_0}\cot\sqrt{\mu - |\omega|^{-1} l_\omega k_0}$. Причому спектральний параметр μ входить як в рівняння задачі (10), так і нелінійно в крайову умову на K.

Так само, як в роботі [2] зводимо задачу (10) до спектральної задачі $L(\mu)\,(v) = 0$, $v \in H^1(\Omega_0)$, для оператор-функції

$$
L(\mu) = (\mu + 1)\ A_1 - f(\mu)\ A_2 - \mathbf{I},
\tag{11}
$$

де $\mathbf{I}$ — одиничний оператор в $H^1(\Omega_0)$; A_1, A_2 — самоспряжені, невід'ємні та компактні оператори в $H^1(\Omega_0)$, які задаються рівностями

$$
(A_1\varphi,\psi)_{H^1(\Omega_0)} = \int_{\Omega_0} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx, \quad \forall\ \varphi,\psi \in H^1(\Omega_0);
$$

$$
(A_2\varphi,\psi)_{H^1(\Omega_0)} = \int_{K} \varphi(x',0)\overline{\psi(x',0)}\,dx', \quad \forall\ \varphi,\psi \in H^1(\Omega_0).
$$

Спектр таких оператор-функцій вивчено в роботі [4], з результатів якої випливає теорема.

Теорема 1. *Спектр оператор-функції (11) складається з скінченно-кратних додатніх власних значень* $\{\mu_n^{(m)} : n, m \in \mathbb{N}\}$ *та точок істотного спектру* $\{P_m = \pi^2(m-1)^2 + |\omega|^{-1} l_\omega k_0,\ m \in \mathbb{N}\}$, *які розбивають власні значення на серії*

$$
0 < \mu_1^{(1)} \le \cdots \le \mu_n^{(1)} \le \cdots \to\ P_1 \quad \textit{при} \quad n \to \infty,
\tag{12}
$$

$$
P_{m-1} < \mu_1^{(m)} \le \cdots \le \mu_n^{(m)} \le \cdots \to\ P_m, \quad n \to \infty, \quad m \ge 2.
\tag{13}
$$

3. Асимптотичні оцінки. Нехай $\mu_n^{(m)}$ — власне значення усередненої задачі (5), (7), (9), а $\left(v_n^{(m)}\right)^{\pm}$ — відповідна власна функція, причому

$$
\left(v_n^{(m)}\right)^{-}(x) = \frac{\left(v_n^{(m)}\right)^{+}(x',0)}{\sqrt{\mu_n^{(m)} - \frac{l_\omega k_0}{|\omega|}}} \sin\sqrt{\mu_n^{(m)} - \frac{l_\omega k_0}{|\omega|}}\ (x_3 + 1),
$$

а функція $\left(v_n^{(m)}\right)^+$ є відповідною власною функцією оператор-функції L. Далі індекси m, n опускаються. Аналогічно, як в роботі [2], будується апроксимуюча функція $R(\varepsilon, x)$

$$R(\varepsilon, x) = v^+(x) + \\ + \varepsilon\chi_0(x_3)\sum_{i=1}^{3}\left(Z_i(\eta) - \delta_{i,3}\eta_3\right)\partial_{x_i}v^+(x', 0), \quad x \in \Omega_0,$$

і

$$R(\varepsilon, x) = v^-(x) + \varepsilon\big(Y_1(\eta_1)\partial_{x_1}v^-(x) + Y_2(\eta_2)\partial_{x_2}v^-(x) + \\ + \chi_0(x_3)\sum_{i=1}^{3}(Z_i(\eta) - \delta_{i,1}Y_1(\eta_1) - \delta_{i,2}Y_2(\eta_2) - \\ -\delta_{i,3}|\omega|_2^{-1}\eta_3)\partial_{x_i}v^+(x', 0)\big), \qquad \eta = \varepsilon^{-1}x, \qquad x \in G_\varepsilon,$$

де χ_0 — гладка зрізаюча функція, яка рівна 1 в деякому околі точки $x_3 = 0$; $Y_i(\eta_i) = -\eta_i + 1/2 + [\eta_i]$ ($[x]$ — ціла частина x).

Легко перевірити, що $R(\varepsilon, \cdot) \in H_\varepsilon$, де H_ε — це гільбертовий простір функцій, які належать простору $H^1(\Omega_\varepsilon)$ і мають нульові сліди на Q_ε; скалярний добуток в цьому просторі задається виразом

$$\langle u, v\rangle_\varepsilon = \varepsilon k_0\int_{\Gamma_\varepsilon} uv\, d\sigma_{x'} + \int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u\cdot\nabla v\, dx,$$

а $\|\cdot\|_\varepsilon$ — норма, породжена цим добутком. Визначимо оператор $A_\varepsilon : H_\varepsilon \to H_\varepsilon$ рівністю

$$\langle A_\varepsilon u, v\rangle_\varepsilon = \int_{\Omega_\varepsilon} u(x)v(x)\, dx, \quad u, v \in H_\varepsilon.$$

Очевидно, що оператор A_ε — самоспряжений, додатній і компактний, а його власними значеннями є величини $\{\lambda_n^{-1}(\varepsilon) : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Інтегруванням частинами доводимо тотожність

$$\varepsilon\int_{\Gamma_\varepsilon}\psi(x)\, d\sigma_x = \varepsilon\int_{G_\varepsilon}(\nabla_{\eta'}W)\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right)\cdot\nabla_{x'}\psi(x)\, dx + \frac{l_\omega}{|\omega|}\int_{G_\varepsilon}\psi\, dx \tag{14}$$

для довільної функції $\psi \in H^1(G_\varepsilon)$. Тут $\eta' = x'/\varepsilon$, а функція $W(\eta')$ — це 1−періодично продовжений по η_1 та η_2 розв'язок задачі

$$\Delta_{\eta'}W = l_\omega|\omega|^{-1} \quad \text{в } \omega, \quad \partial_{\nu(\eta')}W = 1 \quad \text{на } \partial\omega, \quad \int_\omega W(\eta')\, d\eta' = 0.$$

Використовуючи цю рівність, доводимо, що при достатньо малих значеннях параметра ε норма $\|u\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(u^2 + |\nabla u|^2\right) dx$ та норма $\|\cdot\|_\varepsilon$ є еквівалентними в просторі H_ε.

Підставимо тепер функцію $R_n^{(m)}(\varepsilon, \cdot)$ та число $\mu_n^{(m)}$ в задачу (1) замість $u(\varepsilon, \cdot)$ та $\lambda(\varepsilon)$. Домножаючи отриману рівність в області Ω_ε на довільну функцію $\psi \in H_\varepsilon$ і інтегруючи частинами, приходимо до співвідношення

$$\langle R_n^m(\varepsilon, \cdot), \psi\rangle_\varepsilon - \mu_n^{(m)} \int_{\Omega_\varepsilon} R_n^m(\varepsilon, x)\psi(x)\, dx = F_\varepsilon(\psi), \tag{15}$$

де $|F_\varepsilon(\psi)| \le c(n, m, \delta)\, \varepsilon^{1-\delta} \|\psi\|_\varepsilon$ для довільного $\delta > 0$. Оцінка (15) норми функціоналу $F_\varepsilon \in (H_\varepsilon)^*$, яка виводиться з допомогою леми 5 з [5] та рівності (14), показує, що нев'язки від функції $R_n^m(\varepsilon, \cdot)$ та числа $\mu_n^{(m)}$ в задачі (1) є малими.

Використовуючи означення оператора A_ε та теорему Ріса про зображення неперервного функціоналу, з (15) виводимо

$$\frac{\left\| A_\varepsilon \left(R_n^{(m)}\right) - \left(\mu_n^{(m)}\right)^{-1} R_n^{(m)} \right\|_\varepsilon}{\left\| R_n^{(m)} \right\|_\varepsilon} \ \le\ c(\delta)\, \varepsilon^{1-\delta}, \tag{16}$$

де δ — довільне додатнє фіксоване число. Нерівність (16) є центральним елементом в абстрактній схемі з [7] для обгрунтування асимптотичної поведінки власних значень та власних функцій задачі (1). Якщо навіть безпосередньо застосувати до цієї нерівності лему 12 з [8], то отримаємо, що в довільному $\varepsilon^{1-\delta}$-околі кожного власного значення $\mu_n^{(m)}$ усередненої задачі обов'язково міститься деяке власне значення задачі (1). Далі застосовуючи схему з [7], доводимо теореми.

Теорема 2. *Спектр задачі (1) збігається до спектру усередненої задачі (5), (7), (9) в хаусдорфовому розумінні, тобто*

1) $\forall\ \mu_n^{(m)}\ \ \exists \lambda^{-1}(\varepsilon) \in \sigma(A_\varepsilon) : \lambda(\varepsilon) \to \mu_n^{(m)}$ *при* $\varepsilon \to 0$;

2) *якщо* $\lambda^{-1}(\varepsilon) \in \sigma(A_\varepsilon)$ *і* $\lambda(\varepsilon) \to \mu$ *при* $\varepsilon \to 0$, *то* μ *— власне значення усередненої задачі.*

Для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ *та* $\delta > 0$ *існують додатні сталі* c_0, ε_0, *що для всіх значень параметра* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *маємо:*

$$|\lambda_n(\varepsilon) - \mu_n^{(1)}| \ \le\ c_0\, \varepsilon^{1-\delta}.$$

Для будь-яких $n, m \in \mathbb{N}$ та $\delta > 0$ існують додатні сталі $c_1(n, m, \delta)$, $\varepsilon_{n,m,\delta}$, що для всіх значень $\varepsilon \in (0, \varepsilon_{n,m})$ в інтервалі

$$\left(\mu_n^{(m)} - c_1\varepsilon^{1-\delta}\ , \quad \mu_n^{(m)} + c_1\varepsilon^{1-\delta}\right) \tag{17}$$

міститься стільки власних значень задачі (1), яка кратність власного значення $\mu_n^{(m)}$ усередненої задачі.

Теорема 2 показує, як ведуть себе власні значення задачі (1): при достатньо малих значеннях параметра ε спостерігається згущення власних значень задачі (1) біля спектру усередненої задачі. При фіксованому значенні індекса n має місце збіжність $\lambda_n(\varepsilon)$ до власного значення $\mu_n^{(1)}$ з серії (12) при $\varepsilon \to 0$. Зрозуміло, що ця збіжність не є рівномірною відносно n. Згідно першого і третього твердження теореми, для кожного власного значення $\mu_n^{(m)}$ з серії (13) існує послідовність власних значень $\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon)$ задачі (1) така, що $\lambda_{n(\varepsilon)}(\varepsilon) \to \mu_n^{(m)}$, $\varepsilon \to 0$, при цьому обов'язково індекс $n(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$.

Застосовуючи до (16) другу частину леми 12 ([8]) та враховуючи теорему 1, отримаємо асимптотичні оцінки для власних функцій.

Теорема 3. *Нехай $\mu_n^{(m)}$ — власне значення кратності r. Тоді існує скінчена лінійна комбінація власних функцій*

$$U_\varepsilon = \sum_{i=0}^{r} d_n^{(m)}(\varepsilon) u_{n(\varepsilon)+i}(\varepsilon, x), \quad \|U_\varepsilon\|_\varepsilon = 1,$$

які відповідають відповідно всім власним значенням задачі (1) з відрізку (17), така, що

$$\left\| \frac{R_n^{(m)}(\varepsilon, \cdot)}{\|R_n^{(m)}(\varepsilon, \cdot)\|_\varepsilon} - U_\varepsilon \right\|_\varepsilon \le c_2\ \varepsilon^{1-\delta}.$$

Нехай $\mu_n^{(1)}$ — просте власне значення усередненої задачі (5), (7), (9). Тоді

$$\left\| R_n^{(1)}(\varepsilon, \cdot) - \alpha(\varepsilon) u_n(\varepsilon, \cdot) \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \ \le\ c_3\ \varepsilon^{1-\delta},$$

де $0 < c_4 \le \alpha^2(\varepsilon) \le c_5$; сталі c_2, c_3, c_4, c_5 не залежать від ε.

[1] Mel'nyk T.A. Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 1999. — **18**, № 4. — P. 953–975.

[2] Mel'nyk T.A. Asymptotic analysis of a spectral problem in a periodic thick junction of type 3:2:1 // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2000. — **23**, № 4. — P. 341–346.

[3] Мельник Т.А., Назаров С.А. Асимптотический анализ задачи Неймана на соединении тела с тонкими тяжелыми стержнями // Алгебра и анализ. — 2000. — **12**, Вып. 2. — С. 188–238.

[4] Мельник Т.А., Назаров С.А. Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа густого гребешка // Труды семинара им. И.Г. Петровского. — 1996. — **19**. — С. 138–174.

[5] Mel'nyk T.A. On free vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses on the fine rods // Нелінійні коливання. — 1999. — **3**, № 4. — С. 511–523.

[6] Mel'nyk T.A. Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Steklov problem in a thick periodic junction // Нелінійні коливання. — 2001. — **4**, № 1, — С. 67–79.

[7] Mel'nyk T.A. Low and high frequency convergence of the spectrum of some self-adjoint compact operator depending on a small parameter // Нелінійні коливання. — 2001. — **4**, № 2. — С. 154–165.

[8] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с параметром // УМН. — 1957. — **12**, № 5. — С. 3–192.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 197–205

UDC 517.958

Supersymmetries of the Dirac equation for a charged particle interacting with electric field

A.G. NIKITIN

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: nikitin@imath.kiev.ua

Показано, що рівняння Дірака для зарядженої частинки, взаємодіючої з зовнішнім електричним полем, допускає розширену суперсиметрію за умови, що відповідний потенціал має добрі властивості відносно перетворень відзеркалення. Зокрема, для релятивістського атому водню вказано $N=4$ і $N=6$ суперсиметрії.

It is shown that the Dirac equation for a charged particle interacting with an external electric field admits extended supersymmetry provided the related potential has well definite parities. In particular, $N=4$ and $N=6$ SUSY for the relativistic Hydrogen atom is indicated.

1. Introduction. First introduced in particle physics [1], SUSY plays more and more essential role in quantum mechanics, refer e.g. to survey [2]. Moreover, some of important quantum mechanical problems (such as an interaction of an electron with constant and homogeneous magnetic or Coulomb fields) admit exact SUSY [3, 4].

It was pointed out long time ago [5], that the Dirac and Schrödinger–Pauli equations for an electron interacting with a time-independent magnetic field are supersymmetric, provided the related vector-potential has a definite parity w.r.t simultaneous reflection of all spatial coordinates.

Recently, generalizing this idea of paper [5], the *extended* $N=3$, $N=4$ and $N=6$ SUSY for an electron in three-dimensional magnetic field was found [6]–[9]. A sufficient condition of existence of such a symmetry is that the vector-potential has definite parities w.r.t. reflection of *any* spatial variable. These results establish deep connections between supersymmetries and discrete involutive symmetries and stimulate systematic search for discrete symmetries of the Dirac and Schrödinger–Pauli equations [7, 9, 11].

In the present paper we prove existence of $N=3$, $N=4$ and $N=6$ SUSY for the Dirac equation for an electron interacting with the electric field. We also indicate symmetries of this equation w.r.t. algebras of discrete transformations which appear to be rather extended. In particular we prove the symmetry of the related Columb problem w.r.t. the algebra $gl(8,R)$.

2. Two forms of the Dirac equation. Consider the stationary Dirac equation for a particle interacting with a time independent electric field

$$L\Psi \equiv (\varepsilon - \gamma_0\gamma_a p_a - \gamma_0 m - eA_0)\,\Psi = 0, \tag{1}$$

where $p_a = -i\frac{\partial}{\partial x_a}$, $a=1,2,3$, ε is the Hamiltonian eigenvalue, $A_0 = A_0(\mathbf{x})$ is a potential of electric field, γ_μ $(\mu = 0,1,2,3)$ are Dirac matrices (we choose $\gamma_4 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ diagonal).

To search for SUSY of (1) it is convenient to transform this equation to the following equivalent form

$$\left(\varepsilon^2 - 2eA_0\varepsilon + e^2A_0^2 - p_ap_a - m^2 - 2ieS_aE_a\right)\hat{\Phi} = 0, \tag{2}$$

$$(1+i\gamma_4)\,\hat{\Phi} = 0, \tag{3}$$

where $S_a = \frac{i}{4}\varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c$, $E_a = -i\frac{\partial A_0}{\partial x_a}$. The corresponding transformation can be represented as [12]

$$\begin{aligned} &\hat{\Phi} = \!\!\rightarrow V^+\Psi, \quad \Psi = V^-\hat{\Phi}, \quad L \rightarrow V^+\gamma_0 L V^-, \\ &V^\pm = 1 \pm \frac{1}{m}(1+i\gamma_4)\,(\gamma_0 L - m)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

In accordance with (3) function $\hat{\Phi}$ has only two non-zero components which we denote by Φ. Moreover, equation (2) reduce to the form

$$\left(\varepsilon^2 - m^2\right)\Phi = \left(\mathbf{p}^2 + ie\sigma_aE_a - e^2A_0^2 + 2e\varepsilon A_0\right)\Phi, \tag{5}$$

where σ_a are the Pauli matrices.

The system of two second-order equations (5) is mathematically equivalent to the system of four first order equations given by relations (1). Thus there exist one-to-one correspondence between symmetries of equations (1) and (5). Nevertheless, equation (5) is much more convenient for symmetry analysis then (1) because of reduction of the number and dimension of the involved matrices.

Let us suppose that A_0 depends on some parameters $a = (a_1, a_2, \ldots)$, and is a homogeneous function of $\mathbf{x}$ and a:

$$A_0(k\mathbf{x}, ka) = \frac{1}{k} A_0(\mathbf{x}, a). \tag{6}$$

A familiar example of such a potential is the potential generated by a system of point charges, i.e., $A_0 = \Sigma \frac{g_i e}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a_i}\|}$, where $\mathbf{a_i}$ are charges coordinates.

Choosing new variables $\mathbf{r} = \mathbf{x}\varepsilon$ and $b = a\varepsilon$ we reduce (5) to the form

$$\lambda\Phi = H\Phi, \quad H = -p'_a p'_a + ie\sigma_a E'_a + (1 - eA_0(\mathbf{r}, b))^2\,, \tag{7}$$

where $p'_a = -i\frac{\partial}{\partial r_a}, E'_a = -\frac{\partial A_0}{\partial r_a}, \lambda = \frac{m^2}{\varepsilon^2},\ \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$.

We say equation (7) admits $N = n$ SUSY, if there exist n constants of motion Q_A which commute with “Hamiltonian” H and satisfy the following relations:

$$Q_A Q_B + Q_B Q_A = 2g_{AB} H, \quad [Q_A, H] = 0, \quad A, B = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

If $g_{AB} = \delta_{AB}$ (δ_{AB} is the Kronecker symbol), then relations (8) define superalgebra characterizing SUSY quantum mechanics with n supercharges [2]. We will consider also a more general case when the diagonal elements of the tensor g_{AB} are equal either to $+1$ or to -1 (and $g_{AB} = 0$ for $A \neq B$).

Discrete symmetries and supercharges. In addition to (6), we suppose that $A_0(\mathbf{r})$ is an even function w.r.t. reflections of space variables. Let us consider consequently all possible combinations of such parities.

Let

$$A_0(-\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}), \tag{9}$$

then equation (7) is invariant w.r.t. the space reflection transformation $\Phi(\mathbf{r}) \to R\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(-\mathbf{r})$. In addition, we can construct a symmetry operator (supercharge) Q:

$$Q = Rq, \quad q = \sigma_a p'_a - 1 + eA_0 \tag{10}$$

which satisfies the condition $Q^2 = H$ and generates $N = 1$ SUSY for equation (7).

Analogously, equation (7) admits N=1 SUSY provided A_0 is an even function w.r.t. reflection of one of co-ordinate axis, say

$$A_0(\hat{r}_1\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}), \quad \hat{r}_1\mathbf{r} = (-r_1, r_2, r_3). \tag{11}$$

The corresponding supercharge is $Q = R_1 q$, where operator R_1 is defined as follows: $R_1\Phi(\mathbf{r}) = \sigma_1\Phi(\hat{r}_1\mathbf{r})$.

If A_0 is an even function w.r.t. reflections of two given coordinate axes, say

$$A_0(\hat{r}_1\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}), \quad A_0(\hat{r}_2\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}), \quad \hat{r}_2\mathbf{r} = (r_1, -r_2, r_3) \tag{12}$$

then there exist two supercharges for equation (7), namely

$$Q_1 = R_1 q, \quad Q_2 = iR_2 q. \tag{13}$$

Operators (13) satisfy relations (8) for $g_{11} = -g_{22} = 1$.

Finally, if A_0 is an even function w.r.t. reflection of any co-ordinate axis, i.e.,

$$A_0(r_a\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}), \quad a = 1, 2, 3, \tag{14}$$

then equation (7) admits $N = 3$ SUSY generated by following supercharges

$$Q_1 = R_1 q, \quad Q_2 = R_2 q, \quad Q_3 = R_3 q. \tag{15}$$

We notice that all supercharges introduced in the above are Hermitian w.r.t. the following indefinite metrics

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int d^3x \Phi_1 \hat{R}\Phi_2, \tag{16}$$

where $\hat{R} = R$ for the case when A_0 satisfies (9) and $\hat{R} = R_1$ for the case when parity properties of A_0 are defined by relations (11), (12) and (14).

In all considered cases equation (7) is invariant w.r.t. the following "antiunitary" [13] transformation

$$\Phi(\mathbf{r}) \to C\Phi(\mathbf{r}) = i\sigma_2\Phi^*(\mathbf{r}) \tag{17}$$

where the asterisk denotes the complex conjugation. Using this symmetry and taking into account the relations

$$\{R_a, \sigma_a p'_a\} = 0, \quad [C, \sigma_a p'_a] = 0, \quad \{R_a, C\} = 0, \quad R_1^2 = -C^2 = 1,$$

it is possible to construct additional supercharges and obtain the following bases of superalgebra (8)

$$Q_1 = iRq, \quad Q_2 = CQ_1 \quad (g_{11} = g_{22} = -1), \tag{18}$$

$$Q_1 = R_1 q, \quad Q_2 = CQ_1 \quad (g_{11} = -g_{22} = 1), \tag{19}$$

$$\begin{gathered} Q_1 = R_1 q, \quad Q_2 = iR_2 q, \quad Q_3 = CR_1 q \\ (g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1) \end{gathered} \tag{20}$$

and

$$\begin{gathered} Q_1 = CR_1 q, \quad Q_2 = iR_2 q, \quad Q_3 = CR_3 q, \quad Q_4 = CRq \\ (g_{11} = -g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1) \end{gathered} \tag{21}$$

for the cases (9), (11), (12) and (14) correspondingly.

We see that extended SUSY is admitted by a number of problems describing interaction of spin 1/2 particle with an electric field, provided the corresponding potentials have definite parities. Let us present simple examples of such potentials:

$$A_0 = \frac{ge}{\|\mathbf{x}\|}, \tag{22}$$

$$A_0 = \frac{ge}{\|\mathbf{x}+\mathbf{a}\|} - \frac{ge}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}, \tag{23}$$

$$A_0 = \frac{ge}{\|\mathbf{x}+\mathbf{a}\|} - \frac{ge}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} + \frac{ge}{\|\mathbf{x}+\mathbf{b}\|} - \frac{ge}{\|\mathbf{x}-\mathbf{b}\|}, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} A_0 = {} & \frac{ge}{\|\mathbf{x}+\mathbf{a}\|} - \frac{ge}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} + \frac{ge}{\|\mathbf{x}+\mathbf{b}\|} - \\ & - \frac{ge}{\|\mathbf{x}+\mathbf{b}\|} + \frac{ge}{\|\mathbf{x}+\mathbf{c}\|} - \frac{ge}{\|\mathbf{x}+\mathbf{c}\|}. \end{aligned} \tag{25}$$

Here $\mathbf{a} = (a, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (a, b, 0)$, $\mathbf{c} = (a, b, c)$, $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$.

Relations (22), (23), (24) and (25) define potentials of a point charge, of electric dipole, of two and three parallel dipoles correspondingly (the three last examples correspond to elementary units of the crystal of NaCL). These potentials have parities defined by relations (14), (12), (11) and (9) respectively.

Extended SUSY for the hydrogen atom. Here we show that for the case of the Coulomb potential (22) equation (7) admits more extended, $N = 6$ SUSY. This extension is caused by existence of the Johnson–Lippman [14] constant of motion for the Dirac equation and additional symmetry operators

$$J^2 = J_a J_a, \quad D = \sigma_a J_a - 1/2, \tag{26}$$

(where $J_a = \varepsilon_{abc} r_b p'_c + \sigma_a/2$) for the corresponding equation (7).

Let us suppose that Φ is an eigenfunction of symmetry operators J^2 and D with eigenvalues $j(j+1)$ and $\pm\kappa = \pm(j+1/2)$ correspondingly, and rewrite equation (7), (22) in the form

$$\mu\Phi = \hat{H}\Phi, \tag{27}$$

where

$$\begin{aligned}
&\hat{H} = p'^2 + i\alpha\frac{\sigma_a r_a}{r^3} - \left(\frac{\alpha}{r} - 1\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\sigma_a J_a - \frac{1}{2}\right)^2, \\
&\mu = \left(\frac{\kappa^2}{b^2} - \frac{m^2}{\varepsilon^2}\right), \quad \alpha = ge^2, \quad b^2 = \kappa^2 - \alpha^2.
\end{aligned} \tag{28}$$

Using the relations

$$\{D, \sigma_a p'_a\} = \{D, \sigma_a r_a\} = 0, \quad \left[\sigma_a p'_a, \frac{\sigma_b r_b}{r}\right] = -\frac{2i}{r}D, \tag{29}$$

it is not difficult to verify that the operator

$$Q = \frac{i}{\kappa}D\left(\sigma_a p'_a + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\alpha^2}{b^2}\right) + \frac{\alpha\kappa}{b^2}\frac{\sigma_a r_a}{r} \tag{30}$$

is a supercharge for "Hamiltonian" $\hat{H}$, satisfying the relation $Q^2 = \hat{H}$.

To find additional supercharges we use (29) and the following relations

$$\begin{aligned}
&[R_{ab}, Q] = [R_{ab}, \Sigma] = [C, \Sigma] = \{C, Q\} = \{\Sigma, Q\} = 0, \\
&\Sigma^2 = R_{ab}^2 = 1,
\end{aligned} \tag{31}$$

where $\Sigma = \frac{1}{b}\left(D - i\alpha\frac{\rho_a\sigma_a}{\rho}\right)$, $R_{ab} = iR_aR_b$.

Products of Q with Σ or R_{ab} are supercharges too, moreover, there exist exactly four of them:

$$Q_1 = R_{23}Q, \quad Q_2 = R_{31}Q, \quad Q_3 = R_{12}Q, \quad Q_4 = i\Sigma Q. \tag{32}$$

Operators (32) commute with $\hat{H}$ and satisfy relations (8) where $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1$. They are Hermitian w.r.t. the following scalar product

$$(\Phi_1, \Phi_2) = \int d^3x\Phi_1^+ M\Psi_2, \tag{33}$$

where $M = J_a J_a + \frac{1}{4} + i\alpha \frac{\sigma\cdot\mathbf{r}}{r} D$ is a positive defined metric operator (we suppose $\alpha \ll 1$).

A more extended set of supercharges can be obtained using antiunitary symmetry (17). It includes six operators

$$\begin{aligned} &Q_1 = Q, \quad Q_2 = i\Sigma Q, \quad Q_3 = CQ, \\ &Q_4 = CR_{12}Q, \quad Q_5 = CR_{31}Q, \quad Q_6 = CR_{12}Q \end{aligned} \tag{34}$$

which satisfy relations (8) with $H = \hat{H}$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = -q_{55} = -g_{66} = 1$.

Using explicit solutions for the Dirac equation with the Coulomb potential (refer e.g. to ref. [12]), it is possible to show that the found SUSY is exact in as much as the ground state of the system (27) is not degenerated.

With a help of transformations (4) it is possible to find symmetry operators (which correspond to supercharges (34)) for the initial Dirac equation. In this way we obtain the following operators which satisfy superalgebra (8) and are defined on solutions of the Dirac equation:

$$\begin{aligned} &Q_1 = \hat{Q}, \quad Q_2 = i\hat{R}_1\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{Q}, \quad Q_3 = \hat{C}\hat{Q}, \\ &Q_4 = i\hat{C}\hat{R}_1\hat{R}_2\hat{Q}, \quad Q_5 = i\hat{C}\hat{R}_2\hat{R}_3\hat{Q}, \quad Q_6 = i\hat{C}\hat{R}_3\hat{R}_1\hat{Q}, \end{aligned} \tag{35}$$

where $\hat{Q}$ is the Johnson-Lippman [14] constant of motion

$$\hat{Q} = m\alpha \frac{\hat{\sigma}_a x_a}{x} + \gamma_0 D \left(\hat{\sigma}_a p_a + i\gamma_4 \frac{\alpha}{x} \right),$$

$\hat{\sigma}_a = \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}\gamma_b\gamma_c$ and $\hat{C}$, $\hat{R}_a$ are analogues of operators C and R_a defined on the solutions of the initial Dirac equation (1)

$$\hat{C}\psi(\mathbf{x}) = i\gamma_2\psi^*(\mathbf{x}), \quad \hat{R}_a\psi(\mathbf{x}) = \gamma_4\gamma_a\psi(\hat{r}_a\mathbf{x}).$$

It can be verified by direct calculation that operators (35) commute with L of (1) and satisfy relations (8) where $H = (L - \varepsilon)^2$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = -q_{55} = -g_{66} = 1$.

Discussion. Thus, in addition to known SUSY systems including interactions with a magnetic field [6]–[12] we describe an origin of extended SUSY for interaction of an electron with an electric field. By this we present additional arguments for physical relevance of extended SUSY, and describe a class of quantum mechanical systems which admit it.

It is interesting to search for such quantum mechanical systems which admit extended SUSY and describe an interaction of spinning particles with a superposition of electric and magnetic fields. An example of such a system with time-dependent potentials was proposed in paper [15].

A natural question arises what kind of SUSY degeneracy appears for such well studied system as a relativistic Hydrogen atom (described by equation (27)). Acting by operators (34) on known solutions of this equation (which are present e.g. in book [12]) we recognize, that they change either the signs of the quantum numbers κ and m (eigenvalues of operators D and J_3) or the relative phases of wave functions with different m. In other words, such a degeneracy does exists. Being more or less obvious for the considered system, it can play a non-trivial role if we add a small perturbing interaction. Moreover, the found extended SUSY is preserved for more complicated systems such as a charged particle interacting with superposed Columb and Aharonov–Bohm potentials [17].

In addition to the SUSY context, the above results can be used to construct internal symmetries for the equations under consideration. Thus, starting with supercharges (34) and fixing in (27) $\varepsilon \neq 0$, we can define the operators $\Gamma_0 = \Sigma$, $\Gamma_k = \frac{Q_k}{\mu}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$, which form the seven- dimensional Clifford algebra, i.e., satisfy the following relations

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \tag{36}$$

where $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, 6$, $g_{00} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = -g_{55} = -g_{66} = 1$. All linearly independent products of operators Γ_μ include 64 operators which form a basis of algebra $gl(8, R)$. In accordance with the above, this algebra generates an external symmetry for the Hydrogen atom. This algebra is more extended then known $so(2, 4)$ symmetry (refer, e.g., to [16]) and is isomorphic to the involutive symmetry algebra of the free Dirac equation found in papers [7, 10].

In analogous way it is possible to find internal symmetry algebras for the problems characterized by parities (9), (11), and (12). These algebras are equivalent to the orthogonal Lie algebras $so(1, 2)$, $so(1, 3) \oplus so(1, 3)$ and $so(1, 4)$ correspondingly.

[1] Gol'fand Yu.A., Lichtman E.P. // Sov. Phys. JETP Lett. — 1971. — **13**. — P. 452;
Volkov D.V., Akulov V.P. // Phys. Lett. B. — 1973. — **46**. — P. 109;
Wess J., Zumino B. // Nucl. Phys. B. — 1974. — **70**. — P. 39.

[2] Cooper F., Khare A., Sukhatme U. // Phys. Rep. — 1995. — **211**. — P. 268.

[3] Ravndal F. // Phys. Rev. D. — 1980. — **21**. — P. 2461;
Khare A., Maharana J. // Nucl. Phys. B. — 1984. — **244**. — P. 409.

[4] Sukhumar S.V. // J. Phys. A. — 1985. — **18**. — L697.

[5] Gendenshtein L.E. // Yad. Fiz. — 1985. — **41**. — P. 261; Gendenshtein L.E., Krive N.V. // Usp. Fiz. Nauk. — 1985. — **146**. — P. 583.

[6] Nikitin A.G., On Extended Supersymmetries and Parasupersymmetries / X International Conference "Problems of Quantum Field Theory", JINR E2-96-369. — Dubna, 1996;
Nikitin A.G. On extended supersymmetries in quantum mechanics / GROUP21 Physical applications and mathematical aspects of geometry, groups and algebras, Eds. H.-D. Doebner, W. Sherer, P. Natterman. — Singapoore: World Scientific, 1997. — **1**. — P. 509–514.

[7] Niederle J., Nikitin A.G. // J. Phys. A. — 1997. — **30**. — P. 999.

[8] Tkachuk V.M., Vakarchuk S.I. // Phys. Lett. A. — 1997. — **228**. — P. 141.

[9] Niederle J., Nikitin A.G. // J. Math. Phys. — 1999. — ???

[10] Niederle J., Nikitin A.G. // J. Nonlin. Math. Phys. — 1997. — **4**. — P. 436.

[11] Nikitin A.G. // Int. J. of Mod. Phys. — 1998. — ???

[12] Fushchich W.I., Nikitin A.G. Symmetries of equations of quantum mechanics. — New York: Allerton Press Inc., 1994.

[13] Wigner E.P. in: Lectures Istanbul School of Theoretical Physics. — London: Gordon and Breach, 1964.

[14] Johnson M.P., Lippman B.A. // Phys. Rev. — 1960. — **78**. — P. 369.

[15] Tkachuk V.M. // J. Phys. A. — 1998. — **31**. — P. 1879.

[16] Malkin I.A., Man'ko V.I., Dynamical symmetries and coherent states of quantum systems. — Moscow: Nauka, 1979.

[17] Nikitin A.G., Superalgebras of symmetry operators for Coulomb and Aharonov-Bohm-Coulomb sstems / Photon and Poincaré group, Ed. V. Dvoeglazov. — N.Y.: Nova Science, 1999. — P. 74–80.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 206–211

УДК 517.958

Про одну підмодель ідеальної нестисливої рідини

Г.В. ПОПОВИЧ

Інститут математики НАН України, Київ

Досліджено одну ліївську підмодель корозмірності два рівнянь Ойлера, що описують рух ідеальної нестисливої рідини. В результаті побудовано широкі класи точних розв'язків рівнянь Ойлера, які містять, зокрема, довільні функції.

A Lie submodel of the Euler equations describing motion of an incompressible ideal fluid is investigated. As a result, large classes of exact solutions of the Euler equations, which contain, in particular, arbitrary functions, are constructed.

1. Вступ. Рівняння, що описують рух нестисливої рідини, вирізняються серед інших рівнянь гідродинаміки інваріантністю відносно переходу до систем координат, які рухаються поступово з довільною швидкістю (відносно початкової системи координат). Так, добре відомо [1], що максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності системи рівнянь Ойлера (для руху ідеальної нестисливої рідини в полі потенційних сил)

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = \vec{0}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \tag{1}$$

є нескінченновимірна алгебра $A(E)$, породжена наступними базисними елементами:

$$\begin{gathered}\partial_t, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a} \quad (a<b),\\ D^t = t\partial_t - u^a\partial_{u^a} - 2p\partial_p, \quad D^x = x_a\partial_a + u^a\partial_{u^a} + 2p\partial_p,\\ R(\vec{m}) = R(\vec{m}(t)) = m^a(t)\partial_a + m^a_t(t)\partial_{u^a} - m^a_{tt}(t)x_a\partial_p,\\ Z(\chi) = Z(\chi(t)) = \chi(t)\partial_p.\end{gathered} \tag{2}$$

Тут і надалі вектор $\vec{u} = \{u^a(t,\vec{x})\}$ позначає поле швидкостей рідини, $p = p(t,\vec{x})$ — тиск, $\vec{x} = \{x_a\}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_a = \partial/\partial x_a$, $\nabla = \{\partial_a\}$, $m^a = m^a(t)$ и $\chi = \chi(t)$ — довільні достатньо гладкі функції змінної t (наприклад, з $C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R})$). Густину рідини вважаємо рівною 1. Індекси a, b і c змінюються від 1 до 3, індекси i і j — від 1 до 2. За індексами, що повторюються, йде підсумовування.

Хоча рівняння Нав'є–Стокса, що враховують ефект в'язкості рідині, більш адекватно описують гідродинамічні процеси, дослідницький інтерес до рівнянь Ойлера залишається достатньо великим, зокрема, в галузі симетрійного аналізу [1]–[6]. Дана робота продовжує цикл робіт [7]–[9], присвячених ліївським підмоделям рівнянь Ойлера. А саме, в ній побудовано анзац корозмірності два за підалгеброю, що входить в перелік нееквівалентних двовимірних підалгебр алгебри $A(E)$, отримано відповідну систему редукованих рівнянь, вивчено її симетрійні властивості і знайдено широкі класи точних розв'язків, що містять довільні константи і функції. Цікаво, що для розглянутої підалгебри розв'язання редукованої системи фактично зводиться до інтегрування одного рівняння з частинними похідними третього порядку, яке можна зобразити через добуток двох операторів, причому внутрішній буде лінійним звичайним диференціальним оператором другого порядку за інваріантною "просторовою" змінною, а зовнішній — нелінійним оператором "матеріальної похідної" за інваріантною "часовою" змінною. В результаті побудовано нові класи точних розв'язків рівнянь Ойлера.

2. Підалгебра, анзац і редукована система. Розглянемо підалгебру $A^2_{12}(\varkappa,\eta) = \langle D^x + \varkappa J_{12},\ R(0,0,\eta(t))\rangle$, що входить в перелік нееквівалентних двовимірних підалгебр алгебри $A(E)$, наведений в [7, 8]. Тут $\eta = \eta(t)$ — довільна гладка функція змінної t, $\eta \not\equiv 0$. Алгебри $A^2_{12}(\varkappa,\eta)$ і $A^2_{12}(\tilde\varkappa,\tilde\eta)$ еквівалентні, якщо $\tilde\varkappa = \varkappa$ і $\exists E, C, \delta \in \mathbb{R}$ $(E, C \neq 0)$: $\tilde\eta(\tilde t) = C\eta(t)$, де $t = E\tilde t + \delta$.

Анзац за алгеброю $A^2_{12}(\varkappa,\eta)$ можна побудувати лише для тих t, для яких $\eta(t) \neq 0$. Він має наступний вигляд:

$$
\begin{aligned}
u^1 &= |\eta|(x_1 w^1 - x_2(w^2 + \varkappa w^1)) - \tfrac{1}{2}\eta_t\eta^{-1}x_1,\\
u^1 &= |\eta|(x_2 w^1 + x_1(w^2 + \varkappa w^1)) - \tfrac{1}{2}\eta_t\eta^{-1}x_2,\\
u^3 &= \eta^{-1}|\eta|^{1/2} r w^3 + \eta_t\eta^{-1}x_3,\\
p &= \eta^2 r^2 s - \tfrac{1}{2}\eta_{tt}\eta^{-1}x_3^2 + (\tfrac{1}{4}\eta_{tt}\eta^{-1} - \tfrac{3}{8}(\eta_t)^2\eta^{-2})r^2,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

де $w^a = w^a(z_1, z_2)$, $s = s(z_1, z_2)$ — нові невідомі функції інваріантних незалежних змінних $z_1 = \int |\eta(t)|dt$, $z_2 = \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} - \varkappa \ln r - \frac{1}{2}\varkappa \ln|\eta|$; $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Зауважимо, що вибір анзацу саме такого вигляду обгрунтовується необхідністю одразу отримати редуковану систему в формі, найбільш зручній для дослідження. Тут спрацьовує "закон збереження складності”: вдало підібраний складний анзац — проста редукована система (і навпаки).

Підстановка анзацу (3) в рівняння Ойлера (1) дає таку систему редукованих рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&w^1_1 + w^2w^1_2 + w^1w^1 - (w^2 + \varkappa w^1)^2 + 2s - \varkappa s_2 = 0,\\
&w^2_1 + w^2w^2_2 + w^1w^2 + (w^2 + \varkappa w^1)((1 + \varkappa^2)w^1 + \varkappa w^2)\\
&\qquad\qquad - 2\varkappa s + (1 + \varkappa^2)s_2 = 0,\\
&w^1_1 + w^2w^1_2 + w^1w^3 = 0,\\
&w^2_2 + 2w^1 = 0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

3. Дослідження редукованої системи. З системи (4) випливає, що функція w^2 є розв’язком рівняння

$$
(\partial_1 + w^2\partial_2)((1 + \varkappa^2)w^2_{22} - 4\varkappa w^2_2 + 4w^2) = 0. \tag{5}
$$

Якщо функція w^2 відома, то функції w^1 і s виражаються через її похідні, а w^3 — довільний розв’язок лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$
\begin{aligned}
&s = \tfrac{1}{4}(\partial_1 + w^2\partial_2)((1{+}\varkappa^2)w^2_2 - 2\varkappa w^2) - \tfrac{1}{8}(1{+}\varkappa^2)(w^2_2)^2 + \tfrac{1}{2}(w^2)^2,\\
&w^1 = -\tfrac{1}{2}w^2_2, \qquad w^3 = H(\Omega)/\sqrt{\Omega_2},
\end{aligned}
$$

де $H = H(\Omega)$ — довільна функція змінної Ω, $\Omega = \Omega(z_1, z_2)$ — перший інтеграл рівняння $dz_2 = w^2dz_1$.

Теорема 1. *Максимальною в сенсі Лі алгеброю інваріантності системи (4) є алгебра*

$$
\begin{aligned}
A^{\max} = \langle &\partial_{z_1},\ \partial_{z_2},\ G = z_1\partial_{z_2} + \partial_{w^2} - 2w^2\partial_s,\\
&D^{z_1} = z_1\partial_{z_1} - w^1\partial_{w^1} - w^2\partial_{w^2} - 2s\partial_s,\ w^3\partial_{w^3}\rangle.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Зауваження. Серед операторів ліївської симетрії системи (4) тільки оператор ∂_{z_2} (з точністю до лінійної залежності) є індукованим при будь-яких η. А саме, $J_{12} \sim \partial_{z_2}$, $D^x \sim -\varkappa\partial_{z_2}$ (тут знак “$\sim$” означає “індукує”). Для деяких значень η можливі додаткові індукції:

$$
\begin{aligned}
&\eta = 1: && D^t \sim D^{z_1}, \quad \partial_t \sim \partial_{z_1};\\
&\eta = |t|^\nu,\ \nu \neq 0, -1: && 2D^t \sim 2(\nu + 1)D^{z_1} + (\nu - 2)w^3\partial_{w^3} - \varkappa\nu\partial_{z_2};\\
&\eta = |t|^{-1}: && 2D^t \sim 2\partial_{z_1} - 3w^3\partial_{w^3} + \varkappa\partial_{z_2};\\
&\eta = e^{\nu t},\ \nu \neq 0: && 2\partial_t \sim 2\nu D^{z_1} + \nu w^3\partial_{w^3} - \varkappa\nu\partial_{z_2}.
\end{aligned}
$$

В усіх інших випадках оператори ліївської симетрії системи (4) не індукуються операторами з $A(E)$.

Теорема 2. *Максимальна в сенсі Лі алгебра інваріантності рівняння (5) породжується операторами*

$$\partial_{z_1}, \quad \partial_{z_2}, \quad \widetilde{G} = z_1\partial_{z_2} + \partial_{w^2}, \quad \widetilde{D}^{z_1} = z_1\partial_{z_1} - w^2\partial_{w^2}.$$

4. Точні розв'язки. Схема побудови точних розв'язків системи (4) буде наступною: знаходимо точні розв'язки рівняння (5), а потім підставляємо w^2 в вирази для w^1, s та рівняння для Ω. При використанні ліївських розв'язків рівняння (5) запропонована схема дає частково інваріантні розв'язки системи (4) відносно алгебр, що містять оператор $w^3\partial_{w^3}$.

Найбільш широкий клас точних розв'язків рівняння (5) (і, відповідно, системи (4)) вдається побудувати, якщо помітити, що рівняння (5) є диференціальним наслідком для сім'ї звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$(1+\varkappa^2)w^2_{22} - 4\varkappa w^2_2 + 4w^2 = 4C, \quad C = \mathrm{const}. \tag{7}$$

де змінна z_1 є параметром. А саме,

$$\begin{aligned} w^1 &= e^{2\nu_2 z_2+\rho}\cos(2\nu_1 z_2-\varphi) + C,\\ w^2 &= -e^{2\nu_2 z_2+\rho}\big(\nu_2\cos(2\nu_1 z_2-\varphi) - \nu_1\sin(2\nu_1 z_2-\varphi)\big),\\ s\ &= -\tfrac12\nu_1 e^{4\nu_2 z_2+2\rho} + \tfrac12 e^{2\nu_2 z_2+\rho}\big((\rho_t+2\nu_2 C)\sin(2\nu_1 z_2-\varphi)\\ &\qquad - (\varphi_t + 2\varkappa\nu_2 C\cos(2\nu_1 z_2-\varphi)\big) + \tfrac12 C^2, \end{aligned} \tag{8}$$

де ρ, φ — довільні функції змінної z_1, $\nu_1 = \frac{1}{1+\varkappa^2}$, $\nu_2 = \frac{\varkappa}{1+\varkappa^2}$. (Розв'язок з $w^1 = C$ входить в сім'ю (8) за умови, що допускається рівність $\rho \equiv -\infty$.) Частинний розв'язок для $w^3 — w^3 = 0$. Для деяких значень параметрів-функцій ρ і φ вдалося знайти перший інтеграл Ω рівняння $dz_2 = w^2 dz_1$ і, відповідно, загальний розв'язок рівняння на w^3:

$$\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{const},\ C = 0: && \Omega = \textstyle\int e^{\rho}dz_1 - \int e^{-2\nu_2 z_2}\cos^{-1}(2\nu_1 z_2-\varphi)dz_2,\\ &\varphi, \rho = \mathrm{const}: && \Omega = z_1 - \textstyle\int\big(e^{2\nu_2 z_2+\rho}\cos(2\nu_1 z_2-\varphi)+C\big)^{-1}dz_2, \end{aligned}$$

Проведемо ліїську редукцію рівняння (5). Серед знайдених в такий спосіб розв'язків вибиратимемо лише ті, що дають розв'язки системи (4), відмінні від (8). Перерахуємо нееквівалентні одновимірні підалгебри алгебри з теореми 2, відповідні анзаци і редуковані рівняння:

1) $\langle\partial_{z_2}\rangle$: $w^2=\psi(\omega)$, $\omega=z_1$; $\psi'=0$;

2) $\langle\partial_{z_1}\rangle$: $w^2=\psi(\omega)$, $\omega=z_2$; $((1+\varkappa^2)\psi''-4\varkappa\psi'+4\psi)'=0$;

3) $\langle\widetilde{G}\rangle$: $w^2=\psi(\omega)+z_2/z_1$, $\omega=z_1$; $\omega^2\psi'+\omega\psi+\varkappa=0$;

4) $\langle\partial_{z_1}\pm\widetilde{G}\rangle$: $w^2=\psi(\omega)\pm z_1$, $\omega=z_2\mp\frac{1}{2}z_1^2$;
$\psi((1+\varkappa^2)\psi''-4\varkappa\psi'+4\psi)'\pm 4=0$;

5) $\langle\widetilde{D}^{z_1}+\mu\partial_{z_2}\rangle$: $w^2=z_1^{-1}\psi(\omega)$, $\omega=z_2-\mu\ln|z_1|$;
$(\psi-\mu)((1+\varkappa^2)\psi''-4\varkappa\psi'+4\psi)'=((1+\varkappa^2)\psi''-4\varkappa\psi'+4\psi)$;

Перша підалгебра дає розв'язок системи (4), що є особливим в зображенні (8):

$$w^2=C,\quad w^1=0,\quad s=\tfrac{1}{2}C^2,\quad w^3=H(z_2-Cz_1).$$

Розв'язок, що відповідає другій підалгебрі, має вигляд (8) (випадок $\varphi,\rho=\mathrm{const}$). Третє редуковане рівняння інтегрується; отриманий розв'язок не належить сім'ї (8):

$$w^2=z_1^{-1}(z_2-\varkappa\ln|z_1|),\quad w^3=\sqrt{|z_1|}H(z_1^{-1}z_2+\tfrac{1}{2}\varkappa(\ln|z_1|)^2),$$
$$w^1=-\tfrac{1}{2}z_1^{-1},\quad s=\tfrac{1}{2}z_1^{-1}((z_2-\varkappa\ln|z_1|)^2-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}\varkappa^2).$$

Знайти точні розв'язки (навіть частинні) для четвертого редукованого рівняння не вдалося. У випадку п'ятої підалгебри всі точні розв'язки, що можливо побудувати, мають вигляд (8).

5. Висновки. Результати, отримані в цій роботі, є реалізацією всіх пунктів програми "Підмоделі" [10] для однієї підмоделі корозмірності (рангу) 2 ідеальної нестисливої рідини. Важливою особливістю дослідженої підмоделі (системи (4)) є те, що вона фактично зводиться до рівняння (5), яке є диференціальним наслідком для сім'ї звичайних лінійних диференціальних рівнянь (7) з незалежною змінною z_2 (змінна z_1 відіграє роль параметра). Саме це дозволило побудувати більшість із знайдених точних розв'язків підмоделі. За рахунок вдалого підбору анзацу в редуковану систему (4) не входять явно незалежні інваріантні змінні і її структура є відносно простою.

Серед лівських підмоделей рівнянь Ойлера (1) спорідненою до розглянутої є підмодель, побудована за підалгеброю $\langle D^x,\ R(\vec{m})\rangle$, де вектор-функція $\vec{m}=\vec{m}(t)$ неколінеарна сталому вектору. Ця підмодель значно складніша (зокрема, рівняння редукованої системи нетривіально зачеплені і містять незалежну змінну в явному вигляді). Її дослідження буде темою наступних робіт.

[1] Бучнев А.А. Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды, вып. 7. — Новосибирск: Ин-т гидромеханики СО АН СССР, 1971. — С. 212–214.

[2] Капитанский Л.В. Групповой анализ уравнений Навье–Стокса и Эйлера при наличии вращательной симметрии и новые точные решения этих уравнений // Докл. АН СССР. — 1978. — **243**, № 4. — С. 901–904.

[3] Капитанский Л.В. Групповой анализ уравнений Навье–Стокса при наличии вращательной симметрии и некоторые новые точные решения // Зап. науч. семинара ЛОМИ. — 1979. — **84**. — С. 89–107.

[4] Андреев В.К., Родионов А.А. Групповой анализ уравнений плоских течений идеальной несжимаемой жидкости в лагранжевых координатах // ДАН СССР. — 1988. — **298**, № 6. — С. 1358-1361.

[5] Андреев В.К., Родионов А.А. Групповая классификация и точные решени уравнений плоского и вращательно-симметричного течения идеальной жидкости в лагранжевых координатах // Дифференц. уравнения. — 1988. — **24**. — С. 1577–1586.

[6] Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначёв В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. — Новосибирск: Наука, 1994. — 319 с.

[7] Попович Г.В. О редукции уравнений Эйлера с помощью двумерных алгебр // Вестник Приазовского гостехуниверситета. — 1995. — № 1.— С. 268–272.

[8] Popovych H. On reduction of the Euler equations by means of two-dimensional subalgebras // J. Nonlin. Math. Phys. — 1995. — V. 3, № 3–4. — P. 441–446.

[9] Попович Г.В. Редукція рівнянь Ойлера до систем з трьома незалежними змінними // Допов. НАН України. — 1996. — № 8. — С. 23–29.

[10] Овсянников Л.В. Программа подмодели. Газовая динамика // Прикл. матем. механ. — 1994. — **58**, вып. 4. — С. 30–55.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 212–221

УДК 517.958:512.816

Повна класифікація симетрій Лі систем нелінійних двовимірних рівнянь Лапласа

Р.О. ПОПОВИЧ †, ***Р.М. ЧЕРНІГА*** ‡

Інститут математики НАН України, Київ

† *E-mail: rop@imath.kiev.ua*
‡ *E-mail: cherniha@imath.kiev.ua*

Використовуючи новий підхід, здійснено вичерпний опис симетрій Лі для систем двох зачеплених нелінійних рівнянь Лапласа з двома незалежними змінними. Знайдено низку випадків, коли нелінійні системи інваріантні відносно нескінченновимірних алгебр Лі, що мають структури, аналогічні до алгебри інваріантності відомого рівняння Ліувіля.

Using a new approach, Lie symmetries for nonlinear systems of two coupled Laplace equations with two independent variables are described completely. It is established that some nonlinear systems are invariant with respect to the infinite-dimensional Lie algebras. Those algebras possess similar structures to the Lie algebra of the well-known Liouville equation.

1. Вступ. В останні два-три десятиліття інтенсивно досліджуються системи рівнянь реакції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned} \lambda_1 U_t &= \Delta U + F(U,V), \\ \lambda_2 V_t &= \Delta V + G(U,V), \end{aligned} \tag{1}$$

де F і G — довільно задані дійсні диференційовні функції, λ_1, λ_2 — довільні дійсні сталі, $U = U(t,x)$, $V = V(t,x)$ — шукані функції від $n+1$ змінних t, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, а нижні індекси t біля U і V означають диференціювання за цією змінною. Це пов'язано перш за все з тим, що на них ґрунтуються математичні моделі для опису різноманітних процесів у фізиці, хімії та біології [1–3]. Велика кількість статей присвячена дослідженню існування, єдиності та асимптотичній поведінці розв'язків відповідних крайових задач, у яких накладаються ті чи інші обмеження на функції F і G та розмірність простору n

(див. [3, 4] та цитовану там літературу). Порівняно недавно розпочалися спроби опису алгебр Лі, відносно яких системи вигляду (1) є інваріантними [5, 6]. У роботах [7, 8] здійснено *вичерпний* опис всіх можливих алгебр інваріантності еволюційних систем вигляду (1) в залежності від вигляду пари функцій (F, G). Проте при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ параболічна система (1) вироджується у еліптичну, а це означає, що її симетрійні властивості (структура алгебр інваріантності) суттєво змінюються. Зокрема, виявляється, що випадок $n = 2$ є особливим порівняно з іншими. Отже, у цій роботі розглядатимемо систему еліптичних рівнянь

$$\Delta u = F(u, v), \qquad \Delta v = G(u, v), \tag{2}$$

де $u = u(x)$ та $v = v(x)$ — шукані функції від двох змінних $x = (x_1, x_2)$.

Необхідно дати коротке обґрунтування важливості розгляду системи (2) щодо можливих застосувань. Скажімо, (1+2)-вимірними системами вигляду (1) (при відповідному виборі пари функцій (F, G)) моделюють процеси формування забарвлення хутра у ссавців та крил у комах [3]. Оскільки ці процеси врешті-решт стабілізуються, то остаточна (тобто при $t \to \infty$) просторова структура забарвлення задається функціями, які задовольняють відповідні двовимірні системи вигляду (2). Аналогічна картина спостерігається у випадку моделювання конкуренції (співіснування) тварин чи рослин на певній території. Очевидно, що опис структури розв'язків за допомогою анзаців і сама побудова точних розв'язків для двовимірних рівнянь є суттєво простішою задачою, ніж для тривимірних.

Окрім того, деякі параболічні системи вигляду (1) за допомогою анзаців

$$U(t, x) = \phi_1(t) u(x), \qquad V(t, x) = \phi_2(t) v(x), \tag{3}$$

де ϕ_1, ϕ_2 — відомі функції, вдається звести до відповідних еліптичних систем вигляду (2). Скажімо, системи, інваріантні відносно алгебри Ґалілея $AG(1.n)$ [5, 6], містять нелінійності

$$F = U f(\omega), \qquad G = V g(\omega), \qquad \omega = U^{\lambda_2} V^{-\lambda_1},$$

де f, g — довільні диференційовані функції змінної ω, ліївським анзацом (3) при $\phi_k(t) = \exp(\alpha \lambda_k t)$, $k = 1, 2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ зводяться до еліптичних систем (2) при

$$F = u f(\omega) - \alpha \lambda_1 u, \qquad G = u g(\omega) - \alpha \lambda_2 v, \qquad \omega = u^{\lambda_2} v^{-\lambda_1}.$$

Низку інших пар функцій $(\phi_1(t), \phi_2(t))$ і відповідних нелінійностей F і G, які зводять (1) до (2) за допомогою анзацу (3), можна побудувати на підставі вислідів роботи [7]. Отже, важливість *вичерпного* опису всіх можливих алгебр інваріантності систем вигляду (2) в залежності від вигляду пар функцій (F, G) не повинна викликати сумнівів.

2. Визначальні рівняння та перетворення еквівалентності. Відразу наголосимо, що хоч метод Лі детально розроблений [9–11], проте добре відомо, що задача *повного (вичерпного) опису* всеможливих симетрій Лі для рівнянь, які містять *довільні функції*, є дуже складною. Якщо ж розглядуване диференціальне рівняння (система рівнянь) містить довільну функцію від декількох аргументів, то донедавна вважалося, що ця задача практично нерозв'язна. Проте відразу після розв'язання цієї задачі для системи рівнянь реакції-дифузії (1) вдалося зробити це і для системи (2), застосовуючи дещо інший підхід до класифікації.

Отже, відповідно до класичної схеми Лі [9–11] розгляньмо інфінітезимальний оператор перетворень інваріантності

$$Q = \xi^1(x,u,v)\partial_1 + \xi^2(x,u,v)\partial_2 + \eta^1(x,u,v)\partial_u + \eta^2(x,u,v)\partial_v,$$

коефіцієнти-функції якого ξ^1, ξ^2, η^1, η^2 повинні бути знайдені з так званих визначальних рівнянь, які в нашому випадку породжує система (2). Оскільки на теперішній час процедура отримання визначальних рівнянь практично для будь-яких реальних математичних моделей не викликає труднощів, то ми їх відразу подаємо:

$$\begin{aligned} &\xi^i_u = \xi^i_v = 0, \qquad \xi^1_1 = \xi^2_2, \qquad \xi^1_2 + \xi^2_1 = 0, \\ &\eta^i_{uu} = \eta^i_{uv} = \eta^i_{vv} = 0, \qquad \eta^i_{ju} = \eta^i_{jv} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\eta^1 F_u + \eta^2 F_v = \eta^1_u F + \eta^1_v G - 2\xi^1_1 F + \Delta\eta^1, \\ &\eta^1 G_u + \eta^2 G_v = \eta^2_u F + \eta^2_v G - 2\xi^1_1 G + \Delta\eta^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Тут і нижче індекси i та j приймають значення 1, 2, а нижні індекси означають диференціювання за змінними x_1, x_2, u, v.

З рівнянь (4) випливає, що

$$\begin{aligned} &\xi^1 = \xi^1(x), \qquad \eta^1 = h_{11}u + h_{12}v + \eta^{10}(x), \\ &\xi^2 = \xi^2(x), \qquad \eta^2 = h_{21}u + h_{22}v + \eta^{20}(x), \end{aligned} \tag{6}$$

де $h_{ij} = \text{const}$. Підставляючи вирази (6) для коефіцієнтів інфінітезимального оператора Q в рівняння (5), врешті-решт отримуємо

$$\begin{aligned}
&\left(h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \eta^{10}(x)\right) F_u + \left(h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \eta^{20}(x)\right) F_v \\
&\qquad = h_{11}F + h_{12}G - 2\xi^1_1 F + \Delta\eta^{10}, \\
&\left(h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \eta^{10}(x)\right) G_u + \left(h_{21}x_1 + h_{22}x_2 + \eta^{20}(x)\right) G_v \\
&\qquad = h_{21}F + h_{22}G - 2\xi^1_1 G + \Delta\eta^{20},
\end{aligned} \tag{7}$$

Рівняння (7) є основою для пошуку всеможливих симетрій Лі, які можуть допускати системи вигляду (2). Методика цього пошуку детально буде описана в одній з наших наступних статей. Тут лише зауважимо три важливі моменти, які суттєво використовувалися.

По-перше, неважко помітити, що *будь-яка* система вигляду (2) інваріантна відносно тривимірної алгебри Евкліда $AE(2)$ з базисними операторами

$$P_1 = \partial_1, \quad P_2 = \partial_2, \quad J = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 \tag{8}$$

Більше того, легко довести таке: якщо система вигляду (2) допускає хоч один додатковий оператор інваріантності, то це автоматично накладає обмеження на вигляд функцій F і G. Нижче алгебру $AE(2)$ називатимемо тривіальною алгеброю симетрій Лі системи (2) і вона є ядром всеможливих алгебр Лі, які допускає ця система при фіксованих (конкретних) функціях F і G.

По-друге, необхідно було знайти групу еквівалентності в класі систем (2), тобто групу таких локальних перетворень, при яких вигляд системи не змінюється, попри те, що вигляд власне функцій F і G може змінюватися. З цією метою ми застосували подібний до викладеного в [12] підхід і розглянули однопараметричні групи локальних симетрій системи

$$\Delta u = F, \qquad \Delta v = G, \qquad F_i = G_i = 0, \tag{9}$$

для яких інфінітезимальний оператор має вигляд

$$\begin{aligned}
\widehat{Q} = {}& \hat{\xi}^1(x,u,v)\partial_1 + \hat{\xi}^2(x,u,v)\partial_2 + \hat{\eta}^1(x,u,v)\partial_u + \hat{\eta}^2(x,u,v)\partial_v \\
&+ \hat{\chi}^1(x,u,v,F,G)\partial_F + \hat{\chi}^2(x,u,v,F,G)\partial_G.
\end{aligned}$$

Пошук коефіцієнтів оператора $\widehat{Q}$ відбувається за класичним критерієм інваріантності і легко доводиться до кінця, оскільки тут F і G

розглядаються як залежні змінні. У підсумку отримуємо, що алгебра Лі групи еквівалентності G^{equiv} породжується такими базисними операторами:

$$\begin{aligned}
&\partial_1, \quad \partial_2, \quad J, \quad x_1\partial_1 + x_2\partial_2 - 2F\partial_F - 2G\partial_G, \quad \partial_u, \quad \partial_v,\\
&u\partial_u + F\partial_F, \quad v\partial_u + G\partial_F, \quad u\partial_v + F\partial_G, \quad v\partial_v + G\partial_G.
\end{aligned} \tag{10}$$

Отже, перетворення еквівалентності з G^{equiv}, які нетривіальним чином діють на F і G, мають вигляд

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} = \delta x, \quad \tilde{u} = a_{11}u + a_{12}v + b_1, \quad \tilde{v} = a_{21}u + a_{22}v + b_2,\\
&\tilde{F} = \delta^{-2}(a_{11}F + a_{12}G), \quad \tilde{G} = \delta^{-2}(a_{21}F + a_{22}G),
\end{aligned} \tag{11}$$

де $\delta, a_{ij}, b_i = \mathrm{const}$, $\delta \neq 0$, $\det(a_{ij})_{i,j=1}^2 \neq 0$.

По-третє, для деяких класів систем вигляду (2) (тобто систем з більш конкретизованими функціями F і G) знайдено додаткові перетворення еквівалентності, що не містяться в G^{equiv}. Це дозволило суттєво спростити пошук і зменшити кількість нееквівалентних систем вигляду (2), які допускають розширення тривіальної алгебри $AE(2)$.

3. Основний результат класифікації. Нехай $A^{\max}{=}A^{\max}(F,G)$ — максимальна (в сенсі Лі) алгебра інваріантності (МАІ) системи (2) з конкретно заданими функціями F і G. Тоді існує *51 нееквівалентна система* вигляду (2), кожна з яких інваріантна відносно $A^{\max} \neq AE(2)$. Всі ці випадки природним чином розбиваються на чотири сім'ї:

1. 6 випадків *лінійних* систем вигляду (2), які наведено лише для повноти результату;
2. 5 випадків *нелінійних* систем вигляду (2), інваріантних відносно нескінченновимірних алгебр Лі, що містять підалгебри, ізоморфні алгебрі інваріантності відомого рівняння Ліувіля $\Delta u = \lambda \exp u$;
3. 26 випадків *нелінійних* систем вигляду (2), МАІ яких нескінченновимірні і містять оператори $R(\chi) = \chi(x)\partial_u$, де функція $\chi(x)$ — довільний розв'язок рівняння Пуасона $\Delta\chi = \beta\chi$;
4. 14 випадків *нелінійних* систем вигляду (2) із скінченновимірними МАІ, що є розширеннями тривіальної алгебри $AE(2)$ шляхом додавання одного, двох або трьох додаткових операторів інваріантності.

Сім'я 1. $\Delta u = a_{11}u + a_{12}v + b_1$, $\Delta v = a_{21}u + a_{22}v + b_2$.

Тут a_{ij}, b_i, $i, j = 1, 2$ — довільні дійсні сталі. Оскільки система лінійна, то вона інваріантна відносно операторів

$$\widehat{R}(\chi^1, \chi^2) = \chi^1(x_1, x_2)\partial_{x_1} + \chi^2(x_1, x_2)\partial_{x_2}, \quad I = u\partial_u + v\partial_v,$$

де $\chi = (\chi^1, \chi^2)$ — довільний розв'язок цієї ж системи. В залежності від жорданової форми матриці $(a_{ij})_{i,j=1}^2$, отримуємо шість нееквівалентних класів таких систем, які наводяться нижче разом з базисними операторами з розширень відповідних МАІ.

1.1. $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$:
$\widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, $\xi^1(x_1, x_2)\partial_{x_1} + \xi^2(x_1, x_2)\partial_{x_2}$, $u\partial_u$, $v\partial_v$, $v\partial_u$, $u\partial_v$;

1.2. $\Delta u = v$, $\Delta v = 0$: $\quad \widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, I, $x\partial_x - 2v\partial_v$, $v\partial_u$;

1.3. $\Delta u = \varepsilon u$, $\Delta v = \varepsilon v$: $\quad \widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, $u\partial_u$, $v\partial_v$, $v\partial_u$, $u\partial_v$;

1.4. $\Delta u = \varepsilon u$, $\Delta v = \gamma v$, $\gamma \neq \varepsilon$: $\quad \widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, $u\partial_u$, $v\partial_v$;

1.5. $\Delta u = \gamma u + v$, $\Delta v = \gamma v$, $\gamma \neq 0$: $\quad \widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, I, $v\partial_u$;

1.6. $\Delta u = \gamma u - v$, $\Delta v = u + \gamma v$: $\quad \widehat{R}(\chi^1, \chi^2)$, I, $u\partial_v - v\partial_u$,

де $\varepsilon = \pm 1$, а у випадку 1.1 (ξ^1, ξ^2) — довільний розв'язок системи Коші-Рімана ($\xi^1_1 = \xi^2_2$, $\xi^1_2 = -\xi^2_1$).

Сім'я 2. $\Delta u = f(v)e^u$, $\Delta v = g(v)e^u$.

Тут f і g — довільні дійсні диференційовні функції, не рівні одночасно нулю, тобто $(f, g) \not\equiv (0, 0)$. Системи такого вигляду завжди інваріантні відносно оператора, характерного для рівняння Ліувіля, а саме:

$$L(\xi) = \xi^1(x_1, x_2)\partial_{x_1} + \xi^2(x_1, x_2)\partial_{x_2} - 2\xi^1_1(x_1, x_2)\partial_u,$$

де $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ — довільний розв'язок системи Коші–Рімана $\xi^1_1 = \xi^2_2$, $\xi^1_2 = -\xi^2_1$.

В залежності від вигляду функцій f і g, отримуємо п'ять нееквівалентних класів систем, які наводяться нижче разом з базисними операторами відповідних МАІ.

2.1. $\Delta u = 0$, $\Delta v = e^u$: $\quad L(\xi)$, $R'(\chi)$, $v\partial_v + \partial_u$, $u\partial_v$;

2.2. $\Delta u = \varepsilon e^u$, $\Delta v = 0$: $L(\xi)$, $R'(\chi)$, $v\partial_v$;

2.3. $\Delta u = C_1 e^u v^\mu$, $\Delta v = C_2 e^u v^{\mu+1}$, $(\mu C_1, C_2) \neq (0,0)$:
$L(\xi)$, $v\partial_v - \mu\partial_u$;

2.4. $\Delta u = (C_1 - 2\varepsilon C_2 v)e^{u+\varepsilon v^2}$, $\Delta v = C_2 e^{u+\varepsilon v^2}$, $(C_1, C_2) \neq (0,0)$:
$L(\xi)$, $\partial_v - 2\varepsilon v\partial_u$;

2.5. $\Delta u = f(v)e^u$, $\Delta v = g(v)e^u$ у випадках, що не зводяться до перерахованих вище: $L(\xi)$.

Тут $\varepsilon = \pm 1$, $R'(\chi) = \chi(x)\partial_v$, де $\Delta\chi = 0$.

Сім'я 3. $\Delta u = f(v) + \beta u$, $\Delta v = g(v)$.

Тут f і g — довільно задані дійсні диференційовні функції, для яких $(f'', g'') \neq (0,0)$ і система перетвореннями еквівалентності не зводиться до випадків 2.1 або 2.2 (останнє, зокрема означає, що вектор-функції (f, g) і (f', g') — лінійно незалежні). Системи такого вигляду завжди допускають інфінітезімальний оператор

$$R(\chi) = \chi(x_1, x_2)\partial_u,$$

де $\chi = \chi(x)$ — довільний розв'язок рівняння Пуасона $\Delta\chi = \beta\chi$. В залежності від вигляду функцій f і g, отримуємо 26 нееквівалентних класів систем, які наводяться нижче разом з базисними операторами з розширень відповідних МАІ (скрізь нижче базові оператори тривіальної алгебри $AE(2)$ нами опущені; також введено позначення $x\partial_x \equiv x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}$).

3.1. $\Delta u = v^\mu$, $\Delta v = 0$, $\mu \notin \{0,1\}$:
$R(\chi)$, $2u\partial_u + x\partial_x$, $v\partial_u$, $2v\partial_v - \mu x\partial_x$;

3.2. $\Delta u = \ln v$, $\Delta v = 0$: $R(\chi)$, $2u\partial_u + x\partial_x$, $v\partial_u$, $2v\partial_v + \frac{|x|^2}{2}\partial_u$;

3.3. $\Delta u = f(v)$, $\Delta v = 0$: $R(\chi)$, $2u\partial_u + x\partial_x$, $v\partial_u$;

3.4. $\Delta u = v^2 + \varepsilon u$, $\Delta v = 0$: $R(\chi)$, $2u\partial_u + v\partial_v$, $2v\partial_u - \varepsilon\partial_v$;

3.5. $\Delta u = v^\mu + \varepsilon u$, $\Delta v = \varepsilon v$, $\mu \notin \{0,1\}$: $R(\chi)$, $\mu u\partial_u + v\partial_v$, $v\partial_u$;

3.6. $\Delta u = \ln v + \varepsilon u$, $\Delta v = \varepsilon v$: $R(\chi)$, $\varepsilon v\partial_v - \partial_u$, $v\partial_u$;

3.7. $\Delta u = v^{\mu}$, $\Delta v = \varepsilon$, $\mu \notin \{0,1\}$:
$R(\chi)$, $2(1+\mu)u\partial_u + 2v\partial_v + x\partial_x$, $2v\partial_u - \varepsilon\frac{|x|^2}{2}\partial_u$;

3.8. $\Delta u = \ln v$, $\Delta v = \varepsilon$:
$R(\chi)$, $2u\partial_u + 2v\partial_v + x\partial_x - \frac{|x|^2}{2}\partial_u$, $2v\partial_u - \varepsilon\frac{|x|^2}{2}\partial_u$;

3.9. $\Delta u = e^{v}$, $\Delta v = \varepsilon$: $R(\chi)$, $u\partial_u + \partial_v$, $(2v - \varepsilon\frac{|x|^2}{2})\partial_u$;

3.10. $\Delta u = 0$, $\Delta v = \varepsilon v^{\mu}$, $\mu \notin \{0,1\}$: $R(\chi)$, $u\partial_u$, $2v\partial_v + (1-\mu)x\partial_x$;

3.11. $\Delta u = v\ln v + \gamma_1 u$, $\Delta v = \gamma_2 v$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$:
$R(\chi)$, $u\partial_u + v\partial_v + (\gamma_2 - \gamma_1)^{-1}v\partial_u$;

3.12. $\Delta u = v^{\mu}\ln v$, $\Delta v = \varepsilon v^{\mu}$, $\mu \notin \{0,1\}$:
$R(\chi)$, $2u\partial_u + 2v\partial_v + 2\varepsilon^{-1}v\partial_u + (1-\mu)x\partial_x$;

3.13. $\Delta u = \ln v$, $\Delta v = \varepsilon v^{\mu}$, $\mu \neq 0$:
$R(\chi)$, $2v\partial_v + 2(1-\mu)v\partial_u + \frac{|x|^2}{2}\partial_u + (1-\mu)x\partial_x$;

3.14. $\Delta u = \ln v + \varepsilon u$, $\Delta v = \gamma v$, $\gamma \neq \varepsilon$: $R(\chi)$, $\varepsilon v\partial_v - \partial_u$;

3.15. $\Delta u = v^{\mu} + \gamma_1 u$, $\Delta v = \gamma_2 v$, $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $\mu \neq 0$: $R(\chi)$, $\mu u\partial_u + v\partial_v$;

3.16. $\Delta u = f(v) + \varepsilon u$, $\Delta v = \varepsilon v$: $R(\chi)$, $v\partial_u$;

3.17. $\Delta u = f(v)$, $\Delta v = 1$: $R(\chi)$, $2v\partial_u - \frac{|x|^2}{2}\partial_u$;

3.18. $\Delta u = v^2 + \varepsilon u$, $\Delta v = 1$: $R(\chi)$, $2v\partial_u - \varepsilon\partial_v + 2\varepsilon^{-1}\partial_u$;

3.19. $\Delta u = ve^{v}$, $\Delta v = \varepsilon e^{v}$: $R(\chi)$, $2v\partial_u + 2\varepsilon\partial_v - \varepsilon x\partial_x$;

3.20. $\Delta u = \varepsilon u$, $\Delta v = f(v)$, $f'' \neq 0$: $R(\chi)$, $u\partial_u$;

3.21. $\Delta u = 0$, $\Delta v = f(v)$, функції vf', f', f — лінійно незалежні:
$R(\chi)$, $u\partial_u$;

3.22. $\Delta u = e^{\mu v}$, $\Delta v = \varepsilon e^{v}$, $\mu \neq 0$: $R(\chi)$, $2(\mu-1)u\partial_u + 2\partial_v - x\partial_x$;

3.23. $\Delta u = e^{v} + \varepsilon u$, $\Delta v = \gamma$: $R(\chi)$, $u\partial_u + \partial_v$;

3.24. $\Delta u = v$, $\Delta v = \varepsilon e^{v}$: $R(\chi)$, $2u\partial_u - 2\partial_v + x\partial_x - \frac{|x|^2}{2}\partial_u$;

3.25. $\Delta u = v^{\mu}$, $\Delta v = \varepsilon v^{\nu}$, $\mu\nu \neq 0$, $\mu \neq \nu$:
$R(\chi)$, $2(1+\mu-\nu)u\partial_u + 2v\partial_v + (1-\nu)x\partial_x$;

3.26. $\Delta u = f(v) + \beta u$, $\Delta v = g(v)$, якщо вибрані функції f і g не зводять систему до однієї з перерахованих вище: $R(\chi)$,

де $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$. У випадках 3.3, 3.15, 3.16 функція $f = f(v)$ така, що чотири функції vf', f', f, 1 — лінійно незалежні.

Сім'я 4 репрезентує системи вигляду (2) зі скінченновимірними МАІ розмірності 4, 5 та 6 ($\delta \in \{0;1\}$).

4.1. $\Delta u = \varepsilon v^\mu u$, $\Delta v = \varepsilon v^{\mu+1}$, $\mu \neq 0$: $2v\partial_v - \mu x\partial_x$, $u\partial_u$, $v\partial_u$;

4.2. $\Delta u = f(v)u$, $\Delta v = f(v)v$, $vf' + C$, f', f — лінійно незалежні при довільно вибраній $C = \mathrm{const}$: $u\partial_u$, $v\partial_u$;

4.3. $\Delta u = \varepsilon v^\mu(u + \ln v)$, $\Delta v = \varepsilon v^{\mu+1}$, $\mu \neq 0$:
$4u\partial_u + 2v\partial_v - (2\mu - 1)x\partial_x$, $v\partial_u + \partial_v$, ;

4.4. $\Delta u = \varepsilon v^\mu u + v^{\nu+1}$, $\Delta v = \varepsilon v^{\nu+1}$, $\mu \notin \{\nu, \nu \pm 1, 0\}$:
$2(1 + \nu - \mu)u\partial_u + 2v\partial_v - \mu x\partial_x$, $v\partial_u$;

4.5. $\Delta u = C_2\omega^\mu v + C_1\omega^{\mu+1/2}$, $\Delta v = C_2\omega^\mu$, $\omega = v^2/2 - u$,
$(C_1(2\mu + 1), C_2\mu) \neq (0, 0)$, $C_1^2 + C_2^2 = 1$:
$4u\partial_u + 2v\partial_v - (2\mu - 1)x\partial_x$, $v\partial_u + \partial_v$;

4.6. $\Delta u = v^\mu e^{\delta u/v}(C_2u + C_1v)$, $\Delta v = v^\mu e^{\delta u/v}C_2v$, $C_1^2 + C_2^2 = 1$,
$(\delta C_1, \delta C_2, \mu C_1C_2) \neq (0, 0, 0)$: $2u\partial_u + 2v\partial_v - \mu x\partial_x$, $2v\partial_u - \delta x\partial_x$;

4.7. $\Delta u = u^\mu v^\nu C_1u$, $\Delta v = u^\mu v^\nu C_2v$, $(C_1(\mu + 1), C_2\mu) \neq (0, 0)$,
$(C_1\nu, C_2(\nu + 1)) \neq (0, 0)$, $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$, $(\mu\nu, C_1 - C_2) \neq (0, 0)$,
$C_1^2 + C_2^2 = 1$: $2u\partial_u - \mu x\partial_x$, $2v\partial_v - \nu x\partial_x$;

4.8. $\Delta u = (u^2 + v^2)^{\mu/2}e^{\nu \arctan v/u}(C_1u - C_2v)$, $(\mu, \nu) \neq (0, 0)$,
$\Delta v = (u^2 + v^2)^{\mu/2}e^{\nu \arctan v/u}(C_1v + C_2u)$, $C_1^2 + C_2^2 = 1$:
$2u\partial_u + 2v\partial_v - \mu x\partial_x$, $u\partial_v - v\partial_u - \nu x\partial_x$;

4.9. $\Delta u = e^{\delta u/v}(g(v)u + f(v))$, $\Delta v = e^{\delta u/v}g(v)v$: $2v\partial_u - \delta x\partial_x$;

4.10. $\Delta u = e^{\delta u}(g(\omega)v + f(\omega))$, $\Delta v = e^{\delta u}g(\omega)$, $\omega = v^2/2 - u$:
$2v\partial_u + 2\partial_v - \delta x\partial_x$;

4.11. $\Delta u = v^{\mu+1}(\gamma g(\omega)\ln v + f(\omega))$, $\Delta v = v^{\mu+1}g(\omega)$, $\omega = u/v - \gamma \ln v$,
$\gamma \neq 0$: $2u\partial_u + 2v\partial_u + \gamma v\partial_u - \mu x\partial_x$;

4.12. $\Delta u = u^\mu f(\omega)u$, $\Delta v = u^\mu g(\omega)$, $\omega = v - \ln u$: $2u\partial_u + 2\partial_v - \mu x\partial_x$;

4.13. $\Delta u = u^{\mu} f(\omega) u,\ \Delta v = u^{\mu} g(\omega) v,\ \omega = u^{-\nu} v$: $\quad 2u\partial_u + 2\nu\partial_v - \mu x\partial_x$;

4.14. $\Delta u = e^{\nu \arctan v/u}(f(\omega)u - g(\omega)v)$,
$\Delta v = e^{\nu \arctan v/u}(f(\omega)v + g(\omega)u),\ \omega = \ln(u^2+v^2) - 2\mu \arctan v/u$:
$u\partial_v - v\partial_u + \mu(u\partial_u + v\partial_v) - \nu x\partial_x$.

[1] Ames W.F. Nonlinear partial differential equations in engineering. — New York: Academic Press, 1972.

[2] Aris R. The Mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts, **I**, **II**. — Oxford: Clarendon Press, 1975.

[3] Murray J.D. Mathematical biology. — Berlin: Springer, 1989. — 750 p.

[4] Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

[5] Чернига Р.М. О точных решениях одной нелинейной системы диффузионного типа // Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики. — Киев: Ин-т математики, 1988. — С. 49–53.

[6] Фущич В.І., Черніга Р.М. Ґалілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь типу Гамільтона–Якобі та реакції-дифузії // Доп. АН України. — 1994. — № 3. — С. 31–38.

[7] Cherniha R., King J. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems // J. Phys. A: Math. Gen. — 2000. — **33**. — P. 267–282; 7839–7841.

[8] Cherniha R. Lie symmetries of nonlinear two-dimensional reaction-diffusion systems // Rept. Math. Phys. — 2000. — **46**. — P. 63–76.

[9] Овсянников Л.В. Груповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[10] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. — Berlin: Springer, 1986. — 420 p.

[11] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов М.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с.

[12] Ахатов И.Ш., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНИТИ, 1989. — **34**. — С. 3–83.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 222–226

УДК 517.958

Система коваріантних рівнянь для взаємодіючої частинки зі спіном $3/2$ у (1+1)-вимірному просторі

О.І. САПЄЛКІН

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ

Знайдено сумісну систему коваріантних диференціальних рівнянь для частинки зі спіном $3/2$, що взаємодіє з електромагнітним полем в $(1+1)$-вимірному просторі-часі.

A covariant system of equations for spin $3/2$ particle interacting with electromagnetic field in $(1+1)$-dimensional space-time is found.

1. Вступ. Успіхи суперсиметричних квантових теорій поля знову поставили в ряд найактуальніших теорію частинок із вищим значенням спіна. Незважаючи на те, що релятивістським хвильовим рівнянням присвячене величезна кількість робіт, є всі підстави стверджувати, що задовільна модель частинки зі спіном більше одиниці дотепер не побудована. Теорія таких рівнянь стикається з труднощами принципового характеру (головні з яких пов'язані з порушенням принципу причинності).

Можливо, подібних недоліків можна уникнути в рамках коваріантних систем диференціальних рівнянь, ідея яких була запропонована в одній з останніх робіт Дірака [4]. Кожне окремо рівняння такої системи не інваріантне щодо перетворень із групи Пуанкаре. Властивістю інваріантності володіє тільки сукупність усіх рівнянь системи. Коваріантним системам рівнянь для вільних частинок присвячені роботи [1, 2, 3]. Але досі жодного прикладу подібних систем з урахуванням взаємодії для частинок зі спіном більше $1/2$ запропоновано не було. В даній роботі вперше пропонується коваріантна система для частинки зі спіном $3/2$, що взаємодіє з електромагнітним полем в $(1+1)$-вимірному просторі-часі.

Будемо виходити з коваріантної системи наступного вигляду:

$$L_n\psi(x) = (-s\pi_n + S_{n\alpha}\pi^\alpha + \kappa S_{n2} + B_n^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\psi(x) = 0, \quad n = 0, 1, \tag{1}$$

де матриці $S_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = \overline{0, 2}$, утворюють зображення алгебри $AO(1, 2)$ і задовольняють комутаційним співвідношенням:

$$[S_{\mu\nu}, S_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}S_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}S_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}S_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}S_{\mu\lambda}),$$

$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = 1$, $g_{01} = g_{10} = g_{02} = g_{20} = g_{21} = g_{12} = 0$; κ, s — числові параметри. За повторювальними грецькими індексами йде коваріантне підсумування, $S_{n\alpha}p^{\alpha} = S_{n0}p_0 - S_{n1}p_1$, і застосовується система одиниць Хевісайда, у якій $h = c = 1$. Рівняння (1) включає як члени, що відповідають мінімальній взаємодії та отримуються заміною

$$p_n \Rightarrow \pi_n = p_n - eA_n$$

де $p_0 = p^0 = i\frac{\partial}{\partial x_0}$, $p_1 = -p^1 = -i\frac{\partial}{\partial x_1}$, A_n — вектор-потенціал електромагнітного поля, e — заряд частинки, так і члени $B_n^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, що відповідають аномальній взаємодії типу Паулі. Тут $F_{ab} = -i[\pi_a, \pi_b]$ — тензор електромагнітного поля а $B_n^{\mu\nu}$ — числові матриці, що підлягають визначенню з умов сумісності й інваріантності.

З урахуванням того, що у двовимірному випадку тільки F_{01} та F_{10} відмінні від нуля, введемо позначення

$$F_{01} = F, \qquad B_n = B_n^{10} - B_n^{01}, \qquad n = 0, 1$$

і запишемо систему (1) у зручному для подальшого дослідження вигляді

$$\begin{aligned} L_0\psi(x) &= (s\pi_0 + S_{01}\pi_1 - \kappa S_{02} + B_0F)\psi(x) = 0, \\ L_1\psi(x) &= (s\pi_1 + S_{01}\pi_0 - \kappa S_{12} + B_1F)\psi(x) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

2. Про сумісність системи (2). Шляхом нескладних обчислень можна показати, що комутатор операторів L_0 і L_1 матиме вигляд

$$\begin{aligned} [L_0, L_1]\psi(x) = ((\kappa S_{12} - B_1F)L_0 + (-\kappa S_{02} + B_0F)L_1 + \\ +\kappa(S_{01}S_{02} - sS_{12})\pi_0 + \kappa(sS_{02} - S_{01}S_{12})\pi_1 + i(s^2 - S_{01}^2)F + \\ +(sB_1 - S_{01}B_0)\pi_0F + (S_{01}B_1 - sB_0)\pi_1F)\psi(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Права частина співвідношення (3) не включає додаткових умов на $\psi(x)$, якщо вона є диференціальним наслідком системи (2), або лінійною комбінацією операторів рівнянь із матричними коефіцієнтами, що не залежать від похідних (такими є доданки в першому рядку комутатора, які тому далі можуть не розглядатися).

Має місце наступна

Теорема. *Система (2) сумісна, якщо:*

1) система

$$K\left(s^2 - S_{01}^2\right) = \kappa(G_0 s - G_1 S_{01}), \qquad KG_1 + \kappa G_1 S_{01} = 0,$$

має ненульовий розв'язок K; тут

$$G_0 = (S_{01}S_{02} - sS_{12}), \qquad G_1 = (sS_{02} - S_{01}S_{12});$$

2) матриці B_0, B_1 задовольняють рівняння

$$sB_1 - S_{01}B_0 = 0, \qquad S_{01}B_1 - sB_0 = 0, \qquad G_1 B_1 = \frac{is}{\kappa}\left(s^2 - S_{01}^2\right).$$

Доведення. Дійсно, нехай існують такі матриці K_0, K_1, що лінійна комбінація

$$K_0L_0 + K_1L_1 = (sK_0 + K_1S_{01})\pi_0 + (K_0S_{01} + sK_1)\pi_1 -$$
$$-\kappa(K_0S_{02} + K_1S_{12}) + (K_0B_0 + K_1B_1)F$$

співпадає з правою частиною (3). Тоді повинні виконуватися перші два рівняння другої частини теореми, тому що ця лінійна комбінація не містить похідних від F, що входять в останній рядок комутатора (3). Далі необхідно, щоб співпадали коефіцієнти при однакових степенях операторів похідних. Тому

$$sK_0 + K_1S_{01} = \kappa G_0, \qquad K_0S_{01} + sK_1 = \kappa G_1.$$

Після нескладних перетворень знайдемо, що

$$K_0(s^2 - S_{01}^2) = \kappa(G_0 s - G_1 S_{01}),$$
$$K_1 = (K_0S_{01} - \kappa G_1)/s.$$

Припускаючи, що перше рівняння цієї системи має розв'язок, скористаємося виразом K_1 через K_0 та отримаємо

$$K_0L_0 + K_1L_1 = \kappa(S_{01}S_{02} - sS_{12})\pi_0 - \kappa(sS_{02} - S_{01}S_{12})\pi_1 +$$
$$-\frac{\kappa}{s}(K_0G_1 + \kappa G_1 S_{12}) + \frac{\kappa}{s}G_1B_1F.$$

Якщо тепер, прирівняти відповідні коефіцієнти останнього виразу та комутатора (3), то остаточно отримаємо рівняння, що фігурують в твердженні теореми.

Зауважимо, що в доведені не використовувалися властивості матриць S_{01}, S_{02}, S_{12} , що значно розширює клас систем вигляду (2) до яких можна застосувати доведену теорему.

3. Спін 3/2. Виберемо матриці S_{01}, S_{02}, S_{12} наступним чином:

$$S_{01} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$S_{02} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_{12} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

а $s = -\frac{3}{2}i$. Ці матриці утворюють незвідне зображення алгебри $AO(1,2)$, яке ізоморфне зображенню $D(\frac{3}{2})$ алгебри $AO(3)$, що дає підстави інтерпритувати систему як рівняння для частинки зі спіном $\frac{3}{2}$.

Неважко переконатися, що для таким чином вибраних матриць, рівняння першої частини теореми справедливі, а рівняння другої частини мають єдиний розв'язок

$$B_0 = \frac{\sqrt{3}}{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{\sqrt{3}}{\kappa} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо вираз матриць B_0, B_1 через матриці S_{02} та S_{12}:

$$B_0 = \frac{i}{\kappa} \left(\frac{1}{2} \left(S_{02}^2 S_{12} - S_{12} S_{02}^2 \right) - S_{12}^3 + S_{02} S_{12} S_{02} + 3 S_{12} \right),$$

$$B_1 = \frac{i}{\kappa} \left(\frac{1}{2} \left(S_{02} S_{12}^2 - S_{12}^2 S_{02} \right) + S_{12} S_{02} S_{12} - S_{02}^3 + 3 S_{02} \right).$$

Мають місце комутаційні співвідношення:

$$[S_{01}, B_0] = -iB_1, \qquad [S_{01}, B_1] = -iB_0,$$

з яких випливає коваріантність знайденої системи відносно перетворень Лоренца у двовимірному просторі-часі.

Таким чином, побудовано систему коваріантних рівнянь (2), яка узагальнює системи, що розглядаються у роботах [1, 2, 3] на випадок частинки, що взаємодіє. Тобто, вперше доведено, що таке узагальнення існує, принаймні у двовимірному випадку. Зауважимо, що завдяки успіхам по експериментальному створенню двовимірних квантових мембран рівняння в просторах малої розмірності мають не тільки академічний інтерес.

Автор висловлює подяку доктору фіз.-мат. наук А.Г. Нікітіну за постоновку задачі та змістовні консультації під час дослідження.

[1] Сокур Л.П., Фущич В.И. Об уравнениях движения, инвариантных относительно группы $P(1,n)$. II // Теор. и матем. физика. — 1971. — **6**, № 3. — С. 348–362.

[2] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1990. — 400 с.

[3] Bakri M.M. De-Sitter symmetry field theory. I. One particle theory // J. Math. Phys. — 1969. — **10**, № 2. — 298–320.

[4] Dirac P.A.M. A positive-energy relativistic wave equation // Phys. Rev. D. — 1974. — **10**, № 6. — P. 1760–1767.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 227–236

UDC 517.95

Nonlocal symmetries and formal symmetries for evolution equations with constraints

A. SERGYEYEV

Mathematical Institute, Silesian University in Opava, Czech Republic
and
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: Artur.Sergyeyev@math.slu.cz, arthurser@imath.kiev.ua

Розглянуто нелокальні симетрії, асоційовані з універсальними абельовими накриттями над (1+1)-вимірними еволюційними системами зі зв'язками, і показано, що похідні по напрямку цих симетрій є формальними симетріями для таких систем, чим узагальнено аналогічні результати для локальних симетрій. Наведено також деякі споріднені результати.

We consider the nonlocal symmetries associated with the universal Abelian coverings over (1+1)-dimensional evolution systems with constraints. We show that the directional derivatives of these symmetries are formal symmetries for the systems in question, thus generalizing similar results concerning local symmetries. Some related results are also presented.

1. Introduction. There is a profound connection between generalized symmetries [1]–[6] and formal symmetries [4, 5, 7, 8, 9] of (1+1)-dimensional evolution equations. Namely, the directional derivative of a (local) generalized symmetry turns out to be a formal symmetry for the same equation. This fact enabled Mikhailov et al. [7, 8] to obtain easily verifiable necessary conditions of existence of higher order symmetries of evolution equations in (1+1) dimensions and present complete lists of integrable (1+1)-dimensional evolution equations of low order.

The milestone of this approach is *locality* (see, however, [8, 9]) of equations, symmetries and coefficients of formal symmetries. The nonlocalities were incorporated in this scheme by Mukminov and Sokolov [10], who have shown that the above connection between symmetries and formal symmetries remains valid for time-independent (1+1)-dimensional evolution systems with constraints and their time-independent symmetries and formal symmetries.

The aim of present paper is to extend some results of [10] to the case of *time-dependent* evolution systems with constraints and their time-dependent symmetries and formal symmetries. This extension is required, in particular, for the study of time-dependent symmetries of evolution equations with constraints and integrable evolution systems with time-dependent coefficients, e.g. those considered in [11].

Consider a system of evolution equations with constraints (cf. [10])

$$\partial \mathbf{u}/\partial t = \mathbf{F}(x, t, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}_{n'}, \vec{\omega}^{(0)}) \tag{1}$$

for the unknown vector function $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^s)^T$. Here $\mathbf{u}_j = \partial^j \mathbf{u}/\partial x^j$, $\mathbf{u}_0 \equiv \mathbf{u}$ and $\mathbf{F} = (F^1, \dots, F^s)^T$; $()^T$ denotes the matrix transposition; $\vec{\omega}^{(0)}$ stands for the vector of variables $\omega_\alpha^{(0)}$, $\alpha \in \mathcal{I}_0$, where $\mathcal{I}_0$ is some indexing set. The quantities $\omega_\alpha^{(0)}$, $\alpha \in \mathcal{I}_0$, usually interpreted as nonlocal variables, are defined here by means of the relations [10, 13]

$$\partial \omega_\alpha^{(0)}/\partial x = X_\alpha(x, t, \vec{\omega}^{(0)}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots), \tag{2}$$

$$\partial \omega_\alpha^{(0)}/\partial t = T_\alpha(x, t, \vec{\omega}^{(0)}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots), \tag{3}$$

where X_α and T_α for any given α depend only on a finite number of variables $\mathbf{u}_k$ and $\omega_\alpha^{(0)}$.

Let $\mathcal{A}_{0,j}$ denote the algebra (under the standard multiplication) of scalar locally analytic functions of $x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \vec{\omega}^{(0)}$ such that any given function $f \in \mathcal{A}_{0,j}$ depends only on a finite number of variables $\omega_\alpha^{(0)}$, and let $\mathcal{A}_0 = \bigcup_{j=0}^\infty \mathcal{A}_{0,j}$.

The operators of total x- and t-derivatives on $\mathcal{A}_0$ have the form [13]

$$D_x^{(0)} = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^\infty \mathbf{u}_{i+1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_0} X_\alpha \frac{\partial}{\partial \omega_\alpha},$$

$$D_t^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=0}^\infty D^i(\mathbf{F}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_i} + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_0} T_\alpha \frac{\partial}{\partial \omega_\alpha}.$$

As in [10, 13], we shall require that $[D_x^{(0)}, D_t^{(0)}] = 0$ or, equivalently, $D_t^{(0)}(X_\alpha) = D_x^{(0)}(T_\alpha)$ for all $\alpha \in \mathcal{I}_0$.

Following [12, 13], let us describe the construction of universal Abelian covering (UAC) $\mathcal{U}$ over a system of PDEs for the particular case of system (1)–(3). More precisely, the covering described below is just a representative of the class of equivalent coverings, and the authors of [12, 13] identify UAC with this equivalence class.

The covering $\mathcal{U}$ involves the infinite set of nonlocal variables $\omega_\alpha^{(j)}$ defined by the relations

$$\partial\omega_\alpha^{(j)}/\partial x = \rho_\alpha^{(j-1)}, \qquad \alpha \in \mathcal{I}_j, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

$$\partial\omega_\alpha^{(j)}/\partial t = \sigma_\alpha^{(j-1)}, \qquad \alpha \in \mathcal{I}_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

The set $\mathcal{I}_{k+1}$, $k \geq 0$, is a set of indices such that the conservation laws $D_t(\rho_\alpha^{(k)}) = D_x(\sigma_\alpha^{(k)})$ for $\alpha \in \mathcal{I}_{k+1}$ form a basis in the set $\mathrm{CL}_F^{(k)}$ of all nontrivial local conservation laws of the form $D_t(\rho) = D_x(\sigma)$ for the system of equations (1)–(3) and (4), (5) with $j = 1, \ldots, k$ (for the system (1)–(3) only, if $k = 0$). The locality means that the densities ρ and fluxes σ of conservation laws from $\mathrm{CL}_F^{(k)}$ depend only on $x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots$ and $\vec{\omega}^{(0)}, \vec{\omega}^{(1)}, \ldots, \vec{\omega}^{(k)}$ but not on $\vec{\omega}^{(m)}$ with $m > k$, and any given density or flux depends only on a finite number of $\mathbf{u}_r$ and of $\omega_\alpha^{(j)}$. The nontriviality of a conservation law $D_t(\rho) = D_x(\sigma)$ from $\mathrm{CL}_F^{(k)}$ means (cf. [1, 13]) that there is no function $f = f(x, t, \vec{\omega}^{(0)}, \vec{\omega}^{(1)}, \ldots, \vec{\omega}^{(k)}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots)$ which depends only on a finite number of $\mathbf{u}_r$ and $\omega_\alpha^{(j)}$ and is such that $\rho = D_x(f)$ and $\sigma = D_t(f)$. Here $\vec{\omega}^{(k)}$ stands for the totality of variables $\omega_\alpha^{(k)}$, $\alpha \in \mathcal{I}_k$, combined in an (infinite-dimensional) vector. Likewise, we shall denote by $\vec{\omega}$ the (infinite-dimensional) vector of variables $\omega_\alpha^{(j)}$ for all j and α.

The operators of total derivatives on the space of functions of $x, t, \vec{\omega}$, $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots$, which we have used above, are

$$D \equiv D_x = D_x^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_j} \rho_\alpha^{(j-1)} \partial/\partial\omega_\alpha^{(j)},$$

$$D_t = D_t^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_j} \sigma_\alpha^{(j-1)} \partial/\partial\omega_\alpha^{(j)}.$$

The relations $D_t(\rho_\alpha^{(k)}) = D_x(\sigma_\alpha^{(k)})$ imply the compatibility of (4) and (5). In turn, the latter and $[D_x^{(0)}, D_t^{(0)}] = 0$ imply $[D_x, D_t] = 0$.

We shall say (cf. [10, 13]) that a function $f = f(x, t, \vec{\omega}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \ldots)$ is a *nonlocal UAC* function, if a) f depends only on a finite number of variables $\omega_\alpha^{(j)}$ and $\mathbf{u}_k$ and b) f is a locally analytic function of its arguments. We shall call f a nonlocal UAC function of level k, if f is a nonlocal UAC function independent of $\omega_\alpha^{(j)}$ for $j > k$.

2. The structure of $\ker D$**.** Let $\mathcal{A}$ be the algebra of all scalar nonlocal UAC functions under the standard multiplication. Now let us prove (cf. [10]) that the kernel of operator D in $\mathcal{A}$ consists solely of functions of t, provided the same is true for the algebra $\mathcal{A}_0$. Note that the fact that $\ker D\,|_{\mathcal{A}_{\rm loc}}$ is exhausted by functions of t is well known, see e.g. [1].

We shall call an algebra $\mathcal{L}$ of scalar nonlocal UAC functions (under standard multiplication) *admissible*, if it has the following properties:

- for any locally analytic function $h(y_1,\dots,y_p)$ and for any $a_j \in \mathcal{L}$ we have $h(a_1,\dots,a_p) \in \mathcal{L}$;
- $\mathcal{L}$ is closed under the action of D and D_t;
- there exists a subalgebra $\tilde{\mathcal{A}}_0$ of $\mathcal{A}_0$ such that i) $\mathcal{A}_{\rm loc} \subset \tilde{\mathcal{A}}_0$; ii) all elements of $\tilde{\mathcal{A}}_0$ may depend only on $x, t, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots$ and on a fixed finite set $\omega_{\alpha_1}^{(0)},\dots,\omega_{\alpha_k}^{(0)}$, $\alpha_i \in \mathcal{I}_0$, of nonlocal variables $\omega_\beta^{(0)}$; iii) $\mathcal{L}$ is obtained from $\tilde{\mathcal{A}}_0$ by means of a finite sequence of extensions.

The third property means that there exists a finite chain of admissible algebras $\mathcal{L}_0 = \tilde{\mathcal{A}}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_m = \mathcal{L}$ such that $\mathcal{L}_j$ is generated by the elements of $\mathcal{L}_{j-1}$ and just one new nonlocal variable ψ_j, defined by means of the relations $\partial\psi_j/\partial t = \eta_j$, $\partial\psi_j/\partial t = \xi_j$, (informally, $\psi = D^{-1}(\eta_j)$), where $\eta_j \in \mathcal{L}_{j-1}$ is such that $\eta_j \notin \operatorname{Im} D|_{\mathcal{L}_{j-1}}$ and $D_t(\eta_j) = D(\xi_j)$ for some $\xi_j \in \mathcal{L}_{j-1}$, cf. [10]. Obviously, $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ for any admissible $\mathcal{L}$.

Consider a nonlocal UAC function f of level $k \geq 1$ (the case of level $k = 0$ is trivial, as $\ker D|_{\mathcal{A}_0}$ contains only functions of t by assumption). It may depend only on a finite number m of variables $\omega_\alpha^{(j)}$, and it is easy to see that there exists a minimal (i.e., obtained from the smallest suitable $\tilde{\mathcal{A}}_0$ by means of the minimal possible number of extensions) admissible algebra $\mathcal{K}$ of scalar nonlocal UAC functions which contains f.

It is clear that in order to prove that $f \in \ker D$ implies that f depends on t only it suffices to prove that $\ker D|_{\mathcal{K}}$ consists solely of functions of t. In order to proceed, we shall need the following

Lemma 1. *Let $\mathcal{L}$ be an admissible algebra, $\ker D|_{\mathcal{L}}$ consist solely of functions of t, and $\tilde{\mathcal{L}}$ be the extension of $\mathcal{L}$ obtained by adding the nonlocal variable $\zeta = D^{-1}(\gamma)$, where $\gamma \in \mathcal{L}$ is such that $\gamma \notin \operatorname{Im} D|_{\mathcal{L}}$ and $D_t(\gamma) \in \operatorname{Im} D|_{\mathcal{L}}$. Then $\tilde{\mathcal{L}}$ is admissible and $\ker D|_{\tilde{\mathcal{L}}}$ also consists solely of functions of t.*

Proof. The admissibility of $\tilde{\mathcal{L}}$ is obvious from the above, so it remains to describe $\ker D|_{\tilde{\mathcal{L}}}$. By definition, the elements of $\mathcal{L}$ may depend only on a finite number of variables $\omega_\alpha^{(j)}$. To simplify writing, we shall denote them by $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

Let $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{L}$ be the algebra of all locally analytic functions of $x, t, \mathbf{u}$, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$, where p is the minimal number such that $\mathcal{B}_0$ contains γ and $D(\zeta_i)$ for $i = 1, \ldots, m$. It is clear that such p does exist.

Consider the following chain of subalgebras of $\mathcal{L}$: $\mathcal{B}_{j+1} = \{h \in \mathcal{B}_j \mid D|_{\mathcal{L}}(h) = g\gamma, g \in \mathcal{B}_j\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Any locally analytic function of elements of $\mathcal{B}_j$ obviously belongs to $\mathcal{B}_j$.

As $\mathcal{B}_0$ is generated by $s(p+1) + m + 2$ elements $x, t, u^I, u^I_1, \ldots, u^I_p$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, where $I = 1, \ldots, s$, we conclude that $\mathcal{B}_{j+1} = \mathcal{B}_j$ for $j \geq s(p+1) + m + 2$ (cf. [10]). Indeed, by construction $\mathcal{B}_{j+1} \subset \mathcal{B}_j$, and hence the functional dimension d_{j+1} of $\mathcal{B}_{j+1}$ does not exceed that of $\mathcal{B}_j$. If these dimensions coincide, then we have $\mathcal{B}_{j+1} = \mathcal{B}_j$, and otherwise $d_{j+1} \leq d_j - 1$. Since $d_0 = s(p+1) + m + 2$, it is clear that $d \equiv d_{s(p+1)+m+2} \leq 1$, provided $\mathcal{B}_{j+1} \neq \mathcal{B}_j$ for $j = 0, \ldots, s(p+1) + m + 1$. On the other hand, $d \geq 1$, because in any case $\mathcal{B}_{s(p+1)+m+2}$ contains the algebra of (all locally analytic) functions of t, and the result follows. Thus, $\mathcal{B}_{s(p+1)+m+2}$ is the algebra of all locally analytic functions of some its elements $z_1, \ldots, z_d$, i.e., it is generated by $z_1, \ldots, z_d$.

Let $f = f(x, t, \mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u}_q, \zeta_1, \ldots, \zeta_m, \zeta) \in \ker D|_{\tilde{\mathcal{L}}}$, $\partial f/\partial\zeta \neq 0$. Differentiating the equality $D(f) = 0$ with respect to $\mathbf{u}_j$, $j > p$, we obtain $\partial f/\partial \mathbf{u}_j = 0$ for $j > p$. Thus, $f \in \mathcal{B}_0$ for any fixed value of ζ. We have

$$D(f) = D|_{\mathcal{L}}(f) + \gamma \partial f/\partial\zeta = 0. \tag{6}$$

But (6) implies that $f \in \mathcal{B}_1$ for any fixed value of ζ. Then, again by virtue of (6), we have $f \in \mathcal{B}_2$ for any fixed ζ, and so on.

Thus, $f \in \mathcal{B}_{s(p+1)+m+2}$ for any fixed value of ζ and $D|_{\mathcal{L}}(f) \neq 0$. Hence, the operator $D|_{\mathcal{B}_{s(p+1)+m+2}}$ is nonzero, and $D|_{\mathcal{B}_{s(p+1)+m+2}} = \gamma X$, where X is a nonzero vector field on the space of variables $z_1, \ldots, z_d$.

Let $w \in \mathcal{B}_{s(p+1)+m+2}$ be a solution of the equation $X(w) = 1$. Then $D|_{\mathcal{L}}(w) = \gamma$, what contradicts the assumption that $\gamma \notin \operatorname{Im} D|_{\mathcal{L}}$. The contradiction proves the lemma.

The desired result about $\ker D|_{\mathcal{K}}$ readily follows, if we successively apply the above lemma for $\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{A}}_0$ and $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_1$, then for $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1$ and $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}_2$, and so on, and take into account that by assumption $\ker D|_{\tilde{\mathcal{A}}_0}$ is exhausted by functions of t. From this we immediately infer that $\ker D|_{\mathcal{L}_m}$, $\mathcal{L}_m = \mathcal{K}$, consists solely of functions of t.

The above reasoning applies to any $f \in \mathcal{A}$, so we have proved

Proposition 1. *Let the kernel of the operator D in $\mathcal{A}_0$ consist of functions of t only. Then the same is true for the kernel of D in $\mathcal{A}$.*

Let us stress that this proposition is not valid for the functions that depend on an *infinite* number of variables $\mathbf{u}_j$ and $\omega_\alpha^{(k)}$ at once.

Proposition 1 has many interesting applications in the study of symmetries for the system (1)–(3). Indeed, provided (1)–(3) satisfies the conditions of Proposition 1, we can apply the results from [14] on the structure of nonlocal symmetries and formal symmetries not only to the symmetries and formal symmetries whose coefficients are nonlocal UAC functions of level zero, but also to those with the coefficients being arbitrary nonlocal UAC functions. In particular, this fact enables us easily check the commutativity and time independence of nonlocal symmetries for (1)–(3), see [14] for more details. This also opens the way for the extension of the results of Sokolov [5] to a large class of systems (1)–(3).

Note that under the conditions of Proposition 1 it is immediate that $\ker D \cap \ker D_t$ in $\mathcal{A}$ consists solely of constants, and hence by Proposition 1.4 from § 1 of Chapter 6 of [13] universal Abelian covering over (1)–(3) is locally irreducible.

Next, if $\ker D$ in $\mathcal{A}$ is exhausted by functions of t, then the conservation law $D_t(\rho) = D(\sigma)$, where ρ and σ are nonlocal UAC functions of level k, for the system (1)–(3) and (4), (5) with $j = 1, \ldots, k$ is trivial if and only if there exists a nonlocal UAC function f of level k such that $\rho = D(f)$, cf. [7]. In other words, the condition $\sigma = D_t(f)$ can be dropped.

Indeed, if $\rho = D(f)$, then $D(\sigma) = D_t(\rho) = D_t(D(f)) = D(D_t(f))$, whence by Proposition 1 $\sigma = D_t(f) + h(t)$, where $h(t)$ is a function of t. But we can replace f by $\tilde{f} = f + \int_{t_0}^{t} h(\tau)d\tau$. Then $\rho = D(\tilde{f})$ and $\sigma = D_t(\tilde{f})$, and the result follows.

3. Directional derivatives of nonlocal UAC functions. Now let us show that the directional derivative of any nonlocal UAC function f can be represented as a formal series in powers of D. Let $\mathcal{I} = \cup_{j=0}^{\infty} \mathcal{I}_j$ be the indexing set labelling the variables $\omega_\alpha^{(j)}$ for all α and j. To simplify writing, below we denote the components of the vector $\vec{\omega}$ by ω_β, $\beta \in \mathcal{I}$, instead of $\omega_\alpha^{(j)}$ and write the equations (2), (3), (4), (5) for all $\alpha \in \mathcal{I}$ in the unified form $\partial\omega_\alpha/\partial x = X_\alpha$, $\partial\omega_\alpha/\partial t = T_\alpha$.

Let $\mathrm{Mat}_p(\mathcal{A})[\![D^{-1}]\!]$ be the set of *formal series* in powers of D of the form $\mathfrak{H} = \sum_{j=-\infty}^{q} h_j D^j$, where h_j are $p \times p$ matrices with entries from $\mathcal{A}$, cf. e.g. [7, 8], and $\mathcal{A}[\![D^{-1}]\!] \equiv \mathrm{Mat}_1(\mathcal{A})[\![D^{-1}]\!]$. The *degree* of $\mathfrak{H} \in \mathrm{Mat}_p(\mathcal{A})[\![D^{-1}]\!]$ is (see e.g. [8]) the greatest $m \in \mathbb{Z}$ such that $h_m \neq 0$. The notation is $m = \deg \mathfrak{H}$. We assume (cf. [1]) that $\deg 0 = -\infty$.

The set $\mathrm{Mat}_p(\mathcal{A})[\![D^{-1}]\!]$ is an algebra with respect to the multiplication law, given by the "generalized Leibniz rule", cf. [1],

$$aD^i \circ bD^j = a \sum_{q=0}^{\infty} \frac{i(i-1)\cdots(i-q+1)}{q!} D^q(b) D^{i+j-q} \tag{7}$$

for monomials aD^i, bD^j, $a, b \in \mathrm{Mat}_p(\mathcal{A})$, and extended by linearity to the whole $\mathrm{Mat}_p(\mathcal{A})[\![D^{-1}]\!]$. Below we shall omit $\circ$ if this is not confusing. The commutator $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \circ \mathfrak{A}$ endows $\mathrm{Mat}_p(\mathcal{A})[\![D^{-1}]\!]$ with the structure of Lie algebra.

Consider the directional derivative of a function $\vec{f} \in \mathcal{A}^q$ along $\mathbf{H} \in \mathcal{A}^s$, i.e., $\vec{f}'[\mathbf{H}] = (d\vec{f}(x, t, \mathbf{u} + \epsilon\mathbf{H}, \mathbf{u}_1 + \epsilon D_x(\mathbf{H}), \ldots)/d\epsilon)_{\epsilon=0}$, see e.g. [3]. If $f \in \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$, then $f'[\mathbf{H}] = \sum_{i=0}^{\infty} \partial f/\partial \mathbf{u}_i D^i(\mathbf{H})$ is a well-defined nonlocal UAC function for any $\mathbf{H} \in \mathcal{A}^s$, and $f' = \sum_{i=0}^{\infty} \partial f/\partial \mathbf{u}_i D^i$ is a differential operator, cf. e.g. [5, 8]. In general, for $f \in \mathcal{A}$ we have

$$f'[\mathbf{H}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_k} D^k(\mathbf{H}) + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \frac{\partial f}{\partial \omega_\alpha} {\omega'}_\alpha[\mathbf{H}]. \tag{8}$$

On the other hand, for any $f \in \mathcal{A}$ we have (cf. [10])

$$df - D_t(f)dt - D_x(f)dx = f'[d\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 dx - \mathbf{F}dt]. \tag{9}$$

This formula is valid provided $\mathbf{u}$ satisfies (1), and is the immediate consequence of definition of directional derivative. Moreover, it is clear that f' determined from (9) is the same as that defined by (8).

At the first sight, equation (9) is incorrect. Indeed, we have

$$df - D(f)dx - D_t(f)dt = \sum_{j=0}^{\infty} \partial f/\partial \mathbf{u}_j (d\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j+1}dx - D^j(\mathbf{F})dt) +$$

$$+ \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \partial f/\partial \omega_\alpha (d\omega_\alpha - X_\alpha dx - T_\alpha dt).$$

While the first sum in this expression can be readily rewritten in the required form as $\sum_{j=0}^{\infty} \partial f/\partial \mathbf{u}_j D^j(d\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 dx - \mathbf{F}dt)$, it is by no means clear how this can be done with the second sum. Fortunately, in analogy with [10] we can show that the incorrectness of (9) is apparent.

Following [10], let us extend the action of total derivatives D, D_t to the space of 1-forms spanned by $dx, dt, d\omega_\alpha$, $du^I, du_1^I, \ldots$, where $I = 1, \ldots, s$ and $\alpha \in \mathcal{I}$, using the formulas $D(a_i db_i) = D(a_i)db_i + a_i d(D(b_i))$, $D_t(a_i db_i) = D_t(a_i)db_i + a_i d(D_t(b_i))$. We have

$$\begin{aligned} D(d\omega_\alpha - X_\alpha dx - T_\alpha dt) = \sum_{i=0}^{\infty} \partial X_\alpha / \partial \mathbf{u}_i (d\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i+1} dx - \\ - D^i(\mathbf{F})dt) + \sum_{\beta \in \mathcal{I}} \partial X_\alpha / \partial \omega_\beta (d\omega_\beta - X_\beta dx - T_\beta dt). \end{aligned} \tag{10}$$

If we introduce (cf. [10]) the (infinite-dimensional) matrix W with the entries $\partial X_\alpha / \partial \omega_\beta$, the vectors $\vec{X}$, $\vec{T}$ with the components X_α, T_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, and the formal series $\vec{\mathrm{B}}_I = \sum_{i=0}^{\infty} \partial \vec{X} / \partial u_i^I D^i$, then we can rewrite (10) as $(D - W)(d\vec{\omega} - \vec{X} dx - \vec{T} dt) = \sum_{I=1}^{s} \vec{\mathrm{B}}_I (du^I - u^I dx - F^I dt)$.

The (formal) inverse of the operator $D - W$ is well known to be $(D - W)^{-1} = D^{-1} + D^{-1} \circ W \circ D^{-1} + \ldots$. So, we have $d\vec{\omega} - \vec{X} dx - \vec{T} dt = \sum_{I=1}^{s} \vec{M}_I (du^I - u_1^I dx - F^I dt)$, where $\vec{M}_I = (D - W)^{-1} \circ \vec{B}_I$. Denote the components of $\vec{M}_I$ by $M_{\alpha,I}$, $\alpha \in \mathcal{I}$. Then we obtain

$$\begin{aligned} df - D(f)dx - D_t(f)dt = \sum_{j=0}^{\infty} \partial f / \partial \mathbf{u}_j D^j (d\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 dx - \mathbf{F} dt) + \\ + \sum_{I=1}^{s} \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \partial f / \partial \omega_\alpha M_{\alpha,I} (du^I - u_1^I dx - F^I dt). \end{aligned}$$

Hence, we have $f' = \sum_{j=0}^{\infty} \partial f / \partial \mathbf{u}_j D^j + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \partial f / \partial \omega_\alpha \mathbf{M}_\alpha$. Here $\mathbf{M}_\alpha = (M_{\alpha,1}, \ldots, M_{\alpha,s})^T$. As X_α for any given α depends only on a finite number of variables ω_β, using the “generalized Leibnitz rule"(7), we readily see that $M_{\alpha,I} \in \mathcal{A}[\![D^{-1}]\!]$. Therefore, for any $f \in \mathcal{A}$ the operator f' of its directional derivative can be represented as formal series in powers of D with the coefficients from $\mathcal{A}$, i.e., $f' \in \mathcal{A}[\![D^{-1}]\!]$. Let us note that $(D(f))' = D \circ f'$ and $(fg)' = gf' + fg'$, cf. [10].

With this in mind, let us turn to the analysis of the interrelation between the notions of symmetry and formal symmetry for (1)–(3).

Recall that a formal series $\mathfrak{R} = \sum_{j=-\infty}^{r} \eta_j D^j \in \mathrm{Mat}_s(\mathcal{A})[\![D^{-1}]\!]$ is called [1, 7, 10] a *formal symmetry* of rank m for (1)–(3), provided

$$\deg(D_t(\mathfrak{R}) - [\mathbf{F}', \mathfrak{R}]) \leq \deg \mathbf{F}' + \deg \mathfrak{R} - m. \tag{11}$$

The derivative $D_t(\mathfrak{R})$ is defined here as $D_t(\mathfrak{R}) = \sum_{j=-\infty}^{r} D_t(\eta_j) D^j$.

The set $FS_F^{(q)}(\mathcal{A})$ of all formal symmetries of rank not lower than q of system (1)–(3) is a Lie algebra, because for the formal symmetries $\mathfrak{P}$ and $\mathfrak{Q}$ of ranks p and q we have $[\mathfrak{P},\mathfrak{Q}] \in FS_F^{(r)}(\mathcal{A})$ for $r = \min(p,q)$, cf. [8].

Next, $\mathbf{G} \in \mathcal{A}^s$ is called a *symmetry* (cf. e.g. [1, 2, 3]) for (1)–(3), if

$$\partial\mathbf{G}/\partial t + [\mathbf{F},\mathbf{G}] = 0, \tag{12}$$

where $[\cdot,\cdot]$ is the Lie bracket $[\mathbf{K},\mathbf{H}] = \mathbf{H}'[\mathbf{K}] - \mathbf{K}'[\mathbf{H}]$.

Let $S_F(\mathcal{A})$ be the set of all symmetries $\mathbf{G} \in \mathcal{A}^s$ for (1)–(3). Note that in general for $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}_{\rm loc}$ neither $\mathcal{A}^s$ nor $S_F(\mathcal{A})$ are closed under the Lie bracket. However, if $[\mathbf{P},\mathbf{Q}] \in \mathcal{A}^s$ for some $\mathbf{P},\mathbf{Q} \in S_F(\mathcal{A})$, then it is easy to see that $[\mathbf{P},\mathbf{Q}] \in S_F(\mathcal{A})$.

For any $\vec{f} \in \mathcal{A}^q$ define its *formal order* as $\operatorname{ford}\vec{f} = \deg \vec{f}'$. The notion of formal order provides a natural generalization of the notion of order for local functions, cf. e.g. [1, 8], with the only exception that for the functions $\vec{h} \in \mathcal{A}^q$ such that $\vec{h}' = 0$ (for instance, for those of the form $\vec{h} = \vec{h}(x,t)$) we have $\operatorname{ford}\vec{h} = -\infty \neq 0$.

Eq.(12) is well known to be nothing but the compatibility condition for (1) and $\partial\mathbf{u}/\partial\tau = \mathbf{G}$. If $\mathbf{G} \in \mathcal{A}^s$, then $\partial(\partial\mathbf{u}/\partial\tau)\partial t = D_t(\mathbf{G})$, and $\partial(\partial\mathbf{u}/\partial t)\partial\tau = \mathbf{F}'[\mathbf{G}]$. Hence (12) may be rewritten as $D_t(\mathbf{G}) = \mathbf{F}'[\mathbf{G}]$.

Let

$$\mathbf{F}' \equiv \sum_{i=-\infty}^{n} \phi_i D^i, \qquad n_0 = \begin{cases} 1-j, \text{ if } \phi_i = \phi_i(x,t), i = n-j,\dots,n, \\ 2 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

Since $D_t(\mathbf{G}) = \mathbf{F}'[\mathbf{G}]$ implies $D_t(\mathbf{G}') - [\mathbf{F}',\mathbf{G}'] - \mathbf{F}''[\mathbf{G}] = 0$, and $\deg\mathbf{F}''[\mathbf{G}] \leq \deg\mathbf{F}' + n_0 - 2$, we readily see that for any $\mathbf{G} \in S_F(\mathcal{A})$ we have $\mathbf{G}' \in FS_F^{(\operatorname{ford}\mathbf{G}-n_0+2)}(\mathcal{A})$. This result provides the desired link between nonlocal symmetries and formal symmetries for the general evolution systems with constraints (1)–(3).

The above connection between symmetries and formal symmetries enables us to apply the powerful results and methods from the theory of formal symmetries [5, 7, 8, 10] for the study of the structure of nonlocal symmetries for (1)–(3). In particular, if the leading term of $\mathbf{F}'$ is a diagonalizable matrix, then we have [14] the explicit formula for the leading term of directional derivative of the commutator of two symmetries of sufficiently high formal order. Note that this formula solves in full generality the problem of "evaluation from the top", posed in [15], for the algebra $S_F(\mathcal{A})$. Moreover, it enables us to find easily verifiable conditions for time-independence and commutativity for the symmetries from $S_F(\mathcal{A})$, see [14].

This research was supported by the Ministry of Education, Youth and Sports of Czech Republic, Grants VS 96003 ("Global Analysis") and CEZ:J10/98:192400002, and by the Grant No. 201/00/0724 from the Czech Grant Agency.

[1] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. — N.Y.: Springer, 1993. — 531 p.

[2] Fokas A.S. Symmetries and integrability // Stud. Appl. Math. — 1987. — **77**, № 3. — P. 253–299.

[3] Błaszak M. Multi-Hamiltonian theory of dynamical systems. — Springer-Verlag, Heildelberg, 1998. — 350 p.

[4] Ibragimov N.H. Transformation groups applied to mathematical physics. — Boston: D. Reidel Publishing Co., 1985. — 409 p.

[5] Sokolov V.V. On the symmetries of evolution equations // Russian Math. Surveys. — 1988. — **43**, № 5. – P. 165–204.

[6] Wang J.P. Symmetries and conservation laws of evolution equations — Ph.D. Thesis. — Vrije Universiteit van Amsterdam, 1998. — 166 p.

[7] Mikhailov A.V., Shabat A.B. and Yamilov R.I. The symmetry approach to classification of nonlinear equations. Complete lists of integrable systems // Russ. Math. Surveys. — 1987. — **42**, № 4. — P. 1–63.

[8] Mikhailov A.V., Shabat A.B. and Sokolov V.V. The symmetry approach to classification of integrable equations // What is Integrability? (V.E. Zakharov, ed.). — New York: Springer-Verlag, 1991. — P. 115–184.

[9] Mikhailov A.V., Yamilov R.I. Towards classification of (2 + 1)-dimensional integrable equations. Integrability conditions. I // J. Phys. A: Math. Gen. — 1998. — **31**. — P. 6707–6715.

[10] Mukminov F.Kh., Sokolov V.V. Integrable evolution equations with constraints. — 1987. — Mat. Sb. (N.S.). — **133(175)**, № 3. — P. 392–414.

[11] Fuchssteiner B. Integrable nonlinear evolution equations with time-dependent coefficients // J. Math. Phys. — 1993. — **34**. — P. 5140–5158.

[12] Khor'kova N.G. Conservation laws and nonlocal symmetries // Math. Notes. — 1988. — **44**, № 1–2. — P. 562–568.

[13] Bocharov A.V. et al. Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics / Translations of Mathematical Monographs, 182. — Providence, American Mathematical Society, 1999. — 347 p.

[14] Sergyeyev A. Time dependence and (non)commutativity of symmetries of evolution equations, to appear.

[15] Vinogradov A.M., Krasil'shchik I.S., Lychagin V.V. Introduction to geometry of nonlinear differential equations. — Moscow: Nauka, 1986. — 336 p. (in Russian).

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 237–246

УДК 517.958:532/.534

Q-умовна симетрія двовимірного нелінійного рівняння акустики

М.І. СЄРОВ †, *Ю.Г. ПОДОШВЕЛЕВ* ‡

† *Полтавський державний технічний університет*
E-mail: vschmat@pstu.pi.net.ua

‡ *Військовий інститут зв'язку, Полтава*
E-mail: vschmat@pstu.pi.net.ua

Досліджено симетрію двовимірного нелінійного рівняння акустики відносно одновимірної та двовимірної інволютивних множин Q-умовних операторів.

Symmetry of the nonlinear equation of acoustics with respects to one-dimensional and two-dimensional involute sets of Q-conditional operators is investigated.

Переважна більшість досліджень з умовних симетрій присвячена нелінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними, котрі містять лише дві незалежні змінні. Це пояснюється тим, що визначальні рівняння на коефіцієнти умовної симетрії є нелінійними диференціальними рівняннями з частинними похідними і мають розмірність, яка дорівнює сумі кількості залежних і незалежних змінних у досліджуваних диференціальних рівняннях. Ось чому досі не існує регулярних методів систематичного і повного дослідження умовної симетрії багатовимірних диференціальних рівнянь з частинними похідними. В роботах [1, 2, 3] досліджена умовна симетрія одновимірного рівняння акустики

$$u_{00} = uu_{11}.$$

В цій роботі дослідимо Q-умовну (див. [2]) симетрію двовимірного рівняння акустики

$$u_{00} = u(u_{11} + u_{22}), \tag{1}$$

де $u_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}$, $u_{11} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $u_{22} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$, $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2)$. Ліївська симетрія рівняння (1) добре відома [5], вона визначається операторами

$$
\begin{aligned}
&\partial_0, \quad \partial_1, \quad \partial_2, \quad J_{12} = x_2\partial_1 - x_1\partial_2, \\
&D^1 = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad D^2 = x_0\partial_0 - 2u\partial_u.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Дослідимо Q-умовну симетрію рівняння (1) з метою пошуку операторів інваріантності, котрі не належать до алгебри (2). На відміну від одновимірного випадку [2, 3], дану симетрію будемо досліджувати як відносно одного оператора

$$Q = A(x,u)\partial_0 + B^a(x,u)\partial_a + C(x,u)\partial_u, \tag{3}$$

так і відносно інволютивної множини двох операторів

$$Q^a = A^a(x,u)\partial_0 + B^{ab}(x,u)\partial_b + C^a(x,u)\partial_u, \tag{4}$$

де $a, b = 1, 2$.

Дослідимо спочатку Q-умовну симетрію рівняння (1) відносно оператора (3). Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Рівняння (1) є Q-умовно інваріантним відносно оператора (3), якщо:*

Випадок 1. $A(x,u) \neq 0$, тоді оператор (3) еквівалентний (в сенсі сильної еквівалентності) оператору

$$Q = F\partial_0 + \left(\dot{F}u + f + \frac{\kappa}{4}\vec{x}^{\,2}\right)\partial_u, \tag{5}$$

де $f = f(x_1, x_2)$, $F = F(x_0)$ — довільні гладкі функції, котрі задовольняють систему рівнянь

$$\ddot{F} = \left(\kappa \int \frac{dx_0}{F^2} + \kappa_1\right) F^2, \qquad \triangle f = 0,$$

κ, κ_1 — деякі сталі;

Випадок 2. $A(x,u) = 0$, тоді оператор (3) еквівалентний оператору

$$Q = \partial_1 + B\partial_2 + C\partial_u,$$

координати якого задовольняють систему рівнянь

$$B = B(\vec{x}), \qquad C = N(\vec{x})u, \qquad N = 2\frac{B_2 - BB_1}{B^2 + 1},$$

$$\triangle B + (3N - 2B_2)B_1 - BNB_2 + 2BN_1 - 2N_2 + 2BN^2 = 0,$$
$$\triangle N + 3NN_1 - (BN + 2B_1)N_2 + N^3 = 0.$$

Доведення. Досліджуючи Q-умовну симетрію рівняння (1) відносно оператора (3), використаємо алгоритм, описаний в [2]. Розглянемо два незалежних випадки: $A(x,u) \neq 0$ (не втрачаючи загальності можна взяти $A(x,u) = 1$) та $A(x,u) = 0$.

Випадок 1. $A(x,u) = 1$. Записавши умову Q-умовної інваріантності рівняння (1) і провівши розчеплення отриманого рівняння за частинними похідними функції $u = u(x)$, одержимо систему визначальних рівнянь

$$\begin{aligned}
&B^a_u = 0, \qquad B^1_2 + B^2_1 = 0, \qquad B^1_1 - B^2_2 = 0, \qquad C = Nu + M,\\
&B^1B^2\left(N - 2B^1_1\right) - B^2B^1_0 - B^1B^2_0 = 0,\\
&\left(\left(B^1\right)^2 - \left(B^2\right)^2\right)\left(N - 2B^1_1\right) - B^1B^1_0 + B^2B^2_0 = 0,\\
&B^2M - B^1\left(B^2B^1_0 - B^1B^2_0\right) = 0,\\
&\left(\left(B^1\right)^2 - \left(B^2\right)^2\right)M + 2B^1B^2\left(B^2B^1_0 - B^1B^2_0\right) = 0,\\
&B^a_{00} + 2B^a\dot N + \left(B^a_0 + B^1B^a_1 + B^2B^a_2\right)\left(N - 2B^1_1\right) +\\
&\qquad +2B^1_0B^a_1 - 2B^2_0B^a_2 = 0,\\
&\left(B^1\right)^2\left(B^1_{00} + 2B^1\dot N\right) + M\left(B^1_0 + 2B^1N - B^1B^1_1 + B^2B^1_2\right) -\\
&\qquad -2B^1B^1_0\left(B^1N + B^1_0\right) = 0,\\
&\left(B^1\right)^2\left(B^2_{00} + 2B^2\dot N\right) + M\left(B^2_0 - B^1B^2_1 + B^2B^2_2\right) -\\
&\qquad -2B^1B^1_0\left(B^2N + B^2_0\right) = 0,\\
&\ddot N + 2N\dot N - \Delta M - \left(\dot N + N^2\right)\left(N - 2B^1_1\right) = 0,\\
&\left(B^1\right)^2\left(\ddot N + 2N\dot N - \Delta M\right) - \left(\dot N + N^2\right)\left(2B^1B^1_0 - M\right) - M_{00} -\\
&\qquad -2M\dot N + \left(M_0 - B^aM_a + MN\right)\left(N - 2B^1_1\right) + 2B^a_0M_a = 0,\\
&\left(B^1\right)^2\left(M_{00} + 2M\dot N\right) + \left(M_0 + MN\right)\left(M - 2B^1B^1_0\right) -\\
&\qquad -M\left(B^1M_1 - B^2M_2\right) = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

де $N = N(x_0)$, $M = M(x)$ — довільні гладкі функції. З шостого та сьомого рівнянь системи (6) маємо $M\left((B^1)^2 + (B^2)^2\right) = 0$, звідки $M = 0$, або $B^1 = B^2 = 0$.

Підвипадок 1. $M = 0$. Виконавши елементарні перетворення, систему (6) у цьому випадку можна записати наступним чином

$$\begin{aligned}
&B^1_2 + B^2_1 = 0, \qquad B^1_1 - B^2_2 = 0, \qquad B^2 B^1_0 - B^1 B^2_0 = 0,\\
&C = Nu, \qquad B^a \left(N - 2B^1_1\right) - 2B^a_0 = 0,\\
&B^a_{00} + 2B^a \dot{N} - \left(N - 2B^1_1\right)\left(B^a_0 + B^a N\right) = 0,\\
&\ddot{N} + N\dot{N} - N^3 = -2B^1_1(\dot{N} + N^2).
\end{aligned} \tag{7}$$

Розглянемо останнє рівняння системи (7), зобразивши його у вигляді

$$\frac{d}{dx_0}(\dot{N} + N^2) - N(\dot{N} + N^2) = -2B^1_1(\dot{N} + N^2). \tag{8}$$

З (8) випливає, що B^1_1 буде залежати від просторових змінних x_1, x_2 тільки при $\dot{N} + N^2 = 0$, тобто при $N = 0$, або $N = \frac{1}{x_0}$ (використано інваріантність вихідного рівняння відносно зсуву по x_0).

а) Якщо $N = 0$, то розв'язок системи (7) має вигляд $B^1 = \frac{x_1+\lambda_1 x_2}{x_0}$, $B^2 = \frac{x_2-\lambda_1 x_1}{x_0}$, $C = 0$. Відповідно оператор (3) запишеться так

$$Q = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + x_2\partial_2 + \lambda_1(x_2\partial_1 - x_1\partial_2) = D_1 + \lambda_1 J_{12},$$

тобто він є лінійною комбінацією ліївських операторів алгебри (2).

б) Якщо $N = \frac{1}{x_0}$, то система (7) буде сумісною тільки при $B^1 = B^2 = 0$ і тоді отримаємо умовний оператор

$$Q = x_0\partial_0 + u\partial_u,$$

який є частинним випадком (5). Дійсно, нехай $B^1 \neq 0$ (принципової різниці у виборі B^1 чи B^2 немає враховуючи перетворення еквівалентності), тоді отримуємо рівняння

$$x_0^2 B^1 B^1_{00} - 2x_0^2 (B^1_0)^2 - 2x_0 B^1 B^1_0 + 4(B^1)^2 = 0,$$

котре підстановкою $B^1 = z^{-1}(x)$ зводиться до рівняння Ейлера [4] вигляду

$$x_0^2 z_{00} - 2x_0 z_0 - 4z = 0. \tag{9}$$

Розв'язавши (9), маємо $z = C_1(x_1, x_2)x_0^4 + C_2(x_1, x_2)x_0^{-1}$, а отже

$$B^1 = \frac{x_0}{C_1 x_0^5 + C_2}. \tag{10}$$

Підставивши (10) в систему (7), впевнюємося в її несумісності.

в) Якщо $\dot{N} + N^2 \neq 0$, то система (7) після розчеплення по просторових змінних і часкового інтегрування, а також виконання перетворень відносно алгебри (2) вихідного рівняння (1), може бути зображена наступним чином

$$\begin{aligned} &B^1 = \vec{\beta}\vec{x}, \qquad B^2 = \vec{\beta}\vec{x}^{\perp}, \qquad C = Nu, \qquad \dot{\vec{\beta}} = \vec{\beta}(N - 2\beta^1), \\ &\ddot{\vec{\beta}} - 2\beta^1\dot{\vec{\beta}} + 2\dot{N}\vec{\beta} = \vec{0}, \qquad \frac{\frac{d}{dx_0}(\dot{N} + N^2)}{\dot{N} + N^2} = N - 2\beta^1, \end{aligned} \tag{11}$$

де $\vec{x}^{\perp} = (x_2, -x_1)$; $\vec{\beta} = (\beta^1(x_0), \beta^2(x_0))$ — деяка деференційовна вектор функція. Неважко переконатися, що розв'язки системи (11) при $\beta^1 = 0$ визначають оператор (3), який є або лінійною комбінацією лівських операторів алгебри (2), якщо $\beta^2 \neq 0$, або має вигляд

$$Q = \wp\partial_0 + \dot{\wp}u\partial_u, \tag{12}$$

якщо $\beta^2 = 0$. В (12) $\wp = \wp(x_0)$ — функція Вейєрштрасса. Оператор (12) є частковим випадком (5). Покажемо, що при $\beta^1 \neq 0$ розв'язки системи (11) можливі, якщо $\dot{\vec{\beta}} = \vec{0}$, тобто коли $\vec{\beta}$ — сталий вектор. Нехай $\dot{\vec{\beta}} \neq \vec{0}$. Розглянемо підсистему рівнянь системи (11) на функцію $\beta^1 = \beta^1(x_0)$

$$\begin{aligned} &\dot{\beta}^1 = \beta^1(N - 2\beta^1), \qquad \ddot{\beta}^1 - 2\beta^1\dot{\beta}^1 + 2\dot{N}\beta^1 = 0, \\ &\dot{N} + N^2 = m\beta^1, \end{aligned} \tag{13}$$

де $m \neq 0$, m — деяка стала.

Виконавши тотожні перетворення системи (13), одержимо

$$\begin{aligned} &N = \frac{\dot{\beta}^1}{\beta^1} + 2\beta^1, \qquad \ddot{\beta}^1 + 6\beta^1\dot{\beta}^1 + 4(\beta^1)^3 - m(\beta^1)^2 = 0, \\ &(\dot{\beta}^1)^2 + 8(\beta^1)^2\dot{\beta}^1 + 6(\beta^1)^4 - \frac{3m}{2}(\beta^1)^3 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Розв'язуючи останнє рівняння системи (14), знаходимо його розв'язок $\ln\left|\sqrt{10 - \frac{3m}{2\beta^1}} \mp 4\right| \pm \sqrt{10 - \frac{3m}{2\beta^1}} = -\frac{3mx_0}{4}$, підстановкою котрого в друге рівняння встановлюємо, що $\beta^1 = \mathrm{const}$. Отримали суперечність. Тому $\dot{\vec{\beta}} = \vec{0}$, а отже, розв'язки системи (11) визначають оператор, який можна отримати з алгебри (2).

Підвипадок 2. $B^1 = B^2 = 0$. Тоді система (6) значно спростившись запишеться так

$$C = Nu + M, \quad \ddot{N} + N\dot{N} - N^3 = \triangle M, \quad \dot{M} + NM = 0. \tag{15}$$

Враховуючи те, що ліва частина другого рівняння системи (15) залежить тільки від x_0, а права і від просторових змінних, дану систему можна зобразити в наступному вигляді

$$\begin{aligned} &C = Nu + M, \qquad \ddot{N} + N\dot{N} - N^3 = \kappa \exp(-\int N dx_0), \\ &M = (f + \frac{\kappa}{4}\vec{x}^2)(\exp(-\int N dx_0)), \qquad \triangle f = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

де $f = f(x_1, x_2)$ — довільна диференційовна функція, κ — деяка стала. Вводячи заміну $N = \frac{\dot{F}}{F}$, де $F = F(x_0)$ — гладка функція, система (16) остаточно виглядатиме так

$$C = \frac{\dot{F}}{F}u + \frac{f + \frac{\kappa}{4}\vec{x}^{\,2}}{F}, \quad \ddot{F} = \left(\kappa \int \frac{dx_0}{F^2} + \kappa_1\right) F^2, \quad \triangle f = 0, \tag{17}$$

де κ_1 — стала інтегрування. Отже, Q-умовний оператор (3) буде таким

$$Q = F\partial_0 + \left(\dot{F}u + f + \frac{\kappa}{4}\vec{x}^{\,2}\right)\partial_u,$$

де функції f, F — задовольняють рівняння системи (17), що й доводить перший випадок теореми 1.

Випадок 2. Доведення даного випадку базується на застосуванні алгоритму [2]. ∎

Слідуючи [6], розглянемо поняття еквівалентності для інволютивних множин операторів Q-умовної симетрії:

$$\widehat{Q}^a \sim Q^a, \quad \text{якщо} \quad \widehat{Q}^a = \varrho^{ab} Q^b,$$

де $\varrho^{ab} = \varrho^{ab}(x, u)$, $\det(\varrho^{ab}) \neq 0$. Можливі такі незалежні випадки.

1. Якщо координати операторів Q^a інволютивної множини (4) задовольняють умову $\det(B^{ab}) \neq 0$, то вона еквівалентна такій

$$\vec{Q} = \vec{A}\partial_0 + \vec{\partial} + \vec{C}\partial_u, \tag{18}$$

де $\vec{\partial} = (\partial_1, \partial_2)$.

2. Якщо для координат операторів Q^a інволютивної множини (4) справедливо $\det(B^{ab}) = 0$, то вона еквівалентна наступній
$$Q^1 = \partial_0 + \gamma\partial_u, \qquad Q^2 = \beta^a\partial_a + m\partial_u, \tag{19}$$
де $\gamma = \gamma(x,u)$, $\beta^a = \beta^a(x,u)$, $m = 0; 1$.

Теорема 2. *Рівняння (1) Q-умовно інваріантне відносно множини операторів (18), якщо вектор-функції $\vec{A}(x,u)$, $\vec{C}(x,u)$ задовольняють систему рівнянь*

$$\begin{vmatrix} Q^1 & Q^2 \\ A^1 & A^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} Q^1 & Q^2 \\ C^1 & C^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\left(1 - u\vec{A}^{\,2}\right)\vec{A}_{uu} + u\vec{A}_u\left(\vec{A}^{\,2}\right)_u = \vec{0},\\
&\left(1 - u\vec{A}^{\,2}\right)\Big[\vec{C}_{uu}\left(1 - u\vec{A}^{\,2}\right) - 2\vec{A}_{0u} -\\
&\quad -2u\left(A^a\vec{A}_{au} - \vec{A}_u\left(\vec{\partial}\vec{A} + \vec{A}\vec{C}_u\right) + A^a_u\vec{A}_a\right)\Big] -\\
&\quad -\left(\vec{A}^{\,2}\right)_u\left(\vec{C} + 2u\vec{A}_0 + 2u^2A^a\vec{A}_a\right) = \vec{0},\\
&(1 - u\vec{A}^2)\Big[\vec{C}_{00} - u\Big(\triangle\vec{C} + 2C^a\vec{C}_{ua} + \vec{C}_{uu}\vec{C}^{\,2} -\\
&\quad -2C^a_0\vec{A}_a - \vec{A}_u\left(\vec{C}^{\,2}\right)_0\Big)\Big] - \left(\frac{1}{2}\left(\vec{C}^{\,2}\right)_u + \vec{\partial}\vec{C} - \vec{A}\vec{C}_0\right)\times\\
&\quad \times\left(2u^2\left(A^a\vec{A}_a + \vec{A}_u\left(\vec{C}\vec{A}\right)\right) + 2u\vec{A}_0 + \vec{C}\right) = \vec{0},\\
&\left(1 - u\vec{A}^{\,2}\right)\Bigg[\Bigg(A^a\vec{C}_{ua} + \left(\vec{A}\vec{C}\right)\vec{C}_{uu} - \left(\vec{C}\vec{A}_0 + \vec{\partial}\vec{C}\right)\vec{A}_u + \frac{\triangle\vec{A}}{2} +\\
&\quad + \frac{\vec{C}^{\,2}\vec{A}_{uu}}{2} + C^a\vec{A}_{ua} + C^a_u\vec{A}_a - A^a_0\vec{A}_a\Bigg)u + \vec{C}_{0u} - \frac{\vec{A}_{00}}{2}\Bigg] -\\
&\quad -\left(u^2\left(A^a\vec{A}_a + \vec{A}_u\left(\vec{A}\vec{C}\right)\right) + u\vec{A}_0 + \frac{\vec{C}}{2}\right)\times\\
&\quad \times\left(\vec{\partial}\vec{A} + \left(\vec{A}\vec{C}\right)_u + \vec{A}\vec{C}_u - \frac{1}{2}\left(\vec{A}^{\,2}\right)_0\right) = \vec{0}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Доведення теореми 2 проводиться на основі алгоритму, який описаний в [2].

Систему рівнянь (20) в загальному вигляді розв'язати не вдалося. Знайдемо частинні її розв'язки, які використаємо для побудови операторів Q-умовної симетрії рівняння (1).

Нехай $\vec{A} = \vec{A}(x)$. З четвертого рівняння системи (20) маємо $\vec{C}_{uu} = \vec{0}$, звідки $\vec{C} = \vec{N}(x)u + \vec{M}(x)$. Провівши розчеплення системи (20) по u, можна отримати наступний підвипадок

$$
\begin{aligned}
&\vec{A}_{00} - 2\vec{N}_0 = \vec{0}, \quad \left(\vec{A}\partial_0 + \vec{\partial}\right)\vec{A}^{\perp} = 0, \quad \left(\vec{A}\partial_0 + \vec{\partial}\right)\vec{N}^{\perp} = 0,\\
&\left(\vec{A}\partial_0 + \vec{\partial} - \vec{N}\right)\vec{M}^{\perp} = 0, \quad \vec{\partial}\vec{A} + 2\vec{A}\vec{N} - \frac{1}{2}\left(\vec{A}^{\,2}\right)_0 = 0,\\
&\vec{\partial}\vec{N} - \vec{A}\vec{N}_0 + \vec{N}^2 + \vec{A}^{\,2}\zeta = 0, \quad \vec{M}_{00} - \zeta\vec{M} = \vec{0},\\
&\triangle\vec{N} + 2N^a\vec{N}_a - 2\vec{A}_a N_0^a + 2A^a\vec{A}_a\zeta = \vec{0},\\
&\vec{N}_{00} - \triangle\vec{M} - 2M^a\vec{N}_a + 2M_0^a\vec{A}_a - \left(2\vec{A}_0 + \vec{N}\right)\zeta = \vec{0},
\end{aligned}
\tag{21}
$$

де $\zeta(x) = \vec{\partial}\vec{M} - \vec{A}\vec{M}_0 + \vec{M}\vec{N}$. Після тотожніх перетворення рівнянь системи (21) отримуємо два випадки: а) $A^1 = A^2 = 0$; б) $\vec{N}_{00} - 2\zeta\vec{A}_0 - \zeta_0\vec{A} = \vec{0}$.

а) В даному випадку спираючись на дослідження одновимірного нелінійного хвильового рівняння акустики [3], покладемо $\vec{\partial}\vec{M} + \vec{M}\vec{N} = \wp$, знаходимо:

$$
\vec{N} = \frac{\vec{\partial}w}{w}, \qquad \vec{M} = \wp\vec{v} + \Lambda\vec{h},
$$

де $w = w(\vec{x})$, $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$, $\vec{h} = \vec{h}(\vec{x})$ — деякі диференційовні функція та вектор-функції, котрі задовольняють наступну систему

$$
\begin{aligned}
&\triangle w = 0, \qquad \vec{\partial}\,\vec{v} + \frac{\vec{\partial}w}{w}\vec{v} = 1, \qquad \vec{\partial}\,\vec{h} + \frac{\vec{\partial}w}{w}\vec{h} = 0,\\
&\vec{\partial}\,\vec{v}^{\perp} - \frac{\vec{\partial}w}{w}\vec{v}^{\perp} = 0, \qquad \vec{\partial}\,\vec{h}^{\perp} - \frac{\vec{\partial}w}{w}\vec{h}^{\perp} = 0,
\end{aligned}
\tag{22}
$$

де $\wp = \wp(x_0)$, $\Lambda = \Lambda(x_0)$ — відповідно функції Вейєрштрасса та Ламе. Отже, оператори Q-умовної симетрії будуть такими

$$
\vec{Q} = \vec{\partial} + \left(\frac{\vec{\partial}w}{w}u + \wp\vec{v} + \Lambda\vec{h}\right)\partial_u,
\tag{23}
$$

в яких w, $\vec{v}$ і $\vec{h}$ є розв'язками (22).

б) Для даного випадку систему (21) в загальному розв'язати не вдалося, але знайдено такі часткові розв'язки:

$$\vec{A} = \wp^2\vec{\tau}, \qquad \vec{N} = \wp\dot{\wp}\vec{\tau} + \vec{\vartheta}, \qquad \vec{M} = \wp\vec{q},$$

де $\vec{\tau} = \vec{\tau}(\vec{x})$, $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}(\vec{x})$ і $\vec{q} = \vec{q}(\vec{x})$ — диференційовні вектор-функції, що задовольняють умовам

$$\begin{gathered}\vec{\partial}\,\vec{\tau}^{\perp} = 0, \vec{\partial}\,\vec{\vartheta}^{\perp} = 0, \vec{\partial}\,\vec{q}^{\perp} - \vec{\vartheta}\vec{q}^{\perp} = 0, \vec{\partial}\,\vec{\tau} + 2\vec{\tau}\vec{\vartheta} = 0,\\ \vec{\partial}\,\vec{\vartheta} + \vec{\vartheta}^2 = 0, \vec{\partial}\,\vec{q} + \vec{\vartheta}\vec{q} = 1; \vec{A} = \tfrac{\vec{\partial}r}{r}, \vec{N} = \tfrac{\vec{\partial}s}{s}, \vec{M} = \vec{0},\end{gathered} \tag{24}$$

де $r = r(\vec{x})$, $s = s(\vec{x})$ — диференційовні вектор-функції, які знаходимо розв'язавши систему

$$\triangle s = 0, \qquad \triangle r = \vec{\partial}r\left(\frac{\vec{\partial}r}{r} - \frac{\vec{\partial}s}{s}\right). \tag{25}$$

Шукані оператори запишуться так

$$\begin{gathered}\vec{Q} = \wp^2\vec{\tau}\partial_0 + \vec{\partial} + \left(\left(\wp\dot{\wp}\vec{\tau} + \vec{\vartheta}\right)u + \wp\vec{q}\right)\partial_u,\\ \vec{Q} = \frac{\vec{\partial}r}{r}\partial_0 + \vec{\partial} + \frac{\vec{\partial}s}{s}u\partial_u,\end{gathered} \tag{26}$$

а функції $\vec{\tau}$, $\vec{\vartheta}$, $\vec{q}$, s, r є розв'язками систем (24) і (25).

Наступна теорема є результатом дослідження Q-умовної симетрії рівняння (1) відносно операторів (19).

Теорема 3. *Рівняння (1) Q-умовно інваріантне відносно інволютивної множини операторів (19), якщо функції $\gamma = \gamma(x,u)$, $\beta^a = \beta^a(x,u)$, задовольняють систему рівнянь*

$$\vec{\beta}_0 + \gamma\vec{\beta}_u = \lambda\vec{\beta}, \qquad \vec{\beta}\vec{\partial}\gamma = -m(\lambda + \gamma_u)$$

Доведення теореми 3 аналогічне доведенню попередніх теорем.

[1] Фущич В.І., Сєров М.І. Умовна інваріантність і точні розв'язки нелінійного рівняння акустики // Доповіді АН УРСР. — 1988. — № 10. — С. 28–33.

[2] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений математической физики. — Киев: Наук. думка, 1989. — 336 с.

[3] Подошвелев Ю.Г. Q-умовна інваріантність рівняння акустики // Праці Інституту математики НАН України. — 1998. — **19**. — С. 174–177.

[4] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

[5] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[6] Жданов Р.З., Цифра І.М. Редукція диференціальних рівнянь і умовна симетрія // Укр. матем. журн. — 1996. — **48**, № 5. — С. 595–602.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 247–253

УДК 517.958

Симетрійні властивості та редукція системи рівнянь Деві–Стюардсона

М.І. СЄРОВ, Л.О. ТУЛУПОВА, Н.В. ІЧАНСЬКА

Полтавський державний технічний університет, Полтава
E-mail: vschmat@pstu.pi.net.ua

Досліджено симетрійні властивості системи рівнянь Деві–Стюардсона та деяких її узагальнень. Симетрії цих рівнянь застосовано для їх редукції до систем з двома змінними.

The symmetry properties of the system of Davey–Stewartson equations and its generalizations are investigated. Symmetries of these equations are used to reduce them to differential systems with two variables.

Розглянемо систему рівнянь Деві–Стюардсона, що описує динамічні процеси [1]

$$\begin{aligned} &ip_0 + p_{12} + 4sp = 0,\\ &\triangle s + |p|^2_{12} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В (1) $\vec{x} = (x_1, x_2)$, $s = s(x_0, \vec{x})$ — дійсна функція, $p = p(x_0, \vec{x})$ — комплексна функція дійсних аргументів $x_0, \vec{x}$; $p_0 = \frac{\partial p}{\partial x_0}, p_{12} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\triangle s = \frac{\partial^2 s}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial x_2^2}$, $|p|^2_{12} = \frac{\partial^2(|p|^2)}{\partial_1 \partial x_2}$.

Вивчимо симетрійні властивості системи (1).

Теорема 1. *Максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності системи (1) є нескінченновимірна алгебра, породжена операторами вигляду*

$$\begin{aligned} X = {} & (2\gamma + \lambda)\,\partial_0 + (\dot\gamma x_a + \sigma^a)\,\partial_a + \\ & + \left[-\dot\gamma p + \left(\ddot\gamma x_1 x_2 + \dot\sigma^b x_{3-b} + n)ip\right)\right]\partial_p + \\ & + \left[-\dot\gamma p^* - \left(\ddot\gamma x_1 x_2 + \dot\sigma^b x_{3-b} + n\right) ip^*\right]\partial_{p^*} + \\ & + \left[-2\dot\gamma s + \frac{1}{4}\left(\dddot\gamma\, x_1 x_2 + \ddot\sigma^b x_{3-b} + \dot n\right)\right]\partial_s, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\gamma = \gamma(x_0)$, $\sigma^a = \sigma^a(x_0)$, $n = n(x_0)$ *— довільні гладкі функції,* λ *— довільна стала,* $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}$, $\partial_a = \frac{\partial}{\partial x_a}$, $\partial_p = \frac{\partial}{\partial p}$, $\partial_{p^*} = \frac{\partial}{\partial p^*}$, $\partial_s = \frac{\partial}{\partial s}$.

Доведення. Для дослідження симетрії системи (1) введемо позначення

$$p = u^1 + iu^2, \tag{3}$$

де u^1, u^2 є довільні дійсні функції. В позначеннях (3) система (1) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} &u^k_{12} = (-1)^{k+1} u^{3-k}_0 - 4u^k u^3, \\ &\triangle u^3 + \left(\vec{u}^{\,2}\right)_{12} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

В формулах (4) і всюди нижче підсумовуввання по k немає, $k = 1, 2$, $u^3 = s$, $\vec{u}^{\,2} = (u^1)^2 + (u^2)^2$.

З умови інваріантності системи (4) відносно інфінітезимального оператора [2]

$$\begin{aligned} X = {}&\xi^0\left(x_0, \vec{x}, \vec{u}, u^3\right)\partial_0 + \xi^a\left(x_0, \vec{x}, \vec{u}, u^3\right)\partial_a + \\ &+\eta^a\left(x_0, \vec{x}, \vec{u}, u^3\right)\partial_{u^a} + \eta^3\left(x_0, \vec{x}, \vec{u}, u^3\right)\partial_{u^3} \end{aligned} \tag{5}$$

отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\xi^0_a = \xi^0_{u^a} = \xi^0_{u^3} = \xi^a_{u^b} = \xi^a_{u^3} = \eta^a_{u^3} = \eta^3_{u^a} = 0, \qquad \xi^1_1 = \xi^2_2, \\ &\eta^a_{u^b u^c} = 0, \qquad \eta^3_{u^3 u^3} = 0, \qquad \eta^3_{u^3} = 2\eta^1_{u^1} = 2\eta^2_{u^2}, \\ &\eta^1_{u^2} + \eta^2_{u^1} = 0, \qquad \eta^k_{bu^c} = (-1)^k \delta_{c3-k}\xi^{3-b}_0, \qquad 2\eta^3_{cu^3} = \triangle\xi^c, \\ &\eta^k_{3-c} = (-1)^k u^{3-k}\xi^c_0, \qquad a, b, c = 1, 2, \\ &(-1)^{k+1}\delta_{c3-b}\eta^k_{u^b} + 2(-1)^k\delta_{c3-k}\xi^1_1 = (-1)^{k+1}\left[\eta^{3-k}_{u^c} - \delta_{c3-k}\xi^0_0\right], \\ &\delta_{c3-a}u^a\eta^3_{u^3} - 2\delta_{c3-a}u^a\xi^1_1 = \delta_{c3-a}\eta^a + u^a\left[\eta^{3-a}_{u^c} - \delta_{c3-a}\xi^0_0\right] \\ &\eta^k_{12} - 4u^3u^b\eta^k_u b + 8u^k u^3\xi^1_1 = (-1)^{k+1}\eta^{3-k}_0 - 4u^3\eta^k - 4u^k\eta^3. \\ &\triangle\eta^3 + 8\vec{u}^{\,2}u^3\left(\eta^3_{u^3} - 2\xi^2_2\right) = 8\vec{u}^{\,2}\eta^3 + 16u^b u^3\eta^b + 2(-1)^k u^k\eta^{3-k}_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Загальний розв'язок системи визначальних рівнянь (6) має вигляд

$$\begin{aligned} &\xi^0 = 2\gamma(x_0) + \lambda, \qquad \xi^k = \dot{\gamma}x_k + \sigma^k(x_0), \\ &\eta^k = -\dot{\gamma}u^k + (-1)^k\left[\ddot{\gamma}x_1x_2 + \dot{\sigma}^b x_{3-b} + n(x_0)\right]u^{3-k}, \\ &\eta^3 = -2\dot{\gamma}u^3 + \frac{1}{4}\left[\dddot{\gamma}\,x_1x_2 + \ddot{\sigma}^b x_{3-b} + \dot{n}\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Підставивши (7) в (5), отримуємо (2). ■

Наявність нескінченної симетрії свідчить про деяку недовизначенність системи (4). Поставимо задачу дописати до системи (4) додаткову умову, при якій дана система мала б скінчену симетрію, а саме була б інваріантна відносно розширеної алгебри Галілея $AG_2(1,2)$. Якщо додаткова умова має вигляд $s_{12} = F(s, |p|)$, то справедливі наступні твердження.

Теорема 2. *Система рівнянь*

$$\begin{aligned} &ip_0 + p_{12} + 4sp = 0, \\ &\triangle s + |p|^2_{12} = 0, \\ &s_{12} = F(s, |p|), \end{aligned} \tag{8}$$

інваріантна відносно алгебри

$$\begin{aligned} &AG_2(1,2) = \langle \partial_\mu,\ M = i(p\partial_p - p^*\partial_{p^*}),\ G_a = x_0\partial_a + x_{3-a}M, \\ &D = 2x_0\partial_0 + x_a\partial_a - p\partial_p - p^*\partial_{p^*} - 2s\partial_s,\ \Pi = x_0 D + x_1x_2M \rangle, \end{aligned} \tag{9}$$

де $a = 1, 2$ *при* $F = s^2\varphi(z)$, $\varphi(z)$ *— довільна гладка функція,* $z = \frac{|p|^2}{s}$.

Зауважимо, що у випадку

$$F = \lambda_1 |p|^4 + \lambda_2, \qquad \lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const} \tag{10}$$

симетрія системи (8) значно ширша, ніж алгебра $AG_2(1,2)$.

Теорема 3. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (8), (10) є:*

$$\begin{aligned} &1)\quad A_1 = \langle \partial_0, G_a, D, \Pi, M_1, Q_1, Q_2 \rangle, &&\textit{якщо}\quad \lambda_2 = 0; \\ &2)\quad A_2 = \langle \partial_0, G_a, M_1, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \rangle, &&\textit{якщо}\quad \lambda_2 = -\lambda_3^2 < 0; \\ &3)\quad A_3 = \langle \partial_0, G_a, M_1, Q_1, Q_2, Q_5, Q_6 \rangle, &&\textit{якщо}\quad \lambda_2 = \lambda_3^2 > 0, \end{aligned}$$

де

$$M_1 = inM + \frac{1}{4}\dot{n}\partial_s, \qquad Q_1 = \sigma^1\partial_1 + i\dot{\sigma}^1 x_2 M + \frac{1}{4}\ddot{\sigma}^1 x_2\partial_s,$$

$$Q_2 = \sigma^2\partial_2 + i\dot{\sigma}^2 x_1 M + \frac{1}{4}\ddot{\sigma}^2 x_1\partial_s,$$

$$\begin{aligned} Q_3 = {} &\sin\alpha\partial_0 + 4\lambda_3\cos\alpha x_a\partial_a - 4\lambda_3[\cos\alpha + 4\lambda_3 i\sin\alpha x_1x_2]p\partial_p - \\ &-4\lambda_3[\cos\alpha + 4\lambda_3 i\sin\alpha x_1x_2]p^*\partial_{p^*} - 8\lambda_3\cos\alpha[s + 2a^2x_1x_2]\partial_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_4 = {} &\cos\alpha\partial_0 - 4\lambda_3\sin\alpha x_a\partial_a + 4\lambda_3[\sin\alpha - 4\lambda_3 i\cos\alpha x_1x_2]p\partial_p + \\ &+4\lambda_3[\sin\alpha + 4\lambda_3 i\cos\alpha x_1x_2]p^*\partial_{p^*} + 8\lambda_3\sin\alpha[s + 2a^2x_1x_2]\partial_s, \end{aligned}$$

$$Q_5 = \exp\alpha[\partial_0 + 4\lambda_3 x_a\partial_a - 4\lambda_3(p\partial_p + p^*\partial_{p^*}) + \\ +16i\lambda_3^2 x_1x_2M - 8\lambda_3(s + 2\lambda_3^2 x_1x_2)\partial_s],$$
$$Q_6 = \exp(-\alpha)[\partial_0 - 4\lambda_3 x_a\partial_a + 4\lambda_3(p\partial_p + p^*\partial_{p^*}) + \\ +16i\lambda_3^2 x_1x_2M + 8\lambda_3(s - 2\lambda_3^2 x_1x_2)\partial_s], \qquad \alpha = 4\lambda_3 x_0,$$

n, σ^1, σ^2 — довільні достатньо гладкі функції від x_0.

Доведення теорем 2, 3 проведемо одночасно. Запишемо систему (8) в позначеннях (3)

$$\begin{aligned} &u^a_{12} = (-1)^{a+1}u_0^{3-a} - 4u^a u^3,\\ &u^3_{aa} + 2u^a_1 u^a_2 + 2u^a u^a_{12} = 0, \qquad u^3_{12} = F(|\vec{u}\,|, u^3). \end{aligned} \tag{11}$$

Система рівнянь для визначення координат інфінітезимального оператора алгебри інваріантності системи (11) буде складатися з рівнянь (6) та рівняння

$$\eta^3_{12} + F\left(\eta^3_{u^3} - \xi^1_1 - \xi^2_2\right) = \frac{F_\omega}{\omega}\left(u^1\eta^1 + u^2\eta^2\right) + F_{u^3}\eta^3, \tag{12}$$

де $\omega = |\vec{u}\,|$.

Розв'язком рівнянь (6) є (7). Підставивши (7) в (12), одержуємо

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\dddot{\gamma} - 4\dot{\gamma}F = \\ &\qquad -\dot{\gamma}\omega F_\omega + \left[-2\dot{\gamma}u^3 + \frac{1}{4}\{\dddot{\gamma}\, x_1x_2 + \ddot{\sigma}^a x_{3-a} + \dot{n}\}\right]F_{u^3}. \end{aligned} \tag{13}$$

Розщепивши (13), матимемо систему

$$\dddot{\gamma} F_{u^3} = 0, \tag{14}$$

$$\ddot{\sigma}^a F_{u^3} = 0, \tag{15}$$

$$\dot{\gamma}\omega F_\omega + \left[2\dot{\gamma}u^3 - \frac{1}{4}\dot{n}\right]F_{u^3} = 4\dot{\gamma}F - \frac{1}{4}\dddot{\gamma}\,. \tag{16}$$

Можливі два різні випадки.

1. $F_{u^3} \neq 0$. З рівняннь (14)–(16) одержимо

$$\dddot{\gamma} = 0, \tag{17}$$

$$\ddot{\sigma}^a = 0, \quad \dot{n} = 0, \tag{18}$$

$$\omega F_\omega + 2u^3 F_{u^3} - 4F = 0. \tag{19}$$

Загальним розв'язком рівняння (19) є функція $F = (u^3)^2\varphi(\omega)$, де $\varphi(\omega)$ — довільна гладка функція, $\omega = \frac{\vec{u}^{\,2}}{u^3}$. Розв'язавши рівняння (17), (18) і використавши (2) (див. [2]) одержуємо алгебру $AG_2(1,2)$.

2. Якщо $F_{u^3} = 0$, то рівняння (13) матиме вигляд

$$\omega F_\omega - 4F = -\frac{\dddot{\gamma}}{4\dot{\gamma}}. \tag{20}$$

З рівняння (20) одержуємо $F = \lambda_1\omega^4 + \lambda_2$, де λ_1, λ_2 — довільні сталі, а функція γ є розв'язком рівняння

$$\dddot{\gamma} - 16\lambda_2\dot{\gamma} = 0. \tag{21}$$

Розв'язок рівняння (21) залежить від λ_2. Можливі три різні випадки:

1) при $\lambda_2 = 0$, $\gamma = C_1x_0^2 + C_2x_0 + C_3$, отримаємо алгебру A_1;
2) при $\lambda_2 = -\lambda_3^2 < 0$, $\gamma = C_1 + C_2\cos(4\lambda_3x_0) + C_3\sin(4\lambda_3x_0)$, де λ_3 — довільна стала, отримаємо алгебру A_2;
3) при $\lambda_2 = \lambda_3^2 > 0$, $\gamma = C_1 + C_2\exp(4\lambda_3x_0) + C_3\exp(-4\lambda_3x_0)$, де λ_3 — довільна стала, відмінна від нуля, отримаємо алгебру інваріантності A_3. ■

В частинному випадку, коли $F(s,|p|) = \lambda s^2$, $\lambda = \mathrm{const}$, система (8) має вигляд:

$$\begin{aligned} &ip_0 + p_{12} + 4sp = 0,\\ &\triangle s + |p|_{12}^2 = 0, \qquad s_{12} = \lambda s^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Згідно теореми 2, максимальною алгеброю інваріантності системи (22) є розширена алгебра Галілея $AG_2(1,2)$, базисні елементи якої задані формулами (9). Використаємо симетрійні властивості системи (22) для симетрійної редукції до систем з меншою кількістю незалежних змінних. Для цього застосуємо алгоритм, детально описаний в [3].

З зображення операторів алгебри $AG_2(1,2)$ випливає, що інваріантний анзац для системи (22) має вигляд

$$\begin{aligned} &p = f(x)\varphi^1(\omega_1,\omega_2)\exp\left(i\left[g(x) + \varphi^2(\omega_1,\omega_2)\right]\right),\\ &s = [f(x)]^2\varphi^3(\omega_1,\omega_2), \end{aligned} \tag{23}$$

де φ^1, φ^2, φ^3 — нові невідомі функції 2-х змінних ω_1, ω_2, $f(x)$, $g(x)$, $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ — задані функції, які одержуються при знаходженні інваріантів алгебри $AG_2(1,2)$.

В залежності від співвідношень між параметрами групи $G_2(1,2)$, яка породжує алгебру $AG_2(1,2)$, одержимо 7 нееквівалентних випадків:

$$1)\quad \vec{\omega} = \vec{x} - \vec{d}x_0, \quad f(x) = 1, \quad g(x) = kx_0;$$

$$2)\quad \omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = d_1x_2 - d_2x_1, \quad f(x) = 1, \quad g(x) = kx_1;$$

$$3)\quad \omega_1 = x_0, \quad \omega_2 = d_1x_2 - d_2x_1, \quad f(x) = 1,$$

$$g(x) = d_1x_2 + d_2x_1 - d_1d_2x_0 + \frac{k}{2}\ln x_0;$$

$$4)\quad \vec{\omega} = \frac{1}{x_0^2}\vec{d} - \frac{2\vec{x}}{x_0}, \quad f(x) = \frac{1}{x_0},$$

$$g(x) = \frac{d_1d_2}{12x_0^3} - \frac{1}{4x_0}(d_2\omega_1 + d_1\omega_2) - \frac{x_0}{4}\omega_1\omega_2 - \frac{k_1}{x_0} + k_2;$$

$$5)\quad \vec{\omega} = \frac{\vec{x} - \vec{d}x_0}{\sqrt{x_0}}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}},$$

$$g(x) = -d_1d_2x_0 + d_1x_2 + d_2x_1 + \frac{k}{2}\ln x_0;$$

$$6)\quad \vec{\omega} = \frac{\vec{x} - \vec{d}x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}},$$

$$g(x) = x_0(\omega_1\omega_2 - d_1d_2) + (k - d_1d_2)\,\mathrm{arctg}\,x_0 + d_1x_2 + d_2x_1;$$

$$7)\quad \vec{\omega} = \frac{(\vec{x} + \vec{d}x_0)}{\sqrt{x_0^2-1}}, \quad f(x) = \frac{2}{\sqrt{x_0^2-1}},$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(k + d_1d_2)\ln\left|\frac{x_0-1}{x_0+1}\right| + $$

$$+\frac{2x_0-1}{x_0-1}(d_1d_2 + C_1x_2 + C_2x_1) + \frac{x_1x_2}{x_0-1}.$$

Тут C_a, d_a, k, k_1, k_2, a — довільні сталі.

Якщо анзац (23) підставити в систему (22), то для кожного з наведених вище випадків одержимо редуковану систему відносно невідомих функцій φ^1, φ^2, φ^3:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad \varphi^1_{12} - d_a\varphi^2_a - \varphi^1(k-4\varphi^3) = 0,\\
& \varphi^2_{12} - d_a\varphi^1_a - \varphi^2(k-4\varphi^3) = 0,\\
& \triangle\varphi^3 = (\vec\varphi^{\,2})_{12}, \qquad \varphi^3_{12} = \lambda(\varphi^3)^2;\\
&2)\quad d_1d_2\varphi^1_{22} - \varphi^2_1 - kd_2\varphi^2_2 - 4\varphi^1\varphi^3 = 0,\\
& d_1d_2\varphi^2_{22} + \varphi^1_1 + kd_2\varphi^1_2 - 4\varphi^2\varphi^3 = 0,\\
& \vec d^{\,2}\varphi^3_{22} = d_1d_2(\vec\varphi^{\,2})_{22}, \qquad -d_1d_2\varphi^3_{22} = \lambda(\varphi^3)^2;\\
&3)\quad d_1d_2\left(\frac{\varphi^1_{22}}{\varphi^1} - (\varphi^2_2)^2\right) + \varphi^2_1 + (\omega_2 - k)\frac{\varphi^2_2}{\omega_1} - 4\varphi^3 = 0,\\
& d_1d_2(2\varphi^1_2\varphi^2_2 + \varphi^1\varphi^2_2) - \frac{1}{\omega_1}(\omega_2\varphi^1_2 + \varphi^1) - \varphi^1_1 + k\varphi^1_2 = 0,\\
& \vec d^{\,2}\varphi^3_{22} = d_1d_2(\vec\varphi^{\,2})_{22}, \qquad -d_1d_2\varphi^3_{22} = \lambda(\varphi^3)^2;\\
&4)\quad \varphi^1\varphi^2_{12} + \varphi^1_1\varphi^2_2 + \varphi^1_2\varphi^2_1 = 0,\\
& \frac{\varphi^1_{12}}{\varphi^1} - \varphi^2_2\varphi^2_1 + \varphi^3 + \frac{1}{8}(d_2\omega_1 + d_1\omega_2) + \frac{k_1}{4} = 0,\\
& \triangle\varphi^3 = -[(\varphi^1)^2]_{12}, \qquad 4\varphi^3_{12} = \lambda(\varphi^3)^2;\\
&5)\quad \frac{\varphi^1_{12}}{\varphi^1} - \varphi^2_1\varphi^2_2 + \omega_a\varphi^2_a + 4\varphi^3 - \frac{k}{2} = 0,\\
& \varphi^1\varphi^2_{12} + \varphi^1_1\varphi^2_2 + \varphi^1_2\varphi^2_1 - \tfrac{1}{2}(\omega_a\varphi^1_a + \varphi^1) = 0,\\
& \triangle\varphi^3 = -[(\varphi^1)^2]_{12}, \qquad \varphi^3_{12} = \lambda(\varphi^3)^2;\\
&6)\quad \frac{\varphi^1_{12}}{\varphi^1} - \varphi^2_1\varphi^2_2 + 4\varphi^3 - \omega_1\omega_2 + d_1d_2 - k = 0,\\
& \varphi^1\varphi^2_{12} + \varphi^1_1\varphi^2_2 + \varphi^1_2\varphi^2_1 = 0,\\
& \triangle\varphi^3 = -[(\varphi^1)^2]_{12}, \qquad \varphi^3_{12} = \lambda(\varphi^3)^2;\\
&7)\quad \frac{\varphi^1_{12}}{\varphi^1} - \varphi^2_1\varphi^2_2 + +2\omega_a\varphi^2_a + 16\varphi^3 - (d_1d_2 + k) = 0,\\
& \varphi^1\varphi^2_{12} + \varphi^1_1\varphi^2_2 + \varphi^1_2\varphi^2_1 + 2\omega_a\varphi^1_a + \varphi^1 = 0,\\
& \triangle\varphi^3 = -\tfrac{1}{4}[(\varphi^1)^2]_{12}, \qquad \tfrac{1}{4}\varphi^3_{12} = \lambda(\varphi^3)^2.
\end{aligned}
$$

[1] Tajiri M., Takahito A. Pereodic Soliton Solutions to the Davey–Stewartson Equation // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2000. — **30**, Part 1. — P. 210–217.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[3] Fushchych W.I., Shtelen V.M., Serov N.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 436 p.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 254–261

УДК 517.958

Симетрійні властивості та точні розв'язки системи рівнянь рідини Ван-дер-Ваальса

М.М. СЄРОВА, О.М. ОМЕЛЯН

Полтавський державний технічний університет, Полтава
E-mail: vschmat@pstu.pi.net.ua

Прокласифіковано ліївські симетрії системи рівнянь рідини Ван-дер-Ваальса. Симетрійні властивості застосовано для побудови точних розв'язків цієї системи.

The Lie symmetries of the Van-der-Vaalse fluid equations system were classified. The symmetry properties are used for constructing of some exact solutions of this system.

Система рівнянь рідини Ван-дер-Ваальса

$$\begin{aligned} u_0^1 &= \lambda_1 u_{11}^1 + u^1 u_1^1 + \left[f\left(u^2\right)\right]_1, \\ u_0^2 &= \lambda_2 u_{11}^2 + u^1 u_1^2 + u^2 u_1^1, \end{aligned} \tag{1}$$

де $u^1 = u^1(x)$, $u^2 = u^2(x)$, $x = (x_0, x_1)$; $f\left(u^2\right)$ — довільна гладка функція; λ_1, λ_2 — довільні сталі, ефективно застосовується при описанні процесів у молекулярно-кінетичній теорії газів та рідин [1].

У цій роботі прокласифіковано ліївські симетрії системи (1) в залежності від вигляду функції $f\left(u^2\right)$. Отримані симетрії використано для знаходження точних розв'язків системи (1). Результатом дослідження симетрійних властивостей системи (1) є наступне твердження.

Теорема. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (1) є:*
1) алгебра Галілея

$$AG(1,1) = \langle \partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad G = x_0\partial_1 - \partial_{u^1} \rangle, \tag{2}$$

якщо $f(u^2)$ — довільна гладка функкція;

2) розширена алгебра Галілея $AG_1(1,1)$ з базисними елементами

$$\partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - \frac{2}{m}u^2\partial_{u^2}, \tag{3}$$

якщо $f\left(u^2\right) = \lambda_3\left(u^2\right)^m$, де λ_3, m — довільні сталі, $\lambda_3 \neq 0$, $m \neq 0, 2$;

3) узагальнена алгебра Галілея $AG_2(1,1)$ з базисними елементами

$$\begin{aligned} &\partial_0, \quad \partial_1, \quad G, \quad D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 - u^1\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}, \\ &\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 - x_0u^1\partial_{u^1} - x_0u^2\partial_{u^2} - x_1\partial_{u^1}, \end{aligned} \tag{4}$$

якщо $f\left(u^2\right) = \lambda_3\left(u^2\right)^2$;

4) алгебра $AG_2(1,1) + \langle I = u^2\partial_{u^2}\rangle$, якщо $f\left(u^2\right) = 0$.

Доведення. Симетрію системи (1) досліджуємо методом Лі [2, 3]. Після громіздких перетворень, притаманних алгоритму Лі, одержимо систему визначальних рівнянь на функції ξ^0, ξ^1, η^1, η^2, які є координатами інфінітезимального оператора

$$X = \xi^0\partial_0 + \xi^1\partial_1 + \eta^1\partial_{u^1} + \eta^2\partial_{u^2}$$

ліївської симетрії системи (1):

$$\begin{aligned} &\xi^0_1 = \xi^0_{u^a} = \xi^1_{u^a} = \eta^a_{u^b u^c} = 0, \qquad \xi^0_0 = 2\xi^1_1, \\ &(\lambda_1 - \lambda_2)\eta^1_{u^2} = 0, \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)\eta^2_{u^1} = 0, \\ &\eta^1 = -\xi^1_1 u^1 - \xi^1_0 - \lambda_1\eta^1_{1u^1} - \lambda_2\eta^2_{1u^2}, \\ &\eta^2 = \left(\eta^2_{u^2} - \eta^1_{u^1} - \xi^1_1\right)u^2 - 2\lambda_2\eta^2_{1u^1}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\eta^2_1 u^1 + \eta^1_1 u^2 + \lambda_2\eta^2_{11} - \eta^2_0 = 0, \\ &\eta^2_1 \dot{f} + \eta^1_1 u^1 + \lambda_1\eta^1_{11} - \eta^1_0 = 0, \\ &\eta^2_{u^1}\dot{f} - \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\eta^1_{u^2}u^2 + \lambda_1\eta^1_{1u^1} - \lambda_2\eta^2_{1u^2} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\eta^2\ddot{f} + \left(\eta^2_{u^2} - \eta^1_{u^1} + \xi^1_1\right)\dot{f} + 2\lambda_1\eta^1_{1u^2} = 0. \tag{7}$$

Розв'яжемо систему (5)–(7). Розв'язком рівнянь (5) будуть функції:

$$\begin{aligned} &\xi^1 = \dot{A}(x_0)x_1 + B(x_0), \qquad \xi^0 = 2A(x_0), \\ &\eta^1 = -\dot{A}(x_0)u^1 + \beta(x_0, x_1), \qquad \eta^2 = \alpha(x_0, x_1)u^2, \end{aligned} \tag{8}$$

де $A(x_0)$, $B(x_0)$, $\alpha(x_0,x_1)$, $\beta(x_0,x_1)$ — довільні гладкі функції. Розв'язуючи рівняння (6) із урахуванням (8), отримуємо

$$A(x_0)=\tfrac{1}{2}C_1x_0^2+C_2x_0+\tfrac{1}{2}C_3, \qquad B(x_0)=C_4x_0+C_5,$$
$$\beta=-\ddot{A}(x_0)x_1-\dot{B}(x_0), \qquad \alpha=-\dot{A}(x_0)+C_6.$$

Провівши спрощення на основі попередніх результатів, остаточно одержуємо

$$\begin{aligned}
&\xi^0=C_1x_0^2+2C_2x_0+C_3,\\
&\xi^1=(C_1x_0+C_2)x_1+C_4x_0+C_5,\\
&\eta^1=-(C_1x_0+C_2)u^1-C_1x_1-C_4,\\
&\eta^2=(-(C_1x_0+C_2)+C_6)u^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Використаємо рівняння (7) для класифікації симетрії системи (1) відносно функції f. Після підстановки (9) в (7), маємо

$$(-C_1x_0-C_2+C_6)\ddot{f}+(C_1x_0+C_2+C_6)\dot{f}=0.$$

Розщеплюючи попереднє рівняння по x_0, одержуємо систему

$$C_1\left(-u^2\ddot{f}+\dot{f}\right)=0, \qquad (C_6-C_2)u^2\ddot{f}+(C_6+C_2)\dot{f}=0.$$

Можливі наступні випадки:

1) $C_1=C_2=C_6=0$: f — довільна гладка функція;
2) $C_1=0$, $C_6=kC_2$, $C_2\neq 0$, $k=1-\frac{2}{m}$: $f=\lambda_3(u_2)^m$, де λ_3, $m\neq 0,2$ — довільні сталі:
3) $C_1\neq 0$, $C_6=0$, $C_2\neq 0$: $f=\lambda_3(u_2)^2$;
4) C_1, C_2, C_6 — довільні: $f=0$.

Для кожного з випадків стандартним чином (див. [2, 3]) одержуємо відповідну алгебру інваріантності. ■

Застосуємо знайдену симетрію до знаходження точних розв'язків системи рівнянь рідини Ван-дер-Ваальса. Розв'язок системи (1) шукаємо у вигляді [4]

$$U=A(x)\varphi(\omega)+B(x),$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $A(x) = \begin{pmatrix} a^{11}(x) & a^{12}(x) \\ a^{21}(x) & a^{22}(x) \end{pmatrix}$, $\varphi(\omega) = \begin{pmatrix} \varphi^1(\omega) \\ \varphi^2(\omega) \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} b^1(x) \\ b^2(x) \end{pmatrix}$; $a^{cd}(x)$, $b^c(x)$, $\omega = \omega(x)$ — задані функції, які знаходяться після розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{dx_1}{\xi^1} = \frac{du^1}{\eta^1} = \frac{du^2}{\eta^2} = dt, \tag{10}$$

$\varphi^c(\omega)$ — невідомі функції.

1. Алгеброю інваріантності для випадку, коли функція f — довільна, є алгебра (2). Координати інфінітезимального оператора для цього випадку задаються формулами

$$\xi^0 = d_0, \qquad \xi^1 = gx_0 + d_1, \qquad \eta^1 = -g, \qquad \eta^2 = 0.$$

Система (10) має вигляд

$$\frac{dx_0}{d_0} = \frac{dx_1}{gx_0 + d_1} = \frac{du^1}{-g} = \frac{du^2}{0} = dt,$$

або

$$\dot{x}_0 = d_0, \qquad \dot{x}_1 = gx_0 + d_1, \qquad \dot{u}^1 = -g, \qquad \dot{u}^2 = 0. \tag{11}$$

Спростимо систему (11), за допомогою перетворення інваріантності з групи $G(1,1)$:

$$\begin{aligned} &x_0' = x_0 + \theta_0, \qquad x_1' = x_1 + \theta_2 x_0 + \theta_1, \\ &u'^1 = u^1 - \theta_2, \qquad u'^2 = u^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Після перетворення (12) система (11) набуває вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = d_0, \qquad \dot{x}_1 = gx_0 + [g\theta_0 + d_1 - \theta_2 d_0], \\ &\dot{u}^1 = -g, \qquad \dot{u}^2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Подальше спрощення системи (13) залежить від умов на сталі g, d_0 і d_1. Можливі такі нееквівалентні випадки:

$$1)\ g = d_0 = 0, \quad d_1 \neq 0, \qquad 2)\ g^2 + d_0^2 \neq 0.$$

У першому випадку система (11) запишеться так:

$$\dot{x}_0 = 0, \qquad \dot{x}_1 = d_1, \qquad \dot{u}^1 = 0, \qquad \dot{u}^2 = 0. \tag{14}$$

Розв'язавши систему (14), отримуємо вигляд інваріантного анзацу

$$u^1 = \varphi^1(\omega), \qquad u^2 = \varphi^2(\omega), \qquad \omega = x_0. \tag{15}$$

У другому випадку, вибравши $\theta_2 = 0$ і $\theta_0 = -\frac{d_1}{g}$, одержимо

$$\dot{x}_0 = d_0, \qquad \dot{x}_1 = g x_0, \qquad \dot{u}^1 = -g, \qquad \dot{u}^2 = 0. \tag{16}$$

Розв'язок системи (16) задає два нееквівалентні анзаци

$$u^1 = \varphi^1(\omega) - \frac{x_1}{x_0}, \qquad u^2 = \varphi^2(\omega), \qquad \omega = x_0, \tag{17}$$

якщо $d_0 = 0$, та

$$u^1 = \varphi^1(\omega) + k x_0, \qquad u^2 = \varphi^2(\omega), \qquad \omega = x_1 + \frac{1}{2} k x_0^2, \tag{18}$$

де $k = -\frac{g}{d_0}$, якщо $d_0 \neq 0$.

Для знаходження невідомих функцій φ^1, φ^2 необхідно анзаци (15), (17), (18) підставити у систему (1). У результаті отримаємо три редуковані системи

$$\dot{\varphi}^1 = 0, \qquad \dot{\varphi}^1 = -\frac{\varphi^1}{\omega}, \qquad \lambda_1 \ddot{\varphi}^1 + \dot{f}\dot{\varphi}^2 + \varphi^1 \dot{\varphi}^1 - k = 0,$$

$$\dot{\varphi}^2 = 0; \qquad \dot{\varphi}^2 = -\frac{\varphi^2}{\omega}; \qquad \lambda_2 \ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^1 \varphi^2 + \varphi^1 \dot{\varphi}^2 = 0$$

відповідно.

2. Алгебра інваріантності для функції $f = \lambda_3 \left(u^2\right)^m$, має вигляд (3). Координати інфінітезимального оператора для цього випадку задаються формулами

$$\xi^0 = 2\kappa x_0 + d_0, \qquad \xi^1 = \kappa x_1 + g x_0 + d_1,$$
$$\eta^1 = -\kappa u^1 - g, \qquad \eta^2 = -\frac{2}{m}\kappa u^2.$$

Запишемо систему (10)

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = 2\kappa x_0 + d_0, \qquad \dot{x}_1 = \kappa x_1 + g x_0 + d_1, \\ &\dot{u}^1 = -\kappa u^1 - g, \qquad \dot{u}^2 = -\frac{2}{m}\kappa u^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Можливі два нееквівалентні випадки:

а) якщо $\kappa = 0$, то система (19) співпадає з (16);

b) якщо $\kappa \neq 0$ (не втрачаючи загальності, можна вважати $\kappa = 1$), то система (10) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = 2x_0 + d_0, \qquad \dot{x}_1 = x_1 + gx_0 + d_1, \\ &\dot{u}^1 = -u^1 - g, \qquad \dot{u}^2 = -\frac{2}{m}u^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Спростимо систему (20) за допомогою перетворення інваріантності з групи $G_1(1,1)$

$$\begin{aligned} &x_0' = x_0 e^{2\theta_3} + \theta_0, \qquad x_1' = \theta_2 x_0 e^{2\theta_3} + x_1 e^{\theta_3} + \theta_1, \\ &u^{1\prime} = u^1 e^{-\theta_3} - \theta_2, \qquad u^{2\prime} = u^2 e^{-\frac{2}{m}\theta_3}. \end{aligned} \tag{21}$$

Після перетворення (21) система (20) набуває вигляду

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = 2x_0 + (d_0 + 2\theta_0)e^{-2\theta_3}), \\ &\dot{x}_1 = x_0 e^{\theta_3}(g - \theta_2) + e^{-\theta_3}[g\theta_0 + d_1 + \theta_1 - \theta_2(2\theta_0 + d_0)], \\ &\dot{u}^1 = -u^1 + (\theta_2 - g)e^{\theta_3}, \qquad \dot{u}^2 = -\frac{2}{m}u^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Якщо у (22) покласти

$$\theta_0 = \frac{d_0}{2}, \qquad \theta_1 = g\frac{d_0}{2} - d_1, \qquad \theta_2 = g,$$

то система (20) спроститься до наступної

$$\dot{x}_0 = 2x_0, \qquad \dot{x}_1 = x_1, \qquad \dot{u}^1 = -u^1, \qquad \dot{u}^2 = -\frac{2}{m}u^2. \tag{23}$$

Отже, набір анзаців для розширеної алгебри Галілея $AG_1(1,1)$ буде складатися з анзаців алгебри $AG(1,1)$ і анзаца, породженого оператором дилатації D. На основі розв'язку системи (23) побудуємо анзац

$$u^1 = x_0^{-\frac{1}{2}}\varphi^1(\omega), \qquad u^2 = x_0^{-\frac{1}{m}}\varphi^2(\omega), \qquad \omega = \frac{x_1}{\sqrt{x_0}}. \tag{24}$$

Підставивши (24) в (1), одержуємо редуковану систему

$$\begin{aligned} &\lambda_1\ddot{\varphi}^1 + \left(\frac{1}{2}\omega + \varphi^1\right)\dot{\varphi}^1 + \lambda_3 m\left(\varphi^2\right)^{m-1}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\varphi^1 = 0, \\ &\lambda_2\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^1\varphi^2 + \left(\frac{1}{2}\omega + \varphi^1\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\varphi^2 = 0. \end{aligned}$$

3. Алгебра інваріантності для системи (1) із функцією $f = \lambda_3 \left(u^2\right)^2$ має вигляд (4). Координати інфінітезимального оператора для даного випадку будуть такі:

$$\xi^0 = x_0^2 + 2\kappa x_0 + d_0, \qquad \xi^1 = (x_0+\kappa)x_1 + gx_0 + d_1,$$
$$\eta^1 = -(x_0+\kappa)u^1 - x_1 - g, \qquad \eta^2 = (x_0+\kappa)u^2.$$

Аналогічно, як і в попередніх випадках, використовуючи перетворення з групи $G_2(1,1)$, можна показати, що набір анзаців для даної алгебри буде складатися з анзаців алгебри $AG_1(1,1)$ і анзаца, породженого оператором $\Pi+\partial_0$. Редукція системи (1) на основі знайдених для алгебри $AG_1(1,1)$ анзаців проведена. Тому розглянемо побудову анзаца, породженого оператором $\Pi + \partial_0$. Система (10) у цьому випадку матиме вигляд

$$\frac{dx_0}{x_0^2+1} = \frac{dx_1}{x_0 x_1} = \frac{du^1}{-x_0u^1 - x^1} = \frac{du^2}{-x_0u^2} = dt. \tag{25}$$

У результаті розв'язання системи (25) одержуємо анзац

$$\begin{aligned} u^1 &= \left(1+x_0^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\varphi^1(\omega) - x_0\omega\right), \\ u^2 &= \left(1+x_0^2\right)^{-\frac{1}{2}} \varphi^2(\omega), \qquad \omega = (1+x_0^2)^{-\frac{1}{2}} x_1. \end{aligned} \tag{26}$$

Підставляючи анзац (26) у систему (1), одержуємо редуковану систему

$$\lambda_1\ddot\varphi^1 + \varphi^1\dot\varphi^1 + 2\lambda_3\varphi^2\dot\varphi^2 + \omega = 0,$$
$$\lambda_2\ddot\varphi^2 + \dot\varphi^1\varphi^2 + \varphi^1\dot\varphi^2 = 0.$$

Розв'язавши редуковані системи та використавши відповідні анзаци, одержимо розв'язки системи (1). Приведемо деякі з них.

1) при $f\left(u^2\right) = \lambda_3 \ln^{2p+1}\left(u^2\right) + \lambda_4 \ln^{2p+2}\left(u^2\right) + \lambda_5 \ln^{-p}\left(u^2\right)$

$$u^1 = \lambda_6 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_6 p}\right)^{\frac{1}{p}+1} \left(x_1 + \frac{\lambda_5\lambda_6}{2\lambda_2} p x_0^2\right)^{-\frac{1}{p}-1} + \frac{\lambda_5\lambda_6}{\lambda_2} p x_0,$$

$$u^2 = \exp\left\{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_6 p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(x_1 + \frac{\lambda_5\lambda_6}{2\lambda_2} p x_0^2\right)^{-\frac{1}{p}}\right\},$$

де λ_1, λ_2, λ_5, λ_6, p — довільні сталі,

$$m = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_6 p}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad k = \frac{\lambda_5\lambda_6}{\lambda_2} p, \quad -2\lambda_4 = \lambda_6^2, \quad \lambda_3 = \frac{\lambda_1\lambda_6^2}{\lambda_2}(p+1);$$

2) при $f\left(u^2\right) = \lambda_3 \left(u^2\right)^m + \lambda_4 \left(u^2\right)^{-2m}$

$$u^1 = -\frac{\lambda_2}{m\left(x_1 + \frac{1}{2}kx_0^2\right)} + kx_0, \qquad u^2 = \left[\frac{k}{\lambda_3}\left(x_1 + \frac{1}{2}kx_0^2\right)\right]^{\frac{1}{m}},$$

$$k = m\lambda_3\sqrt{-\frac{2\lambda_4}{2\lambda_1\lambda_2 m + \lambda_2^2}}, \quad m \neq 0, \quad \lambda_3 \neq 0, \quad \lambda_4 \neq 0;$$

3) при $f\left(u^2\right) = \lambda_3 \left(u^2\right)^2$, $\lambda_3 < 0$

$$u^1 = -\frac{x_1 x_0}{1 + x_0^2} + 2\frac{\lambda_1}{x_1}, \qquad u^2 = \frac{x_1}{\sqrt{-2\lambda_3}\left(1 + x_0^2\right)}.$$

[1] Jian H.-Y., Wang X.-P., Hsieh D.-Y. The global attractor of a dissipative nonlinear evolution system // J. Math. Anal. and Appl. — 1999. — **238**. — P. 124–142.

[2] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

[3] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. — New York: Springer, 1986. — 497 p.

[4] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. — Київ: Наук. думка, 1989. — 335 с.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 262–268

УДК 517.95

Про редукції в неканонічній ієрархії інтегровних систем

Ю.М. СИДОРЕНКО

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів
E-mail: matmod@franko.lviv.ua

Наведено приклади нових багатокомпонентних нелінійних інтегровних систем. Показано, що неканонічна ієрархія комутуючих операторів містить зображення Лакса для модифікованих моделей типу Шрьодінгера і Яджими–Ойкави.

The examples of new multi-component nonlinear integrable systems are given. It is shown that non-canonical hierarchy of commuting operators contains Lax representation for modified models of Schrödinger type and Yagima–Ojkava.

1. Основні положення та поняття. В роботах [1]–[3] розглядались методи інтегрування нелінійних рівнянь математичної фізики, які допускають операторне зображення Лакса вигляду

$$[L, M] := LM - ML = \left[\sum_{i=0}^{n} u_i \mathcal{D}^i + \mathbf{q}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r}, \beta\partial_t - \sum_{j=0}^{m} v_j \mathcal{D}^j\right] = 0, \quad (1)$$

де $u_i = u_i(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$, $v_j = v_j(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$ — гладкі скалярні комплекснозначні функції дійсних змінних x, t; $\beta \in \mathbb{C}$; $n, m, k \in \mathbb{N}$; $\mathbf{q} = (q_1(x,t), \ldots, q_k(x,t))$, $\mathbf{r} = (r_1(x,t), \ldots, r_k(x,t))^\top$ — гладкі векторні функції; $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$ — оператор диференціювання по еволюційному параметру t; $\mathcal{D}$ — символ оператора диференціювання по просторовій змінній x; $\mathbf{q}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r} := \sum_{i=1}^{k} q_i \mathcal{D}^{-1} r_i$.

Рівняння (1) розглядалось нами в так званій, канонічній калібровці

$$u_n(x,t) = v_m(x,t) \equiv 1, \qquad u_{n-1} = v_{m-1} \equiv 0. \quad (2)$$

Умова (2) забезпечує замкненість системи диференціальних рівнянь для функцій u_i, v_i, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, рівносильної операторному рівнянню (1) ($n + m + 2k - 4$ рівнянь для тієї ж кількості невідомих функцій).

Вперше нелінійні рівняння, що допускають зображення (1) при умовах (2) і $k = 1$, виникали як нелокальні симетрійні редукції в скалярній ієрархії Кадомцева–Петвіашвілі [4]–[6], а їх багатокомпонентне узагальнення запропоновано в [7, 8].

Різним аспектам теорії рівнянь (1), (2) за останнє десятиріччя присвячено значну кількість досліджень (далеко неповну бібліографію можна знайти в [3], однак на цей час автору невідомі роботи по оберненій задачі теорії розсіювання для інтегродиференціального оператора L з (1) і тим більш по дослідженню задачі Коші–Діріхле для відповідних нелінійних еволюційних систем.

В цій роботі ми розглядаємо ієрархію рівнянь (1) з такими, апріорі, обмеженнями

$$u_n(x,t) = v_m(x,t) \equiv 1. \tag{3}$$

Відповідна нелінійна система є незамкненою ($n + m + 2k - 1$ рівняння для $n + m + 2k$ функцій u_i, v_i, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$), що дозволяє нам навіть у найпростіших випадках ($n = 1, 2$) навести досить широкий клас інтегровних редукцій рівняння (1), (3).

Зауважимо, що під редукцією рівняння (1) ми розуміємо накладання на функції u_i, v_i, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ додаткових обмежень (в'язей), які не протирічать динаміці системи (1) і роблять її замкненою.

Означення. *Транспонованим U^τ символом до мікродиференціального оператора*

$$U = \sum_{i>-\infty}^{N(U)} u_i \mathcal{D}^i, \qquad u_i = u_i(x) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R} \to \mathbb{C}), \quad N(U) \in \mathbb{Z},$$

називається формальний ряд

$$U^\tau := \sum_{i>-\infty}^{N(U)} (-1)^i \mathcal{D}^i u_i^\top := \sum_{i>-\infty}^{N(U)} \tilde{u}_i \mathcal{D}^i, \qquad \partial_t^\tau = -\partial_t. \tag{4}$$

Спряженим U^* оператор має вигляд

$$U^* := \bar{U}^\tau = \sum_{i>-\infty}^{N(U)} (-1)^i \mathcal{D}^i u_i^* = \sum_{i>-\infty}^{N(U)} \bar{\tilde{u}}_i \mathcal{D}^i.$$

Знаком "$\top$" позначається звичайне матричне транспонування, "$*$" — ермітове спряження матричних функцій: $u_i^*(x) := \bar{u}_i^\top(x)$.

Неважко показати, що транспонованим до скалярного інтегродиференціального оператора L з (1) є оператор вигляду

$$L^{\tau} = \sum_{i=0}^{n} \tilde{u}_i \mathcal{D}^i - \mathbf{r}^{\top} \mathcal{D}^{-1} \mathbf{q}^{\top},$$

де $\tilde{u}_i = \sum_{j=i}^{n} (-1)^j u_j^{(j-i)}$, $i = \overline{0, n}$.

Теорема. *Нехай пара операторів*

$$A = \sum_{i>-\infty}^{n_1} a_i \mathcal{D}^i, \qquad B = \beta\partial_t - \sum_{i>-\infty}^{n_2} b_i \mathcal{D}^i,$$

задовольняє одну з умов ($\nu, \gamma \in \{\pm 1\}$)*:*

$$\begin{aligned}
&1) \quad \mathcal{D}A\mathcal{D}^{-1} = \nu A^{\tau}, \qquad \mathcal{D}B\mathcal{D}^{-1} = \gamma B^{\tau};\\
&2) \quad \mathcal{D}^{-1}A\mathcal{D} = \nu A^{\tau}, \qquad \mathcal{D}^{-1}B\mathcal{D} = \gamma B^{\tau};\\
&3) \quad \mathcal{D}A\mathcal{D}^{-1} = \nu A^{*}, \qquad \mathcal{D}B\mathcal{D}^{-1} = \gamma B^{*};\\
&4) \quad \mathcal{D}^{-1}A\mathcal{D} = \nu A^{*}, \qquad \mathcal{D}^{-1}B\mathcal{D} = \gamma B^{*},
\end{aligned} \tag{5}$$

де оператор B^{τ} визначений формулою (4).

Тоді, відповідно, в'язі ($i < n_1$)

$$\begin{aligned}
&1) \quad a_{n_1} - \nu\tilde{a}_{n_1} = 0, \qquad a'_{i+1} + a_i - \nu\tilde{a}_i = 0;\\
&2) \quad a_{n_1} - \nu\tilde{a}_{n_1} = 0, \qquad \tilde{a}'_{i+1} + \tilde{a}_i - \nu a_i = 0;\\
&3) \quad a_{n_1} - \nu\bar{\tilde{a}}_{n_1} = 0, \qquad a'_{i+1} + a_i - \nu\bar{\tilde{a}}_i = 0;\\
&4) \quad a_{n_1} - \nu\bar{\tilde{a}}_{n_1} = 0, \qquad \bar{\tilde{a}}'_{i+1} + \bar{\tilde{a}}_i - \nu a_i = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

зберігаються при еволюції в силу динамічної системи $[A, B] = 0$.

Доведення є наслідком очевидних тотожностей

$$[A, B] = 0 \;\Leftrightarrow\; [A^{\tau}, B^{\tau}] = 0 \;\Leftrightarrow\; [A^*, B^*] = 0.$$

Розглянемо пару формальних операторів вигляду

$$L = \mathcal{D} + u_0 + \mathbf{q}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r}, \qquad M = \beta\partial_t - \mathcal{D}^2 - v_1\mathcal{D} - v_0. \tag{7}$$

Операторне рівняння (1) для операторів (7) рівносильне системі

$$\beta u_{0_t} = u_{0_{xx}} + (2u_0 + c_1(t))u_{0_x} + 2(\mathbf{qr})_x - v_{0_x},$$

$$\beta \mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xx} + (2u_0 + c_1(t))\mathbf{q}_x + v_0\mathbf{q},$$

$$\beta \mathbf{r}_t = -\mathbf{r}_{xx} + \{(2u_0 + c_1(t))\mathbf{r}\}_x + v_0\mathbf{r}.$$

Покладаючи довільну сталу (відносно змінної $x \in \mathbb{R}$) інтегрування $c_1(t) = 0$, отримаємо основну систему нелінійних еволюційних рівнянь, редукції якої досліджуються в цій роботі,

$$\begin{aligned} \beta u_{0_t} &= u_{0_{xx}} + 2u_0 u_{0_x} + 2(\mathbf{qr})_x - v_{0_x}, \\ \beta \mathbf{q}_t &= \mathbf{q}_{xx} + 2u_0\mathbf{q}_x + v_0\mathbf{q}, \\ \beta \mathbf{r}_t &= -\mathbf{r}_{xx} + 2(u_0\mathbf{r})_x - v_0\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{8}$$

2. Основні приклади редукованих систем.

Векторне нелінійне рівняння Шрьодінгера (NS). Найпростішою редукцією системи (8) є:

$$u_0(x,t) \equiv \mathrm{const} = 0, \quad r_i = \mu_i \bar{q}_i, \quad \mu_i \in \mathbb{R}, \quad \beta = i,$$

де i — уявна одиниця.

При цьому (8) зводиться до k-компонентного рівняння Шрьодінгера [8]

$$i q_{j_t} = q_{j_{xx}} + 2\sum_{i=1}^{k} \mu_i |q_i|^2 q_j, \qquad j = \overline{1,k}, \tag{9}$$

або у векторній формі

$$i\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xx} + 2\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathbf{q}, \qquad \mathcal{M} := \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k), \tag{10}$$

з L–M парою вигляду

$$[\mathcal{D} + \mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*,\ i\partial_t - \mathcal{D}^2 - 2\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*] = 0. \tag{11}$$

Метод побудови точних розв'язків моделі (9), (10) з використанням зображення (11) запропоновано в [2].

2. *Багатокомпонентні узагальнення рівнянь Каупа–Броера* (KB). Накладаючи на систему (8) в'язі $\beta \in \mathbb{R}$; $v_0 \equiv 0$; $q_i \equiv c_i = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$; $i = \overline{1,l}$; $u_0 := u(x,t) \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$; $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$, отримаємо редукцію

$$\beta u_t = u_{xx} + 2uu_x + 2\sum_{i=1}^{l} c_i r_{i_x} + 2\sum_{i=l+1}^{k} (q_i r_i)_x,$$

$$\beta q_{i_t} = q_{i_{xx}} + 2uq_i, \qquad i = \overline{l+1,k}, \tag{12}$$
$$\beta \mathbf{r}_t = -\mathbf{r}_{xx} + 2(u\mathbf{r})_x.$$

Система (8) редукується також на інваріантний підмноговид фазового простору, що задається в'язями $\beta \in \mathbb{R}$; $v_0 = 2u_{0_x}$; $r_i \equiv \mu_i = \mathrm{const}$, $i = \overline{1,l}$; $u_0 := u$, $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

$$\beta u_t = -u_{xx} + 2uu_x + 2\sum_{i=1}^{l} \mu_i q_{i_x} + 2\sum_{i=l+1}^{k} (q_i r_i)_x,$$
$$\beta r_{i_t} = -r_{i_{xx}} + 2ur_{i_x}, \qquad i = \overline{l+1,k}, \tag{13}$$
$$\beta \mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xx} + 2u\mathbf{q}_x + 2u_x\mathbf{q}.$$

При $l = k$ системи (12), (13) є k-компонентними узагальненнями нелінійної моделі Каупа–Броера [9]

$$\begin{aligned} u_t &= \pm u_{xx} + 2uu_x + v_x, \\ v_t &= \mp v_{xx} + 2(uv)_x, \end{aligned} \tag{14}$$

яка описує розповсюдження нелінійних хвиль на мілководді.

Векторне модифіковане нелінійне рівняння Шрьодінгера (mNS). Операторне зображення (1) для системи (8) має вигляд

$$[\mathcal{D} + u_0 + \mathbf{q}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{r},\ \beta\partial_t - \mathcal{D}^2 - 2u_0\mathcal{D} - v_0] = 0. \tag{15}$$

Накладаючи на комутуючу L–M пару редукційне обмеження $(5)_3$

$$\mathcal{D}L\mathcal{D}^{-1} = -L^*, \qquad \mathcal{D}M\mathcal{D}^{-1} = M^*, \tag{16}$$

і розв'язуючи відповідні рівняння $(6)_3$, отримуємо $v_0 \equiv 0$; $\beta \in i\mathbb{R}$; $\mathbf{r} = i\mathcal{M}\mathbf{q}_x^* \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C})$, $\mathcal{M} = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_k)$, $\mu_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,k}$; $u_0 = i\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^* \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \to i\mathbb{R})$. Для зручності при інтегруванні співвідношень $(6)_3$ довільні сталі (по змінній x) інтегрування вибрано нульовими. В результаті редукована система набуває вигляду

$$\begin{aligned} &[\mathcal{D} - i\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^* + i\mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}_x^*,\ \beta\partial_t - \mathcal{D}^2 + 2i\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathcal{D}] = 0 \ \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow\ \beta\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xx} - 2i\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*\mathbf{q}_x. \end{aligned} \tag{17}$$

При редукції $(5)_4$ — $\mathcal{D}^{-1}L\mathcal{D} = -L^*$, $\mathcal{D}^{-1}M\mathcal{D} = M^*$, отримуємо еквівалентну модель

$$\begin{aligned} &[\mathcal{D} - i\mathbf{r}^*\mathcal{M}\mathbf{r} - i\mathbf{r}_x^*\mathcal{D}^{-1}\mathcal{M}\mathbf{r},\ \beta\partial_t - \mathcal{D}^2 + 2i\mathbf{r}^*\mathcal{M}\mathbf{r}\mathcal{D} + \\ &\qquad +2i(\mathbf{r}^*\mathcal{M}\mathbf{r})_x] = 0\ \Leftrightarrow\ \beta\mathbf{r}_t = -\mathbf{r}_{xx} - 2i\mathbf{r}_x\mathbf{r}^*\mathcal{M}\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{18}$$

Системи (17), (18) є новою багатокомпонентною інтегровною модифікацією нелінійного рівняння Шрьодінгера.

Модифікована модель Яджими–Ойкави. Серед великого розмаїття інтегровних систем, пов'язаних з рівнянням (1) при $n = 2$, в цій роботі ми виділяємо модель з нетривіальною редукцією $(5)_3$ $(m = 2)$: $[L, M] = 0$, $\mathcal{D}L\mathcal{D}^{-1} = L^*$, $\mathcal{D}M\mathcal{D}^{-1} = M^*$ $\Leftrightarrow$ $u_1 = iu \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2 \to i\mathbb{R})$, $\mathbf{r} = \mathcal{M}\mathbf{q}_x^*$, $u_0 = -\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*$, $v_1 = u_1 = iu$, $\beta \in i\mathbb{R}$. При цьому сама редукована система набуває елегантного вигляду $(\beta = i)$

$$i\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xx} + iu\mathbf{q}_x, \qquad u_t = 2(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)_x, \tag{19}$$

і, навіть в однокомпонентному випадку $(k = 1)$, на думку автора, раніше не зустрічалась в спеціалізованій літературі.

Інтегровна модель (19) є модифікацією векторного узагальнення системи Яджими–Ойкави [3]–[8], яка описує взаємодію пакету навколозвукових ленгмюровських хвиль у фізиці плазми і також міститься в (1) при $n = m = 2$ в самоспряженому випадку

$$\begin{aligned} &[L, M] = 0, \qquad L = L^*, \quad M = M^* \quad \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow \quad L = \mathcal{D}^2 + u + i\mathbf{q}\mathcal{M}\mathcal{D}^{-1}\mathbf{q}^*, \quad M = i\partial_t - \mathcal{D}^2 - u, \quad \beta = i, \\ &i\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xx} + u\mathbf{q}, \qquad u_t = 2(\mathbf{q}\mathcal{M}\mathbf{q}^*)_x. \end{aligned}$$

3. Заключні зауваження. Наведені в основній частині нові типи інтегровних систем (12), (13), (17), (19) мають комутаторне зображення з нетривіальними редукціями, відмінними від редукцій ермітового спряження, розглянутих в [2]. Тому знаходження їх точних розв'язків вимагає суттєвої модифікації апарату інтегрування, запропонованого в роботах [1]–[3]. За браком місця ми не торкались гамільтонової теорії систем (12)–(19). Зауважимо тільки, що всі вони допускають нескінчені серії нетривіальних законів збереження з густинами $\rho_n = \operatorname{Res} L^n$, $n \in \mathbb{N}$, поліноміально залежними від польових змінних і їх похідних по просторовій змінній $x \in \mathbb{R}$ скінченого порядку (див. [8, 9]). І, нарешті, не можна не зауважити, що нова багатокомпонентна версія mNS (17), як і в скалярному випадку (див. [10, 11]) є гамільтоновим потоком з канонічними дужками Пуассона на відміну від відомого раніше векторного узагальнення mNS [12]

$$i\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{xx} + \left(|\mathbf{q}|^2\mathbf{q}\right)_x.$$

Цей факт дає можливість надіятись також на розвинення апарату квантового методу оберненої задачі для моделі (17).

[1] Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева–Петвіашвілі з нелокальними в'язями // Доповіді НАН України. — 1999. — № 8. — С. 19–23.

[2] Сидоренко Ю.М. Метод інтегрування рівнянь Лакса з нелокальними редукціями // Доповіді НАН України. — 1999. — № 9. — С. 33–36.

[3] Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М. Ієрархія рівнянь Кадомцева–Петвіашвілі з нелокальними в'язями: Багатовимірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем // Укр. матем. журн. — 1999. — **51**, № 1. — С. 78–97.

[4] Sidorenko Yu., Strammp W. Symmetry constraints of the KP-hierarchy // Inverse Problems. — 1991. — **7**. — L37–L43.

[5] Konopelchenko B., Sidorenko Yu., Strammp W. (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems // Phys. Lett. A. — 1991. — **151**. — P. 17–21.

[6] Oevel W., Sidorenko Yu., Strammp W. Hamiltonian structures of the Melnicov system and its reductions // Inverse Problems. — 1993. — **9**. — P. 737–747.

[7] Sidorenko Yu. KP-hierachy and (1+1)-dimensional multicomponent integrable systems // Укр. матем. журн. — 1993. — **25**, № 1. — P. 91–104.

[8] Sidorenko Yu., Strammp W. Multicomponents integrable reductions in Kadomtsev–Petviashvili hierarchy // J. Math. Phys. — 1993. — **34**, № 4. — P. 1429–1446.

[9] Oevel W., Strammp W. Constrained KP-hierarchy and bi-Hamiltonian structures // Commun. Math. Phys. — 1993. — **157**. — P. 51–81.

[10] Сидоренко Ю.М. Представление Лакса и полная интегрируемость обобщенной нелинейной модели типа Шредингера // Доклады АН УССР. Сер. А. — 1985. — № 12. — С. 17–20.

[11] Sidorenko Yu. Hamiltonian structures of some two-component systems // Journ. of Soviet. Math. — 1989. — **46**, № 1. — P. 1657–1666.

[12] Hisakado M., Wadati M. Gauge transformations among generalised non-linear Schrödinger equations // J. Phys. Society of Japan. — 1994. — **63**, № 11. — P. 3962–3966.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 269–275

УДК 539.182:518.5:517.988.68

Метод стрільби для визначення характеристик автохвильових розв'язків нелінійної моделі структурованого середовища

С.І. СКУРАТІВСЬКИЙ

Інститут геофізики ім. Суботіна НАН України, Київ
E-mail: skur@ukr.net

За допомогою методів групового аналізу систему ДРЧП, яка описує процеси в структурованому середовищі з часовою та просторовою нелокальностю зведено до системи ЗДР. Для вивчення структури та стійкості розв'язків одержаної системи використано метод стрільби. Шляхом аналізу спектру ляпуновських характеристичних показників доведено існування серед розв'язків вихідної системи дивного атрактору.

Using the Lie symmetry method, a system of PDEs describing a model of structured medium with time and space nonlocality is reduced to a system of ODE. Structure and stability of solutions of the obtained system are investigated by means of the shooting method. Existence of a strange attractor among solutions of the initial system are proved using the analysis of LHP spectrum.

Для опису поширення довгих нелінійних хвиль в структурованих середовищах використовують систему гідродинамічного типу [2], замкнуту динамічним рівнянням стану:

$$\rho\frac{du}{dt}+\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\gamma, \qquad \frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

$$\begin{gathered}\tau\left(\frac{dp}{dt}-\chi\frac{d\rho}{dt}\right)=\kappa\rho-p+\sigma\left\{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x}-\right.\\ \left.-\eta\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2\right)\right\}-h\left\{\frac{d^2p}{dt^2}+\eta\left(\frac{2}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2-\frac{d^2\rho}{dt^2}\right)\right\},\end{gathered} \tag{1}$$

де $\rho\gamma$ — массова сила, κ, τ, χ, σ, η — деякі параметри.

В роботі за допомогою якісних методів вперше досліджується модель, що враховує одночасно вплив просторової та часової нелокальності. Випадки системи (1) при $\sigma = 0$ та $h = 0$, розглянуті в [3], продемонстрували наявність періодичних, квазіперіодичних, солітоноподібних режимів. Для вивчення їх тонкої структури, основних кількісних та якісних характеристик досить зручим та корисним є метод стрільби [4]. Метод стрільби, в основі якого лежить ітераційний метод Ньютона, дозволяє уточнити значення періоду та координат точки граничного циклу, обчислити значення його мультиплікаторів, тобто розв'язує питання асимптотичної стійкості періодичної траєкторії. Дослідження стійкості розв'язку значно ускладнюється в режимі хаотичного атрактору. В такому випадку аналізують спектр ляпуновських характеристичних показників (ЛХП), тестовою задачею для обчислення яких є їх зв'язок з мультиплікаторами періодичної траєкторії. Спектр ЛХП є також невід'ємною частиною доведення "дивності" атрактору системи, обчислення розмірності атрактору (інформаційної та фрактальної), дослідження його топологічної структури, біфуркацій при зміні керуючих параметрів.

Розглянемо анзац

$$\begin{aligned} &u = u(\omega) + D, \qquad \omega = x - Dt, \\ &p = \rho z(\omega), \qquad \rho = \rho_0 \exp\left[\xi t + s(\omega)\right], \end{aligned} \tag{2}$$

побудований на інваріантах генератора

$$\hat{Z} = \frac{\partial}{\partial t} + D\frac{\partial}{\partial x} + \xi\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + p\frac{\partial}{\partial p}\right)$$

однопараметричної підгрупи перетворень, які допускає система (1). Формула (2) описує розв'язки типу біжучої хвилі. Параметр D дорівнює швидкості хвильового пакунку, тоді як ξ задає нахил неоднорідності інваріантного стаціонарного розв'язку. Підстановка анзацу (2) в систему (1) дає одну квадратуру та систему звичайних диференціальних рівнянь для u, z, $w = du/d\omega$

$$\begin{aligned} &u\frac{du}{d\omega} = uw \equiv uF_1(u,z,w), \\ &u\frac{dz}{d\omega} = \gamma u + \xi z + w\left(z - u^2\right) \equiv uF_2(u,z,w), \qquad (3) \\ &u\frac{dw}{d\omega} = \big(2\gamma\xi\sigma u - \kappa u^2 + \gamma h\xi u^3 + \gamma\tau u^3 + \eta\xi\sigma w + 2\gamma\sigma uw - \end{aligned}$$

$$-2\xi\sigma u^2 w + \chi\tau u^2 w - h\xi u^4 w - \tau u^4 w + \eta\sigma w^2 + \eta h(uw)^2 -$$

$$-\sigma(uw)^2 - hu^4 w^2 + u^2 z + h\xi^2 u^2 z + \xi\tau u^2 z)/(\eta\sigma - \eta h u^2 -$$

$$-\sigma u^2 + hu^4) \equiv uF_3(u, z, w).$$

Єдиною критичною точкою системи (3), що належить до фізичної області значень параметрів є точка з координатами

$$u_0 = -\frac{\xi z_0}{\gamma}, \qquad z_0 = \frac{\kappa}{[1 - 2\sigma(\xi/D)^2]}, \qquad w_0 = 0. \tag{4}$$

Без втрати загальності можна вважати, що $u_0 = -D$. Будемо шукати умови виникнення періодичних автохвильових розв'язків в околі особливої точки $A(-D, z_0, 0)$. В змінних $X = u + D$, $Y = z - z_0$, $W = w$ лінійна частина системи (3) набуває вигляду

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ W \end{pmatrix}' = \hat{M} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -D \\ \gamma & \xi & \Delta \\ A & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ W \end{pmatrix},$$

де $(\cdot)' = Ud(\cdot)/d\omega$, $\quad \Delta = z_0 - D^2$,

$$A = \frac{D\kappa\xi\left(D^2 h\xi - 2\xi\sigma + D^2\tau\right)}{\left(-D^2 + \eta\right)\left(\sigma - D^2 h\right)\left(D^2 - 2\xi^2\sigma\right)},$$

$$B = \frac{D^2\left(1 + h\xi^2 + \xi\tau\right)}{\left(\eta - D^2\right)\left(\sigma - D^2 h\right)},$$

$$C = \frac{\eta\xi\sigma - D^4 h\xi - 2D^2\xi\sigma - \frac{2D^2\kappa\xi\sigma}{D^2 - 2\xi^2\sigma} - D^1\tau + D^2\chi\tau}{\left(\eta - D^2\right)\left(\sigma - D^2 h\right)}.$$

Згідно із теоремою Хопфа, народження граничного циклу можливе тоді, коли матриця $\hat{M}$ має одне від'ємне власне значення та пару суто уявних власних значень. Вказані умови будуть виконані, якщо

$$\begin{aligned} &\alpha = \xi + C > 0, \qquad \Omega^2 = AD - B\Delta + \xi C > 0, \\ &\alpha\Omega^2 = \xi(AD - Z_0 B). \end{aligned} \tag{5}$$

Якщо зафіксувати значення параметрів $\sigma = 0.6$, $\tau = 0.01$, $\eta = 50$, $\chi = 50$, $\xi = -1$, $h = 0.01$, то рівняння (5) визначає в просторі параметрів (D^2, κ) криву біфуркації Хопфа. Вона має вигляд параболи (рис. 1). Чисельні дослідження показують, що при перетині кривої біфуркації Хопфа в точці $B(22,6;10)$ у вказаному напрямі м'яко виникає граничний цикл (рис. 2). Подальше зменшення D^2 призводить до виникнення каскаду подвоєння, який завершується утворенням складного локалізованого режиму, зображеного на рис. 3.

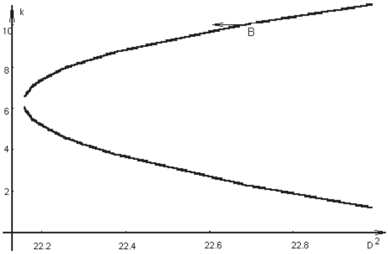

Рис. 1. Крива нейтральної стійкості в площині (D^2, κ)

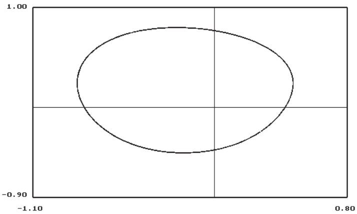

Рис. 2. Фазовий портрет граничного циклу в системі координат (u, z) при $\sigma = 0.6$, $\xi = -1$, $\tau = 0.01$, $\chi = 50$, $\eta = 50$, $h = 0.01$, $\kappa = 10$, $D^2 = 18.7$

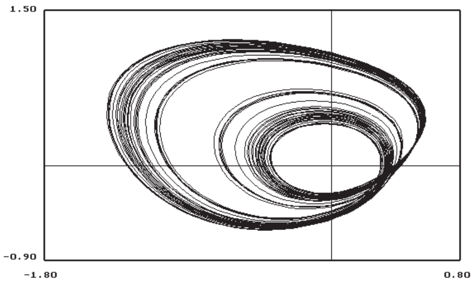

Рис. 3. Хаотичний атрактор при $D^2 = 18.0$ та тих же значеннях параметрів

Для дослідження знайденого T-періодичного руху за допомогою методу стрільби зручніше нормувати час та розглядати систему у вигляді

$$\frac{dx_i}{d\theta} = TF_i(x(\theta)), \qquad \theta \in [0,1], \quad i = 1,2,3,$$

де $x_i(0) = g_i$ — початкові умови.

Періодичним вважаємо розв'язок, якщо виконується умова

$$\Phi_i(g_i, T) \equiv x_i(1) - g_i = 0 \tag{6}$$

відносно змінних g_i та T. Розглянемо граничний цикл при значеннях параметрів $\eta = \chi = 50$, $\sigma = 0.6$, $D^2 = 18.7$, $\kappa = 10$, $\xi = -1$, $\tau = 0.01$, $h = 0.01(*)$. Для організації обчислень виберемо довільну точку на граничному циклі, в рівнянні (6) зафіксуємо першу змінну $g_1 = \text{const} = 0.1794$ та вкажемо початкове значення періоду $T = 6.86$. Рівняння (6) розв'яжемо методом Н'ютона, ітераційна схема якого має вигляд

$$Q_{n+1} = Q_n - J^{-1}\Phi_n(1), \qquad Q = \begin{pmatrix} g_2 \\ g_3 \\ T \end{pmatrix}.$$

Для побудови матриці Якобі, яка містить похідні по початковим умовам, слід розв'язати систему рівнянь на проміжку $\theta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = TF_1, \qquad \dot{x}_2 = TF_2, \qquad \dot{x}_3 = TF_3,\\
&\dot{x}_4 = T\{x_4(F_1)_{x_1} + x_5(F_1)_{x_2} + x_6(F_1)_{x_3}\},\\
&\dot{x}_5 = T\{x_4(F_2)_{x_1} + x_5(F_2)_{x_2} + x_6(F_2)_{x_3}\},\\
&\dot{x}_6 = T\{x_4(F_3)_{x_1} + x_5(F_3)_{x_2} + x_6(F_3)_{x_3}\}.
\end{aligned}$$

тричі з різними початковими умовами $P_1 = (g_1, g_2, g_3, 1, 0, 0)$, $P_2 = (g_1, g_2, g_3, 0, 1, 0)$, $P_3 = (g_1, g_2, g_3, 0, 0, 1)$. Тут $x_4 = \partial F_1/\partial g_1$, $x_5 = \partial F_2/\partial g_2$, $x_6 = \partial F_3/\partial g_3$. Тоді матриця Якобі при $\theta = 1$ має вигляд

$$\hat{J}(1) = \begin{pmatrix} P_{2,4} & P_{3,4} & TF_1(1) \\ P_{2,5} - 1 & P_{3,5} & TF_2(1) \\ P_{2,6} & P_{3,6} - 1 & TF_3(1) \end{pmatrix}.$$

Даний метод дозволяє уточнити період та точку граничного циклу, встановити характер його стійкості шляхом обчислення мультиплікаторів циклу згідно теорії Флоке [5]. За результатами обчислень період циклу $(*)$ дорівнює 6.86384. При уточненому значенні періоду та точки циклу його мультиплікатори ρ_i, $i = 1, 2, 3$ як власні значення матриці монодромії

$$\hat{G}(1) = \begin{pmatrix} P_{1,4} & P_{2,4} & P_{3,4} \\ P_{1,5} & P_{2,5} & P_{3,5} \\ P_{1,6} & P_{2,6} & P_{3,6} \end{pmatrix}$$

складають $(-0.852, -0.282, 1.002)$, що доводить стійкість граничного циклу. Для перевірки результатів використаємо наступні твердження [7]:

1) один з мультиплікаторів автономної системи дорівнює 1;

2) згідно формули Ліувілля:

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = \operatorname{Exp}\left[\int_0^1 \operatorname{sp}(\hat{G}(t))dt\right], \tag{7}$$

де $\operatorname{sp}(\hat{G}(t)) = (F_1)_{x_1} + (F_2)_{x_2} + (F_3)_{x_3}$.

Для використання твердження 2) слід до основної системи додати умову (7) на проміжку $[0, 1]$. За результатами обчислень

$$\left|\int_0^1 \operatorname{sp}[\hat{G}(t)]dt - \ln\prod \rho_i\right| = 0.00017.$$

Виконання двох властивостей дозволяє довіряти результатам обчислення мультиплікаторів циклу та продовжити вивчення структури розв'язків за допомогою аналізу спектру ЛХП. Відомо, що мультиплікатори періодичних коливань пов'язані з характеристичними показниками Ляпунова за допомогою формули

$$\lambda_i = \frac{\ln(\rho_i)}{T}. \tag{8}$$

Спектр ЛХП, обчислений за формулою (8), дорівнює $(-0.0233, -0.1843, 0.000342)$. Обчислимо також спектр ЛХП, користуючись іншою методикою [6]. Одержимо $(-0.022, -0.185, -0.000084)$ після інтегрування напротязі 2000 одиниць умовного часу. Тестована на періодичних розв'язках схема обчислення ЛХП, стає суттєво корисною в області хаотичних режимів, оскільки для опису дивного атрактору використовують сигнатуру спектру ЛХП, а саме $(+, 0, -)$ [7]. Так, ЛХП для атрактору рис. 3. становить $(0.0331, 0.00075, -0.24225)$. Як показують обчислення, один з показників прямує до нуля із збільшенням часу інтегрування системи, що вказує на стійку роботу алгоритму. Такий результат дозволяє стверджувати, що хаотичний атрактор системи дивний. Якщо відомий спектр ЛХП, то можна вказати і ляпуновську розмірність атрактора згідно формули

$$D_L = j + \left(\sum_{i=1}^{j} \alpha_i\right) / \left|\alpha_{j+1}\right|,$$

де j — найбільше число, що задовольняє умову $\sum\limits_{i=1}^{j} \alpha_i > 0$. Тоді $D_L = 2.139$, що узгоджується з теорією [7]. Алгоритми методу стрільби та обчислення ЛХП розроблялись в пакеті MATHCAD 7.0 та паралельно на мові Паскаль з використанням різних чисельних методів інтегрування систем ЗДР (зокрема метод Рунге–Кутти 7-го порядку та Bulirsch–Stoer-метод). Таким чином:

– вдалося дослідити граничний цикл на стійкість завдяки методу стрільби;

– метод стрільби дозволив створити тести для обчислення спектру ЛХП;

– система рівнянь (3), і як наслідок (1), володіє “дивним” атрактором.

[1] Ovsyaninikov L.V. Group analysis of differential equations. — New York: Academic Press, 1982.

[2] Даневич Т.Б., Даниленко В.А. Уравнение состояния нелинейной среды с внетренними переменными, учитывающее временную и пространственную нелокальности // Доповіді НАН України. — 1998. — № 10. — С. 133–137.

[3] Vladimirov V.A., Sidorets V.N., Skurativsky S.I. Complicated travelling wave solutions of a modelling system describing media with memory and spatial nonlocality // Rep. Math. Phys. — 1999. — **44**, № 1. — P. 275–282.

[4] Методы анализа нелинейных динамических моделей / Под ред. Холодниока и др. — М.: Наука, 1998.

[5] Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1987.

[6] Wolf A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D. — 1985. — **16**, № 3. — P. 285–317.

[7] Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. — М.: Наука, 1990.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 276–282

UDC 517.958

On applications of group method to problems of mathematical physics in nonhomogeneous medium

I.M. TSYFRA †[1], ***I.A. KOZACHOK*** †[2], ***Z.I. SYMENOH*** †[3]

†[1] *Institute of Mathematics of NAS, Kyiv*
E-mail: itsyfra@imath.kiev.ua

†[2] *Institute of Geophysics of NAS of Ukraine, Kyiv*

†[3] *State Center of Scientific and Technical Expertise, Kyiv*

Запропоновано груповий метод для генерування розв'язків рівнянь математичної фізики в неоднорідному середовищі з розв'язків для однорідного середовища. Ефективність цього методу ілюструється на прикладі рівняння дифузії теплових нейтронів.

We propose a group method for generating solutions of equations of mathematical physics in nonhomogeneous medium from solutions of the same problem in homogeneous medium. The efficiency of this method is illustrated by examples of thermal neutron diffusion problems.

As is known, the group-theoretical analysis is used for the determination of exact solutions of numerous linear and nonlinear equations of mathematical physics [1, 2, 3]. One of the most efficient methods for the construction of explicit solutions is the method of group reduction [1, 2, 4]. Obviously, finite transformations of the invariance group of differential equations can be also applied to generating new solutions (both exact and approximate). In the present paper, we show that the group analysis can be applied to the construction of solutions of equations of mathematical physics with varying coefficients characterizing properties of the medium. While studying the problems of the theory and interpretation of geophysical fields, it is necessary to prove boundary-value problems for equations of the form

$$u_{xx} + u_{yy} = a(x, y)F(u, u_t, u_{tt}), \tag{1}$$

where $a(x,y)$ is a parameter characterizing the nonhomogeneity of the medium, F is a smooth function. Assume that $a(x,y)$ is a dependent variable contained in Eq. (1) on a level with $u(x,y)$. Then, in the extended space (x,y,t,u,a), Eq. (1) admits a sufficiently wide group of transformations of the form [5]

$$\begin{aligned} &x' = V(x,y), \quad y' = W(x,y), \qquad t' = t, \\ &u' = u, \qquad a' = \frac{a}{V_x^2 + W_x^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

where $V(x,y)$, $W(x,y)$ are arbitrary analytic functions. These groups of transformations were used in [5] for investigation of inverse problems of geophysics. It is shown in [6] that operators of conditional symmetry can be used for the construction of group bundle of differential equations. It turns out that the group of transformations (2) is sufficiently wide to solve the Cauchy problem for Eq. (1). By using the invariance property of (1) under transformations (2), we can easily verify that the following assertion is true:

Theorem 1. *Assume that $u = f(x,y,t)$ is a solution of the Cauchy problem*

$$u\mid_{t=0} = \varphi(x,y), \qquad u_t\mid_{t=0} = \Psi(x,y) \tag{3}$$

of Eq. (1) with $a(x,y) = a_0 = \text{const}$. Then $u = f(x',y',t)$ is a solution of the Cauchy problem

$$u\mid_{t=0} = \varphi(x',y'), \qquad u_t\mid_{t=0} = \Psi(x',y') \tag{4}$$

for Eq. (1) with $a = a_0(V_x^2 + W_x^2)$.

Thus, if the medium has an nonhomogeneity defined by the relation

$$a = a_0(V_x^2 + W_x^2) \tag{5}$$

then solutions of the Cauchy problem for Eq. (1) in this case can be obtained from solutions of the same problem for the homogeneous medium ($a = a_0$) by transformations (2). As an example illustrating the efficiency of the given approach, consider the following problem of stationary diffusion equation:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\Phi}{L^2} = 0, \tag{6}$$

$$L = L_1 = \text{const}, \qquad 0 < x^2 + y^2 < r_1^2; \tag{7}$$

$$L = L_2(x^2 + y^2), \quad L_2 = \text{const}, \qquad r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2; \tag{8}$$

$$L = L_3 = \text{const}, \qquad x^2 + y^2 > r_2^2. \tag{9}$$

This statement of the problem can be used for investigation of diffusion of particles (e.g., thermal neutrons) in a heterogeneous three-zone system that simulates a real system "borehole-layer" [7, 9]. Gradient variation of diffusion length L in the second zone is caused by penetration of the borehole fluid in the layer with absorption parameters different from the same parameters of fluid. A solution of such problem has the following form:

(i) for linear source of heat neutrons located on the symmetry axis of the system

$$\Phi = A_1 K_0\left(\frac{r}{L_1}\right) + B_1 I_0(r/L_1), \qquad 0 < r < r_1; \tag{10}$$

$$\Phi = A_2 K_0\left(\frac{1}{L_2 r}\right) + B_2 I_0\left(\frac{1}{L_2 r}\right), \qquad r_1 < r < r_2; \tag{11}$$

$$\Phi = A_3 K_0\left(\frac{r}{L_3}\right), \qquad r_2 < r < \infty. \tag{12}$$

(ii) for thin cylinder layer emitting heat neutrons

$$\Phi = A_1 I_0\left(\frac{r}{L_1}\right), \qquad 0 < r < r^*; \tag{13}$$

$$\Phi = A_1^* I_0\left(\frac{r}{L_1}\right) + B_1^* K_0\left(\frac{r}{L_1}\right), \qquad r^* < r < r_1; \tag{14}$$

$$\Phi = A_2 I_0\left(\frac{1}{L_2 r}\right) + B_2 K_0\left(\frac{1}{L_2 r}\right), \qquad r_1 < r < r_2; \tag{15}$$

$$\Phi = B_3 K_0\left(\frac{r}{L_3}\right), \qquad r_2 < r < \infty, \tag{16}$$

in the case where a cylinder source is located in the inner homogeneous zone $0 < r < r_1$;

$$\Phi = A_1 I_0\left(\frac{r}{L_1}\right), \qquad 0 < r < r_1; \tag{17}$$

$$\Phi = A_2 I_0\left(\frac{1}{L_2 r}\right) + B_2 K_0\left(\frac{1}{L_2 r}\right), \qquad r_1 < r < r^*; \tag{18}$$

$$\Phi = A_2^* I_0\left(\frac{1}{L_2 r}\right) + B_2^* K_0\left(\frac{1}{L_2 r}\right), \qquad r^* < r < r_2; \tag{19}$$

$$\Phi = B_3 K_0\left(\frac{r}{L_3}\right), \qquad r_2 < r < \infty, \tag{20}$$

in the case where a source is located in the middle zone $r_1 < r < r_2$, that is gradient-nonhomogeneous in the radial direction;

$$\Phi = A_1 I_0\left(\frac{r}{L_1}\right), \qquad 0 < r < r_1; \tag{21}$$

$$\Phi = A_2 I_0\left(\frac{1}{L_2 r}\right) + B_2 K_0\left(\frac{1}{L_2 r}\right), \qquad r_1 < r < r_2; \tag{22}$$

$$\Phi = A_3 I_0\left(\frac{r}{L_3}\right) + B_3 K_0\left(\frac{r}{L_3}\right), \qquad r_2 < r < r^*; \tag{23}$$

$$\Phi = B_3^* K_0\left(\frac{r}{L_3}\right), \qquad r^* < r < \infty, \tag{24}$$

in the case where a cylinder source is located in the exterior homogeneous zone $r_2 < r < \infty$. Here, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, r^* is a radius of a cylinder layer emitting thermal neutrons, and I_0, K_0 are modified cylinder functions, L is a length of diffusion of thermal neutrons. Solutions (11), (15), (18), (19), and (22) are obtained from the corresponding solutions for homogeneous medium [9] with $L = L_2$ by using the transformations $x' = x/(x^2 + y^2)$, $y' = -y/(x^2 + y^2)$. The coefficients A_i, B_i and A_i^*, B_i^* $(i = \overline{1,3})$ are obtained from the conjugate and normalization conditions.

By analogy with the previous example, by using the conformal transformations

$$\vec{r}\,' = \frac{1}{r}, \qquad u' = \sqrt{r}u, \qquad L' = \frac{1}{r^2}L. \tag{25}$$

we can construct solutions of diffusion equations in the three-dimensional space (point source)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^3} - \frac{\Phi}{L^2} = 0, \tag{26}$$

where

$$L = L_1 = \text{const}, \qquad 0 < r < r_1; \tag{27}$$

$$L = L_2 r^2, \qquad L_2 = \text{const}, \qquad r_1 < r < r_2; \tag{28}$$

$$L = L_3 = \text{const}, \qquad r > r_2; \tag{29}$$

$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ in the form

$$\begin{aligned}
&\Phi = \frac{A_1}{r}\exp\left(-\frac{r}{L_1}\right) + \frac{B_1}{r}\exp\left(-\frac{r}{L_1}\right), \quad 0 < r < r_1;\\
&\Phi = \frac{A_2}{r}\exp\left(-\frac{1}{L_2 r}\right) + \frac{B_2}{r}\exp\left(-\frac{1}{L_2 r}\right), \qquad r_1 < r < r_2;\\
&\Phi = A_3\exp\left(-\frac{r}{L_3}\right), \qquad r > r_2.
\end{aligned} \tag{30}$$

Further, consider the Schrödinger equation

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \Delta\psi + W(t, \vec{x}, |\psi|)\psi = 0 \tag{31}$$

in the n-dimensional space. Symmetry properties of this equation were investigated in [10, 11]. For arbitrary $W = W(t, \vec{x}, |\psi|)$, this equation admits only the group of identity transformations $\vec{x} \to \vec{x}\,' = \vec{x}$, $t \to t' = t$, $\psi \to \psi' = \psi$. By using the idea mentioned above, which is equivalent to the construction of the group of equivalence transformations, we obtain a quite broad invariance group of Eq. (31).

Theorem 2. *Equation (31) is invariant under the infinite-dimensional Lie algebra with basis operators*

$$\begin{aligned}
&J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a},\\
&Q_a = U_a\partial_{x_a} + \frac{i}{2}\dot{U}_a x_a(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \frac{1}{2}\ddot{U}_a x_a\partial_W,\\
&Q_A = 2A\partial_t + \dot{A}x_c\partial_{x_c} + \frac{i}{4}\ddot{A}x_c x_c(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) -\\
&\qquad - \frac{n\dot{A}}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}) + \left(\frac{1}{4}\dddot{A}\, x_c x_c - 2W\dot{A}\right)\partial_W,\\
&Q_B = iB(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}) + \dot{B}\partial_W,\\
&Z_1 = \psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*}, \qquad Z_2 = i(\psi\partial_\psi - \psi^*\partial_{\psi^*}),
\end{aligned} \tag{32}$$

where $U_a(t)$, $A(t)$, $B(t)$ are arbitrary smooth functions of t, we mean the summation from 1 to n by the repeated index c. The upper dot stands for the derivative with respect to time.

Theorem 2 can be proved by using the Lie infinitesimal criterion of invariance.

Note that the invariance algebra (32) includes subalgebras such as the Galilei algebra and the projective algebra. Finite transformations of the corresponding Lie group can be used for generating new solutions of the Schrödinger equation for new potential from the known solution for the given potential W, moreover, the transformations generated by the operators J_{ab}, Q_a, Q_A, Z_1, Z_2 can also be applied for the Cauchy problem

$$\psi\,|_{t=0} = \varphi(x). \tag{33}$$

Let $\psi = f_1(t,x)$ be a solution of the Cauchy problem (31), (33) for $W = \varphi_1(t,x)$. Then $\psi(t,x)$ obtained from the equation $\psi' = f_1(t',x')$ is a solution of Eq. (31) for W satisfying the equation $W' = \varphi_1(t',x')$ and the Cauchy condition is defined by the relation

$$\psi' = \varphi(x') \qquad \text{for} \quad t = 0. \tag{34}$$

Thus, we can e.g. construct solutions of the nonstationary Schrödinger equation from the stationary equation. In addition, this method can be efficiently applied for exactly integrable Schrödinger equations.

This procedure of construction of solutions of both linear and nonlinear equations can be efficiently applied for numerous problems of mathematical physics in particular for the quantum-mechanical problems.

[1] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. — New York: Academic, 1982. — 400 p.

[2] Bluman G.W. and Cole J.D. The general similarity of the heat equation // J. Math. Mech. — 1969. — **18.** — P. 1025–1042.

[3] Fushchych W., Shtelen W., Serov N. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. — 436 p.

[4] Fushchych W.I., Tsyfra I.M. On reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — **20**, № 2. — L45–L48.

[5] Megrabov A.G. On some group approach to inverse problems for differential equations // Sov. Dokl. Acad. Sci. — 1984. — **308**, № 3. — P. 583–586.

[6] Tsyfra I.M. Non-local ansatze for nonlinear heat and wave equations // J. Phys. A.: Math. Gen. — 1997. — **30**, № 6. — P. 2251–2262.

[7] Kozachok I.A. Direct problem of the neutron-neutron method: statement and solution using the P2-approximation // Geophys. J. — 1983. — **5**, № 3. — P. 3–10 (in Russian).

[8] Kozachok I.A., Tsyfra I.M. Application of the group-theoretical analysis to solve the transport problems in gradient-inhomogeneous media // Rep. NAS of Ukraine. — 1993. — № 1. — P. 33–35 (in Ukrainian).

[9] Beckurts K.H., Wirtz K. Neutron physics. — Berlin: Springer-Verlag, 1964. — 317 p.

[10] Boyer C., The maximal "kinematical" invariance group for an arbitrary potential // Helv. Phys., Acta. — 1974. — **47**. — P. 589–605.

[11] Fushchych W., Symenoh Z., Tsyfra I., Symmetry of the Schrödinger equation with variable potential // J. Nonlin. Math. Phys. — 1998. — **5**, № 1. — P. 13–22.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 283–292

УДК 517.95:512.816

Диференціальні рівняння першого порядку в просторі $\mathbb{M}(1,4) \times \mathbb{R}(u)$ з нетривіальними групами симетрії

В.І. ФЕДОРЧУК

Львівський Національний університет ім. І.Я. Франка

Побудовано диференціальні рівняння першого порядку в просторі $\mathbb{M}(1,4) \times \mathbb{R}(u)$, які інваріантні відносно неспряжених розщеплюваних підгруп узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$.

Differential equations of the first order in space $\mathbb{M}(1,4) \times \mathbb{R}(u)$ which are invariant under nonconjugate splitting subgroups of the generalized Poincaré group $P(1,4)$ have been constructed.

Важливою проблемою групового аналізу диференціальних рівнянь є побудова диференціальних рівнянь, які інваріантні відносно наперед заданих нетривіальних груп Лі точкових перетворень. До таких рівнянь в багатьох випадках зводиться математичне моделювання різних процесів навколишнього світу.

Один із способів побудови диференціальних рівнянь з нетривіальними групами симетрії базується на побудові диференціальних інваріантів різних порядків відповідних груп Лі точкових перетворень.

При такому підході диференціальні рівняння інваріантні відносно деякої групи Лі точкових перетворень G_r^N можна записати у вигляді

$$F(J_1, J_2, \ldots, J_s) = 0, \tag{1}$$

де F — довільна достатньо гладка функція своїх аргументів, $J_1, J_2, \ldots, J_s$ — повний набір функціонально незалежних диференціальних інваріантів певного порядку групи G_r^N (див., наприклад [1–8]).

В даній роботі побудовано диференціальні рівняння першого порядку в просторі $\mathbb{M}(1,4) \times \mathbb{R}(u)$, інваріантні відносно неспряжених розщеплюваних підгруп узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$, шляхом побудови диференціальних інваріантів першого порядку цих підгруп.

Група $P(1,4)$ — група поворотів та зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $\mathbb{M}(1,4)$. Серед важливих для теоретичної та математичної фізики груп ця група посідає особливе місце. Вона є найменшою групою, що містить як підгрупи розширену групу Галілея $\widetilde{G}(1,3)$ [9] (групу симетрії класичної фізики) і групу Пуанкаре $P(1,3)$ (групу симетрії релятивістської фізики). Поряд з цим група $P(1,4)$ використовується також при розгляді різних питань теоретичної та математичної фізики (див., наприклад [10–12]).

Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15 базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3,4)$, P'_μ $(\mu = 0,1,2,3,4)$, які задовольняють комутаційним співвідношенням

$$
\begin{aligned}
&\left[P'_\mu, P'_\nu\right] = 0, \qquad \left[M'_{\mu\nu}, P'_\sigma\right] = g_{\mu\sigma}P'_\nu - g_{\nu\sigma}P'_\mu,\\
&\left[M'_{\mu\nu}, M'_{\rho\sigma}\right] = g_{\mu\rho}M'_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M'_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M'_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M'_{\nu\rho},
\end{aligned}
$$

де $g_{\mu\nu}$ $(\mu,\nu = 0,1,2,3,4)$ — метричний тензор з компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$. Тут і всюди надалі $M'_{\mu\nu} = iM_{\mu\nu}$.

Для алгебри Лі групи $P(1,4)$ вибране наступне зображення:

$$
\begin{aligned}
&P'_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P'_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad P'_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad P'_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3},\\
&P'_4 = -\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad M'_{\mu\nu} = -\left(x_\mu P'_\nu - x_\nu P'_\mu\right).
\end{aligned}
$$

Для зручності перейдемо від $M'_{\mu\nu}$ і P'_μ до наступних лінійних комбінацій:

$$
\begin{aligned}
&G = M'_{40}, \quad L_1 = M'_{32}, \quad L_2 = -M'_{31}, \quad L_3 = M'_{21},\\
&P_a = M'_{4a} - M'_{a0}, \quad C_a = M'_{4a} + M'_{a0}, \quad (a = 1,2,3),\\
&X_0 = \tfrac{1}{2}\left(P'_0 - P'_4\right), \quad X_k = P'_k \quad (k = 1,2,3), \quad X_4 = \tfrac{1}{2}\left(P'_0 + P'_4\right).
\end{aligned}
$$

Неперервні неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ описані в роботах [13–16].

З огляду на те, що кількість неспряжених розщеплюваних підгруп групи $P(1,4)$ є дуже великою, привести тут повний список диференціальних рівнянь першого порядку інваріантних відносно цих підгруп неможливо за браком місця. Тому надалі ми обмежимося розглядом лише найбільш цікавих диференціальних рівнянь.

Так як побудовані в даній роботі диференціальні рівняння інваріантні відносно неспряжених розщеплюваних підгруп групи $P(1,4)$

можна записати у вигляді (1), то нижче для різних розмырностей розщеплюваних підгруп групи $P(1,4)$ виписуватимемо базисні елементи їх алгебр Лі та відповідні їм аргументи $J_1, J_2, \ldots, J_s$ функції F.

Одновимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. У всіх випадках $s = 10$.

1. $\langle L_3 + eG,\ e > 0\rangle$,

$$J_1 = x_3, \quad J_2 = \left(x_0^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_3 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad J_4 = u,$$
$$J_5 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), \quad J_6 = x_1u_2 - x_2u_1, \quad J_7 = u_3,$$
$$J_8 = \ln(x_0 + x_4) + e \arctan\frac{x_1}{x_2}, \quad J_9 = u_0^2 - u_4^2, \quad J_{10} = u_1^2 + u_2^2,$$

де $u_\mu \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$;

2. $\langle L_3\rangle$,

$$J_1 = x_0, \quad J_2 = x_3, \quad J_3 = x_4, \quad J_4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad J_5 = u,$$
$$J_6 = x_1u_2 - x_2u_1, \quad J_7 = u_0, \quad J_8 = u_3, \quad J_9 = u_4,$$
$$J_{10} = u_1^2 + u_2^2;$$

3. $\langle P_3 + C_3 + eL_3,\ e \neq 0\rangle$,

$$J_1 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad J_2 = \left(x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_3 = x_0, \quad J_4 = u,$$
$$J_5 = 2 \arctan\frac{x_1}{x_2} - e \arctan\frac{x_3}{x_4}, \quad J_6 = x_1u_2 - x_2u_1,$$
$$J_7 = x_3u_4 - x_4u_3, \quad J_8 = u_0, \quad J_9 = u_1^2 + u_2^2, \quad J_{10} = u_3^2 + u_4^2.$$

Двовимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. У всіх випадках $s = 9$.

1. $\langle G, L_3\rangle$,

$$J_1 = x_3, \quad J_2 = \left(x_0^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_3 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad J_4 = u,$$
$$J_5 = x_1u_2 - x_2u_1, \quad J_6 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), \quad J_7 = u_3,$$
$$J_8 = u_0^2 - u_4^2, \quad J_9 = u_1^2 + u_2^2;$$

2. $\langle L_3 + dG, P_3, d > 0\rangle$,

$$J_1 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad J_2 = \left(x_0^2 - x_3^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_3 = u,$$
$$J_4 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \quad J_5 = x_1u_2 - x_2u_1, \quad J_6 = \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4}x_3 + u_3,$$
$$J_7 = \ln(x_0 + x_4) + d \arctan\tfrac{x_1}{x_2}, \quad J_8 = u_1^2 + u_2^2,$$
$$J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

3. $\langle P_3 + C_3, L_3 \rangle$,

$$J_1 = x_0, \quad J_2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad J_3 = \left(x_3^2 + x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_4 = u,$$
$$J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad J_6 = x_3 u_4 - x_4 u_3, \quad J_7 = u_0,$$
$$J_8 = u_1^2 + u_2^2, \quad J_9 = u_3^2 + u_4^2;$$

4. $\langle P_3, X_1 \rangle$,

$$J_1 = x_2, \quad J_2 = x_0 + x_4, \quad J_3 = \left(x_0^2 - x_3^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_4 = u,$$
$$J_5 = (x_0 + x_4)u_3 + (u_0 - u_4)x_3, \quad J_6 = u_1, \quad J_7 = u_2,$$
$$J_8 = u_0 - u_4, \quad J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

5. $\langle L_3 + \varepsilon P_3, X_4, \varepsilon = \pm 1 \rangle$,

$$J_1 = x_0 + x_4, \quad J_2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad J_3 = \varepsilon \arctan \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_3}{x_0 + x_4},$$
$$J_4 = u, \quad J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad J_6 = \frac{x_3}{x_0 + x_4} + \frac{u_3}{u_0 - u_4},$$
$$J_7 = u_0 - u_4, \quad J_8 = u_1^2 + u_2^2, \quad J_9 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Тривимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. У всіх випадках $s = 8$.

1. $\langle G, P_3, L_3 \rangle$,

$$J_1 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad J_2 = \left(x_0^2 - x_3^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_3 = u,$$
$$J_4 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad J_5 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \quad J_6 = \frac{u_0 - u_4}{x_0 + x_4} x_3 + u_3,$$
$$J_7 = u_1^2 + u_2^2, \quad J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

2. $\langle L_3, P_1, P_2 \rangle$,

$$J_1 = x_3, \quad J_2 = x_0 + x_4, \quad J_3 = \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_4 = u,$$
$$J_5 = \left(\frac{x_1}{x_0 + x_4} + \frac{u_1}{u_0 - u_4}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0 + x_4} + \frac{u_2}{u_0 - u_4}\right)^2, \quad J_6 = u_3,$$
$$J_7 = u_0 - u_4, \quad J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2;$$

3. $\langle L_3 + \varepsilon P_3, P_1, P_2, \varepsilon = \pm 1 \rangle$,

$$J_1 = x_0 + x_4, \quad J_2 = \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2\right)^{1/2},$$
$$J_3 = u, \quad J_4 = \frac{x_3}{x_0 + x_4} + \frac{u_3}{u_0 - u_4},$$

$$J_5 = \left(\frac{x_1}{x_0+x_4} + \frac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_0+x_4} + \frac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,$$
$$J_6 = \varepsilon \arctan\left(\frac{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}\right) - \frac{x_3}{x_0+x_4},$$
$$J_7 = u_0 - u_4, \quad J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

4. $\langle L_3, P_3, X_4\rangle$,

$$J_1 = x_0 + x_4, \quad J_2 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}, \quad J_3 = u,$$
$$J_4 = x_1u_2 - x_2u_1, \quad J_5 = (x_0+x_4)u_3 + (u_0-u_4)x_3,$$
$$J_6 = u_0 - u_4, \quad J_7 = u_1^2 + u_2^2, \quad J_8 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

5. $\langle P_1, P_2, X_3\rangle$,

$$J_1 = x_0 + x_4, \quad J_2 = \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_3 = u,$$
$$J_4 = u_1(x_0+x_4) + x_1(u_0-u_4), \quad J_5 = u_2(x_0+x_4) + x_2(u_0-u_4),$$
$$J_6 = u_3, \quad J_7 = u_0 - u_4, \quad J_8 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2.$$

Чотиривимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. У всіх випадках $s = 7$.

1. $\langle G, L_1, L_2, L_3\rangle$,

$$J_1 = \left(x_0^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}, \quad J_3 = u,$$
$$J_4 = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3, \quad J_5 = (x_0+x_4)(u_0+u_4),$$
$$J_6 = u_0^2 - u_4^2, \quad J_7 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2;$$

2. $\langle G, P_1, P_2, P_3\rangle$,

$$J_1 = \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_2 = u, \quad J_3 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$$
$$J_4 = x_1 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1, \quad J_5 = x_2 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2,$$
$$J_6 = x_3 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3, \quad J_7 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

3. $\langle L_3 + cG, P_1, P_2, X_3,\ c > 0\rangle$,

$$J_1 = \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_2 = u, \quad J_3 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$$
$$J_4 = \left(x_1 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2 + \left(x_2 + \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,$$

$$J_5 = c\arctan\left(\frac{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}\right)+\ln(x_0+x_4),$$
$$J_6 = u_3, \quad J_7 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2;$$

4. $\langle G, P_3, X_1, X_2\rangle$,

$$J_1 = \left(x_0^2-x_3^2-x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_2 = u, \quad J_3 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$$
$$J_4 = \frac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_3+u_3, \quad J_5 = u_1, \quad J_6 = u_2, \quad J_7 = u_0^2-u_3^2-u_4^2;$$

5. $\langle G, P_1, P_2, X_4\rangle$,

$$J_1 = x_3, \quad J_2 = u, \quad J_3 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}, \quad J_4 = u_1+\frac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_1,$$
$$J_5 = x_2+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2, \quad J_6 = u_3, \quad J_7 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2.$$

П'ятивимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. У всіх випадках $s=6$.

1. $\langle G, L_3, P_1, P_2, P_3\rangle$,

$$J_1 = \left(x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2-x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_2 = u, \quad J_3 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$$
$$J_4 = x_3+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3, \quad J_5 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2,$$
$$J_6 = \frac{\left(u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)\right)^2+\left(u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)\right)^2}{((x_0+x_4)u_3+(u_0-u_4)x_3)^2};$$

2. $\langle L_3, P_1, P_2, P_3, X_4\rangle$,

$$J_1 = x_0+x_4, \quad J_2 = u, \quad J_3 = \frac{x_3}{x_0+x_4}+\frac{u_3}{u_0-u_4},$$
$$J_4 = \left(\frac{x_1}{x_0+x_4}+\frac{u_1}{u_0-u_4}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_0+x_4}+\frac{u_2}{u_0-u_4}\right)^2,$$
$$J_5 = u_0-u_4, \quad J_6 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2;$$

3. $\langle L_3+bG, P_1, P_2, P_3, X_4,\ b>0\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}, \quad J_3 = x_3+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_3,$$
$$J_4 = \left(x_1+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2+\left(x_2+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,$$

$$J_5 = b\arctan\left(\frac{u_1(x_0+x_4)+x_1(u_0-u_4)}{u_2(x_0+x_4)+x_2(u_0-u_4)}\right)+\ln(x_0+x_4),$$
$$J_6 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2;$$

4. $\langle G, X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = (x_0+x_4)(u_0+u_4), \quad J_3 = u_1, \quad J_4 = u_2,$$
$$J_5 = u_3, \quad J_6 = u_0^2-u_4^2;$$

5. $\langle G, P_1, P_2, X_4, X_3+bX_2,\ b\neq 0\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}, \quad J_3 = u_1+\frac{u_0-u_4}{x_0+x_4}x_1,$$
$$J_4 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2+x_2-bx_3, \quad J_5 = u_3, \quad J_6 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2.$$

Шестивимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. В 31 випадку $s=5$, а в 6 випадках $s=6$.

1. $\langle G, L_3, P_1, P_2, X_3, X_4\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = \frac{x_0+x_4}{u_0-u_4},$$
$$J_3 = \left(x_1+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_1\right)^2+\left(x_2+\frac{x_0+x_4}{u_0-u_4}u_2\right)^2,$$
$$J_4 = u_3, \quad J_5 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_4^2;$$

2. $\langle P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_4\rangle$,

$$J_1 = x_0+x_4, \quad J_2 = u, \quad J_3 = \frac{x_3}{x_0+x_4}+\frac{u_3}{u_0-u_4},$$
$$J_4 = u_0-u_4, \quad J_5 = u_0^2-u_1^2-u_2^2-u_3^2-u_4^2;$$

3. $\langle L_1, L_2, L_3, X_1, X_2, X_3\rangle$,

$$J_1 = x_0, \quad J_2 = x_4, \quad J_3 = u, \quad J_4 = u_0, \quad J_5 = u_4,$$
$$J_6 = u_1^2+u_2^2+u_3^2;$$

4. $\langle L_3+\varepsilon P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, \varepsilon=\pm 1\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0-u_4, \quad J_3 = u_1^2+u_2^2, \quad J_4 = u_0^2-u_3^2-u_4^2,$$
$$J_5 = \varepsilon\arctan\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_3}{u_0-u_4};$$

5. $\langle L_3 + eG, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4,\ e > 0\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_3, \quad J_3 = u_0^2 - u_4^2, \quad J_4 = u_1^2 + u_2^2,$$
$$J_5 = e \arctan \frac{u_1}{u_2} - \ln(u_0 + u_4).$$

Семивимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. В 17 випадках $s = 4$, а в 15 випадках $s = 5$.

1. $\langle G, P_1, P_2, X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \quad J_3 = u_3, \quad J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2;$$

2. $\langle P_1, P_2, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_3, \quad J_3 = u_0 - u_4, \quad J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2;$$

3. $\langle G, L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3\rangle$,

$$J_1 = \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2\right)^{1/2}, \quad J_2 = u, \quad J_3 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4},$$
$$J_4 = x_0u_0 + x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 + x_4u_4,$$
$$J_5 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

4. $\langle G, P_3, C_3, X_0, X_1, X_3, X_4\rangle$,

$$J_1 = x_2, \quad J_2 = u, \quad J_3 = u_1, \quad J_4 = u_2, \quad J_5 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

5. $\langle L_3 + dG, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4,\ d > 0\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_1^2 + u_2^2, \quad J_3 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2,$$
$$J_4 = d \arctan \frac{u_1}{u_2} + \ln(u_0 - u_4);$$

Восьмивимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. В 8 випадках $s = 3$, а в 11 випадках $s = 4$.

1. $\langle G, P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \quad J_3 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

2. $\langle G, L_3, P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_4\rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \quad J_3 = x_3 + \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}u_3,$$
$$J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

3. $\langle G, L_1, L_2, L_3, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = (x_0 + x_4)(u_0 + u_4), \quad J_3 = u_0^2 - u_4^2,$$
$$J_4 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2;$$

4. $\langle G, L_3, P_1, P_2, X_0, X_1, X_2, X_4 \rangle$,

$$J_1 = x_3, \quad J_2 = u, \quad J_3 = u_3, \quad J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_4^2.$$

Дев'ятивимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. В 2 випадках $s = 2$, а в 6 випадках $s = 3$.

1. $\langle G, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

2. $\langle G, L_1, L_2, L_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_4^2, \quad J_3 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2;$$

3. $\langle G, P_3, C_3, L_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_1^2 + u_2^2, \quad J_3 = u_0^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

4. $\langle L_3, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0 - u_4, \quad J_3 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Десятивимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. В одному випадку $s = 2$, а в 4 випадках $s = 4$.

1. $\langle G, L_3, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

2. $\langle L_1, L_2, L_3, P_1 + C_1, P_2 + C_2, P_3 + C_3, X_1, X_2, X_3, X_0 - X_4 \rangle$,

$$J_1 = x_0, \quad J_2 = u, \quad J_3 = u_0, \quad J_4 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2;$$

3. $\langle L_1, L_2, L_3, P_1 - C_1, P_2 - C_2, P_3 - C_3, X_1, X_2, X_3, X_0 + X_4 \rangle$,

$$J_1 = x_4, \quad J_2 = u, \quad J_3 = u_4, \quad J_4 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2.$$

Одинадцятивимірні підалгебри алгебри Лі групи $\boldsymbol{P(1,4)}$. У всіх випадках $s = 3$.

1. $\langle G, L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = \frac{x_0 + x_4}{u_0 - u_4}, \quad J_3 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2;$$

2. $\langle L_1, L_2, L_3, P_1, P_2, P_3, X_0, X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$,

$$J_1 = u, \quad J_2 = u_0 - u_4, \quad J_3 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2.$$

Таким чином, серед побудованих в даній роботі диференціальних рівнянь є рівняння, які можуть бути корисними в класичній фізиці, а також рівняння, які можуf використати при побудові моделей релятивістської фізики.

[1] Lie S. Transformationsgruppen: In 3 Bd. — Leipzig, 1893. — Bd. 3. — 400 s.

[2] Lie S. Vorlesungen über continuierliche gruppen. — Leipzig: Teubner, 1893. — S. 805.

[3] Lie S. Über Differentialinvarianten // Math. Ann. — 1884. — **24**, № 1. — S. 52–89.

[4] Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen: In 3 Bd. — Leipzig: Teubner, 1888, 1890, 1893. — Bd 1–3.

[5] Tresse A. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations // Acta math. — 1894. — **18**. — P. 1–88.

[6] Vessiot E. Sur l'integration des sistem differentiels qui admittent des groupes continus de transformations // Acta math. — 1904. — **28**. — P. 307–349.

[7] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. —399 с.

[8] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.:Мир, 1989. — 639 с.

[9] Fushchych W.I., Nikitin A.G. Reduction of the representations of the generalized Poincaré algebra by the Galilei algebra // J. Phys. A: Math. Gen. — 1980. — **13**, № 7. — P. 2319–2330.

[10] Кадышевский В.Г. Новый подход к теории електромагнитных взаимодействий // Физика элементар. частиц и атомн. ядра. — 1980. — **11**, № 1. — С. 5–39.

[11] Фущич В.И. Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. I // Теор. и матем. физика. — 1970. — **4**, № 3. — С. 360–367.

[12] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1990. — 400 с.

[13] Федорчук В.М. Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера $P(1,4)$. — Киев, 1978. — 36 с. — (Препринт / АН УССР. Ин–т математики; 78.18).

[14] Федорчук В.М. Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. матем. журн. — 1979. — **31**, № 6. — С. 717–722.

[15] Федорчук В.М. Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. — 1981. — **33**, № 5. — С. 696–700.

[16] Fushchych W.I., Barannik A.F., Barannik L.F., Fedorchuk V.M. Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // J. Phys. A: Math. Gen. — 1985. — **18**, № 14. — P. 2893–2899.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 293–303

УДК 517.927

Алгоритмы решения некоторых краевых задач

В.П. ФИЛЬЧАКОВА

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: appmath@imath.kiev.ua

Запропоновано наближений аналітичний метод побудови розв'язків деяких крайових задач для ЛЗДР другого порядку із змінними коефіцієнтами за допомогою степеневих рядів

An analytical approximate method for constructing of a solution of some boundary problems for LDEs of the second order with variable coefficients obtained by means of power series is proposed.

Введение. При разработке алгоритмов математического моделирования функционирования органов и систем в медико-биологических исследованиях, которым присущи многопараметрические динамические изменения в состоянии патологии (т.н. динамические болезни), весьма успешной математической моделью оказались системы n линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка с переменными коэффициентами вида

$$\frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) f_j(t) + g_i(t), \qquad i,j = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Такие системы достаточно адекватно описывают динамические процессы в живом организме [1, 2], так как болезнь есть одновременное функциональное изменение нескольких взаимосвязанных органов и систем, причем, конкретный вид функций $g_i(t)$ и переменных коэффициентов $a_{ij}(t)$ (t — аргумент времени) задается в зависимости от моделируемой динамической болезни. Переменные коэффициенты $a_{ij}(t)$ отражают динамические многопараметрические изменения биологической модели (модель дыхания Чейна–Стокса [3]), которая предшествует построению математической модели. В вопросах экологии математическое моделирование обычно предваряется построением модели физической (см. [4]): так, исследование процесса загрязнения подземных вод при плоско-вертикальной фильтрации сводится к решению краевых задач неустановившейся конвективной диффузии в прямоугольнике. Эта физическая модель приводится к математической модели, которая представляет собой семейство (цепочку) S стационарных краевых задач для линейных ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами вида

$$\frac{d^2 u_s(x)}{dx^2} - A(x)u_s(x) = g_{s-1}(x), \qquad s = \overline{1, S}. \tag{2}$$

Абстрагируясь от медико-биологической и экологической сути моделей, перейдем к математической постановке упомянутых задач.

1. Краевая задача для системы линейных ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами. Дополним систему вида (1) краевыми условиями *первого рода*

$$f_i(t)|_{t=t_1} = a_i, \qquad f_i(t)|_{t=t_2} = b_i. \tag{3}$$

Ищем решение в классе аналитических функций, на заданные функции $a_{ij}(t)$ и $g_i(t)$ налагаем требование *аналитичности*. Не нарушая общности, положим $t_2 - t_1 = 1$. В классе аналитических функций правомочно представить решение краевой задачи (1), (3) сходящимися степенными рядами с неопределенными коэффициентами f_{im}

$$f_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{im}(t - t_1)^m. \tag{4}$$

В окрестности точки $t = t_1$, ввиду голоморфности функций $a_{ij}(t)$ и $g_i(t)$, их можно представить сходящимися рядами Тейлора

$$a_{ij}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{ijm}(t - t_1)^m, \qquad g_i(t) = \sum_{m=0}^{\infty} g_{im}(t - t_1)^m, \tag{5}$$

где a_{ijm} и g_{im} — коэффициенты рядов Тейлора для известных функций $a_{ij}(t)$ и $g_i(t)$, определяющих дифференциальную систему (1). Для определения неизвестных коэффициентов f_{im} решения (4) по методу работы [5] (гл. IX, § 110, гл. VIII, § 99) строится *рекуррентный процесс.* Согласно [5] имеют место представления

$$\begin{gathered} \frac{d^2 f_i(t)}{dt^2} = \sum_{m=0}^{\infty} f_{i,m+2}^{(2)}(t - t_1)^m, \\ f_{i,m+2}^{(2)} = (m+1)(m+2) f_{im}. \end{gathered} \tag{6}$$

По формуле *перемножения двух степенных рядов* имеем

$$a_{ij}(t)f_j(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{m} a_{ij\nu} f_{j,m-\nu}(t-t_1)^m. \tag{7}$$

Подставляя выражения (6) и (7) в исходную систему (1) и приравнивая члены при одинаковых степенях $(t-t_1)$, получаем рекуррентные формулы для искомых коэффициентов f_{im}

$$f_{i,m+2} = \frac{1}{(m+1)(m+2)}\left[g_{im} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{m} a_{ij\nu} f_{j,m-\nu}\right], \tag{8}$$

где

$$f_{j0} = a_j \qquad \text{и} \qquad \sum_{m=1}^{\infty} f_{im} = b_j - a_j \tag{9}$$

согласно краевым условиям (3) и предположению, что $t-t_1 = 1$. Для функционирования рекуррентных формул (8) необходимо знать начальные параметры f_{j0} и f_{j1}, $j = \overline{1,n}$. Формулы (9) дают один набор параметров в явном виде ($f_{j0} = a_j$), а для второго набора f_{j1} существует функциональная зависимость (9). Для определения параметров f_{j1} в явном виде применим *дважды рекуррентный процесс* с учетом линейной зависимости коэффициентов f_{im} от f_{j1}. Имеет место *структурная формула*

$$f_{im} = \sum_{j=1}^{n} b_{imj} f_{j1} + d_{im}, \tag{10}$$

где $i = \overline{1,n}$, $m = 0,1,2,\ldots,\infty$. Если в рекуррентную формулу (8) подставить структурную формулу (10), то для неизвестных коэффициентов b_{imk} и d_{im} получатся рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} b_{imk} &= \frac{1}{m(m-1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{m-2} a_{ij,m-2-\nu} b_{j\nu k}, \\ d_{im} &= \frac{1}{m(m-1)}\left[g_{i,m-2} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{m-2} a_{ij,m-2-\nu} d_j\right], \end{aligned} \tag{11}$$

где начальные значения получаются из первого краевого условия (3) и тождества $f_{i1} \equiv f_{i1}$

$$\begin{aligned} &d_{i0} = a_i; \qquad b_{i0k} = 0 \qquad \forall\,\{k,i\} = \overline{1,n}; \\ &d_{i1} = 0; \qquad b_{i1i} = 1, \qquad b_{i1k} = 0 \qquad \forall\, k \neq i. \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда искомые параметры определяются из линейной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} B_{ik} f_{k1} = C_i, \quad i = \overline{1,n}; \qquad B_{ik} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{imk};$$

$$C_i = b_i - a_i - \sum_{m=1}^{\infty} d_{im}.$$

Непосредственным вычислением последовательно коэффициентов $f_{i,m+2}$ представления (4) по рекуррентным формулам (8) при $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ методом математической индукции удается получить общий вид любого коэффициента f_{im} ряда (4) как некоторые функциональные зависимости между исходными данными краевой задачи (1), (3) и начальными параметрами f_{j0}, f_{j1}. Так как эти формулы носят громоздкий характер, в этой статье ограничимся случаем $n = 1$, т.е. когда система (1) вырождается в одно линейное ОДУ второго порядка с переменным коэффициентом и переменной правой частью.

2. Случай одного ОДУ с переменным коэффициентом и правой частью. Общий вид любого коэффициента ряда (8) для случая, когда система (1) вырождается в одно уравнение:

$$f_{m+2} = \frac{1}{(m+2)!}\left\{\left[a_0^{E(\frac{m+2}{2})} f_{\alpha(m)} + \sum_{i=0}^{E(\frac{m}{2})} (m-2i)!\, g_{m-2i} a_0^i\right] + \right.$$

$$+m!\left[C_1 a_m + f_1 a_{m-1} + \sum_{i=0}^{m-3} \frac{i!}{(i+2)!} g_i a_{m-(i+2)}\right]_{m \text{ слагаемых}} +$$

$$+m!\left[C_1 \sum_{n=2}^{E(\frac{m+1}{2})} \prod_{k=2}^{n} \sum_{l_k=0}^{[m-2(n-1)-\sum_{i=2}^{(k-1)} l_i]} a_{l_k} \times \right. \tag{13}$$

$$\times \frac{\left[m-2(k-1)-\sum\limits_{i=2}^{k} l_i\right]!}{\left[m-2(k-2)-\sum\limits_{i=2}^{k} l_i\right]!} a_{m-2(n-1)-\sum\limits_{i=2}^{n} l_i} +$$

$$+f_1 \sum_{n=2}^{E\left(\frac{m}{2}\right)} \prod_{k=2}^{n} \sum_{l_k=0}^{m-2n+1-\sum\limits_{i=2}^{(k-1)} l_i} a_{l_k} \frac{\left[m-2(k-1)-\sum\limits_{i=2}^{k} l_i\right]!}{\left[m-2(k-2)-\sum\limits_{i=2}^{k} l_i\right]!} \times$$

$$\times a_{m-2n+1-\sum\limits_{i=2}^{n} l_i} + \sum_{n=2}^{E\left(\frac{m-2}{2}\right)} \sum_{l_1=0}^{m-2n-1} \frac{l_1!}{(l_1+2)!} g_{l_1} \times$$

$$\left.\left.\times \prod_{k=2}^{n} \sum_{l_k=0}^{m-2n-\sum_{i=1}^{(k-1)} l_i} a_{l_k} \frac{\left[m-2(k-1)-\sum\limits_{i=2}^{k} l_i\right]!}{\left[m-2(k-2)-\sum\limits_{i=2}^{k} l_i\right]!} a_{m-2n-\sum\limits_{i=1}^{n} l_i} \right]\right\},$$

где

$$\alpha(m) = \frac{(-1)^{m+1}+1}{2} = \begin{cases} 0 & \text{для четных } m, \\ 1 & \text{для нечетных } m, \end{cases}$$

$E(\cdot)$ — целая часть числа

$$E\left(\frac{m+2}{2}\right) = \begin{cases} \frac{m+2}{2}, \\ \frac{m+1}{2}, \end{cases} \quad E\left(\frac{m}{2}\right) = \begin{cases} \frac{m}{2} & \text{для четных } m, \\ \frac{m-1}{2} & \text{для нечетных } m, \end{cases}$$

$$E\left(\frac{m+1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{m}{2}, \\ \frac{m+1}{2}, \end{cases} \quad E\left(\frac{m-2}{2}\right) = \begin{cases} \frac{m-2}{2} & \text{для четных } m, \\ \frac{m-3}{2} & \text{для нечетных } m. \end{cases}$$

Для большей прозрачности, в смысле наглядности, формулы (13) сделаем несколько замен, введя обозначения

$$m-2(n-1)-\sum_{i=2}^{k-1} l_i = M_n[k-1]_i;$$

$$m-2(n-1)-\sum_{i=2}^{n} l_i = M_n[n]_i;$$

$$
\begin{aligned}
&m-2n+1-\sum_{i=2}^{k-1} l_i] = N_n[k-1]_i;\\
&m-2n+1-\sum_{i=2}^{n} l_i = N_n[n]_i;\\
&m-2n-\sum_{i=1}^{k-1} l_i = M_{n+1}[k-1]_{i-1};\\
&m-2n-\sum_{i=1}^{n} l_i = M_{n+1}[n]_{i-1};\\
&m-2(k-1)-\sum_{i=2}^{k} l_i = M_k[k]_i;\\
&m-2(k-2)-\sum_{i=2}^{k} l_i = M_{k-1}[k]_i;
\end{aligned}
\tag{14}
$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$, $n = 3, 4, \ldots$, $l_k = 0, 1, 2, \ldots$; $i, k = 2, 3, \ldots$.

Тогда формула (13) запишется в виде

$$
\begin{aligned}
f_{m+2} = {}&\frac{1}{(m+2)!}\Biggl\{\Biggl[a_0^{E(\frac{m+2}{2})} f_{\alpha(m)} + \sum_{i=0}^{E(\frac{m}{2})} (m-2i)! g_{m-2i} a_0^i\Biggr] +\\
&+m!\Biggl[C_1 a_m + f_1 a_{m-1} + \sum_{i=0}^{m-3} \frac{i!}{(i+2)!} g_i a_{m-(i+2)}\Biggr]_{m \text{ слагаемых}} +\\
&+m!\Biggl[C_1 \sum_{n=2}^{E(\frac{m+1}{2})} \prod_{k=2}^{n} \sum_{l_k=0}^{M_n[k-1]_i} a_{l_k} \frac{(M_k[k]_i)!}{(M_{k-1}[k]_i)!} a_{M_n[n]_i} +\\
&+f_1 \sum_{n=2}^{E(\frac{m}{2})} \prod_{k=2}^{n} \sum_{l_k=0}^{N_n[k-1]_i} a_{l_k} \frac{(M_k[k]_i)!}{(M_{k-1}[k]_i)!} a_{N_n[n]_i} +\\
&+\sum_{n=2}^{E(\frac{m-2}{2})} \sum_{l_1=0}^{m-2n-1} \frac{l_1!}{(l_1+2)!} g_{l_1} \prod_{k=2}^{n} \sum_{l_k=0}^{M_{n+1}[k-1]_{i-1}} a_{l_k} \times\\
&\times \frac{(M_k[k]_i)!}{(M_{k-1}[k]_i)!} a_{M_{n+1}[n]_{i-1}}\Biggr]\Biggr\}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Замечание. Здесь n не связано с количеством уравнений в системе (1), а является одним из индексов суммирования; кроме того, краевое условие (3) заменяется условием (3.1)

$$f(t)_{|t=t_1} = C_1, \qquad f(t)_{|t=t_2} = C_2, \tag{3.1}$$

и

$$f_{\alpha(m)} = \begin{cases} f_0 \equiv C_1 & \text{при} \quad \alpha(m) = 0, \\ f_1(\text{параметр}) & \text{при} \quad \alpha(m) = 1. \end{cases}$$

Анализируя формулу (15), видим, что все коэффициенты f_{m+2} линейно зависят от параметра f_1 (как мы и отмечали при написании структурной формулы (10)); кроме того, формула (15) устанавливает явную зависимость коэффициентов разложения в ряд (4) искомого решения от первого краевого условия ($f_0 = C_1$), от параметра f_1 и от коэффициентов ряда Тейлора a_i, g_i для заданных функций $a(t)$ и $g(t)$. Для случая краевой задачи (1), (3.1), когда уравнение (1) (при $n = 1$) имеет постоянный коэффициент и переменную правую часть, формула (15) значительно упростится: в ней останется только первая квадратная скобка, которая характеризует вышеописанную зависимость коэффициентов f_{m+2} от C_1, f_1, $a_0 \equiv a$ и g_m.

3. Две краевые задачи для семейства (цепочки) линейных ОДУ уравнений вида (2). В заключение рассмотрим семейство ОДУ типа (2), для которых заданы или краевые условия *первого рода*

$$u_s(x)|_{x=0} = C_1, \qquad u_s(x)|_{x=1} = C_2, \tag{16}$$

или краевые условия *второго рода*

$$u_s(x)|_{x=0} = C_1, \qquad \left(\mu u_s(x) + \frac{du_s}{dx}\right)\Big|_{x=1} = 0, \tag{16.1}$$

Кроме того, $g_{s-1}(x) = f_1(x) + f_2(x)u_{s-1}(x)$, где f_1 и f_2 — заданные аналитические функции от x. В окрестности точки $x_0 = 0$ имеет место представление решения в виде ряда

$$u_s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{s,m} x^m, \qquad s = 1, 2, \ldots, S, \tag{17}$$

где коэффициенты подлежат определению. Согласно методике, изложенной в **п. 1**, получаем рекуррентные формулы для искомых коэффициентов $u_{s,m}$

$$u_{s,m+2} = \frac{1}{(m+1)(m+2)} \left[g_{s-1,m} + \sum_{i=0}^{m} a_{m-i} u_{s,i} \right], \tag{18}$$

которые будут вполне доопределены, если известны начальные параметры $u_{s,0}$ и $u_{s,1}$. При $x = 0$ из первых краевых условий (16) и (16.1) получаем, что $u_{s,0} = C_1$ (набор для всех $s = 1, 2, \ldots, S$). Второй набор параметров $u_{s,1}$ существенно зависит от второго краевого условия вида (16) либо (16.1) при $x = 1$

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_{s,m} = C_2 - C_1, \qquad s = 1, 2, \ldots, S, \tag{19}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mu u_{s,m} + (m+1) u_{s,m+1} = 0. \tag{19.1}$$

Так как каждый коэффициент $u_{s,m+2}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots, s = 1, 2, \ldots, S)$ представляет собой некоторую функцию $F_{m+2}(u_{s,1})$, то условия (19) или (19.1) представляют собой некоторые уравнения для определения искомого набора параметров $u_{s,1}$, $s = \overline{1, S}$. Покажем, как выводится общая формула для любого коэффициента ряда (17), подобная формуле (13) или (15) из **п. 2**. С этой целью запишем в явном виде (т.е. развернем) рекуррентные формулы (18) последовательно для нескольких первых коэффициентов

$$u_{s,2} = \frac{1}{2}[g_{s-1,0} + a_0 C_1],$$

$$u_{s,3} = \{[g_{s-1,1} + 1! a_1 C_1] + a_0 u_{s,1}\},$$

$$u_{s,4} = \frac{1}{4!} \left\{ \left[2! g_{s-1,2} + a_0 g_{s-1,0} + C_1 a_0^2 \right] + 2! \left[C_1 a_2 + a_1 u_{s,1} \right] \right\},$$

$$u_{s,5} = \frac{1}{5!} \left\{ \left[3! g_{s-1,3} + a_0 g_{s-1,1} + u_{s,1} a_0^2 \right] + \right.$$
$$\left. +3! \left[C_1 \left(a_3 + a_0 a_1 \left(\frac{0!}{2!} + + \frac{1!}{3!} \right) \right) + u_{s,1} a_2 + \frac{0!}{2!} a_1 g_{s-1,0} \right] \right\},$$

$$u_{s,6} = \frac{1}{6!} \left\{ \left[4! g_{s-1,4} + +2! a_0 g_{s-1,2} + g_{s-1,0} a_0^2 + C_1 a_0^3 \right] + \right.$$

$$+4!\left[C_1\left(a_4+a_0a_2\left(\frac{0!}{2!}+\frac{2!}{4!}\right)+a_1^2\frac{1!}{3!}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+u_{s,1}\left(a_3+a_0a_1\left(\frac{1!}{3!}+\frac{2!}{4!}\right)\right)+\frac{0!}{2!}g_{s-1,0}a_2+\frac{1!}{3!}g_{s-1,1}a_1\right]\right\},$$

$$u_{s,7}=\frac{1!}{7!}\left\{\left[5!g_{s-1,5}+3!g_{s-1,3}a_0+g_{s-1,1}a_0^2+u_{s,1}a_0^3\right]+\right.$$

$$+5!\left[C_1\left(a_5+a_0a_3\left(\frac{0!}{2!}+\frac{3!}{5!}\right)+a_1a_2\left(\frac{1!}{3!}+\frac{2!}{4!}\right)+\right.\right.$$

$$\left.+a_0^2a_1\left(\frac{0!2!}{2!4!}+\left(\frac{0!}{2!}+\frac{1!}{3!}\right)\frac{3!}{5!}\right)\right)+$$

$$+u_{s,1}\left(a_4+a_0a_2\left(\frac{1!}{3!}+\frac{3!}{5!}+a_1^2\frac{2!}{4!}\right)\right)+$$

$$+\frac{0!}{2!}g_{s-1,0}\left(a_3+a_1a_0\left(\frac{2!}{4!}+\frac{3!}{5!}\right)\right)+$$

$$\left.\left.+\frac{1!}{3!}g_{s-1,1}a_2+\frac{2!}{4!}g_{s-1,2}a_1\right]\right\}\qquad \text{и т.д.}$$

Методом математической индукции получаем представление любого коэффициента $u_{s,m+2}$ ряда (17) в общем виде (по такой же формуле (13) из п. 2, как для коэффициентов f_{m+2} в предыдущей задаче), как линейную зависимость от набора параметров $u_{s,1} (s = 1, 2, \ldots, S)$ и нелинейную — от коэффициентов ряда Маклорена: a_i и $g_{s-1,i}$ для функций $A(x)$ и $g_{s-1}(x)$. Если воспользоваться обозначениями (14), то явный вид коэффициента $u_{s,m+2}$ представится формулой (15). Помня о линейной зависимости коэффициентов $u_{s,m+2}$ от параметров $u_{s,1}$, запишем рекуррентную формулу (10) для нашего случая

$$\begin{aligned}&u_{s,m}=b_{s,m}u_{s,1}+d_{s,m},\\&m=0,1,2,\ldots,\quad s=1,2,3,\ldots,S,\end{aligned}\tag{10.1}$$

где $b_{s,m}$ и $d_{s,m}$ — искомые величины. Результатом двойного рекуррентного процесса, описанного в п. 1 (формулы (10)–(12)), будет

$$\begin{aligned}&b_{s,m+2}=\frac{1}{(m+1)(m+2)}\sum_{i=0}^{m}a_{m-i}b_{s,i},\\&d_{s,m+2}=\frac{1}{(m+1)(m+2)}\left[g_{s-1,m}+\sum_{i=0}^{m}a_{m-i}d_{s,i}\right].\end{aligned}\tag{11.1}$$

Первые значения $b_{s,0}$, $d_{s,0}$, $b_{s,1}$, $d_{s,1}$ получаются из первого краевого условия для $x = 0$ ($u_{s,0} = C_1$) и тождества $u_{s,1} \equiv u_{s,1}$. Имеем

$$\begin{aligned} &b_{s,0} = 0, \qquad d_{s,0} = C_1, \qquad b_{s,1} = 1, \\ &d_{s,1} = 0, \qquad s = 1, 2, \ldots, S. \end{aligned} \tag{12.1}$$

Вычисляем необходимое количество коэффициентов $b_{s,m}$ и $d_{s,m}$ по формуле (11.1) и, воспользовавшись вторым краевым условием первого рода (16) для $x = 1$, находим искомый набор параметров $u_{s,1}$ ($s = 1, 2, \ldots, S$)

$$u_{s,1} = \left(C_2 - C_1 - \sum_{m=1}^{\infty} d_{s,m} \right) / \sum_{m=1}^{\infty} b_{s,m}.$$

Если второе краевое условие для $x = 1$ второго рода (16.1), тогда

$$\begin{aligned} u_{s,1} = &- \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mu d_{s,m} + (m+1) d_{s,m+1} \right) \times \\ &\times \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mu b_{s,m} + (m+1) b_{s,m+1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Замечание. Все коэффициенты $b_{s,m}$ не зависят от s (см. формулы (11.1), (12.1)) и вычисляются один раз для всех s, т.е. $b_{s,m} \equiv b_m$.

По найденным коэффициентам $u_{s,m}$ строим решения краевых задач (16), (16.1) для семейства уравнений (2) в виде сходящихся на отрезке $[0, 1]$ степенных рядов (17) с наперед заданной степенью точности.

[1] Фильчакова В.П., Яшин А.А. Математическое моделирование физиологических систем с учетом многопараметрических динамических изменений в состоянии патологии // Вестник новых медицинских технологий. — 1995. — **2**, № 1–2. — С. 51–55.

[2] Афромеев В.И., Протопопов А.А., Фильчакова В.П., Яшин А.А. Математические методы современной биомедицины и экологии. — Тула: Изд-во Тульского ун-та, 1997. — 222 с.

[3] Гласс Л., Маки М. От числа к хаосу: Ритмы жизни: — М.: Мир, 1991. — 248 с.

[4] Фильчакова В.П., Радченко А.О., Рогаль И.В. О приближенном аналитическом решении некоторых краевых задач конвективной диффузии // Дифференциальные уравнения с частными производными в прикладных задачах. — Киев: Ин-т математики НАНУ, 1982. — С. 78–81.

[5] Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. — Киев: Наукова думка, 1972. — 744 с.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 304–315

УДК 517.958

Точні розв'язки багатовимірного рівняння Шрьодінґера з критичною нелінійністю

Р.М. ЧЕРНІГА

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: cherniha@imath.kiev.ua

Робота є логічним продовженням дослідження $(1+3)$-вимірного рівняння Шрьодінґера з так званою критичною нелінійністю $|U|^{4/3}U$, яке було розпочате в роботах В.І. Фущича і автора (Укр. матем. журн. — 1989. — **41**. — С. 1349–1357, С. 1687–1694).

This paper is a logical continuation of investigation of $(1+3)$-dimensional Schrödinger equation with so called critical nonlinearity $|U|^{4/3}U$, which has been started in works W.I. Fushchych and R.M. Cherniha (Ukrainian Math. J. – 1989. — **41**. — P. 1161–1167, P. 1456–1463).

1. Вступ. В роботі [9] вперше було встановлено, що нелінійне рівняння Шрьодінґера (РШ)

$$iU_t + k\Delta U = \lambda U|U|^{4/3}, \tag{1}$$

де $U = U(t,x)$ — шукана комплекснозначна функція, $|U|^2 = UU^*$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\lambda = a + ib$, $a, b, k \in \mathbb{R}$, інваріантне відносно узагальненої алгебри Ґалілея $AG_2(1,3)$, тобто воно зберігає всі нетривіальні симетрії Лі класичного рівняння Шрьодінґера без потенціалу. В роботах [10] і [5] використовуючи оператори алгебри інваріантності $AG_2(1,3)$ побудовано низку точних розв'язків рівняння (1), зокрема, в останній з них знайдено солітоноподібний та періодичний розв'язки цього рівняння. Враховуючи той факт, що інтерес до дослідження поведінки розв'язків цього рівняння не згасає, свідченням чого є доповідь Ф. Мерле (F. Merle) на останньому Світовому конгресі математиків в Берліні [11], постає задача *повного опису* (у деякому сенсі) інваріантних розв'язків рівняння (1).

Насамперед звернемо увагу на деякі принципові труднощі методологічного характеру, які виникають при спробі *повного опису* (у тому сенсі, наприклад, як це було продемонстровано в [6] на прикладі двовимірного узагальненого рівняння Екгауса) інваріантних розв'язків багатовимірних рівнянь (три і більше незалежних змінних) і на які раніше мало акцентувалася увага.

По-перше, редукція за одновимірними підалгебрами (окрім операторів на зразок одиничного $J = i(U\partial_U - U^*\partial_{U^*})$, яким відповідають додаткові функціональні умови на шукані функції) веде до деяких диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), а не звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), як у випадку двовимірних рівнянь. Це відразу ставить завдання дослідження симетрії Лі отриманих такою редукцією ДРЧП, оскільки легко навести приклади, коли ці рівняння володіють симетріями Лі, які не притаманні початковому ДРЧП (нижче це буде встановлено і для РШ (1)). Більше того, отримане ДРЧП меншої розмірності може мати нескінченно-вимірну симетрію на противагу початковому ДРЧП. Яскравий приклад: неважко порахувати, що алгебра Лі (1+2)-вимірного нелінійного РШ

$$iU_t + \Delta_2 U = \exp|U|^2$$

є тривимірна алгебра Евкліда $AE(2)$, доповнена операторами $P_t = \frac{\partial}{\partial t}$ і J. Проте редукція цього рівняння за оператором P_t веде до рівняння типу Ліувіля для комплексної функції

$$\Delta_2 U = \exp|U|^2,$$

яке інваріантне відносно *нескінченно-вимірної алгебри Лі*, породженої оператором

$$X^\infty = \xi^1(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + \xi^2(x_1,x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} - \xi^1_1(x_1,x_2)\left(\frac{\partial}{\partial_U} + \frac{\partial}{\partial U^*}\right),$$

де ξ^1, ξ^2 — загальний розв'язок лінійної системи Коші–Рімана ($\xi^1_1 = \xi^2_2$, $\xi^1_2 = -\xi^2_1$).

По-друге, до розв'язання отриманих ДРЧП меншої розмірності потрібно застосувати інші відомі методи (а для двовимірних ДРЧП їх чимало), які можуть привести до побудови неліївських розв'язків цих рівнянь. Нижче це буде продемонстровано на прикладі використання методу Q-умовних симетрій. Проте, очевидним є той факт, що для початкового ДРЧП ці розв'язки все ж таки будуть інваріантними (ліївськими).

Таким чином, досягти повного опису інваріантних розв'язків нелінійних багатовимірних ДРЧП надзвичайно складно, тому тут ми обмежимося розв'язанням лише першого з двох перелічених завдань і наведемо окремі приклади реалізації другого. Ми подаємо лише деякі з отриманих вислідів, які є новими порівняно з наведеними в [5] і [10], а більш детальний їхній виклад буде зроблено в іншій роботі.

2. Дослідження симетрійних властивостей редукованих рівнянь. В роботі [4] здійснена редукція рівняння (1) за системою всіх неспряжених (нееквівалентних) одновимірних підалгебр алгебри $AG_2(1,3)$. Отримано 13 тривимірних нелінійних ДРЧП у просторі нових змінних $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \varphi, \varphi^*)$ і одне лінійне чотиривимірне ДРЧП з додатковою функціональною умовою на функцію U. Оскільки останнє рівняння принципово відрізняється від решти (див. нижче рівняння (4)), то досліджувалися лише тривимірні ДРЧП (18), (20)–(31) (див. роботу [4]).

Перш за все нами проведено дослідження ліївських симетрій кожного з цих рівнянь. Виявлено, що вони допускають різноманітні алгебри інваріантності, які ми подаємо у вигляді *таблиці 1.*

У таблиці 1 застосовано наступні позначення для операторів

$$
\begin{aligned}
&P_a = \tfrac{\partial}{\partial \omega_a},\ J_{ab} = \omega_a P_b - \omega_b P_a,\ G_a = tP_a + \tfrac{\omega_a}{2k} J, \quad a, b = 1, 2, 3 \\
&D_1 = 2tP_t + \omega_2 P_2 + \omega_3 P_3 - \tfrac{3}{2}(\varphi \partial_\varphi + \varphi^* \partial_{\varphi^*}), \\
&D_2 = 2tP_t + 2\omega_2 P_2 + \omega_3 P_3 - \tfrac{3}{2}(\varphi \partial_\varphi + \varphi^* \partial_{\varphi^*})
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(тут і скрізь нижче у випадках $\omega_1 = t$ вжито позначення t). Для позначень відповідних алгебр Лі застосовані усталені скорочення, окрім $AA(n)$ — n-вимірна абелева алгебра.

Процес отримання симетрій Лі цих рівнянь ми опускаємо, оскільки на теперішній час він не викликає принципових проблем для рівнянь, які не містять довільних функцій. Важливо наголосити на іншому: низка редукованих рівнянь має абсолютно неочевидні симетрійні властивості, які утворюють добре відомі алгебри Лі. Більше того, маємо підтвердження тези про породження редукованими рівняннями нових симетрій Лі, не притаманних початковому рівнянню (1). Дійсно редукційні рівняння (22) і (24) [4], отримані за допомогою підалгебр X_5 і X_7 [4], інваріантні відносно операторів Ґалілея G_a^0, $a = 2, 3$ з принципово іншою структурою, відносно яких рівняння (1) *не є інваріантним.* Більше того, таке зображення операторів Ґалілея взагалі не притаманне для рівнянь типу Шрьодінґера. Зауважимо, що відповідні їм алгебри Ґалілея $AG^0(1,n)$ і рівняння досліджувалися в роботах [8, 7].

Таблиця 1

Номер ДРЧП в [4]	Алгебра інваріантності	Базові оператори
(18)	$AG_1(1,2)$	$P_t,\ P_a,\ J_{ab},\ G_a,\ J, D_1,\ a,b=2,3$
(20)	$AE(3)$	$P_a=\partial_a,\ J_{ab},\ J,\quad a,b=1,2,3$
(21)	$AG_1(1,1)$	$P_t,\ P_3,\ G_3,\ J, D_2$
(22)	$AA(2)$	$G_3^0=tP_3,\ J$
(23)	$AA(3)$	$P_1,\ P_3,\ J$
(24)	$AA(3)$	$P_3,\ G_2^0=tP_2,\ J$
(25)	$AE(2)\oplus J$	$P_2,\ P_3,\ J_{23},\ J$
(26)	$AA(2)$	$P_1,\ J$
(27)	$AO(3)\oplus J$	$J_{ab},\ J,\quad a,b=1,2,3$
(28)	$AO(3)\oplus J$	$J_{ab},\ J,\quad a,b=1,2,3$
(29)	$AA(3)$	$P_1,\ P_3,\ J$
(30)	$AA(2)$	$P_1,\ J$
(31)	$\langle J\rangle$	J

Всі отримані редуковані рівняння, окрім останнього, послідовною редукцією було зведено до ДРЧП від двох незалежних змінних. Врешті-решт, було досліджено симетрійні властивості отриманих двовимірних ДРЧП, що дозволило отримати низку звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) другого порядку вигляду

$$A(\omega)\frac{\partial^2\varphi}{d\omega^2}+B(\omega)\frac{d\varphi}{d\omega}+C(\omega)\varphi+\lambda\varphi|\varphi|^{4/3}=0, \tag{3}$$

де

$$A(\omega)=\begin{cases} A_0, \\ A_0\omega, \\ A_0(\omega^2+1), \\ A_0(\omega^2+\omega), \end{cases} \qquad B(\omega)=\begin{cases} B_0+iB_1,\omega \\ B_0+iB_1, \\ (B_0+iB_1)\omega, \end{cases}$$

$$C(\omega)=\begin{cases} C_0+C_1\omega, \\ C_0+iC_1, \\ C_0+C_1\omega^2, \\ C_0+\frac{C_1}{\omega}. \end{cases}$$

Тут A_0, B_0, B_1, C_0, C_1 — деякі дійсні сталі. Конкретний вигляд функцій $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ і змінної ω у кожному випадку визначається алгеброю (окремими операторами) інваріантності редукованого рівняння. Зауважимо, що в роботі [2] було проведено якісний аналіз розв'язків деяких рівнянь вигляду (3).

3. Точні розв'язки. Перш за все зауважимо, що за оператором J не можливо провести редукцію РШ (1) у звичайному розумінні цього терміну [12]. Проте формально розв'язуючи рівняння Лагранжа для J, отримуємо умову $UU^* = V(t,x)^2$, яка зводить (1) до лінійного РШ з довільним потенціалом V (не зменшуючи загальності скрізь вважатимемо $k=1$)

$$iU_t + \Delta_\omega U = \lambda V^{4/3} U. \tag{4}$$

Оскільки інтегрування (4) з цією умовою еквівалентне інтегруванню початкового нелінійного РШ (1), то ми обмежимося розглядом випадку $V(t,x) = \gamma \in \mathbb{R}$. Іншими словами, амплітуда R хвильової функції U має бути сталою, тобто:

$$U \equiv \varphi = \gamma \exp(iP(t,x)). \tag{5}$$

Підставляючи (5) в (4) та застосовуючи заміну

$$P^1(t,x) = P(t,x) + \lambda\gamma^{4/3} t, \tag{6}$$

у випадку дійсного λ отримуємо перевизначену систему рівнянь

$$P^1_t = -P^1_a P^1_a, \qquad P^1_a \equiv \frac{\partial P^1}{\partial x_a}, \qquad \Delta P^1 = 0. \tag{7}$$

Виявляється, що перевизначену систему (7) можна повністю проінтегрувати [3]. Дійсно, подіявши на перше рівняння оператором Лапласа з врахуванням другого, отримаємо умову

$$0 = P^1_{ab} P^1_{ab}, \tag{8}$$

з якої негайно випливає, що функція P^1 має бути лише лінійною щодо змінних x_a, $a = 1,2,3$, а це з врахуванням першого рівняння (7) веде до розв'язку $P(t,x) = -\left[\left(b_a b_a + \lambda\gamma^{4/3}\right) t - b_a x_a\right]$. Отже, знаходимо плоскохвильовий розв'язок

$$U \equiv \varphi = \gamma \exp\left\{-i\left[\left(b_a b_a + \lambda\gamma^{4/3}\right) t - b_a x_a\right]\right\} \tag{9}$$

нелінійного РШ (1). В (9) λ, b_1, b_2, b_3 — довільні дійсні сталі. Зауважимо, що розгляд строго комплексного λ та застосування підстановки (5) веде до несумісної системи.

Редукція рівняння (1) за оператором $X_4 = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + \alpha J$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ дає нелінійне рівняння [4]

$$i\varphi_t + (4(\omega_2\varphi_{\omega_2})_{\omega_2} + \varphi_{\omega_3\omega_3}) - \frac{\alpha^2}{\omega_2}\varphi = \lambda\varphi|\varphi|^{4/3}, \quad \omega_3 = x_3 \tag{10}$$

(тут $\varphi = \varphi(\omega_1, \omega_2, \omega_3), U = \exp(i\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1})\varphi, \omega_1 = t, \omega_2 = x_2^2 + x_3^2, \omega_3 = x_3$), яке інваріантне відносно алгебри розширеної Ґалілея $AG_1(1,1)$ (див. таблицю 1). Оскільки нелінійні ДРЧП зі змінними коефіцієнтами дуже рідко мають широку лиївську симетрію, то виглядає обґрунтованим завдання провести подальшу редукцію рівняння (10) за підалгебрами $AG_1(1,1)$. Відомо [12], що повний набір всіх нееквівалентних (неспряжених) одновимірних підалгебр розширеної алгебри Ґалілея $AG_1(1,1)$ у просторі змінних $(t, \omega_3, \varphi, \varphi^*)$ має вигляд

$$\begin{aligned} &X_1 = J, \quad X_2 = P_3, \quad X_3 = P_t - \alpha_0 J, \\ &X_4 = P_t \pm G_3, \quad X_5 = D_2 - \tfrac{1}{2}\alpha_0 J, \quad \alpha_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{11}$$

Розв'язуючи відповідні рівняння Лагранжа для операторів (11) (окрім одиничного J), одержуємо такі анзаци для нової шуканої функції ψ, яка залежить від нових інваріантних змінних ω_1 і ω_2:

$$\begin{aligned} &X_2: \ \varphi = \psi(t, \omega_2), \quad \omega_1 = t, \quad \omega_2 = x_2^2 + x_3^2, \\ &X_3: \ \varphi = \psi(\omega_1, \omega_2)\exp(-i\alpha_0 t), \quad \omega_1 = x_3, \\ &X_4: \ \varphi = \exp\left[\pm\frac{it}{2}\left(x_3 + \frac{t^2}{3}\right)\right]\psi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = t^2 \mp 2x_3, \\ &X_5: \ \varphi = t^{-(3+i\alpha_0)/4}\psi(\omega_1, \omega_2), \quad \omega_1 = \frac{x_3}{\sqrt{t}}, \quad \omega_2 = \frac{x_2^2 + x_3^2}{t}. \end{aligned} \tag{12}$$

Після підстановки анзаців (12) в рівняння (10) одержуємо відповідно такі редукційні двовимірні ДРЧП (в анзаці для алгебри X_4 для більшої зручності ми зафіксували нижні знаки):

$$X_2: \ i\psi_t + 4(\omega_2\psi_{\omega_2})_{\omega_2} = \frac{\alpha^2}{\omega_2}\psi + \lambda\psi|\psi|^{4/3}, \tag{13}$$

$$X_3: \ \psi_{\omega_1\omega_1} + 4(\omega_2\psi_{\omega_2})_{\omega_2} = -\alpha_0\psi + \frac{\alpha^2}{\omega_2}\psi + \lambda\psi|\psi|^{4/3}, \tag{14}$$

$$X_4: \ 4\psi_{\omega_1\omega_1} + 4(\omega_2\psi_{\omega_2})_{\omega_2} = -\frac{\omega_1}{4}\psi + \frac{\alpha^2}{\omega_2}\psi + \lambda\psi|\psi|^{4/3}, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} X_5: \ &\psi_{\omega_1\omega_1} + 4(\omega_2\psi_{\omega_2})_{\omega_2} = \frac{i}{2}(\omega_1\psi_{\omega_1} + 2\omega_2\psi_{\omega_2}) + \\ &+\frac{3i-\alpha_0}{4}\psi + \frac{\alpha^2}{\omega_2}\psi + \lambda\psi|\psi|^{4/3}. \end{aligned} \tag{16}$$

Врешті-решт, двовимірні ДРЧП (13) і (14) відповідно інваріантні відносно алгебр Лі $A_1 = \langle J, P_t, D = 2tP_t + 2\omega_2 P_2 - \frac{3}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*})\rangle$ і $A_2 = \langle J, P_1\rangle$. Отже, ці ДРЧП можна звести до ЗДР, застосовуючи нееквівалентні ліївські анзаци, побудовані за допомогою цих алгебр. Справді, неважко переконатися, що перша з них породжує два анзаци (див. оператори X_3 в (11) і $X_5 = D - \frac{\alpha_0}{4}J$)

$$\begin{aligned} &\psi = \phi(\omega_2)\exp(-i\alpha_0 t), \\ &\psi = t^{-(3+i\alpha_0)/4}\phi(\omega), \qquad \omega = \frac{\omega_2}{t}, \end{aligned} \tag{17}$$

які редукують ДРЧП (13) до ЗДР вигляду

$$4(\omega_2\phi_{\omega_2})_{\omega_2} = -\alpha_0\phi + \frac{\alpha^2}{\omega_2}\phi + \lambda\phi|\phi|^{4/3}, \tag{18}$$

$$4(\omega\phi_\omega)_\omega = i\omega\phi_\omega + \frac{3i-\alpha_0}{4}\phi + \frac{\alpha^2}{\omega}\phi + \lambda\phi|\phi|^{4/3}. \tag{19}$$

Алгебра A_2 породжує анзац

$$\psi = \phi(\omega_2)\exp(i\alpha_1\omega_1), \quad \alpha_1 \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

який редукує ДРЧП (14) до ЗДР

$$4(\omega_2\phi_{\omega_2})_{\omega_2} = \left(\alpha_1^2 - \alpha_0\right)\phi + \frac{\alpha^2}{\omega_2}\phi + \lambda\phi|\phi|^{4/3}. \tag{21}$$

Було також встановлено, що ліївська симетрія ДРЧП (13) не залежить від значення сталої α. Що ж до ДРЧП (14), то встановлено, що лише випадок $\alpha_0 = 0$ веде до розширення його симетрії завдяки новому оператору масштабних перетворень $D = \omega_1 P_1 + 2\omega_2 P_2 - \frac{3}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*})$. Отже, при $\alpha_0 = 0$ з'являється ще одне редукція (14) до ЗДР

$$\begin{aligned} &4\omega^2\phi_{\omega\omega} + 4(\omega\phi_\omega)_\omega + (12 + 2i\alpha_1)\omega\phi_\omega = \\ &\quad -\frac{1}{4}(3+i\alpha_1)(5+i\alpha_1)\phi + \frac{\alpha^2}{\omega}\phi + \lambda\phi|\phi|^{4/3}, \end{aligned} \tag{22}$$

де

$$\psi = x_3^{-(3+i\alpha_1)/2}\phi(\omega), \qquad \omega = \omega_2 x_3^{-2} \tag{23}$$

— анзац породжений оператором $D - \frac{\alpha_1}{2}J$. Щодо двовимірних ДРЧП (15) і (16), то вони інваріантні лише відносно одиничного оператора J, тому неможлива їхня подальша редукція до ЗДР (в межах методу Лі!).

Зауваження 1. Рівняння (15), як і (13)–(14), у випадку $\alpha = 0$ є Q-умовно інваріантними відносно оператора $P_2 = \partial_{\omega_2}$; рівняння (16) при $\alpha = 0$ — Q-умовно інваріантне відносно операторів $P_1 = \partial_{\omega_1}$ і $P_3 = \partial_{\omega_3}$.

Таким чином, тривимірне рівняння (10) нами проредуковане за всіма нееквівалентними одновимірними підалгебрами MAI, а отримані двовимірні ДРЧП (13)–(16) в свою чергу проредуковані до ЗДР у всіх можливих випадках.

На жаль, отримані нелінійні ЗДР (18), (19), (21), (22) не інтегруються, а тому вдалося побудувати лише деякі часткові розв'язки.

Зокрема, відповідно при $\alpha_0 = 0$ і $\alpha_0 = \alpha_1^2$, рівняння (18) і (21) зводяться до нелінійного ЗДР

$$4(\omega_2\phi_{\omega_2})_{\omega_2} = \alpha^2\omega_2^{-1}\phi + \lambda\phi|\phi|^{4/3}, \tag{24}$$

яке має частинний розв'язок

$$\phi = \left[\frac{(9/4 - \alpha^2)}{\lambda\omega_2}\right]^{3/4}. \tag{25}$$

Отже, з урахуванням перших анзаців в (17), (12) та відповідного оператору X_4 анзаца (див. таблицю 1 в [4]) за цим розв'язком отримуємо розв'язок нелінійного РШ (1)

$$U(t,x) = \exp\left(i\alpha \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}\right)\left[\frac{(9/4-\alpha^2)}{\lambda\left(x_1^2+x_2^2\right)}\right]^{3/4}. \tag{26}$$

Аналогічно з урахуванням анзаців (20) і (12) (див. другий анзац) та відповідного оператору X_4 анзацу (див. таблицю 1 в [4]) за цим розв'язком отримуємо

$$U(t,x) = \exp\left[i\left(\alpha \operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1} + \alpha_1 x_3 - \alpha_1^2 t\right)\right]\left[\frac{(9/4-\alpha^2)}{\lambda\left(x_1^2+x_2^2\right)}\right]^{3/4}, \tag{27}$$

який є деяким узагальненням розв'язку (26).

Вдалося також побудувати частковий розв'язок рівняння (19) у вигляді степеневої функції з комплексним показником, за яким було отримано стаціонарний розв'язок РШ (1)

$$U(t,x) = A\exp\left(i\alpha\,\mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1}\right)\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-\frac{3+i\alpha_0}{4}}, \tag{28}$$

де

$$A^{4/3} = \frac{9}{2b^2}\left(\sqrt{|\lambda|^2-\frac{4}{9}\alpha^2b^2}-a\right),$$

$$\alpha_0 = \frac{3}{b}\left(\sqrt{|\lambda|^2-\frac{4}{9}\alpha^2b^2}-a\right),$$

$$|\alpha| < \frac{3}{2}, \quad \lambda \equiv a+ib, \quad b \neq 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Врешті-решт, отриманий нами частковий розв'язок ЗДР (22) при $\alpha_1 = 0$ знову привів до розв'язку (26) рівняння (1).

Зазначимо, що для розв'язків (26), (27), (28) їхня норма $|U| = M\left(x_1^2+x_2^2\right)^{-3/4}$ ($M-$ відома стала) є осесиметричною функцією, яка прямує до нуля при $|x_j| \to \infty$. Застосовуючи до них перетворення Ґалілея (32) [4] або проективні перетворення (33) [4] отримаємо нестаціонарні розв'язки, які вже залежатимуть від усіх просторових змінних.

Зауважимо, що у випадку застосування перетворень Ґалілея норма розв'язку змінюється, а саме:

$$|U| = M\left[(x_1+v_1t)^2+(x_2+v_2t)^2\right]^{-3/4}, \qquad v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Редукція рівняння (1) за оператором $X_5 = J_{12}+G_3$ [4] веде до рівняння

$$\frac{i\varphi}{2t}+\varphi_t+\frac{\omega_3\varphi_{\omega_3}}{t}+4(\omega_2\varphi_{\omega_2})_{\omega_2}+\left(1+\frac{t^2}{\omega_2}\right)\varphi_{\omega_3\omega_3} = \lambda\varphi|\varphi|^{3/4}, \tag{29}$$

яке інваріантне відносно абелевої алгебри Лі $\langle G_3^0 = tP_3,\ J\rangle$. Лінійна комбінація цих операторів $G_3^0+\alpha_1 J$ породжує анзац

$$\varphi = \psi(t,\omega_2)\exp\left(\frac{i\alpha_1\omega_3}{t}\right), \tag{30}$$

за допомогою якого рівняння (29) зводиться до двовимірного ДРЧП

$$i\left(\psi_t + \frac{\psi}{2t}\right) + 4(\omega_2\psi_{\omega_2})_{\omega_2} + \alpha_1^2\left(\frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{t^2}\right)\psi = \lambda\psi|\psi|^{3/4}. \qquad (31)$$

Рівняння (31) з довільно вибраним α_1 володіє лише тривіальною симетрією Лі J, але при $\alpha_1 = 0$ ця симетрія розширюється за рахунок оператора $D = 2tP_t + 2\omega_2 P_2 - \frac{3}{2}(\psi\partial_\psi + \psi^*\partial_{\psi^*})$. Отже, при $\alpha_1 = 0$ за допомогою другого анзацу (17) можлива редукція ДРЧП (31) до ЗДР

$$4(\omega\phi_\omega)_\omega = i\omega\phi_\omega + \frac{i - \alpha_0}{4}\phi + \lambda\phi|\phi|^{4/3}. \qquad (32)$$

Окрім того, рівняння (31) у випадку $\alpha_1 = 0$ є Q-умовно інваріантне відносно оператора $P_2 = \partial_{\omega_2}$ і це дозволяє його звести до ЗДР першого порядку

$$i\left(\varphi_t + \frac{\varphi}{2t}\right) = \lambda\varphi|\varphi|^{3/4}, \qquad (33)$$

яке відомою підстановкою $\varphi = R\exp(iP)$ зводиться до системи ЗДР

$$\begin{aligned} &R_t + \frac{R}{2t} = bR|R|^{3/4}, \\ &P_t + aR^{4/3} = 0, \qquad \lambda = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned} \qquad (34)$$

При дійсному $\lambda = a$ система легко інтегрується і отримується загальний розв'язок (33)

$$\varphi = \frac{c_0}{\sqrt{t}}\exp\left(-3i\lambda c_0^{4/3}t^{1/3}\right), \qquad (35)$$

який веде до розв'язку

$$U = \frac{c_0}{\sqrt{t}}\exp\left(\frac{ix_3^2}{4t} - 3i\lambda c_0^{4/3}t^{1/3}\right) \qquad (36)$$

рівняння (1).

У випадку комплексного $\lambda = a + ib$ система також інтегрується завдяки моживості звести перше рівняння системи до відомого рівняння Бернулі [1] (с. 297) і тоді загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi = \left[\frac{1}{4b\left(c_0t^{2/3} - t\right)}\right]^{3/4}\exp\left[-\frac{ia}{4b}\int\left(c_0t^{2/3} - t\right)^{-1}dt\right], \ b \neq 0. \qquad (37)$$

Врешті-решт отримується розв'язок рівняння (1)

$$U = \left[\frac{1}{4b\left(c_0 t^{2/3} - t\right)}\right]^{3/4} \exp\left[\frac{ix_3^2}{4t} - \frac{ia}{4b}\int\left(c_0 t^{2/3} - t\right)^{-1} dt\right], \quad (38)$$

Зазначимо, що розв'язки (36) і (38) мають таку властивість: норма $|U|$ не залежить від просторових змінних. З другого боку, (38) є так званим "вибухаючим" (blow-up [11]) розв'язком, оскільки він за довільно вибраний скінченний проміжок часу $t = c_0^3 > 0$ перетворюється в нескінченність. Такої ж властивості набуває розв'язок (36), якщо в ньому, користуючись інваріантністю рівняння (1) відносно групи зсувів по часу, скрізь замінити t на $t - c_0^3$. Розв'язок (9) також перетворюється у вибухаючий, але шляхом застосування проективних перетворень (33) [4]. З другого боку, (26)–(28) не можливо звести до вибухаючих розв'язків жодними перетвореннями інваріантності. Це неважко довести за допомогою формули (37) [4].

Кожен з отриманих точних розв'язків РШ (1) за допомогою формули (37) [4] можна розмножити щонайменше до 13-параметричної сім'ї розв'язків. Оскільки вирази отримуються надто громіздкими, то ми їх опускаємо.

[1] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.

[2] Парасюк И.О., Фущич В.И. Качественный анализ семейств ограниченных решений нелинейного трехмерного уравнения Шредингера // Укр. матем. журн. — 1990. — **42**. — С. 1344–1349.

[3] Фущич В.І., Єгорченко І.А. Неліївські анзаци та умовна симетрія нелінійних рівнянь Шрьодінґера // Укр. матем. журн. — 1991. — **43**. — С. 1620–1628.

[4] Фущич В.И., Чернига Р.М. Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения, I // Укр. матем. журн. — 1989. — **41**. — С. 1349–1357.

[5] Фущич В.И., Чернига Р.М. Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения, II // Укр. матем. журн. — 1989. — **41**. — С. 1687–1694.

[6] Черніга Р.М. Симетрійні властивості та точні розв'язки рівняння Шрьодінґера зі степеневою нелінійністю, яка містить похідну // Укр. фізичний журн. — 1995. — **40**, № 4–5. — С. 376–384.

[7] Черніга Р.М. Ґалілей-інваріантні узагальнення рівняння теплопровідності з нескінченновимірною алгеброю симетрій Лі // Праці Інституту математики. — 1998. — **19**. — С. 270–279.

[8] Fushchych W., Cherniha R. The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. — 1985. — **18**. — P. 3491–3503.

[9] Fushchych W.I., Moskaliuk S. On some exact solutions of nonlinear Schrödinger equation in three spatial dimensions // Lett. Nuovo Cimento. — 1981. — **31**, № 16. — P. 571–576.

[10] Fushchych W.I., Serov N.I. On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation // J. Phys. A. — 1987. — **20**. — L929–L933.

[11] Merle F. Blow-up phenomena for critical nonlinear Schrödinger and Zakharov equations // Proc. Int. Congress of Mathematicians, Berlin. — 1998. — **III**. — P. 57–66.

[12] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. — Berlin: Springer, 1986. — 510 p.

Праці Інституту математики НАН України 2001, том 36, 316–323

УДК 517.929

Предельные уравнения для неавтономного функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа

Д.Х. ХУСАНОВ

Ташкентский Государственный технический университет

За допомогою граничного рівняння досліджена асимптотична стійкість і нестійкість розв'язків неавтономного диференціально-функціонального рівняння нейтрального типу (НФДУ).

Assymptotic stability and unstability of solutions of non-autonomous differential-functional equation of neutral type is investigated using the boundary equation

Пусть $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — действительная ось, $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{R}^p$ — действительное евклидово пространство p-векторов x с нормой $|x|$, $h > 0$ — некоторое действительное число, $C_{[\alpha,\beta]}$ — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^p$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, \alpha \le s \le \beta)$, $C_H = \{\varphi \in C_{[-h,0]} : ||\varphi|| < H\}$, для непрерывной функции $x : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ и каждого $t \in \mathbb{R}$ функция $x_t \in C_{[-h,0]}$ определяется равенством $x_t(s) = x(t+s)$ для $-h \le s \le 0$.

Определение 1. *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{R}^+ \times C_{[-h,0]}$ *открыто, и пусть* $F : \Gamma \to \mathbb{R}^n$, $G : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ *— заданные непрерывные функции. Соотношение*

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G(t, x_t)] = F(t, x_t) \tag{1}$$

называется функционально-дифференциальным уравнением (ФДУ) нейтрального типа определенным на Γ.

Определение 2. *Для данного НФДУ функция* $x(t)$ *называется решением уравнения (1) на* $[\alpha - h, \alpha + A)$, *если* $\alpha \in \mathbb{R}$, $A > 0$ *таковы, что* $x_t \in C_{[\alpha-h,\alpha+A)}$, *причем* $(t, x_t) \in \Gamma$, *при* $t \in [\alpha, \alpha + A)$ *выражение* $x(t) - G(t, x_t)$ *имеет непрерывную производную и удовлетворяет уравнению (1) на* $[\alpha, \alpha + A)$.

Для заданных $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_{[-h,0]}$, $(\alpha, \varphi) \in \Gamma$ функция $x(t, \alpha, \varphi)$ является решением, начинающееся в точке (α, φ), если существует $A > 0$, такое, что $x(t, \alpha, \varphi)$ является решением уравнения (1) на $[\alpha - h, \alpha + A)$ и $x_t(\alpha, \varphi)$ при $t = \alpha$ равна φ, т. е. $x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$.

Лемма 1. *Если $x = x(t, \alpha, \varphi)$ является решение (1), определенным для любого $t \geq \alpha - h$ и $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq r < H$ для любого $t \in [\alpha - h, +\infty)$, тогда семейство функций $\{x_t(\alpha, \varphi) : t \geq \alpha\}$ предкомпактно в C_r.*

Доказательство. Из того, что $x(t, \alpha, \varphi)$ является решение уравнения (1), следует

$$x(t) = x(\alpha) - G(\alpha, \varphi) + G(t, x_t) + \int\limits_\alpha^t F(s, x_s)ds, \qquad t > \alpha,$$
$$x(s) = \varphi(s), \qquad \alpha - h \leq s \leq \alpha. \tag{2}$$

В силу (2) и ограниченности $F(t, \varphi)$ на $\mathbb{R}^+ \times C_r$, для $\Delta > 0$ имеем

$$|x(t + \Delta) - x(t)| =$$
$$= \left| G(t + \Delta, x_{t+\Delta}) - G(t, x_t) + \int\limits_t^{t+\Delta} F(s, x_s)ds \right| \leq$$
$$\leq \lambda \|x_{t+\Delta} - x_t\| + (M_r + N)\Delta.$$

Полагая $\rho = \sup\limits_{\alpha \leq t} |x(t + \Delta) - x(t)|$, получаем

$$\rho \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} \max_{\alpha - h \leq s \leq \alpha} |x(t + +\Delta) - \varphi(s)| + \frac{M_r + N}{1 - \lambda}\Delta,$$

что и доказывает лемму. ■

Введем следующие предположения относительно функций $F(t, \varphi)$ и $G(t, \varphi)$.

Условие 1. *Для каждого числа τ, $0 < \tau < H$, существует число $M(\tau)$ такое, что функция $F(t, \varphi)$ удовлетворяет условию $|F(t, \varphi)| < M$, где $t \in [0, +\infty)$, $\varphi(s) \in C_\tau$.*

Условие 2. *Функция $F(t, \varphi)$ равномерно непрерывна, а функция $G(t, \varphi)$ ограничена на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times K$, где $K \subset C_H$ — произвольное компактное множество из C_H, так что $\forall\ K \subset C_H$,*

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, $\forall\ (t,\varphi), (t_1,\varphi_1), (t_2,\varphi_2) \in \mathbb{R}^+ \times K$, $|t_2 - t_1| \le \delta$, $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \le \delta$ имеют место соотношения:

$$|F(t_2,\varphi_2) - F(t_1,\varphi_1)| < \varepsilon, \qquad |G(t,\varphi)| \le m. \tag{3}$$

Лемма 2. *При выполнении условий 1, 2 и условия*

$$|G(t_2,\varphi_2) - G(t_1,\varphi_1)| \le N|t_2 - t_2| + \lambda\|\varphi_2 - \varphi_1\|, \tag{4}$$

семейство сдвигов $\{F^\tau(t,\varphi) = F(t+\tau,\varphi), \tau \in \mathbb{R}^+\}$ и семейство сдвигов $\{G^\tau(t,\varphi) = G(t+\tau,\varphi), \tau \in \mathbb{R}^+\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $\mathbb{R}^+ \times K$, где K — произвольный компакт из C_H.

Введем следующее определение [1–3].

Определение 3. *Компактной оболочкой $S^+(F,G)$ функций $F(t,\varphi)$ и $G(t,\varphi)$, определенных на $\mathbb{R}^+ \times C_H$, и удовлетворяющих сделанным выше условиям 1 и 2, называется множество совокупностей (F^*, G^*, Λ), где $F^*, G^* \in C(\Lambda, \mathbb{R}^n)$, $\Lambda = \mathbb{R}^+ \times \Lambda_1, \Lambda_1 \subset C_H$, таких, что существует последовательность $t_n \to +\infty$, $n \to \infty$, для которой $\{F(t+t_n,\varphi)\}$ равномерно сходится к $F^*(t,\varphi)$, а $\{G(t+t_n,\varphi)\}$ равномерно сходится к $G^*(t,\varphi)$ на каждом множестве $[0,n] \times K$, где $n = 1, 2, \ldots$, множество K — компакт из Λ_1.*

Функции F^* и $G^* : \mathbb{R}^+ \times \Lambda_1 \to \mathbb{R}^n$ называются предельными к функциям F и G.

Для каждой $(F^*, G^*, \Lambda) \in H^+(F,G)$ определим предельное уравнение

$$\frac{d}{dt}[x(t) - G^*(t,x_t)] = F^*(t,x_t) \tag{5}$$

Из определения функций F^* и G^* вытекает следующая лемма.

Лемма 3. *Если выполняются условия (4) и*

$$|F(t,\varphi) - F(t,\psi)| \le L\|\varphi - \psi\|, \tag{6}$$

то каждая предельная функция $F^*(t,\varphi)$ удовлетворяет (6), а функция $G^*(t,\varphi)$ — условию (4) относительно Λ.

Доказательство. Имеем равномерную сходимость $\{F^{(n)}(t,\varphi) = F(t+t_n,\varphi)\}$ к $F^*(t,\varphi)$ на $[0,m]\times K$, где K — компакт из C_H. Для любых $\varphi_1,\varphi_2 \in K$ и $t \in [0,m]$ для достаточно больших $n > N(\varepsilon)$, ($N(\varepsilon)$ — из равномерной сходимости) имеем

$$
\begin{aligned}
&|F^*(t,\varphi_2) - F^*(t,\varphi_1)| \le \\
&\qquad \le |F^*(t,\varphi_2) - F^{(n)}(t,\varphi_2)| + |F^{(n)}(t,\varphi_2) - F^{(n)}(t,\varphi_1)| + \\
&\qquad + |F^*(t,\varphi_1) - F^{(n)}(t,\varphi_1)| \le 2\varepsilon + L\|\varphi_2 - \varphi_1\|.
\end{aligned}
$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ и учитывая призвольность m, находим

$$
\begin{aligned}
&|F^*(t,\varphi_2) - F^*(t,\varphi_1)| \le L\|\varphi_2 - \varphi_1\| \\
&\text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{и} \quad \varphi_1,\varphi_2 \in K \subset \Lambda_1.
\end{aligned}
$$

Для $G(t,\varphi)$ утверждение леммы доказывается аналогично. ■

Из доказанной леммы следует, что решение $x(t,\alpha,\varphi)$ уравнения (1) для каждого начального условия $(\alpha,\varphi) \in \Lambda$ непрерывно зависит от начальных данных и является единственным.

Теорема 1. *Пусть $x = x(t,\alpha,\varphi)$ является решение (1), определенным для любого $t \ge \alpha - h$ и $|x(t,\alpha,\varphi)| \le \tau < H$.*

Тогда положительное предельное множество этого решения квазиинвариантно к семейству предельных уравнений (5), а именно, для каждого элемента $\psi \in \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ существуют $(F^*,G^*,\Lambda) \in S^+(F,G)$ и уравнение

$$
\frac{d}{dt}[y(t) - G^*(t,y_t)] = F^*(t,y_t), \tag{7}
$$

такое, что для решения этого уравнения $y(t,0,\psi)$ выполняется соотношение $\{y_t(0,\psi) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$.

Доказательство. Пусть $t_n \to +\infty$ — последовательность, для которой $x_{t_n}(\alpha,\varphi) \to \psi$ при $n \to +\infty$. Фиксируем $L > 0$. Рассмотрим $x(t+t_n)$ при $t \in [0,L]$. Из леммы 1 имеем, что семейство $\{x^n(t)\}$ равномерно непрерывно, а по условию теоремы оно также равностепенно ограниченно. Из теоремы Арцела существует подпоследовательность $t_m \to +\infty$ и функция $y(t) : [0,L] \to R^n$, что $\{x^m(t)\}$ сходится к $y(t)$ для $t \in [0,L]$.

Из (1) следует, что

$$x(t+t_m) = x(t_m) - G(t_m, x_{t_m}) + G(t+t_m, x_{t+t_m}) + \\ + \int\limits_0^t F(s+t_m, x_{s+t_m})ds. \tag{8}$$

Согласно лемме 1 существует компакт $K \subset C_H$, такой что $x_t(\alpha,\varphi) \in K$ для $t \geq \alpha$. Из леммы 2 и обобщенной теоремы Арцела, используя диогональный процесс, получаем, что существуют подпоследовательность t_{mk} и функции $F^*(t,\varphi), G^*(t,\varphi) : \mathbb{R}^+ \times K \to \mathbb{R}^n$, $F^*, G^* \in S^+(F,G)$: $F(t+t_{mk},\varphi)$ сходится к $F^*(t,\varphi)$, $G(t+t_{mk},\varphi)$ сходится к $G^*(t,\varphi)$ равномерно на каждом компакте из $\mathbb{R}^+ \times K$. Следовательно $G(t+t_{mk}, x_{t+t_{mk}}) \to G^*(t, y_t(t))$, $F(t+t_{mk}, x_{t+t_{mk}}) \to F^*(t, y_t(t))$ равномерно $0 \leq t \leq L$; $G(t_{mk}, x_{t_{mk}}) \to G^*(0,\psi)$. Устремляя в (8) $m_k \to \infty$, получаем, что функция $y(t) = y(t,0,\psi)$ есть решение уравнения $\frac{d}{dt}[y(t) - G^*(t,y_t)] = F^*(t,y_t)$ на отрезке $[-h, L]$. Последовательно полагая $L = 1, 2, \ldots$ и используя диагональный процесс, получаем, что решение $y(t,0,\psi)$ уравнения (7) определено для всех $t \geq -h$ и $y_t(0,\psi) \in \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$.

Замечание. За область определения уравнения (8) по построению можно принять область $\mathbb{R} \times \Lambda_1$, где $\Lambda_1 \subset C_H$. Решение $y(t,0,\psi)$ в теореме 1 также по построению продолжимо для всех $t \in \mathbb{R}$, при этом $\{y_t(0,\psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$.

Теперь о локализации положительного предельного множества. Обозначим через $Z(t,x_t) = x(t) - G(t,x_t)$ — ядро уравнения (1).

Пусть $V(t, x_t, Z(t,x_t)) : R^+ \times C_H \to \mathbb{R}$ — некоторый функционал, определенный и непрерывный по совокупности аргументов для всех $x_t \in C_H$ и $t \in \mathbb{R}^+$ и его производная $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнения (1) существует. Под $\frac{dV}{dt}$ понимается верхняя правосторонняя производная функционала $V = V(t, x_t, Z(t,x_t))$ вдоль решения $x = x(t,\alpha,\varphi)$ в точке (t, x_{t_1})

$$\dot V(t_1, x_{t_1}) = \lim_{h\to 0^+} \sup \frac{1}{h}(V(t_1+h, x_{t_1+h}, Z(t_1+h, x_{t_1+h})) - \\ - V(t_1, x_{t_1}, Z(t_1, x_{t_1})).$$

Допустим, что для производной $\frac{dV}{dt}$ имеет место оценка

$$\dot V(t,\varphi, Z(t,\varphi)) \leq -W(t,\varphi) \leq 0, \qquad \forall\ (t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H.$$

Допустим, что непрерывная функция $W = W(t,\varphi)$ ограничена и равномерна непрерывна на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times K$, K — компакт из C_H.

Определение 4. *Компактной оболочкой $S^+(F,G,W,\Lambda)$ функций $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$ и $W(t,\varphi)$, определенных на $\mathbb{R}^+ \times C_H$ и удовлетворяющих сделанным вышетребованиям, называется множество предельных совокупностей (F^*,G^*,W^*,Λ), где $F^*,G^*,W^* \in C(\Lambda,\mathbb{R}^n)$, $\Lambda = \mathbb{R}^+ \times \Lambda_1$, $\Lambda_1 \subset C_H$, таких, что существует последовательность $t_n \to +\infty$, $n \to \infty$, для которой $\{F^n(t,\varphi)\}$ равномерно сходится к $F^*(t,\varphi)$, $\{G^n(t,\varphi)\}$ равномерно сходится к $G^*(t,\varphi)$, $\{W^n(t,\varphi)\}$ — к $W^*(t,\varphi)$ на каждом множестве $[0,n] \times K$, где $n = 1,2,\ldots$, множество K — компакт из Λ_1.*

Теорема 2. *Пусть выполняются условия:*

1) $V(t,x_t,Z(t,x_t)) : R^+ \times C_H \to \mathbb{R}$ есть непрерывный функционал, ограниченный снизу на каждом компакте $K \subset C_H$, т.е. $V(t,\varphi) \geq m(k)\ \forall\ (t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times K$, причем существует $\frac{dV}{dt}$ в силу уравнения (1).

2) выполняется

$$\frac{dV}{dt} \leq -W(t,\varphi) \leq 0, \quad \forall\ (t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H; \tag{9}$$

3) решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ уравнения (1) таково, что $|x(t,\alpha,\varphi)| \leq \tau < H$, $\forall\, t \geq \alpha - h$, где $(\alpha,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H$.

Тогда для любой $\psi \in \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ существует предельная совокупность $(F^*,G^*,W^*,\Lambda) \in S^+(F,G,W)$, для решения $y(t,0,\psi)$ уравнения

$$\frac{d}{dt}[y(t) - G^*(t,y_t)] = F^*(t,y_t)$$

выполняется соотношения $\{y_t(0,\psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ и $\{y_t(0,\psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \{W^*(t,\varphi) = 0\}$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$. По определению это означает, что существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{t_n}(\alpha,\varphi) = \psi$.

Согласно теореме 1 для ψ существует $(F^*,G^*,\Lambda) \in S^+(F,G)$, уравнение $\frac{d}{dt}[y(t) - G^*(t,y_t)] = F^*(t,y_t)$, такое, что для этого уравнения $y(t,0,\psi)$ выполняется: $\{y_t(0,\psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$. Так как $\{x_t(\alpha,\varphi), t \geq \alpha\} \subset K$ — компакт из C_H, то мы можем найти подпоследовательность (примем, что она совпадает с подпоследовательностью, определяющей (F^*, G^*, Λ)) $t_{n_k} \to +\infty$, которая определяет $W^*(t,\varphi)$.

В силу условий теоремы функционал $V(t,\varphi) = V(t, x_t, Z(t,x_t))$ определен для всех $t \geq \alpha$ и является монотонно убывающим и ограниченным снизу, а значит $\exists\, c_0 = \text{const}$, $\lim\limits_{t_{n_k} \to +\infty} V(t_{n_k}+t) = c_0$.

Из оценки (9) для производной $\dot V$ имеем:

$$V(t_{n_k}+t) - V(t_{n_k}-t) \leq -\int\limits_{t_{n_k}-t}^{t_{n_k}+t} W(s, x_s(\alpha,\varphi))ds =$$

$$-\int\limits_{-t}^{t} W(s+t_{n_k}, x_{t_{n_k}}+s)ds \leq 0.$$

Переходим к пределу при $n_k \to \infty$ и получаем, что $\{y_t(0,\psi) : t \in \mathbb{R}\} \subset \{W^*(t,\varphi) = 0\}$. ■

Исследована также задача об ассимтотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения автономного ФДУ (1).

В частности доказана следующая теорема [4, 5].

Теорема 3. *Предположим, что выполняются условия:*

1) в уравнении (1) функционал в $G(t,\varphi)$ линеен по φ, а ядро $Z(t,\varphi) = \varphi(0) - G(t,\varphi)$ устойчиво;

2) существует непрерывный функционал $V = V(t,\varphi, Z(t,\varphi))$, имеющий производную в силу (1) и такой, что

$$a_1(|Z(t,\varphi)|) \leq V(t,\varphi,Z(t,\varphi)) \leq a_2(\|\varphi\|),$$

$$\frac{dV}{dt} \leq -W(t,\varphi) \qquad \forall\ (t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_H;$$

3) для каждой предельной совокупности (F^*, G^*, W^*) множество $\{W^*(t,\varphi) = 0\}$ содержит из всех решений предельного уравнения

$$\frac{d}{dt}((y(t) - G^*(t,y_t)) = F^*(t,y_t)$$

только тривиальное. Тогда решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

[1] Хусанов Д.Х. Устойчивость функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа // ДАН РУз. — 1998. — № 5. — С. 8–10.

[2] Павликов С.В., Хусанов Д.Х. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа // Рук. Деп. в ВИНИТИ. — Деп. NB-96-881. — М., 1996, 46 с.

[3] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

[4] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Диф. урав. — 1998. — **34**, № 4. — С. 435–440.

[5] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости и неустойчивости // Диф. урав. — 1998. — **34**, № 7. — С. 876–885.

Наукове видання

Праці Інституту математики НАН України

Математика та її застосування

Том 36

Групові та аналітичні методи в математичній фізиці

Редактори	*В.М. Бойко, І.А. Єгорченко, Р.О. Попович*
Техн. редактор	*Н.І. Коваленко*
Комп'ютерний оригінал-макет	*В.М. Бойко, Р.О. Попович*

Підписано до друку 15.05.2001. Формат 60×84/16. Папір офс. Офс. друк. Обл.-вид. арк. 16,2. Умов. друк. арк. 18,7. Зам. № 98. Тираж 200 пр.

Віддруковано в Інституті математики НАН України.
01601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.