Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці

Праці
19
Т
Інституту математики

Інститут математики
Національної академії наук України, Київ

Праці Інституту математики Національної академії наук України **Том 19**

Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці

Інститут математики НАН України

Київ • 1998

УДК 517.95:517.958:517.928(06)

Симетрійні та аналітичні методи в математичній фізиці: Зб. наук. пр. / НАН України. Ін-т математики; Редкол.: А.Г. Нікітін та ін. – Київ, 1998. – 280 с.

Збірник присвячено розвитку і застосуванню симетрійних та аналітичних методів в математичній фізиці. Основну увагу приділено побудові точних розв'язків конкретних лінійних та нелінійних рівнянь математичної та теоретичної фізики – рівнянь теплопровідності, Шрьодінгера, Максвелла, Бусінеска, Даламбера, Лоренца-Дірака та ін. Для цього застосовується весь спектр методів та ідей сучасного симетрійного аналізу – від класичного підходу С. Лі до використання умовних, нелокальних та дискретних симетрій досліджуваних рівнянь.

Розраховано на наукових працівників, аспірантів, які цікавляться застосуваннями теорії груп і алгебр Лі, теорії зображень алгебр Лі, асимптотичних методів до задач математичної фізики.

This volume is devoted to development and application of symmetry and analytic methods in mathematical physics. A majority of papers is focused at the problem of constructing exact solutions of specific equations of mathematical and theoretical physics, of the heat, Schrödinger, Maxwell, Boussinesq, d'Alembert, Lorentz-Dirac equations etc. For that, the whole spectrum of methods and ideas of the modern symmetry analysis is used, from the classical Lie approach, to utilization of conditional, non-local and discrete symmetries of equations under study.

The volume is intended for scientists and post-graduate students interested in applications of Lie groups and algebras, representation theory of Lie algebras, asymptotic methods to mathematical physics problems.

Затверджено до друку вченою радою Інституту математики НАН України

ISBN 966–02–0628–7

Цей збірник ми присвячуємо світлій пам'яті нашого вчителя Вільгельма Фущича

Основу цього збірника складають праці науковців і аспірантів відділів прикладних досліджень та нелінійного аналізу Інституту математики НАН України. В ідейному плані цей том наукових праць є продовження започаткованої В.І. Фущичем серії, яка включає збірники “Теоретико-груповые методы в математической физике” (1978), “Теоретико-алгебраические исследования в математической физике” (1981), “Теоретико-алгебраические методы в проблемах математической физики” (1983), “Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики” (1985), “Симметрия и решения нелинейных уравнений математической физики” (1987), “Симметрийный анализ и решения уравнений математической физики” (1988), ”Симметрия и решения уравнений математической физики” (1989), “Теоретико-алгебраический анализ уравнений математической физики” (1990), “Symmetry analysis of equations of mathematical physics” (1992).

Провідна тема більшості статей – симетрійний аналіз нелінійних рівнянь сучасної математичної фізики та побудова точних розв'язків таких рівнянь. При цьому використовуються як класичні методи запропоновані ще Софусом Лі, так і найсучасніші методи умовної, парасупер- та дискретної симетрій. Досліджуються також проблеми побудови інваріантів і нелінійних зображень деяких груп симетрії.

Ми сподіваємося, що цей збірник буде корисним для науковців, які цікавляться застосуванням теоретико-групових методів до задач математичної фізики.

А.Г. Нікітін

Зміст

Contents

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 10–13

УДК 517.9:519.46

Симетрійні властивості нелінійної системи рівнянь параболічного типу

Н.В. АНДРЕЄВА

Полтавський технічний університет

Знайдені системи рівнянь параболічного типу, які мають конформну симетрію. Побудовано анзаци і проведена редукція для однієї такої системи.

Conformally-invariant nonlinear systems of parabolic-type equations are found. The conformal algebra is used for construction of Ansätze and for reduction of a system of this kind.

В роботі [1] показано, що рівняння

$$u_0 = F(u, u_{11}) \tag{1}$$

інваріантне відносно алгебри

$$A = \langle \partial_0, \partial_1, D_1 = 2x_1\partial_1 + u\partial_u, K = x_1^2\partial_1 + x_1 u\partial_u \rangle \tag{2}$$

тоді і тільки тоді, коли воно має вигляд:

$$F(u, u_{11}) = uf\left(u^3 u_{11}\right), \tag{3}$$

де f – довільна гладка функція.

Узагальнимо рівняння (1) до системи рівнянь для двох функцій:

$$\begin{aligned} u_0 &= f^1(u, v, u_{11}, v_{11}), \\ v_0 &= f^2(u, v, u_{11}, v_{11}). \end{aligned} \tag{4}$$

Поставимо задачу: визначити, при яких функціях f^1 та f^2 система рівнянь (4) інваріантна відносно алгебри

$$\begin{aligned} A = \langle \partial_0, \partial_1, D_1 &= 2x_1\partial_1 + u\partial_u + v\partial_v, \\ K &= x_1^2\partial_1 + x_1 u\partial_u + x_1 v\partial_v \rangle. \end{aligned} \tag{5}$$

Дана задача у випадку системи двох квазілінійних рівнянь теплопровідності розв'язана в [2].

Теорема 1. *Система рівнянь (4) інваріантна відносно алгебри (5) при умові*

$$f^1 = u\varphi^1\left(\frac{u}{v}, u^3 u_{11}, v^3 v_{11}\right), \qquad f^2 = v\varphi^2\left(\frac{u}{v}, u^3 u_{11}, v^3 v_{11}\right), \tag{6}$$

де φ^1 та φ^2 – гладкі функції відповідних змінних.

Розглянемо систему, яка є частинним випадком системи (4) з правими частинами, що визначаються формулами (6), а саме:

$$u_0 = u^2 v^2 v_{11}, \qquad v_0 = u^2 v^2 u_{11}. \tag{7}$$

Теорема 2. *Максимальною алгеброю інваріантності системи (7) є алгебра*

$$\begin{aligned} \widetilde{A} = \langle \partial_0, \partial_1, D_0 &= 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1, \\ D_1 &= 2x_1\partial_1 + u\partial_u + v\partial_v, K = x_1^2\partial_1 + x_1 u\partial_u + x_1 v\partial_v \rangle. \end{aligned} \tag{8}$$

Використаємо симетрію системи (7) для знаходження її точних розв'язків (перелік нееквівалентних анзаців наведено в таблиці 1).

Побудовані анзаци дають змогу знаходити точні розв'язки системи диференціальних рівнянь (7). Наприклад, підставивши шостий анзац з таблиці 1 в систему (7), отримаємо редуковану систему рівнянь

$$\begin{aligned} m\dot{\varphi}^1 &= \left(\varphi^1\right)^2 \left(\varphi^2\right)^2 \ddot{\varphi}^2, \\ m\dot{\varphi}^2 &= \left(\varphi^1\right)^2 \left(\varphi^2\right)^2 \ddot{\varphi}^1. \end{aligned} \tag{9}$$

Якщо припустити, що в (9) $\varphi^1 = \varphi^2$, то одержимо

$$m\dot{\varphi}^1 = (\varphi^1)^4 \ddot{\varphi}^1. \tag{10}$$

Загальний розв'язок рівняння (10) має вигляд:

$$-\frac{1}{3}\omega + C_2 =$$
$$= \frac{1}{mC_1\varphi^1} - \frac{C_1}{6}\ln\frac{C_1\varphi^1 + 1}{1 - C_1\varphi^1 + C_2\varphi^1} - \frac{C_1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2C_1\varphi^1 - 1}{\sqrt{3}},$$

де C_1 та C_2 – довільні сталі.

Таблиця 1.

N	ω	u	v
1	x_0	$\varphi^1(\omega)$	$\varphi^2(\omega)$
2	x_0	$x_1\varphi^1(\omega)$	$x_1\varphi^2(\omega)$
3	x_0	$\sqrt{x_1}\varphi^1(\omega)$	$\sqrt{x_1}\varphi^2(\omega)$
4	x_0	$\sqrt{x_1^2+1}\varphi^1(\omega)$	$\sqrt{x_1^2+1}\varphi^2(\omega)$
5	x_0	$\sqrt{x_1^2-1}\varphi^1(\omega)$	$\sqrt{x_1^2-1}\varphi^2(\omega)$
6	x_1+mx_0	$\varphi^1(\omega)$	$\varphi^2(\omega)$
7	$\dfrac{1}{x_1}+mx_0$	$x_1\varphi^1(\omega)$	$x_1\varphi^2(\omega)$
8	$\ln x_1+mx_0$	$\sqrt{x_1}\varphi^1(\omega)$	$\sqrt{x_1}\varphi^2(\omega)$
9	$\mathrm{arctg}\, x_1+mx_0$	$\sqrt{x_1^2+1}\varphi^1(\omega)$	$\sqrt{x_1^2+1}\varphi^2(\omega)$
10	$\mathrm{arcth}\, x_1+mx_0$	$\sqrt{x_1^2-1}\varphi^1(\omega)$	$\sqrt{x_1^2-1}\varphi^2(\omega)$
11	$x_1+m\ln x_0$	$x_0^{-\frac{1}{4}}\varphi^1(\omega)$	$x_0^{-\frac{1}{4}}\varphi^2(\omega)$
12	$\dfrac{1}{x_1}+m\ln x_0$	$x_0^{-\frac{1}{4}}x_1\varphi^1(\omega)$	$x_0^{-\frac{1}{4}}x_1\varphi^2(\omega)$
13	$\ln x_1+m\ln x_0$	$x_0^{-\frac{1}{4}}\sqrt{x_1}\varphi^1(\omega)$	$x_0^{-\frac{1}{4}}\sqrt{x_1}\varphi^2(\omega)$
14	$\mathrm{arctg}\, x_1+m\ln x_0$	$x_0^{-\frac{1}{4}}\sqrt{x_1^2+1}\varphi^1(\omega)$	$x_0^{-\frac{1}{4}}\sqrt{x_1^2+1}\varphi^2(\omega)$
15	$\mathrm{arcth}\, x_1+m\ln x_0$	$x_0^{-\frac{1}{4}}\sqrt{x_1^2-1}\varphi^1(\omega)$	$x_0^{-\frac{1}{4}}\sqrt{x_1^2-1}\varphi^2(\omega)$

В результаті отримуємо розв'язок нелінійної системи (7)

$$-\frac{1}{3}(x_1+mx_0)+C_2=$$
$$=\frac{1}{mC_1u}-\frac{C_1}{6}\ln\frac{C_1u+1}{1-C_1u+C_2u}-\frac{C_1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2C_1u-1}{\sqrt{3}},$$
$$v=u,$$

де m, C_1 та C_2 – довільні сталі.

[1] Serova M., Andreeva N., Evolution equations invariant under the conformal algebra // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, 7-13 July 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.1. – P. 217–221.

[2] Черніга Р.М. Симетрія та точні розв'язки рівнянь тепломасопереносу в термоядерній плазмі // Доп. НАН України. – 1995. – № 4. – С. 17–21.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 339 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 14–19

UDC 517.9

On exact solutions of an equation of nonlinear acoustics

A.F. BARANNYK †, ***I.I. YURYK*** ‡

† *Higher Pedagigocal School, Słupsk, Poland*

‡ *Ukranian State University of Food Technologies, Kyiv*

Побудовані широкі класи точних розв'язків багатовимірного нелінійного рівняння акустики $u_{00} = u\Delta u$.

New wide classes of exact solutions of the multidimensional nonlinear acoustics equation $u_{00} = u\Delta u$ are constructed.

A lot of equations of nonlinear acoustics, theory of nonlinear waves have the form

$$u_{00} = c(\vec{x}, u, \underset{1}{u})\Delta u, \tag{1}$$

where $u = u(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_0, \underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{x}) \in \mathbb{R}_{1,n}$; $c(\vec{x}, u, \underset{1}{u})$ is an arbitrary differentiable function,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \qquad u_{00} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2},$$

$\underset{1}{u}$ is the set of all possible derivatives of the first order. Group properties of equation (1) were studied in [1].

If $c(\vec{x}, u, \underset{1}{u}) = u$, then equation (1) takes the form

$$u_{00} = u\Delta u. \tag{2}$$

P. Olver and Ph. Rosenau [2] constructed solutions of the one-dimensional acoustics equation (2), that canot be obtained by using S. Lie's method. In paper [3], the conditional symmetry of equation (2) was investigated. Under the conditional symmetry we mean the symmetry of some subset of solutions of the given equation. In [1, 3], 12 types

of nonequivalent conditional symmetry operators of equation (2) we found, with the help of which wide classes of exact solutions of the given equation were constructed. Note that in many cases ansatzes corresponding to conditional symmetry operators reduce the initial nonlinear equation to linear one.

In the present paper, proceeding from reflections different from the conception of the conditional symmetry, we constructed classes of exact solutions of equation (2), that are wider than ones in [1, 3]. In constructing these solutions, we essentially used solutions with separated variables [4]. It's worth noting that in many cases to construct solutions with separated variables is essentially easier than to obtain conditional symmetry operators.

1. We look for solutions of equation (2) in the form $u = a(x_0)b(x)$, where functions $a(x_0)$ and $b(x)$ differ from constants. Substituting into equation (2) we get $a''b = a^2 b\Delta b$. Here a'' means the second derivative of the function $a(x_0)$ with respect to variable x_0. It follows from the latter equality that functions a'' and a^2 are linearly dependent, i.e. $a'' = \alpha a^2$ for some $\alpha \in \mathbb{R}$. Also we obtain $\Delta b = \alpha$. If $a = \mu x_0 + \nu$, then $\alpha = 0$, and a solution of equation (2) is of the form

$$u = (\mu x_0 + \nu)b(x), \tag{3}$$

where $\Delta b = 0$.

If $\alpha \neq 0$, then setting $a_1 = \dfrac{\alpha}{6}a$, $b_1 = \dfrac{6}{\alpha}b$, we get $a_1'' = 6a_1^2$, $\Delta b_1 = 6$. Therefore, in the case $\alpha \neq 0$ solutions of equation (2) are of the form

$$u = \left[\frac{3}{k}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\right]\wp(x_0), \tag{4}$$

$$u = \left[\frac{3}{2}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\right]x_0^{-2}, \tag{5}$$

where $1 \leq k \leq n$; $\wp(x_0)$ is the Weierstrass function with the invariants $g_2 = 0$, $g_3 = C_1$, $\Delta G_\alpha = 0$.

2. The solution

$$u = (\mu x_0 + \nu)b(x) + b_1(x), \tag{6}$$

is a generalization of solution (3), where $\Delta b = 0$, $\Delta b_1 = 0$.

Solution (4) is a particular case of the more general solution

$$u = \varphi(x)\wp(x_0) + G(x_0, x),$$

where

$$\varphi(x) = \frac{3}{k}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n).$$

Substituting into equation (2) we find

$$v_{00} = \varphi(x)\wp(x_0)\Delta v + 6\wp(x_0)v + v\Delta v. \tag{7}$$

If function v depends only on x_0, then $v_{00} = 6\wp(x_0)v$ and we have the following solution of equation (2):

$$u = \left[\frac{3}{k}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\right]\wp(x_0) + f(x_0), \tag{8}$$

where $f(x_0)$ is the Lamé function [5].

If function v depends on x_0 and x, then we look for a solution of equation (7) in the form $v = a(x_0)b(x)$, where $a(x_0)$ and $b(x)$ differ from constants. Substituting into equation (7) we get

$$a''b = a(x_0)\wp(x_0)\varphi\Delta b + 6a(x_0)\wp(x_0)b + a^2(x_0)b\Delta b. \tag{9}$$

Equality (9) means functions a'', $a\wp$ and a^2 are linearly dependent. If we assume functions $a\wp$ and a^2 are linearly dependent, then $a^2 = \alpha a\wp$, $\alpha \in \mathbb{R}$ or $a = \alpha\wp$ and the solution we are looking for can be presented in the form $u = \wp(x_0)d(x)$, i.e. we are under conditions of p.1. Hence, we can suppose functions $a\wp$ and a^2 are linearly independent. Therefore,

$$a'' = \alpha a^2 + \beta a\wp. \tag{10}$$

Substituting into (9) we come to

$$(\alpha b - b\Delta b)a^2 + (\beta b - \varphi\Delta b - 6b)a\wp = 0.$$

Since a^2 and $a\wp$ are linearly independent,

$$\alpha b - b\Delta b = 0, \qquad \beta b - \varphi\Delta b - 6b = 0. \tag{11}$$

From system (11) it follows

$$\Delta b = \alpha, \qquad \alpha\varphi = (\beta - 6)b.$$

If $\alpha = 0$, then $\beta = 6$ and we obtain the following exact solution of equation (2):

$$\begin{aligned} u = {} & \left[\frac{3}{k}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\right]\wp(x_0) + \\ & + \Phi_\alpha(x_1, \ldots, x_n)f(x_0), \end{aligned} \tag{12}$$

where $1 \leq k \leq n$, $\Delta G_\alpha = 0$, $\Delta\Phi_\alpha = 0$, $f'' = 6\wp f$ is the Lamé function.

If $\alpha \neq 0$, then one can assume $\alpha = 1$. For this reason $\varphi = (\beta - 6)b$, whence $\Delta\varphi = (\beta - 6)\Delta b$, i.e. $\beta = 12$. This means $b = \frac{1}{6}\varphi$ and we are under conditions of p.1.

The solution

$$\begin{aligned} u = {} & \left[\frac{3}{k}\left(x_1^2 + \cdots + x_k^2\right) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\right]x_0^{-2} + \\ & + \Phi_\alpha(x_1, \ldots, x_n)x_0^{-3}, \end{aligned} \tag{13}$$

is a generalization of solution (5), where $1 \leq k \leq n$, $\Delta G_\alpha = 0$, $\Delta\Phi_\alpha = 0$.

3. Consider more complicated case, namely, we shall seek for a solution of equation (2) in the form

$$u = a(x_0)b(x) + c(x_0)d(x). \tag{14}$$

If functions $a(x_0)$ and $c(x_0)$ are linearly dependent, then $c(x_0) = \alpha a(x_0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ and therefore $u = a(x_0)b_1(x)$, where $b_1(x) = b(x) + \alpha d(x)$. This case was the subject of research in p.1. Hence, one can assume functions $a(x_0)$ and $c(x_0)$ are linearly independent. For the same reason functions $b(x)$ and $d(x)$ are also linearly independent. Substituting (14) into equation (2) we come to

$$a''b + c''d = a^2(b\Delta b) + ac(b\Delta d) + ac(d\Delta b) + c^2(d\Delta d). \tag{15}$$

Equality (15) means functions a^2, ac, c^2, a'', c'' are linearly dependent. It is not easy to show that from linear independence of functions a and c it follows linear independence of functions a^2, ac and c^2. In fact, if functions a^2, ac and c^2 are linearly dependent, then $\alpha a^2 + \beta ac + \gamma c^2 = 0$ for some real numbers α, β, γ not being equal simultaneously zero. Assume $\alpha = 0$, then $\beta ac + \gamma c^2 = 0$, i.e. $c(\beta a + \gamma c) = 0$. From this it follows $\beta a + \gamma c = 0$ and functions a and c are linearly dependent, that contradicts the hypothesis. Therefore, $\alpha \neq 0$, hence one can assume $\alpha = 1$. Since

$$a^2 + \beta ac + \gamma c^2 = \left(a + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)c^2 = 0,$$

we have $\gamma - \dfrac{\beta^2}{4} = -\delta^2 < 0$. In consequence of this

$$a^2 + \beta ac + \gamma c^2 = \left(a + \frac{\beta}{2}c - \delta c\right)\left(a + \frac{\beta}{2}c + \delta c\right) = 0.$$

From the latter equality we obtain $a + \left(\dfrac{\beta}{2} - \delta\right)c = 0$ or $a + \left(\dfrac{\beta}{2} + \delta\right)c = 0$. This means a and c are linearly dependent and we again come to contradiction.

Suppose function a^2, ac, c^2 and a'' be also linearly independent. Then

$$c'' = \alpha a^2 + \beta ac + \gamma c^2 + \delta a'' \tag{16}$$

for some $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Substituting (16) into (15) we find coefficient of a''. It equals $b + \delta d = 0$, i.e. b and d are linearly dependent, that contradicts assumption. The contradiction obtained proves the system of functions a^2, ac, c^2 and a'' is linearly independent.

Let

$$a'' = \alpha a^2 + \beta ac + \gamma c^2, \qquad c'' = \alpha_1 a^2 + \beta_1 ac + \gamma_1 c^2, \tag{17}$$

where $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \in \mathbb{R}$. Substituting (17) into (15) and taking into account the linear independence of functions a^2, ac and c^2 we obtain

$$\begin{aligned} &\alpha b + \alpha_1 d = b\Delta b, \\ &\gamma b + \gamma_1 d = d\Delta d, \\ &\beta b + \beta_1 d = b\Delta d + d\Delta b. \end{aligned} \tag{18}$$

Multiplying both parts of the first equation of system (18) by d^2, of the second equation - by b^2 and of the third one - by bd, we get

$$\beta b^2 d + \beta_1 bd^2 = \gamma b^3 + \gamma_1 b^2 d + \alpha bd^2 + \alpha_1 d^3. \tag{19}$$

From the linear independence of functions b and d it follows the linear independence of functions $b^2 d$, bd^2, b^3 and d^3. Therefore, from equality (19) we obtain $\beta = \gamma_1$, $\beta_1 = \alpha$, $\gamma = 0$, $\alpha_1 = 0$. Hence,

$$a'' = \alpha a^2 + \beta ac, \qquad c'' = \alpha ac + \beta c^2. \tag{20}$$

In system (20) $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Denote $c_1 = \beta c$, $d_1 = \dfrac{1}{\beta} d$, then

$$a'' = \alpha a^2 + ac_1, \qquad c_1'' = \alpha ac_1 + c_1^2, \qquad \Delta d_1 = 1.$$

This means one can take $\beta = 1$ in system (20). For this value of β system (20) has the following solution [5]:

$$a'' = a^2(x_0)\left(\int \frac{dx_0}{a^2(x_0)} + \alpha\right), \qquad c(x_0) = a(x_0)\int \frac{dx_0}{a^2(x_0)}.$$

As a result, we obtain the following solution of equation (2):

$$u = a(x_0)b(x) + d(x)a(x_0)\int \frac{dx_0}{a^2(x_0)}, \tag{21}$$

where

$$\begin{aligned} b(x) &= \frac{\alpha}{2k}\left(x_1^k + \cdots + x_k^2\right) + G_\alpha(x_1, \ldots, x_n), \\ d(x) &= \frac{1}{2l}\left(x_1^k + \cdots + x_l^2\right) + \Phi_\alpha(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

$1 \le k \le n$, $1 \le l \le n$, $\Delta G_\alpha = 0$, $\Delta \Phi_\alpha = 0$ and function $a(x_0)$ is a solution of the equation

$$a'' = a^2(x_0)\left(\int \frac{dx_0}{a^2(x_0)} + \alpha\right).$$

[1] Fushchych W.I., Shtelen V.M., Serov N.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 400 p.

[2] Olver P., Rosenau Ph. The constraction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **114**, № 3. – P. 107–112.

[3] Fushchych W.I., Serov N.I. Conditional invariance and exact solutions of a nonlinear acoustics equation // Dopovidi Akad. Nauk USSR. Ser. A. – 1988. – № 9. – P. 17–21.

[4] Miller W. Symmetry and separation of variables. – Mass.: Addison and Wesley, Reading, 1977.

[5] Kamke E. Reference book on ordinary differential equations. – M.: Nauka, 1976. – 576 p. (in Russian).

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 20–31

УДК 517.9:519.46

Симетрійна редукція рівняння Гуерра-Пустерла за підалгебрами центрального розширення конформної алгебри

Л.Л. БАРАННИК

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: lyuda@apmat.freenet.kiev.ua

Виконано симетрійну редукцію системи рівнянь Гуерра-Пустерла до систем звичайних диференціальних рівнянь.

Symmetry reduction of the Guerra-Pusterla system of equations to systems of ordinary differential equations is performed.

В роботах [1–8] було запропоновано нелінійні узагальнення класичного рівняння Шрьодінгера вигляду

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = \left(\gamma_1 \frac{\Delta|u|}{|u|} + \gamma_2 \frac{|u|_a |u|_a}{|u|} + \gamma_0 \ln\frac{u}{u^*}\right) u, \tag{1}$$

де $|u| = \sqrt{uu^*}$; $|u|_a = \dfrac{\partial|u|}{\partial x_a}$, $a = 1, \ldots, n$; γ_0, γ_1, γ_2 – деякі константи; за індексами, що повторюються, проводиться підсумовування. Рівняння типу (1) використовуються в квантовій механіці для опису ефектів розсіяння та дифузії.

Одним з рівнянь, що належить до класу (1), є рівняння Гуерра-Пустерла

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \triangle u = \gamma \frac{\triangle|u|}{|u|} u, \tag{2}$$

яке досліджувалося в [2, 5, 6]. Нелінійний член у правій частині рівняння (2) відповідає за ефекти розсіяння у вакуумі. В цих роботах коефіцієнт γ ($\gamma \neq 0$) припускався дуже малим, оскільки розглядалися процеси з практично незначним розсіянням енергії системи.

В цій роботі ми дослідимо рівняння (3) при $\gamma = 1$ та $n = 3$. Тоді рівняння Гуерра-Пустерла набуває вигляду

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \triangle u = \frac{\triangle|u|}{|u|} u, \tag{3}$$

де $u = u(t, x_1, x_2, x_3)$. Після заміни $u(t, \vec{x}) = \exp\bigl[r(t, \vec{x}) + i\theta(t, \vec{x})\bigr]$, де $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, одержуємо систему дійсних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\theta}{\partial t} + \nabla\theta\nabla\theta = 0, \\ &\frac{\partial r}{\partial t} + \triangle\theta + 2\nabla r\nabla\theta = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

яку будемо називати *системою Гуерра-Пустерла.*

В [9] встановлено, що максимальною алгеброю інваріантності системи Гуерра-Пустерла є пряма сума алгебр Лі $\langle N\rangle$ і $AC(1,4)$, де

$$N = \frac{\partial}{\partial r},$$

а $AC(1,4)$ є конформною алгеброю з базисом

$$\begin{aligned}
&P_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta}\right), \;\; P_a = \frac{\partial}{\partial x_a}, \;\; P_4 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(2\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial\theta}\right), \\
&J_{ab} = x_b\frac{\partial}{\partial x_a} - x_a\frac{\partial}{\partial x_b}, \quad J_{04} = t\frac{\partial}{\partial t} - \theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \\
&J_{0a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{x_a\frac{\partial}{\partial t} + (t+2\theta)\frac{\partial}{\partial x_a} + \frac{1}{2}x_a\frac{\partial}{\partial\theta}\right\}, \\
&J_{a4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-x_a\frac{\partial}{\partial t} + (t-2\theta)\frac{\partial}{\partial x_a} + \frac{1}{2}x_a\frac{\partial}{\partial\theta}\right\}, \\
&D = -\left(t\frac{\partial}{\partial t} + x_a\frac{\partial}{\partial x_a} + \theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial r}\right), \\
&K_0 = \sqrt{2}\left\{\left(t^2 + \frac{\vec{x}^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t} + (t+2\theta)x_a\frac{\partial}{\partial x_a} + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{4}\vec{x}^2 + 2\theta^2\right)\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{3}{2}(t+2\theta)\frac{\partial}{\partial r}\right\}, \\
&K_4 = -\sqrt{2}\left\{\left(t^2 - \frac{\vec{x}^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t} + (t-2\theta)x_a\frac{\partial}{\partial x_a} + \right. \\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{4}\vec{x}^2 - 2\theta^2\right)\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{3}{2}(t-2\theta)\frac{\partial}{\partial r}\right\}, \\
&K_a = 2x_a D - \bigl(4t\theta - \vec{x}^2\bigr)\frac{\partial}{\partial x_a},
\end{aligned} \tag{5}$$

де $\vec{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; $a, b = 1, 2, 3$, при цьому по індексах, що повторюються, проводиться підсумовування.

Зауважимо, що симетрійні властивості рівняння (3) досліджувались також в [10].

Метою наших досліджень є побудова інваріантних розв'язків системи Гуерра-Пустерла (4) за допомогою симетрійної редукції цієї системи до систем звичайних диференціальних рівнянь по підалгебрах центрального розширення конформної алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$.

Для редукції системи (4) до систем звичайних диференціальних рівнянь необхідно класифікувати підалгебри рангу 3 алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$ з точністю до $C(1,4)$-спряженості. Оскільки редукція потребує не самі підалгебри, а основні інваріанти цих підалгебр, то ми будемо оперувати I-максимальними підалгебрами [12].

Підалгебра F алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$ називається I-максимальною, якщо вона не міститься в жодній іншій підалгебрі алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$ з тими ж самими основними інваріантами. Підалгебра F є I-максимальною тоді і тільки тоді, коли вона містить всі підалгебри алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$, що мають такі ж основні інваріанти, як і підалгебра F.

Система (4) має дискретні симетрії, які породжують дискретні автоморфізми $\varphi_{c_1}, \varphi_{c_2}, \varphi_{c_3} = \varphi_{c_2}\varphi_{c_1}$ алгебри $AC(1,4)$, що задаються таким чином:

$$
\begin{aligned}
\varphi_{c_1}:\ & P_\alpha \to -P_\alpha, \quad K_\alpha \to -K_\alpha, \quad J_{\alpha\beta} \to J_{\alpha\beta} \\
& (\alpha, \beta = 0,1,2,3,4), \quad D \to D; \\
\varphi_{c_2}:\ & P_1 \to -P_1, \quad K_1 \to -K_1, \quad J_{01} \to -J_{01}, \\
& J_{1a} \to -J_{1a} \quad (a = 2,3,4), \quad P_\alpha \to P_\alpha, \quad K_\alpha \to K_\alpha, \\
& J_{\alpha\beta} \to J_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 0,2,3,4), \quad D \to D; \\
\varphi_{c_3}:\ & P_1 \to P_1, \quad K_1 \to K_1, \quad J_{01} \to -J_{01}, \\
& J_{1a} \to -J_{1a}\ (a = 2,3,4), \quad P_\alpha \to -P_\alpha, \quad K_\alpha \to -K_\alpha, \\
& J_{\alpha\beta} \to J_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 0,2,3,4), \quad D \to D.
\end{aligned}
$$

На підставі сказаного при класифікації підалгебр алгебри $AC(1,4)$ можна використовувати не тільки внутрішні автоморфізми цієї алгебри, а й дискретні автоморфізми, тобто підалгебри алгебри $AC(1,4)$ розглядати з точністю до $C(1,4)$-спряженості [11].

Теорема 1. *Нехай*

$$
X = 2\sqrt{2}(P_0 + \beta P_4) + \sum_{j=1}^{3} \alpha_j P_j + \gamma N,
$$
$$
\lambda = 8(1 - \beta^2) - \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2 \geq 0.
$$

Система (4) має X-інваріантний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\beta \neq -1$, $\gamma = 0$ і $\lambda = 0$, при цьому кожен X-інваріантний розв'язок системи (4) можна подати у вигляді

$$
\begin{aligned}
\theta &= \frac{\beta - 1}{2(\beta + 1)} + \frac{1}{4(\beta + 1)} \sum_{j=1}^{3} \alpha_j x_j + C, \\
r &= g\left(\frac{\alpha_1}{2(\beta+1)} t - x_1, \frac{\alpha_2}{2(\beta+1)} t - x_2, \frac{\alpha_3}{2(\beta+1)} t - x_3\right),
\end{aligned} \tag{6}
$$

де $g(y_1, y_2, y_3)$ – деяка диференційовна функція і, навпаки, для будь-якої диференційовної функції $g(y_1, y_2, y_3)$ пара функцій θ, r, заданих формулами (6), є розв'язком системи (4), інваріантним відносно X.

На підставі теореми 1 можна обмежитись I-максимальними підалгебрами, проекції яких на $AC(1,4)$ не містять з точністю до $C(1,4)$-спряженості операторів P_0 і $P_0 \pm P_4$.

Щоб одержати перелік I-максимальних підалгебр алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$, розглядуваних з точністю до $C(1,4)$-спряженості, беремо перелік підалгебр алгебри $AC(1,4)$ [11], потім використовуємо конструкцію Лі–Гурса [11] для опису підалгебр алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$ і одночасно відбираємо з цих підалгебр I-максимальні підалгебри рангу три. В процесі відбору спираємося на таку властивість I-максимальних підалгебр: якщо K є I-максимальною підалгеброю алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$, то разом з кожною підалгеброю $F \subset K$ підалгебра K містить будь-яку підалгебру $F' \subset AC(1,4) \oplus \langle N \rangle$, що має такі ж основні інваріанти, як і підалгебра F. Зокрема, якщо $P_a, P_b \in K$ або $G_a, G_b \in K$, то $J_{ab} \in K$. При відборі I-максимальних підалгебр враховуємо також ранги підалгебр. Зазначимо, що ранги підалгебр $F_1 = \langle J_{12} + J_{34}, J_{13} - J_{24}, J_{14} + J_{23} \rangle$, $F_2 = F_1 \oplus \langle J_{12} - J_{34} \rangle$, $F_3 = AO(4)$, $F_4 = \langle J_{01}, J_{02}, J_{12}, D \rangle$ дорівнюють 3. Ранг підалгебри $\langle J_{01}, J_{02}, J_{12} \rangle$ дорівнює 2.

Теорема 2. *I-максимальні підалгебри, що не містять N, рангу 3 алгебри $AC(1,4)\oplus\langle N\rangle$, проекції яких на $AC(1,4)$ не містять P_0, $P_0\pm P_4$ і не мають в просторі $\mathbb{R}_{2,5}$ інваріантних ізотропних підпросторів, вичерпуються з точністю до $C(1,4)$-спряженості такими підалгебрами:*

$$\langle P_2+K_2+\sqrt{3}(P_1+K_1)+2J_{03},$$
$$-P_3-K_3+2J_{02}-2\sqrt{3}J_{01}, P_0+K_0-4J_{23}\rangle;$$
$$\langle P_0+K_0+\alpha(K_4-P_4)+\beta N\rangle\oplus\langle J_{12},J_{13},J_{23}\rangle\ (\alpha>0,\ \alpha\neq 1);$$
$$\langle P_0+K_0+\alpha N, J_{12}+\beta N, J_{34}+\gamma N\rangle;$$
$$\langle P_0+K_0+\alpha N, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle;$$
$$\langle 2J_{12}+J_{34}, 2J_{13}+2J_{24}-\sqrt{3}(K_4-P_4),$$
$$2J_{23}-2J_{14}+\sqrt{3}(K_3-P_3)\rangle;$$
$$\langle P_1+K_1+2J_{03}, P_2+K_2+2J_{04}, J_{12}+J_{34}\rangle.$$

Теорема 3. *I-максимальні підалгебри, що не містять N, рангу 3 алгебри $AC(1,4)\oplus\langle N\rangle$, проекції яких на $AC(1,4)$ не містять P_0, $P_0\pm P_4$ і є спряженими з підалгебрами алгебри $AP(1,4)$, вичерпуються з точністю до $C(1,4)$-спряженості такими підалгебрами:*

i) Підалгебри з розщеплюваними проекціями на $AP(1,4)$:

$$\langle J_{12}+\alpha N, P_3+N, P_4\rangle\ (\alpha\geq 0);\ \langle J_{12}, P_1, P_2, P_3+N\rangle;$$
$$\langle J_{04}+\alpha N, P_1+N, P_2\rangle;\ \langle G_1+\alpha N, P_2+N, P_3\rangle\ (\alpha=0,1);$$
$$\langle J_{12}+\alpha N, J_{34}, P_3, P_4\rangle;\ \langle J_{04}+\alpha N, J_{12}+\beta N, P_3+\gamma N\rangle;$$
$$\langle J_{04}+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle;\ \langle G_1+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle\ (\alpha=0,1);$$
$$\langle G_1, J_{04}+\alpha N, P_3+\beta N\rangle\ (\alpha\text{ – довільне},\ \beta=0,1);$$
$$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_4+\alpha N\rangle\ (\alpha=0,1);\ \langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, P_1, P_2, P_3\rangle;$$
$$\langle J_{01}, J_{04}, J_{14}, P_3+\alpha N\rangle\ (\alpha=0,1);\ \langle G_3, J_{04}+\alpha N, J_{12}+\beta N\rangle;$$
$$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha N\rangle\ (\alpha\geq 0);\ \langle G_1, G_2, J_{04}+\alpha N, J_{12}\rangle;$$
$$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha N\rangle;\ \langle J_{12}, J_{13}, J_{14}, J_{23}, J_{24}, J_{34}\rangle;$$
$$\langle J_{01}, J_{02}, J_{03}, J_{12}, J_{13}, J_{23}\rangle.$$

ii) Підалгебри з нерозщеплюваними проекціями на $AP(1,4)$:

$$\langle J_{12}+P_0+\alpha N, P_3+\beta N, P_4\rangle\ (\beta>0);$$
$$\langle J_{04}+P_1+\alpha N, P_2+\beta N, P_3\rangle\ (\beta>0);$$
$$\langle G_1+2T+\alpha N, P_2+N, P_3\rangle;\ \langle J_{12}+M+\alpha N, J_{34}, P_3, P_4\rangle;$$
$$\langle J_{04}+P_1+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle;\ \langle G_1+2T+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle;$$
$$\langle G_1+\alpha N, G_2+P_2+\beta N, P_3+\gamma N\rangle;$$
$$\langle G_1, J_{04}+P_2+\alpha N, P_3+\beta N\rangle\ (\alpha\text{ – довільне},\ \beta\geq 0);$$
$$\langle G_1, G_2, J_{04}+P_3+\alpha N, J_{12}\rangle.$$

Теорема 4. *I-максимальні підалгебри рангу 3 алгебри $AC(1,4)\oplus\langle N\rangle$, проекції яких на $AC(1,4)$ не містять P_0, $P_0\pm P_4$ і є спряженими з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1,4)$, але не є спряженими з підалгебрами алгебри $AP(1,4)$, вичерпуються з точністю до $C(1,4)$-спряженості такими підалгебрами:*

i) Підалгебри з розщеплюваними проекціями на $A\tilde{P}(1,4)$:

$$\langle J_{04}+\alpha N, D+\beta N, P_3\rangle;\ \langle J_{12}+\alpha J_{04}+\beta N, D+\gamma N, P_3\rangle\ (\alpha>0);$$
$$\langle J_{12}+\alpha N, J_{34}+\beta N, D+\gamma N\rangle;$$
$$\langle J_{12}+\alpha D+\beta N, J_{34}, P_3, P_4\rangle\ (\alpha>0,\ \beta\text{ – довільне});$$
$$\langle J_{04}+\alpha N, J_{12}+\beta N, D+\gamma N\rangle;$$
$$\langle J_{04}+\alpha_1 D+\beta_1 N, J_{12}+\alpha_2 D+\beta_2 N, P_3\rangle,\ \text{де } \alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0;$$
$$\langle J_{04}+\alpha D+\beta N, J_{23}, P_2, P_3\rangle\ (\alpha\neq 0);$$
$$\langle G_1, J_{04}+\alpha D+\beta N, P_3\rangle\ (\alpha\neq 0);\ \langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, D+\alpha N\rangle;$$
$$\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D+\beta N\rangle\ (\alpha>0);$$
$$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04}+\alpha D+\beta N\rangle\ (\alpha>0).$$

ii) Підалгебри з нерозщеплюваними проекціями на $A\tilde{P}(1,4)$:

$$\langle J_{04}+D+2T+\alpha N, J_{12}+2\beta T+\gamma N, P_3\rangle;$$
$$\langle J_{04}-D+M+\alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle;$$
$$\langle J_{04}+D+\alpha N, J_{12}+2T+\beta N, P_3\rangle;$$
$$\langle J_{04}+2D+\alpha N, G_1+2T, P_3\rangle;\ \langle J_{04}+D+\alpha N, G_1+P_2, P_3\rangle;$$

$\langle J_{04} - D + M + \alpha N, G_1, P_3\rangle$;

$\langle J_{12} + \alpha N, J_{04} + 2D + \beta N, G_3 + 2T\rangle$ $(\alpha \geq 0)$;

$\langle J_{04} + D + \alpha N, G_1 + P_3, G_2 + \beta P_2 + \gamma P_3\rangle$

$(\beta > 0,\ \gamma \geq 0,\ \alpha$– *довільне*);

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, J_{04} - D + M + \alpha N\rangle$.

Теорема 5. *I-максимальні підалгебри рангу 3 алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N\rangle$, проекції яких на $AC(1,4)$ не містять P_0, $P_0 \pm P_4$ і є спряженими з підалгебрами алгебри $AG_4(3)$, але не є спряженими з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1,4)$, вичерпуються з точністю до $C(1,4)$-спряженості такими підалгебрами:*

$\langle S + T + 2J_{12} + \alpha M + \beta N, G_1 + P_2 + \sqrt{2}P_3, G_2 - P_1 - \sqrt{2}G_3\rangle$

$(\alpha = 0, \pm 1)$; $\langle J_{12} + \alpha N, S + T + \beta N, Z + \gamma N\rangle$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, S + T + \alpha M + \beta N\rangle$ $(\alpha = 0, \pm 1;\ \beta$ – *довільне*);

$\langle S + T + 2J_{12} + \alpha Z + \beta N, G_1 + P_2 + \sqrt{2}P_3, G_2 - P_1 - \sqrt{2}G_3\rangle$

$(\alpha \neq 0)$; $\langle S + T + J_{12} + \alpha N, Z + \beta N, G_1 + P_2\rangle$;

$\langle J_{12}, J_{13}, J_{23}, S + T + \alpha Z + \beta N\rangle$ $(\alpha \neq 0)$.

Наведемо декілька прикладів редукції системи Гуерра–Пустерла по тих підалгебрах алгебри $AC(1,4) \oplus \langle N\rangle$, проекції яких на конформну алгебру $AC(1,4)$ є спряженими з підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,4)$.

Редукція по підалгебрах алгебри $AP(1,4) \oplus \langle N\rangle$. Для кожної підалгебри подаємо відповідний їй анзац, редуковану систему, її частинний або загальний розв'язок та відповідний інваріантний розв'язок системи (4).

1. $\langle J_{12} + \alpha N, J_{34}, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha \geq 0)$: $\omega = x_1^2 + x_2^2$,

$$\theta = -\frac{1}{2}t + f(\omega), \quad r = -\alpha \arctan\frac{x_2}{x_1} + g(\omega),$$

$$4\omega \dot{f}^2 - \frac{1}{2} = 0, \quad \omega \ddot{f} + \dot{f} + 2\omega \dot{f}\dot{g} = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = \varepsilon\sqrt{\frac{\omega}{2}} + C_1, \quad g = -\frac{1}{4}\ln\omega + C_2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Відповідний розв'язок системи (4):

$$\theta = -\frac{1}{2}t + \varepsilon\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} + C_1,$$

$$r = -\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{4}\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) + C_2.$$

2. $\langle J_{04} + \alpha N, J_{23}, P_2, P_3\rangle$: $\omega = x_1$,

$$\theta = \frac{1}{t}f(\omega), \quad r = \alpha \ln|t| + g(\omega),$$

$$\dot{f}^2 - f = 0, \quad \ddot{f} + 2\dot{f}\dot{g} + \alpha = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = \frac{(\omega + C_1)^2}{4}, \quad g = -\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\ln|\omega + C_1| + C_2.$$

Розв'язок системи (4):

$$\theta = \frac{(x_1 + C_1)^2}{4t}, \quad r = \alpha\ln|t| - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\ln|x_1 + C_1| + C_2.$$

3. $\langle J_{12} + 2T + \alpha N, J_{34}, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha \geq 0)$: $\omega = x_1^2 + x_2^2$,

$$\theta = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x_2}{x_1} + f(\omega), \quad r = -\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1} + g(\omega),$$

$$\frac{1 - \omega}{2\omega} + 4\omega\dot{f}^2 = 0, \quad 4\omega\ddot{f} + 4\dot{f} + \frac{\sqrt{2}\alpha}{\omega} + 8\omega\dot{f}\dot{g} = 0.$$

Загальний розв'язок редукованої системи:

$$f = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega - 1} - \arctan\sqrt{\omega - 1}\,\right) + C_1,$$

$$g = -\frac{1}{4}\ln|\omega - 1| - \alpha\varepsilon\arctan\sqrt{\omega - 1} + C_2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Відповідний розв'язок системи (4):

$$\theta = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x_2}{x_1} +$$

$$+\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}-\arctan\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}\right)+C_1,$$

$$r=-\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}-\frac{1}{4}\ln\left|x_1^2+x_2^2-1\right|-$$

$$-\alpha\varepsilon\arctan\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}+C_2,\quad \varepsilon=\pm1.$$

Редукція по підалгебрах алгебри $A\tilde{P}(1,4)\oplus\langle N\rangle$, які не є спряженими з підалгебрами алгебри $AP(1,4)\oplus\langle N\rangle$

4. $\langle J_{12}+\alpha D+\beta N, J_{34}, P_3, P_4\rangle$ $(\alpha>0)$:

$$\omega=\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)-2\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1},$$

$$\theta=\exp\left(\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}\right)f(\omega)-\frac{1}{2}t,\quad r=g(\omega)-\beta\arctan\frac{x_2}{x_1},$$

$$4(1+\alpha^2)\dot f^2-4\alpha^2f\dot f+\alpha^2f^2-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\omega}=0,$$
$$4(1+\alpha^2)\ddot f+8(1+\alpha^2)\dot f\dot g-4\alpha^2f\dot g+4\alpha(\beta-\alpha)\dot f+\alpha(\alpha-2\beta)f=0.$$

Редукована система має розв'язок

$$f=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\omega/2},\qquad g=-\frac{1}{4}\omega+C.$$

Відповідний йому інваріантний розв'язок системи (4) має вигляд

$$\theta=\pm\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}-\frac{1}{2}t,$$

$$r=-\frac{1}{4}\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)+\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\arctan\frac{x_2}{x_1}+C_1.$$

5. $\langle J_{03}, J_{04}, J_{34}, J_{12}+\alpha D+\beta N\rangle$ $(\alpha>0)$:

$$\omega=2\alpha\arctan\frac{x_2}{x_1}-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right),$$

$$\theta=\frac{x_1^2+x_2^2}{4t}f(\omega)+\frac{x_3^2}{4t},\quad r=g(\omega)-\beta\arctan\frac{x_2}{x_1},$$

$$(\alpha^2+1)\dot f^2-2f\dot f=0,$$

$$(\alpha^2+1)\ddot f+2(\alpha^2+1)\dot f\dot g-2f\dot g-(\alpha\beta+1)\dot f+f+\frac{1}{2}=0.$$

З першого рівняння одержуємо, що $\dot f=0$ або $(\alpha^2+1)\dot f-2f=0$. В першому випадку

$$f=C_1,\quad g=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4C_1}\right)\omega+C_2\quad (C_1\neq0).$$

Цьому розв'язку редукованої системи відповідає такий розв'язок системи (4):

$$\theta=\frac{C_1\left(x_1^2+x_2^2\right)+x_3^2}{4t},$$

$$r=\left(\alpha+\frac{\alpha}{2C_1}-\beta\right)\arctan\frac{x_2}{x_1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4C_1}\right)\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)+C_2.$$

В другому випадку

$$f=C_1\exp\frac{2\omega}{\alpha^2+1},$$

$$g=\frac{2\alpha\beta-\alpha^2-3}{2(\alpha^2+1)}\omega+\frac{\alpha^2+1}{8C_1}\exp\left(-\frac{2\omega}{\alpha^2+1}\right)+C_2\quad (C_1\neq0).$$

Відповідний розв'язок системи (4) має вигляд:

$$\theta=\frac{1}{4t}C_1\left(x_1^2+x_2^2\right)\exp\left(\frac{2\omega}{\alpha^2+1}\right)+\frac{x_3^2}{4t},$$

$$r=\frac{2\alpha\beta-\alpha^2-3}{2(\alpha^2+1)}\omega+\frac{\alpha^2+1}{8C_1}\exp\left(-\frac{2\omega}{\alpha^2+1}\right)-\beta\arctan\frac{x_2}{x_1}+C_2,$$

де $\omega=2\alpha\arctan\dfrac{x_2}{x_1}-\ln\left(x_1^2+x_2^2\right)$.

6. $\langle J_{04}-D+M+\alpha N, G_1, P_3\rangle$: $\omega=\dfrac{x_2^2}{t}$,

$$\theta=f(\omega)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|t|+\frac{x_1^2}{4t},\quad r=g(\omega)+\left(\alpha-\frac{3}{2}\right)\ln|x_2|,$$

$$4\omega\dot f^2-\omega\dot f+\frac{1}{2\sqrt2}=0,\quad 4\omega\ddot f+8\omega\dot f\dot g+(4\alpha-4)\dot f-\omega\dot g+\frac12=0.$$

Редукована система має такий загальний розв'язок:

$$f=\frac{\omega}{8}\left(1+\varepsilon\sqrt{1-\frac{4\sqrt2}{\omega}}\right)+\frac{\varepsilon\sqrt2}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\frac{4\sqrt2}{\omega}}-1}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt2}{\omega}}+1}\right|+C_1,$$

$$g=-\frac{\varepsilon\alpha}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1-\frac{4\sqrt2}{\omega}}-1}{\sqrt{1-\frac{4\sqrt2}{\omega}}+1}\right|+\frac{3-2\alpha}{4}\ln|\omega|-\frac14\ln|\omega-4\sqrt2|+C_2,$$

де $\varepsilon=\pm1$, а C_1, C_2 — довільні сталі.

Відповідний інваріантний розв'язок системи (4) має вигляд:

$$\theta=\frac{1}{2\sqrt2}\ln|t|+\frac{x_1^2}{4t}+\frac{x_2^2}{8t}\left(1+\varepsilon\sqrt{1-\frac{4\sqrt2 t}{x_2^2}}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon\sqrt2}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{x_2^2-4\sqrt2t}-|x_2|}{\sqrt{x_2^2-4\sqrt2t}+|x_2|}\right|+C_1,$$

$$r=\frac{\alpha-1}{2}\ln|t|-\frac14\ln\left|x_2^2-4\sqrt2t\right|+$$

$$+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x_2^2-4\sqrt2t}-|x_2|}{\sqrt{x_2^2-4\sqrt2t}+|x_2|}\right|+C_2.$$

[1] De Broglie L. Non-linear wave mechanics. – Elsevier Publishing Company, 1960.

[2] Guerra F., Pusterla M. A nonlinear Schrödinger equation and its relativistic generalization from basic principles // Lett. Nuovo Cimento. – 1982. – **34**. – P. 351–356.

[3] Guéret Ph., Vigier J.-P. Nonlinear Klein–Gordon equation carrying a nondispersive soliton-like singularity // Lett. Nuovo Cimento. – 1982. – **35**. – P. 256–259.

[4] Guéret Ph., Vigier J.-P. Relativistic wave equation with quantum potential nonlinearity // Lett. Nuovo Cimento. – 1983. – **38**. – P. 125–128.

[5] Smolin L. Quantum fluctuations and inertia // Phys. Lett. A. – 1986. – **113**, № 8. – P. 408–412.

[6] Vigier J.-P. Particular solutions of a non-linear Schrödinger equation carrying particle-like singularities represent possible models of de Broglie's double solution theory // Phys. Lett. A. – 1989. – **135**, № 2. – P. 99–105.

[7] Fushchych W., Cherniha R. Galilei-invariant nonlinear equations of the Schrödinger type and their exact solutions I. II // Ukranian J. Math. – 1989. – **41**. – P. 1349–1357; 1687–1694.

[8] Doebner H.-D., Goldin G.A. On a general nonlinear Schrödinger equation admitting diffusion currents // Phys. Lett. A. – 1992. – **162**. – P. 397–401.

[9] Basarab–Horwath P., Barannyk L.L., Fushchych W.I. Some exact solutions of a conformally invariant nonlinear Schrödinger equation. – Linköping, 1997. – 12 p. – (Prepr. / Linköping University; LiTH-MAT-R-97-11).

[10] Fushchych W., Cherniha R., Chopyk V. On unique symmetry of two nonlinear generalizations of the Schrödinger equation // J. Nonlin. Math. Phys. – 1996. – **3**, № 3–4. – P. 296–301.

[11] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.

[12] Баранник А.Ф., Баранник Л.Ф., Фущич В.И. Редукция многомерного уравнения Даламбера к двумерным уравнениям // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 651–662.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 32–42

УДК 517.9

Симетрійні властивості деяких рівнянь гідродинамічного типу

В.М. БОЙКО

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: slava@apmat.freenet.kiev.ua

Досліджено симетрійні властивості узагальнення рівняння Вахненка, деяких узагальнень рівняння Бюргерса та однієї нелінійної системи гідродинамічного типу.

Symmetry properties of a generalization of the Vakhnenko equation, of some generalizations of the Burgers equation and of a nonlinear system of hydrodynamic type are investigated.

1. Узагальнення рівняння Вахненка. В роботі [1] Вахненко для опису розповсюдження коротковильових збурень у релаксуючому середовищі запропонував наступне нелінійне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)u+u=0. \tag{1}$$

В цій же роботі побудовані деякі солітонні розв'язки рівняння (1). В [2] досліджена стійкість цих розв'язків і запропонована назва рівняння (1), як рівняння Вахненка. В даній роботі ми досліджуємо симетрійні властивості наступного узагальнення рівняння (1):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)u=F(u), \tag{2}$$

де $F(u)$ – довільна гладка функція.

Очевидно, що при довільній $F(u)$ рівняння (2) інваріантне відносно двовимірної алгебри трансляцій з базисними операторами $P_0=\partial_t$, $P_1=\partial_x$. Проведемо симетрійну класифікацію рівняння (2) в розумінні Лі, тобто опишемо всі функції $F(u)$, при яких допускається розширення алгебри інваріантності.

Теорема 1. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (2) в залежності від $F(u)$ є алгебри*

1. $\langle P_0,P_1\rangle$, *якщо* $F(u)$ *– довільна.*
2. $\langle P_0,P_1,Y\rangle$, *якщо* $F(u)=a(u+b)^p$, $a,b,p=\mathrm{const}$, $a,p\neq 0$,
$$Y=t\partial_t+\left(\frac{p-2}{p}x-\frac{2b}{p}t\right)\partial_x-\frac{2}{p}(u+b)\partial_u.$$
3. $\langle P_0,P_1,Z\rangle$, *якщо* $F(u)=a\exp(u)$, $a=\mathrm{const}$, $a\neq 0$,
$$Z=t\partial_t+(x-2t)\partial_x-2\partial_u.$$
4. $\langle P_0,D,X\rangle$, *якщо* $F(u)=1$,
$$D=x\partial_x+u\partial_u,\quad X=g(t)\partial_x+g'(t)\partial_u,$$
$g(t)$ *– довільна гладка функція.*
5. $\langle P_0,D,D_1,A,X\rangle$, *якщо* $F(u)=0$
$$D_1=t\partial_t-u\partial_u,\ A=t^2\partial_t+tx\partial_x+(x-tu)\partial_u.$$

Доведення всіх результатів в даній роботі проводиться за допомогою алгоритму Лі [3, 4], через громіздкість ми упускаємо всі доведення.

Зауваження. При $F(u)=\mathrm{const}$ рівняння (2) один раз інтегрується і зводиться до квазілінійного рівняння в частинних похідних (випадки 4, 5 теореми 1).

Слід зазначити, що кожен з операторів Y та Z можна представити як лінійну комбінацію операторів дилатації та Галілея, тому групові перетворення, що відповідають операторам Y і Z, можна інтерпретувати як деяку композицію дилатаційних та галілеївських перетворень (перехід від однієї інерціальної системи до іншої відбувається одночасно з масштабними перетвореннями).

Скінченні групові перетворення, що відповідають операторам Y та Z, мають вигляд:

$$Y:\quad t\to\tilde t=t\exp(\theta),\qquad x\to\tilde x=x\exp\left(\frac{p-2}{p}\theta\right)-bt\exp(\theta),$$
$$u\to\tilde u=(u+b)\exp\left(-\frac{2}{p}\theta\right)-b,$$

$$Z: \quad t \to \tilde{t} = t\exp(\theta), \qquad x \to \tilde{x} = (x - 2\theta t)\exp(\theta),$$
$$u \to \tilde{u} = u - 2\theta.$$

Наведемо два приклади редукції для рівняння (2) (для випадків 2 та 3 теореми 1). Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u = a(u+b)^p. \tag{3}$$

Анзац, побудований по оператору

$$Y = t\partial_t + \left(\frac{p-2}{p}x - \frac{2b}{p}t\right)\partial_x - \frac{2}{p}(u+b)\partial_u,$$

має вигляд

$$u = t^{-2/p}\varphi(\omega) - b, \qquad \omega = (x+bt)t^{(2-p)/p}. \tag{4}$$

Він редукує рівняння (3) до звичайного диференціального рівняння вигляду

$$\varphi\varphi'' + \frac{2-p}{p}\omega\varphi'' + (\varphi')^2 - \varphi' = a\varphi^p. \tag{5}$$

При $p = 1$, $a = -1$, $b = 0$ розв'язки рівняння (5) визначатимуть розв'язки рівняння Вахненка (1).

Для рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)u = a\exp(u) \tag{6}$$

анзац, побудований по оператору

$$Z = t\partial_t + (x-2t)\partial_x - 2\partial_u,$$

має вигляд

$$u = \varphi(\omega) - \ln t^2, \qquad \omega = \frac{x}{t} + \ln t^2. \tag{7}$$

Він редукує рівняння (6) до звичайного диференціального рівняння вигляду

$$\varphi\varphi'' + (2-\omega)\varphi'' + (\varphi')^2 - \varphi' = a\exp(\varphi).$$

2. Узагальнення рівнянь Бюргерса та Кортевега-де Фріза. Нижче ми проведемо симетрійну класифікацію наступних узагальнень рівнянь Бюргерса та Кортевега-де Фріза:

$$u_0 + uu_1 = \partial_1\left(F(u_1)\right), \tag{8}$$

$$u_0 + uu_1 = \partial_1\left(F(u_{11})\right), \tag{9}$$

$$u_0 + uu_1 = \partial_1\left(F(u)u_1\right), \tag{10}$$

де $u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, F – довільна гладка функція свого аргументу.

Розгляд рівнянь (8)–(10) є продовженням досліджень симетрійних властивостей нелінійних узагальнень рівнянь дифузійного типу [5, 6].

Рівняння (8) можна переписати у вигляді

$$u_0 + uu_1 = f(u_1)u_{11}, \tag{11}$$

де $f(u_1)$ – довільна гладка функція. Випадок $f(u_1) = \mathrm{const}$ упускаємо з розгляду, оскільки тоді рівняння (11) співпадає з класичним рівнянням Бюргерса.

Теорема 2. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (11) в залежності від $f(u_1)$ є алгебри*

1. $\langle P_0, P_1, G\rangle$, *якщо* $f(u_1)$ *– довільна.*
2. $\langle P_0, P_1, G, D\rangle$, *якщо* $f(u_1) = C(u_1)^k$, *де*

$$D = 2t\partial_t + (1-k)x\partial_x - (k+1)u\partial_u,$$

$C, k = \mathrm{const}$, $C \neq 0$, $k \neq 0, -2$.

3. *Якщо* $f(u_1) = C(u_1)^{-2}$, $C = \mathrm{const}$, $C \neq 0$, *тоді алгебра інваріантності нескінченновимірна з базисними операторами*

$$X = \xi^0\partial_t + \xi^1\partial_x + \eta\partial_u,$$

де

$$\xi^0 = K_1t^2 + K_2t + K_3,$$
$$\xi^1 = \left(-\frac{K_1}{4C}u^2 - \frac{K_4}{2C}u - \frac{K_1}{2}t + K_5\right)x + q(u,t),$$
$$\eta = \tfrac{1}{2}(2K_1t + K_2)u + K_4t + K_6, \qquad K_1, \ldots, K_6 = \mathrm{const},$$

$q(u,t)$ – довільний розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності

$$q_0 - Cq_{uu} = \frac{K_1}{4C}u^3 + \frac{K_4}{2C}u^2 + \left(\frac{7}{2}K_1 t + \frac{3}{2}K_2 - K_5\right)u + K_4 t + K_6.$$

Розглянемо детальніше випадок 3 теореми 2, тобто рівняння

$$u_0 + uu_1 = C(u_1)^{-2}u_{11}. \tag{12}$$

Наявність нескінченновимірної алгебри вказує на можливість лінеаризації цього рівняння. В рівнянні (12) виконаємо перетворення годографа

$$u = \omega, \qquad t = \tau, \qquad x = v(\tau,\omega). \tag{13}$$

При заміні змінних (13) похідні перетворюються наступним чином

$$u_1 = \frac{1}{v_\omega}, \quad u_0 = -\frac{v_\tau}{v_\omega}, \quad u_{11} = -\frac{v_{\omega\omega}}{(v_\omega)^3}.$$

Виконавши необхідні перетворення в рівняні (12), одержимо рівняння теплопровідності

$$v_\tau - Cv_{\omega\omega} = \omega. \tag{14}$$

Якщо в (14) виконати заміну

$$v = z - \frac{1}{6C}\omega^3, \tag{15}$$

то приходимо до лінійного однорідного рівняння теплопровідності

$$z_\tau - Cz_{\omega\omega} = 0. \tag{16}$$

Таким чином, заміни змінних (13), (15) лінеаризують рівняння (12) і задача побудови його розв'язків зводиться до розв'язання лінійного рівняння теплопровідності (16).

Рівняння (9) перепишемо у вигляді

$$u_0 + uu_1 = f(u_{11})u_{111}, \tag{17}$$

де $f(u_{11})$ – довільна гладка функція. Випадок $f(u_{11}) = \mathrm{const}$ не розглядаємо, оскільки (17) у цьому випадку є класичним рівнянням Кортевега-де Фріза.

Теорема 3. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (17) в залежності від $f(u_{11})$ є алгебри*

1. *$\langle P_0, P_1, G\rangle$, якщо $f(u_{11})$ – довільна.*
2. *$\langle P_0, P_1, G, D\rangle$, якщо $f(u_{11}) = C(u_{11})^k$, де*

$$D = (k+3)t\partial_t + (1-k)x\partial_x - (2k+2)u\partial_u,$$

$C, k = \mathrm{const}$; $C, k \neq 0$.

Рівняння (10) перепишемо у вигляді

$$u_0 + uu_1 = f(u)u_{11} + f_u(u)(u_1)^2, \tag{18}$$

де $f(u)$ – довільна гладка функція. Випадок $f(u) = \mathrm{const}$ не розглядаємо, оскільки у цьому випадку одержимо рівняння Бюргерса.

Теорема 4. *Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (18) в залежності від $f(u)$ є алгебри*

1. *$\langle P_0, P_1\rangle$, якщо $f(u)$ – довільна.*
2. *$\langle P_0, P_1, Y\rangle$, якщо $f(u) = a\exp(bu)$, де*

$$Y = t\partial_t + \left(x + \frac{1}{b}t\right)\partial_x + \frac{1}{b}\partial_u,$$

$a, b = \mathrm{const}$, $a, b \neq 0$.

Знову ж таки зазначимо, що оператор Y можна представити як лінійну комбінацію операторів дилатації та Галілея

$$Y = t\partial_t + x\partial_x + \frac{1}{b}(t\partial_x + \partial_u) = D + \frac{1}{b}G.$$

Перетворення, що відповідають Y, є комбінацією дилатаційних і галілеївських перетворень, хоча рівняння не є інваріантним відносно розширеної алгебри Галілея.

3. Багатовимірна система рівнянь гідродинамічного типу. В роботі [7] запропоновано наступне узагальнення рівняння Нав'є-Стокса

$$\lambda_1 L\vec{v} + \lambda_2 L(L\vec{v}) = F\left(\vec{v}^{\,2}\right)\vec{v} + \lambda_4\nabla p, \tag{19}$$

де

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^l \frac{\partial}{\partial x_l} + \lambda_3 \triangle, l = 1, 2, 3,$$

$\vec{v} = \left(v^1, v^2, v^3\right)$, $v^l = v^l(t, \vec{x})$, $l = 1, 2, 3$, $p = p(t, \vec{x})$, ∇ – градієнт, $\triangle$ – оператор Лапласа, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – довільні дійсні параметри, $F\left(\vec{v}^{\,2}\right)$ – довільна гладка функція, $\vec{v}^{\,2} = \left(v^1\right)^2 + \left(v^2\right)^2 + \left(v^3\right)^2$. Тут і надалі за індексами, що повторюються, йде підсумовування.

В даній роботі розглядається рівняння (19) у випадку $\lambda_3, \lambda_4 = 0$. Тоді рівняння (19) матиме вигляд

$$\lambda_1 L\vec{v} + \lambda_2 L(L\vec{v}\,) = F\left(\vec{v}^{\,2}\right)\vec{v}, \tag{20}$$

де

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial x_0} + v^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

У випадку, коли $\lambda_2 = 0$, $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = 0$, рівняння (20) є системою рівнянь Ейлера.

Якщо $\lambda_2 \neq 0$, то систему (20) можна переписати у вигляді

$$L\left(L\vec{v}\,\right) + \lambda L\vec{v} = F\left(\vec{v}^{\,2}\right)\vec{v}, \qquad \lambda = \mathrm{const}, \tag{21}$$

або в розгорнутому записі

$$\begin{gathered} v^l_{00} + 2v^k v^l_{0k} + v^k_0 v^l_k + v^m v^k_m v^l_k + v^m v^k v^l_{mk} + \\ + \lambda\left(v^l_0 + v^k v^l_k\right) = F\left(v^k v^k\right) v^l, \end{gathered}$$

де k, m, l змінюються від 1 до 3; верхні індекси відповідають компонентам вектора швидкості $\vec{v}$, а нижні індекси визначають диференціювання по відповідній незалежній змінній. Прослідковуючи аналогію з системою рівнянь Ейлера, систему (21) будемо називати узагальненням системи Ейлера.

В [8] вивчено симетрійні властивості одновимірного аналогу системи (21)

$$L(Lu) + \lambda L u = F(u), \qquad \lambda = \mathrm{const}, \tag{22}$$

де $u = u(t, x)$, $L \equiv \partial_t + u\partial_x$.

Для рівняння (22) нами одержано нові нелінійні розширення алгебри Галілея. В [8, 9] для рівняння (22) при $F(u) = \mathrm{const}$ побудовано класи точних розв'язків, що містять довільні функції.

Далі ми проведемо дослідження симетрійних властивостей системи (21). Симетрійна класифікація (21) проводиться за допомогою алгоритму Лі в класі диференціальних операторів першого порядку. Очевидно, що для дослідження симетрії рівняння (21) принципово різними будуть випадки $\lambda = 0$ та $\lambda \neq 0$. При $\lambda \neq 0$, виконавши заміну змінних, завжди можна досягти, що $\lambda \equiv 1$. Тому ми розглянемо окремо два випадки $\lambda = 0$ та $\lambda = 1$. Наводимо лише результати симетрійної класифікації, упускаючи досить громіздкі доведення.

I. Розглядаємо (21) у випадку $\lambda = 0$, тобто систему рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) = F\left(\vec{v}^{\,2}\right)\vec{v}. \tag{23}$$

Симетрійна класифікація системи (23) дає 4 принципово різних випадки.

Випадок 1.1. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right)$ – довільна неперервно-диференційовна функція. Максимальною алгеброю інваріантності системи (23) є 7-вимірна алгебра Евкліда $AE(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}\rangle$, де

$$\begin{aligned} &P_\mu = \partial_{x_\mu}, \qquad J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + v^a\partial_{v^b} - v^b\partial_{v^a}, \\ &\mu = \overline{0,3}; \quad a, b = \overline{1,3}; \; a < b. \end{aligned} \tag{24}$$

Випадок 1.2. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = C\left(\vec{v}^{\,2}\right)^n$, $C, n = \mathrm{const}$, $C \neq 0$, $n \neq 0$. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) = C\left(\vec{v}^{\,2}\right)^n\vec{v} \tag{25}$$

є 8-вимірна алгебра $AE_1(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}, D\rangle$ (розширена алгебра Евкліда), де

$$D = x_0\partial_{x_0} + \frac{n-1}{n}x_b\partial_{x_b} - \frac{1}{n}v^b\partial_{v^b}.$$

Випадок 1.3. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = C$, $C = \mathrm{const}$, $C \neq 0$. У цьому випадку внаслідок заміни змінних можна покласти $C = 1$ або $C = -1$, тому ми розглянемо ці випадки окремо.

а) Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) = \vec{v} \tag{26}$$

є 21-вимірна алгебра $\langle P_\mu, M_{ab}, R_a, Z_a, B_1, B_2\rangle$, де

$$M_{ab} = x_a\partial_{x_b} + v^a\partial_{v^b},$$
$$R_a = \operatorname{sh} x_0\partial_{x_a} + \operatorname{ch} x_0\partial_{v^a},\quad Z_a = \operatorname{ch} x_0\partial_{x_a} + \operatorname{sh} x_0\partial_{v^a},$$
$$B_1 = \operatorname{sh} x_0\partial_{x_0} + x_a\operatorname{ch} x_0\partial_{x_a} + x_a\operatorname{sh} x_0\partial_{v^a},$$
$$B_2 = \operatorname{ch} x_0\partial_{x_0} + x_a\operatorname{sh} x_0\partial_{x_a} + x_a\operatorname{ch} x_0\partial_{v^a}.$$

b) Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) = -\vec{v} \tag{27}$$

є 21-вимірна алгебра $\langle P_\mu, M_{ab}, \widetilde{R}_a, \widetilde{Z}_a, \widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2\rangle$, де

$$\widetilde{R}_a = \sin x_0\partial_{x_a} + \cos x_0\partial_{v^a},\quad \widetilde{Z}_a = -\cos x_0\partial_{x_a} + \sin x_0\partial_{v^a},$$
$$\widetilde{B}_1 = \sin x_0\partial_{x_0} + x_a\cos x_0\partial_{x_a} - x_a\sin x_0\partial_{v^a},$$
$$\widetilde{B}_2 = \cos x_0\partial_{x_0} - x_a\sin x_0\partial_{x_a} - x_a\cos x_0\partial_{v^a}.$$

Випадок 1.4. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = 0$. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) = 0 \tag{28}$$

є 21-вимірна алгебра $\langle P_\mu, M_{ab}, D_0, G_a, K_a, A\rangle$, де

$$D_0 = x_0\partial_{x_0} - v^a\partial_{v^a},\quad G_a = x_0\partial_{x_a} + \partial_{v^a},$$
$$K_a = (x_0)^2\partial_{x_a} + 2x_0\partial_{v^a},\quad A = (x_0)^2\partial_{x_0} + 2x_0x_a\partial_{x_a} + 2x_a\partial_{v^a}.$$

II. Розглядаємо систему (21) у випадку $\lambda \neq 0$ (як уже зазначалося, можна вважати $\lambda = 1$), тобто систему рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) + L\vec{v} = F\left(\vec{v}^{\,2}\right)\vec{v}. \tag{29}$$

Симетрійна класифікація системи (29) приводить до 4 принципово різних випадків.

Випадок 2.1. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right)$ – довільна неперервно-диференційовна функція. Максимальною алгеброю інваріантності системи (29) є 7–вимірна алгебра Евкліда $AE(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}\rangle$.

Випадок 1.2. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = C\vec{v}^{\,2} - \dfrac{\sqrt{3}+1}{6}$, $C = \text{const}$, $C \neq 0$. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) + L\vec{v} = \left(C\vec{v}^{\,2} - \frac{\sqrt{3}+1}{6}\right)\vec{v} \tag{30}$$

є 8-вимірна алгебра $\langle P_\mu, J_{ab}, Q\rangle$, де

$$Q = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x_0\right)\left(\partial_{x_0} - \frac{1}{\sqrt{3}}v^a\partial_{v^a}\right).$$

Випадок 2.3. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = C$, $C = \text{const}$, $C \neq 0$. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) + L\vec{v} = C\vec{v} \tag{31}$$

є 19-вимірна алгебра $\langle P_\mu, M_{ab}, Y_{1a}, Y_{2a}\rangle$, де

$$Y_{1a} = \exp\left(\alpha x_0\right)\left(\partial_{x_a} + \alpha\partial_{v^a}\right),\quad Y_{2a} = \exp\left(\beta x_0\right)\left(\partial_{x_a} + \beta\partial_{v^a}\right),$$

$\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2\sqrt{3}}$, $\beta = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2\sqrt{3}}$.

Випадок 2.4. $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = 0$. Максимальною алгеброю інваріантності системи рівнянь

$$L\left(L\vec{v}\,\right) + L\vec{v} = 0 \tag{32}$$

є 19-вимірна алгебра $\langle P_\mu, M_{ab}, G_a, T_a\rangle$, де

$$T_a = \exp\left(-x_0\right)\left(\partial_{x_a} - \partial_{v^a}\right).$$

Таким чином, проведена повна симетрійна класифікація системи рівнянь (21), одержано нові розширення алгебр Евкліда і Галілея (див. випадки 1.3, 1.4, 2.3, 2.4). Зауважимо, що при $F\left(\vec{v}^{\,2}\right) = \text{const}$ система (21) допускає пониження порядку (див. детальніше [9]).

Автор висловлює подяку ДФФД України (проект № 1.4/356) за часткову фінансову підтримку цієї роботи.

[1] Vakhnenko V.A. Solitons in a nonlinear model medium // J. Phys. A: Math. Gen. – 1992. – **25**, № 15. – P. 4181–4187.

[2] Parkes E.J. The stability of solutions of Vakhnenko's equation // J. Phys A: Math. Gen. – 1993. – **26**. – P. 6469–6475.

[3] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов М.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.

[4] Овсянников Л.В. Груповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[5] Фущич В., Бойко В. Галілей-інваріантні рівняння типу Бюргерса та Кортевега–де-Фріза високого порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1589–1601.

[6] Boyko V. On new generalizations of the Burgers and Korteweg-de Vries equations // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics. Memorial Prof. W. Fushchych Conference", Kyiv, July 7–13, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.1. – P. 122–129.

[7] Fushchych W., Symmetry analysis // Symmetry Analysis of Equations of Mathematical Physics. – Kiev: Institute of Mathematics, 1992. – P. 5–6.

[8] Boyko V. Symmetry classification of the one-dimensional second order equation of a hydrodynamic type // J. Nonlin. Math. Phys. – 1995. – **2**, № 3–4. – P. 418–424.

[9] Фущич В., Бойко В., Пониження порядку та загальні розв'язки деяких класів рівнянь математичної фізики // Доп. НАН України, 1996. – № 9. – С. 43–48.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 43–47

УДК 517.945:519.46

Лоренц-інваріантні рівняння неперервності для електромагнітного поля

***В.М. БОЙКО* †, *І.М. ЦИФРА* ‡**

† *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: slava@apmat.freenet.kiev.ua

‡ *Інститут геофізики ім. Суботіна НАН України, Київ*
E-mail: tsyfra@apmat.freenet.kiev.ua

Доведена необхідна і достатня умова лоренц-інваріантності рівняння неперервності для електромагнітного поля, в якому густина енергії та вектор Пойтінга визначаються як функції векторних полів $\vec{E}$, $\vec{H}$.

The necessary and sufficient condition for the Lorentz invariance of the continuity equation for the electromagnetic field, where energy density and Poyting vectors depend on the vector fields $\vec{E}$, $\vec{H}$ has been proved.

Відомо [1, 2], що зображення алгебри Лоренца з базисними елементами

$$\begin{aligned} &J_{ab} = x_a\partial_{x_b} - x_b\partial_{x_a} + E^a\partial_{E^b} - E^b\partial_{E^a} + H^a\partial_{H^b} - H^b\partial_{H^a}, \\ &J_{0a} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + \varepsilon_{abc}\left(E^b\partial_{H^c} - H^b\partial_{E^c}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

де ε_{abc} – повністю антисиметричний тензор третього порядку, $x_0 = t$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, реалізується на множині розв'язків рівнянь Максвелла

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mathrm{rot}\vec{H}, \qquad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\vec{E}, \\ &\mathrm{div}\vec{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\vec{H} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут і надалі, індекси, позначені латинськими літерами, змінюються від 1 до 3, грецькими – від 0 до 3. За індексами, що повторюються йде підсумовування.

В роботі [3] нами отримані нові нелінійні зображення алгебри Лоренца для векторних полів $\vec{E}$, $\vec{H}$.

Об'єктом дослідження даної роботи є рівняння неперервності

$$\rho_0 + \mathrm{div}\rho\vec{v} = 0, \tag{3}$$

де $\rho_0 = \dfrac{\partial\rho}{\partial x_0}$; $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$; ρ та ρv^k є функціями від $\vec{E}$, $\vec{H}$.

Згідно Пойтингу, густина енергії та вектор Пойтінга для електромагнітного поля визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right), \\ \rho v^a &= \varepsilon_{abc}E^b H^c. \end{aligned} \tag{4}$$

В роботі [4] показано, що рівняння неперервності (3), (4), що виражає закон збереження енергії для електромагнітного поля, не є інваріантним відносно алгебри Лоренца (1) в класичному розумінні інваріантності диференціального рівняння. Воно є лише умовно інваріантним відносно алгебри Лоренца (1), причому як додаткова умова виступає система рівнянь Максвелла (2).

Постає питання, як можна визначити густину енергії та вектор Пойтінга, щоб рівняння (3) було лоренц-інваріантним в класичному розумінні Лі.

Нехай в рівнянні (3) ρ, $\rho\vec{v}$ – деякі невідомі функції від $\vec{E}$ та $\vec{H}$, тобто вважаємо

$$\rho = F^0\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \qquad \rho v^a = F^a\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \quad a = \overline{1,3}, \tag{5}$$

де F^0, F^a – гладкі функції, які одночасно не є тотожними нулями.

Шукаємо оператори лоренцових поворотів J_{0a} у вигляді

$$J_{0a} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + \eta^{ak}\partial_{E^k} + \beta^{ak}\partial_{H^k}, \tag{6}$$

де η^{ak}, β^{ak} – невідомі функції від $\vec{E}$, $\vec{H}$, які будемо визначати з умов інваріантності рівняння (3), (5) відносно операторів (6).

Оскільки в (3) ρ, $\rho\vec{v}$ можна розглядати як чотиривектор, то побудова операторів симетрії J_{0a} (6) для рівняння (3), (5) еквівалентна знаходженню операторів $\overline{J_{oa}}$ виду

$$\overline{J_{0a}} = x_a\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_a} + A^a\partial_{A^0} + A^0\partial_{A^a} + \eta^{ak}\partial_{E^k} + \beta^{ak}\partial_{H^k} \tag{7}$$

для системи

$$\frac{\partial A^0}{\partial x_0} + \frac{\partial A^a}{\partial x_a} = 0, \tag{8}$$

$$A^\mu = F^\mu\left(\vec{E}, \vec{H}\right), \qquad \mu = \overline{0,3}. \tag{9}$$

Очевидно, що рівняння (8) інваріантне відносно операторів $\overline{J_{0a}}$, тому дослідження інваріантності системи (8), (9) відносно операторів (7) зводиться до дослідження інваріантності алгебраїчної системи (9).

Для того, щоб система (9) була інваріантною відносно перетворень, що генеруються операторами $\overline{J_{0a}}$, необхідно і достатньо, щоб виконувались співвідношення

$$\overline{J_{0a}}\left(A^\mu - F^\mu\left(\vec{E}, \vec{H}\right)\right)\Big|_{A^\mu = F^\mu\left(\vec{E}, \vec{H}\right)} \equiv 0. \tag{10}$$

З (10) отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} F^a &= \eta^{ak}F^0_{E^k} + \beta^{ak}F^0_{H^k}, \\ \delta_{ab}F^0 &= \eta^{ak}F^b_{E^k} + \beta^{ak}F^b_{H^k}, \end{aligned} \tag{11}$$

де δ_{ab} – символ Кронекера, $F^0_{E^k} = \dfrac{\partial F^0}{\partial E^k}, \ldots$

Таким чином, щоб знайти η^{ak}, β^{ak}, нам необхідно розв'язати лінійну алгебраїчну систему рівнянь (11). Очевидно, що (11) можна розглядати як три незачеплені алгебраїчні системи розмірності 4×6 відносно η^{ak}, β^{ak}. Запишемо (11) в матричному вигляді

$$B\begin{pmatrix}\eta^a \\ \beta^a\end{pmatrix} = b^a, \qquad a = \overline{1,3}, \tag{12}$$

де $B = \left(F^\mu_{E^k},\ F^\mu_{H^k}\right)$ – матриця Якобі функцій F^μ розмірності 4×6,

$$\eta^a = \begin{pmatrix}\eta^{a1} \\ \eta^{a2} \\ \eta^{a3}\end{pmatrix}, \qquad \beta^a = \begin{pmatrix}\beta^{a1} \\ \beta^{a2} \\ \beta^{a3}\end{pmatrix},$$

$$b^1 = \begin{pmatrix}F^1 \\ F^0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}, \qquad b^2 = \begin{pmatrix}F^2 \\ 0 \\ F^0 \\ 0\end{pmatrix}, \qquad b^3 = \begin{pmatrix}F^3 \\ 0 \\ 0 \\ F^0\end{pmatrix}.$$

Отже, для знаходження операторів Лоренца (6) нам потрібно знайти розв'язки (η^a, β^a) алгебраїчних систем (12). Системи (12) сумісні лише тоді, коли виконується умова

$$r(B) = r(B|b^a), \qquad a = \overline{1,3}. \tag{13}$$

Умова (13) – умова рівності рангів однорідної та розширених систем.

Зауважимо, що ранг кожної з систем (12) не перевищує 4 (4 рівняння, 6 невідомих), причому $r(B) \leq r(B|b^a)$. Отже, якщо розв'язок існує, то він не єдиний.

Для рангів однорідної і розширеної системи можливий один з п'яти варіантів $r = 0; 1; 2; 3; 4$. При $r \leq 3$ легко переконатися, що алгебраїчні системи (12) не мають розв'язків, оскільки F^μ не є одночасно тотожними нулями.

Таким чином, для систем (12) можна знайти розв'язки лише коли

$$r(B) = 4. \tag{14}$$

Умова (14) забезпечує існування розв'язку систем (12), а отже і інваріантність системи (9) відносно операторів $\overline{J_{0a}}$. Але, оскільки виконуються комутаційні співвідношення

$$\left[\overline{J_{0a}}, \overline{J_{0b}}\right] = \overline{J_{ab}},$$

то й оператори $\overline{J_{ab}}$ є операторами симетрії системи (8), (9). А тому, й система (3), (5) є лоренц–інваріантною з операторами Лоренца (6), де (η^{ak}, β^{ak}) визначаються як деякий розв'язок системи (12).

Таким чином, доведена теорема.

Теорема. *Рівняння неперервності (3), (5) буде інваріантним відносно групи Лоренца тоді і тільки тоді, коли ранг матриці Якобі, що утворена функціями F^μ, дорівнює чотирьом.*

Тепер наведемо декілька конкретних прикладів, що ілюструють теорему для заданих F^μ (наводимо в кожному випадку лише один розв'язок з сім'ї розв'язків системи (12)). Явний вигляд операторів J_{ab} не наводимо, оскільки їх легко можна отримати з комутаційних співвідношень $[J_{0a}, J_{0b}] = J_{ab}$.

1. $F^0 = H^1$, $F^a = E^a$. Рівняння (3) матиме вигляд

$$H^1_0 + \mathrm{div}\vec{E} = 0,$$

а оператори лоренцових поворотів у цьому випадку

$$J_{0k} = x_k\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_k} + H^1\partial_{E^k} + E^k\partial_{H^1}.$$

2. $F^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right)$, $F^a = E^a$. Рівняння (3) матиме вигляд

$$E^a E^a_0 + H^a H^a_0 + \mathrm{div}\vec{E} = 0,$$

а оператори лоренцових поворотів у цьому випадку

$$J_{0k} = x_k\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_k} + F^0\partial_{E^k} + \frac{E^k(1 - F^0)}{H^k}\partial_{H^k},$$

щодо k не має підсумовування.

3. $F^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right)$, $F^k = \frac{1}{2}\left({E^k}^2 + {H^k}^2\right)$. Оператори лоренцових поворотів у цьому випадку

$$J_{0k} = x_k\partial_{x_0} + x_0\partial_{x_k} + \frac{F^k + F^0}{2E^k}\partial_{E^k} + \frac{F^k - F^0}{2H^k}\partial_{H^k},$$

щодо k не має підсумовування.

У всіх наведених прикладах зображення алгебри Лоренца не співпадають з алгеброю Лоренца (1), що допускається лінійними рівняннями Максвелла в вакуумі.

В. Бойко висловлює подяку ДФФД України (проект № 1.4/356) за часткову фінансову підтримку цієї роботи.

[1] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла. – Киев: Наук. думка, 1983. – 199 с.

[2] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.

[3] Fushchych W., Tsyfra I., Boyko V. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields // J. Nonlin. Math. Phys. – 1994. – **1**, № 2. – P. 210–221.

[4] Цифра І., Бойко В. Умовна симетрія рівняння неперервності для електромагнітного поля // Доп. НАН України. – 1995. – № 5. – С. 35–36.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 48–53

УДК 617.958:517.92

Про автохвильові інваріантні розв'язки рівнянь релаксаційної гідродинаміки

В.А. ВЛАДІМІРОВ

Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України, Київ
E-mail: vsan@ambernet.kiev.ua

Розглядається система диференціальних рівнянь, яка описує розповсюдження нелінійних хвиль в середовищі, що релаксує. В широкому діапазоні значень параметрів наведено умови існування інваріантних автохвильових розв'язків.

A system of partial differencial equations describing nonlinear waves propagation in relaxing medium is considered. Conditions that guarantee an existence of invariant autowave solutions are obtained for the wide range of the parameter values.

До опису розповсюдження довгих хвиль в гетерогенних середовищах (грунтах, скельних породах, газо-рідинних сумішах, тощо) використовується система рівнянь такого вигляду [1–3]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=\Im, \qquad \frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0,\\ &\tau\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\chi}{V^{m+1}}\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\kappa}{V^m}-p, \end{aligned} \tag{1}$$

де u – швидкість, p – тиск, $V=\rho^{-1}$ – питомий об'єм, $m=\Gamma_{V\infty}+1$, $\Gamma_{V\,\infty}$ – коефіцієнт Грюнайзена [4], $\Im$ – масова сила, τ – час релаксації, χ – об'ємна в'язкість, κ – параметр, пропорційний квадрату рівноважної швидкості звуку C_{T0}, (t,x) – пара лагранжевих координат, пов'язаних з ейлеровими координатами (t_e,x_e) співвідношеннями

$$t=t_e, \qquad x=\int\rho dx_e. \tag{2}$$

При деяких значеннях параметрів система (1) досліджувалась в роботах [2, 3, 5, 6], в яких показано існування солітонних розв'язків та

режимів з загостренням в задачі про поршень [5], а також автохвильових інваріантних розв'язків [2, 3, 6]. В цій роботі проаналізовано умови виникнення інваріантних автохвильових розв'язків в широкому діапазоні значень параметрів, який включає всі відомі нам випадки застосування системи (1).

Якщо зовнішня сила виражається залежністю $\Im=\gamma V^{(1-m)/2}$, система (1) допускає тривимірну алгебру Лі, яка породжується операторами

$$\begin{aligned} &\hat P_0=\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \hat P_1=\frac{\partial}{\partial x},\\ &Q=\frac{m+1}{2}x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{m-1}{2}u\frac{\partial}{\partial u}-V\frac{\partial}{\partial V}+mp\frac{\partial}{\partial p}. \end{aligned} \tag{3}$$

Згідно з відомою методикою [7], симетрійні властивості системи (1) застосовуються до зменшення кількості незалежних змінних. Для цього використовується оператор

$$\hat Z=\hat P_0+\xi\hat Q,$$

на інваріантах якого можна побудувати анзац

$$\begin{aligned} &u=(x_0-x)^{\mu}U(\omega), \qquad V=R(\omega)(x_0-x)^{-\sigma},\\ &p=(x_0-x)^{m\sigma}\Pi(\omega), \qquad \omega=\ln(x_0-x)-\xi t, \end{aligned} \tag{4}$$

де $\mu=(m-1)/(m+1)$, $\sigma=2/(m+1)$. Підставляючи (4) в (1), одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $U(\omega)$, $R(\omega)$ та $\Pi(\omega)$. У випадку $m=1$ ця система природним чином розщеплюється на дві підсистеми, однак, в загальному випадку її розщеплення неможливе. Після деяких стандартних алгебраїчних перетворень факторизовану систему можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &\xi\Delta\dot U=\xi(\chi G-H)-(\Delta+\chi)F,\\ &\xi\Delta\dot R=\tau\xi R^{m+1}(\xi G-F)-H,\\ &\xi\Delta\dot\Pi=\xi\left\{\xi H+\chi(F-\xi G)\right\}. \end{aligned} \tag{5}$$

де

$$\begin{aligned} &\Delta=\tau\xi^2R^{m+1}-\chi, \qquad F=\gamma R^{(1-m)/2}+m\sigma\Pi,\\ &G=\mu U, \qquad H=R(\Pi R^m-\kappa). \end{aligned}$$

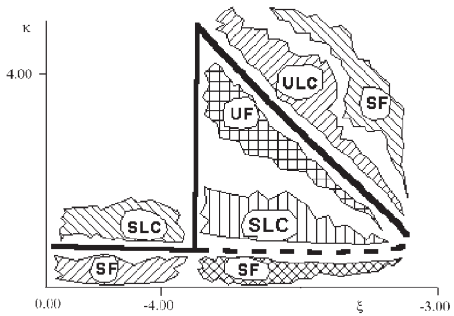

Рис.1. Біфуркаційна діаграма системи (5) в околі особливої точки $A(0,1,\kappa)$, отримана при $m = 0.9$, $\chi = 3$, $\tau = 0.2$, $R_0 = 1$. Використовуються такі позначення: (S)ULC – (стійкий)нестійкий граничний цикл; (S)UF – (стійкий)нестійкий фокус. Суцільною лінією зображена гілка $\kappa_1(\xi)$ кривої нейтральної стійкості, пунктирною – гілка $\kappa_2(\xi)$.

Система (5) має єдину особливу точку в фізичній області значень параметрів. Ця точка визначається співвідношеннями

$$U_0 = 0, \qquad \Pi = \kappa/R_0^m, \qquad R_0^{1/\sigma} = -m\sigma\kappa/\gamma \tag{6}$$

при додатковій умові $m\sigma\kappa/\gamma < 0$. Особливій точці (6) відповідає інваріантний стаціонарний розв'язок

$$u = 0, \qquad V = R_0(x_0 - x)^{-\sigma}, \qquad p = \Pi_0(x_0 - x)^{m\sigma}.$$

Розглянемо умови існування періодичних розв'язків [8] в околі ізольованої особливої точки (6). Аналіз можна спростити, використовуючи довільність вибору трьох констант, необхідних для обезрозмірювання вихідної системи (наприклад, характерної довжини l_0, характерного часу τ_0 та характерної щільності ρ_0). Згідно з цим, значення трьох параметрів можна зафіксувати довільним чином.

В подальшому будемо вважати, що $\chi = 3$, $R_0 = 1$, $\tau = 0,2$. Матрицю лінеаризації системи (5) в особливій точці $U_0 = 0$, $R_0 = 1$, $\Pi_0 = \kappa$ можна представити у вигляді:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \xi\mu\chi & -\xi m\kappa(1+\xi\mu\tau) & -\xi(1+\xi m\sigma\tau) \\ \tau\mu\xi^2 & -m\kappa(1+\xi\mu\tau) & -(1+\xi m\sigma\tau) \\ -\xi^2\mu\chi & m\kappa\xi(\xi+\mu\chi) & \xi(\xi+m\sigma\chi) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Криву нейтральної стійкості (інакше, криву біфуркації Хопфа [8]) визначаємо як розв'язок рівняння

$$(\lambda - \lambda_1)\left(\lambda^2 + \Omega^2\right) = \det\left\|\lambda\hat{I} - \hat{M}\right\|, \quad \Omega^2 > 0.$$

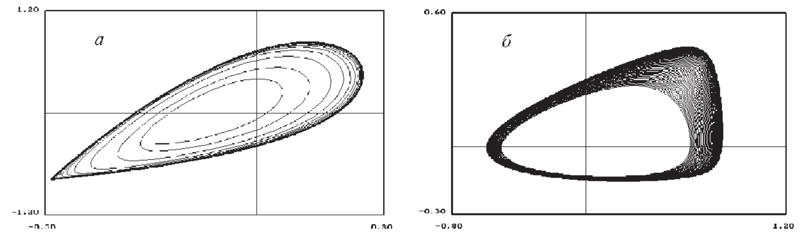

Рис.2. Фазові портрети системи (5), отримані при таких значеннях параметрів: $\chi = 3$, $\tau = 0.2$, $R_0 = 1$, $m = 0.9$: *а*) $\xi = -3.4$, $\kappa = 2.855$; *б*) $\xi = -5$, $\kappa = 0.84025$.

Звідси отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \left(B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right)/(2A), \quad i = 1,2, \\ \Omega_i^2 &= V\left(R - Q\xi^2\right) + \kappa_i\left[\beta\left(T\xi^2 - V\right) + SQ - \beta R\right], \\ \lambda_1^i &= V + R - \beta\kappa_i, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned} A &= \beta^2(V+R) - \beta\left(SQ + T\beta\xi^2\right), \\ B &= \beta(V+R)^2 - \left[RSQ + \xi^2(QTS + \beta V(Q+T))\right], \\ C &= V(V+R)(R - Q\xi^2),\ V = \mu\chi\xi,\ T = \mu\tau\xi,\ \beta = m(1+\mu\tau\xi), \\ S &= m\xi(\xi+\mu\chi),\ R = \xi(\xi + m\sigma\chi),\ Q = 1 + \xi m\sigma\tau. \end{aligned}$$

Таким чином, крива нейтральної стійкості має дві гілки: $\kappa = \kappa_1(\xi)$ та $\kappa = \kappa_2(\xi)$. Очевидно, що народження автоколивних розв'язків можливе лише тоді, коли $\Omega_i^2 > 0$, де $i = 1$ або 2 (на відповідній гілці повинна виконуватись умова $\kappa_i > 0$ [2, 3]).

Дослідження кривої нейтральної стійкості проводилися з використанням пакету програм "Mathcad 4.0". Паралельно здійснювалось чисельне моделювання системи (5) за методом Дормана-Принца [9]. Поведінку системи в околі кривої нейтральної стійкості для значень $m \in (0,1)$ можна охарактеризувати так. Періодичні розв'язки реалізуються лише при $\xi < 0$. Матриця лінеаризації $\hat{M}$ має пару чисто уявних коренів за умови, що $\xi < \xi_0$, де $-\xi_1 < \xi < \xi_0$, $\xi_1 \simeq 3.8725$, $\xi_0 < 3$ (значення ξ_0 залежить від m). Для випадку $m = 0.9$ криві нейтральної стійкості $\kappa_i(\xi)$, $i = 1,2$, зображені на рис.1. Обидві криві мають розрив першого роду в точці $\xi = -\xi_1$, яка визначає лінію непродовжуваності розв'язків $\Delta = \tau\xi^2 R_0^2 - \chi = 0$.

Опишемо поведінку системи (5) в околі кривої $\kappa_1(\xi)$. В області $-\xi_1 < \xi < \xi_0$ під кривою $\kappa_1(\xi)$ особлива точка $A(0,1,\kappa)$ є нестійким

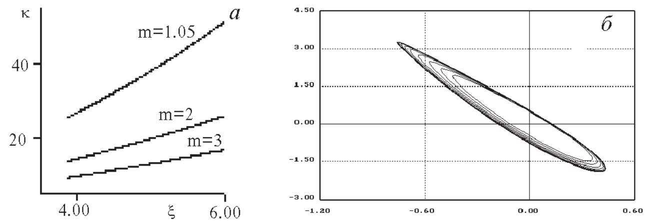

Рис.3. Криві нейтральної стійкості системи (5) в області $\xi > 0$ (a) та фазовий портрет ($б$), одержаний при таких значеннях параметрів: $\chi = 3$, $\tau = 0.2$, $R_0 = 1$, $m = 2.0$, $\xi = 5.0$, $\kappa = 19.23$.

фокусом. Над кривою нейтральної стійкості існує нестійкий граничний цикл, радіус якого зростає в міру того, як точка (ξ, κ) віддаляється від неї. Цикл цей руйнується внаслідок гомоклінічної біфуркації (періодична траєкторія системи (5), зображена на рис.2a, отримана при значеннях параметрів, близьких до критичних). Після гомоклінічної біфуркації особлива точка стає стійким фокусом.

В області $\xi < -\xi_1$ нижче кривої $\kappa_1(\xi)$ особлива точка $A(0,1,\kappa)$ є стійким фокусом; над кривою $\kappa_1(\xi)$ м'якго народжується стійкий граничний цикл (рис.2$б$), радіус якого зростає в міру віддалення точки (ξ, κ) від кривої. При достатньому збільшенні цієї відстані періодична траєкторія "влипає"в сусідню притягуючу точку, яка знаходиться праворуч від неї.

В околі гілки $\kappa_2(\xi)$, яка зображена на рис.1 пунктирною лінією поведінка системи така: в області $-\xi_1 < \xi < \xi_0$ нижче кривої нейтральної стійкості особлива точка є стійким фокусом; в деякій області над кривою існує стійкий граничний цикл. Ліворуч від лінії $\xi = -\xi_1$ уявні корені матриці $\hat{M}$ замінюються в дійсні і продовження кривої $\kappa_2(\xi)$ визначає в цій області геометричне місце точок, в яких $A(0,1,\kappa)$ є сідлом з парою однакових власних значень.

Поведінка кривих нейтральної стійкості при $m > 1$ в цілому також характеризується уніфікованістю, оскільки для графіків відповідних функцій в діапазоні $1,05 \le m \le 10$ не виявлено суттєвих розбіжностей принаймні в тих областях, де функції $\kappa_i(\xi)$ та $\Omega_i^2(\xi)$ одночасно додатні (рис.3a). Характерною особливістю системи для цих значень параметра m є відсутність стійких автохвильових розв'язків при $\xi < 0$. Такі розв'язки з'являються на гілці $\kappa_2(\xi)$ в області, що лежить праворуч від точки $\xi \approx 3.8725$, в якій функція $\Omega_2^2(\xi)$ переходить в верхню півплощину. Стійкий граничний цикл (рис.3$б$) народжується під кривою нейтральної стійкості $\kappa_2(\xi)$. Область існування автоколивних розв'язків тягнеться далеко вправо вздовж кривої $\kappa_2(\xi)$ – їх наявність відмічено при значеннях $\xi > 10$. Над кривою нейтральної стійкості особлива точка є стійким фокусом.

Локальний аналіз системи (5) показує, що теорема про центральний многовид [8] в околі точки $A(0,1,\kappa)$ виконується лише в області $|\xi| < |\xi_1|$. Згідно з цим, фазові портрети для $-\xi_1 < \xi < \xi_0$ були одержані в режимі дзеркального відображення руху по траєкторіях. Звернемо, однак, увагу на те, що розв'язки системи (5) визначають одночасно інваріантні розв'язки системи (1). При переході від інваріантної змінної ω до змінної x (за умови, що $t = \mathrm{const}$ таке відображення взаємно однозначне) напрямки руху по траєкторіях динамічної системи змінюються на протилежні (відповідної зміни зазнає і характер особливих точок). Таким чином, при виборі інваріантних періодичних розв'язків за початкові умови в розв'язку задачі Коші для системи (1), їх еволюція в автомодельному режимі буде найбільш імовірною у випадку, якщо $0 < m < 1$, $-\xi_1 < \xi < \xi_0$, а $\kappa > \kappa_1(\xi)$.

[1] Ляхов Г.М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

[2] Владимиров В.А., Даниленко В.А., Королевич В.Ю. Нелинейные модели многокомпонентных релаксирующих сред. Динамика волновых структур и качественный анализ. Ч. I, II. – Киев, 1990. – 80 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т геофизики им. С.И. Субботина).

[3] Danylenko V.A., Sorokina V.V., Vladimirov V.A. On the governing equation in relaxing media model and self-similar quasiperiodic solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 1993. – **26**, № 9.

[4] Slater J.C. Introduction to chemical physics. – New York, 1939.

[5] Даниленко В. А., Хрищенюк В.О. До утворення хвильових структур при імпульсних швидкоплинних процесах в геофізичних середовищах // Доп. НАН України. – 1994. – № 11. – С 112–115.

[6] Christenyuk V.O., Danylenko V.A., Vladimirov V.A. On the modelling of selforganization phenomena in relaxing medium // Dopovidi Nat. Acad. Sci. of Ukraine. – 1994. – № 8. – P. 39.

[7] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.

[8] Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1986.

[9] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: нежесткие задачи. – М: Мир, 1990 – 512 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 54–63

УДК 617.958:517.93

Про асимптотичні властивості інваріантних розв'язків рівнянь релаксаційної гідродинаміки

В.А. ВЛАДІМІРОВ

Інститут геофізики ім. С.І. Суббботіна НАН України, Київ
E-mail: vsan@ambernet.kiev.ua

Наведено результати якісних та чисельних досліджень системи рівнянь гідродинамічного типу, що описує багатокомпонентні релаксуючі середовища. Встановлено існування у цієї системи сім'ї інваріантних періодичних розв'язків, які руйнуються внаслідок гомоклінічної біфуркації. За певних умов збурення, що моделюють імпульсні навантаження, виходять на автомодельні режими солітоноподібного типу.

The results of qualitative investigations and numerical simulations of a hydrodynamic-type system describing multicomponent relaxing media are presented. This system is shown to possess a family of self-similar periodic solutions, which are destroyed after the homoclinic bifurcation takes place. Numerical experiments show that under certain conditions initial perturbations simulating the pulse loading action tend to the self-similar soliton-like regimes.

Використання теоретико-групових методів в нелінійній математичній фізиці виправдовується в значній мірі тим, що деякі інваріантні розв'язки еволюційних рівнянь служать проміжними асимптотиками [1] для широкого класу інших розв'язків в області, де ці розв'язки вже не залежать від деталей початково-крайових умов, але система ще далека від свого граничного стану (звідси назва "проміжні асимптотики"[1]). В роботі розглядаються відповідні властивості однієї сім'ї інваріантних роз'язків системи

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=\Im, \qquad \frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad \tau\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\chi}{V^2}\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\kappa}{V}-p, \tag{1}$$

яка є частковим випадком гідродинамічної моделі середовища, що релаксує, виведеної в [2] на основі феноменологічної термодинаміки нерівноважних процесів (див. також [3]).

У випадку, якщо $\Im=\gamma=\mathrm{const}$, система (1) допускає однопараметричну групу, яка породжується оператором

$$\hat{Z}=\frac{\partial}{\partial t}+\xi\left(x\frac{\partial}{\partial x}+p\frac{\partial}{\partial p}-V\frac{\partial}{\partial V}\right). \tag{2}$$

З функціонально незалежних інваріантів оператора (2) можна побудувати анзац такого вигляду:

$$\begin{aligned} &u=U(\omega), \qquad V=R(\omega)/(x_0-x),\\ &p=(x_0-x)\Pi(\omega), \qquad \omega=\ln(x_0-x)-\xi t. \end{aligned} \tag{3}$$

Підставляючи (3) в друге рівняння системи (1), одержимо квадратуру

$$U=\xi R+\mathrm{const} \tag{4}$$

та двовимірну динамічну систему

$$\begin{aligned} &\xi\Delta R'=-R\left[\sigma R\Pi-\kappa+\tau\xi R\gamma\right],\\ &\xi\Delta\Pi'=\xi\left\{\xi R(R\Pi-\kappa)+\chi(\Pi+\gamma)\right\}, \end{aligned} \tag{5}$$

де $(\cdot)'=d(\cdot)/d\omega$, $\Delta=\tau(\xi R)^2-\chi$, $\sigma=1+\tau\xi$. У випадку загального положення система (5) має чотири особливі точки: особливу точку $R_0=0$, $\Pi_0=-\gamma$, яка лежить на осі ординат; особливу точку $R_1=-\kappa/\gamma$, $\Pi_1=-\gamma$ яка лежить всередині фізичної області значень параметрів за умови, що $\gamma<0$; пару особливих точок

$$R_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{\chi}{\tau\xi^2}}, \qquad \Pi_{2,3}=\frac{\kappa-\tau\xi\gamma R_{2,3}}{\sigma R_{2,3}},$$

які лежать на лінії непродовжуваності розв'язків $\Delta=\tau(\xi R)^2-\chi=0$.

Особливій точці $\mathbf{A_1}(-\kappa/\gamma,-\gamma)$ можна поставити у відповідність стаціонарний інваріантний розв'язок вигляду (3):

$$u_0=0, \qquad p_0=+\gamma(x-x_0), \qquad V_0=\kappa/[\gamma(x-x_0)]. \tag{6}$$

Для цього розв'язку можна здійснити в явному вигляді перехід від лагранжевої координати $x=x_л$, яка використовується в роботі, до ейлерової координати x_e:

$$x_e=(\kappa/\gamma)\ln(x_0-x_л), \qquad x_0-x_л>0. \tag{7}$$

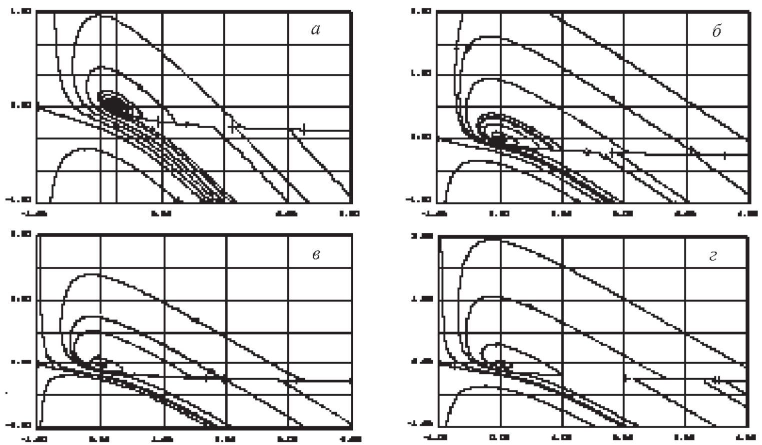

Рис.1. Зміни режимів системи (5) в околі особливої точки $A(-\kappa/\gamma, -\gamma)$: *а* – нестійкий фокус; *б* – нестійкий граничний цикл; *в* – петля гомокліники; *г* – стійкий фокус.

Якщо ввести параметр $D = \kappa/(\xi\gamma)$, то стаціонарний розв'язок (6) можна записати так:

$$u_0 = 0, \qquad p_0 = \kappa, \qquad \rho_0 = (\Pi_1/\kappa)\exp(\xi x_e/D),$$

де $\rho_0 = V_0^{-1}$. Тим самим між стаціонарними інваріантними розв'язками в зображеннях Ейлера [2, 4] та Лагранжа встановлюється однозначна відповідність. Зв'язок цей не випливає з загальної теорії, оскільки перехід від ейлерових координат до лагранжевих задається нелокальними співвідношеннями. Зазначимо, що, згідно з (7), лагранжевій координаті $x_л = x_0$ відповідає в ейлеровому представленні точка на $+\infty$.

Проаналізуємо умови існування періодичних розв'язків [5] в околі особливої точки $\mathbf{A_1}(R_1, \Pi_1)$, де $\Pi_1 = -\gamma > 0$, $R_1 = -\kappa/\gamma$. Запишемо для цього лінійну частину системи (5) в координатах $x = R - R_1$, $y = \Pi - \Pi_1$:

$$\xi\Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} -\kappa & -R_1^2\sigma \\ \kappa\xi^2 & (\xi R_1)^2 + \chi\xi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Матриця $\hat{\mathbf{M}}$, яка стоїть в правій частині формули (8), буде мати пару чисто уявних коренів за таких умов:

$$(\xi R_1)^2 + \chi\xi = \kappa, \tag{9}$$

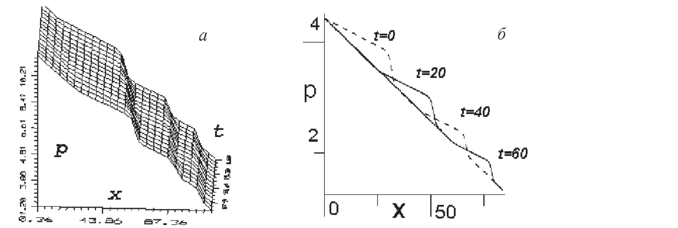

Рис.2. Розв'язки задачі Коші для системи (1), в якій за початкові умови вибиралися: (*а*) періодична траєкторія та (*б*) гомоклінічна траєкторія системи (5).

$$\Omega^2 = \kappa\xi\Delta > 0. \tag{10}$$

Умова (10) виконується, наприклад, якщо $\xi < 0$, а координата R_1 буде розташована ліворуч від лінії непродовжуваності розв'язків $R = \sqrt{\chi/(\tau\xi^2)}$, тобто, якщо $\Delta < 0$. Такий вибір буде єдиним з точки зору стійкості розв'язків, оскільки з нерівностей $\xi > 0$ і $\Delta > 0$ випливає, що швидкість інваріантної біжучої хвилі менша за рівноважну швидкість звуку $C_{T0} = \sqrt{\kappa}$. Розв'язуючи рівняння (9), одержимо, з урахуванням сказаного, критичне значення параметра $\xi_{кр}$:

$$\xi_{кр} = -\frac{\chi + \sqrt{\chi^2 + 4\kappa R_1^2}}{2R_1^2}. \tag{11}$$

Дослідження поведінки системи (5) в околі особливої точки $A(R_1, \Pi_1)$ виявили таку зміну режимів: особлива точка є нестійким фокусом, якщо $\xi < \xi_{кр}$ (рис.1*а*). Вище цього значення м'яко народжується нестійкий граничний цикл (рис.1*б*), радіус якого зростає із зростом параметра ξ доти, доки він не досягне другого критичного значення $\xi_{кр}^2$, при якому відбувається гомоклінічна біфуркація (рис.1*в*). Після другої біфуркації критична точка стає стійким фокусом (рис.1*г*).

Нестійкість граничного циклу (а також гомоклінічної траєкторії) не виключає можливості спостереження еволюції відповідних розв'язків системи (1) в автомодельних режимах, оскільки при переході $\omega \to x$ (який буде взаємно однозначним при $t = \mathrm{const}$) траєкторії динамічної системи змінюють свої напрямки, отже, змінюється і характер особливих точок (стійкі режими стають нестійкими, і навпаки).

В чисельних експериментах, в яких застосовувалась схема Годунова [6], інваріантні автохвильові розв'язки та граничні до них розв'язки, які відповідають петлям гомоклінік, використовувались як початкові умови в задачі Коші. Результати моделювання представлені на рис.2. Порівняння чисельних розв'язків з формулами

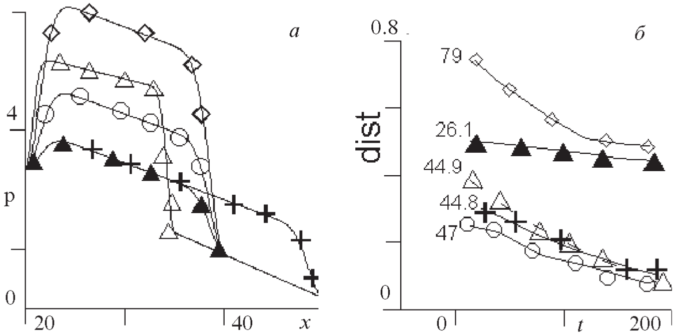

Рис.3. Збурення, які використовувались в чисельних експериментах (a) та графіки часової залежності відстані між хвильовими пакетами, які породжуються цими збуреннями та сім'єю гомоклінічної траєкторії ($б$) (наведено значення енергії сходинок з відповідним маркуванням).

аналітичного продовження інваріантних розв'язків дає змогу переконатися в тому, що, в межах точності методу (застосовувалась чисельна схема першого порядку), початкові збурення еволюціонують в автомодельних режимах.

Чисельні експерименти також показують, що хвильові пакети від деякого класу початкових збурень з плином часу прямують до розв'язку, який породжується гомоклінічною траєкторією системи (5). Початкові збурення визначалися за формулами

$$u = 0, \qquad V = \kappa/p,$$
$$p = \begin{cases} p_2(x_0 - x), \text{ якщо } x \in (0,a) \cup (a+l, x0), \\ (p_2+p_3)(x_0 - x) + w(x-a) + h, \text{ якщо } x \in (a, a+l), \end{cases} \tag{12}$$

де $a, l, p_3, w, h - \gamma = p_2$ – параметри збурень, які задавались на фоні стаціонарного інваріантного розв'язку (6). Проміжок l (ширина збурення) вибирався як більшим, так і меншим від носія еволюціонуючої гомоклінічної траєкторії (порівняння проводиться в той момент, коли фронт інваріантного гомоклінічного розв'язку співпадає з правим обмеженням збурення). Початкові збурення, які використовувались в експериментах, зображені на рис.3a. Виявляється, що, незалежно від ширини початкового збурення l, параметри p_3, w, h можна вибрати таким чином (цей вибір можна реалізувати багатьма способами), що одна з траєкторій, утворена зі "сходинки", буде з плином часу наближатись до сім'ї вектор-функцій $\{\vec{U}^t_{hc}(x)\}_{t\geq 0} = [u_{hc}(t,x),\, V_{hc}(t,x),$

$p_{hc}(t,x)]_{t\geq 0}$, породжених гомоклінічною траєкторією. Критерієм того, чи буде новоутворена хвиля прямувати до сім'ї гомоклініки, може служити оцінка повної енергії збурення, а точніше, тієї її частини, яка буде передана хвильовому пакету, що прямує "вниз", тобто, в напрямку зменшення щільності середовища. Якщо ця енергія пропорційна повній енергії і не дуже залежить від форми і розмірів збурення, тоді енергетична оцінка "сходинки"може служити прийнятним критерієм збіжності.

Повна енергія збурення E складається з внутрішньої E_{int} та потенціальної E_{pot} енергій:

$$E = E_{\text{int}} + E_{\text{pot}} = \int [\varepsilon_{\text{int}} + \varepsilon_{\text{pot}}]\, dm,$$

де ε_{int}, ε_{pot} – локальні значення внутрішньої та потенціальної енергій, відповідно, в перерахунку на одиницю маси, $dm = dx_л$. Величину потенціальної енергії визначимо з формули $F = \rho\gamma - \operatorname{grad} p = -\nabla\varepsilon_{\text{pot}}$:

$$E_{\text{pot}} = \int \varepsilon_{\text{pot}} dm = \int\limits_{\text{supp}\,\Omega} \left[\int\limits_{c_1}^{x_e} (\rho^{-1}\nabla p - \gamma) dx'_e \right] \rho dx_e,$$

де x_e – ейлоровська координата, p та $\rho = V^{-1}$ виражаються за формулою (12), $\operatorname{supp}\Omega$ – носій збурення. Використовуючи формули

$$1/\rho \partial p/\partial x_e = \partial p/\partial x_л, \qquad dx_л = \rho dx_e,$$

одержимо, після взяття інтеграла та елементарних перетворень

$$E_{\text{pot}} = \frac{\kappa\, l}{\alpha + \beta} \left[\left(\frac{1+k}{k} \right) \ln(1+k) - 1 \right],$$

де $k = [P(a+l) - P(a)]/P(a)$, $P(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha = w - (p_2 + p_3)$, $\beta = (p_2 + p_3)x_0 - aw$.

Щільність внутрішньої енергії збурення знаходимо із співвідношення $(\partial\varepsilon_{\text{int}}/\partial V)_s = -p = -\kappa/V$:

$$\varepsilon_{\text{int}} = c - \kappa \ln V.$$

Від цього виразу треба відняти щільність енергії стаціонарного неоднорідного стану $\varepsilon^0_{\text{int}}$, яка дорівнює $c - \kappa\ln V_0$, отже, остаточно маємо

$$E_{\text{int}} = \int\limits_{\text{supp}\,\Omega} (\varepsilon_{\text{int}} - \varepsilon^0_{\text{int}}) \rho dx_e = \kappa \int\limits_{\text{supp}\,\Omega} \ln V_0/V dx_л.$$

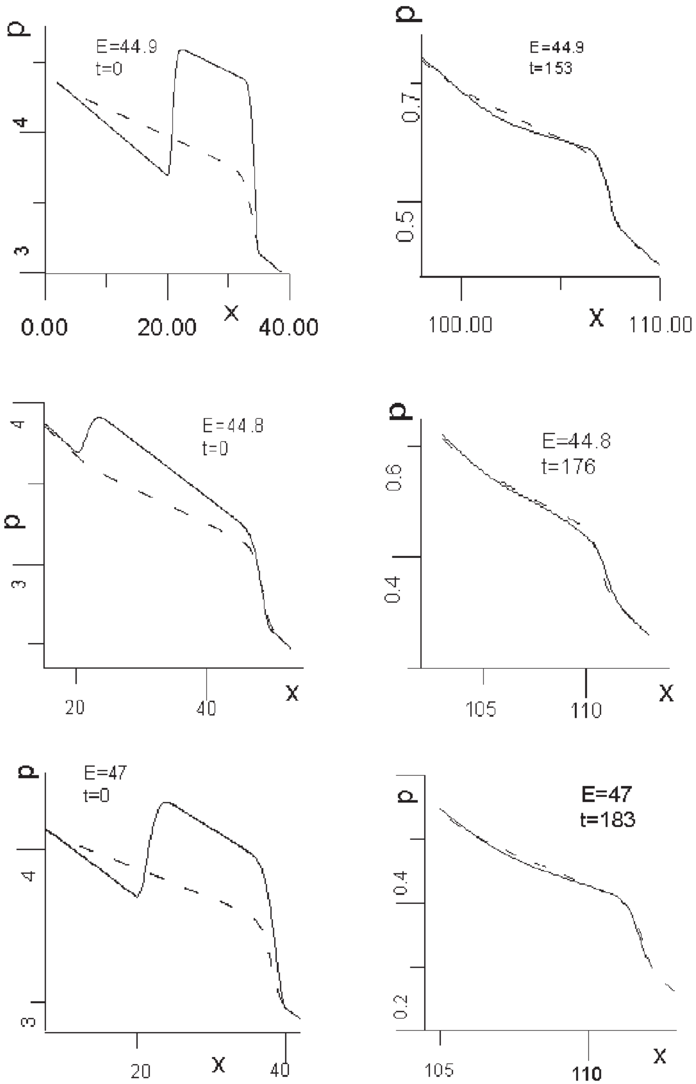

Рис.4. Збурення стаціонарного неоднорідного розв'язку (6) та породжені ними хвильові пакети (зображено на фоні еволюціонуючої гомоклінічної траєкторії, відміченої пунктиром)

Використовуючи формулу (12), одержимо звідси:

$$E_{\rm int} = \kappa \left\{ l \ln \frac{P(a+l)}{P_0(a+l)} + \right.$$
$$\left. + \frac{P(a)}{\alpha} \ln \left[1 + \frac{\alpha l}{P(a)} \right] + \frac{P_0(a)}{p_2} \ln \left[1 - \frac{p_2 l}{P_0(a)} \right] \right\},$$

де $P_0(z) = p_2(x_0 - z)$.

Відстань між хвильовим збуреннням $\vec{U}^{t_0}_{wp} = (u_{wp}, V_{wp}, p_{wp})\,(t_0, x)$ та сім'єю гомокліники $\{\vec{U}^t_{hc}(x)\}_{t\geq 0} = [u_{hc}(t,x), V_{hc}(t,x), p_{hc}(t,x)]_{t\geq 0}$, визначалась як локальний мінімум функціоналу

$$\begin{aligned}\left[\mathrm{dist}\left(\vec{U}^{t_0}_{wp}, \vec{U}^t_{hc}\right)\right]^2 = \inf_{t\in O_{t_1}} \Bigg\{ \int\limits_{\mathrm{supp}\,\Omega_{12}} \Big(& [p_{wp}(t_0 x) - p_{hc}(t,x)]^2 + \\ & + [V_{wp}(t_0,x) - V_{hc}(t,x)]^2 + [u_{wp}(t_0,x) - u_{hc}(t,x)]^2 \Big) dx \Bigg\} \times \\ \times \Bigg\{ \int\limits_{\mathrm{supp}\,\Omega_1} \Big(& [p_0(x) - p_{hc}(t,x)]^2 + \\ & + [V_0(x) - V_{hc}(t,x)]^2 + u_{hc}(t,x)^2 \Big) dx \Bigg\}^{-1},\end{aligned} \tag{13}$$

де O_{t_1} – окіл моменту часу t_1, в якому фронти біжучих хвиль $\vec{U}^{t_0}_{wp}$ та $U^{t_1}_{hc}$ співпадають, $\vec{U}_0 = (p_0(x)V_0(x), 0)$ – початкова неоднорідність, яка задається формулою (6), supp $\tilde{\Omega}_{12}$ – об'єднання носіїв $\vec{U}^{t_1}_{hc}$ та $\vec{U}^{t_0}_{wp}$, supp Ω_1 – носій $\vec{U}^{t_1}_{hc}$.

Чисельні розрахунки показують, що обраний енергетичний критерій досить добре характеризує збіжність хвилі від збурення до сім'ї $\{\vec{U}^t_{hc}\}_{t\geq 0}$ принаймні тоді, коли носій початкового збурення співмірний з носієм гомокліники в момент їх перекриття. Збіжність хвильового пакету до сім'ї гомокліники спостерігалась в тих випадках, коли $E \in (43, 47)$. На рис.4 представлена картина еволюції хвильових пакетів, породжених "сходинками", для яких енергія знаходиться в цьому проміжку, на фоні інваріантних гомоклінічних траєкторій; для порівняння на рис.5 зображені хвильові пакети, отримані в тих випадках, коли $E \notin (43, 47)$. На рис.3*б* подано відстані, які одержуються за формулою (13), в функції часу.

Таким чином, існує залежність між значенням енергії "сходинки"та збіжністю породженої нею хвилі до сім'ї гомокліники. Засто-

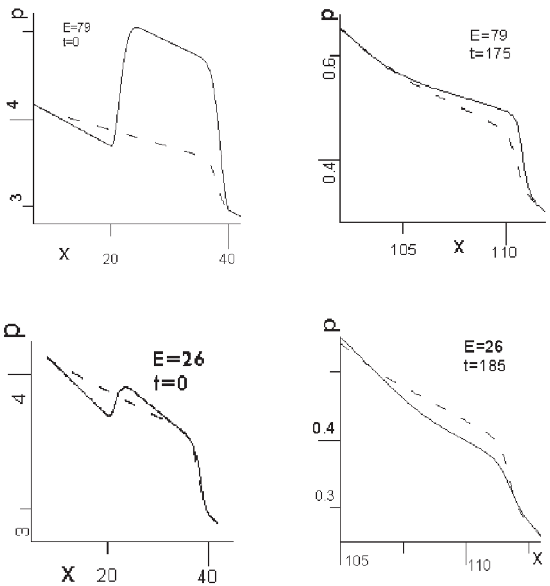

Рис.5. Еволюція хвильових пакетів, породжених збуреннями (ліворуч), для яких $E \notin (43, 47)$ (зображено на фоні еволюціонуючої гомоклінічної траєкторії, відміченої пунктиром).

сування чисельної схеми першого порядку точності не дає змоги отримати кількісні критерії збіжності, однак, в якісному відношенні введений енергетичний критерій цілком себе виправдовує – кожен раз, коли величина E (при заданих вище значеннях параметрів системи (1)) суттєво відхилялася від інтервалу $(43, 47)$, збіжність до сім'ї гомоклініки була відсутньою.

Збіжність, отримана для хвильових пакетів, представлених на рис.4, була в певному сенсі максимальною – розбіжності хвильових пакетів в "хвостових"частинах, викликані схемними ефектами не дають змоги одержати більш точні кількісні оцінки. Існує, однак, інша суттєва обставина, яка ставить під сумнів принципову можливість покращення оцінок збіжності. Проблема полягає в тому, що особливій точці $\mathbf{A_2}(R_2, \Pi_2)$, яка є початком і кінцем гомоклінічної траєкторії, на відміну від точки $\mathbf{A_1}(R_1, \Pi_1)$, не можна поставити у відповідність стаціонарний інваріантний розв'язок системи (1). Водночас, гомоклінічна траєкторія є єдиною траєкторією системи (5), яка може бути продовжена направо від лінії $\Delta = 0$. Параметри, що використовувалися в чисельних експериментах, добирались так, щоб

максимально сповільнити рух в околі точки $\mathbf{A_2}(R_2, \Pi_2)$ порівнянно з іншими областями фазової площини, однак факт існування продовження гомоклінічної траєкторії означає, що швидкість руху в точці $\mathbf{A_2}(R_2, \Pi_2)$ залишається скінченною при будь-яких значеннях параметрів. Саме через це ми вживаємо до окреслення асимптотичних властивостей відповідного автомодельного розв'язку вихідної системи термін "проміжні асимптотики".

[1] Баренблатт Г.И., Зельдович Я.Б. Промежуточные асимптотики в математической физике // Успехи мат. наук. – 1971. – **26**, № 2.

[2] Владимиров В.А., Даниленко В.А., Королевич В.Ю. Нелинейные модели многокомпонентных релаксирующих сред. Динамика волновых структур и качественный анализ. Ч. I,II. – Киев, 1990. – 80 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т геофизики им. С.И. Субботина).

[3] Владіміров В.А. Про автохвильові інваріантні розв'язки рівнянь релаксаційної гідродинаміки // Цей зб. – С. 48–53.

[4] Danylenko V.A., Sorokina V.V. and Vladimirov V.A. On the governing equations in relaxing media models and self-similar quasiperiodic solutions // J. Phys. A: Math. Gen. – 1993. – **26**, № 9. – P. 7125–7135.

[5] Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1986.

[6] Роменский Е.И. Разностная схема Годунова для одномерных релаксационных уравнений термоупругопластичности: Тр. Ин-та математики // Вычислительнце проблемы в задачах математической физики. – Новосибирск: СО АН СССР. – **11**. – 1988.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 64–72

УДК 517.91

Неоднорідні задачі для поліпараболічного оператора

$\boxed{\textit{А.С.ГАЛІЦИН}}$, ***О.М.ЖУКОВСЬКИЙ, В.П.КАРАГОДОВ***

Інститут математики НАН України, Київ

Доведено теорему про коректність неоднорідної задачі для поліпараболічного рівняння з правою частиною, яка належить до класу обмежених в $\mathbb{R}^n$ функцій. Наведено точні формули для констант оцінок потенціалів з такими щільностями і одержано точні розв'язки для частинних випадків.

The theorem establishing the correctness of the inhomogeneous problem for a polyparabolic equation with the right-hand side belonging to the set of bounded functions in $\mathbb{R}^n$ is proved. Exact formulas for constants of evaluations for potentials with these densities are presented and exact solutions for patricular cases are obtained.

Розглянемо неоднорідну задачу для лінійного рівняння в частинних похідних

$$T^{m+1}u \equiv \sum_{j=0}^{m+1}(-1)^j C_{m+1}^j \frac{\partial^{m-j+1}}{\partial t^{m-j+1}}\nabla^{2j}u(t,\mathbf{x}) = f(t,\mathbf{x}), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}_+^1$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $f(t,\mathbf{x}) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{1+n})$, ∇^2 – оператор Лапласа, C^j_{m+1} – біноміальні коефіцієнти.

При $m = 0$ це рівняння перетворюється в класичне неоднорідне рівняння теплопровідності. Всякий розв'язок рівняння $T^{m+1}u = 0$, визначений в деякій області простору $\mathbb{R}^{n+1}$, називається полікалоричною функцією [1, 2], і єдиним чином може бути поданий у вигляді

$$u(t,\mathbf{x}) = u_0(t,\mathbf{x}) + tu_1(t,\mathbf{x}) + \cdots + t^m u_m(t,\mathbf{x}), \tag{2}$$

де $u_k(t,\mathbf{x})$ – суть розв'язки рівняння $Tu = 0$. Зазначимо для подальшого, що має місце формула

$$T^{m+1}(t^k u) = \sum_{j=0}^{m+1} j!\, C^j_{m+1} C^j_k t^{k-j} T^{m-j+1}u, \tag{3}$$

яка виводиться за індукцією.

Фундаментальний розв'язок оператора T^{m+1} з простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$ має вигляд [3]

$$\mathcal{E}_{m,n}(t,\mathbf{x}) = \frac{\theta(t)t^{m-n/2}}{(2\sqrt{\pi})^n m!}\exp\left(-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}\right). \tag{4}$$

Він невід'ємний, обертається в нуль при $t < 0$, нескінченно диференційовний при $(t,\mathbf{x}) \neq 0$ і має, окрім інших, такі властивості:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_{m,n}(t,\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} = \frac{t^m}{m!}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\mathcal{E}_{m,n}(+0,\mathbf{x}) = 0 \quad (0 \le k \le m-1), \quad \frac{\partial^m}{\partial t^m}\mathcal{E}_{m,n}(+0,\mathbf{x}) = 1. \tag{6}$$

Оскільки $\mathcal{E}_{m,n} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{1+n})$, розв'язок задачі (1) можна подати у вигляді згортки [4]

$$u(t,\mathbf{x}) = \mathcal{E}_{m,n}(t,\mathbf{x}) * f(t,\mathbf{x}), \tag{7}$$

яка визначає полікалоричний потенціал з щільністю $f(t,\mathbf{x})$. При цьому $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{1+n})$, якщо

$$h(t,\mathbf{x}) = [\mathcal{E}_{m,n}(t,\mathbf{x}) * |f(t,\mathbf{x})|] \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{1+n}). \tag{8}$$

Наведена нижче теорема визначає один з класів щільності, для якого згортка (7) існує. Для спрощення формул індекси m і n далі не записуються.

Позначимо через K_0 клас функцій, перетворюється на нуль при $t < 0$ і обмежені в кулі $0 \le t \le t_0 : |f| \le A_f = \sup|f(\tau,\xi)|$ $(0 \le \tau \le t$, $\xi \in \mathbb{R}^n)$.

Теорема. *Якщо $f(t,\mathbf{x}) \in K_0$, то полікалоричний потенціал $U(t,\mathbf{x})$ порядку m існує в K_0, виражається інтегралом (7) і задовольняє оцінки*

$$|U| \le A_f \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}, \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right| \le A_f a^{(k)}_{m,n} t^{m-k+1}, \tag{10}$$

$$|\nabla^{2p}U| \le A_f b^{(p)}_{m,n} t^{m-p+1}, \tag{11}$$

де $a_{m,n}^{(k)}$ *і* $b_{m,n}^{(p)}$ *– додатні сталі, та початкові умови*

$$U(+0,\mathbf{x}) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\Big|_{t=+0} = 0 \ (1 \le k \le m), \quad \nabla^{2p} U\Big|_{t=+0} = 0 \ (1 \le p \le m), \tag{13}$$

$$T^s U(+0,\mathbf{x}) = 0 \quad (1 \le s \le m). \tag{14}$$

Доведення. За теоремою Фубіні з умови (5) відразу випливає, що

$$h(t,\mathbf{x}) \le A_f \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\,.$$

Оскільки $|U| \le h$, то $U = 0$ при $t < 0$, виконується оцінка (9) і, таким чином, $U \in K_0$.

Скориставшись формулою диференціювання згортки по t та властивостями (6), при $t > 0$ маємо, що

$$\frac{\partial^k U}{\partial t^k} = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\tau,\xi) \frac{\partial^k}{\partial t^k} \mathcal{E}(t-\tau, \mathbf{x}-\xi)\, d^n\xi d\tau.$$

Звідси випливає, що

$$\left|\frac{\partial^k U}{\partial t^k}\right| \le A_f \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \mathcal{E}(t,\xi)\, d^n\xi. \tag{15}$$

Оскільки

$$\frac{\partial^{k-1}\mathcal{E}}{\partial t^{k-1}} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n m!} \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l \frac{d^{k-l-1} t^{m-n/2}}{dt^{k-l-1}} \frac{\partial^l}{\partial t^l} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}},$$

а, в свою чергу,

$$\frac{d^{k-l-1} t^{m-n/2}}{dt^{k-l-1}} = \frac{\Gamma(m-\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(m-\frac{n}{2}-k+l+2)} t^{m-\frac{n}{2}-k+l-1},$$

$$\frac{\partial^l}{\partial t^l} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} = t^{-l} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j (l-1)\ldots(l-j) C_l^j \left(\frac{|\xi|^2}{4t}\right)^{l-j},$$

де $\Gamma(z)$ – гама-функція [5], то в (15)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} \mathcal{E}(t,\xi)\, d^n\xi = \frac{t^{m-\frac{n}{2}+k+1}}{(2\sqrt{\pi})^n m!} \sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l \frac{\Gamma(m-\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(m-\frac{n}{2}-k+l+2)} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j (l-1)(l-2)\ldots(l-j)\, C_l^j \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|\xi|^2}{4t}\right)^{l-j} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}\, d^n\xi.$$

Але

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2l-2j} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}\, d^n\xi &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty \rho^{2(l-j)+n-1} e^{-\frac{\rho^2}{4t}}\, d\rho = \\ &= \frac{(2\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(\frac{n}{2})} 2^{2l-2j} \Gamma\left(l-j+\frac{n}{2}\right) t^{l-j+\frac{n}{2}}, \end{aligned} \tag{16}$$

тому, повернувшись до нерівності (15), одержуємо оцінку (10), в якій константа $a_{m,n}^{(k)}$, залежна від порядку полікалоричного потенціалу, порядку його похідної за часом та розмірності простору, обчислюється точно:

$$a_{m,n}^{(k)} = \frac{\Gamma(m-\frac{n}{2}+1)}{m!\Gamma(\frac{n}{2})} \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{C_{k-1}^l (C_l^j)^2 \Gamma(l-j+\frac{n}{2})(l-j)j!}{l\,\Gamma(m-\frac{n}{2}-k+l+2)}.$$

Продовжуючи оцінки, розглянемо

$$\nabla^{2p} U = \nabla^{2p}\big[\mathcal{E}(t,\mathbf{x}) * f(t,\mathbf{x})\big] = f(t,\mathbf{x}) * \nabla^{2p}\mathcal{E}(t,\mathbf{x}).$$

Оскільки $f \in K_0$, то має місце нерівність

$$\begin{aligned} |\nabla^{2p} U| &\le A_f \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^{2p} \mathcal{E}(\tau,\mathbf{x})\, d^n\mathbf{x} d\tau = \\ &= \frac{A_f}{(2\sqrt{\pi})^n m!} \int_0^t \tau^{m-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^{2p} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\tau}}\, d^n\mathbf{x} d\tau. \end{aligned} \tag{17}$$

Можна довести, що

$$\nabla^{2p} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\tau}} = 2^{-2p} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\tau}} \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j (2j)!\, C_{2p}^{2j}}{j!\, \tau^{2p-j}} |\mathbf{x}|^{2p-2j},$$

тому в (17)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla^{2p} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\tau}} d^n\mathbf{x} = 2^{-2p} \sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j (2j)!\, C_{2p}^{2j}}{j!\, \tau^{2p-j}} \times \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{x}|^{2p-2j} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\tau}} d^n\mathbf{x}. \tag{18}$$

Тут інтеграл в правій частині існує і обчислюється за формулою (16). Підставивши його в (18), а результат – в нерівність (17), одержимо шукану оцінку (11). В ній постійна $b_{m,n}^{(p)}$ обчислюється за формулою

$$b_{m,n}^{(p)} = \frac{(2p)!}{(m-p+1)m!\,\Gamma(\frac{n}{2})} \sum_{j=0}^{p} \frac{\Gamma(p-j+\frac{n}{2})}{2^{2j}(2p-2j)!}.$$

Отже, оцінки (9)–(11) теореми обгрунтовано. З них випливають початкові умови (12) і (13), які задовольняє полікалоричний потенціал. Початкова умова (14) є наслідком попередніх, в чому легко переконатись за допомогою формули (3).

З теореми, зокрема, випливає, що поряд з класичною задачею Коші для рівняння (1) має сенс постановка задачі з неоднорідними початковими умовами, які відповідають умовам (14):

$$T^k u(+0,\mathbf{x}) = \varphi_k(\mathbf{x}) \quad (1 \le k \le m).$$

Знайдемо точні розв'язки задачі (1). Оскільки $|\mathbf{x}-\xi|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\xi|^2 - 2(\mathbf{x}\cdot\xi)$, то загальну формулу, яка дає розв'язок задачі (1), можна, у відповідності з (7) та теоремою Фубіні, записати так:

$$u(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^n m!} \int\limits_0^t \tau^{m-n/2} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4\tau}} d\tau \times \\ \times \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t-\tau,\xi) e^{-\frac{|\xi|^2 - 2(\mathbf{x}\cdot\xi)}{4\tau}} d^n\xi. \tag{19}$$

Зокрема, якщо $f = f(t,|\mathbf{x}|)$, то при $n \ge 2$ із (19) одержується, що

$$u(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int\limits_0^t \tau^{m-n/2} e^{-\frac{|\mathbf{r}|^2}{4\tau}} d\tau \times \\ \times \int\limits_0^\infty \rho^{n-1} e^{-\frac{\rho^2}{4\tau}} f(t-\tau,\rho) d\rho \int\limits_0^\pi e^{\frac{\mathbf{r}\rho}{2\tau}\cos\varphi} \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi,$$

де $\mathbf{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Але для $\nu > 0$

$$\int\limits_0^\pi e^{\pm z\cos\varphi} \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi = \sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{z}\right)^\nu I_\nu(z),$$

де $I_\nu(z)$ – беселева функція уявного аргументу [5], тому для вказаного класу щільностей і $n \ge 2$

$$u(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{2\mathbf{r}^{\frac{n}{2}-1} m!} \int\limits_0^t \tau^{m-1} e^{-\frac{|\mathbf{r}|^2}{4\tau}} d\tau \times \\ \times \int\limits_0^\infty \rho^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\rho^2}{4\tau}} I_{\frac{n}{2}-1}\!\left(\frac{\mathbf{r}\rho}{2\tau}\right) f(t-\tau,\rho) d\rho. \tag{20}$$

Вироджений випадок $n = 1$ не охоплюється формулою (20), бо для нього

$$u(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}m!} \int\limits_0^t \tau^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{4\tau}} d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2 - 2\mathbf{x}\xi}{4\tau}} f(t-\tau,\xi) d\xi. \tag{21}$$

Якщо розмірність простору непарна, інтеграл по ρ в (16) зводиться до інтегралу від елементарних функцій. Зокрема, оскільки при $n = 3$

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{sh} z,$$

із (20) одержується, що

$$u(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}m!\,\mathbf{r}} \int\limits_0^t \tau^{m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\tau}} d\tau \times \\ \times \int\limits_0^\infty \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{4\tau}} \operatorname{sh}\left(\frac{\mathbf{r}\rho}{2\tau}\right) f(t-\tau,\rho) d\rho. \tag{22}$$

Окремо розглянемо випадок, коли $f(t,\mathbf{x})$ – фінітна функція в $\mathbb{R}^n$. Нехай

$$f(t,\mathbf{x}) = A\omega(t) F(|\mathbf{x}|)\, \theta(R^2 - |\mathbf{x}|^2) \quad (A, R = \mathrm{const} > 0, n \ge 2).$$

Для такої щільності із (20) відразу одержується, що

$$u(t,\mathbf{r})=\frac{1}{2\mathbf{r}^{\frac{n}{2}-1}m!}\int\limits_0^t \tau^{m-1}e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\tau}}\omega(t-\tau)d\tau\times$$
$$\times\int\limits_0^R \rho^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\rho^2}{4\tau}}I_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\mathbf{r}\rho}{2\tau}\right)F(\rho)d\rho.$$

Нехай тепер $n=1$ і $f(t,\mathbf{x})=A\theta(t)\theta(R-|\mathbf{x}|)$. Для цього випадку із (21) випливає, що

$$u(t,\mathbf{x})=\frac{A}{2m!}\int\limits_0^t \tau^m\left[\operatorname{erf}\left(\frac{R+\mathbf{x}}{2\sqrt{\tau}}\right)+\operatorname{erf}\left(\frac{R-\mathbf{x}}{2\sqrt{\tau}}\right)\right]d\tau, \tag{23}$$

де $\operatorname{erf}(z)$ – інтеграл ймовірностей [5]. Оскільки

$$\int\limits_0^t \tau^m\operatorname{erf}\left(\frac{z}{2\sqrt{\tau}}\right)d\tau=2\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+2}\int\limits_{\frac{z}{2\sqrt{t}}}^{\infty}\xi^{-2m-3}\operatorname{erf}(\xi)\,d\xi,$$

а при цьому [3]

$$\int\limits_{\xi}^{\infty}\xi^{-2m-3}\operatorname{erf}(\xi)\,d\xi=\frac{1}{2(m+1)}\left\{\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}\operatorname{erfc}(\xi)+\right.$$
$$\left.+\xi^{-2m-2}\left[\operatorname{erf}(\xi)-\frac{1}{\pi}e^{-\xi^2}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\frac{\Gamma(m-k+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}\xi^{2k+1}\right]\right\},$$

то після низки перетворень від (23) приходимо до точного розв'язку

$$u(t,\mathbf{x})=\frac{At^m}{2(m+1)!}\left[\Phi_m\left(\frac{R+\mathbf{x}}{2\sqrt{t}}\right)+\Phi_m\left(\frac{R-\mathbf{x}}{2\sqrt{t}}\right)\right], \tag{24}$$

де

$$\Phi_m(z)=\operatorname{erf}(z)+\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}z^{2m+2}\operatorname{erfc}(z)-$$
$$-\frac{1}{\pi}e^{-z^2}\sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k\frac{\Gamma(m-k+\frac{3}{2})}{\Gamma(m+\frac{3}{2})}z^{2k+1}.$$

Неважко перевірити, що наведені тут частинні точні розв'язки задачі (1) для щільностей з класу K_0 узгоджуються з твердженнями доведеної вище теореми.

Застосуємо отримані вище результати до задачі

$$(\sin T)u=f(t,\mathbf{x}). \tag{25}$$

Враховуючи розклад лівої частини в нескінченний ряд та узагальнення співвідношень (2), (3), подамо фундаментальний розв'язок оператора $\sin T$ з простору $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{1+n})$ у вигляді ряду

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_n(t,\mathbf{x})&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\mathcal{E}_{m,n}(t,\mathbf{x})}{(2m+1)!}=\\&=\frac{\theta(t)e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}}{(2\sqrt{\pi})^n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m-n/2}}{(2m)!(2m+1)!}=\\&=\frac{\theta(t)e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}}t^{-n/2-1}}{(2\sqrt{\pi})^n}\int\limits_0^t \operatorname{ber}2\sqrt{\tau}d\tau,\end{aligned} \tag{26}$$

що абсолютно збіжний при $t>0$ і має наступні властивості:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathcal{S}_n(t,\mathbf{x})\,d^n\mathbf{x}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!(2m+1)!};$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\mathcal{S}_n(+0,\mathbf{x})=0\quad(k=2p-1),$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\mathcal{S}_n(+0,\mathbf{x})=\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\quad(k=2p).$$

Тоді розв'язок задачі (25) отримаємо для $f(t,\mathbf{x})\in\mathbf{K_0}$ у вигляді згортки

$$u(t,\mathbf{x})=\mathcal{S}_n(t,\mathbf{x})*f(t,\mathbf{x}), \tag{27}$$

що дає аналогічно (20) і (21) при $n\geq 2$

$$\begin{aligned}u(t,\mathbf{r})&=\frac{1}{2\mathbf{r}^{\frac{n}{2}-1}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m)!(2m+1)!}\times\\&\times\int\limits_0^t \tau^{2m-1}e^{-\frac{|\mathbf{r}|^2}{4\tau}}d\tau\times\int\limits_0^{\infty}\rho^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{\rho^2}{4\tau}}I_{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{\mathbf{r}\rho}{2\tau}\right)f(t-\tau,\rho)d\rho,\end{aligned} \tag{28}$$

і при $n = 1$

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2\sqrt{\pi}(2m)!(2m+1)!} \int\limits_0^t \tau^{2m-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{4\tau}} d\tau \times \\ \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2 - 2\mathbf{x}\xi}{4\tau}} f(t-\tau, \xi) d\xi. \tag{29}$$

Якщо $n = 1$ і $f(t, \mathbf{x}) = A\theta(t)\theta(R - |\mathbf{x}|)$, то отримуємо точний розв'язок задачі (25) у вигляді

$$u(t, \mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m A t^{2m}}{2((2m+1)!)^2} \left[\Phi_{2m}\left(\frac{R+\mathbf{x}}{2\sqrt{t}}\right) + \Phi_{2m}\left(\frac{R-\mathbf{x}}{2\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{30}$$

[1] Tichonov A.N. Theoremes d'unïcite pour l'equation de la chaleur // Matem. sbornik. – 1935. – **42**. - P. 199–216.

[2] Nicolescu M. Ecuatia iterata a caldurii // Studii si Cercetari Matematice. – 1954. – **5**, № 3–4. – P. 243–332.

[3] Галіцин А.С. Фундаментальний розв'язок поліпараболічного оператора // Доп. НАН України. – 1995. – № 6. – С. 36–38.

[4] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1973. – Т.1. – 294 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 73–79

УДК 512.812.1:530.145

Парасуперaлгебра Пуанкаре і парасуперсиметрична теорія поля

О.В. ГАЛКІН

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: galkin@apmat.freenet.kiev.ua

У даній роботі наведена лінійна реалізація генераторів парасуперaлгебри Пуанкаре в термінах параграсманових змінних, а також розглянуті рівняння руху для кірального парасуперполя $\Phi_+(x, \theta)$.

In this paper we present a realization of the Poincaré parasuperalgebra in terms of the linear operators involving para-Grassmannian variables. We consider also the equation of motion for the chiral parasuperfield $\Phi_+(x, \theta)$.

1. Вступ. Відомо, що скалярне, векторне та спінорне поля пов'язані з відповідними зображеннями групи Пуанкаре. При перетвореннях із групи Пуанкаре або при перетвореннях внутрішньої симетрії тензорні (бозонні) і спінорні (ферміонні) поля перетворюються незалежно одне від одного. Проте, було показано, що можна ввести більш загальну групу перетворень, так звану супергрупу Пуанкаре, яка об'єднує бозонні та ферміонні поля так, що при перетвореннях із цієї групи бозонні та ферміонні поля будуть "перемішуватися"між собою [1]. Генераторами супергрупи Пуанкаре є генератори групи Пуанкаре, а також ферміонні генератори, що відповідають антикомутаційним співвідношенням.

Суперсиметрія робить можливим об'єднання симетрії простору-часу (пуанкаре-інваріантність) із внутрішніми симетріями [2] і дає підстави сподіватися, що несуперечлива квантова теорія гравітації може бути побудована [3].

Нещодавно було запропоновано узагальнення суперсиметріі, так звана парасуперсиметрія. У роботі [4] закладено фундамент парасуперсиметричної квантової теорії поля. Ця теорія розглядає парастатистики замість статистик Фермі і Бозе. Рівняння парасуперсиметричної квантової теорії поля мають бути інваріантні відносно парасупергрупи Пуанкаре. Парасуперсиметрична квантова теорія поля є релятивістським узагальненням парасуперсиметричної квантової механіки, яка, в свою чергу, є узагальненням суперсиметричної квантової механіки [5].

Робота [4] стимулювала появу роботи [6], в якій повністю описані всі незвідні зображення ($N = 1$) парасупералгебри Пуанкаре, які відіграють важливу роль при побудові парасуперсиметричних моделей у квантовій теорії поля. При цьому робота [4] має ряд недоліків. По-перше, в цій роботі наведена нелінійна реалізація генераторів парасупергрупи Пуанкаре в термінах параграсманових змінних. Було б бажано мати лінійну реалізацію для побудови парасуперсиметричного узагальнення суперсиметричної моделі Весса-Зуміно [1, 2]. По-друге, гамільтоніан парасуперсиметричного хвильового рівняння (без взаємодії) не комутує із парасуперзарядами. У даній роботі наведена лінійна реалізація генераторів парасупералгебри Пуанкаре в термінах параграсманових змінних. Також знайдено рівняння руху для парасуперполя $\Phi_+(x,\theta)$. У випадку відмінних від 0 констант взаємодії рівняння для Φ_+ відповідає лагранжіану, наведеному у роботі [4].

2. Реалізація ($N = 1$) парасупералгебри Пуанкаре в термінах параграсманових змінних. Парасупералгебра Пуанкаре [4, 6] генерується десятьма генераторами групи Пуанкаре $P_\nu,\ J_{\nu\sigma}$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \qquad [P_\mu, J_{\nu\sigma}] = i(g_{\mu\nu}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\nu),\\ &[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}),\\ &J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}, \qquad \mu,\nu = 0,1,2,3, \end{aligned} \tag{1}$$

а також 4 парасуперзарядами $Q_\alpha,\ \bar{Q}_\alpha$ ($\alpha = 1,2$), що задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} &[Q_\alpha, [Q_\beta, Q_\gamma]] = [\bar{Q}_\alpha, [\bar{Q}_\beta, \bar{Q}_\gamma]] = 0,\\ &[[Q_\alpha, [Q_\beta, \bar{Q}_\gamma]] = -4Q_\beta(\sigma_\mu)_{\alpha\gamma}P^\mu,\\ &[[\bar{Q}_\alpha, [Q_\beta, \bar{Q}_\gamma]] = 4\bar{Q}_\gamma(\sigma_\mu)_{\beta\alpha}P^\mu. \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &[J_{\mu\nu}, Q_\alpha] = -\frac{1}{2i}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta, \qquad [P_\mu, Q_\alpha] = 0,\\ &[J_{\mu\nu}, \bar{Q}_\alpha] = -\frac{1}{2i}\bar{Q}_\beta(\bar{\sigma}_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}, \qquad [P_\mu, \bar{Q}_\alpha] = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

де σ_ν – матриці Паулі, а $\sigma_{\nu\mu} = -\sigma_{\mu\nu} = \sigma_\nu\sigma_\mu$ (У цій роботі використовується сігнатура $(+,-,-,-)$). Спінорні індекси α,β,γ ($\alpha,\beta,\gamma = 1,2$)

опускаються і піднімаються за допомогою універсального спінора $\varepsilon^{\alpha\beta}$ ($\varepsilon^{11} = \varepsilon_{11} = \varepsilon^{22} = \varepsilon_{22} = 0,\ \varepsilon^{12} = \varepsilon_{21} = 1,\ \varepsilon^{21} = \varepsilon_{12} = -1$), наприклад, $Q^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}Q_\beta$.

Всі незвідні зображення парасупералгебри Пуанкаре (1)–(3) описані в роботі [6]. Тут ми наводимо реалізацію генераторів парасупералгебри Пуанкаре в термінах параграсманових змінних θ_1, θ_2. Ці змінні задовольняють відношення [4]

$$\theta_\alpha\theta_\beta\theta_\gamma + \theta_\gamma\theta_\beta\theta_\alpha = 0, \tag{4}$$

(у цій роботі припускається, що параметр параквантовості $p = 2$).

Диференціювання за параграсмановими змінними можна визначити, використовуючи зображення Гріна [5], в якому

$$\theta_\alpha = \sum_{i=1}^{p=2}\theta_\alpha^{(i)}, \quad \left[\theta_\alpha^{(i)}, \theta_\beta^{(i)}\right]_+ = 0, \quad \left[\theta_\alpha^{(i)}, \theta_\beta^{(j)}\right] = 0 \quad (i \neq j), \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} = \sum_{i=1}^{p=2}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^{(i)}}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial\theta_\beta^{(i)}}\right]_+ = 0, \quad \left[\theta_\alpha^{(i)}, \frac{\partial}{\partial\theta_\beta^{(i)}}\right]_+ = \delta_{\alpha\beta}, \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha^{(i)}}, \frac{\partial}{\partial\theta_\beta^{(j)}}\right] = 0, \quad \left[\theta_\alpha^{(i)}, \frac{\partial}{\partial\theta_\beta^{(j)}}\right] = 0 \quad (i \neq j). \tag{7}$$

Тоді, використовуючи формули (5)–(7), можна перевірити, що генератори парасупералгебри Пуанкаре в термінах параграсманових змінних

$$\begin{aligned} &P_\mu = p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu},\\ &J_{12} = x_1p_2 - x_2p_1 + \frac{1}{4}\left(\theta^1\frac{\partial}{\partial\theta^2} - \frac{\partial}{\partial\theta^2}\theta^1 - \theta^2\frac{\partial}{\partial\theta^1} + \frac{\partial}{\partial\theta^1}\theta^2\right),\\ &J_{13} = x_1p_3 - x_3p_1 + \frac{i}{4}\left(\theta^1\frac{\partial}{\partial\theta^1} - \frac{\partial}{\partial\theta^1}\theta^1 - \theta^2\frac{\partial}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\theta^2}\theta^2\right),\\ &J_{23} = x_2p_3 - x_3p_2 + \frac{1}{4}\left(\theta^1\frac{\partial}{\partial\theta^1} - \frac{\partial}{\partial\theta^1}\theta^1 - \theta^2\frac{\partial}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\theta^2}\theta^2\right),\\ &J_{01} = x_0p_1 - x_1p_0 + \frac{i}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^1}\theta^1 - \theta^1\frac{\partial}{\partial\theta^1} - \theta^2\frac{\partial}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\theta^2}\theta^2\right),\\ &J_{02} = x_0p_2 - x_2p_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial\theta^1}\theta^1 - \theta^1\frac{\partial}{\partial\theta^2} + \theta^2\frac{\partial}{\partial\theta^1} - \frac{\partial}{\partial\theta^1}\theta^2\right),\\ &J_{03} = x_0p_3 - x_3p_0 + \frac{i}{4}\left(\theta^2\frac{\partial}{\partial\theta^1} - \frac{\partial}{\partial\theta^1}\theta^2 - \theta^1\frac{\partial}{\partial\theta^2} + \frac{\partial}{\partial\theta^2}\theta^1\right), \end{aligned} \tag{8}$$

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial \theta^1}; \qquad \bar{Q}_1 = -2\left((p_3 - p_0)\theta^1 + (p_1 + ip_2)\theta^2\right),$$
$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial \theta^2}, \qquad \bar{Q}_2 = 2\left((p_3 + p_0)\theta^2 - (p_1 - ip_2)\theta^1\right), \tag{9}$$

задовольняють співвідношення (1)–(3). У роботі [4] наведена нелінійна реалізація генераторів парасуперaлгебри Пуанкаре в термінах змінних θ_1, θ_2. Існує також реалізація генераторів P_μ, $J_{\mu\nu}$, Q_A, $\bar{Q}_A$ у термінах чотирьох параграсманових змінних θ^1, θ^2, $\bar{\theta}^1$, $\bar{\theta}^2$. У цьому випадку маємо

$$P_\mu = p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu},$$
$$J_{\mu\nu} = x_{[\mu}p_{\nu]} - \frac{1}{4}\left((\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta}\left[\theta^\alpha, \frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right] + (\bar{\sigma}_{\mu\nu})_{\alpha\beta}\left[\bar{\theta}^\alpha, \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\beta}\right]\right), \tag{10}$$

$$Q_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i(\sigma_\mu)_{\alpha\beta}\bar{\theta}^\beta P^\mu, \quad \bar{Q}_\alpha = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} + i\theta^\beta(\sigma_\mu)_{\beta\alpha}P^\mu. \tag{11}$$

Тепер можна визначити коваріантні похідні

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - (\sigma_\mu)_{\alpha\beta}\bar{\theta}^\beta P^\mu, \quad \bar{D}_\alpha = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} + \theta^\beta(\sigma_\mu)_{\beta\alpha}P^\mu. \tag{12}$$

Похідні (12) мають важливу властивість, яка буде використана надалі, а саме: величини $L = D^\alpha D_\alpha = [D_1, D_2]$ і $\bar{L} = \bar{D}_\alpha\bar{D}^\alpha = [\bar{D}_1, \bar{D}_2]$ комутують з генераторами парасуперaлгебри Пуанкаре.

Зауважимо, що вигляд генераторів (10) і (11) можна одержати із аналогічних виразів для генераторів ($N = 1$) суперaлгебри Пуанкаре, якщо в них скрізь вважати, що θ_α – це параграсманові змінні, які задовольняють співвідношення (4), а вирази типу $\bar{\theta}^\alpha\theta^\beta$ замінити на $\frac{1}{2}[\bar{\theta}^\alpha, \theta^\beta]$.

3. Незвідне скалярне парасуперполе. Розглянемо функції (парасуперполя), визначені на просторі змінних $x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^\beta$. Нехай $\Phi = \Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ – скалярне парасуперполе. Це парасуперполе, при розкладі в ряд, містить 100 компонент. Однак, можна визначити скалярне парасуперполе з меншою кількістю компонент. Для цього будемо вимагати, щоб $\Phi(x, \theta, \bar{\theta})$ задовольняло співвідношення

$$D_\alpha\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0 \tag{13}$$

або

$$\bar{D}_\alpha\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = 0. \tag{14}$$

Через те, що (13) і (14) інваріантні відносно перетворень парасуперaлгебри Пуанкаре, то ці співвідношення виділяють із простору парасуперполів, що мають 100 компонент, інваріантні підпростори, що містять парасуперполя з меншим числом компонент (далі буде показано, що число компонент дорівнює 10). Парасуперполя, що задовольняють (13) і (14), є незвідними.

Для дослідження рівнянь (13) і (14) перейдемо до нового зображення для парасуперполів

$$\Phi_\pm(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp(\mp G)\Phi, \tag{15}$$

де

$$G = \frac{1}{2}h_\mu P^\mu, \tag{16}$$

а h_μ має вигляд $h_\mu = (\sigma_\mu)_{\beta\alpha}[\bar{\theta}^\alpha, \theta^\beta]$ (ці зображення будемо називати + та − зображеннями). Оператори A_+ і A_- в зображеннях + і − пов'язані з оператором A у вихідному зображенні згідно з формулою

$$A_\pm = \exp(\mp G)A\exp(\pm G). \tag{17}$$

Тоді, використовуючи формули (11), (12), (17), можна отримати генеротори $Q, \bar{Q}, D, \bar{D}$ в + і − зображеннях. Крім того, можна показати, що Φ_+ не залежить від $\bar{\theta}$, а Φ_- – від θ, звідки випливає, що $\Phi_+(x, \theta)$ буде мати вигляд (анологічно для Φ_-, але замість θ буде $\bar{\theta}$):

$$\Phi_+(x, \theta) = A_+(x) + \theta^\alpha\varphi_{+\alpha} + \theta^\alpha\theta^\beta\psi_{+\alpha\beta} + \\ +(\theta^\alpha\theta_\alpha)\theta^\beta\lambda_{+\beta} + (\theta^1)^2(\theta^2)^2 B_+(x). \tag{18}$$

У вихідному зображенні полю $\Phi_+(x, \theta)$ відповідає поле $\Phi_+(x, \theta, \bar{\theta}) = \exp(G)\Phi_+(x, \theta)$, що задовольняє рівняння $\bar{D}_\alpha\Phi_+ = 0$.

Таким чином, інваріантні простори, виділені рівняннями (13) і (14), містять 6 незалежних полів: 3 поля із спіном 0; 2 поля із спіном $\frac{1}{2}$ і 1 поле із спіном 1 (див., також [4, 6]).

На закінчення цього розділу розглянемо закон перетворення величин $A, \varphi_\alpha, \psi_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha, B$ при парасуперперетвореннях. Варіація парасуперполя $\Phi_+(x, \theta)$, яка пов'язана з нескінченно малими парасуперперетвореннями, визначається формулою

$$\delta\Phi_+(x, \theta) = i(\xi^\alpha Q^+_\alpha + \bar{\xi}_\alpha\bar{Q}^{+\alpha})\Phi_+, \tag{19}$$

де $Q^+, \bar{Q}^+$ – парасуперзаряди в + зображенні. Тоді одержуємо

$$\begin{aligned}
&\delta A = 2\xi^\alpha \varphi_\alpha, \qquad \delta B = 2\bar{\xi}^\alpha (\sigma_\mu)_\alpha^\beta P^\mu \lambda_\beta,\\
&\delta\varphi_\alpha = \xi_\alpha \chi(x) + \xi^\beta \psi_{(\alpha\beta)} + 2\bar{\xi}^\beta (\sigma_\mu)_{\alpha\beta} P^\mu A,\\
&\delta\chi = 2\xi^\alpha \lambda_\alpha + 2\bar{\xi}^\beta (\sigma_\mu)_\beta^\alpha P^\mu \varphi_\alpha,\\
&\delta(\psi_{(\alpha\beta)}) = 2\bar{\xi}^\beta [(\sigma_\mu)_{\beta\alpha} P^\mu \varphi_\gamma + (\sigma_\mu)_{\gamma\alpha} P^\mu \varphi_\alpha] - 2\xi_{(\beta}\lambda_{\alpha)},\\
&\delta\lambda_\alpha = -2\xi_\alpha B(x) + \bar{\xi}^\beta (\sigma_\mu)_{\alpha\beta} P^\mu \chi - \xi^\beta (\sigma_\mu)_\beta^\gamma P^\mu \psi_{(\alpha\gamma)},
\end{aligned} \tag{20}$$

тут $\psi_{\beta\alpha} - \psi_{\alpha\beta} = \chi(x)\varepsilon_{\beta\alpha}$ (індекс + надалі опускається).

4. Парасуперсиметрична модель Весса-Зуміно. У цьому розділі ми знайдемо рівняння руху для незвідних кіральних парасуперполів $\Phi_+(x,\theta)$. Перш за все, розглянемо рівняння для вільного парасуперполя $\Phi_+(x,\theta)$, тобто за відсутності взаємодії. Враховуючи той факт, що оператор L, визначений у параграфі 2, комутує з генераторами парасуперbegin алгебри Пуанкаре, можна записати рівняння для $\Phi_+(x,\theta)$, яке буде інваріантним відносно парасупергрупи Пуанкаре

$$\bar{L}^+ \exp(-2G)\Phi_+^*(x,\theta) = 0, \tag{21}$$

тут $\bar{L}^+ = [\bar{D}_1^+, \bar{D}_2^+]$, $D^+, \bar{D}^+$ – коваріантні похідні в + зображенні. Беручи до уваги (15), (16) і (17), одержуємо рівняння для компонентних полів $A, \varphi_\alpha, \psi_{\alpha\beta}, \lambda_\alpha, B$:

$$(p_0 + \vec{S}\vec{p})\vec{\Lambda} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\vec{\Lambda} = 0, \tag{22}$$

$$(p_0 + \vec{\sigma}\vec{p})\varphi = 0, \tag{23}$$

$$\Box A = 0, \tag{24}$$

$$\chi(x) = B(x) = \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \tag{25}$$

де $\vec{\Lambda} = (\psi_{22} - \psi_{11},\ -i(\psi_{22} + \psi_{11}),\ \psi_{12} + \psi_{21})$, $\chi(x) = \psi_{12} - \psi_{21}$, матриці S_a мають вигляд

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що система (22) є системою рівнянь Максвелла для безмасового поля із спіном 1. Система (23) – це система для двохкомпонентного спінора безмасового поля із спіном $\frac{1}{2}$. Рівняння (24) – рівняння для безмасового поля із спіном 0.

Тепер перейдемо до розгляду рівняння для поля $\Phi_+(x,\theta)$ із взаємодією (парасуперсиметрична модель Весса-Зуміно). У цьому випадку парасуперсиметричне рівняння для поля $\Phi_+(x,\theta)$ можна записати у вигляді:

$$(\bar{L}^+)^2 \exp(-2G)\Phi_+^*(x,\theta) = m\Phi_+(x,\theta) + g\Phi_+^2(x,\theta), \tag{26}$$

тут m, g – константи взаємодії. Лагранжіан, що відповідає рівнянню (26), буде мати вигляд:

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} = {}&(\Phi_+^* \exp(2G)\Phi_+)_{(\theta^1)^2(\theta^2)^2(\bar{\theta}^1)^2(\bar{\theta}^2)^2} +\\
&+ \left(\frac{1}{2}m\Phi_+^2 + \frac{1}{3}g\Phi_+^3\right)_{(\theta^1)^2(\theta^2)^2} + \text{к.с.},
\end{aligned} \tag{27}$$

де $(\ldots)_{(\theta^1)^2(\theta^2)^2(\bar{\theta}^1)^2(\bar{\theta}^2)^2} = \left(\frac{\partial}{\partial\theta^1}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial\theta^2}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^1}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^2}\right)^2$ (к.с. – це комплексне спряження). Лагранжіан (27) співпадає із лагранжіаном, наведеним у роботі [4].

Автор вдячний А. Г. Нікітіну за дискусії, увагу, підтримку.

[1] Весс Ю., Беггер Дж. Суперсимметрия и супергравитация. – М.: Мир, 1986. – 179 с.

[2] Уэст П. Введение в суперсимметрию и супергравитацию. – М.: Мир, 1989. – 328 с.

[3] Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. – М.: Мир, 1990. – Т. 1 – 512 с.

[4] Beckers J., Debergh N. Poincaré invariance and quantum parasuperfields // Int. J. Mod. Phys. A – 1993. – **8** – P. 5041–5061.

[5] Rubakov V.A. and Spiridonov V.P. On pararelativistic quantum mechanics // Mod. Phys. Lett. A – 1988. – **3** – P. 1337–1347.

[6] Nikitin A.G., Tretynyk V.V. Irreducible representations of the Poincaré parasuperalgebra // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – **28** – P. 1665–1674.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 80–87

UDC 517.945:519.46

Ansatzes and exact solutions for nonlinear Schrödinger and wave equations

I.A. YEHORCHENKO

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: irina@apmat.freenet.kiev.ua

Розглядається ефективний та простий підхід до побудови анзаців для нелійнійного рівняння Шредінгера та нелінійного хвильового рівняння, а також умови їх редукції до звичайних диференціальних рівнянь. Представлено повний опис анзаців деякого типу. Обговорюється зв'язок між розв'язками та лієвською й умовною симетрією цих рівнянь.

We consider construction of ansatzes for nonlinear Schrödinger and wave equations, and conditions of their reduction to ordinary differential equations. Complete description of ansatzes of certain types is presented. The relationship between solutions and both Lie and conditional symmetry of these equations is discussed.

1. Introduction. We are going to use here a straightforward method for construction of exact solutions for partial differential equations (PDE) which sometimes allows to obtain a wider class of exact solutions than the classical Lie method of similarity reduction [1–3]. The idea of this approach focuses on a notion of ansatz – a special substitution which reduces a PDE to another PDE with less number of independent variables or to an ordinary differential equation (ODE) [1, 4, 5]. The Lie method provides ansatzes using subalgebras of an invariance algebra of an equation [1, 2, 3, 6]. We tried to search for ansatzes directly, substituting some general form of ansatz to an equation and then considering conditions of its reduction. This technique is used intensively for two-dimensional equations (see, e.g., [7–13]), and we succeeded to apply it for a four-dimensional equation. The general idea is obvious but the main difficulties here are investigation of compatibility and solution of reduction conditions, which present nontrivial problems.

2. Nonlinear Schrödinger equation. First let us consider the nonlinear Schrödinger equation

$$2iu_t + \triangle u - uF(|u|) = 0. \qquad (1)$$

Here u is a complex-valued function, $u = u(t, \vec{x})$, $\vec{x}$ is a n-dimensional vector of space variables, $|u| = \sqrt{uu^*}$, an asterisk designates complex conjugation, $\triangle u = \partial^2 u/\partial x_a^2$, $a = 1, \ldots, n$.

Eq.(1) with an arbitrary function F is invariant under the Galilei algebra with basis operators

$$\begin{aligned} &\partial_t, \quad \partial_a, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad M = i(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}), \\ &G_a = t\partial_a + ix_a(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}), \quad a, b = 1, \ldots, n. \end{aligned} \qquad (2)$$

Solutions obtained from the algebra (2) by means of the Lie method are well-known [14–16] and all of them are of the form

$$u = \exp\{if(t, \vec{x})\}\,\varphi(\omega). \qquad (3)$$

Such form of a substitution is the most general reducing an arbitrary nonlinear equation (1) to an ODE. The expression (3) where f, ω are some unknown real functions of t and $\vec{x}$ will be an ansatz for Eq.(1) if its substitution reduces (1) to an ODE for a complex function depending on the new variable ω only. Whence we get conditions on the functions f and ω:

$$\begin{aligned} &2f_t + f_a f_a = S(\omega), \quad \triangle f = T(\omega), \\ &\omega_t + f_a\omega_a = X(\omega), \quad \triangle\omega = Y(\omega), \quad \omega_a\omega_a = Z(\omega), \end{aligned} \qquad (4)$$

where S, T, X, Y, Z are arbitrary smooth functions.

For $n = 2$, $n = 3$ we had found the general solution of the system (4) up to equivalency of substitutions (3).

For the purpose of reduction of Eq.(1) it is sufficient to consider the system (4) only up to equivalence of the ansatzes (3). We shall call ansatzes equivalent if they lead to the same solutions of the equation.

We deal here with real functions f and ω, so $Z(\omega)$ in (4) must be nonnegative. Whence we can reduce the equation $\omega_a\omega_a = Z(\omega)$ by local transformations to the same form with $Z(\omega) = 0$ or $Z(\omega) = 1$.

1) $Z(\omega) = 0$. In this case $\omega_a = 0$, $\omega = \omega(t)$ and we can put $\omega = t$. The system (4) can be written as

$$2f_t + f_a f_a = S(t), \quad \triangle f = T(t).$$

It is evident that the ansatzes of form (3) are equivalent up to transformations $f \to f + r(\omega)$, so we can put $S(t) = 0$. We come to the system

$$2f_t + f_a f_a = 0, \quad \triangle f = T(t), \tag{5}$$

and the following theorem gives a necessary condition of its compatibility.

Theorem 1. *The system (5) can be compatible only if*

$$T(t) = \theta'(t)/\theta(t), \quad \theta^{(n+1)} = 0.$$

Proof of this theorem can be carried out using differential consequences of (5) and the Hamilton-Cayley theorem. It is rather cumbersome, and its complete version can be found in [17].

2) $Z(\omega) = 1$. It had been established in [18] that when $n = 3$, $\triangle\omega = N/\omega$, $N = 0, 1, 2$ ($N = 0, 1$ for $n = 2$). Up to equivalency of ansatzes we can put $X(\omega) = 0$.

Theorem 2. *The system of equations*

$$\begin{gathered} 2f_t + f_a f_a = S(\omega), \quad \triangle f = T(\omega), \\ f_a\omega_a + \omega_t = 0, \quad \omega_a\omega_a = 1, \quad \triangle\omega = N/\omega, \end{gathered} \tag{6}$$

where $N = 0, 1$ with $n = 2$, $N = 0, 1, 2$ with $n = 3$ is compatible iff $T(\omega) = 0$; $S(\omega) = c_1\omega + c_2$, $N = 0$; $S(\omega) = c_1/\omega^2 + c_2$, $N = 1$; $S(\omega) = c_1$, $N = 2$; c_1, c_2 are arbitrary constants.

Theorem 3. *The system (4) is invariant with respect to the operators*

$$\partial_a, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a, \quad \widehat{G}_a = t\partial_a + x_a\partial_f. \tag{7}$$

Thus, we can search for its general solution up to transformations generated by operators (7):

$$x_a \to \alpha_{ab}x_b + \beta_a, \quad x_a \to g_a t + x_a, \tag{8}$$

α_{ab}, β_a, g_a are constants, $\alpha_{ac}\alpha_{cb} = \delta_{ab}$ (the Kronecker symbol).

Further we adduce all solutions of the system (4), which are nonequivalent up to transformations (8).

I. $Z(\omega) = 0$, $\omega = t$:

$$1) \quad n = 3, \quad f = \frac{1}{2}\left\{\frac{x_1^2}{t + A_1} + \frac{x_2^2}{t + A_2} + \frac{x_3^2}{t + A_3}\right\}; \tag{9}$$

$$2) \quad n = 2, 3, \quad f = \frac{1}{2}\left\{\frac{x_1^2}{t + B_1} + \frac{x_2^2}{t + B_2}\right\}; \tag{10}$$

$$3) \quad n = 2, 3, \quad f = \frac{x_1^2}{2t + c_1};$$

$$4) \quad n = 2, 3, \quad f = c_2x_1 + c_3 - \frac{1}{2}c_2^2 t.$$

II. $Z(\omega) = 1$:

$$1) \quad n = 2, 3, \quad \omega = x_1 + at^2, \quad f = -2atx_1 - \frac{4}{3}a^2t^3 + bt;$$

$$2) \quad n = 2, 3, \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad f = c\tan^{-1}\frac{x_1}{x_2} + dt;$$

$$3) \quad n = 3, \quad \omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, \quad f = et.$$

Here A_i, B_i, C_i, a, b, c, d, e are arbitrary constants.

The ansatz (3) reduces Eq.(1) to the following ODE:

$$-2S(\omega)\varphi + iT(\omega)\varphi + 2iX(\omega)\dot\varphi + Y(\omega)\dot\varphi + Z(\omega)\ddot\varphi = \varphi F(|\varphi|). \tag{11}$$

It follows from compatibility conditions of the system (4) that two types of Eq.(11) are possible:

1) If $\omega_a\omega_a = Z(\omega) = 0$, we take $\omega = t$ and Eq.(11) will be of the form

$$i(2\dot\varphi + T(t)\varphi) = \varphi F(|\varphi|), \tag{12}$$

where $T = \sum\limits_{i=1}^{m}\frac{1}{t + B_i}$, m may take values from 1 to n; or $T = 0$.

Eq.(12) can be easily solved in quadratures: if $T \neq 0$ then

$$\varphi = r\exp\frac{i}{2}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{x_l^2}{t + B_l} - \int F(r)dt\right\},$$

$$r = C[(t + B_1)\dots(t + B_m)]^{1/2}$$

or if $T = 0$, $f = c_1x_1 + c_2 - \frac{1}{2}c_1^2 t$ then

$$\varphi = c\exp i\left\{c_1x_1 - \frac{1}{2}F(c)t + c_2 - c_1^2\frac{t}{2}\right\}.$$

2) If $\omega_a\omega_a = Z(\omega) = 1$ then Eq.(11) will be of the form

$$-2S(\omega)\varphi + \frac{N}{\omega}\dot\varphi + \ddot\varphi = \varphi F(|\varphi|). \tag{13}$$

Eq.(13) in general obviously cannot be solved in quadratures. Some of its particular solutions were given in [14–16].

3. Nonlinear wave equation. We can apply the results for the Schrödinger equation (1) to describe all ansatzes of the form

$$u = f(x)\varphi(\omega) \tag{14}$$

with $\omega = \alpha_\mu x_\mu$, $\alpha_\mu\alpha_\mu = 0$ for a nonlinear wave equation

$$\Box u = \lambda u^k, \tag{15}$$

where $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ is a real function; $k \neq 1$, λ are parameters; the summation over repeated Greek indices is as follows: $x_\mu x_\mu \equiv x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Further for simplicity of presentation we shall take $\omega = x_0 + x_3$. In this case the ansatz (14) will reduce Eq.(15) to an ODE if $f(x)$ satisfies the following conditions:

$$\Box f = f^k T(\omega), \quad 2(f_0 - f_3) = f^k Y(\omega). \tag{16}$$

Here $Y(\omega)$ must not vanish. By means of a substitution of the form $f \to \gamma(\omega) f$ (ansatzes (14) are equivalent up to such substitutions) we can get the system (16) with $Y = 2/(1-k)$. Then from the second equation of (16) we get

$$f = \left[\Phi(\omega, x_1, x_2) + \frac{1}{2}(x_0 - x_3)\right]^{1/(1-k)}. \tag{17}$$

Substitution of (17) into the first equation of (16) gives the following system for the function Φ:

$$\Phi_{11} + \Phi_{22} = T(\omega)(1-k), \quad 2\Phi_\omega - \Phi_1^2 - \Phi_2^2 = 0.$$

Using the results for the system (4) we get solutions for different $T(\omega)$ with which the system (16) can be compatible:

$$\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i^2}{\omega + B_i}, \quad T = \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\omega + B_i}; \quad (m = 1 \text{ or } 2)$$

$$\Phi = B_1 x_1 + B_2 + \frac{B_1^2}{2}\omega, \quad T = 0; \ B_i \text{ are constants.}$$

Now Eq.(15) can be reduced to the ODE $\varphi' \dfrac{2}{1-k} + T(\omega)\varphi = \lambda\varphi^k$, which is solvable in quadratures: e.g., let $T = \dfrac{1}{k-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\dfrac{1}{\omega + B_i}$. Then

$$\varphi = \sqrt{\rho}\left[\frac{\lambda(1-k)^2}{2}\int \rho^{\frac{k-1}{2}} d\omega\right]^{\frac{1}{1-k}}, \quad \rho = (\omega + B_1)(\omega + B_2).$$

These results can be easily generalized for the cases when ω is a solution of the system $\Box\omega = 0$, $\omega_\mu\omega_\mu = 0$ (see e.g. [19]) or when $u = u(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $n > 3$.

Reduction and solutions for Eq.(15) when u is a complex function are considered in [20].

4. Relation between symmetry and reduction of partial differential equations. In general an ansatz which reduces a PDE to another PDE with less number of independent variables or to an ODE corresponds to some Q-conditional symmetry of that equation. The notion of conditional symmetry was introduced in [21], and many examples of such symmetries for considered equations are given in [7–13].

Definition. *Let us consider a PDE*

$$F(x_1, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{r}{u}) = 0, \tag{18}$$

where x is a vector of independent variables, U is some function, $\underset{k}{u}$ is a set of k-th order partial derivatives. We shall say that Eq.(18) is Q-conditionally invariant with respect to a set of operators $\{Q_a = \xi^{ab}(x,u)\partial_b + \eta^a(x,u)\partial_u\}$ if the system containing Eq.(18) and the additional conditions

$$L_a = \xi^{ab}(x,u)u_b - \eta^a(x,u) = 0 \tag{19}$$

is compatible and invariant with respect to these operators.

Operators of conditional invariance can be defined up to an arbitrary multiplier,and such invariance is essential when Q_a are not proportional to some operators of Lie invariance.

It can be proved that in the case of Q-conditional invariance a solution of the system (19) gives an ansatz which will reduce Eq.(18). Very often investigation of reduction conditions or Q-conditional invariance gives more ansatzes than the classical Lie method. However, all ansatzes described above correspond to Lie symmetry operators of Eqs. (1) and (15). So we proved that ansatzes (3) and (14) yield no essential Q-conditional invariance for these equations. This fact does not disprove the idea that the direct method of reduction is more general than the classical Lie method, though it is usually more difficult to apply.

[1] Lie S. // Math. Ann. – 1884. – **24**. – P. 52–89.

[2] Ovsyannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New York: Academic Press, 1982.

[3] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer Publishers, 1989.

[4] Fushchych W.I. Symmetry in problems of mathematical physics // Theoretical-algebraical investigations in mathematical physics. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1981. – P. 6–28.

[5] Fushchych W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the non-linear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. A. – 1983. – **22**. – P. 3645–3656.

[6] Fushchych W.I., Barannik L.F. and Barannik A.F. Subgroup analysis of the Galilei and Poincare group and reduction of nonlinear equations. – Kyiv: Naukova Dumka, 1991.

[7] Bluman G.W., Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025–1042.

[8] Fushchych W.I., Serov N.I. On conditional invariance of the nonlinear d'Alembert // Symmetry and solutions of equations of mathematical physics. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1988. – P. 98–102.

[9] Fushchych W.I. On symmetry and some exact solutions of some many-dimensional equations of mathematical physics // Symmetry and solutions of nonlinear equations of mathematical physics. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1987. – P. 4–16

[10] Olver P.J., Rosenau P. Group-invariant solutions of differential equations // SIAM J. Appl. Math. – 1987. – **18**. – P. 263–278.

[11] Clarkson P.A., Kruskal M.D. New similarity reductions of the Boussinesq equation // J. Math. Phys. – 1989. – **30**. – P. 2201–2213.

[12] Levi D., Winternitz P. Non-classical symmetry reduction - example of the Boussinesq equation // J. Phys. A. – 1989. – **22**. – P. 2915–2924.

[13] Fushchych W.I. Conditional symmetry of mathematical physics equations // Ukr. Math. Zhurn. – 1991. – **43**. – P. 1456–1470.

[14] Fushchych W.I., Serov N.I. On some exact solutions of the three-dimensional non-linear Schrödinger equation // J. Phys. A. – 1987. – **20**. – P. 1929–1933.

[15] Tajiri M. Similarity reductions of the 1 and 2 dimensional non-linear Schrödinger equations // J. Phys. Soc. Japan. – 1983. – **52**. – P. 1908–1917.

[16] Gagnon L., Winternitz P. Lie symmetries of a generalized non-linear Schrödinger equation. 1. The symmetry group and its subgroups // J. Phys. A. – 1988. – **21**. – P. 1493–1511.

[17] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. Non-Lie ansätze and conditional symmetry of nonlinear Schrödinger equation // Ukr. Math. Zhurn. – 1991. – **43**. – P. 1620–1628.

[18] Collins C.B. Complex potential equations. I // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. – 1976. – **80**. – P. 165–184.

[19] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z., Revenko I.V. Compatibility and Solutions of Nonlinear d'Alembert and Hamilton Equations. – Kyiv, 1990. – (Preprint / Institute of Mathematics; 90.39).

[20] Fushchych W.I, Yegorchenko I.A. The symmetry and exact solutions of the nonlinear d'Alembert equation for complex fields // J. Phys. A. – 1989. – **22**. – P. 2643–2652.

[21] Fushchych W.I., Nikitin A.G. Symmetries of Maxwell's equations. – Dordrecht: Reidel Publishers, 1987.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 88–99

UDC 517.958

Conditional symmetries of the (1+1)-dimensional Boussinesq equation: a no-go theorem

R.Z. ZHDANOV †, ***V.I. LAHNO*** ‡

† *Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv*
E-mail: rzhdanov@apmat.freenet.kiev.ua

‡ *Pedagogical Institute, Poltava*
E-mail: lahno@pdpi.poltava.ua

Одержано вичерпний опис умовних симетрій, які допускаються одновимірним рівнянням Бусінеска. Доведено, що, або розв'язком визначальних рівнянь для умовних симетрій є лiївські симетрії, або ж ці рівняння еквівалентні рівнянню Бусінеска.

We obtain an exhaustive description of conditional symmetries admitted by the Boussinesq equation in one spatial dimension. It is proved that solving the determining equations for the conditional symmetries either yields classical (Lie symmetries) or is equivalent to solving the Boussinesq equation itself.

1. Introduction. The first exact solution of the (1+1)-dimensional nonlinear porous medium equation (called also the Boussinesq equation)

$$u_t = \frac{k}{m}(uu_x)_x \tag{1}$$

has been obtained by Boussinesq itself [1]. Here k is the filtration coefficient, m is the porosity of soil and $u = u(t,x)$ is the pressure of the ground water at the time t and at the cross-section measured by the x-axis.

Boussinesq was looking for a solution in a separated form

$$u(t,x) = X(x)T(t)$$

with the following conditions:

$$u(t,0) = 0, \quad u_x|_{x=L} = 0.$$

Thus constructed solution reads as

$$u = \frac{H_0 F(\xi)}{1 + \dfrac{3b^2 k H_0}{2mL^2} t}, \tag{2}$$

where H_0 is a constant, $\xi = x/L$ and the function $F = F(\xi)$ is defined implicitly

$$\xi = \frac{1}{b}\int\limits_0^F \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^3}}, \qquad b = \int\limits_0^1 \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^3}} = \frac{1}{3}B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

The above solution characterizes the so-called Boussinesq ordered regime.

The next exact solution of the Boussinesq equation (BE) was found much later by Barenblatt (the instant source solution) [2]

$$u = \frac{m}{6kt}\left[\left(\frac{9kt}{m}\right)^{\frac{2}{3}} - x^2\right], \qquad 0 \le x \le \left(\frac{9kt}{m}\right)^{\frac{1}{3}} = l. \tag{3}$$

Note that the paper [2] contained a misprint which had been removed by Sokolov in [3], where the instant source solution had been presented in the form (3).

It is easy to become convinced of the fact that both solutions (2), (3) correspond to the Lie symmetry of the Boussinesq equation. Indeed, the solution (2) is a particular case of the Ansatz

$$u = (1+\alpha t)^{-1}\varphi(x), \qquad \alpha = \frac{3b^2 k H_0}{2mL^2},$$

that is invariant with respect to the one-parameter Lie transformation group having the generator

$$Q_1 = (1+\alpha t)\partial_t - u\partial_u, \qquad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \qquad \partial_u = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Furthermore, the Barenblatt's solution (3) is invariant with respect to the one-parameter transformation group generated by the operator

$$Q_2 = 3t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, \qquad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}.$$

The operators Q_1, Q_2 belong to the maximal invariance algebra admitted by BE [4]

$$\langle T = \partial_t, \quad P = \partial_x, \quad D_1 = t\partial_t - u\partial_u, \quad D_2 = x\partial_x + 2u\partial_u\rangle. \qquad (4)$$

Later on a systematic search for invariant solutions within the framework of the symmetry reduction technique has been undertaken (an account of the results obtained in this way and the comprehensive list of relevant references can be found in [5, 6]). As a choice of exact invariant solutions of BE is very restricted there are was several attempts to utilize its conditional (non-classical) symmetries for the sake of constructing new analytical solutions. The notion of non-classical symmetry was firstly introduced by Bluman and Cole in the paper [7], where the determining equations for non-classical symmetries admitted by the linear one-dimensional heat equation had been obtained. An active study of conditional symmetries of nonlinear partial differential equations (PDEs) has been initiated by papers [8–12] which yielded a lot of principally new (non-Lie) exact solutions for a number of nonlinear PDEs (see, e.g., [6, 13] and references cited there). Note that an overwhelming majority of the papers devoted to studying conditional symmetries of PDEs consider equations in two dimensions. Some results on study of conditional symmetries of multi-dimensional PDEs are given in [14], where we present wide classes of conditional symmetries admitted by the nonlinear Dirac, wave and $SU(2)$ Yang-Mills equations.

To the best of our knowledge the first papers devoted to the studying conditional symmetries of BE appeared in 1988-89 [16, 17], then other papers followed (see, e.g., [6] and the references therein). However, no new solutions were found in this way. One obtained new conditional symmetries that after performing the symmetry reduction routine gave rise to invariant solutions corresponding to the Lie symmetry of BE. One of the aims of the present paper is to provide an explanations to this "experimental data". We prove that the integrating the determining equations for conditional symmetries of BE either yields classical Lie symmetries or is equivalent to solving the Boussinesq equation (1). Furthermore, we will prove that a similar assertion holds in part for an *arbitrary* evolution type PDE in one dependent and two independent variables.

2. Conditional symmetries of BE. Denoting the coefficient $\frac{m}{k}$ as λ we represent BE (2) in the form

$$u_t = \lambda\left(uu_{xx} + u_x^2\right). \qquad (5)$$

Following the usual procedure for finding conditional symmetries (see, e.g., [6, 15]) we are looking for a conditional symmetry operator of the general form

$$Q = T(t,x,u)\partial_t + X(t,x,u)\partial_x + U(t,x,u)\partial_u, \qquad (6)$$

where T, X, U are some sufficiently smooth functions. Due to the fact that, provided Q is a conditional symmetry operator of BE, an operator $f(t,x,u)Q$ with arbitrary function f is a conditional symmetry operator of BE as well [14] we can simplify substantially the structure of an operator to be found. Namely, it is sufficient to consider the two particular cases of the general formula (6), namely

1. $T = 1$,
2. $T = 0, \quad X = 1$.

Case 1. The system of determining equations for the coefficients of operator $Q = \partial_t + X(t,x,u)\partial_x + U(t,x,u)\partial_u$ reads

$$\begin{aligned}
&U_t = \lambda u U_{xx} + u^{-1}U^2 - 2UX_x, \quad uX_{uu} - X_u = 0,\\
&X_t - u^{-1}XU + 2XX_x - 2UX_u = \lambda(uX_{xx} - 2uU_{xu} - 2U_x),\\
&\lambda(uU_{uu} + U_u + u^{-1}U) + 2(XX_u - \lambda u X_{xu}) = 0.
\end{aligned}$$

A simple computation yields the general solution of the above system. It splits into two inequivalent classes

$$X = k_1 x + k_2, \quad U = k_1 u; \qquad (7)$$

$$X = (k_1 + t)^{-1}(k_2 x + k_3), \quad U = (k_1 + t)^{-1}(2k_2 - 1)u. \qquad (8)$$

Here k_1, k_2, k_3 are arbitrary real constants.

Now inserting the formulae (7) into (6) under $T = 1$ yields an operator that is the linear combination of Lie symmetry operators

$$T = \partial_t, \quad P = \partial_x, \quad D_2 = x\partial_x + 2u\partial_u.$$

Next inserting the formulae (8) into (6) and multiplying by $k_1 + t$ yield an operator that is a linear combination of Lie symmetry operators

$$T = \partial_t, \quad P = \partial_x, \quad D_1 = t\partial_t - u\partial_u, \quad D_2 = x\partial_x + 2u\partial_u.$$

Case 2. BE (5) is conditionally-invariant with respect to the operator

$$Q = \partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u, \qquad (9)$$

iff the following equation holds

$$L(\eta) \equiv \eta_t - \lambda\left(3\eta\eta_x + u\eta_{xx} + 2u\eta\eta_{xu} + \eta^2(u\eta_{uu} + 2\eta_u)\right) = 0. \quad (10)$$

Let us make in the above equation the substitution

$$\eta(t,x,u) = -\frac{w_x}{w_u}, \quad (11)$$

where $w = w(t,x,u)$ is a new dependent variable. As a result, we get

$$L\left(-\frac{w_x}{w_u}\right) = (w_u)^{-2}\left(w_x\frac{\partial}{\partial u} - w_u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[w_t + \lambda\frac{w_x^2}{w_u} - \right.$$
$$\left. -\lambda u\left(w_{xx} - \frac{2w_xw_{xu}}{w_u} + \frac{w_x^2w_{uu}}{w_u^2}\right)\right]. \quad (12)$$

Combining equations (10) and (12) we conclude that there exists such function $f(t,w)$ that

$$w_t - \lambda u\left(w_{xx} - \frac{2w_xw_{xu}}{w_u} + \frac{w_x^2w_{uu}}{w_u^2}\right) + \lambda\frac{w_x^2}{w_u} = f(t,w).$$

Making in the above equation the hodograph transformation

$$t = y_0, \quad x = y_1, \quad u = U(y_0,y_1,y_2), \quad w = y_2 \quad (13)$$

yields that the function $U(t,x,u)$ obey the nonlinear PDE

$$-\frac{1}{U_{y_2}}\left(U_{y_0} - \lambda\left(UU_{y_1y_1} + U_{y_1}^2\right)\right) = f(y_0,y_2).$$

At last, making the change of variables

$$z_0 = y_0, \quad z_1 = y_1, \quad z_2 = \Omega(y_0,y_2), \quad V = U \quad (14)$$

where Ω is a first integral of the first-order PDE

$$\Omega_{y_0} + f(y_0,y_2)\Omega_{y_2} = 0 \quad (15)$$

reduces the equation obtained to the Boussinesq equation for the function $V = V(z_0,z_1,z_2)$

$$V_{z_0} = \lambda\left(VV_{z_1z_1} + V_{z_1}^2\right). \quad (16)$$

Note that the variable z_2 is parametrical.

Thus integration of the determining equation for the coefficient of infinitesimal operator (9) is equivalent to solving the initial Boussinesq equation. By this very reason, conditional symmetries of the form (9) obtained by guesswork in [17] yields solutions that are nothing but group-invariant solutions. Consider an illustrative example. Let us take as $V(z_0,z_1,z_2)$ a solution of (16) invariant with respect to the displacement group by the variable y_0, namely,

$$V(z_0,z_1,z_2)^2 = r_1(z_2)z_1 + r_2(z_2),$$

where r_1, r_2 are arbitrary smooth functions. Making the changes of variables (14) and (13) we rewrite the above expression as follows

$$u^2 = r_1(w(t,x,u))x + r_2(w(t,x,u)). \quad (17)$$

This equality determines implicitly the function $w(t,x,u)$. Computing the variables w_x and w_u yields the form of $\eta(t,x,u)$

$$\eta(t,x,u) = -\frac{w_x}{w_u} = \frac{r_1(w(t,x,u))}{2u}.$$

Hence we get the form of the conditional symmetry operator admitted by the initial Boussinesq equation (5)

$$Q = \partial_x - \frac{r_1(w(t,x,u))}{2u},$$

where $w(t,x,u)$ is given by (17). Evidently, this operator does not belong to the symmetry algebra of the Boussinesq equation and, consequently, is a conditional symmetry for (5). However, if we will integrate the equation for characteristics

$$u_x = \frac{r_1(w(t,x,u))}{2u}$$

we will get a solution that is invariant with respect to the group of displaysments by x. Indeed, the above equation is equivalent to the following PDE:

$$\left(u^2\right)_x = r_1(w(t,x,u)).$$

Differentiating it with respect to x yields

$$\left(u^2\right)_{xx} = r_1'(w_x + w_uu_x) = r_1'\left(-\frac{r_1}{r_1'x + r_2'} + \frac{2uu_x}{r_1'x + r_2'}\right) = 0.$$

Consequently, the solution corresponding to the conditional symmetry Q belongs to the class

$$u^2(t,x) = R_1(t)x + R_2(t).$$

Inserting this expression into BE yields that $R_1' = R_2' = 0$, which is the same as what was to be proved.

As proved in [18] the same assertion holds for the linear heat equation $u_t = u_{xx}$. Namely, it has been shown that investigating conditional symmetry within the class of operators (9) is equivalent to solving the heat equation. In view of this fact one gets suspicious that a statement of this kind should hold for a more general class of PDEs. It is indeed the case for for arbitrary order evolution type equations in one spatial variable

$$u_t = F(t,x,u,u_1,u_2,\ldots,u_n), \tag{18}$$

where $u_i = \partial^i u/\partial x^i,\ i=1,2,\ldots,n$.

Theorem 1. *Let an equation of the form (18) be conditionally-invariant with respect to the operator (9). Then the determining equation for the function $\eta(t,x,u)$ is equivalent to the initial equation (18).*

Proof. We give here a principal scheme of the proof omitting the secondary technical details. The criterion for the equation (18) to be conditionally invariant with respect to the operator (9) reads

$$D_t\eta - D_x G \,\Big|_{u_t=G} = 0. \tag{19}$$

Here $G = G(t,x,u)$ is obtained from F by replacing the derivatives u_1, u_2, …, u_n by their expressions via the function $\eta(t,x,u)$ and its derivatives with the use of the side condition $u_x = \eta(t,x,u)$ and its differential consequences. The symbols D_t, D_x stand for the total derivatives with respect to t and x correspondingly, i.e.,

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t\frac{\partial}{\partial u}, \qquad D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u}.$$

Relation (19) is rewritten to become

$$\eta_t + G\eta_u - \left(\frac{\partial}{\partial x} + u_x\frac{\partial}{\partial u}\right)G = 0.$$

Now we make in the above equation the substitution (11) which yields the following PDE:

$$\begin{gathered} w_u^{-2}(w_x w_{ut} - w_u w_{xt}) + w_u^{-2}(w_x w_{uu} - w_u w_{xu})H- \\ -w_u^{-1}\left(w_x\frac{\partial}{\partial x} - w_u\frac{\partial}{\partial u}\right)H = 0. \end{gathered} \tag{20}$$

Here H is the function of t,x,w and of the derivatives of w obtained from G via the substitution (11).

Equation (20) is rewritten in the following equivalent form:

$$w_u^{-2}\left(w_x\frac{\partial}{\partial x} - w_u\frac{\partial}{\partial u}\right)(w_t + w_u H) = 0,$$

whence we conclude that there exists smooth function $f(t,w)$ such that

$$w_t + w_u H = f(t,w).$$

Making in the equation obtained the hodograph transformation (13) yields

$$U_{y_0} - F(y_0,y_1,U,U_1,\ldots,U_n) = -f(y_0,y_2)U_{y_2}. \tag{21}$$

At last, changing the independent variables according to formulae (14), (15) yields that the function $U = U(z_0,z_1,z_2)$ is a solution of the equation $U_{z_0} - F(z_0,z_1,U,U_1,\ldots,U_n) = 0$ which contains the variable z_2 as a parameter. As the last equation up to notations coincides with the initial equation (9), the theorem is proved.

3. Some conclusions. Thus, an extension of the classical Lie reduction scheme in order to include into consideration conditional symmetries is inefficient for the case of BE in one spatial dimension. So there is an evident need for more general (or simply different) approaches to constructing its exact solutions. One of the possibilities is utilizing high-order conditional symmetries of PDEs introduced independently by Zhdanov and Fushchych [19, 20] and Fokas and Liu [21]. These symmetries provide a theoretical background for a procedure of 'nonlinear separation of variables' suggested by Galaktionov [22]. As we believe, in this way it might be possible to construct principally new exact solutions of BE. For example, using a technique developed in [20] we have established that the Boussinesq equation with a source

$$u_t = \lambda\left(uu_{xx} + u_x^2\right) + au^2 + bu + c, \tag{22}$$

where a, b, c are arbitrary constants is conditionally-invariant with respect to the Lie-Bäcklund vector field

$$Q = \left(u_{xxx} + \frac{a}{2\lambda} u_x\right) \frac{\partial}{\partial u} + \cdots.$$

This symmetry can be utilized in order to reduce PDE (22) to *three* ordinary differential equations and thus get its new non-Lie solutions.

A principal idea of the iterations of the non-classical (conditional) symmetries method for constructing higher order non-classical symmetries for evolution-type PDEs (18) suggested by Nucci [23] is studying non-classical symmetries of the determining equations for (19). The latter is called G- or heir-equation. Due to Theorem 1 PDE (19) is equivalent to the initial equation (18) which means that the above method is inefficient for evolution-type PDEs.

The fact that PDEs under consideration are of parabolic type is crucial for holding no-go theorems like Theorem 1. Consider a hyperbolic type equation, say, the nonlinear wave equation

$$u_{tt} - u_{xx} = F(u). \tag{23}$$

Let us study its conditional invariance within the class of operators (9). A simple computation yields that each nonlinear PDE of the form (23) admitting an operator (9) is equivalent to the weakly nonlinear wave equation

$$u_{tt} - u_{xx} = \lambda u \ln u. \tag{24}$$

Furthermore, the conditional symmetry operator admitted by (24) takes the form $Q = \partial_x - a(x)u$, where $a(x)$ is a solution of the nonlinear ordinary differential equation

$$a'' + 2aa' + \lambda a = 0. \tag{25}$$

Note that the above equation is integrable by quadratures. Its particular solution $a(x) = -\frac{1}{2}\lambda(x + \text{const})$ gives rise to an invariant solution of (24)

$$u(t,x) = \exp\left\{\frac{\lambda}{4}\left(t^2 - (x+\text{const})^2\right)\right\}.$$

All other solutions of (25) yields non-Lie solutions of the wave equation with the logarithmic nonlinearity (24). These solutions have the form

$$u(t,x) = \exp\left\{\int_{x_0}^{x} a(y)dy\right\}\varphi(t),$$

the function $\varphi(t)$ satisfying the nonlinear ordinary differential equation

$$\varphi'' = (C + \lambda \ln \varphi)\varphi.$$

Here $C = a'(x) + a^2(x) + \int_{x_0}^{x} a(y)dx$ is the first integral of the ordinary differential equation (25).

So for the hyperbolic type equations the method of conditional symmetries is quite efficient and yields new exact solutions. A principal difference between the cases of hyperbolic and parabolic type PDEs is that in the case of the latter it is possible to eliminate all derivatives using the equation, side condition $u_x = \eta(t,x,u)$ and its differential consequences. This means that there is nothing to split by and the system of determining equations reduces to the one PDE. And it is only natural that this equation is equivalent to solving the initial equation whose conditional symmetry is investigated. We guess that the same assertion holds for multi-dimensional evolution type PDEs

$$u_t = F(t, \vec{x}, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{N}{u}), \tag{26}$$

where $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ and the symbol $\underset{k}{u}$ stands for the set of kth order derivatives of the function $u(t,\vec{x})$ with respect to the spatial variables $x_1, \ldots, x_n$. Namely, the problem of describing conditional symmetries of PDE (26) within the class of operators

$$Q_i = \partial_{x_i} - \eta_i(t, \vec{x}, u), \qquad i = 1, \ldots, n$$

is equivalent to integrating (26).

Note that the problem of symmetry reduction of the three-dimensional BE

$$u_t = \lambda\Delta\left(u^2\right)$$

has been completely solved in [24]. We intend to devote one of our future publications to investigating conditional symmetries of BE in three spatial dimensions.

R.Z. Zhdanov is grateful to the DFFD of Ukraine (project № 1.4/356) for partial financial support.

[1] Boussinesq J. Rechears theoriques sur l'ecoulement des nappes d'eau infiltres dans le sot et sur le debit des sources // J. Math. Pure et Appl. – 1904. – **10**, № 1. – P. 5–78.

[2] Barenblatt G.I. On some non-stationary dynamics of liquid and gas in porous medium // Applied Math. and Mech. – 1952. – **16**, № 1. – P. 67–78.

[3] Sokolov Yu.D. On some particular solutions of the Bussinesq equation // Ukrain. Math. J. – 1956. – **8**, № 1. – P. 48–54.

[4] Ovsjannikov L.V. Group properties of nonlinear heat conductivity equation // Proc. Acad. Sci. USSR, 1959. –**125**, № 3. – P. 492–495.

[5] Hill J.M. // J. Eng. Math. – 1989. – **23**. – P. 141.

[6] Fushchych W.I., Shtelen W.M. and Serov N.I., Symmetry analysis and exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

[7] Bluman G.W. and Cole J.D. The general similarity solution of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**, № 11. – P. 1025–1042.

[8] Olver P. and Rosenau Ph. The construction of special solution to partial differential equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **114**, № 3. – P. 107–112.

[9] Fushchych W.I. and Tsyfra I.M. On a reduction and solutions of nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – L45.

[10] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetry and exact solutions of the nonlinear spinor equations // Phys. Rep. – 1989. – **172**, № 4. – P. 123–174.

[11] Clarkson P., Kruskal M. New similarity solutions of the Bussinesq equation // J. Math. Phys. –1989. – **30**, № 10. – P. 2201–2213.

[12] Levi D., Winternitz P. Non-classical symmetry reduction: example of the Bussinesq equation // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989 – **22**, № 15. – P. 2915–2924.

[13] Clarkson P., Mansfield E.L. // Physica. – 1993. – **70**. – P. 250.

[14] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. – Kyiv: Mathematical Ukraina Publ., 1997.

[15] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Conditional summetry and reduction of partial differential equations // Ukrain. Math. J. – 1992. – **44**, № 7. – P. 875–886.

[16] Serova M.M. Conditional invariance of the Bussinesq equation under the Galilei algebra // Symmetry analysis and solutions of equations of mathematical physics. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1988. – P. 92–94.

[17] Serova M.M. On some conditionally-invariant solutions of the Bussinesq equation // Symmetry and solutions of equations of mathematical physics. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1989. – P. 71–73.

[18] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I., Popovych R.O. On Q–conditional symmetry of linear heat equation // Proc. Acad. Sci. Ukraine – 1992. – № 12. – P. 28–32.

[19] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Conditional symmetry and anti-reduction of nonlinear heat equation // Proc. Acad. Sci. Ukraine. – 1994. – № 5. – P. 40–44.

[20] Zhdanov R.Z. Conditional Lie-Bäcklund symmetry of evolution equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1995. – **28**, № 13. – P. 3841–3850.

[21] Fokas A.S., Liu Q.M. // Phys. Rev. Lett. – 1994. – **72**. – P. 3293.

[22] Galaktionov V.A. // Diff. Int. Eq. – 1993. – **3**. – P. 863.

[23] Nucci M.C. Iterating the nonclassical symmetries method // Physica D. – 1994. – **78**, № 3, – P. 124–134.

[24] Barannik L.F., Lahno H.O. Symmetry reduction of the Bussinesq equation to ordinary differential equations // Reports on Math. Phys. – 1996. – **38**, № 1. – P. 1–9.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 100–105

УДК 517.945:519.46

Відокремлення змінних у рівнянні Шрьодінгера з потенціалом, який залежить від часу

Р.З. ЖДАНОВ †, ***М.В. ЛУТФУЛЛІН*** ‡

† *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: rzhdanov@apmat.freenet.kiev.ua

‡ *Національний педагогічний університет, Київ*
E-mail: maxim@apmat.freenet.kiev.ua

Отримано загальний вигляд потенціалу $V(t, x_1, x_2)$, для якого є можливим відокремлення змінних в (1+2)-вимірному рівнянні Шрьодінгера. З використанням цього результату побудовано чотири класи систем координат, в яких система Шрьодінгера-Максвелла може бути розв'язана методом відокремлення змінних.

We obtain the most general time-dependent potential $V(t, x_1, x_2)$ enabling separation of variables in the (1+2)-dimensional Schrödinger equation. With the use of this result the four classes of separable Schrödinger-Maxwell equations are constructed.

Застосовуючи підхід до розв'язання проблеми відокремлення змінних у диференціальних рівняннях з частинними похідними, запропонований в [1, 2], ми прокласифікуємо рівняння Шрьодінгера (РШ)

$$i\psi_t + \psi_{x_1x_1} + \psi_{x_2x_2} = V(t, x_1, x_2)\psi, \tag{1}$$

які допускають відокремлення змінних. Зауважимо, що цей клас РШ має численні фізичні застосування (див., напр., [3, 4].

В результаті отримаємо повний перелік потенціалів V таких, що рівняння (1) допускає відокремлення змінних. Накладаючи додаткове обмеження на вибір потенціалів, тобто вимагаючи, щоб вони задовольняли систему Максвелла у вакуумі без струмів, ми одержимо чотири системи координат, для яких система рівнянь Шрьодінгера-Максвелла може бути розв'язана методом відокремлення змінних.

Згідно з [2], шукаємо розв'язок РШ з відокремленими змінними у вигляді

$$\psi = Q(t, x_1, x_2)\varphi_0(t)\varphi_1(\omega_1(t, x_1, x_2))\varphi_2(\omega_2(t, x_1, x_2)). \tag{2}$$

Звідси отримуємо систему нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними для знаходження функцій Q, ω_1, ω_2:

$$\omega_{1x_1}\omega_{2x_1} + \omega_{1x_2}\omega_{2x_2} = 0, \tag{3}$$

$$B_{1a}(\omega_1)\left(\omega_{1x_1}^2 + \omega_{1x_2}^2\right) + B_{2a}(\omega_2)\left(\omega_{2x_1}^2 + \omega_{2x_2}^2\right) + R_a(t) = 0, \tag{4}$$

$$2(\omega_{ax_1}Q_{x_1} + \omega_{ax_2}Q_{x_2}) + Q(i\omega_{at} + \omega_{ax_1x_1} + \omega_{ax_2x_2}) = 0, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\Big(B_{01}(\omega_1)\left(\omega_{1x_1}^2 + \omega_{1x_2}^2\right) + B_{02}(\omega_2)\left(\omega_{2x_1}^2 + \omega_{2x_2}^2\right)\Big)Q + iQ_t + \\ + Q_{x_1x_1} + Q_{x_2x_2} + R_0(t)Q - V(t, x_1, x_2)Q = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

де B_{1a}, B_{2a}, R_0, R_a – гладкі функції своїх аргументів, $a = 1, 2$.

Загальний розв'язок системи рівнянь (3)–(5) побудовано у [2]. Він розщеплюється на такі чотири нееквівалентні класи:

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & \omega_1 = A(t)x_1 + W_1(t), \qquad \omega_2 = B(t)x_2 + W_2(t), \\
& Q(t, x_1, x_2) = \exp\left\{-\dfrac{i}{4}\left[\dfrac{A'}{A}x_1^2 + \dfrac{B'}{B}x_2^2\right] - \dfrac{i}{2}\left[\dfrac{W_1'}{A}x_1 + \dfrac{W_2'}{B}x_2\right]\right\}; \\[2ex]
\text{II.} & x_1 = W(t)\mathrm{e}^{\omega_1}\sin\omega_2 + W_1(t), \\
& x_2 = W(t)\mathrm{e}^{\omega_1}\cos\omega_2 + W_2(t), \\
& Q(t, x_1, x_2) = \exp\{iR(t, x_1, x_2)\}; \\[2ex]
\text{III.} & x_1 = \dfrac{1}{2}W(t)\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) + W_1(t), \\
& x_2 = W(t)\omega_1\omega_2 + W_2(t), \\
& Q(t, x_1, x_2) = \exp\{iR(t, x_1, x_2)\}; \\[2ex]
\text{IV.} & x_1 = W(t)\cosh\omega_1\cos\omega_2 + W_1(t), \\
& x_2 = W(t)\sinh\omega_1\sin\omega_2 + W_2(t), \\
& Q(t, x_1, x_2) = \exp\{iR(t, x_1, x_2)\}.
\end{array} \tag{7}$$

Тут A, B, W, W_1, W_2 – довільні гладкі функції, функція $R = R(t, x_1, x_2)$ задана формулою

$$R = \frac{W'}{4W}\left((x_1 - W_1)^2 + (x_2 - W_2)^2\right) + \frac{1}{2}\left(W_1' x_1 + W_2' x_2\right).$$

Підставляючи ці формули у рівняння (6), одержуємо чотири класи потенціалів $V(t, x_1, x_2)$, для яких можливе відокремлення змінних в РШ (1):

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & V(t, z_1, z_2) = F_0(t) + A^2 F_1(\omega_1) + B^2 F_2(\omega_2) + \\
& + x_1^2\left[\frac{A''}{4A} - \frac{(A')^2}{2A^2}\right] + x_2^2\left[\frac{B''}{4B} - \frac{(B')^2}{2B^2}\right] - \\
& - x_1\left(\frac{A'W_1'}{A^2} - \frac{W_1''}{2A}\right) - x_2\left(\frac{B'W_2'}{B^2} - \frac{W_2''}{2B}\right),
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\text{II.}\quad & V(t, x_1, x_2) = F_0(t) + \mathrm{e}^{-2\omega_1} W^{-2}[F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)] - \\
& - \frac{W''}{4W}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + x_1\left(\frac{W_1 W''}{2W} - \frac{W_1''}{2}\right) + \\
& + x_2\left(\frac{W_2 W''}{2W} - \frac{W_2''}{2}\right),
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\text{III.}\quad & V(t, x_1, x_2) = F_0(t) + \frac{[F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)]}{(\omega_1^2 + \omega_2^2)\, W^2} - \\
& - \frac{W''}{4W}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + x_1\left(\frac{W_1 W''}{2W} - \frac{W_1''}{2}\right) + \\
& + x_2\left(\frac{W_2 W''}{2W} - \frac{W_2''}{2}\right),
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\text{IV.}\quad & V(t, x_1, x_2) = F_0(t) + \frac{F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)}{W^2\left(\sinh^2\omega_1 + \sin^2\omega_2\right)} - \\
& - \frac{W''}{4W}\left(x_1^2 + x_2^2\right) + x_1\left(\frac{W_1 W''}{2W} - \frac{W_1''}{2}\right) + \\
& + x_2\left(\frac{W_2 W''}{2W} - \frac{W_2''}{2}\right),
\end{aligned} \tag{11}$$

де функції ω_1, ω_2 задані відповідними виразами I–IV в (7), F_0, F_1, F_2 – довільні функції.

Формули (8)–(11) задають загальний вигляд потенціалів $V = V(t, x_1, x_2)$ таких, що відповідне РШ може бути розв'язане за допомогою відокремлення змінних. Проте знайдені потенціали можуть бути суттєво спрощені, якщо ми візьмемо до уваги, що рівняння (1) інваріантні відносно таких перетворень змінних:

$$\begin{aligned}
1)\quad & \tilde{t} = t, \quad \tilde{x}_1 = x_1 + a(t), \quad \tilde{x}_2 = x_2 + b(t), \\
& \tilde{\psi}\left(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2\right) = \psi(t, x_1, x_2)\exp\left\{\frac{i}{2}\left[a'(t)x_1 + b'(t)x_2\right]\right\};
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
2)\quad & \tilde{t} = T(t), \quad \tilde{x}_1 = c(t)x_1, \quad \tilde{x}_2 = c(t)x_2, \\
& \tilde{\psi}\left(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2\right) = \psi(t, x_1, x_2)\exp\left\{\frac{ic'(t)}{4c(t)}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right\};
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
3)\quad & \tilde{t} = t, \quad \tilde{x}_1 = x_1, \quad \tilde{x}_2 = x_2, \\
& \tilde{\psi}\left(\tilde{t}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2\right) = \psi(t, x_1, x_2)\exp\{id(t)\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Тут $a(t), b(t), c(t), d(t)$ – довільні гладкі функції, а функція $T(t)$ визначається з рівняння $dT/dt = c^2(t)$. Використовуючи ці перетворення, ми можемо покласти $W_1 = 0$, $W_2 = 0$, $B = 1$, $W = 1$ і одержати такі вирази для V:

$$1.\quad V(t, x_1, x_2) = A^2 F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2) + x_1^2\left[\frac{A''}{4A} - \frac{(A')^2}{2A^2}\right], \tag{15}$$

$$2.\quad V(t, x_1, x_2) = \mathrm{e}^{-2\omega_1}[F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)], \tag{16}$$

$$3.\quad V(t, x_1, x_2) = \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)^{-1}[F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)], \tag{17}$$

$$4.\quad V(t, x_1, x_2) = \left(\sinh^2\omega_1 + \sin^2\omega_2\right)^{-1}[F_1(\omega_1) + F_2(\omega_2)], \tag{18}$$

де функції F_1, F_2 є довільними, функції ω_1, ω_2 задаються відповідними співвідношеннями:

1. $x_1 = \dfrac{1}{A}\omega_1, \quad x_2 = \omega_2;$
2. $x_1 = \mathrm{e}^{\omega_1}\sin\omega_2, \quad x_2 = \mathrm{e}^{\omega_1}\cos\omega_2;$
3. $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right), \quad x_2 = \omega_1\omega_2;$
4. $x_1 = \cosh\omega_1\cos\omega_2, \quad x_2 = \sinh\omega_1\sin\omega_2;$

$A = A(t)$ – розв'язок нелінійного звичайного диференціального рівняння

$$(4A)^{-1}A'' - (2A)^{-2}(A')^2 + C_1A + C_2 = 0$$

з довільними сталими C_1, C_2.

Зауважимо, що рівняння Шрьодінгера з потенціалами (8)–(11) та (15)–(18), будучи еквівалентними з точки зору стандартної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними, є нееквівалентними в контексті квантової механіки. Причиною є те, що перетворення (12)–(14) змінюють величину $|\psi(t, x_1, x_2)|$, яка розглядається у квантовій механіці як густина ймовірності.

Тепер, підставляючи вектор-потенціал $A = (V(t, x_1, x_2), 0, 0, 0)$ у рівняння Максвелла у вакуумі без струмів, отримуємо, що функція V задовольняє рівняння

$$V_{x_1x_1} + V_{x_2x_2} = 0, \quad V_{tx_a} = 0, \quad a = 1, 2.$$

Звідси ми отримуємо обмеження на вибір функцій F_1, F_2. Розв'язавши їх, маємо

$$1. \quad V = C_1\left(x_1^2 - x_2^2\right) + C_2x_1 + C_3x_2, \tag{19}$$

$$2. \quad V = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-2}\left[C_1\left(x_1^2 - x_2^2\right) + C_2x_1x_2\right] + \\ + C_3\ln(x_1^2 + x_2^2), \tag{20}$$

$$3. \quad V = C_1x_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\left[C_2\sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1} + \right. \\ \left. + C_3\sqrt{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1}\right], \tag{21}$$

$$4. \quad V = \frac{f^2}{f^4 + x_2^2}\left[(C_2 + C_1\operatorname{arcsinh} f)\, f\sqrt{1 + f^2} + \right. \\ \left. + \left(C_3 + C_1\arcsin\frac{x_2}{f}\right)\frac{x_2\sqrt{f^2 - x_2^2}}{f^2}\right], \tag{22}$$

де

$$f^2 = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 - 1 + \sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2\left(x_1^2 - x_2^2\right) + 1}\right],$$

C_1, C_2, C_3 є сталими інтегрування.

РШ з потенціалом (19) розділяється в декартових координатах на два одновимірних стаціонарних рівняння Шрьодінгера для гармонічного осцилятора, а отже, може бути точно розв'язане. РШ (1) з потенціалом (20), (22) при $C_1 = 0$, розділяється на рівняння Хілла і Матьє. Звідси ми робимо висновок, що його розв'язки можуть бути поданими у вигляді добутку виродженої гіпергеометричної функції і функції Матьє [5]. Нарешті, РШ з потенціалом (21) розділяється в параболічних координатах на два одновимірні стаціонарні рівняння Шрьодінгера, які є квазі-точно розв'язними. Це означає, що скінченна частина спектру оператора

$$-\Delta + V(x_1, x_2)$$

може бути обчислена суто алгебраїчними методами (більш детально про квазі-точно розв'язні моделі квантової механіки дивись, наприклад, [6]).

[1] Zhdanov R.Z., Revenko I.V., Fushchych W.I., On the new approarh to variable separation in the time-dependrnt Shrödinger equation with two space dimensions // J. Math. Phys. – 1995. – **36**, № 2. – P. 5506–5521.

[2] Zhdanov R.Z. Separation of variables in (1+2)-dimensional Shrödinger equation // J. Math. Phys. – 1997. – **38**, № 2. – P. 245–249.

[3] Eberly J.H., Javanainen J., Rzazewski K. Above-threshold ionization // Phys. Rep. – 1991. – **204**, № 5. – P. 331–383.

[4] Keldysh L. V. // Soviet. Phys. JETR. – 1965. – **20**. – P. 1307.

[5] Kamke E. Differentialgleichungen Lösungmethoden und Lösungen. – Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1976.

[6] Ushveridze A.G. Quasi-exactly solvable models in quantum mechanics. – Bristol: IOP Publ., 1993.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 106–110

УДК 517.946.9:621.922.34.025

Термопружний стан неоднорідного алмазного відрізного круга при різанні з охолодженням

О.М. ЖУКОВСЬКИЙ †, ***В.А. МЕЧНИК*** ‡

† *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: nonlin@apmat.freenet.kiev.ua

‡ *Інститут надтвердих матеріалів НАН України, Київ*

Отримано розв'язок квазістаціонарної задачі термопружності для тришарового алмазного відрізного круга при різанні з охолодженням. Компоненти напружень знайдено у вигляді суми доданків, що виражаються відповідно через термопружний потенціал та функцію Ейрі.

Solution of a quasi-static problem for a three-ply diamond wheel cutting with cooling is obtained. Stress components are determined in form of sum of terms which are expressed via the coresponding thermoelastic potential and Airy function respectively.

Дана робота є логічним продовженням досліджень термопружного стану алмазного відрізного круга, що проведені в роботі [1]. В даному випадку вважаємо, що температура не є періодичною функцією ні часу, ні кутової координати [2], а в зоні контакту диска (взаємодія круга та оброблювального матеріалу) задані значення експериментально отриманих напружень.

Так як товщина диска мала в порівнянні з його радіусом, а торцеві (бокові) поверхні вільні від зовнішніх сил, то зміною радіального та тангенціального напружень по товщині диска можна знехтувати. Тоді для алмазного диска можна розглядати в квазістатичній постановці задачу про плоский напружений стан.

Компоненти температурних напружень в кожній з частин круга $\sigma_{rr}^{(k)}$, $\sigma_{r\theta}^{(k)}$, $\sigma_{\theta\theta}^{(k)}$, $k=\overline{1,3}$, зручно зобразити у вигляді суми [3]

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \overline{\sigma_{ij}^{(k)}} + \overline{\overline{\sigma_{ij}^{(k)}}}, \tag{1}$$

де доданок з однією рискою виражається через термопружний потенціал Φ_k [1], а доданок з двома рисками – через функцію Ейрі U_k. Граничні умови для напружень в рухомій системі координат (ρ,φ), де $\varphi=\theta-\omega t$, мають вигляд:

$$\sigma_{rr}^{(3)}\big|_{\rho=\rho_3} = \overline{\sigma_{rr}^{(3)}} + \overline{\overline{\sigma_{rr}^{(3)}}}\big|_{\rho=\rho_3} = \begin{cases} P_n, & 0 \le \varphi - 2\pi j < \varphi_0, \\ 0, & \varphi_0 < \varphi - 2\pi j < 2\pi, \end{cases} \tag{2}$$

$$\sigma_{rr}^{(3)}\big|_{\rho=\rho_3} = \overline{\sigma_{r\theta}^{(3)}} + \overline{\overline{\sigma_{r\theta}^{(3)}}}\big|_{\rho=\rho_3} = \begin{cases} P_\tau, & 0 \le \varphi - 2\pi j < \varphi_0, \\ 0, & \varphi_0 < \varphi - 2\pi j < 2\pi, \end{cases} \tag{3}$$

де P_n та P_τ – відповідно компоненти радіального і тангенціального тиску, j – таке ціле число, що $0 \le \varphi - 2\pi j \le 2\pi$, а умови ідеального термомеханічного контакту –

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \sigma_{ij}^{(2)}, \quad u^{(1)} = u^{(2)}, \quad v^{(1)} = v^{(2)} \quad \text{при} \quad \rho=\rho_1; \tag{4}$$

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(3)}, \quad u^{(2)} = u^{(3)}, \quad v^{(2)} = v^{(3)} \quad \text{при} \quad \rho=\rho_2. \tag{5}$$

Використовуючи розклад в ряд Фур'є по змінній φ, співвідношення (2) і (3) можна записати у вигляді

$$\sigma_{rr}^{(3)}\big|_{\rho=\rho_3} = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^c(t)\cos r\theta + d_k^s(t)\sin r\theta, \tag{6}$$

$$\sigma_{r\theta}^{(3)}\big|_{\rho=\rho_3} = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^c(t)\cos r\theta + f_k^s(t)\sin r\theta, \tag{7}$$

де

$$d_0 = \frac{P_n\varphi_0}{2\pi}, \quad f_0 = \frac{P_\tau\varphi_0}{2\pi},$$

$$d_k^c(t) = \frac{P_n}{k\pi}(\sin k(\varphi_0+\omega t) - \sin k\omega t),$$

$$d_k^s(t) = \frac{P_n}{k\pi}(\cos k\omega t - \cos k(\varphi_0+\omega t)),$$

$$f_k^c(t) = \frac{P_\tau}{k\pi}(\sin k(\varphi_0+\omega t) - \sin k\omega t),$$

$$f_k^s(t) = \frac{P_\tau}{k\pi}(\cos k\omega t - \cos k(\varphi_0+\omega t)),$$

Умови рівноваги для плоского напруженого стану $(\overline{\overline{\sigma_{rr}}}, \overline{\overline{\sigma_{r\theta}}}, \overline{\overline{\sigma_{\theta\theta}}})$ диска, що обертається, можна подати у формі [4]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{\overline{\sigma_{rr}}}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\overline{\sigma_{r\theta}}}}{\partial \theta} + \frac{\overline{\overline{\sigma_{rr}}} - \overline{\overline{\sigma_{\theta\theta}}}}{\rho} + \delta(\rho)\omega^2\rho R_1^2 = 0; \\ &\frac{\partial \overline{\overline{\sigma_{r\theta}}}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{\overline{\sigma_{\theta\theta}}}}{\partial \theta} + \frac{2\overline{\overline{\sigma_{r\theta}}}}{\rho} = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

де $\delta(\rho) = \delta_j$, $j = \overline{1,3}$, – густина, а останній член в першому рівнянні (8) представляє собою об'ємну силу (силу інерції).

Рівняння рівноваги (8) задовольняються, якщо покласти

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{\sigma_{rr}}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{3}\delta(\rho)\omega^2 R_1^2\rho^2, \\ &\overline{\overline{\sigma_{\theta\theta}}} = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2}, \qquad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

а функція U задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 U = -\frac{2}{3}\big(3\mu(\rho)+1\big)\delta(\rho)\omega^2 R_1^2. \tag{10}$$

Розв'язок рівняння (10) знаходиться у вигляді суми загального і частинного розв'язків:

$$\begin{aligned} U^{(j)} = {} & a_0^{(j)}\theta + \frac{1}{2}b_0^{(j)}\rho^2 + \frac{1}{2}a_1^{(j)}\rho\theta\sin\theta + \frac{1}{2}b_1^{(j)}\rho^3\cos\theta + \\ & + \frac{1}{2}c_1\rho\theta\cos\theta + \frac{1}{2}g_1\rho^3\sin\theta - \frac{1}{96}\big(3\mu(\rho)+1\big)\delta(\rho)\omega^2 R_1\rho^4 + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[\frac{a_k^{(j)}}{k(k-1)}\rho^k + \frac{b_k^{(j)}}{k(k+1)}\rho^{k+2}\right]\cos k\theta + \right. \\ & \left. + \left[\frac{c_k^{(j)}}{k(k-1)}\rho^k + \frac{g_k^{(j)}}{k(k+1)}\rho^{k+2}\right]\sin k\theta\right\}, \end{aligned} \tag{11}$$

де $a_0^{(j)}(t), a_1^{(j)}(t), \ldots, b_0^{(j)}(t), b_1^{(j)}(t), \ldots, c_1^{(j)}(t), c_2^{(j)}(t), \ldots, g_1^{(j)}(t), g_2^{(j)}(t)$, …, знаходяться з граничних умов для напружень на робочій поверхні круга в рухомій системі координат (6)–(7) і умов ідеального термомеханічного контакту (4)–(5).

Відповідні напруження обраховуємо за формулами

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\sigma_{rr}^{(j)}}} = {} & b_0^{(j)} + \left(a_0^{(j)}\rho^{-1} + b_1^{(j)}\rho\right)\cos\theta + \left(g_1^{(j)}\rho - c_1^{(j)}\rho^{-1}\right)\sin\theta - \\ & - \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[a_k^{(j)}\rho^{k-2} + b_k^{(j)}\frac{k-2}{k}\rho^k\right]\cos k\theta + \right. \\ & \left. + \left[c_k^{(j)}\rho^{k-2} + g_k^{(j)}\frac{k-2}{k}\rho^k\right]\sin k\theta\right\} - \frac{1}{8}(\mu_j+3)\delta_j\omega^2 R_1^2\rho^2, \\ \overline{\overline{\sigma_{r\theta}^{(j)}}} = {} & a_0^{(j)}\rho^{-2} - g_1^{(j)}\rho\cos\theta + b_1^{(j)}\rho\sin\theta - \\ & - \sum_{k=2}^{\infty}\left\{\left[a_k^{(j)}\rho^{k-2} + b_k^{(j)}\rho^k\right]\sin k\theta - \left[c_k^{(j)}\rho^{k-2} + g_k^{(j)}\rho^k\right]\cos k\theta\right\}. \end{aligned}$$

Зробимо короткий аналіз отриманих чисельних результатів. Складові $\overline{\sigma_{ij}}$ зв'язані, в першу чергу, зі змінами температури і несуть в собі інформацію про її внесок в термопружні напруження. Для основних режимів роботи відрізного круга радіальні напруження $(\overline{\sigma_{rr}})$ сумірні з межею міцності алмазу, максимальне значення ($\overline{\sigma_{rr}}$ і $\overline{\sigma_{r\theta}}$) досягаються на межі зв'язки і шару алмазів. Радіальні компоненти $\overline{\sigma_{rr}}$ мають тільки від'ємні значення, а тангенціальні $\overline{\sigma_{r\theta}}$ можуть змінювати знак. Радіальні $\overline{\sigma_{rr}}$ та тангенціальні $\overline{\sigma_{r\theta}}$ напруження не задовольняють граничні умови (2)–(5), хоча й передають їх характер. Тому для їх виконання на $\overline{\sigma_{ij}}$ накладались "нетемпературні"доданки $\overline{\overline{\sigma_{ij}}}$. Для загальних термопружних напружень зберігається та ж тенденція, що і для $\overline{\sigma_{ij}}$, хоча є і суттєві відмінності. Вони є стискуючими для всіх умов обробки, збільшуються при збільшенні повздовжньої подачі, зменшуються при збільшенні радіуса відрізного круга і при зменшенні глибини зарізу. При збільшенні коефіцієнта теплообміну майже не змінюються тангенціальні напруження, а радіальні зростають на відміну від складової $\overline{\sigma_{rr}}$. Зауважимо, що збільшення їх не таке потужне і, в кінцевому підсумку, їх вплив більше позначається на абразивному зношуванні. Найбільші значення радіальні напруження досягають у зв'язці на межі з шаром алмазів, що ще раз підтверджує високі вимоги до пружних властивостей (межі міцності, модулю зсуву) зв'язуючого матеріалу.

[1] Жуковський О.М, Майстренко А.Л., Мечник В.А., Міфліг І.М. Температурні напруження тришарового алмазного відрізного круга при розривних граничних умовах // Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики. – Киев: Ин-т математики НАН України, 1997. – С. 122–125.

[2] Александров В.А., Жуковский А.Н., Мечник В.А. Температурное поле и износ неоднородного алмазного круга при конвективном теплообмене. Ч. I // Трение и износ. – 1994. – **15**, № 1. – С. 27–35.

[3] Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963. - 252 с.

[4] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 575 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 111–115

УДК 517.91

Про збіжність ітераційного методу розв'язування нелінійних задач конвекції в'язкої нестисливої рідини

В.П. КАРАГОДОВ

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: nonlin@apmat.freenet.kiev.ua

Доведено збіжність ітераційного процесу при наближеному розв'язуванні нелінійних нестаціонарних задач для рівнянь Нав'є-Стокса в обмеженій тривимірній області з застосуванням методу Гальоркіна.

Convergence of the iterative process of the Galerkin's method for approximate solution of the nonlinear unsteady problems for the Navier-Stokes equations in a bounded three-dimensional region is proved.

Нестаціонарні крайові задачі для рівнянь Нав'є-Стокса є одними з найбільш складних як при теоретичному дослідженні, так і в прикладному застосуванні (наближеному розв'язуванні). Одним з ключових питань при цьому постає нелінійність задачі. Слід зазначити, що навіть у двовимірному випадку, для якого доведено відповідні теореми про однозначну розв'язність таких задач, питання нелінійності залишається одним з найважчих у прикладному аспекті.

Звичайно ця проблема вирішується шляхом лінеаризації вихідних рівнянь завдяки застосуванню методу ітерацій на деякому заданому малому проміжкові часу. Як приклад успішного застосування такого методу можна навести роботи [1, 2], в яких досліджувалися складні процеси термоконвекції високої інтенсивності. Збіжність ітерацій в цих роботах і інших, наприклад, з застосуванням різницевих методів чи методу скінченних елементів (сплайнів), визначається експериментально для кожного проміжку часу, на якому практично розв'язується задана задача.

В даній роботі розглядається ітераційний процес, який використовувався в роботах [1, 2], і встановлюється його збіжність на всьому заданому скінченному проміжку часу $[0, T]$ при будь-якому заданому скінченному базисі координатних вектор-функцій методу Гальоркіна і деякому вибраному кроку по часу, за яким відрізок $[0,T]$ розбивається на відповідну кількість кроків. Ми тут обмежимося розглядом задач для рівнянь чисто гідродинамічного типу, які, загалом, несуть в собі основні властивості і пов'язані з ними труднощі інших аналогічних задач для рівнянь Нав'є-Стокса, як і задач [1, 2].

Розглядається задача для рівнянь Нав'є-Стокса в замкнутій області $Q \in E_3$ на проміжку часу $[0,T]$:

$$\begin{aligned} &\vec{v}_t + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \nu\Delta\vec{v} - \nabla p + \vec{f}, \\ &\operatorname{div}\vec{v} = 0, \quad x \in Q_T, \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{1}$$

$$\vec{v}(x,0) = \vec{a}(x), \qquad \vec{v}(x,t)|_{S_T} = 0. \tag{2}$$

Тут шукані величини: вектор швидкості $\vec{v}(x,t)$ руху рідини, тиск в рідині $p(x,t)$ в точці $x \in Q \subset E_3$ в момент часу $t \in [0,T]$; S – границя області Q ($S_T = S \times [0,T]$, $Q_T = Q \times [0,T]$) вважається кусково гладкою. Окрім того, $\vec{a} \in W_2^2(Q)$, $\vec{f} \in L_{2,1}(Q_T)$, $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ та $\operatorname{div}\vec{f} = 0$.

Ітераційний процес, за допомогою якого вихідне рівняння (1) лінеаризується, будується за наступною схемою. Заданий відрізок $[0,T]$ розбивається на скінченну кількість m відрізків $[t_k,t_{k+1}]$, $k = \overline{0,m-1}$, $t_0 = 0$, $t_m = T$. Це розбиття, взагалі кажучи, може бути нерівномірним. На кожному з відрізків $[t_k,t_{k+1}]$ розв'язуються лінійні задачі

$$\overset{i+1}{V}_t + \left(\overset{i}{V}\cdot\nabla\right)\overset{i+1}{V} = \nu\Delta\overset{i+1}{V} - \nabla\overset{i+1}{p} + \vec{f}, \qquad \operatorname{div}\overset{i+1}{V} = 0, \tag{3}$$

$$\overset{i+1}{V}(x,t_k) = \overset{i}{V}(x,t_k); \qquad \overset{i+1}{V}(x,t)|_{S_T} = 0 \tag{4}$$

при послідовності значень $i = 0,1,\ldots,s$; i – номер ітерації; s – кінцевий номер ітерації, при якому досягається необхідна точність на заданому відрізку $[t_k,t_{k+1}] \subset [0,T]$.

При закінченні ітераційного процесу на відрізку часу $[t_k,t_{k+1}]$ за нульову ітерацію на наступному відрізку вибирається значення $\overset{i+1}{V}(x,t_{k+1})$, тобто на $[t_{k+1},t_{k+2}]$ буде $\overset{0}{V}(x,t) = \overset{s}{V}(x,t_{k+1})$. Очевидно, на $[0,t_1]$ нульова ітерація буде дорівнювати початковій умові (2) вихідної задачі, тобто $\overset{0}{V}(x,t) = V(x,0) = \vec{a}(x)$.

Зазначимо, що лінеаризовані рівняння (3) зберігають таку важливу характеристику вихідних рівнянь як енергетична нейтральність конвективного члена, а саме, що $((\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v},\vec{v}) = 0$ [3]. Тут і далі позначення $(\cdot,\cdot)$ означає скалярний добуток в $L_2(Q)$. Легко переконатись, що для відповідного члена в (3) матимемо $\left(\left(\overset{i}{V}\cdot\nabla\right)\overset{i+1}{V},\overset{i+1}{V}\right) = 0$.

Для дослідження збіжності ітерацій на кожному відрізку $[t_k,t_{k+1}]$ випишемо різницю рівнянь (3), (4) для двох сусідніх ітерацій $\overset{i}{V}$ і $\overset{i+1}{V}$. Позначивши $V = V_{i+1} = \overset{i+1}{V} - \overset{i}{V}$, $p = p_{i+1} = \overset{i+1}{p} - \overset{i}{p}$, для $t \in [t_k,t_{k+1}]$ отримуємо

$$V_t + \left(\overset{i}{V}\cdot\nabla\right)V + (V_i\cdot\nabla)\overset{i}{V} = \nu\Delta V - \nabla p, \quad \operatorname{div} V = 0, \tag{5}$$

$$V(x,t_k) = 0, \qquad V(x,t)|_{S_T} = 0. \tag{6}$$

Використовуючи позначення [3] $y(t) = ||V(x,t)||_{2,Q}$ та $\varphi(t) = ||V_x(x,t)||_{2,Q}$ і враховуючи $\left(\left(\overset{i}{V}\cdot\nabla\right)V,V\right) = 0$, з (5), (6) для V отримуємо

$$\frac{1}{2}\left(y^2\right)' + \nu\varphi^2 = \left((V_i\cdot\nabla)V,\overset{i}{V}\right), \quad y(t_k) = 0, \quad \varphi(t_k) = 0. \tag{7}$$

Формально це співвідношення легко отримати, якщо (5) домножити скалярно в $L_2(Q)$ на $V(x,t)$. Строге виведення цього співвідношення наводиться в [3].

Скориставшись нерівностями Гольдера та Юнга, оцінимо праву частину співвідношення (8) таким чином:

$$\begin{aligned} |((V_i\cdot\nabla)V,\overset{i}{V})| &\le \varphi||V_i||_{3,Q}||\overset{i}{V}||_6 \le 48^{1/4}\overset{i}{\varphi}\varphi y_i^{1/2}\varphi_i^{1/2} \le \\ &\le \nu\varphi^2 + \sqrt{3}\nu^{-1}(\overset{i}{\varphi})^2 y_i\varphi_i. \end{aligned}$$

Тоді з (7), з урахуванням того, що $y(t_k) = 0$, і позначення $y = y_{i+1}$, випливає

$$y_{i+1}^2(t) \le 2\sqrt{3}\nu^{-1}\int\limits_{t_k}^{t}(\overset{i}{\varphi})^2 y_i\varphi_i d\tau, \qquad t \in [t_k,t_{k+1}]. \tag{8}$$

Відомо [3], що власні вектор-функції $\vec{u}_k(x)$ оператора $\tilde{\Delta}$, який визначається співвідношеннями

$$\tilde{\Delta}\vec{u} = \nu\Delta\vec{u} - \nabla p, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0, \quad \vec{u}|_S = 0, \tag{9}$$

ортонормовані і повні в метриці $L_2(Q)$ та $H(Q)$, де $H(Q)$ – функціональний простір з метрикою

$$||\vec{u}||_{H(Q)} = ||\vec{u}_x||_{2,Q}.$$

Спектр власних значень λ_k цього оператора від'ємний, дискретний, має скінченну кратність і прямує до $-\infty$ при $k \to \infty$. Тому легко переконатись, що для n-го гальоркінського наближення

$$V^n(x,t) = \sum_{l=1}^{n} c_l(t)\vec{u}_l(x)$$

на n-вимірному скінченному базисі з вказаних власних функцій будемо мати, що

$$y^2(t) = \sum_{l=1}^{n} c_l^2(t), \tag{10}$$

$$\nu\varphi^2(t) = -\sum_{l=1}^{n} \lambda_l c_l^2(t). \tag{11}$$

Зазначимо, що тут, як і вище, для спрощення позначень функції $c(t)$, $y(t)$ та $\varphi(t)$ подані без відповідних індексів n, що відносяться до позначення n-го гальокінського наближення та індексу $(i+1)$, що відноситься до номера ітерацій.

З (10) та (11) одержимо

$$\varphi^2(t) \le \nu^{-1}|\lambda_n| y^2(t). \tag{12}$$

Вертаючись до позначень $y = y_{i+1}$ та $\varphi = \varphi_{i+1}$, з (8) отримаємо для $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\begin{aligned} y_{i+1}^2(t) &\le 2\sqrt{3}\nu^{-1}|\lambda_n|^{1/2} \int_{t_k}^{t} (\overset{i}{\varphi})^2 y_i^2 d\tau \le \\ &\le 2\sqrt{3}\nu^{-1}|\lambda_n|^{1/2} y_{im}^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\overset{i}{\varphi})^2 d\tau, \end{aligned} \tag{13}$$

де $y_{im}^2 = \max\limits_{t \in [t_k, t_{k+1}]} y_i^2(t)$.

Звідси, очевидно, випливає, що виконуватиметься нерівність

$$y_{i+1\,m}^2 \le 2\sqrt{3}\nu^{-1}|\lambda_n|^{1/2} y_{im}^2 \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\overset{i}{\varphi})^2 d\tau. \tag{14}$$

Як показано в [3], для розв'язку $\overset{i}{\varphi}(x,t)$ справедлива оцінка

$$\int_0^T \overset{i}{\varphi}{}^2 d\tau \le A_1, \tag{15}$$

де $A_1 = \mathrm{const}$.

Можна зауважити, що цю оцінку легко отримати, якщо рівняння (3), (4) для i-ї ітерації домножити скалярно в $L_2(Q)$ на $\overset{i}{V}$.

Отже, завдяки оцінці (15) відрізок $[0,T]$ можна розбити на відрізки $[t_k, t_{k+1}]$ так, що буде виконуватись нерівність

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} (\overset{i}{\varphi})^2 d\tau < \varepsilon$$

для довільного заданого як завгодно малого значення $\varepsilon > 0$. Вибравши ϵ досить малим, отримаємо з (14), що на кожному відрізку $[t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, m-1}$ буде $y_{i+1} < y_i$, тобто відстань між сусідніми ітераціями в нормі $L_2(Q)$ буде зменшуватись, а це означає, що ітерації збігатимуться.

[1] Галицын А.С., Жуковский А.Н., Карагодов В.П. О применении метода Галеркина к решению осесимметричной задачи конвекции жидкости в замкнутом объеме. – Киев, 1985. – 48 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.40).

[2] Галицын А.С., Жуковский А.Н., Карагодов В.П. Решение нелинейных задач конвекции в замкнутом объеме вязкой жидкости проекционно-разностным методом. – Киев, 1987. – 44 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.9).

[3] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 116–122

УДК 517.9

К вопросу о построении инвариантов группы вращения $SO(2)$ в пространстве коэффициентов системы нелинейных дифференциальных уравнений

А.Г. КУЗЬМЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Наведено алгоритм знаходження інваріантів групи $SO(2)$ у просторі параметрів системи нелінійних диференційних рівнянь другого порядку з однорідними многочленами у правій частині за допомогою побудови алгебри Лі цієї групи.

The algorithm of finding the invariants of the $SO(2)$ group in the space of parameters of the system of nonlinear second order differential equations containing the homogeneous polynomials is presented. This algorithm is based on the construction of the Lie algebra of that group.

1. Постановка задачи. В данной работе исследуется система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j+l\in A} c_{jl}x^j y^l, \qquad \frac{dy}{dt} = \sum_{j+l\in A} b_{jl}x^j y^l, \tag{1}$$

где c_{jl}, b_{jl} – действительные числа, A – некоторое множество различных целых чисел. Мы будем рассматривать случай, когда в правой части системы (1) находятся полиномы.

Как показано в работе [1], наличие или отсутствие периодических решений в системе (1) тесно связано с инвариантными свойствами системы относительно группы вращения $SO(2)$. Это приводит к необходимости нахождения инвариантов группы вращения системы (1) в пространстве параметров c_{jl}, b_{jl}.

В работах К.С. Сибирского [2, 3] исследованы инварианты ортогональных и афинных преобразований системы (1). На основе знания ортогональных инвариантов для случая A{2} и A{3} (степени

однородных полиномов правых частей – обозначения см. в [2, с. 28]) были сформулированы необходимые и достаточные условия существования в системе (1) периодических решений.

Аналогичные задачи возникают в теории возмущений, где рассматриваются системы более общего вида

$$\frac{dx}{dt} = -y + \varepsilon P(\varepsilon, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = x + \varepsilon Q(\varepsilon, x, y). \tag{2}$$

Здесь ε – малый параметр;

$$\begin{aligned} &P(\varepsilon, x, y) = \sum_{l=1}^{A} \varepsilon^l P_l(x, y), \quad Q(\varepsilon, x, y) = \sum_{l=1}^{A} \varepsilon^l Q_l(x, y); \\ &P_l(x, y) = \sum_{i,j\in a_l} p_{ij^{(l)}} x^i y^j, \qquad Q_l(x, y) = \sum_{i,j\in a_l} q_{ij^{(l)}} x^i y^j; \end{aligned} \tag{3}$$

$P_l(0,0) = 0$, $Q_l(0,0) = 0$; $p_{ij}^{(l)}$, $q_{ij}^{(l)}$ – действительные числа; A_l – некоторое множество различных целых неотрицательных чисел.

Результатом преобразования по методу асимптотической декомпозиции является система вида (2), которая называется централизованной [4, 5], если она инвариантна относительно группы вращения

$$x = e^{sU}\bar{x}, \quad y = e^{sU}\bar{y}, \qquad \text{где} \qquad U = -\bar{y}\frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \bar{x}\frac{\partial}{\partial \bar{y}},$$

s – некоторый параметр.

В этой работе приводится алгоритм нахождения инвариантов группы $SO(2)$ в пространстве параметров системы (1) на основе построения алгебры Ли этой группы, после выполнения которого нахождение инвариантов сводится к решению уравнения в частных производных первого порядка. В свою очередь, это уравнение заменяется системой алгебраических уравнений.

Подход, предлагаемый в работе, отличается от метода, применяемого К.С. Сибирским [2, 3], и имеет такие преимущества:

1) не требует приведения исследуемой системы к специальному базису;

2) допускает обобщение на системы порядка $n > 2$.

Найденная система инвариантов для системы (2) используется в исследовании качественного поведения решения системы (2).

2. Построение алгебры Ли группы $SO(2)$ в пространстве коэффициентов. Пусть правые части системы (2) – однородные полиномы порядка m, то есть имеем случай $A\{m\}$. Введем вектор базисных элементов

$$\hat{\hat{x}}_m = \|x^m, x^{m-1}y, x^{m-2}y^2, \dots, xy^{m-1}, y^m\|.$$

Запишем систему (1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= c_{m0}x^m + c_{m-1,1}x^{m-1}y + \dots + c_{1,m-1}xy^{m-1} + c_{0m}y^m, \\ \frac{dy}{dt} &= b_{m0}x^m + b_{m-1,1}x^{m-1}y + \dots + b_{1,m-1}xy^{m-1} + b_{0m}y^m. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда правую часть системы (1) можем записать в виде произведения $G_m\hat{\hat{x}}_m$, где

$$G_m = \begin{vmatrix} c_{mo} & c_{m-1,1} & \dots & c_{1,m-1} & c_{0m} \\ b_{m0} & b_{m-1,1} & \dots & b_{1,m-1} & b_{0m} \end{vmatrix}.$$

Сделаем в системе (4) преобразование с помощью группы $SO(2)$ (поворот на угол δ)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \qquad \Delta = \begin{pmatrix} \cos\delta & -\sin\delta \\ \sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Тогда вектор $\hat{\hat{x}}_m$ преобразуется следующим образом:

$$\hat{\hat{x}}_m = D(\delta)\hat{\hat{\bar{x}}}_m,$$

где $\hat{\hat{\bar{x}}}_m$ – базисный вектор $\hat{\hat{x}}_m$ в переменных $\bar{x}$, $\bar{y}$, $D(\delta)$ – матрица преобразования вектора $\hat{\hat{x}}_m$ при повороте на угол δ. Матрица $\bar{G}(\delta)$ новых коэффициентов системы (4)

$$\bar{G}(\delta) = \Delta^{-1}G_mD(\delta)\hat{\hat{\bar{x}}}_m, \qquad \text{где} \quad \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\delta & \sin\delta \\ -\sin\delta & \cos\delta \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Обозначим через $g_{ij}^{(1)}$ произвольный элемент матрицы $\bar{G}(\delta)$. Из соотношения (6) видно, что новые коэффициенты получены с помощью линейного преобразования старых коэффициентов

$$g_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}^{(0)} \cdot h_{ij}(\delta),$$

где $g_{ij}^{(0)}$ – элемент матрицы G_m. Найдем дифференциал $g_{ij}^{(1)}(\delta)$ в точке $\delta = 0$:

$$dg_{ij}^{(1)} = \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}^{(0)} \frac{\partial h_{ij}(\delta)}{\partial\delta}\bigg|_{\delta=0} d\delta = \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{2} g_{ij}^{(0)}\gamma_{ij}d\delta = k_{ij}d\delta. \tag{7}$$

Из полученных соотношений несложно выразить инфинитезимальный оператор группы $SO(2)$

$$U = \frac{\partial}{\partial\delta} + \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{2} k_{ij}\frac{\partial}{\partial g_{ij}^{(0)}}, \tag{8}$$

действующий в пространстве параметров. Инварианты группы $SO(2)$ в указанном пространстве находятся как решение уравнения

$$Uf = 0. \tag{9}$$

Решение в пространстве $L_{\otimes r}$ однородных полиномов степени r, составленных из элементов $G_{ij}^{(1)}$, будем искать в виде

$$f = \alpha\hat{\hat{Z}}_m, \tag{10}$$

где α – вектор-строка коэффициентов, $\hat{\hat{Z}}_m$ – базис $L_{\otimes r}$ в пространстве $N_m = 2m + 2$ переменных $g_{ij}^{(1)}$. После подстановки (10) в уравнение (9) приходим к алгебраическму матричному уравнению

$$\alpha F_{N_m} = 0,$$

где F_{N_m} – матрица представления оператора U в пространстве $L_{\otimes r}$.

3. Выше был рассмотрен случай, когда правые части являются элементами пространства $L_{\otimes m}$. Для простоты изложения рассмотрим случай, когда правые части являются элементами пространства $L = L_{\otimes m_1} + L_{\otimes m_2}$. Любой элемент из пространства L запишем как $l = l_{\otimes m_1} + l_{\otimes m_2}$, где $l_{\otimes m_1}$ – однородный полином из пространства $L_{\otimes m_1}$, а $l_{\otimes m_2}$ – однородный полином из пространства $L_{\otimes m_2}$. Когда мы произведем преобразование поворота, то получим

$$D(\delta)l = D_{m_1}(\delta)l_{\otimes m_1} + D_{m_2}(\delta)l_{\otimes m_2},$$

где $D_{m_1}(\delta)$ и $D_{m_2}(\delta)$ – матрицы представлений группы $SO(2)$ в пространствах $L_{\otimes m_1}$ и $L_{\otimes m_2}$ соответственно. Следовательно, новые коэффициенты в пространстве $L_{\otimes m_i}$ будут выражаться через старые с помощью соотношений

$$g^{(1)}_{(m_1)ij} = \sum_{i=1}^{m_1+1}\sum_{j=1}^{2} g^{(0)}_{(m_1)ij}\cdot h_{(m_1)ij}(\delta),$$

$$g^{(1)}_{(m_2)ij} = \sum_{i=1}^{m_2+1}\sum_{j=1}^{2} g^{(0)}_{(m_2)ij}\cdot h_{(m_2)ij}(\delta).$$

Найдем дифференциалы этих выражений в точке $\delta = 0$:

$$dg^{(1)}_{(m_1)ij} = \sum_{i=1}^{m_1+1}\sum_{j=1}^{2} g^{(0)}_{(m_1)ij}\left.\frac{\partial h_{(m_1)ij}(\delta)}{\partial\delta}\right|_{\delta=0} d\delta,$$

$$dg^{(1)}_{(m_2)ij} = \sum_{i=1}^{m_2+1}\sum_{j=1}^{2} g^{(0)}_{(m_2)ij}\left.\frac{\partial h_{(m_2)ij}(\delta)}{\partial\delta}\right|_{\delta=0} d\delta.$$

Построим инфинитезимальный оператор, действующий в пространстве L

$$U = \frac{\partial}{\partial\delta} + U_{\otimes m_1} + U_{\otimes m_2}, \qquad \text{где}$$

$$U_{\otimes m_1} = \sum_{g^{(1)}_{(m_1)ij}} \sum_{i=1}^{m_1+1}\sum_{j=1}^{2} g^{(0)}_{(m_1)ij}\left.\frac{\partial h_{(m_1)ij}(\delta)}{\partial\delta}\right|_{\delta=0} d\delta\frac{\partial}{\partial g^{(0)}_{(m_1)ij}},$$

$$U_{\otimes m_2} = \frac{\partial}{\partial\delta} + \sum_{g^{(1)}_{(m_2)ij}} \sum_{i=1}^{m_2+1}\sum_{j=1}^{2} g^{(0)}_{(m_2)ij}\left.\frac{\partial h_{(m_2)ij}(\delta)}{\partial\delta}\right|_{\delta=0} d\delta\frac{\partial}{\partial g^{(0)}_{(m_2)ij}}.$$

Теорема 1. *Пусть в системе (1) правые части являются однородными полиномами порядка m. Тогда инварианты группы $SO(2)$ в пространстве коэффициентов являются решением дифференциального уравнения $Uf = 0$, где U задается формулой (8).*

Теорема 2. *Пусть в системе (1) правые части являются однородными полиномами из пространства $L = L_{\otimes m_1} + L_{\otimes m_2} + \dots + L_{\otimes m_k}$. Тогда инварианты группы $SO(2)$ в пространстве коэффициентов являются решением дифференциального уравнения $Uf = 0$, где $U = U_{\otimes m_1} + U_{\otimes m_2} + \dots + U_{\otimes m_k}$, $U_{\otimes m_i}$ – оператор алгебры Ли группы $SO(2)$, действующий в $L_{\otimes m_i}$.*

4. Примеры. 1) Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = c_{10}x + c_{01}y, \qquad \frac{dy}{dt} = b_{10}x + b_{01}y.$$

Сделаем замену

$$x = \frac{\bar w + w}{2}, \qquad y = \frac{i(\bar w - w)}{2},$$

после чего получим систему, соответствующую (4):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{z_{10}}{2}\bar w + \frac{z_{01}}{2}w, \qquad \frac{d\bar w}{dt} = \frac{\bar z_{01}}{2}\bar w + \frac{\bar z_{10}}{2}w.$$

После замены $w = e^{i\delta}w_1$, $\bar w = e^{i\delta}\bar w_1$ получим матрицу $\bar G(\delta)$ (6) вида

$$\bar G(\delta) = \begin{vmatrix} \frac{z_{10}}{2}e^{-2i\delta} & \frac{z_{01}}{2} \\ \frac{\bar z_{01}}{2} & \frac{\bar z_{10}}{2}e^{2i\delta} \end{vmatrix}.$$

Ищем дифференциалы (7):

$$dz_{10} = -2iz_{10}e^{-2i\delta}d\delta, \qquad d\bar z_{10} = 2i\bar z_{10}e^{2i\delta}d\delta.$$

По ним строим оператор (8):

$$U = \frac{\partial}{\partial\delta} - 2iz_{10}\frac{\partial}{\partial z_10} + 2i\bar z_{10}\frac{\partial}{\partial\bar z_{10}}.$$

В пространстве $L_{\otimes 1}$ будет два решения: $f = z_{01}$ и $f = \bar z_{01}$. В пространстве $L_{\otimes 2}$ решением будет $f = z_{10}\bar z_{10} - z_{01}\bar z_{01}$.

2) Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2, \qquad \frac{dy}{dt} = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2.$$

После первой замены приходим к системе (4):

$$\frac{dw}{dt} = \frac{z_{20}}{4}\bar w^2 + \frac{z_{11}}{4}\bar w w + \frac{z_{02}}{4}w^2,$$

$$\frac{d\bar w}{dt} = \frac{\bar z_{02}}{4}\bar w^2 + \frac{\bar z_{11}}{4}\bar w w + \frac{\bar z_{20}}{4}w^2.$$

После замены $w = e^{i\delta}w_1$, $\bar{w} = e^{i\delta}\bar{w}_1$ получим матрицу $\bar{G}(\delta)$ (6) вида

$$\bar{G}(\delta) = \begin{vmatrix} \frac{z_{20}}{4}e^{-3i\delta} & \frac{z_{11}}{4}e^{-i\delta} & \frac{z_{02}}{4}e^{i\delta} \\ \frac{\bar{z}_{02}}{4}e^{-i\delta} & \frac{\bar{z}_{11}}{4}e^{i\delta} & \frac{\bar{z}_{20}}{4}e^{3i\delta} \end{vmatrix}.$$

Ищем дифференциалы (7):

$$dz_{20} = -3iz_{20}e^{-3i\delta}d\delta, \quad dz_{11} = -iz_{11}e^{-i\delta}d\delta, \quad dz_{02} = iz_{02}e^{i\delta}d\delta,$$
$$d\bar{z}_{02} = -i\bar{z}_{02}e^{-i\delta}d\delta, \quad d\bar{z}_{11} = i\bar{z}_{11}e^{i\delta}d\delta, \quad d\bar{z}_{20} = 3i\bar{z}_{20}e^{3i\delta}d\delta.$$

По ним строим оператор (8):

$$U = \frac{\partial}{\partial\delta} - 3iz_{20}\frac{\partial}{\partial z_20} - iz_{11}\frac{\partial}{\partial z_11} + iz_{02}\frac{\partial}{\partial z_02} -$$
$$-i\bar{z}_{02}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{02}} + i\bar{z}_{11}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{11}} + 3i\bar{z}_{20}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{20}}.$$

Инварианты, найденные К.С. Сибирским: $z_{20}\bar{z}_{20}$, $z_{11}\bar{z}_{11}$, $z_{02}\bar{z}_{02}, z_{11}z_{02}$, $\bar{z}_{11}\bar{z}_{02}$, $z_{20}\bar{z}_{11}^3$, $z_{20}\bar{z}_{11}^2z_{02}$, $z_{20}\bar{z}_{11}z_{02}^2$, $z_{20}z_{02}^2$, $\bar{z}_{20}z_{11}^3$, $\bar{z}_{20}z_{11}^2\bar{z}_{02}$, $\bar{z}_{20}z_{11}\bar{z}_{02}^2$, $\bar{z}_{20}\bar{z}_{02}^3$ – являются решениями этого уравнения.

[1] Lopatin A. Symmetry in perturbation problems // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, 7-13 July, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.1. – P. 79–88.

[2] Сибирский К.С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. – Кишинев: Штиинца, 1976. – 268 с.

[3] Сибирский К.С. Введение в алгебраическую теорию дифференциальных уравнений. – Кишинев: Штиинца, 1982. – 168 с.

[4] Лопатин А.К. Компактные групповые интегральные многообразия нелинейных дифференциальных систем // Тез. допов. міжнар. конф. Треті Боголюбовські читання, Київ, 18-23 серпня 1997. – Київ: Інститут математики НАН України, 1997. – С. 103.

[5] Кузьменко А.Г. Канонические формы систем нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, имеющих периодические решения // Там же. – С. 96.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 123–129

УДК 517.9:519.46

Конформно-інваріантний розв'язок рівнянь Максвелла

В.І. ЛАГНО

Педагогічний Інститут, Полтава
E-mail: lahno@pdpi.poltava.ua

Запропоновано загальну процедуру побудови конформно-інваріантних анзаців для поля Максвелла. Наведено один клас конформно-інваріантних точних розв'язків рівнянь Максвелла.

A general procedure for construction of conformally invariant Ansätze for the Maxwell field is suggested. A class of conformally invariant exact solutions of the Maxwell equations is presented.

У даній роботі розглядається фундаментальна система рівнянь електродинаміки – система рівнянь Максвелла у ваккумі

$$\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_0}, \quad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_0}, \\ &\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Добре відомо [1], що максимальною групою інваріантності (в класичному підході Лі) цієї системи є шістнадцятипараметрична група $C(1,3)\bigotimes H$, яка є прямим добутком конформної групи $C(1,3)$ та однопараметричної групи H перетворень Хевісайда-Лармора-Райніча. Наявність хороших симетрійних властивостей рівнянь (1) дає можливість, поряд з класичними методами розв'язування рівнянь математичної фізики, ефективно використовувати для побудови широких класів точних розв'язків системи (1) метод симетрійної редукції [2].

Метою роботи є побудова загальної форми конформно-інваріантних анзаців для поля Максвелла та подальше її використання для отримання класу конформно-інваріантних розв'язків системи (1).

1. Базис алгебри $AC(1,3)$ конформної групи $C(1,3)$, яка є групою інваріантності рівнянь Максвелла (1), складають оператори

$$\begin{aligned} &P_\mu = \partial_{x_\mu}, \quad J_{0a} = x_0\partial_{x_a} + x_a\partial_{x_0} + \varepsilon_{abc}(E_b\partial_{H_c} - H_b\partial_{E_c}),\\ &J_{ab} = x_b\partial_{x_a} - x_a\partial_{x_b} + E_b\partial_{E_a} - E_a\partial_{E_b} + H_b\partial_{H_a} - H_a\partial_{H_b},\\ &D = x_\mu\partial_{x_\mu} - 2(E_a\partial_{E_a} + H_a\partial_{H_a}),\\ &K_0 = 2x_0D - x_\mu x^\mu\partial_{x_0} + 2x_a\varepsilon_{abc}(E_b\partial_{H_c} - H_b\partial_{E_c}),\\ &K_a = -2x_aD - x_\mu x^\mu\partial_{x_a} - 2x_0\varepsilon_{abc}(E_b\partial_{H_c} - H_b\partial_{E_c}) -\\ &\qquad -2H_a(x_b\partial_{H_b}) - 2E_a(x_b\partial_{E_b}) + 2(x_bH_b)\partial_{H_a} + 2(x_bE_b)\partial_{E_a}. \end{aligned} \tag{2}$$

У формулах (2) та далі $\mu,\nu = 0,1,2,3$; $a,b,c = 1,2,3$; за індексами, що повторюються, передбачено сумування в межах їх зміни (наприклад, від 0 до 3 для μ,ν); ε_{abc} – антисиметричний тензор третього рангу з $\varepsilon_{123} = 1$; $x_\mu x^\mu = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$; $\partial_{x_\mu} = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\partial_{E_a} = \dfrac{\partial}{\partial E_a}$, $\partial_{H_a} = \dfrac{\partial}{\partial H_a}$.

Нехай

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u^1\\ \vdots\\ u^6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} = \text{стовпець}(E_1,E_2,E_3,H_1,H_2,H_3).$$

Очевидно, що базисні оператори (2) алгебри $AC(1,3)$ можна подати у такому загальному вигляді:

$$X = \xi^\mu(x_0,\mathbf{x})\partial_{x_\mu} + \rho_k^j(x_0,\mathbf{x})u^k\partial_{u_j}, \tag{3}$$

де $\xi^\mu(x_0,\mathbf{x})$, $\rho_k^j(x_0,\mathbf{x})$ – відомі гладкі функції, визначені в просторі Мінковського $\mathbb{R}^{1,3} = \langle x_0,\mathbf{x}\rangle$, $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$, $j,k = 1,\ldots,6$. Нехай, далі, $L = \langle X_m | m = 1,\ldots,p\rangle$ – деяка підалгебра рангу s конформної алгебри, базисні оператори якої мають вигляд (3). Згідно з загальним методом симетрійної редукції [2] ми повинні здійснити побудову двох класів функціональних інваріантів алгебри L

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}(x_0,\mathbf{x}) = (\omega^1(x_0,\mathbf{x}),\ldots,\omega^{4-s}(x_0,\mathbf{x})), \tag{4}$$

та

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}(x_0,\mathbf{x},\mathbf{u}) = \text{стовпець}(h^1(x_0,\mathbf{x},\mathbf{u}),\ldots,h^6(x_0,\mathbf{x},\mathbf{u})), \tag{5}$$

які складають множини функціонально-незалежних перших інтегралів систем диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку

$$\xi_m^\mu(x_0,\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{w}}{\partial x_\mu} = 0 \tag{6}$$

й

$$\xi_m^\mu(x_0,\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial x_\mu} + \rho_{mk}^j(x_0,\mathbf{x})\frac{\partial\mathbf{h}}{\partial u_j} = 0 \tag{7}$$

відповідно.

Тоді підстановка анзацу

$$\mathbf{h} = \mathbf{v}(\mathbf{w}), \qquad \mathbf{v} = \text{стовпець}\big(v^1(\mathbf{w}),\ldots,v^6(\mathbf{w})\big) \tag{8}$$

в систему (1) приводить до системи диференціальних рівнянь відносно $\mathbf{v}$ як функції від $\mathbf{w}$. Отже, редукована система міститиме вже не 4 а $4-s$ незалежних змінних (зокрема, при $s = 3$ ми прийдемо до системи звичайних диференціальних рівнянь).

Саме в такому підході було отримано широкі класи точних розв'язків системи (1), інваріантних відносно підалгебр рангу 3 алгебри Пуанкаре $AP(1,3) = \langle P_\mu, J_{\mu\nu}\rangle$ та розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,3) = AP(1,3) \ni \langle D\rangle$ [3–5].

З іншого боку, відомо [6], що другий клас інваріантів алгебри L з базисними операторами (3) можна шукати у вигляді

$$\mathbf{h} = H(x_0,\mathbf{x})\mathbf{u}, \tag{9}$$

де $H(x_0,\mathbf{x}) = ||h_k^j(x_0,\mathbf{x})||$ – деяка невироджена в $\mathbb{R}^{1,3}$ матриця розмірності 6×6, а тому анзац (8) можна подати у формі

$$\mathbf{u} = \Lambda(x_0,\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{w}), \tag{10}$$

де $\Lambda(x_0,\mathbf{x}) = H^{-1}(x_0,\mathbf{x})$. Форму анзацу (10) ми називаємо лінійною.

При цьому умова (7) для $\mathbf{h}$ (9) набуває вигляду

$$\xi_m^\mu(x_0,\mathbf{x})\frac{\partial H}{\partial x_\mu} + H(x_0,\mathbf{x})\Gamma_m(x_0,\mathbf{x}) = 0, \tag{11}$$

де $\Gamma_m(x_0,\mathbf{x})$ – деякі відомі матриці розмірності 6×6, що визначаються формою базисних операторів алгебри L.

Нехай $S_{\mu\nu}$ – матриці, які реалізують $D(1,0)\bigoplus D(0,1)$ – зображення алгебри Лі $AO(1,3)$ групи Лоренца $O(1,3)$ (див., напр., [7]), а E – одинична матриця розмірності 6×6. Використавши запис генераторів (2) за допомогою матриць $S_{\mu\nu}$ та E [6, 7], переконуємося, що

1) матриці $\Gamma_m(x_0,\mathbf{x})$ в системі (11) мають вигляд

$$\Gamma_m = f^m E + f_0^m S_{03} + f_1^m G_1 + f_2^m G_2 + f_3^m S_{12} + f_4^m \tilde{G}_1 + f_5^m \tilde{G}_2, \tag{12}$$

де $f^m = f^m((x_0,\mathbf{x}),\ f_\alpha^m = f_\alpha^m(x_0,\mathbf{x})$ $(\alpha = 0,1,\ldots,5)$ – деякі відомі гладкі функції, визначені в $R^{1,3}$;

2) матрицю H природно шукати у формі

$$\begin{aligned} H(x_0,\mathbf{x}) = \exp\{(-\ln\theta)E\}\exp(\theta_0 S_{03})\exp(-\theta_3 S_{12})\times \\ \times\exp(-2\theta_1 G_1)\exp(-2\theta_2 G_2)\exp(-2\theta_4 \tilde{G}_1)\exp(-2\theta_5\tilde{G}_2), \end{aligned} \tag{13}$$

де $\theta = \theta(x_0,\mathbf{x})$, $\theta_\alpha = \theta_\alpha(x_0,\mathbf{x})$ $(\alpha = 0,1,\ldots,5)$ – довільні гладкі функції, визначені в $\mathbb{R}^{1,3}$. В (13) і (14) ми використовуємо базис алгебри $AO(1,3)$, який складають матриці $S_{03}, S_{12}, G_d, \tilde{G}_d$ $(d = 1,2)$, де $G_d = J_{0d} - J_{d3}$, $\tilde{G}_d = J_{0d} + J_{d3}$. Зауважимо, що оскільки $\exp\{(-\ln\theta)E\} = \theta^{-1}E$, то з (14) випливає, що $H = \theta^{-1}\tilde{H}$, де $\tilde{H}$ – матриця, яка реалізує зображення групи Лоренца, відповідне $D(1,0)\bigoplus D(0,1)$ – зображенню алгебри Лі $AO(1,3)$.

Здійснивши підстановку Γ_m (12) та H (13) в систему (11), приходимо до такого твердження.

Лема 1. *Другий клас інваріантів алгебри L, з базисними операторами форми (3), складають функції (9). При цьому матриця H має форму (13), а функції θ, θ_α $(\alpha = 0,1,\ldots,5)$ задовольняють систему диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку:*

$$\begin{aligned}
&\xi_m^\mu \frac{\partial\theta}{\partial x_\mu} = f^m\theta, \qquad \xi_m^\mu \frac{\partial\theta_0}{\partial x_\mu} = 4\left(\theta_4 f_1^m + \theta_5 f_2^m\right) - f_0^m,\\
&\xi_m^\mu \frac{\partial\theta_3}{\partial x_\mu} = 4\left(\theta_4 f_2^m - \theta_5 f_1^m\right) + f_3^m,\\
&\xi_m^\mu \frac{\partial\theta_1}{\partial x_\mu} = 4\left(\theta_1\theta_4 + \theta_2\theta_5\right) f_1^m + 4\left(\theta_1\theta_5 - \theta_2\theta_4\right) f_2^m -\\
&\qquad -\theta_1 f_0^m - \theta_2 f_3^m + \frac{1}{2} f_1^m,\\
&\xi_m^\mu \frac{\partial\theta_2}{\partial x_\mu} = 4\left(\theta_2\theta_4 - \theta_1\theta_5\right) f_1^m + 4\left(\theta_2\theta_5 + \theta_1\theta_4\right) f_2^m -\\
&\qquad -\theta_2 f_0^m + \theta_1 f_3^m + \frac{1}{2} f_2^m,\\
&\xi_m^\mu \frac{\partial\theta_4}{\partial x_\mu} = \theta_4 f_0^m - 2\left(\theta_4^2 - \theta_5^2\right) f_1^m - 4\theta_4\theta_5 f_2^m - \theta_5 f_3^m + \frac{1}{2} f_4^m,\\
&\xi_m^\mu \frac{\partial\theta_5}{\partial x_\mu} = \theta_5 f_0^m - 4\theta_4\theta_5 f_1^m + 2(\theta_4^2 - \theta_5^2) f_2^m + \theta_4 f_3^m + \frac{1}{2} f_5^m.
\end{aligned} \tag{14}$$

Із сказаного вище випливає теорема.

Теорема. *Нехай $L = \langle X_m | m = 1,\ldots,p\rangle$ – підалгебра рангу s конформної алгебри, базисні генератори якої мають вигляд (2). Анзац, що відповідає підалгебрі L, має лінійну форму (10). При цьому $\Lambda(x_0,\mathbf{x}) = H^{-1}(x_0,\mathbf{x})$, де H має вигляд (13), а функції $\mathbf{w}(x_0,\mathbf{x})$ та $\theta = (x_0,\mathbf{x})$, $\theta_\alpha = (x_0,\mathbf{x})$ $(\alpha = 0,1,\ldots,5)$ є розв'язками систем диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку (6) та (14) відповідно.*

Оскільки L – довільна підалгебра конформної алгебри, то з теореми випливає, що довільний конформно-інваріантний анзац для поля Максвелла має лінійну форму (10).

2. Використання результатів теореми для побудови конформно-інваріантних розв'язків системи (1) передбачає наявність переліку підалгебр даного рангу s алгебри $AC(1,3)$. Відома ж класифікація підалгебр конформної алгебри проведена з точністю до групи внутрішніх автоморфізмів алгебри $AC(1,3)$ [8].

Нехай $AC(1,3)$ – конформна алгебра, що визначається генераторами (2), а $AC^{(1)}(1,3)$ – конформна алгебра, яка породжується векторними полями

$$P_\mu^{(1)} = \partial_{x_\mu}, \qquad J_{\mu\nu}^{(1)} = x^\mu\partial_{x_\nu} - x^\nu\partial_{x_\mu},$$
$$D^{(1)} = x_\mu\partial_{x_\mu}, \qquad K_\mu^{(1)} = 2x^\mu D^{(1)} - (x_\nu x^\nu)\partial_{x_\mu}.$$

Тут піднімання та опускання індексів μ,ν здійснюється за допомогою метричного тензора $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ простору Мінковського $\mathbb{R}^{1,3}$.

Лема 2. *Нехай L – підалгебра алгебри $AC(1,3)$, s – ранг L, $s^{(1)}$ – ранг проекції L на $AC^{(1)}(1,3)$. Якщо $s = s^{(1)}$, то $\dim L = s$.*

Використовуючи результати леми, ми отримали чотирнадцять нових анзаців для поля Максвелла, які не є інваріантними відносно підалгебр алгебри $A\tilde{P}(1,3)$ і яким відповідає редукція системи (1) до систем звичайних диференціальних рівнянь. Це дало можливість отримати ряд нових точних розв'язків рівнянь Максвелла (1). Нижче ми наводимо один з таких розв'язків:

$$\begin{aligned} &E_1 = F + G, \quad E_2 = \tilde{F} + \tilde{G}, \quad E_3 = B_{12}, \\ &H_1 = \tilde{G} - \tilde{F}, \quad H_2 = F - G, \quad H_3 = B_{34}. \end{aligned} \tag{15}$$

Тут

$$F = \sigma^{-1}(1+\xi^2)^{-1}\Big\{x_1 C_5 - x_2 C_6 - \left(1+\omega^2\right)^{-1} \times \\ \times \left[\xi x_1 A_{12} + \xi x_2 A_{34} - \tfrac{1}{2}(1-\xi^2)(x_1\tilde{A}_{12} + x_2\tilde{A}_{34})\right]\Big\},$$

$$G = \frac{1}{2}\sigma^{-2}\left(1+\xi^2\right)\left(1+\omega^2\right)^{-1}\left(x_1\tilde{A}_{12} - x_2\tilde{A}_{34}\right),$$

$$\tilde{F} = \sigma^{-1}\left(1+\xi^2\right)^{-1}\left\{x_1 C_6 + x_2 C_5 + \left(1+\omega^2\right)^{-1} \times \\ \times \left[\xi x_1 A_{34}\xi x_2 A_{12} + \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)\left(x_2\tilde{A}_{12} - x_1\tilde{A}_{34}\right)\right]\right\},$$

$$\tilde{G} = \frac{1}{2}\sigma^{-1}\left(1+\xi^2\right)\left(1+\omega^2\right)^{-1}\left(x_1\tilde{A}_{34} + x_2\tilde{A}_{12}\right),$$

$$A_{ij} = \omega C_i + C_j, \qquad \tilde{A}_{ij} = C_i - \omega C_j,$$

$$B_{ij} = \sigma^{-1}\left(1+\omega^2\right)^{-1}\left[C_i\left(\omega+\xi\right) + C_j\left(1-\xi\omega\right)\right],$$

$$\sigma = x_1^2 + x_2^2,\ \eta = x_0 + x_3,\ \xi = x_0 - x_3,\ \omega = \eta\left(1+\xi^2\right)\sigma^{-1} - \xi,$$

$C_1, \ldots, C_6$ – довільні дійсні сталі інтегрування.

Неважко переконатися, що в загальному випадкові векторні поля $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ (15) не є ортогональними. Умова $\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = 0$ виконується, коли мають місце рівності

$$C_2 C_6 = C_4 C_5, \qquad C_1 C_6 = C_1 C_3 + C_2 C_4 + C_3 C_5.$$

[1] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений Максвелла.– Киев: Наук. думка, 1983.– 200 с.

[2] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[3] Жданов Р.З., Смалій В.Ф., Лагно В.І. Пуанкаре–інваріантні анзаци для поля Максвелла // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 4. – С. 5–7.

[4] Жданов Р.З., Ревенко И.В., Смалий В.Ф. Редукция и точные решения уравнений Максвелла в вакууме. – Киев, 1990. – 32 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.19).

[5] Лагно В.І., Смалій В.Ф. $\tilde{P}(1,3)$-інваріантні анзаци для поля Максвелла // Доп. НАН України. – 1996. – № 12. – С. 49–54.

[6] Fushchych W., Zhdanov R. Symmetries and exact solutions of nonlinear Dirac equations. – Kyiv: Mathematical Ukraina Publisher, 1997. – 383 p.

[7] Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.

[8] Фущич В.И., Баранник Л.Ф., Баранник А.Ф. Подгрупповой анализ групп Галилея, Пуанкаре и редукция нелинейных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 304 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 130–137

УДК 517.68

Про нові зображення алгебр Лі груп Галілея в тривимірному просторі-часі

Г.О. ЛАГНО

Полтавський педагогічний інститут, Полтава
E-mail: lahno@pdpi.poltava.ua

Проведено класифікацію одного класу зображень векторними полями Лі класичної, спеціальної та повної алгебр Галілея в тривимірному просторі-часі. Результати класифікації використано для побудови галілей-інваріантних рівнянь вигляду $F(t,x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u})=0$.

Classification of a class of representations by Lie vector fields of the classical, special and complete Galilei algebras in three-dimensional space-time is carried out. The results of this classification are applied for construction of Galilei-invariant equations of the form $F(t,x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u})=0$.

Серед локальних груп симетрій, які знайшли широкі застосування в різних задачах математичної та теоретичної фізики, чільне місце, поряд з групами Лоренца, Евкліда, Пуанкаре, займають групи Галілея. Зокрема, вони є групами інваріантності ряду важливих диференціальних рівнянь з частинними похідними (наприклад, рівнянь теплопровідності, Шрьодінгера, Бюргерса, Кортевега-де Фріза) [1–3]. Саме рівняння, інваріантні відносно груп Галілея, відіграють одну з провідних ролей в нерелятивістській фізиці (такі рівняння задовольняють принцип відносності Галілея).

У зв'язку з цим актуальною є задача відбору із множини диференціальних рівнянь тих рівнянь, максимальні групи інваріантності яких ізоморфні групам Галілея або містять їх як підгрупи. Для розв'язування даної задачі використовують той факт, що рівняння, яке допускає дану групу інваріантності, є інваріантним і відносно алгебри Лі (інфінітезимальних операторів) цієї групи. Надалі алгебри Лі груп Галілея називатимемо алгебрами Галілея. Саме у цьому підході було описано широкі класи диференціальних рівнянь еволюційного типу, які інваріантні відносно двох алгебр Галілея [2, 4].

Повністю задача опису диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, інваріантних відносно стандартних алгебр Галілея, розв'язана в [5]. В роботах [6, 7] попередньо було здійснено класифікацію усіх нееквівалентних зображень векторними полями Лі розширених алгебр Галілея у просторі двох незалежних й двох залежних змінних, а потім результати цієї класифікації були використані для опису галілей-інваріантних рівнянь еволюційного типу.

У даному повідомленні ми, продовжуючи роботи [6, 7], вивчаємо класифікацію нееквівалентних зображень в класі векторних полів Лі (ВПЛ–зображень) класичної, спеціальної та повної алгебр Галілея у просторі трьох незалежних та однієї залежної змінних. Результати класифікації використано для побудови галілей–інваріантних рівнянь вигляду

$$F(t,x,u,\underset{1}{u},\underset{2}{u})=0. \tag{1}$$

В (1) і далі $x=(x_1,x_2)$, $u=u(t,x)$, $\underset{1}{u}=\left\{u_\mu=\frac{\partial u}{\partial\mu}\Big|\mu=t,x_1,x_2\right\}$, $\underset{2}{u}=\left\{u_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 u}{\partial\mu\partial\nu}\Big|\mu,\nu=t,x_1,x_2\right\}$.

1. Як було підкреслено вище, спочатку ми розглядаємо задачу опису реалізацій алгебр Галілея в термінах векторних полів Лі у просторі $X\otimes U$ незалежних й залежних змінних. У нашому випадкові X – тривимірний простір із координатами $t,x=(x_1,x_2)$, а U – простір дійсних функцій $u(t,x)$. Векторні поля Лі мають вигляд

$$Q=\tau(t,x,u)\partial_t+\xi^i(t,x,u)\partial_{x_i}+\eta(t,x,u)\partial_u, \qquad i=1,2, \tag{2}$$

де τ,ξ^i,η – довільні достатньо гладкі функції визначені у просторі $X\otimes U$.

Нехай $AL=\langle Q_1,\ldots,Q_N\rangle$ – алгебра Лі, базисні оператори Q_i якої задовольняють комутаційні співвідношення

$$[Q_k,Q_m]=C^n_{km}Q_n, \tag{3}$$

де C^n_{km} – дійснозначні сталі (структурні константи), $k,m,n=1,2,\ldots,N$.

Будемо говорити, що оператори Q_i $(i=1,\ldots,N)$ вигляду (2) реалізують ВПЛ зображення алгебри Лі AL, якщо вони

- лінійно незалежні і
- задовольняють комутаційні співвідношення (3).

Добре відомо [1], що комутаційні співвідношення (3) не змінюються у результаті виконання довільної оборотної заміни змінних

$$t' = h(t,x,), \quad x'_a = g_a(t,x,u), \quad a = 1,2, \quad u' = f(t,x,u), \tag{4}$$

де h, g_a, f – довільні гладкі функції. Перетворення (4) формують групу (групу дифеоморфізмів), яка визначає природне відношення еквівалентності на множині можливих ВПЛ зображень алгебр Лі AL: два зображення алгебри Лі AL називаються еквівалентними, якщо їх відповідні базисні оператори трансформуються один в другий в результаті дії перетворення (4).

Розгляду підлягають класична, спеціальна та повна алгебри Галілея, які відповідно позначаємо $AG_1(1,2)$, $AG_2(1,2)$, $AG_3(1,2)$. При цьому, $AG_1(1,2) = \langle T, P_a, G_a, J_{12} \; | a = 1,2\rangle$, де базисні оператори задовольняють комутаційні співвідношення

$$\begin{aligned} &[P_a, G_b] = [T, P_a] = [P_a, P_b] = [G_a, G_b] = [T, J_{12}] = 0, \\ &[P_1, J_{12}] = P_2, \quad [P_2, J_{12}] = -P_1, \quad [G_1, J_{12}] = G_2, \\ &[G_2, J_{12}] = -P_1, \quad [T, G_a] = -P_a, \quad a,b = 1,2; \end{aligned} \tag{5}$$

$AG_2(1,2) = \langle T, P_a, G_a, J_{12}, D | a = 1,2\rangle$, де базисні оператори задовольняють комутаційні співвідношення (5) та співвідношення

$$\begin{aligned} &[D, J_{12}] = 0, \quad [D, T] = -2T, \\ &[D, P_a] = -P_a, \quad [D, G_a] = G_a, \quad a = 1,2; \end{aligned} \tag{6}$$

$AG_3(1,2) = \langle T, P_a, G_a, J_{12}, D, S | a = 1,2\rangle$, де базисні оператори задовольняють комутаційні співвідношення (5), (6) та співвідношення

$$\begin{aligned} &[S, J_{12}] = [S, G_a] = 0, \quad [S, P_a] = G_a, \\ &[T, S] = D, \quad [D, S] = 2S, \quad a = 1,2. \end{aligned} \tag{7}$$

Тут ми обмежуємося розглядом тих ВПЛ зображень алгебр $AG_1(1,2)$, $AG_2(1,2)$, $AG_3(1,2)$, оператори трансляцій яких T, P_a ($a = 1,2$) мають вигляд

$$T = \partial_t, \quad P_a = -\partial_{x_a}, \quad a = 1,2, \tag{8}$$

й позначаємо їх як ВПЛ* зображення.

Саме такого типу зображення алгебр Галілея зустрічаються в різних задачах математичної фізики.

Для того, щоб отримати перелік нееквівалентних зображень класичної алгебри Галілея, необхідно доповнити оператори T, P_a (8) операторами J_{12}, G_a ($a = 1,2$), які мають вигляд (2), й перевірити виконання комутаційних співвідношень (5). При цьому, для спрощення вигляду операторів J_{12}, G_a можна використовувати лише ті із замін змінних (4), які залишають вигляд операторів T, P_a ($a = 1,2$) (8) незмінним. Неважко переконатися, що такими є перетворення

$$t' = t + h(u), \quad x'_i = x_i = g^i(u) \ (i = 1,2), \quad u' = f(u). \tag{9}$$

Наприклад, із виконання комутаційних співвідношень (5) випливає, що найбільш загальний вигляд оператора J_{12} такий:

$$J_{12} = \tau(u)\partial_t - x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2} + \xi^i(u)\partial_{x_i} + \eta(u)\partial_u, \quad i = 1,2. \tag{10}$$

Якщо в (10) $\eta \neq 0$, то, поклавши в (9) функції h, g^i, f як розв'язки рівнянь

$$\tau + \eta h_u = 0, \quad \xi^1 + \eta g^1_u = -\xi^2, \quad \xi^2 + \eta g^2_u = \xi^1, \quad \eta f_u = 1,$$

ми зводимо оператор J_{12} до оператора (в початкових позначеннях змінних)

$$J_{12} = -x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2} + \partial_u.$$

Якщо ж в (10) $\eta = 0$, то аналогічно приходимо до оператора

$$J_{12} = -x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}.$$

Отже, мають місце дві реалізації в класі векторних полів Лі (2) операторів T, P_a ($a = 1,2$), J_{12}. Щоб отримати нееквівалентні зображення алгебри $AG_1(1,2)$, потрібно кожну з них доповнити операторами G_a ($a = 1,2$) вигляду (2). Опускаючи досить громіздкі викладки обчислень, сформулюємо результат.

Теорема 1. *Нееквівалентні ВПЛ* зображення класичної алгебри Галілея вичерпуються одним із таких зображень:*

$$\begin{aligned} AG_1^1(1,2): \quad &\{T = \partial_t, \ P_a = -\partial_{x_a} \ (a = 1,2), \\ &J_{12} = -x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}, \quad G_1 = t\partial_{x_1}, \ G_2 = t\partial_{x_2}\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AG_1^2(1,2): \quad &\{T = \partial_t, \ P_a = -\partial_{x_a} \ (a = 1,2), \\ &J_{12} = -x_2\partial_{x_1} + x_1\partial_{x_2}, \\ &G_1 = t\partial_{x_1} - u\partial_{x_2}, \ G_2 = t\partial_{x_2} + u\partial_{x_1}\}; \end{aligned}$$

$$AG_1^3(1,2): \quad \{T=\partial_t,\ P_a=-\partial_{x_a}\ (a=1,2),$$
$$J_{12}=-x_2\partial_{x_1}+x_1\partial_{x_2}+\partial_u,$$
$$G_1=(t+\lambda\cos 2u)\partial_{x_1}+\lambda\sin 2u\partial_{x_2},$$
$$G_2=\lambda\sin 2u\partial_{x_1}+(t-\lambda\cos 2u)\partial_{x_2},\ \lambda\geq 0\}.$$

Як випливає із теореми, для опису ВПЛ* зображень алгебр $AG_2(1,2)$, $AG_3(1,2)$, потрібно здійснити поетапне розширення кожного ВПЛ* зображення алгебри $AG_1(1,2)$ до спеціальної, а потім до повної алгебр Галілея. Зазначимо, що кожне з отриманих у теоремі ВПЛ* зображень алгебри $AG_1(1,2)$ таке розширення допускає. Сформулюємо результати досліджень.

Наслідок 1. *Нееквівалентні ВПЛ* зображення спеціальної алгебри Галілея вичерпуються одним із таких зображень:*

$$AG_2^1(1,2): \quad \{AG_1^1(1,2),\ D=2t\partial_t+x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}\},$$
$$AG_2^2(1,2): \quad \{AG_1^1(1,2),\ D=2t\partial_t+x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}+u\partial_u\},$$
$$AG_2^3(1,2): \quad \{AG_1^2(1,2),\ D=2t\partial_t+x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}+2u\partial_u\},$$
$$AG_2^4(1,2): \quad \{AG_1^3(1,2), \textit{де}\ \lambda=0,$$
$$D=2t\partial_t+x_1\partial_{x_1}+x_2\partial_{x_2}+\gamma\partial_u,\ \gamma\in\mathbb{R}\}.$$

Наслідок 2. *Нееквівалентні ВПЛ* зображення повної алгебри Галілея вичерпуються одним із таких зображень:*

$$AG_3^1(1,2): \quad \{AG_2^1(1,2),\ S=t^2\partial_t+x_1t\partial_{x_1}+x_2t\partial_{x_2}\};$$
$$AG_3^2(1,2): \quad \{AG_2^2(1,2),\quad S=t^2\partial_t+x_1t\partial_{x_1}+x_2t\partial_{x_2}+$$
$$+u(t+\varepsilon u^2)\partial_u,\quad \varepsilon=0,\pm 1\},$$
$$AG_3^3(1,2): \quad \{AG_2^3(1,2),\quad S=(t^2-u^2)\partial_t+(x_1t+x_2u)\partial_{x_1}+$$
$$+(x_2t-x_1u)\partial_{x_2}+2ut\partial_u\};$$
$$AG_3^4(1,2): \quad \{AG_2^4(1,2),\quad S=t^2\partial_t+(x_1t+\lambda\cos u)\partial_{x_1}+$$
$$+(x_2t+\lambda\sin u)\partial_{x_2}+(\gamma t+\alpha)\partial_u,\ \lambda\geq 0,\ \alpha,\gamma\in\mathbb{R}\}.$$

2. У цьому пункті зупинимося на побудові найбільш загального вигляду рівнянь (1), які інваріантні відносно класичної, спеціальної та повної алгебр Галілея. Для цього використаємо отримані в теоремі та наслідках ВПЛ* зображення $AG_1^1(1,2)$, $AG_2^1(1,2)$, $AG_2^2(1,2)$, $AG_3^1(1,2)$ та $AG_3^2(1,2)$ вказаних алгебр.

Процедура побудови інваріантних рівнянь є стандартною [3]. Нехай Q_a $(a=1,\ldots,N)$ складають базис алгебри Лі AL групи симетрії у просторі $X\otimes U$. У нашому випадкові $X\otimes U$ є простір $\langle t,x_1,x_2,u\rangle$, а всі Q_a мають вигляд (2). Рівняння (1) інваріантні відносно алгери Лі AL, якщо функція F задовольняє систему диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\mathbf{pr}^{(2)}Q_aF=0, \qquad a=1,\ldots,N, \tag{11}$$

де $\mathbf{pr}^{(2)}Q_a$ – друге продовження оператора Q_a.

Тим самим задача зводиться до розв'язування рівнянь (11), в які всі аргументи входять як незалежні змінні. Як відомо, загальний розв'язок системи (11) має вигляд

$$\Psi(J_1,\ldots,J_s)=0, \tag{12}$$

де $J_k(t,x,u,u_\mu,u_{\mu\nu})$ $(\mu,\nu=t,x_1,x_2)$ складають множину елементарних інваріантів алгебри AL. Число змінних в (1) й (11) рівне 13. Алгебри $AG_1(1,2)$, $AG_2(1,2)$ й $AG_3(1,2)$ є розв'язними алгебрами, генеруючі орбіти відповідних продовжень груп перетворень є шести-, семи- та восьмивимірні, відповідно. Згідно з цим рівняння (12) міститиме сім, шість та п'ять елементарних інваріантів алгебр $AG_1(1,2)$, $AG_2(1,2)$, $AG_3(1,2)$, відповідно.

Результати наших обчислень ми підсумовуємо нижче.

Рівняння (1), інваріантне відносно алгебри $AG_1^1(1,2)$, має найбільш загальний вигляд

$$\tilde{F}(J_1,\ldots,J_7)=0, \tag{13}$$

де

$$J_1=u,\qquad J_2=u_1^2+u_2^2,\qquad J_3=u_{11}+u_{22},$$
$$J_4=u_1^2u_{11}+u_2^2u_{22}+2u_1u_2u_{12},\qquad J_5=u_{11}u_{22}-u_{12}^2,$$
$$J_6=(u_1u_{22}-u_2u_{12})u_{1t}+(u_2u_{11}-u_1u_{12})u_{2t}-(u_{11}u_{22}-u_{12}^2)u_t,$$
$$J_7=u_{11}u_{2t}^2+u_{22}u_{1t}^2-\left(u_{11}u_{22}-u_{12}^2\right)u_{tt}-2u_{12}u_{1t}u_{2t}.$$

Тут $u_a=u_{x_a}$, $u_{ab}=u_{x_ax_b}$, $u_{ta}=u_{tx_a}$, $a,b=1,2$. Зазначимо, що цей результат незалежно отримано в [8].

Найбільш загальним рівнянням вигляду (1), яке є інваріантним відносно алгебр $AG_2^1(1,2)$ та $AG_2^2(1,2)$, є рівняння

$$G(\Sigma_1,\ldots,\Sigma_6)=0. \tag{14}$$

При цьому, елементарні інваріанти алгебри $AG_2^1(1,2)$ мають вигляд

$$\begin{gathered}\Sigma_1 = J_1, \quad \Sigma_2 = J_3 J_2^{-1}, \quad \Sigma_3 = J_4 J_2^{-2}, \\ \Sigma_4 = J_5 J_2^{-2}, \quad \Sigma_5 = J_6 J_2^{-3}, \quad \Sigma_6 = J_7 J_2^{-4},\end{gathered} \tag{15}$$

а алгебри $AG_2^2(1,2)$ –

$$\begin{gathered}\Sigma_1 = J_2, \quad \Sigma_2 = J_3 J_1, \quad \Sigma_3 = J_4 J_1, \\ \Sigma_4 = J_5 J_1^2, \quad \Sigma_5 = J_6 J_1^3, \quad \Sigma_6 = J_7 J_1^5.\end{gathered} \tag{16}$$

Значення $J_1, \ldots, J_7$ такі ж, як і в (13).

Нарешті, найбільш загальним рівнянням, яке інваріантне відносно алгебр $AG_3^1(1,2)$, $AG_3^2(1,2)$, є рівняння

$$H(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_5) = 0. \tag{17}$$

Для повної алгебри Галілея $AG_3^1(1,2)$ значення елементарних інваріантів збігаються із функціями

$$\Lambda_1 = \Sigma_1, \ \Lambda_2 = \Sigma_2, \ \Lambda_3 = \Sigma_3, \ \Lambda_4 = \Sigma_4, \ \Lambda_5 = \Sigma_5^2 - (\Sigma_2 - \Sigma_3)\Sigma_6,$$

де значення $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_6$ такі, як і в (15). Значення елементарних інваріантів алгебри $AG_3^2(1,2)$ при $\varepsilon = 0$ такі:

$$\Lambda_1 = \Sigma_1, \ \Lambda_2 = \Sigma_2, \ \Lambda_3 = \Sigma_3, \ \Lambda_4 = \Sigma_4, \ \Lambda_5 = \Sigma_6,$$

а при $\varepsilon \neq 0$ –

$$\Lambda_1 = \Sigma_1^{-\frac{2}{3}} \Sigma_2 - 3\Sigma_1^{\frac{1}{3}}, \quad \Lambda_2 = \Sigma_1^{-\frac{5}{3}} \Sigma_3 - 3\Sigma^{\frac{1}{3}},$$

$$\Lambda_3 = \Sigma_1^{-\frac{5}{6}} \Sigma_4 - \frac{6}{5} \Sigma_1^{\frac{1}{6}} \left(\Sigma_2 - \Sigma_1^{-1} \Sigma_3 \right),$$

$$\Lambda_4 = \Sigma_1^{-2} \left[\Sigma_5 - \varepsilon \left(\frac{1}{7} \Sigma_4 + \frac{3}{7} \Sigma_1 \Sigma_2 - \frac{3}{7} \Sigma_3 \right) \right],$$

$$\begin{aligned}\Lambda_5 = \Sigma_1^{\frac{7}{3}} v + \frac{6}{5} A \Sigma_1^{\frac{5}{6}} \Bigg\{ & \Sigma_6 + \omega^2 A^{-1} \left(v + \frac{6}{5} A \Sigma_1^{\frac{5}{6}} \right)^{-1} - \\ & - \frac{2\varepsilon}{7} \omega v S\left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{6\varepsilon}{5} \omega A S\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{49} v A S\left(-\frac{5}{2}\right) - \\ & - \frac{6}{35} A S\left(-\frac{5}{3}\right) - \frac{9}{25} A^2 S\left(-\frac{5}{6}\right) \Bigg\},\end{aligned}$$

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \omega = \Lambda_4, \quad v = \Lambda_3, \quad A = \Lambda_1 - \Lambda_3,$$

$$S(\alpha) = \int^t \tau^\alpha \left[v + \frac{6}{5} A \tau^{\frac{5}{6}} \right]^{-2} d\tau.$$

Тут $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_6$ наведені в (16).

Зауважимо, що жодне із рівнянь (13), (14), (17) не містить рівняння першого порядку, в які входила б змінна u_t.

[1] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 639 с.

[2] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.Н. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.

[3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[4] Fushchych W.I., Cherniha R.M. The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A. – 1985. – **18**. – P. 3491–3503.

[5] Фущич В.И., Егорченко И.А. Дифференциальные инварианты алгебры Галилея // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 4. – С. 19–34.

[6] Rideau G., Winternitz P. Evolution equations invariant under two–dimensional space–time Schrödinger group // J. Math. Phys. – 1993. – **34**, № 2. – P. 558–570.

[7] Zhdanov R.Z. and Fushchych W.I. On new representations of Galilei groups // J. Nonlin. Math. Phys. – 1997. – **4**, № 3–4. – P. 426–435.

[8] Чернига Р.М. Симметрия и точные решения галилеевски-инвариантных нелинейных дифференциальных уравнений // Автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев: Институт математики АН УССР, 1987. – 10 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 138–145

УДК 517.9

Symmetry reduction and some classes of exact solutions of the Born-Infeld equation

O. LEIBOV

Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mech. and Math., Lviv

Використовуючи підгрупову структуру групи Пуанкаре $\tilde{P}(1,3)$, побудовані анзаци, які редукують рівняння Борна-Інфельда до диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних. Проведена відповідна симетрійна редукція. Знайдені деякі класи точних розв'язків досліджуваного рівняння.

Ansazes that reduce the Born-Infeld equation to differential equations in a less number of independent variables are constructed by means of using the subgroup structure of the Poincaré group $\tilde{P}(1,3)$. The corresponding symmetry reduction is carried out. Some classes of exact solutions of the equation under investigation are found.

The Born-Infeld equation for different n-dimensional spaces is widely applied (see, for example [1, 2]). In works [3, 4] symmetry of this equation has been studied and families of exact solutions was found using special ansatzes.

The present work is devoted to the studying of the Born-Infeld equation

$$\Box u\,(1 - u_\nu u^\nu) + u_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0, \tag{1}$$

where $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_3$, $u_{\mu\nu} \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}$, $u_\nu \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x_\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2$, $\Box$ is the d'Alembert operator.

The invariance group of equation (1) is the extended Poincaré group $\tilde{P}(1,3)$ [3, 4]. In this work we construct ansatzes that reduce equations (1) to differential equations in a less number of independent variables, by means of using the subgroup structure of $\tilde{P}(1,3)$ [5, 6]. Corresponding symmetry reduction is carried out. After solving reduced equations, we find some classes of exact solutions of the Born-Infeld equation (1).

1. Below we write down ansatzes reducing equation (1) to ordinary differential equations (ODEs) and list the obtained ODEs together with some classes of exact solutions of the Born-Infeld equation.

1. $u = -(x_1\varphi(\omega))^{(1+\alpha)/2\alpha} + x_0, \qquad \omega = \dfrac{x_2}{x_1},\ (\alpha \neq 0),$
   $\varphi'' = 0, \qquad \varphi = c_2\omega + c_1,$
   $u = x_0 - (c_1x_1 + c_2x_2)^{(1+\alpha)/2\alpha};$

2. $u = -\varphi(\omega) + x_0 - 2\ln x_2, \qquad \omega = \dfrac{x_1}{x_2},$
   $2\varphi'' + \varphi'^2 = 0, \qquad \varphi = 2\ln(\omega + c),$
   $u = x_0 - 2\ln(x_1 + cx_2);$

3. $u^2 = -x_2^2\varphi^2(\omega) + x_0^2, \qquad \omega = \dfrac{x_1}{x_2},$
   $\varphi(\varphi^2 - \omega^2 - 1)\varphi'' + (\omega^2+1)\varphi'^2 - 2\omega\varphi\varphi' + \varphi^2 - 1 = 0;$

4. $u = -((x_1^2 + x_2^2)\varphi(\omega))^{(\alpha+c)/2\alpha},$
   $\omega = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1} - \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad (c > 0, \alpha \neq 0),$
   $4\alpha^2\varphi^2\varphi'' - 8(\alpha^2+1)\varphi'^3 + 12\varphi\varphi'^2 - 6\varphi^2\varphi' + \varphi^3 = 0;$

5. $u^2 = -x_2^2\varphi^2(\omega) + x_0^2 - x_1^2,$
   $\omega = \alpha\ln(x_0 - u) - (1+\alpha)\ln x_2, \quad (\alpha \neq 0),$
   $\varphi((\alpha^2-1)\varphi^2 - \alpha^2)\varphi'' + (2(\alpha^2+1)^2\varphi^2 - \alpha^2)\varphi'^2 -$
   $-((5\alpha+3)\varphi^2 - 5\alpha)\varphi\varphi' + \varphi^2(2\varphi^2 - 1) = 0;$

6. $u = -\varphi(\omega) + x_0 - 2\ln x_2, \qquad \omega = \dfrac{x_0 + u}{x_2^2},$
   $(4\omega - 1)\varphi'' + 2\omega\varphi'^2 + 2\varphi' = 0;$

7. $u = -\varphi(\omega) + x_0 - \ln(x_1^2 + x_2^2),$
   $\omega = 2c\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1} + \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad (c > 0),$
   $2c^2\varphi'' + \varphi'^3 + (c^2+3)\varphi'^2 + 3\varphi' + 1 = 0;$

8. $u = \varphi(\omega) - 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1} - x_0, \qquad \omega = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_0 - u},$

$\omega(4 - \omega^2)\varphi'' + 2\omega^2\varphi'^3 + 2(3 - \omega^2)\varphi' = 0;$

Ansatzes (1)–(8) can be written in the following form:

$$h(u) = f(x)\varphi(\omega) + g(x),$$

where $h(u)$, $f(x)$, $g(x)$ are given functions, $\varphi(\omega)$ is an unknown function, $\omega = \omega(x, u)$ is a one-dimensional invariant of a subgroup of the group $\tilde{P}(1,3)$.

9. $x_2\omega = x_1\varphi(\omega), \qquad \omega = \dfrac{x_1}{u},$

$\varphi''(1 + \omega^2 + \varphi^2) = 0, \qquad \varphi = c_1\omega + c_2; \qquad \varphi = i\sqrt{\omega^2 + 1},$

$u = \dfrac{(x_2 - c_1x_1)}{c_2}; \qquad u = i\sqrt{x_1^2 + x_2^2};$

10. $x_1\omega = x_2\varphi(\omega), \qquad \omega = \dfrac{x_2}{x_0 - u},$

$\varphi'' = 0, \qquad \varphi = c_1\omega + c_2, \qquad u = \dfrac{x_0 - (x_1 - c_1x_2)}{c_2};$

11. $\dfrac{x_1}{\omega} = x_2\varphi(\omega) - x_2\ln x_2, \qquad \omega = \dfrac{x_0 - u}{x_2},$

$\omega^2\varphi'' + 2\omega\varphi' + 1 = 0, \qquad \varphi = -\ln\omega - \dfrac{c}{\omega},$

$\dfrac{x_1 + cx_2}{x_0 - u} + \ln(x_0 - u) = 0;$

12. $x_0\omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}\varphi(\omega), \qquad \omega = \dfrac{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}{u},$

$\omega(1 + \omega^2 - \varphi^2)\varphi'' - (1 + \omega^2)\varphi'^3 + 2\omega\varphi\varphi'^2 + (1 - \varphi^2)\varphi' = 0;$

13. $\ln(\omega x_2^2) - \omega x_2^2 - \dfrac{x_1^2}{\omega x_2^2} = \varphi(\omega) - 2x_0, \qquad \omega = \dfrac{x_0 - u}{x_2^2},$

$\omega^2(4\omega + 1)\varphi'' + 2\omega(3\omega - 1)\varphi' + 3 = 0;$

Ansatzes (9)–(13) can be written in the following form:

$$h(\omega, x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x),$$

where $h(\omega, x)$, $f(x)$, $g(x)$ are given functions, $\varphi(\omega)$ is an unknown function, $\omega = \omega(x, u)$ is a one-dimensional invariant of a subgroup of the group $\tilde{P}(1,3)$.

14. $\left(\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_0^2 - u^2}\right)^{1/2} = \varphi(\omega),$

$\omega = 2c\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1} - \ln\dfrac{x_0 - u}{x_0 + u}, \qquad (c > 0),$

$4\varphi(1 - \varphi^2)(c^2 + \varphi^2)\varphi'' +$

$+4((c^2 - 1)\varphi^2 - 2c^2)\varphi' + \varphi^2(\varphi^4 - 1) = 0;$

15. $\dfrac{(x_0^2 - x_1^2 - u^2)^{1/2}}{x_0 - u} = \varphi(\omega), \qquad \omega = \dfrac{x_2}{x_0 - u},$

$\varphi(\varphi^2 - \omega^2)\varphi'' - (\omega^2 - 2\varphi^2)\varphi'^2 - 2\omega\varphi\varphi' + \varphi^2 = 0;$

16. $\dfrac{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}{u} = \varphi(\omega),$

$\omega = 2\alpha\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1} - \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad (\alpha > 0),$

$4\varphi^2((\alpha^2 + 1)\varphi^2 + 1)\varphi'' - 8(\alpha^2 + 1)\varphi'^3 -$

$-(8(\alpha^2 + 1)\varphi - 8\alpha^2 - 4)\varphi\varphi'^2 - (4\varphi^2 + 6)\varphi^2\varphi' - \varphi^5 - \varphi^3 = 0;$

17. $\dfrac{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}{x_0 - u} = \varphi(\omega),$

$\omega = 2\alpha\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1} - \ln(x_1^2 + x_2^2), \quad (\alpha > 0),$

$4\alpha^2\varphi^2\varphi'' - 8(\alpha^2 + 1)\varphi'^3 - 4(2\alpha^2 + 3)\varphi\varphi'^2 + 2\varphi^2\varphi' - \varphi^3 = 0;$

18. $\dfrac{(u - x_0)^{\alpha-1}}{(u + x_0)^{\alpha+1}} = \varphi(\omega), \qquad \omega = \dfrac{(x_0^2 - u^2)^{1/2}}{x_1}, \quad (\alpha > 0),$

if $\alpha = 1$:

$4\omega\varphi\varphi'' - \omega^2(\omega^2 + 1)\varphi'^3 - 2(2\omega^2 + 5)\omega\varphi\varphi'^2 - 4\varphi^2\varphi' = 0;$

19. $\dfrac{(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - u^2)^{1/2}}{x_0 - u} = \varphi(\omega), \quad \omega = \dfrac{x_1}{x_0 - u} - \ln(x_0 - u),$

$\varphi(\varphi^2 - 1)\varphi'' + (\varphi^2 - 1)\varphi'^2 + 3\varphi\varphi' + 4\varphi^2 = 0;$

20. $\ln \dfrac{(x_0-u)^{\alpha-1}}{(x_0+u)^{\alpha+1}} = \varphi(\omega) - 2\beta\ \mathrm{arctg}(x_2 - x_1),$

$$\omega = \left(\frac{x_0^2-u^2}{x_1^2+x_2^2}\right)^{1/2}, \qquad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha+\beta \neq 0),$$

$$4\omega^2(\alpha^2 + (\beta^2-\alpha^2+1)\omega^2 - \beta^2\omega^4)\varphi'' + \omega^3(\omega^4-1)\varphi'^3 - \\ -6\omega^2\varphi'^2 + \omega(4(\beta^2-\alpha^2+1)\omega^2 + 7\alpha^2 - 2\alpha - 13)\varphi' + \\ +8(\alpha^2-1) = 0;$$

21. $u + \ln(x_0 - u) = \varphi(\omega) - 2\alpha\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{x_2}{x_1} - x_0,$

$$\omega = \frac{x_1^2+x_2^2}{x_0-u}, \quad (\alpha \geq 0),$$

$$\omega(4(\alpha^2-\omega)-\omega^2)\varphi'' + 2\omega^2\varphi'^3 + 2(3\alpha^2-2\omega-\omega^2)\varphi' - \omega = 0;$$

22. $\ln \dfrac{((x_0-u)^2-4x_1)^3}{(6(x_0+u)-6x_1(x_0-u)+(x_0-u)^3)^2} = \varphi(\omega),$

$$\omega = \frac{(x_0-u)^2-4x_1}{x_2},$$

$$6\omega(\omega^2-(16+\omega^2)e^{\varphi})\varphi'' + \omega(3(16+\omega^2)e^{\varphi} - 2\omega^2)\varphi'^2 + \\ +12(\omega^2-(20+\omega^2)e^{\varphi})\varphi' = 0;$$

23. $\ln \dfrac{(x_0^2-x_1^2-u^2)}{((x_0-u)x_2-x_1)^2} = \varphi(\omega), \qquad \omega = x_0 - u,$

$$\omega^2\varphi'' + \omega^2\varphi'^2 + 2\omega(\omega^2+1)e^{\varphi}\varphi' + 2(\omega^2-2)e^{\varphi} - 2 = 0;$$

Ansatzes (14)–(23) can be written in the following form:

$$h(u,x) = f(x)\varphi(\omega) + g(x),$$

where $h(u,x)$, $f(x)$, $g(x)$ are given functions, $\varphi(\omega)$ is an unknown function, $\omega = \omega(x,u)$ is a one-dimensional invariant of a subgroup of the group $\tilde{P}(1,3)$.

2. Next we consider reduction of equation (1) to two-dimensional partial differential equations (PDEs). Obtained PDEs can be written in the form:

$$A\big(\varphi_{11}\varphi_2^2+\varphi_{22}\varphi_1^2-2\varphi_{12}\varphi_1\varphi_2\big)+B_1\varphi_{11}+B_2\varphi_{22}+2B_3\varphi_{12}+V=0,$$

where $\varphi = \varphi(\omega_1,\omega_2)$,

$$\varphi_i \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial\omega_i}, \qquad \varphi_{ij} \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega_i\partial\omega_j}, \qquad i,j = 1,2.$$

Below, we present the ansatzes, which reduce equation (1) to two-dimensional PDEs, and the corresponding coefficients A, B_1, B_2, B_3, V of the reduced equations.

1. $u = -\varphi(\omega_1,\omega_2) + x_0 - 2\ln x_2, \quad \omega_1 = \dfrac{x_1}{x_2}, \quad \omega_2 = \dfrac{x_0+u}{x_2^2};$

$$A = 2\omega_2^2, \qquad B_1 = 2(1 + (\omega_1^2 - 2\omega_2 + 1)\varphi_2),$$
$$B_2 = 8\omega_2 - 1 - 4\omega_1\omega_2\varphi_1,$$
$$B_3 = (2\omega_2 - \omega_1^2 - 1)\varphi_1 + 2\omega_1(\omega_2\varphi_2 + 1),$$
$$V = (\omega_2\varphi_2 + 1)\varphi_1^2 + 4(1 - \omega_2\varphi_2)\varphi_2;$$

2. $u = -\varphi(\omega_1,\omega_2) + x_0 - \ln(x_1^2 + x_2^2),$

$$\omega_1 = \frac{x_0+u}{x_1^2+x_2^2}, \qquad \omega_2 = 2c\ \mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1} + \ln(x_1^2+x_2^2), \quad (c > 0),$$
$$A = 4c^2\omega_1^2, \quad B_1 = 4\omega_1(\varphi_2 + 1) - 1,$$
$$B_2 = 4(c^2 + (1 + c^2(1-2\omega_1))\varphi_1,$$
$$B_3 = -2(1 + \omega_1\varphi_1 + (1 + c^2(1-2\omega_1))\varphi_2,$$
$$V = -2\omega_1^3\varphi_1^3 + 2\varphi_2^3 + 2(c^2-3)\omega_1\varphi_1\varphi_2^2 + 6\omega_1^2\varphi_1^2\varphi_2 + 6\omega_1^2\varphi_1^2 + \\ +2(c^2+3)\varphi_2^2 + 4(1-3\omega_1^2)\varphi_1\varphi_2 + 2(2-3\omega_1)\varphi_1 + 6\varphi_2 + 2;$$

Ansatzes (1)–(2) can be written in the following form:

$$h(u) = f(x)\varphi(\omega_1,\omega_2) + g(x),$$

where $h(u)$, $f(x)$, $g(x)$ are given functions, $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ is an unknown function, $\omega_1 = \omega_1(x,u)$ and $\omega_2 = \omega_2(x,u)$ are invariants of a subgroup of the group $\tilde{P}(1,3)$.

3. $x_2\omega_1 = x_0\varphi(\omega_1,\omega_2), \qquad \omega_1 = \dfrac{x_0}{u}, \qquad \omega_2 = \dfrac{x_1}{u};$

$$A = 1 - \omega_1^2 + \omega_2^2, \qquad B_1 = 1 - \omega_1^2 + \varphi^2 - 2\omega_2\varphi_2\varphi,$$
$$B_2 = -1 - \omega_2^2 - \varphi^2 + 2\omega_1\varphi_1\varphi,$$
$$B_3 = \varphi(\omega_1\varphi_1 + \omega_2\varphi_2) - \omega_1\omega_2, \quad V = 0;$$

4. $(x_1^2+x_2^2)^{1/2}\omega_2 = x_0\varphi(\omega_1,\omega_2)$,

$$\omega_1 = 2\alpha\ \mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1} - \ln(x_1^2+x_2^2), \qquad \omega_2 = \frac{x_0}{u}, \quad (\alpha>0),$$
$$A = 4(\alpha^2+1)(\omega_2^2-\varphi^2),$$
$$B_1 = 4\varphi^2((\alpha^2+1)(\varphi-2\omega_2\varphi_2)\varphi+\alpha^2),$$
$$B_2 = \varphi^3(4(\omega_2^2-1)\varphi_1-\varphi(\varphi^2-\omega_2^2+1)),$$
$$B_3 = 2\varphi^3(2(\alpha_2+1)\omega_2\varphi_1+(1-\omega_2^3)\varphi_2+\omega_2\varphi),$$
$$V = 8(\alpha^2+1)\varphi_1^2(\omega_2\varphi_2\varphi^2-\varphi_1)-4\varphi_1^2\varphi(2(\alpha^2+1)\varphi-2\alpha^2-1)- -(\omega_2^2-1)\varphi_2^2\varphi^3+4\omega_2\varphi_1\varphi_2\varphi^3-2(2\varphi^2+3)\varphi^2\varphi_1+ +\varphi^3(2\omega_2\varphi_2\varphi-\varphi^2-1);$$

Ansatzes (3)–(4) can be written in the following form:

$$h(\omega_1,\omega_2,x) = f(x)\varphi(\omega_1,\omega_2)+g(x),$$

where $h(\omega_1,\omega_2,x)$, $f(x)$, $g(x)$ are given functions, $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ is an unknown function, ($\omega_1(x,u)$ and $\omega_2(x,u)$ are invariants of a subgroup of the group $\tilde{P}(1,3)$.

5. $\dfrac{(u-x_0)^{\alpha-1}}{(u+x_0)^{\alpha+1}} = \varphi(\omega_1,\omega_2)$,

$$\omega_1 = \frac{(x_0^2-u^2)^{1/2}}{x_1}, \qquad \omega_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad (\alpha>0),$$
if $\alpha = 1:$ $\quad A = \omega_1^3(1-\omega_1^2-\omega_2^2), \qquad B_1 = 4\omega_1\varphi(1-\omega_1^2\omega_2\varphi_2)$,
$$B_2 = 4\omega_1^2(1+\omega_2^2)\varphi_1\varphi, \qquad B_3 = 2\omega_1^2(\omega_1\omega_2\varphi_1-(1+\omega_2^2)\varphi_2)\varphi,$$
$$V = -\omega_1^2(\omega_1^2+1)\varphi_1^3+\omega_1^2(2\omega_1^2+\omega_2^2+1)\varphi_1\varphi_2^2+2\omega_1^3\omega_2\varphi_1^2\varphi_2- -2(2\omega_1^2+5)\omega_1\varphi_1^2\varphi+4\omega_1^2\omega_2\varphi_1\varphi_2\varphi-4\varphi^2\varphi_1;$$

6. $\dfrac{(u-x_0)^{\alpha/c-1}}{(u+x_0)^{\alpha/c+1}} = \varphi(\omega_1,\omega_2), \qquad \omega_1 = \left(\dfrac{x_0^2-u^2}{x_1^2+x_2^2}\right)^{1/2}$,

$$\omega_2 = 2\alpha\ \mathrm{arctg}\,\frac{x_2}{x_1} - \ln(x_1^2+x_2^2), \quad (c>0,\alpha>0),$$
if $\alpha = c:$
$$A = 4\omega_1^3(1+c^2(1-\omega_1^2)), \qquad B_1 = 4\omega_1\varphi(\varphi-2\omega_1^2\varphi_2),$$
$$B_2 = 16(c^2+1)\omega_1^2\varphi_1\varphi, \qquad B_3 = 4\omega_1^2\varphi(\omega_1\varphi_1-2(c^2+1)\varphi_2),$$

$$V = \omega_1^2(\omega_1^4-\omega_1^2-1)\varphi_1^3-8(c^2-1)\omega_1^3\varphi_2^3+ +4\omega_1^2((3-2c^2)\omega_1^2+c^2+1)\varphi_1\varphi_2^2+6\omega_1^5\varphi_1^2\varphi_2- -10\omega_1\varphi_1^2\varphi-8\omega_1^2\varphi_1\varphi_2\varphi-4\varphi_1\varphi^2;$$

7. $\dfrac{x_1}{x_0-u} = \varphi(\omega_1,\omega_2) - \ln x_2$,

$$\omega_1 = \frac{(x_0^2-x_1^2-u^2)^{1/2}}{x_2}, \qquad \omega_2 = \frac{x_0-u}{x_2},$$
$$A = \omega_1\omega_2^4, \qquad B_1 = \omega_1^3(1-\omega_1^2+\omega_2^2),$$
$$B_2 = -\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1+2\omega_2^2\varphi_1), \qquad B_3 = \omega_1^2\omega_2(\omega_2^2\varphi_2+1-\omega_1^2+\omega_2^2),$$
$$V = 4\omega_1\omega_2^3(\omega_1^2-1)\varphi_1^2\varphi_2+\omega_2^4(2\omega_1^2-1)\varphi_1\varphi_2^2+ +2\omega_1^2\omega_2^2(\omega_1^2-1)\varphi_1^3+2\omega_1^2\omega_2^3\varphi_1\varphi_2+2\omega_1^3\omega_2^2\varphi_1^2- -2\omega_1^3\omega_2\varphi_2+\omega_1^2(2(\omega_2^2-\omega_1^2)+3)\varphi_1-\omega_1^3.$$

Ansatzes (5)–(7) can be written in the following form:

$$h(u,x) = f(x)\varphi(\omega_1,\omega_2)+g(x),$$

where $h(u,x)$, $f(x)$, $g(x)$ are given functions, $\varphi(\omega_1,\omega_2)$ is an unknown function, $\omega_1(x,u)$ and $\omega_2(x,u)$ are invariants of a subgroup of the group $\tilde{P}(1,3)$.

[1] Barbashov B.M., Chernikov N.A. Solving and quantization of the nonlinear two-dimensional model of the Born-Infeld type // Zhurn. Eksperim. i Teoret. Fiziki. – 1966. – **60**. – 1296–1308.

[2] Shavokhina N.S. Harmonic nonsymmetric metric of the Born-Infeld equation and minimal surfaces // Izvestiya vuzov. Mat. – 1989. – № 7. – 77–79.

[3] Fushchych W.I., Serov N.I. On some exact solutions of the multidimensional nonlinear Euler-Lagrange equation // Dokl. Acad. Nauk SSSR. – 1984. – **278**, № 4. – 847–851.

[4] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov N.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993 (Russian version, 1989).

[5] Fushchych W.I., Barannik L.F. and Barannik A.F. Subgroup analysis of the Galilei, Poincaré groups and reduction of nonlinear equations. – Kyiv: Naukova Dumka, 1991.

[6] Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. II. The similitude group // J. Math. Phys. – 1975. – **16**, № 8. – 1615–1624.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 146–154

УДК 517.9

Инварианты группы $SO(2)$ в пространстве параметров нелинейной системы II порядка и условие существования периодических решений

А.К. ЛОПАТИН, А.Г. КУЗЬМЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Отримані коефіцієнтні критерії (виражені через інваріанти групи обертання $SO(2)$) існування періодичних розв'язків в системі другого порядку з поліноміальними коефіцієнтами і малим параметром. Узагальнюються результати К.С. Сибірського.

Coefficient criterion are obtained (expressed via invariants of the rotation group $SO(2)$) of existence of the periodic solutions in system of the second order with polynomial coefficients and small parameter. Results of K.S. Sybirsky are generalized.

1. Постановка задачи. В этой работе ставится задача о нахождении критериев существования периодических решений в системе вида

$$\frac{dx}{dt} = -y + \varepsilon P(p, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = x + \varepsilon Q(q, x, y), \tag{1}$$

где ε – малый параметр, символами p и q будем обозначать совокупности некоторых неопределенных коэффициентов $p_0, \ldots, p_m$ и $q_0, \ldots, q_m$ соответственно,

$$P(p, x, y) = \sum_{k=0}^{m} p_k x^{m-k} y^k, \quad Q(q, x, y) = \sum_{k=0}^{m} q_k x^{m-k} y^k$$

– однородные полиномы в пространстве $L_{\otimes m}$.

Эффективным средством исследования задачи (1) является метод асимптотической декомпозиции [1, 2].

Замена переменных в виде ряда Ли

$$x = e^{\varepsilon S} x', \qquad y = e^{\varepsilon S} y',$$

где $S = S_1 + \varepsilon S_2 + \varepsilon^2 S_3 + \cdots$, $S_i = \gamma_{i1}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \gamma_{i2}\dfrac{\partial}{\partial y'}$ для любого $i = \overline{1, \infty}$, преобразует систему (1) к централизованной системе:

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= -y' + \varepsilon F_{11}\left(p, q, x'^2 + y'^2\right) + \varepsilon^2 F_{12}\left(p, q, x'^2 + y'^2\right) + \cdots, \\ \frac{dy'}{dt} &= x' + \varepsilon F_{21}\left(p, q, x'^2 + y'^2\right) + \varepsilon^2 F_{22}\left(p, q, x'^2 + y'^2\right) + \cdots. \end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) по алгоритму построения является инвариантной относительно группы $SO(2)$

$$x' = e^{\delta S} \tilde{x}, \qquad y' = e^{\delta S} \tilde{y}, \tag{3}$$

где δ – некоторый параметр, $U = -\tilde{y}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \tilde{x}\dfrac{\partial}{\partial \tilde{y}}$ – элемент алгебры $so(2)$. Группа $SO(2)$ (3) также транзитивно действует в пространстве коэффициентов p_k, q_k системы (1). Ее векторные поля запишем в виде

$$W = \frac{\partial}{\partial \delta} + \sum_{i=0}^{m} \xi_i(p, q)\frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=0}^{m} \eta_i(p, q)\frac{\partial}{\partial q_i}. \tag{4}$$

Всевозможные инварианты в пространстве параметров находятся как решение систем

$$W f_\nu = 0,$$

где f_ν – однородные по p_0, p_1, …, p_m и q_0, q_1, …, q_m многочлены степени ν, $\nu = 1, 2, \ldots$. Известно, что число независимых инвариантов для данной степени m однородности правых частей системы (1) конечно (см., например, [3, с. 37]):

$$I_1, I_2, \ldots, I_r.$$

Это позволяет дать коэффициентные критерии существования периодических и изохронных периодических решений.

Впервые такая задача была успешно решена для системы вида

$$\frac{dx}{dt} = -y + P(p, x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = x + Q(q, x, y), \tag{5}$$

(то есть при отсутствии малого параметра) в работах К.С. Сибирского [3, 4]. В цитируемых работах существенно использовалась матрица представления коэффициентов системы (5) группы $SO(2)$ в некотором специальном базисе. Далее, существенно использовался модифицированный метод функции последования А.М. Ляпунова.

В настоящей работе снимаются два важных ограничения, присущие методу К.С. Сибирского.

1) Для построения инвариантов группы $SO(2)$ в пространстве параметров построена алгебра Ли в виде оператора (4).

2) Альтернативой методу функций последования является метод асимптотической декомпозиции.

Это позволило:

а) снять ограничения, связанные с обязательным использованием специального базиса при построении инвариантов;

б) ввести в системе (5) малый параметр (см. систему (1)), а это приводит к расширению класса рассматриваемых задач (например, снято требование, чтобы нелинейности начинались с членов второго порядка малости);

в) разработать аналогичний подход для исследований систем порядка $n > 2$ (так как снимаются ограничения, связанные с применением метода функций последования). Такого рода рассмотрение будет предметом отдельной статьи.

Отметим, что применение асимптотических методов механики или метода усреднения [5] в данном случае невозможно, так как существенно используются свойства инвариантности централизованной системы (2) относительно (3).

Перейдем в системе (1) к полярной системе координат путем замены

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi$$

и получим систему

$$\frac{d\rho}{dt} = \varepsilon(P(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cos\varphi + Q(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sin\varphi),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = 1 + \varepsilon\left(\frac{Q(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cos\varphi}{\rho} - \frac{P(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sin\varphi)}{\rho}\right).$$

Методом асимптотической декомпозиции приводим систему к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \varepsilon F_{11}(p,q,\rho,) + \varepsilon^2 F_{12}(p,q,\rho,) + \cdots, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 1 + \varepsilon F_{21}(p,q,\rho,) + \varepsilon^2 F_{22}(p,q,\rho,) + \cdots. \end{aligned} \tag{6}$$

1. Коэффициентные критерии существования периодических решений системы (1). Нетрудно показать, что необходимым и достаточным условием существования периодического решения в системе (1) является обращение в ноль

$$F_{1j}(p,q,\rho) = 0, \qquad \text{где} \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

правой части в первом уравнении системы (6). Этот критерий не является конструктивным, так как выписывается бесконечно много уравнений.

Совокупность уравнений (7), согласно теореме Гильберта о базисе [6, с. 57, с. 337], может быть заменена конечным числом уравнений

$$R_1(p,q) = 0, \ \ldots, \ R_r(p,q) = 0. \tag{8}$$

В то же время функции $R_1(p,q)$, ..., $R_r(p,q)$ анулируются оператором W, то есть $WR_i(p,q) = 0$, так как являются инвариантами группы $SO(2)$.

Результат можна подитожыть в виде теоремы.

Теорема 1. *Для того, чтобы система (1) имела периодическое (неизохронное) решение, необходимо и достаточно, чтобы обращалось в ноль некоторое конечное множество инвариантов*

$$R_1 = 0, \ \ldots, \ R_r = 0 \tag{9}$$

группы $SO(2)$ в пространстве параметров.

Замечание 1. Для вычисления инвариантов (9) необходимо найти конечное число приближений k по методу асимптотической декомпозиции, что затруднительно, и поэтому требуется разработка специальных алгоритмов с применением ЭВМ.

2. Условие существования изохронного периодического решения. Нетрудно показать, что для того, чтобы решение системы (1) было периодическим и изохронным, необходимо и достаточно, чтобы в системе (6) с равенствами (7) также обращались в ноль

$$F_{2j}(p,q,\rho)=0, \qquad \text{где} \quad j=1,2,\dots . \tag{10}$$

правые части второго уравнения. Но так как система (6) инвариантна относительно группы $SO(2)$, то согласно теореме Гильберта о базисе [6, с. 57, с. 337] систему (7) заменяем конечным числом уравнений (8), а систему (10) – соответственно конечным числом уравнений

$$H_1(p,q)=0,\ \dots,\ H_h(p,q)=0,$$

где функции $H_1(p,q)$, …, $H_h(p,q)$ анулируются оператором W, то есть $WH_i(p,q)=0$, так как являются инвариантами группы $SO(2)$.

Результат можно подитожить в виде теоремы.

Теорема 2. *Для того, чтобы система (1) имела изохронное периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы обращались в ноль конечное число инвариантов группы $SO(2)$ (9) и*

$$H_1(p,q)=0,\ \dots,\ H_h(p,q)=0$$

в пространстве параметров.

3. Примеры.

Пример 1. Рассмотрим асимптотическую декомпозицию системы

$$\frac{dx}{dt}=-y+\varepsilon(c_{10}x+c_{01}y), \qquad \frac{dy}{dt}=x+\varepsilon(b_{10}x+b_{01}y).$$

Сделаем замену $x=\dfrac{\bar w+w}{2}$, $y=\dfrac{i(\bar w-w)}{2}$, после чего получим систему

$$\frac{dw}{dt}=iw+\varepsilon\left(\frac{z_{10}}{2}\bar w+\frac{z_{01}}{2}w\right), \quad \frac{d\bar w}{dt}=-i\bar w+\varepsilon\left(\frac{\bar z_{01}}{2}\bar w+\frac{\bar z_{10}}{2}w\right),$$

где $z_{10}=c_{10}-b_{01}+i(c_{01}+b_{10})$, $z_{01}=c_{10}+b_{01}+i(b_{10}-c_{01})$. Векторное поле нулевого приближения запишем так:

$$U=iw\frac{\partial}{\partial w}-i\bar w\frac{\partial}{\partial \bar w}=(w,\bar w)\begin{bmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}\partial,$$

где $\partial=\left(\dfrac{\partial}{\partial w},\dfrac{\partial}{\partial \bar w}\right)$, а векторное поле системы

$$\tilde U=(w,\bar w)\begin{bmatrix} \dfrac{z_{01}}{2} & \dfrac{\bar z_{10}}{2}\\ \dfrac{z_{10}}{2} & \dfrac{\bar z_{01}}{2}\end{bmatrix}\partial.$$

Первое приближение. Для того, чтобы найти первое приближение, необходимо решить уравнение

$$[U,S_1]=\tilde U-\operatorname{Pr}\tilde U. \tag{11}$$

По определению $[U,S_1]=US_1-S_1U$. Ищем S_1 в виде

$$S_1=(w,\bar w)\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{bmatrix}\partial.$$

Операторное уравнение (11) заменим матричным

$$\begin{bmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{z_{01}}{2} & \dfrac{\bar z_{10}}{2}\\ \dfrac{z_{10}}{2} & \dfrac{\bar z_{01}}{2}\end{bmatrix}-\operatorname{Pr}\begin{bmatrix} \dfrac{z_{01}}{2} & \dfrac{\bar z_{10}}{2}\\ \dfrac{z_{10}}{2} & \dfrac{\bar z_{01}}{2}\end{bmatrix}.$$

Откуда легко получить

$$\operatorname{Pr}\tilde U=\frac{z_{01}}{2}w\frac{\partial}{\partial w}+\frac{\bar z_{01}}{2}\bar w\frac{\partial}{\partial \bar w},$$

$$\gamma_{11}=\gamma_{22}=0, \quad \gamma_{12}=-i\frac{\bar z_{10}}{4}, \quad \gamma_{21}=i\frac{z_{10}}{4}.$$

Следовательно, система в первом приближении выглядит так:

$$\frac{dw}{dt}=iw+\varepsilon\frac{z_{01}}{2}w, \quad \frac{d\bar w}{dt}=-i\bar w+\varepsilon\frac{\bar z_{01}}{2}\bar w,$$

$$S_1=(w,\bar w)\begin{bmatrix} 0 & -i\dfrac{\bar z_{10}}{4}\\ i\dfrac{z_{10}}{4} & 0\end{bmatrix}\partial.$$

Второе приближение. Для нахождения второго приближения необходимо решить операторное уравнение $[U, S_2] = F_2 - \Pr F_2$, где F_2 определяется из соотношения

$$F_2 = -[\tilde{U}, S_1] + \frac{1}{2}[[U, S_1], S_1] = -\frac{1}{2}[\tilde{U}, S_1]$$

Опуская промежуточные результаты, приведем систему во втором приближении вида

$$\frac{dw}{dt} = iw + \varepsilon\frac{z_{01}}{2}w + \frac{\varepsilon^2}{16}(z_{01}\bar{z}_{10} - z_{10}\bar{z}_{01})w^2\bar{w},$$

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = -i\bar{w} + \varepsilon\frac{\bar{z}_{01}}{2}\bar{w} - \frac{\varepsilon^2}{16}(z_{10}\bar{z}_{01} - z_{01}\bar{z}_{10})\bar{w}^2 w.$$

Полученные коэффициенты в системе второго приближения совпадают с инвариантами, найденными для линейной системы К.С. Сибирским [3]: $I_1 = z_{01}$, $I_2 = \bar{z}_{01}$, $I_3 = z_{01}\bar{z}_{10} - z_{10}\bar{z}_{01}$. Легко убедиться в том, что I_1, I_2, I_3 являются решением операторного уравнения $Wf = 0$, где оператор W для этой системы выглядит так:

$$U = \frac{\partial}{\partial\varphi} - 2iz_{10}\frac{\partial}{\partial z_10} + 2i\bar{z}_{10}\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{10}}.$$

Пример 2. Рассмотрим теперь систему следующего вида:

$$\frac{dx}{dt} = -y + \varepsilon\left(c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3\right),$$

$$\frac{dy}{dt} = x + \varepsilon\left(b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3\right).$$

Сделаем замену $x = \dfrac{\bar{w} + w}{2}$, $y = \dfrac{i(\bar{w} - w)}{2}$, после чего получим систему

$$\frac{dw}{dt} = iw + \varepsilon\left(\frac{z_{30}}{8}\bar{w}^3 + \frac{z_{21}}{8}\bar{w}^2 w + \frac{z_{12}}{8}\bar{w}w^2 + \frac{z_{03}}{8}w^3\right),$$

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = -i\bar{w} + \varepsilon\left(\frac{\bar{z}_{03}}{8}\bar{w}^3 + \frac{\bar{z}_{12}}{8}\bar{w}^2 w + \frac{\bar{z}_{21}}{8}\bar{w}w^2 + \frac{\bar{z}_{30}}{8}w^3\right),$$

где

$$z_{30} = c_{30} - b_{21} - c_{12} + b_{03} + i(b_{30} + c_{21} - b_{12} - c_{03}),$$
$$z_{21} = 3c_{30} - b_{21} + c_{12} - 3b_{03} + i(3b_{30} + c_{21} + b_{12} + 3c_{03}),$$
$$z_{12} = 3c_{30} + b_{21} + c_{12} + 3b_{03} + i(3b_{30} - c_{21} + b_{21} - 3c_{03}),$$
$$z_{03} = c_{30} + b_{21} - c_{12} - b_{03} + i(b_{30} - c_{21} - b_{21} + c_{03}).$$

Для нахождения первого приближения централизованной системы необходимо решить уравнение $[U, S_1] = F_1 - \Pr F_1$, где

$$F_1 = \tilde{U} = \left(w^3, w^2\bar{w}, w\bar{w}^2, \bar{w}^3\right)\begin{bmatrix} \frac{z_{03}}{8} & \frac{\bar{z}_{30}}{8} \\ \frac{z_{12}}{8} & \frac{\bar{z}_{21}}{8} \\ \frac{z_{21}}{8} & \frac{\bar{z}_{12}}{8} \\ \frac{z_{30}}{8} & \frac{\bar{z}_{03}}{8} \end{bmatrix}\partial,$$

S_1 выразим в виде

$$S_1 = \left(w^3, w^2\bar{w}, w\bar{w}^2, \bar{w}^3\right)\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} \end{bmatrix}\partial.$$

Операторное уравнение заменим матричным:

$$\begin{bmatrix} 2i\gamma_{11} & 4i\gamma_{12} \\ 0 & 2i\gamma_{22} \\ -2i\gamma_{31} & 0 \\ -4i\gamma_{41} & -2i\gamma_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{03}}{8} & \frac{\bar{z}_{30}}{8} \\ \frac{z_{12}}{8} & \frac{\bar{z}_{21}}{8} \\ \frac{z_{21}}{8} & \frac{\bar{z}_{12}}{8} \\ \frac{z_{30}}{8} & \frac{\bar{z}_{03}}{8} \end{bmatrix} - \Pr\begin{bmatrix} \frac{z_{03}}{8} & \frac{\bar{z}_{30}}{8} \\ \frac{z_{12}}{8} & \frac{\bar{z}_{21}}{8} \\ \frac{z_{21}}{8} & \frac{\bar{z}_{12}}{8} \\ \frac{z_{30}}{8} & \frac{\bar{z}_{03}}{8} \end{bmatrix}.$$

После вычисления получим

$$\Pr F_1 = \frac{z_{12}}{8}\bar{w}w^2\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\bar{z}_{12}}{8}\bar{w}^2 w\frac{\partial}{\partial\bar{w}},$$

$$\gamma_{21} = \gamma_{32} = 0, \quad \gamma_{11} = -\frac{iz_{03}}{16}, \quad \gamma_{12} = -\frac{i\bar{z}_{30}}{32}, \quad \gamma_{22} = -\frac{i\bar{z}_{21}}{16},$$

$$\gamma_{31} = \frac{iz_{21}}{16}, \quad \gamma_{30} = \frac{iz_{30}}{32} \quad \gamma_{42} = \frac{i\bar{z}_{03}}{16}.$$

Следовательно, система в первом приближении имеет вид:

$$\frac{dw}{dt} = iw + \varepsilon\frac{z_{12}}{8}\bar{w}w^2, \qquad \frac{d\bar{w}}{dt} = -i\bar{w} + \varepsilon\frac{\bar{z}_{12}}{8}\bar{w}^2 w.$$

Коэффициенты, полученные в результате, являются одними из инвариантов, найденных К.С. Сибирским для системы с нелинейностями второй степени [3]. $I = z_{12}$ является решением операторного уравнения $Wf = 0$, где оператор W для этой системы выглядит так:

$$U = \frac{\partial}{\partial \varphi} - 3iz_{20}\frac{\partial}{\partial z_{20}} - iz_{11}\frac{\partial}{\partial z_{11}} + iz_{02}\frac{\partial}{\partial z_{02}} - \\ -i\bar{z}_{02}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{02}} + i\bar{z}_{11}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{11}} + 3i\bar{z}_{20}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_{20}}.$$

[1] Митропольский Ю.А., Лопатин А.К. Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики. – Киев: Наук. думка, 1988. – 272 с.

[2] Mitropolsky Yu.A., Lopatin A.K. Nonlinear mechanics, groups and symmetry. – Dordrecht, London: Kluver Academic Publisher, 1995. – 378 p.

[3] Сибирский К.С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц. – Кишинев: Штиинца, 1976. – 268 с.

[4] Сибирский К.С. Введение в алгебраическую теорию дифференциальных уравнений. – Кишинев: Штиинца, 1982. – 168 с.

[5] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

[6] Вейль Г. Классические группы. Их инварианты и представления. – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – 408 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 155–165

УДК 519.9

Об одном конструктивном методе построения первой и второй мероморфных трансцендент Пенлеве

В.Н. ОРЛОВ †, ***В.П. ФИЛЬЧАКОВА*** ‡

† *Чувашский госуниверситет, Чебоксары, Россия*
‡ *Институт математики НАН Украины, Киев*

Розглядається зв'язок між трансцедентами Пенлеве та еволюційними рівняннями. Запропоновано аналітичний апроксимаційний метод побудови першої та другої трансцедент Пенлеве з допомогою узагальнених степеневих рядів.

The connection between transcendents of Painleve and evolution equations is discussed. The analytical approximate method of constructing Painleve transcendents of the first and second orders by means of generalized power series is proposed.

1. Введение. В связи с исследованиями по физике плазмы возродился интерес к уравнениям Пенлеве (P-типа). Современная теория солитонов определила для трансцендент Пенлеве новую роль – критериев полной интегрируемости ряда эволюционных дифференциальных уравнений в частных производных (ЭДУЧП) [1–5]. Для многих ЭДУЧП решения чаще всего распадаются на конечное число солитонов (стабильные объекты, или решения в виде импульсов, относящиеся к точно интегрируемым одномерным гамильтоновым системам) и некоторый остаток, асимптотически стремящийся к решению вспомогательного НОДУ второго порядка полиномиального класса.

Оказалось, что решения последних не должны иметь подвижных точек ветвления или существенно особых, а могут иметь только подвижные полюса, т.е. их интегралы – мероморфные функции, каковыми и являются трансценденты Пенлеве.

Широко применяемое при отыскании автомодельных решений эволюционных уравнений известное преобразование Миуры

$$f(z) = w'(z) + w^2(z), \qquad w(z) \equiv P_2, \tag{1}$$

представляет собой математическую комбинацию функции $w(z)$, тождественно равной второй трансценденте Пенлеве P_2, первая же трансцендента Пенлеве P_1 связана со специальным видом уравнения КдФ, описывающим плазму в сильном магнитном поле:

$$u_t + u_{xxx} - 6u_x u = 0, \qquad u(x,t) \equiv u, \tag{2}$$

где связь между автомодельным решением этого уравнения и P_1 удается выразить формулой

$$u(x,t) = 2[w(z) - t], \quad z = x - 6t^2, \quad w(z) \equiv P_1, \tag{3}$$

а заменой

$$u(x,t) = w(z), \quad z = x - t \tag{4}$$

устанавливается связь с автомодельным решением уравнения Буссинеска, описывающим перемещение волн как вправо, так и влево:

$$u_{tt} = u_{xx} + 6\left(u^2\right)_{xx} - u_{xxxx}, \tag{5}$$

где в зависимости от выбора константы интегрирования $w(z)$ – либо эллиптическая функция, либо P_1. Вторая трансцендента P_2 связана с уравнением МКдФ, описывающем акустические волны в ангармонических решетках:

$$v_t + v_{xx} - 6v_x v^2 = 0, \qquad v(x,t) \equiv v. \tag{6}$$

С момента выявления трансцендент Пенлеве и по сей день известно много работ, посвященных качественному анализу последних [6], однако практическая сторона этого вопроса во многом остается в тени. Тесная взаимосвязь трансцендент Пенлеве с вполне интегрируемыми ЭДУЧП стимулировала необходимость создания конструктивных методов построения трансцендент Пенлеве, которые являются мероморфными функциями. Для отыскания полюсов предлагается эффективный алгоритм с использованием обобщенных степенных рядов [7, 8].

2. Вычислительный процесс. В качестве объекта исследований выберем первую и вторую трансценденты Пенлеве, как более изученные и востребованные (всего имеется открытый в прошлом веке французскими аналитиками канонический список 50 уравнений с P-свойствами, а среди них шесть трансцендент P_1–P_6).

Вычислительную процедуру поделим на три этапа:

I. Определение области голоморфности решений исходных (P_1 и P_2) и инверсных ($\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$) уравнений; установление точных критериев существования подвижных полюсов.

II. Изучение влияния возмущения исходных данных на приближенное решение (в области голоформности и в z – окрестности подвижных полюсов).

III. Склейка решений в окрестности подвижных полюсов методом обобщенных степенных рядов, аналитическое продолжение.

В основе первого этапа лежит идея последовательного решения исходных (P_1, P_2) и инверсных ($\tilde{P}_1$, $\tilde{P}_2$) уравнений. Переход от исходных к инверсным уравнениям осуществляется при выполнении точных критериев существования подвижных полюсов, нахождение которых сводится к нахождению нулей инверсной задачи [9]. Второй этап позволяет строить аналитические продолжения решений рассматриваемых уравнений, находясь в заданной ε-окрестности точного решения.

Третий этап позволяет конкретизировать подвижные параметры (x^*, α, β) для первой и второй трансцендент Пенлеве и находить коэффициенты регулярных и нерегулярных рядов, аппроксимирующих P_1 и P_2 на участках аналитических продолжений [10].

I. Пусть имеем начальные задачи Коши для первого уравнения Пенлеве P_1:

$$w'' = 6w^2 + \lambda x, \qquad \lambda - \text{фиксированный параметр}, \tag{7}$$

и для второго уравнения Пенлеве P_2:

$$w'' = 2w^3 + xw + \mu, \qquad \mu - \text{фиксированный параметр}, \tag{8}$$

при соответствующих начальных условиях

$$w(x_0) = w_0 = \text{const}, \qquad w'(x_0) = w_1 = \text{const}. \tag{9}$$

Для инверсных уравнений $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ имеем аналогичные задачи Коши:

$$u''u = 2(u')^2 - \lambda x u^3 - 6u, \tag{7'}$$

$$u''u = 2(u')^2 - \mu u^3 - xu^2 - 2, \tag{8'}$$

$$u(x_0) = u_0 = \text{const}, \qquad u'(x_0) = u_1 = \text{const}, \tag{9'}$$

где введена функция $u = 1/w$ с помощью инверсии.

Теорема 1. *Решение задачи (7), (9) голоморфно в области*

$$|x - x_0| < 1/(M + 1),$$

где $M = \max\{|x_0|, |w_0|, |w_1|, |\lambda|\}$, *а задачи (8) и (9) – в области*

$$|x - x_0| < 1/(M_1 + 1),$$

где $M_1 = \max\{|x_0|, |w_0|, |w_1|, |\mu|\}$.

Теорема 2. *Пусть* $u(x)$ *– решение задачи (7′), (9′) и* $|u(x_0)| \geq 1$, *тогда это решение голоморфно в области*

$$|x - x_0| < 1/(\overline{M} + 1)^{5/2},$$

где $\overline{M} = \max\{|x_0|, |u_0|, |u_1|, |\lambda|\}$; *если* $u(x)$ *– решение инверсной задачи (8′), (9′), тогда это решение голоморфно в области*

$$|x - x_0| < 1/(\overline{M}_1 + 1)^2,$$

где $\overline{M}_1 = \max\{|x_0|, |u_0|, |u_1|, |\mu|\}$.

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на формальном построении рядов методом неопределенных коэффициентов и дальнейшем доказательстве их сходимости в соответствующих областях.

Ниже приводятся теоремы, доказательства которых следуют из поведения решений в окрестности подвижного полюса x^* и применения теоремы Больцано-Коши.

Теорема 3. *Пусть* $w(x)$ *– решение задачи (7), (9). Для того, чтобы точка* x^* *была подвижным полюсом* $w(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовал промежуток* $[a, b]$, *на котором решение задачи (7′), (9′) было бы непрерывной функцией и такой, что*

$$u(x^*) = u'(x^*) = 0, \qquad u''(x^*) = 2.$$

Теорема 4. *Пусть* $w(x)$ *– решение задачи (8), (9). Для того, чтобы* x^* *была подвижным полюсом* $w(x)$, *необходимо и достаточно существование промежутка* $[a, b], x \in [a, b]$, *на котором* $u(x)$ *– решение (8′), (9′), было бы непрерывной функцией, причем* $u(a)u(b) < 0$.

II. Приведенные ниже теоремы позволяют решить прямую и обратную задачи теории погрешности для приближенных решений как в области голоморфности, так и в окрестности подвижных полюсов. Тем самым получаем необходимый математический аппарат для возможного аналитического продолжения в заданной ε-окрестности точного решения.

Теорема 5. *Пусть 1).* $w(x)$ *– решение задачи (7), (9); 2).* x^* *– подвижный полюс. Тогда для приближенного решения*

$$w_N(x) = (x - x^*)^\rho \sum_{n=0}^{N} C_n (x - x^*)^n, \qquad \rho = -2, \tag{10}$$

задачи (7), (9) в области

$$|x - x^*| < 1/(|x^*| + |\alpha| + |\lambda|) \tag{11}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta w_N(x) \leq \frac{(|x^*| + |\alpha| + |\lambda|)^{N+1} |x - x^*|^{N-1}}{1 - (|x^*| + |\alpha| + |\lambda|)|x - x^*|}. \tag{12}$$

Доказательство следует из оценки остатка ряда, комбинации методов неопределенных коэффициентов, математической индукции и мажорант.

Теорема 6. *Для приближенного решения (10) задачи (8), (9) при условии* $\rho = -1$, $C_0 \neq 0$, *в области*

$$|x - x^*| < \frac{1}{2(M + |\mu| + 1)} \tag{13}$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta w_N(x) \leq \frac{(M + |\mu| + 1)^{N+1} (x - x^*)^N 2^N}{1 - 2(M + |\mu| + 1)|x - x^*|}. \tag{14}$$

Далее, учитывая то, что приближенное решение (10) фактически строится по приближенным $\tilde{x}^*$ и $\tilde{C}_n$, для уточненного приближенного решения

$$\tilde{w}_N(x) = (x - \tilde{x}^*)^\rho \sum_{n=0}^{N} \tilde{C}_n (x - \tilde{x}^*)^n \tag{15}$$

справедливы теоремы 7 и 8, которые мы приводим в сокращенном варианте. Полный вариант, где расшифрованы величины Δ_0, Δ_1, Δ_2 и Δ_3 для случаев P_1 и P_2, можно найти в [10].

Теорема 7. *Пусть для случая P_1 выполняются п.п.1, 2 теоремы 5 и $\Delta\tilde{x}^* < 1/\rho_1$. Тогда для приближенного решения (15) задачи (7), (9) $(\rho = -2)$ в области $(\tilde{x}^* - 1/\rho_1, \tilde{x}_1^*)$ справедлива оценка погрешности*

$$\Delta\tilde{w}_N \le \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

и, кроме того, $\tilde{x}_1^* = \tilde{x}^* - \Delta\tilde{x}^*$, $\tilde{x}_2^* = \tilde{x}^* + \Delta\tilde{x}^*$.

Теорема 8. *Пусть для случая P_2: 1) известна оценка погрешности значения $\tilde{x}^*$: $|x^* - \tilde{x}^*| \le \Delta\tilde{x}^*$; 2) $\Delta M \le 1/2$; 3) $\tilde{x}^* \le x^*$, $\Delta\tilde{x}^* < 1/2(\rho_2 + \Delta L - \Delta M)$, где $\rho_2 = M + \Delta M + |\mu| + 1$. Тогда для приближенного решения (15) задачи (8), (9) $(\rho = -1)$ в области*

$$(\tilde{x}^* - 1/2(\rho_2 + \Delta L - \Delta M), \tilde{x}_1^*]$$

справедлива оценка

$$\Delta\tilde{w}_N(x) \le \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

при этом

$$\Delta L = \max\{\Delta\tilde{x}^*, \Delta\beta\}; \quad \tilde{x}_1^* = \tilde{x}^* - \Delta\tilde{x}^*; \quad \tilde{x}_2^* = \tilde{x}^* + \Delta\tilde{x}^*.$$

Теоремы 7 и 8 относились к вопросу исследования погрешности исходных данных на приближенное решение в окрестности подвижных полюсов. Для построения полной топологической картины во всей области существования трансцендент Пенлеве P_1 и P_2 приведем теоремы, работающие в областях их голоморфности.

Теорема 9. *Для приближенного решения задач (7)–(9) в виде отрезка регулярного степенного ряда в окрестности начальной (регулярной) точки x_0:*

$$w_N(x) = \sum_0^N a_n(x - x_0)^n \tag{16}$$

в области, определенной теоремой 1: $|x - x_0| < 1/(M+1)$, справедливы оценки:

$$\Delta w_N(x) \le \frac{(M+1)^2((M+1)|x-x_0|)^{N+1}}{1-(M+1)|x-x_0|} \quad \text{для задачи (7), (9)}$$

и

$$\Delta w_N(x) \le \frac{M_1(M_1+1)^{N+1}|x-x_0|^{N+1}}{1-(M_1+1)|x-x_0|} \quad \text{для задачи (8), (9),}$$

где M и M_1 взяты из теоремы 1.

Исходя из того, что полное решение задач (7)–(9) обеспечивается аналитическим продолжением за пределы особых точек и, значит, нам придется иметь дело с приближенными начальными данными поэтапных задач Коши (в каждом последующем шаге аналитического продолжения):

$$\tilde{w}(x_0) = \tilde{w}_0 = \text{const}, \qquad \tilde{w}'(x_0) = \tilde{w}_1 = \text{const}, \tag{17}$$

рассмотрим задачу Коши для P_1 и P_2 при приближенных начальных условиях (17) и оценим приближенное решение в области голоморфной точки x_0

$$\tilde{w}_N(x) = \sum_0^N \tilde{a}_n(x - x_0)^n. \tag{18}$$

Теорема 10. *Пусть $\Delta M \le 1$, тогда для приближенного решения (18) задач (7), (17) и (8), (17) в областях*

$$|x - x_0| < 1/2(M + \Delta M + 1)$$

справедливы такие оценки:

$$\Delta\tilde{w}_N(x) \le \frac{(M+1)^2((M+1)|x-x_0|)^{N+1}}{1-(M+1)|x-x_0|} + \frac{\Delta M(M+\Delta M+1)^2}{2(1-2(M+\Delta M+1)|x-x_0|)}$$

для задачи (7), (17) и

$$\Delta\tilde{w}_N(x) \le \frac{M(M+1)^{N+1}|x-x_0|^{N+1}}{1-(M+1)|x-x_0|} + \frac{\Delta M}{4(1-2(M+\Delta M+1)|x-x_0|)}$$

для задачи (8), (17), где $\Delta M = \max\{\Delta\tilde{w}_0, \Delta\tilde{w}_1\}$,

$$M = \max\{|x_0|, |\tilde{w}_0|, |\tilde{w}_1|, |\lambda|\} \qquad \text{для (7), (17),}$$

$$M = \max\{|x_0|, |\tilde{w}_0|, |\tilde{w}_1|, |\mu|\} \qquad \text{для (8), (17).}$$

Доказательство основано на неравенстве

$$|w - \tilde{w}_N(x) \le |w - \tilde{w}| + |\tilde{w} - \tilde{w}_N(x)|$$

с учетом теоремы 9.

III. Чтобы довести задачу построения трансцендент Пенлеве P_1 и P_2 до логического конца, надо сначала решить задачу Коши для уравнений (7) и (8) при точных начальных условиях (9), представив приближенное решение $w_N(x)$ в виде отрезка ряда (16) с неизвестными коэффициентами a_n, для которых получены рекуррентные формулы для P_1 [2, формула (28)], для P_2 [2, формула (31)].

Затем реализуется алгоритм выделения полюса с помощью некоторой последовательности аналитических продолжений в виде рядов для мероморфных интегралов

$$w_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{[l]}(x - x_0^{[l]})^n, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \tag{19}$$

с разными значениями точек разложения $x_0^{[l]}$ (причем $x_0^{[1]} \equiv x_0$), имеющими тенденцию движения к ближайшему полюсу x_1^*. С увеличением l (l – количество аналитических продолжений) коэффициенты $a_n^{[l]}$ начинают быстро расти по модулю, а радиусы сходимости $R^{[l]}$, соответственно, уплотняться. Начиная с некоторого $l = 4, 5, \dots$, по мере приближения к полюсу справедливы предельные соотношения для полюсов m-го порядка:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ l\to L}} \frac{\underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{n-m+1}}{\underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{n-m+2}} = \dots = \lim_{\substack{n\to\infty\\ l\to L}} \frac{\ddot{a}^{[l]}_{n-1}}{\ddot{a}^{[l]}_{n}} = \lim_{\substack{n\to\infty\\ l\to L}} \frac{a_{n-1}}{a_n} = R^{[L]}, \tag{20}$$

где $\underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{n-m+1}$ – коэффициенты такого представления

$$W = \underbrace{\int\cdots\int}_{(m-1)} w(x)\, \underbrace{dx\cdots dx}_{(m-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{n-m+1}(x - x_0^{[l]})^n, \tag{21}$$

которые связаны с коэффициентами $a_n^{[l]}$ следующими связями:

$$\underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{-m+1} = \alpha_{m-1}, \qquad \dots, \qquad \underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{-1} = \frac{\alpha_1}{(m-2)!},$$

$$\underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{k} = \frac{a_k^{[l]}\cdot k!}{(k+m-1)!}, \qquad \dots, \qquad \underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{0} = \frac{a_0^{[l]}}{(m-1)!},$$

где $\alpha_{m-1}, \alpha_{m-2}, \dots, \alpha_1$ – константы интегрирования, $\ddot{a}^{[l]}_{n+2} = (n+1)(n+2)a^{[l]}_{n+2}$, $\dot{a}^{[l]}_{n+1} = (n+1)a^{[l]}_{n+1}$. После нахождения $R^{[L]}$ мероморфные интегралы (трансценденты Пенлеве) представим в виде суммы

$$w(x) = \mathcal{P}_\nu(x) + \mathcal{R}_\nu(x), \tag{22}$$

где ν – тот номер, с которого начинает функционировать предельное соотношение (20).

В окрестности полюса $x_i^* = \sum_{i=1}^{L} x_0^{[i]} + R^{[L]}$ трансценденты Пенлеве представляются суперпозицией (22) конечного полинома $\mathcal{P}_\nu(x)$ и некоторой обобщенной геометрической прогрессии $\mathcal{R}_\nu(x)$, которая легко суммируется. $\mathcal{P}_\nu(x)$ и $\mathcal{R}_\nu(x)$ находятся из соотношений

$$\begin{gathered}
\underbrace{\int\cdots\int}_{(m-1)} \mathcal{P}_\nu(x)\, \underbrace{dx\cdots dx}_{(m-1)} = \sum_{k=0}^{\nu+(m-1)} \underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{k-m+1}(x - x_0^{[l]})^k,\\
\underbrace{\int\cdots\int}_{(m-1)} \mathcal{R}_\nu(x)\, \underbrace{dx\cdots dx}_{(m-1)} = \frac{\underset{(m-1)}{a}{}^{[l]}_{\nu+1}(x - x_0^{[l]})^{\nu+m}}{1 - g(x - x_0^{[l]})} + \omega(\varepsilon),
\end{gathered} \tag{23}$$

где m – кратность полюса, $g = 1/R^{[l]}$.

Для первой трансценденты Пенлеве ($m = 2$):

$$\begin{gathered}
\mathcal{P}_\nu = \sum_{n=0}^{\nu} a_n^{[l]}(x - x_0^{[l]})^n,\\
\mathcal{R}_\nu = a^{[l]}_{\nu+1}(x - x_0)^{\nu+1}\cdot \frac{1 - ((\nu+1)/(\nu+2))g(x - x_0^{[l]})}{[1 - g(x - x_0^{[l]})]^2},\\
|\omega(\varepsilon)| \le \frac{\varepsilon|\underset{(1)}{a}{}^{[l]}_{\nu+1}(x - x_0^{[l]})^{\nu+1}|}{|[1 - g(x - x_0^{[l]})][1 - (g+\varepsilon)(x - x_0^{[l]})]|}.
\end{gathered} \tag{24}$$

Зная положение полюса x_1^*, можно в его окрестности применить лорановское разложение и искать интеграл $w(x)$ в виде (15) ($\rho = -2$), для коэффициентов $\tilde{C}_n$ которого имеют место рекуррентные формулы:

$$\tilde{C}_n = \frac{6}{n(n-1)-12} \cdot \sum_{k=-1}^{n-3} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k-2}, \quad n \geq 6,$$
$$\tilde{C}_{-2} = 1, \quad \tilde{C}_{-1} = \tilde{C}_0 = \tilde{C}_1 = 0, \quad \tilde{C}_2 = -\frac{\lambda x^*}{10}, \tag{25}$$
$$\tilde{C}_3 = -\frac{\lambda}{6}, \quad \tilde{C}_4 = \alpha, \quad \tilde{C}_5 = 0.$$

Здесь α – скрытый параметр, зависящий от начальных условий (9).

Для второй трансценденты P_2 получены такие рекуррентные формулы (в формуле (15) $\rho = -1$):

$$\tilde{C}_n = \frac{2\sum\limits_{k=2}^{n-2} \tilde{C}_k \tilde{C}_{n-k} + 2\sum\limits_{k=2}^{n-2} \tilde{C}_k^{(2)} \tilde{C}_{n-k} + x^* \tilde{C}_{n-2} + \tilde{C}_{n-3}}{(n-1)(n-2)-6}, \; n \geq 5, \tag{26}$$

$$\tilde{C}_0 = 1, \quad \tilde{C}_1 = 0, \quad \tilde{C}_2 = -\frac{x^*}{6}, \quad \tilde{C}_3 = \frac{-1+\mu}{4}, \quad \tilde{C}_4 = \beta,$$

β – скрытый параметр.

Переход через полюс x^* удобно осуществлять при помощи склейки решений (при этом есть возможность определить скрытые параметры α и β, соответственно, для P_1 и P_2), представленных просуммированными рядами вида (22), с выделенной геометрической прогрессией, и отрезком ряда Лорана вида (15), в общих точках z-окрестности полюса.

Выводы. Приближенные решения уравнений Пенлеве находятся методом рекуррентных степенных рядов с учетом влияния возмущений исходных данных на приближенное решение при аналитическом продолжении, осуществляемом склейкой регулярных и нерегулярных рядов в окрестности подвижных полюсов, для которых установлены точные критерии существования. Для первой и второй трансцендент найдены рекуррентные формулы для коэффициентов регулярных и нерегулярных (лорановских) рядов, построенных в окрестностях голоморфности и подвижных особых точек, соответственно. Задача продолжения решений трансцендент Пенлеве за их особые точки (полюсы) на действительной оси является одной из очень интересных и сложных задач аналитической теории дифференциальных уравнений. В этой работе сделаны лишь первые шаги в этом направлении.

Желательно дальнейшее развитие исследований для уяснения глубинных процессов, описывающих мероморфные решения трансцендент Пенлеве (соотношения качественных и количественных характеристик, физический смысл явных и неявных параметров, сравнительный анализ всех характеристик, в том числе их установление, для всех шести трансцендент Пенлеве P_1–P_6).

[1] Солитоны в действии / Под ред. К. Лонгрена и Э. Скотта.– М.: Мир, 1981. – 312 с.

[2] Фильчакова В.П. Уравнения Пенлеве и нелинейные волновые процессы // Исследования по теории функций комплексного переменного с приложениями к механике сплошных сред. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 190-200.

[3] Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны: Методы решения и исследования эволюционных уравнений. – М.: Мир, 1985. – 469 с.

[4] Додд Р., Эйлбок Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с.

[5] Ablowitz M.J., Ramani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ODE of P-type I, II // J. Math. Phys. – 1980. –**21**, № 4–5. – P. 1006–1015.

[6] Еругин Н.П. Теория подвижных особых точек уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1976. – **12**, № 3. – С. 387–416.

[7] Filtschakow P.F. Numerische und graphische Methoden der angewandten Mathematik. – Berlin: Akademie-Verlag, 1975. – 770 s.

[8] Фильчакова В.П. Об одном приближенном методе решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка полиномиального класса // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. – С. 85–95.

[9] Лукашевич Н.А., Орлов В.Н. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, № 10. – С. 1829–1832.

[10] Fylchakova V.P. On a method of solution and analysis of evolution equations // Teorijska i primenjena mehanika: Jugoslovensko društvo za mehaniku. – 1991. – **17**. – P. 59–71.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 166–173

УДК 517.9

Симетрійна редукція нелінійного хвильового рівняння для комплексного поля

О.А. ПАНЧАК

Інститут математики НАН України, Київ

Одержано повний розв'язок задачі симетрійної редукції комплексного нелінійного хвильового рівняння до звичайних диференціальних рівнянь за підгрупами групи Пуанкаре, доповненої однопараметричною групою калібровочних перетворень.

We have obtained a complete solution of the symmetry reduction problem for the nonlinear complex wave equation. To this end we have utilized the subgroup structure of the direct product of the Poincaré group and of the one-parameter gauge transformation group.

В даній роботі розв'язано задачу симетрійної редукції нелінійного хвильового рівняння

$$\Box u = F(|u|)u \tag{1}$$

до звичайних диференціальних рівнянь. В (1) $\Box = \partial^2/\partial x_0^2 - \Delta$ – це оператор Даламбера, $u = u(x_0, x_1, x_2, x_3)$ – комплексна двічі неперервно-диференційовна функція, $F(|u|)$ – деяка неперервна функція.

Разом з відомими результатами щодо редукції рівняння (1) за підгрупами групи Пуанкаре $P(1,3)$ [1–5], анзаци, наведені нижче, дають повний розв'язок проблеми симетрійної редукції для нелінійного хвильового рівняння (1).

Добре відомо, що максимальною групою інваріантності рівняння (1) є група $P(1,3) \oplus G(1)$, де $P(1,3)$ – це група Пуанкаре з генераторами

$$\begin{gathered} P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_a = -\frac{\partial}{\partial x_a}, \\ J_{ab} = x_a\frac{\partial}{\partial x_b} - x_b\frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{0a} = x_0\frac{\partial}{\partial x_a} + x_a\frac{\partial}{\partial x_0}, \end{gathered} \tag{2}$$

де $a, b = 1, 2, 3$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, а $G(1)$ – це однопараметрична група калібровочних перетворень з генератором

$$Q = iu\frac{\partial}{\partial u} - iu^*\frac{\partial}{\partial u^*}. \tag{3}$$

Оскільки задача симетрійної редукції диференціальних рівнянь з частинними похідними за підгрупами групи $P(1,3)$ вже розв'язана, то ми розглянемо лише ті трипараметричні групи $P(1,3) \oplus G(1)$, які неспряжені підгрупам групи Пуанкаре. Повний список відповідних тривимірних підалгебр наводимо нижче:

$$\begin{aligned}
&M_1 = \langle M + \varepsilon Q, P_1 + \gamma Q, P_2 + \sigma Q\rangle,\\
&\qquad \varepsilon = \pm 1, \gamma, \sigma \in \mathbb{R} \text{ або } \varepsilon = 0, \gamma > 0, \sigma \in \mathbb{R};\\
&M_2 = \langle P_0 + \gamma Q, P_1 + \sigma Q, P_2 + \tau Q\rangle,\\
&\qquad \sigma > 0, \gamma, \tau \in \mathbb{R} \text{ або } \sigma = 0, \gamma \neq 0;\\
&M_3 = \langle P_1 + \gamma Q, P_2 + \sigma Q, P_3 + \tau Q\rangle, \quad \gamma > 0, \sigma, \tau \in \mathbb{R};\\
&M_4 = \langle J_{12} + \gamma Q, P_0 + \sigma Q, P_3 + \tau Q\rangle,\\
&\qquad \gamma, \sigma, \tau \in \mathbb{R}, |\gamma| + |\sigma| + |\tau| \neq 0;\\
&M_5 = \langle J_{12} + \gamma Q, P_1, P_2\rangle, \quad \gamma \neq 0;\\
&M_6 = \langle J_{03} + \gamma Q, P_0, P_3\rangle, \quad \gamma \neq 0;\\
&M_7 = \langle J_{03} + \gamma Q, M, P_1 + \sigma Q\rangle, \quad \gamma \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0, |\gamma| + \sigma \neq 0;\\
&M_8 = \langle J_{03} + \gamma Q, P_1 + \sigma Q, P_2 + \tau Q\rangle, \; \gamma, \tau \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0, |\gamma| + \sigma \neq 0;\\
&M_9 = \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \gamma Q, P_0, P_3\rangle, \quad \gamma \neq 0;\\
&M_{10} = \langle J_{12} + \alpha J_{03} + \gamma Q, P_1, P_2\rangle, \quad \gamma \neq 0;\\
&M_{11} = \langle G_1 + \varepsilon Q, M, P_1 + \gamma Q\rangle, \quad \varepsilon = 1, \gamma \in \mathbb{R} \text{ або } \varepsilon = 0, \gamma > 0;\\
&M_{12} = \langle G_1 + \varepsilon Q, M + \gamma Q, P_2 + \sigma Q\rangle,\\
&\qquad \varepsilon = 1, \gamma, \sigma \in \mathbb{R} \text{ або } \varepsilon = 0, \gamma = \pm 1, \sigma \geq 0 \text{ або } \varepsilon = \gamma = 0, \sigma > 0;\\
&M_{13} = \langle G_1 + \varepsilon Q, M, P_1 + \beta P_2 + \gamma Q\rangle,\\
&\qquad \varepsilon = 1, \gamma \in \mathbb{R} \text{ або } \varepsilon = 0, \gamma \neq 0;\\
&M_{14} = \langle G_1 + \gamma Q, G_2 + \sigma Q, M + \tau Q\rangle,\\
&\qquad \gamma = 1, \sigma, \tau \in \mathbb{R} \text{ або } \gamma = \sigma = 0, \tau = \pm 1;\\
&M_{15} = \langle G_1, J_{03} + \gamma Q, M\rangle, \quad \gamma \neq 0;\\
&M_{16} = \langle G_1, J_{03} + \gamma Q, P_2 + \sigma Q\rangle, \quad \sigma > 0, \gamma \in \mathbb{R} \text{ або } \sigma = 0, \gamma \neq 0;
\end{aligned}$$

$M_{17} = \langle J_{12} + \gamma Q, J_{03} + \sigma Q, M \rangle, \quad \gamma > 0, \sigma \in \mathbb{R}$ або $\gamma = 0, \sigma > 0;$

$M_{18} = \langle G_1, G_2, J_{03} + \gamma Q \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{19} = \langle G_1, G_2, J_{12} + \gamma Q \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{20} = \langle G_1, G_2, J_{12} + \alpha J_{03} + \gamma Q \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{21} = \langle J_{12} + \alpha P_0 + \gamma Q, P_1, P_2 \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{22} = \langle J_{12} + \alpha P_3 + \gamma Q, P_1, P_2 \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{23} = \langle J_{12} + 2T + \gamma Q, P_1, P_2 \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{24} = \langle J_{03} + \alpha P_1 + \gamma Q, P_0, P_3 \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{25} = \langle J_{03} + \alpha P_1 + \gamma Q, M, P_2 + \sigma Q \rangle, \quad \gamma, \sigma \in \mathbb{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$

$M_{26} = \langle G_1 + 2T + \gamma Q, M, P_1 + \sigma Q \rangle, \quad \gamma, \sigma \in \mathbb{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$

$M_{27} = \langle G_1 + 2T + \gamma Q, M + \sigma Q, P_2 + \tau Q \rangle,$
$\sigma = \pm 1, \gamma, \tau \in \mathbb{R}$ або $\sigma = 0, \gamma, \tau \in \mathbb{R}, |\gamma| + |\tau| \neq 0;$

$M_{28} = \langle G_1 + 2T + \gamma Q, M, P_1 + \beta P_2 + \sigma Q \rangle,$
$\gamma, \sigma \in \mathbb{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$

$M_{29} = \langle G_1 + P_2 + \gamma Q, M, P_1 + \sigma Q \rangle, \quad \gamma, \sigma \in \mathbb{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$

$M_{30} = \langle G_1 + \gamma Q, G_2 + P_2 + \sigma Q, M + \tau Q \rangle,$
$\gamma, \sigma, \tau \in \mathbb{R}, |\gamma| + |\sigma| + |\tau| \neq 0;$

$M_{31} = \langle G_1 + P_2 + \gamma Q, G_2 - P_1 + \sigma Q, M \rangle, \ \gamma, \sigma \in \mathbb{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$

$M_{32} = \langle G_1 + P_2 + \gamma Q, G_2 - P_1 + \beta P_2 + \sigma Q, M \rangle,$
$\gamma, \sigma \in \mathbb{R}, |\gamma| + |\sigma| \neq 0;$

$M_{33} = \langle G_1, J_{03} + \alpha P_2 + \gamma Q, M \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{34} = \langle G_1, J_{03} + \alpha P_1 + \gamma Q, M \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{35} = \langle G_1, J_{03} + \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma Q, M \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

$M_{36} = \langle G_1, G_2, J_{12} + M + \gamma Q, M \rangle, \quad \gamma \neq 0;$

де $\alpha, \beta > 0$, $G_a = J_{0a} - J_{a3}$ $(a = 1, 2)$, $M = P_0 + P_3$, $T = \dfrac{1}{2}(P_0 - P_3)$.

Загальний вигляд анзацу для поля $u = u(x)$, інваріантного відносно однієї із алгебр $M_1 - M_{36}$, є таким (див., наприклад, [3]):

$$u(x) = \exp(if(x))\varphi(\omega(x)). \tag{4}$$

Явний вигляд функцій $f(x)$, $\omega(x)$ визначається однією із наступних формул:

(1) $f(x) = \varepsilon x_0 - \gamma x_1 - \sigma x_2, \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$

(2) $f(x) = \gamma x_0 - \sigma x_1 - \tau x_2, \quad \omega(x) = x_3;$

(3) $f(x) = -(\gamma x_1 + \sigma x_2 + \tau x_3), \quad \omega(x) = x_0;$

(4) $f(x) = \sigma x_0 + \gamma \arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \tau x_3, \quad \omega(x) = x_1^2 + x_2^2;$

(7) $f(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3) - \sigma x_1, \quad \omega(x) = x_2;$

(8) $f(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3) - \tau x_2 - \sigma x_1, \quad \omega(x) = x_0^2 - x_3^2;$

(9) $f(x) = -\gamma \arcsin\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \quad \omega(x) = x_1^2 + x_2^2;$

(10) $f(x) = \dfrac{\gamma}{\alpha} \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_0^2 - x_3^2;$

(12) $f(x) = \gamma x_0 - \sigma x_2 + \dfrac{\varepsilon x_1}{x_0 + x_3} - \dfrac{\gamma x_1^2}{2(x_0 + x_3)}, \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$

(13) $f(x) = \dfrac{\varepsilon(\beta x_1 - x_2)}{\beta(x_0 + x_3)} - \dfrac{\gamma x_2}{\beta}, \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$

(14) $f(x) = \tau x_0 + \dfrac{\gamma x_1 + \sigma x_2}{x_0 + x_3} - \dfrac{\tau(x_1^2 + x_2^2)}{2(x_0 + x_3)}, \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$

(15) $f(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_2;$

(16) $f(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3) - \sigma x_2, \quad \omega(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_3^2;$

(17) $f(x) = \gamma \arcsin\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + \sigma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_1^2 + x_2^2;$

(18) $f(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2;$

(20) $f(x) = \dfrac{\gamma}{\alpha} \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2;$

(21) $f(x) = \dfrac{\gamma}{\alpha} x_0, \quad \omega(x) = x_3;$

(22) $f(x) = -\dfrac{\gamma}{\alpha}x_3, \quad \omega(x) = x_0;$

(23) $f(x) = \gamma x_0, \quad \omega(x) = x_0 - x_3;$

(24) $f(x) = -\dfrac{\gamma}{\alpha}x_1, \quad \omega(x) = x_2;$

(25) $f(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3) - \sigma x_2, \quad \omega(x) = \dfrac{1}{\alpha}x_1 + \ln(x_0 + x_3);$

(26) $f(x) = \gamma(x_0 + x_3) + \dfrac{\sigma}{2}(x_0 + x_3)^2 - 2\sigma x_1, \quad \omega(x) = x_2;$

(27) $f(x) = \dfrac{\sigma}{12}(x_0 + x_3)^3 - \dfrac{\sigma}{2}x_1(x_0 + x_3) + \dfrac{\gamma}{2}(x_0 + x_3)+$
$+\sigma x_0 - \tau x_2, \quad \omega(x) = (x_0 + x_3)^2 - 4x_1;$

(28) $f(x) = \dfrac{\sigma}{4}(x_0 + x_3)^2 + \dfrac{\gamma}{2}(x_0 + x_3) - \sigma x_1,$
$\omega(x) = \dfrac{1}{4}(x_0 + x_3)^2 - x_1 + \dfrac{1}{\beta}x_2;$

(29) $f(x) = -(\sigma x_1 + \gamma x_2 + \sigma x_2(x_0 + x_3)), \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$

(30) $f(x) = \tau x_0 + \dfrac{2\gamma x_1 - \tau x_1^2}{2(x_0 + x_3)} + \dfrac{2\sigma x_2 - \tau x_2^2}{2(x_0 + x_3 - 1)}, \ \omega(x) = x_0 + x_3;$

(31) $f(x) = \gamma\dfrac{x_1(x_0 + x_3) - x_2}{1 + (x_0 + x_3)^2} + \sigma\dfrac{x_2(x_0 + x_3) - x_1}{1 + (x_0 + x_3)^2},$
$\omega(x) = x_0 + x_3;$

(32) $f(x) = \gamma\dfrac{x_1(x_0 + x_3 - \beta) - x_2}{1 + (x_0 + x_3)^2 - \beta(x_0 + x_3)}+$
$+\sigma\dfrac{x_2(x_0 + x_3) - x_1}{1 + (x_0 + x_3)^2 - \beta(x_0 + x_3)}, \quad \omega(x) = x_0 + x_3;$

(33) $f(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = \dfrac{x_2}{\alpha} + \ln(x_0 + x_3);$

(34) $f(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = x_2;$

(35) $f(x) = \gamma \ln(x_0 + x_3), \quad \omega(x) = \dfrac{x_2}{\beta} + \ln(x_0 + x_3);$

(36) $f(x) = -\gamma\left(\dfrac{x_1^2 + x_2^2}{2(x_0 + x_3)} - x_0\right), \quad \omega(x) = x_0 + x_3.$

Зауважимо, що алгебрам M_5, M_6, M_{11}, M_{19} відповідають частково-інваріантні розв'язки, які в даній роботі не розглядаються.

Підставляючи знайдені анзаци в рівняння (1), одержуємо набір редукованих звичайних диферецiальних рiвнянь для знаходження $\varphi = \varphi(\omega)$ (крапка над символом позначає похідну по ω):

(1) $2i\varepsilon\dot{\varphi} + (\sigma^2 + \gamma^2 - \varepsilon^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(2) $-\ddot{\varphi} + (\sigma^2 + \tau^2 - \gamma^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(3) $\ddot{\varphi} + (\gamma^2 + \sigma^2 + \tau^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(4) $-4\omega\ddot{\varphi} - 4\dot{\varphi} - \left(\sigma^2 - \tau^2 - \dfrac{\gamma^2}{\omega}\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(7) $-\ddot{\varphi} + \sigma^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(8) $4\omega\ddot{\varphi} + 4(1 + i\gamma)\dot{\varphi} + (\sigma^2 + \tau^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(9) $-4\omega\ddot{\varphi} - 4\dot{\varphi} + \dfrac{\gamma^2}{\omega}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(10) $4\omega\ddot{\varphi} + 4\left(1 + i\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)\dot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$

(12) $2i\gamma\dot{\varphi} + \left(\sigma^2 - \gamma^2 + \dfrac{\varepsilon^2}{\omega^2} + i\dfrac{\gamma}{\omega}\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(13) $\left(\dfrac{\beta^2\varepsilon^2 + 1}{\beta^2\omega^2} + \dfrac{2\gamma}{\beta^2\omega} + \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(14) $2i\tau\dot{\varphi} + \left(\dfrac{2i\tau}{\omega} - \tau^2\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(15) $-\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$

(16) $-4\omega\ddot{\varphi} - 4(1 + i\gamma)\dot{\varphi} + \sigma\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(17) $-4\omega\ddot{\varphi} - 4\dot{\varphi} + \dfrac{\gamma^2}{\omega}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(18) $-4\omega\ddot{\varphi} - 4(1+i\gamma)\dot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$

(20) $-4\omega\ddot{\varphi} - 4\left(1+i\dfrac{\gamma}{\alpha}\right)\dot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$

(21) $-\ddot{\varphi} - \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(22) $\ddot{\varphi} + \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(23) $-\gamma^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(24) $-\ddot{\varphi} + \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(25) $\dfrac{1}{\alpha^2}\ddot{\varphi} + \sigma^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(26) $-\ddot{\varphi} + 4\sigma^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(27) $-16\ddot{\varphi} - (\sigma^2 - \tau^2 + \gamma\sigma + \sigma^2\omega)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(28) $-\left(1+\dfrac{1}{\beta^2}\right)\ddot{\varphi} - 2i\sigma\dot{\varphi} + \sigma^2\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(29) $(\sigma^2 + \gamma^2 + 2\gamma\sigma\omega + \sigma\omega^2)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(30) $2i\tau\dot{\varphi} + \left(\gamma^2 + \sigma^2 - \tau^2 + \dfrac{i\tau}{\omega} + \dfrac{i\tau}{\omega-1}\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(31) $-\dfrac{4\gamma\sigma\omega - \gamma^2 - \sigma^2}{1+\omega^2}\varphi = F(|\varphi|)\varphi;$

(32) $\left(\dfrac{\sigma^2(1+\omega^2)}{(1+\omega^2-\beta\omega)^2} + \dfrac{\gamma^2(1+\omega-\beta)}{(1+\omega^2-\beta\omega)^2} - \dfrac{2\gamma\sigma\beta}{1+\omega^2-\beta\omega}\right)\varphi =$
$= F(|\varphi|)\varphi;$

(33) $-\dfrac{1}{\alpha^2}\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$

(34) $-\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$

(35) $-\dfrac{1}{\beta^2}\ddot{\varphi} = F(|\varphi|)\varphi;$

(36) $\left(-2\gamma^2 + 2i\gamma\left(1+\dfrac{1}{\omega}\right)\right)\varphi = F(|\varphi|)\varphi.$

Планується присвятити одну з наступних публікацій побудові точних інваріантних розв'язків нелінійного хвильового рівняння.

Висловлюю щиру подяку В.І. Лагну, який провів класифікацію несприяжених підгруп групи $P(1,3)\oplus G(1)$, а також Р.З. Жданову за постановку задачі та постійну увагу до роботи.

[1] Fushchych W.I., Serov N.I. The symmetry and some exact solutions of the nolinear many–dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1983. – **16**, № 5. – P. 3645–3658.

[2] Grundland A., Harnad J., Winternitz P. Symmetry reduction and some exact solutions of the nonlinear relativisticallly invariant equations // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, № 4. – P. 791–806.

[3] Fushchych W.I., Yegorchenko I.A. The symmetry and exact solutions of the non-linear d'Alembert equations for complex fields // J. Phys. A: Math. Gen. – 1989. – **22**. – P. 2643–2652.

[4] Winternitz P., Grundland A., Tuszyǹski J.A. Exact solutions of the multidimensional classical Φ^6 field equations obtained by symmetry reduction // J. Math. Phys. – 1987. – **28**, № 9. – P. 2194–2212.

[5] Grundland A.M., Tuszyǹsky J.A. Symmetry breaking and bifurcation solutions in the classical complex Φ^6 field theory // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**, № 19. – P. 6243–6258.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 174–176

УДК 517.9:519.46

Q-умовна симетрія рівняння акустики

Ю.Г. ПОДОШВЄЛЄВ

Полтавський технічний університет

Отримано нові оператори Q-умовної симетрії нелінійного рівняння $u_{00} = uu_{11}$. Виконана редукція та отримано деякі розв'язки цього рівняння.

New Q-conditional symmetry operators of the nonlinear equation $u_{00} = uu_{11}$ are obtained. This symmetry is used for reduction and finding exact solutions of this equation.

Розглянемо нелінійне хвильове рівняння

$$u_{00} = f(u)\,u_{11}, \tag{1}$$

де $u = u(x) \in \mathbb{R}_1$; $x = x(x_0, x_1) \in \mathbb{R}_2$; $f(u) \neq \mathrm{const}$ – довільна диференційовна функція, яке описує реальні процеси в акустиці.

Відомо, що максимальна алгебра інваріантності рівняння (1) породжується операторами:

1. $A_1 = \langle P_0 = \partial_0, P_1 = \partial_1\rangle$, якщо $f(u)$ – будь-яка функція;
2. $A_2 = \langle P_0, P_1, D_1 = x_0\partial_0 + x_1\partial_1, D_2 = x_0\partial_0 - 2\partial_u\rangle$, якщо $f(u) = \lambda \exp u$;
3. $A_3 = \langle P_0, P_1, D_1, D_3 = x_0\partial_0 - \dfrac{2}{k}u\partial_u\rangle$, якщо $f(u) = \lambda u^k, k \neq 0, k \neq \pm 4$;
4. $A_4 = \langle P_0, P_1, D_1, D_4 = x_0\partial_0 - \dfrac{1}{2}u\partial_u, K_0 = x_0^2\partial_0 + x_0 u\partial_u\rangle$, якщо $f(u) = \lambda u^{-4}$;
5. $A_5 = \langle P_0, P_1, D_1, D_5 = x_0\partial_0 - \dfrac{1}{2}u\partial_u, K_1 = x_1^2\partial_1 + x_1 u\partial_u\rangle$, якщо $f(u) = \lambda u^4$,

де λ, k – довільні сталі.

В частковому випадку при $f(u) = u$ рівняння (1) матиме вигляд:

$$u_{00} = uu_{11}. \tag{2}$$

Для рівняння (2) в [1, 2] наведено ряд операторів Q, які не входять в алгебру інваріантності A_3 (при $k = 1$). За допомогою цих операторів можна отримати анзаци, що редукують його до звичайного диференціального рівняння.

Використовуючи вимогу Q-умовної інваріантності рівняння (2) [2]

$$\tilde{Q}\,(u_{00} - uu_{11}) = r_1\,(u_{00} - uu_{11}) + r_2(Qu),$$

де $\tilde{Q}$ – продовження оператора Q [3], r_1, r_2 – деякі функції, отримаємо раніше знайдені оператори та декілька нових операторів.

Теорема. *Рівняння (2) Q – умовно інваріантне відносно оператора*

$$Q = \alpha^2\partial_0 + \left(x_1^2 + C\right)\partial_1 + \Bigg[(x_1 + \alpha\dot{\alpha})u + \frac{x_1^3}{2}\wp + \alpha^3\left\{\left(\frac{\wp}{\alpha}\right)'\left(\frac{x_1^2}{2} + C\right) - \left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right)'\right\} + \Lambda x_1\Bigg]\partial_u, \tag{3}$$

якщо функції $\alpha(x_0) \neq 0$, $\wp(x_0)$, $\Lambda(x_0)$ задовольняють систему рівнянь

$$\ddot{\alpha} - C\alpha^{-3} - \alpha\wp = 0, \quad \ddot{\wp} = \wp^2, \quad \ddot{\Lambda} = \wp\Lambda, \tag{4}$$

($\wp$ – функція Вейерштрасса, Λ – функція Ламе), де C – довільна стала.

Теорема доводиться методами, запропонованими в [2].

Використавши (3), запишемо систему Лагранжа-Ейлера

$$\frac{dx_0}{\alpha^2} = \frac{dx_1}{x_1^2 + C} = \frac{du}{(x_1 + \alpha\dot{\alpha})u + g(x_0, x_1)},$$

де

$$g(x_0, x_1) = \frac{x_1^3}{2}\wp + \alpha^3\left\{\left(\frac{\wp}{\alpha}\right)'\left(\frac{x_1^2}{2} + C\right) - \left(\frac{\Lambda}{\alpha}\right)'\right\} + \Lambda x_1,$$

першими інтегралами якої будуть

$$\omega = \int\frac{dx_0}{\alpha^2} - \int\frac{dx_1}{x_1^2 + C}, \quad w = \frac{u - \wp\left(\frac{x_1^2}{2} + C\right) + \Lambda}{\alpha\sqrt{x_1^2 + C}},$$

звідки знаходимо явний вигляд анзацу

$$u = \alpha\sqrt{x_1^2 + C}\varphi(\omega) + \wp\left(\frac{x_1^2}{2} + C\right) - \Lambda. \tag{5}$$

Підставивши (5) в (2) і використавши систему рівнянь (4), отримаємо редуковане рівняння

$$\ddot{\varphi}(\omega) + C\varphi(\omega) = 0, \tag{6}$$

розв'язки якого будуть залежати від вигляду сталої C.

Якщо $C = 0$, то рівняння (6) матиме наступний розв'язок:

$$\varphi(\omega) = C_1\omega + C_2, \tag{7}$$

де C_1 і C_2 – деякі константи. Після підстановки (7) в (5), отримаємо розв'язок рівняння (2)

$$u = \frac{x_1^2}{2}\wp + \alpha x_1\left(C_1\int \alpha dx_0 + C_2\right) + C_1\alpha - \Lambda,$$

в якому функції $\alpha \neq 0$, $\wp$, Λ задовольняють систему рівнянь (4). Аналогічно одержуємо розв'язки рівняння (2) при $C = 1$:

$$u = \alpha\left\{(C_1x_1 + C_2)\cos E + (C_2x_1 - C_1)\sin E\right\} + \\ + \left(\frac{x_1^2}{2} + 1\right)\wp - \Lambda,$$

та при $C = -1$:

$$u = \alpha\left\{C_1(x_1 + 1)\exp(E) + C_2(x_1 - 1)\exp(-E)\right\} + \\ + \left(\frac{x_1^2}{2} - 1\right)\wp - \Lambda,$$

де $E = \int \alpha dx_0$.

[1] Olver P., Rosenau Ph. The construction of special solutions to partial differential equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **114**, № 3. – P. 107–112.

[2] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publisher. – 1993. – 400 p.

[3] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 177–185

UDC 517.945:519.46

On Lie reduction of the MHD equations to partial differential equations in three independents variables

V.O. POPOVYCH

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv

Рівняння магнітогідродинаміки, що описують рух в'язкої однорідної нестисливої рідини з скінченною електропровідністю, за допомогою ліївських симетрій редуковано до диференціальних рівнянь з частинними похідними від трьох незалежних змінних. Досліджено симетрійні властивості всіх редукованих систем.

The MHD equations describing flow of a viscous homogeneous incompressible fluid of finite electrical conductivity are reduced by means of Lie symmetries to partial differential equations in three independent variables. Symmetry properties of the reduced systems are investigated.

1. Introduction. The MHD equations (the MHDEs) describing flows of a viscous homogeneous incompressible fluid of finite electrical conductivity have the following form:

$$\begin{array}{ll} \vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \triangle\vec{u} + \vec{\nabla}p + \vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{0}, & \operatorname{div}\vec{u} = 0, \\ \vec{H}_t - \operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{H}) - \nu_m\triangle\vec{H} = \vec{0}, & \operatorname{div}\vec{H} = 0. \end{array} \tag{1}$$

System (1) is very complicated and construction of its new exact solutions is a difficult problem. In [1, 2, 3] the MHDEs (1) are reduced to ordinary differential equations and to partial differential equations in two indedendent variables. Following [4], in this paper we reduce the MHDEs (1) to partial differential equations in three independent variables by means of one-dimensional subalgebras of the maximal Lie invariance algebra of the MHDEs.

In (1) and below, $\vec{u} = \{u^a(t,\vec{x})\}$ denotes the velocity field of a fluid, $p = p(t,\vec{x})$ denotes the pressure, $\vec{H} = \{H^a(t,\vec{x})\}$ denotes the magnetic intensity, ν_m is the coefficient of magnetic viscosity, $\vec{x} = \{x_a\}$,

$\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_a = \partial/\partial x_a$, $\vec{\nabla} = \{\partial_a\}$, $\triangle = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}$ is the Laplacian. The kinematic coefficient of viscosity and fluid density are set equal to unity, permeability is done $(4\pi)^{-1}$. Subscripts of functions denote differentiation with respect to the corresponding variables.

The maximal Lie invariance algebra of the MHDEs (1) is an infinite-dimensional algebra $A(\mathrm{MHD})$ with the basis elements (see [5])

$$\begin{aligned}&\partial_t, \quad D = t\partial_t + \tfrac{1}{2}x_a\partial_a - \tfrac{1}{2}u^a\partial_{u^a} - \tfrac{1}{2}H^a\partial_{H^a} - p\partial_p,\\ &J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a} + H^a\partial_{H^b} - H^b\partial_{H^a},\ a<b,\\ &R(\vec{m}) = m^a\partial_a + m^a_t\partial_{u^a} - m^a_{tt}x_a\partial_p, \quad Z(\chi) = \chi\partial_p,\end{aligned} \tag{2}$$

where $m^a = m^a(t)$ and $\chi = \chi(t)$ are arbitrary smooth functions of t (for example, from $C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R})$). We sum over repeated indices. The indices a, b take values in $\{1,2,3\}$ and the indices i, j in $\{1,2\}$. The algebra $A(\mathrm{MHD})$ is isomorphic to the maximal Lie invariance algebra $A(\mathrm{NS})$ of the Navier-Stokes equations [6, 7, 8].

Besides continuous transformations generated by operators (2), the MHDEs admit discrete transformations I_b of the form

$$\begin{aligned}&\tilde{t} = t, \qquad x_b = -x_b, \qquad \tilde{x}_a = x_a,\\ &\tilde{p} = p, \quad \tilde{u}^b = -u^b,\ \tilde{H}^b = -H^b, \quad \tilde{u}^a = u^a,\ \tilde{H}^a = H^a,\ a\neq b,\end{aligned}$$

where b is fixed.

2. Inequivalent one-dimensional subalgebras of $A(\mathrm{MHD})$.

Theorem. *A complete set of $A(\mathrm{MHD})$-inequivalent one-dimensional subalgebras of $A(\mathrm{MHD})$ is exhausted by the following algebras:*

1. $A^1_1(\varkappa) = \langle D + \varkappa J_{12}\rangle$, where $\varkappa \geq 0$.

2. $A^1_2(\varkappa) = \langle \partial_t + \varkappa J_{12}\rangle$, where $\varkappa\in\{0;1\}$.

3. $A^1_3(\eta,\chi) = \langle J_{12} + R(0,0,\eta(t)) + Z(\chi(t))\rangle$ with smooth functions η and χ. Algebras $A^1_3(\eta,\chi)$ and $A^1_3(\tilde\eta,\tilde\chi)$ are equivalent if $\exists\,\varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$, $\exists\,\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{-1;1\}$, $\exists\,\lambda\in C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R})$:

$$\tilde\eta(\tilde t) = \varepsilon_1 e^{-\varepsilon}\eta(t), \quad \tilde\chi(\tilde t) = \varepsilon_2 e^{2\varepsilon}(\chi(t) + \lambda_{tt}(t)\eta(t) - \lambda(t)\eta_{tt}(t)), \tag{3}$$

where $\tilde t = te^{-2\varepsilon} + \delta$.

4. $A^1_4(\vec m,\chi) = \langle R(\vec m(t)) + Z(\chi(t))\rangle$ with smooth functions $\vec m$ and χ: $(\vec m,\chi)\not\equiv(\vec 0,0)$. Algebras $A^1_4(\vec m,\chi)$ and $A^1_4(\tilde{\vec m},\tilde\chi)$ are equivalent if $\exists\,\varepsilon,\delta\in\mathbb{R}$, $\exists\,\varepsilon_1\in\{-1;1\}$, $\exists\, C\neq 0$, $\exists\, B\in O(3)$, $\exists\,\vec l\in C^\infty((t_0,t_1),\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned}&\tilde{\vec m}(\tilde t) = Ce^{-\varepsilon}B\vec m(t),\\ &\tilde\chi(\tilde t) = C\varepsilon_1 e^{2\varepsilon}\big(\chi(t) + \vec l_{tt}(t)\cdot\vec m(t) - \vec m_{tt}(t)\cdot\vec l(t)\big),\end{aligned} \tag{4}$$

where $\tilde t = te^{-2\varepsilon} + \delta$.

3. Lie ansatzes of codimension one for the MHD field. By means of the algebras $A^1_1 - A^1_4$ (sometimes, when additional restrictions for parameters are satisfied), we can construct ansatzes of codimension one for the MHD field. Let us list these ansatzes.

1. $$\begin{aligned}&\vec u = |t|^{-1/2}O(\tau)\vec v + \tfrac{1}{2}t^{-1}\vec x + \varkappa t^{-1}\vec e_3\times\vec x,\\ &\vec H = |t|^{-1/2}O(\tau)\vec G,\\ &p = |t|^{-1}q + \tfrac{1}{8}t^{-2}|\vec x|^2 + \tfrac{1}{2}\varkappa t^{-2}r^2,\end{aligned} \tag{5}$$

where $\vec y = |t|^{-1/2}O^T(\tau)\vec x$, $\tau = \varkappa\ln|t|$. Here and below

$$v^a = v^a(y_1,y_2,y_3), \quad G^a = G^a(y_1,y_2,y_3), \quad q = q(y_1,y_2,y_3),$$

$$O(\tau) = \begin{pmatrix}\cos\tau & -\sin\tau & 0\\ \sin\tau & \cos\tau & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \vec e_3 = (0,0,1).$$

2. $$\vec u = O(\tau)\vec v + \varkappa\vec e_3\times\vec x, \quad \vec H = O(\tau)\vec G, \quad p = q + \tfrac{1}{2}\varkappa r^2, \tag{6}$$

where $\vec y = O^T(\tau)\vec x$, $\tau = \varkappa t$.

3. $$\begin{aligned}&u^1 = x_1r^{-1}v^1 - x_2r^{-2}v^2, \quad u^2 = x_2r^{-1}v^1 + x_1r^{-2}v^2,\\ &u^3 = v^3 + \eta(t)r^{-2}v^2 + \eta_t(t)\arctan x_2/x_1,\\ &H^1 = x_1r^{-1}G^1 - x_2r^{-2}G^2, \quad H^2 = x_2r^{-1}G^1 + x_1r^{-2}G^2,\\ &H^3 = G^3 + \eta(t)r^{-2}G^2,\\ &p = q - \tfrac{1}{2}\eta_{tt}(t)(\eta(t))^{-1}x_3^2 + \chi(t)\arctan x_2/x_1,\end{aligned} \tag{7}$$

where $y_1 = r$, $y_2 = x_3 - \eta(t)\arctan x_2/x_1$, $y_3 = \tau := t$.

Notion. The expression for the pressure p from ansatz (7) is indeterminate in the points $t\in(t_0,t_1)$ where $\eta(t) = 0$. If there are such points t, we will consider ansatz (7) on the intervals (t_0^n, t_1^n) that are contained in the interval (t_0, t_1) and that satisfy one of the conditions:

a) $\eta(t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_0^n, t_1^n)$;

b) $\eta(t) = 0 \quad \forall t \in (t_0^n, t_1^n)$.

In the last case we consider $\eta_{tt}/\eta := 0$.

With the algebra $A_4^1(\vec{m}, \chi)$, an ansatz can be constructed only for such t wherefor $\vec{m}(t) \neq \vec{0}$. If this condition is satisfied, it follows from (4) that the algebra $A_4^1(\vec{m}, \chi)$ is equivalent to the algebra $A_5^1(\vec{m}, 0)$. An ansatz constructed with the algebra $A_4^1(\vec{m}, 0)$ has the following form:

$$\begin{aligned}
4.\quad & \vec{u} = v^i \vec{n}^i + v^3 |\vec{m}|^{-2} \vec{m} + (\vec{m} \cdot \vec{x}) |\vec{m}|^{-2} \vec{m}_t - y_i |\vec{m}|^{-1} \vec{n}^i_t, \\
& \vec{H} = G^i \vec{n}^i + G^3 |\vec{m}|^{-2} \vec{m}, \\
& p = |\vec{m}| q - \tfrac{1}{2} |\vec{H}|^2 - |\vec{m}|^{-2} (\vec{m}_{tt} \cdot \vec{x})(\vec{m} \cdot \vec{x}) + \\
& \qquad + \tfrac{1}{2} (\vec{m}_{tt} \cdot \vec{m}) |\vec{m}|^{-4} (\vec{m} \cdot \vec{x})^2 - \tfrac{3}{2} |\vec{m}|^{-4} \big((\vec{m}_t \cdot \vec{n}^i) y_i \big)^2 + \\
& \qquad + \big(\tfrac{1}{4} |\vec{m}|_{tt} |\vec{m}|^{-2} - \tfrac{3}{8} (|\vec{m}|_t)^2 |\vec{m}|^{-3} \big) y_i y_i,
\end{aligned} \tag{8}$$

where $y_i = \vec{n}^i \cdot \vec{x}$, $y_3 = \tau := \int |\vec{m}| dt$, $\vec{n}^i$ are smooth vector-functions such that

$$\vec{n}^i \cdot \vec{m} = \vec{n}^1 \cdot \vec{n}^2 = \vec{n}^1_t \cdot \vec{n}^2 = 0, \quad |\vec{n}^i| = |\vec{m}|^{1/2}. \tag{9}$$

Notion. There exist vector-functions $\vec{n}^i$ which satisfy conditions (9). They can be constructed in the following way [4]: let us fix smooth vector-functions $\vec{k}^i = \vec{k}^i(t)$ such that $\vec{k}^i \cdot \vec{m} = \vec{k}^1 \cdot \vec{k}^2 = 0$, $|\vec{k}^i| = |\vec{m}|^{1/2}$, and set

$$\begin{aligned}
\vec{n}^1 &= \vec{k}^1 \cos\psi(t) - \vec{k}^2 \sin\psi(t), \\
\vec{n}^2 &= \vec{k}^1 \sin\psi(t) + \vec{k}^2 \cos\psi(t).
\end{aligned} \tag{10}$$

Then $\quad \vec{n}^1_t \cdot \vec{n}^2 = \vec{k}^1_t \cdot \vec{k}^2 - \psi_t = 0 \quad$ if $\quad \psi = \int (\vec{k}^1_t \cdot \vec{k}^2) dt$.

4. Reduced systems in three independent variables. Substituting ansatzes (5) and (6) into the MHDEs (1), we obtain reduced systems of PDEs with the same general form

$$\begin{aligned}
& (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} - \triangle \vec{v} + \nabla q + \vec{G} \times \operatorname{rot} \vec{G} + \gamma_1 \vec{e}_3 \times \vec{v} = \vec{0}, \\
& (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{G} - (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{v} - \nu_m \triangle \vec{G} + \gamma_2 \vec{G} = \vec{0}, \\
& \operatorname{div} \vec{v} = \tfrac{3}{2}\gamma_2, \quad \operatorname{div} \vec{G} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Hereafter the functions v^a, G^a, and q are differentiated with respect to the variables y_1, y_2, and y_3. The constants γ_a take the values

1. $\gamma_1 = 2\varkappa \operatorname{sign} t, \quad \gamma_2 = -\operatorname{sign} t$;
2. $\gamma_1 = 2\varkappa, \quad \gamma_2 = 0$.

For ansatzes (7) and (8) the reduced equations have the form

$$\begin{aligned}
3.\quad & \mathcal{M}^1 + q_1 + y_1^{-3}((G^3)^2 - (v^3)^2 - 2\eta v^3_2) - v^1_1 y_1^{-1} + v^1 y_1^{-2} = 0, \\
& \mathcal{M}^2 + (1 + \eta^2 y_1^{-2}) q_2 + 2\eta y_1^{-3} (G^1 G^3 - v^1 v^3 + v^3_1 - \eta v^1_2 - \\
& \qquad - 2 v^3 y_1^{-1}) - y_1^{-1} v^2_1 + 2\eta_t y_1^{-2} v^3 - \eta_{tt} \eta^{-1} y_2 - \eta \chi y_1^{-2} = 0, \\
& \mathcal{M}^3 - \eta q_2 + v^3_1 y_1^{-1} + 2\eta y_1^{-1} v^1_2 + \chi = 0, \\
& \mathcal{N}^1 + \nu_m (-2\eta y_1^{-3} G^3_2 + y_1^{-2} G^1 - y_1^{-1} G^1_1) = 0, \\
& \mathcal{N}^2 + \nu_m (-2\eta^2 y_1^{-3} G^1_2 + 2\eta y_1^{-3} G^3_1 - y_1^{-1} G^2_1 - 4\eta G^3 y_1^{-4}) = 0, \\
& \mathcal{N}^3 + 2 y_1^{-1} (v^3 G^1 - v^1 G^3) + 2\nu_m \eta y_1^{-1} G^1_2 + \nu_m G^3 y_1^{-1} = 0, \\
& v^i_i + v^1 y_1^{-1} = 0, \quad G^i_i + G^1 y_1^{-1} = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\text{where} \quad & \mathcal{M}^a = v^a_\tau + v^j v^a_j - G^j G^a_j - v^a_{11} - (1 + \eta^2 y_1^{-2}) v^a_{22}, \\
& \mathcal{N}^a = G^a_t + v^i G^a_i - G^i v^a_i - \nu_m G^a_{11} - \nu_m (1 + \eta^2 y_1^{-2}) G^a_{22}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.\quad & v^i_\tau + v^j v^i_j - G^j G^i_j - v^i_{jj} + q_i + 2\beta^i \alpha^{-3} v^3 = 0, \\
& v^3_\tau + v^j v^3_j - G^j G^3_j - v^3_{jj} = 0, \\
& G^i_\tau + v^j G^i_j - G^j v^i_j - \nu_m G^i_{jj} + \alpha_\tau \alpha^{-1} G^i = 0, \\
& G^3_\tau + v^j G^3_j - G^j v^3_j - \nu_m G^3_{jj} - 2\beta^j G^j - 2\alpha_\tau \alpha^{-1} G^3 = 0, \\
& v^i_i = 0, \quad G^i_i = 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

where $\alpha = \alpha(\tau) = |\vec{m}|$, $\beta^i = \beta^i(\tau) = (\vec{m}_\tau \cdot \vec{n}^i)$.

5. Symmetry of reduced systems. Let us study symmetry properties of systems (11), (12), and (13). All results of this subsection are obtained by means of the standard Lie algorithm [10, 9].

Symmetry properties of the systems (11). The maximal Lie invariance algebra of system (11) is the algebra

a) $\langle \partial_a,\ \partial_q,\ J^1_{12} \rangle \quad$ if $\quad \gamma_1 \neq 0$;

b) $\langle \partial_a,\ \partial_q,\ J^1_{ab} \rangle \quad$ if $\quad \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 \neq 0$;

c) $\langle \partial_a,\ \partial_q,\ J^1_{ab},\ D^1_1 \rangle \quad$ if $\quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Here $J^1_{ab} = y_a\partial_{y_b} - y_b\partial_{y_a} + v^a\partial_{v^b} - v^b\partial_{v^a} + G^a\partial_{G^b} - G^b\partial_{G^a}$,
$D^1_1 = y_a\partial_{y_a} - v^a\partial_{v^a} - G^a\partial_{G^a} - 2q\partial_q$.

Note. All Lie symmetry operators of (11) are induced by operators from $A(\mathrm{MHD})$: The operators J^1_{ab} and D^1_1 are induced by J_{ab} and D. The operators $c_a\partial_a$ ($c_a = \mathrm{const}$) and ∂_q are induced by either

$$R(|t|^{1/2}(c_1\cos\tau - c_2\sin\tau, c_1\sin\tau + c_2\cos\tau, c_3)), \quad Z(|t|^{-1}),$$

where $\tau = \varkappa\ln|t|$, for ansats (5) or

$$R(c_1\cos\varkappa t - c_2\sin\varkappa t, c_1\sin\varkappa t + c_2\cos\varkappa t, c_3), \quad Z(1)$$

for ansatz (6), respectively. Therefore, Lie reduction of system (11) gives only solutions that can be obtained by reducing the MHDEs with two- and three-dimensional subalgebras of $A(\mathrm{MHD})$.

Symmetry properties of the systems (12). Let $A^{\max}$ be the maximal Lie invariance algebra of system (12). Studying symmetry properties of (12), one has to consider the following cases:

A. $\eta, \chi \equiv 0$. Then

$$A^{\max} = \langle\partial_\tau,\ D^1_2,\ R_1(\zeta(\tau)),\ Z^1(\lambda(\tau))\rangle,$$

where $D^1_2 = 2\tau\partial_\tau + y_i\partial_{y_i} - v^i\partial_{v^i} - 2v^3\partial_{v^3} - G^i\partial_{G^i} - 2G^3\partial_{G^3} - 2q\partial_q$,
$R_1(\zeta(\tau)) = \zeta\partial_2 + \zeta_\tau\partial_{v^2} - \zeta_{\tau\tau}y_2\partial_q, \quad Z^1(\lambda(\tau)) = \lambda(\tau)\partial_q$.

Here and below $\zeta = \zeta(\tau)$ and $\lambda = \lambda(\tau)$ are arbitrary smooth functions of $\tau = t$.

B. $\eta \equiv 0$, $\chi \not\equiv 0$. In this case an extension of $A^{\max}$ exists for $\chi = (C_1\tau + C_2)^{-1}$, where $C_1, C_2 = \mathrm{const}$. Let $C_1 \neq 0$. We can make C_2 vanish by means of equivalence transformation (3), i.e., $\chi = C\tau^{-1}$, where $C = \mathrm{const}$. Then

$$A^{\max} = \langle D^1_2,\ R_1(\zeta(\tau)),\ Z^1(\lambda(\tau))\rangle.$$

If $C_1 = 0$, $\chi = C = \mathrm{const}$ and

$$A^{\max} = \langle\partial_\tau,\ R_1(\zeta(\tau)),\ Z^1(\lambda(\tau))\rangle.$$

For other values of χ, i.e., when $\chi_{\tau\tau}\chi \neq \chi_\tau\chi_\tau$,

$$A^{\max} = \langle R_1(\zeta(\tau)),\ Z^1(\lambda(\tau))\rangle.$$

C. $\eta \neq 0$. By means of equivalence transformation (3) we make $\chi = 0$. In this case an extension of $A^{\max}$ exists for $\eta = \pm|C_1\tau + C_2|^{1/2}$, where $C_1, C_2 = \mathrm{const}$. Let $C_1 \neq 0$. We can make C_2 vanish by means of equivalence transformation (3), i.e., $\eta = C|\tau|^{1/2}$, where $C = \mathrm{const}$. Then

$$A^{\max} = \langle D^1_2,\ R_2(|\tau|^{1/2}),\ R_2(|\tau|^{1/2}\ln|\tau|),\ Z^1(\lambda(\tau))\rangle,$$

where $R_2(\zeta(\tau)) = \zeta\partial_{y_2} + \zeta_\tau\partial_{v^2}$. If $C_1 = 0$, i.e., $\eta = C = \mathrm{const}$,

$$A^{\max} = \langle\partial_\tau,\ \partial_{y_2},\ \tau\partial_{y_2} + \partial_{v^2},\ Z^1(\lambda(\tau))\rangle.$$

For other values of η, i.e., when $(\eta^2)_{\tau\tau} \neq 0$,

$$A^{\max} = \langle R_2(\eta(\tau)),\ R_2(\eta(\tau)\textstyle\int(\eta(\tau))^{-2}d\tau), Z^1(\lambda(\tau))\rangle.$$

Note. In all cases considered above the Lie symmetry operators of (12) are induced by operators from $A(\mathrm{MHD})$: The operators ∂_τ, D^1_2, and $Z^1(\lambda(\tau))$ are induced by ∂_t, D, and $Z(\lambda(t))$, respectively. The operator $R(0,0,\zeta(t))$ induces the operator $R_1(\zeta(\tau))$ for $\eta \equiv 0$ and the operator $R_2(\zeta(\tau))$ (if $\zeta_{\tau\tau}\eta - \zeta\eta_{\tau\tau} = 0$) for $\eta \neq 0$. Therefore, the Lie reduction of system (12) gives only solutions that can be obtained by reducing the MHDEs with two- and three-dimensional subalgebras of $A(\mathrm{MHD})$.

Symmetry properties of the systems (13). Let us introduce the notations

$$S^1 = \partial_{v^3} - 2\beta^i\alpha^{-3}y_i\partial_q, \quad S^2 = (\alpha)^2\partial_{G^3}, \quad \tilde{Z}(\lambda(\tau)) = \lambda\partial_q,$$
$$\tilde{R}(\bar\psi(\tau)) = \psi^i\partial_{y_i} + \psi^i_\tau\partial_{v^i} - \psi^i_{\tau\tau}y_i\partial_q, \quad \bar\psi = (\psi^1, \psi^2),$$
$$\tilde{D} = \tau\partial_\tau + \tfrac12 y_i\partial_{y_i} - \tfrac12 v^i\partial_{v^i} - \tfrac12 G^i\partial_{G^i} - q\partial_q,\ \tilde{I} = v^3\partial_{v^3} + G^3\partial_{G^3},$$
$$\tilde{J}_{12} = y_1\partial_{y_2} - y_2\partial_{y_1} + v^1\partial_{v^2} - v^2\partial_{v^1} + G^1\partial_{G^2} - G^2\partial_{G^1}.$$

For arbitrary values of the parameter-functions α and β^i, system (13) is invariant under the algebra

$$A^{\mathrm{all}} = \langle\tilde{R}(\bar\psi),\ S^1,\ S^2,\ \tilde{Z}(\lambda)\rangle$$

Extensions of the maximal Lie invariance algebra of system (13) is in the following cases (for each extension we write down its basis operators):

1. $\beta^i = 0$, $\alpha_\tau = 0$, $\nu_m = 1$: $\tilde{D},\ \partial_\tau,\ \tilde{J}_{12},\ I,\ G^3\partial_{v^3} + v^3\partial_{G^3}$.
2. $\beta^i = 0$, $\alpha_\tau = 0$, $\nu_m \neq 1$: $\tilde{D},\ \partial_\tau,\ \tilde{J}_{12},\ I$.
3. $\beta^i = 0$, $\alpha = a_2|\tau + a_0|^{a_1}$, $a_1a_2 \neq 0$: $\tilde{D} + a_0\partial_\tau,\ \tilde{J}_{12},\ I$.

4. $\beta^i=0$, $\alpha=a_2e^{a_1\tau}$, $a_1a_2\neq0$: $\partial_\tau,\ \tilde J_{12},\ I$.
5. $\beta^i=0$, $\alpha\alpha_\tau\alpha_{\tau\tau\tau}+(\alpha_\tau)^2\alpha_{\tau\tau}-2\alpha(\alpha_{\tau\tau})^2\neq0$: $\tilde J_{12},\ I$.
6. $\beta^i\neq0$, $\beta^i_\tau=0$, $\alpha_\tau=0$: $\tilde D-\frac32 I,\ \partial_\tau$.
7. $\beta^1=\rho\cos\theta$, $\beta^2=\rho\sin\theta$, $\alpha=a_2|\tau+a_0|^{a_1}$, where $\rho=b_1|\tau+a_0|^{a_1/2-1}$, $\theta=b_2\ln|\tau+a_0|+b_3$, and $(a_1b_1,b_2)\neq(0,0)$: $\tilde D+a_0\partial_\tau-b_2\tilde J_{12}+\frac12(a_1-1)I$.
8. $\beta^1=\rho\cos\theta$, $\beta^2=\rho\sin\theta$, $\alpha=a_2e^{a_1\tau}$, where $\rho=b_1e^{3a_1\tau/2}$, $\theta=b_2\tau+b_3$, and $(a_1b_1,b_2)\neq(0,0)$: $\partial_\tau-b_2\tilde J_{12}+\frac32 a_1I$.

Note. The vector-functions $\vec n^i$ from ansats 4 are determined up to the transformation $\vec n^1\longrightarrow\vec n^1\cos\delta-\vec n^2\sin\delta$, $\vec n^2\longrightarrow\vec n^1\sin\delta+\vec n^2\cos\delta$, where $\delta=\mathrm{const}$. Therefore, δ can be chosen such that $b_3=0$.

Note. The operators $R(\bar\psi(t))+C_1S^1$, $\tilde Z(\lambda(\tau))$ from $A^{\rm all}$ are induced by the operators $R(\vec l(t))$, $Z(\chi(t))$, respectively. Here

$$\chi(t)=\lambda(\tau(t)),\quad \vec l(t)=\psi^i(\tau(t))\vec n^i(t)+\varphi(t)\vec m(t),$$
$$\text{where}\quad 2\psi^i(\tau(t))(\vec n^i_t(t)\cdot\vec m(t))+\varphi(t)|\vec m(t)|^2=C_1.$$

The operator S^2 is not induced by operators from $A(\mathrm{MHD})$. Therefore, the Lie reduction of system (13) can give solutions that can not be obtained by reducing the MHDEs with two- and three-dimensional subalgebras of $A(\mathrm{MHD})$.

Consider inducing the operators from extension of $A^{\rm all}$. The operators I and $G^3\partial_{v^3}+v^3\partial_{G^3}$ are not induced by operators from $A(\mathrm{MHD})$.

The operator $\tilde J_{12}$ belong the maximal Lie invariance algebra of system (13) if $\beta^i=0$. In this case $\vec m=|\vec m|\vec e$, where $\vec e=\mathrm{const}$ and $|\vec e|=1$. Then, the operator $\tilde J_{12}$ is induced by $e_1J_{23}+e_2J_{31}+e_3J_{12}$.

For $\vec m=e^{\sigma t}(c_2\cos\theta,\ c_2\sin\theta,\ c_1)$ with $c_1,c_2,\sigma,\varkappa,\delta=\mathrm{const}$ and $\theta=\varkappa t+\delta$, where $c_1^2+c_2^2=1$, the operator $\partial_t+\varkappa J_{12}$ induces the operator $\partial_\tau-c_1\varkappa\tilde J_{12}+\sigma I$ if the following vector-functions $\vec n^i$ are chosen:

$$\vec n^1=\vec k^1\cos c_1\theta+\vec k^2\sin c_1\theta,\quad \vec n^2=-\vec k^1\sin c_1\theta+\vec k^2\cos c_1\theta,\qquad(14)$$

where $\vec k^1=(-\sin\theta,\cos\theta,0)$ and $\vec k^2=(c_1\cos\theta,c_1\sin\theta,-c_2)$.

For $\vec m=|t+\tilde\delta|^{\sigma+1/2}(c_2\cos\theta,\ c_2\sin\theta,\ c_1)$ with $\theta=\varkappa\ln|t+\tilde\delta|+\delta$ and $c_1,c_2,\sigma,\varkappa,\delta,\tilde\delta=\mathrm{const}$, where $c_1^2+c_2^2=1$, the operator $D+\tilde\delta\partial_t+\varkappa J_{12}$

induces the operator $\tilde D+\tilde\delta\partial_\tau-c_1\varkappa\tilde J_{12}+\sigma I$, if the vector-functions $\vec n^i$ are chosen in form (14).

[1] Popovych V.O. On classes of Lie solutions of MHD equations, expressed via the general solution of the heat equation // J. Nonlin. Math. Phys. – 1997. – **4**, № 1–2. – P. 149–151.

[2] Popovych V.O. On Lie reduction of the MHD equations to ordinary differential equations // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, July 7–13, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.1. – P. 227–231.

[3] Попович В.О. Редукція рівнянь магнітогідродинаміки до лінійних рівнянь переносу // Тези доп. V міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука, Київ, 16–19 травня 1996. – Київ: Нац. тех. Університет України (КПІ), 1996. – С. 350.

[4] Fushchych W.I., Popowych R.O. Symmetry reduction and exact solution of the Navier-Stokes equations // J. Nonlin. Math. Phys. – 1994. – **1**, № 1, 2. – P. 75–113, 158–188.

[5] Nucci M.C. Group analysis for MHD equations // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. – 1984. – **XXXIII**. – P. 21–34.

[6] Данилов Ю.А. Групповые свойства уравнений Максвелла и Навье-Стокса. – М., 1967. – 15 с. (Препринт / АН СССР, Ин-т атомной энергии им. Курчатова.)

[7] Бытев В.О. Групповые свойства уравнений Навье-Стокса // Численные методы механики сплошной среды. – **3**, ь 4. – Новосибирск: Вычислительный центр Сибирского отд. АН СССР, 1972. – С. 13–17.

[8] Lloyd S.P. The infinitesimal group of the Navier-Stokes equations // Acta Mech. – 1981. – **38**, № 1–2. – P. 85–98.

[9] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – New-York: Springer-Verlag, 1989.

[10] Ovsiannikov L.V. Group analysis of differential equations. – New-York: Academic Press, 1978.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 186–193

УДК 517.945:519.46

Про один клас узагальнених течій Бельтрамі ідеальної нестисливої рідини

Г.В. ПОПОВИЧ †, ***О.Ф. ВАСИЛЕНКО*** ‡

† *Інститут математики НАН України, Київ*
‡ *Приазовський державний технічний університет, Маріуполь*

Побудовано загальний розв'язок системи, що складається з рівнянь Ойлера (які описують рух ідеальної нестисливої рідини) і додаткової умови $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\vec{0}$.

The general solution of the system consisting of the Euler equations (describing motion of an ideal incompressible fluid) and the additional condition $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\vec{0}$ is constructed.

Загальний розв'язок в замкненому вигляді можна побудувати лише для небагатьох диференціальних рівнянь з частинними похідними. В зв'язку з цим розглядають, в основному, задачі пошуку часткових розв'язків, що задовольняють певні додаткові обмеження. За такі обмеження використовують як початково-крайові умови, так і додаткові диференціальні рівняння, які також називають диференціальними зв'язками. Обмеження другого типу застосовують і до класифікації всієї множини розв'язків заданого рівняння. Зокрема, течії рідини в гідродинаміці класифікують на основі умови безвихоровості поля швидкостей $\operatorname{rot}\vec{u}=\vec{0}$ (а саме, течії, для яких ця умова виконується, називаються безвихоровими, в протилежному випадку – вихоровими). В роботах [1–5] проведено дослідження рівнянь руху нестисливої рідини з деякими неліївськими додатковими умовами.

В розвиток роботи [5] розглянемо систему рівнянь Ойлера

$$\vec{u}_t+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+\nabla p=\vec{0},\quad \operatorname{div}\vec{u}=0, \tag{1}$$

що описує рух нестисливої ідеальної рідини, з додатковою умовою

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\vec{0}. \tag{2}$$

Так як за умови (2) $\operatorname{rot}\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\big)=-\operatorname{rot}\big(\vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{u}\big)=\vec{0}$, то клас течій, що розглядається, належить до узагальнених течій Бельтрамі [6].

Зауваження. Надалі маємо на увазі, що всі співвідношення виконуються локально в деякому околі фіксованої точки $(t_0,\vec{x}_0)$. Індекси a, b і c змінюються від 1 до 3, індекси i та j – від 1 до 2. За індексами, що повторюються, йде підсумовування. Нижній індекс функції означає диференціювання по відповідній змінній.

Теорема 1. *Довільний розв'язок системи (1)–(2) локально належить одній з наступних сімей:*

1. $\vec{u}=\vec{\varphi}(\Omega),\quad p=\chi(t),$

де $\Omega=\Omega(\vec{x})$ *задається неявно як розв'язок алгебраїчного рівняння*

$$\big(\vec{\varphi}(\Omega)\times\vec{\varphi}_\Omega(\Omega)\big)\cdot\vec{x}=\varphi^0(\Omega), \tag{3}$$

$\varphi^0=\varphi^0(\Omega)$ *– довільна диференційовна функція,*

$$\forall\vec{c}\ (\vec{c}=\mathrm{const}):\quad \big(\vec{\varphi}(\Omega)\times\vec{\varphi}_\Omega(\Omega)\big)\times\vec{c}\neq\vec{0}. \tag{4}$$

2. $\vec{u}=\big(\psi^i(\omega_3)+\zeta^i(t)\big)\vec{e}_i,\quad p=-\zeta^i_t(t)\omega_i+\chi(t).$

3. $\vec{u}=\big(\psi^3(\omega_1,\omega_2)+\zeta^3(t)\big)\vec{e}_3,\quad p=-\zeta^3_t(t)\omega_3+\chi(t).$

Тут ψ^a, ζ^a, χ *– довільні функції своїх аргументів,* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *– ортонормована трійка векторів,* $\omega_a=\vec{e}_a\cdot\vec{x}$.

4. $\vec{u}=-\vec{k}(t)\times\vec{c}\big(\vec{k}(t)\cdot\vec{x}\big)+\vec{l}(t),$

$p=\frac{1}{2}\big((\vec{k}(t)\times\vec{c},\vec{x})(\vec{k}(t)\cdot\vec{x})\big)_t-\vec{l}_t\cdot\vec{x}+\chi(t),$

де $\vec{c}=\mathrm{const}$, $|\vec{k}(t)|=1$, $\vec{k}(t)\cdot\vec{c}=0$, $\vec{l}(t)\cdot\vec{k}(t)=0$.

5. $u^1=R\cos\theta,\quad u^2=R\sin\theta,\quad u^3=R\varphi,\quad p=\chi(t),$

де $R=R(-x_1\sin\theta+x_2\cos\theta,\theta)$, $\varphi=\varphi(\theta)$, $\psi=\psi(\theta)$ *– довільні функції своїх аргументів,* $\theta=\theta(\vec{x})$ *– розв'язок рівняння*

$$x_1\big(\varphi\cos\theta-\varphi_\theta\sin\theta\big)+x_2\big(\varphi\sin\theta+\varphi_\theta\cos\theta\big)+x_3=\psi.$$

Доведення. Після виключення тиску p з (1) за допомогою операції rot систему (1)–(2) можна переписати в такому еквівалентному вигляді:

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\vec{0},\quad \operatorname{div}\vec{u}=0,\quad (\operatorname{rot}\vec{u})_t=\operatorname{rot}\vec{u}_t=\vec{0}. \tag{5}$$

Якщо розв'язок системи (5) відомий, то вираз для p легко знаходиться інтегруванням рівняння $\nabla p=-\vec{u}_t$.

Позначимо перший, другий і третій набори рівнянь в системі (5) через (5.a), (5.b) і (5.c) відповідно. Якщо розглянути (5.a) як систему лінійних рівнянь відносно $\vec{u}$ з матрицею (u^a_b), то отримаємо, що $\det(u^a_b)=0$, тобто $\operatorname{rank}(u^a_b)<3$. (Ранг матриці (u^a_b) називатимемо також рангом розв'язку системи (5)). Отже, можливі лише три наступні випадки:

$$\text{а) } \operatorname{rank}(u^a_b)=0; \quad \text{б) } \operatorname{rank}(u^a_b)=1; \quad \text{в) } \operatorname{rank}(u^a_b)=2.$$

Розглянемо кожен з цих випадків окремо.

$\mathbf{rank(}\boldsymbol{u^a_b}\mathbf{)=0}$, тобто $u^a_b=0$, а тому цей випадок вичерпується розв'язками сім'ї 4 з $\vec{c}=\vec{0}$, які є тривіальними, бо отримуються груповим розмноженням нульового розв'язку ($\vec{u}=\vec{0}$, $p=0$).

$\mathbf{rank(}\boldsymbol{u^a_b}\mathbf{)=1}$. Розглянемо спочатку розв'язки спеціального вигляду.

А. $\vec{u}=\vec{\varphi}(\tau,\omega)$, де $\tau=t$, $\omega=\vec{k}(t)\cdot\vec{x}$, $\vec{\varphi}_\omega\neq\vec{0}$, $\vec{k}=\vec{k}(t)\colon\ |\vec{k}|=1$.

З системи (5) випливає, що

$$\vec{k}\cdot\vec{\varphi}=0, \quad \vec{k}_t\times\vec{\varphi}_\omega+\vec{k}\times\vec{\varphi}_{\tau\omega}+\vec{k}\times\vec{\varphi}_{\omega\omega}(\vec{k}_t\cdot\vec{x})=\vec{0}.$$

Якщо $\vec{k}_t=\vec{0}$, то $\vec{\varphi}_{\tau\omega}=\vec{0}$, а тому після перепозначення $\vec{k}=:\vec{e}_3$ і врахування умови $\vec{k}\cdot\vec{\varphi}=0$ отримаємо розв'язок з сім'ї 2.

Якщо $\vec{k}_t\neq\vec{0}$, то $\vec{\varphi}_{\omega\omega}=\vec{0}$, тобто $\vec{\varphi}=\omega\vec{m}(t)+\vec{l}(t)$, причому $\vec{k}\cdot\vec{l}=0$, $\vec{k}\cdot\vec{m}=0$, $(\vec{k}\times\vec{m})_t=\vec{0}$, звідки $\vec{m}=-\vec{k}\times\vec{c}$, де $\vec{c}=\mathrm{const}$. Отже, в цьому випадку розв'язок належить сім'ї 4.

Б. $\vec{u}=\varphi(t,\vec{x})\vec{n}^3(t)$, де $\vec{n}^3=\vec{n}^3(t)\colon\ |\vec{n}^3|=1$, $\nabla\varphi\neq\vec{0}$.

З (5.a) випливає, що $(\vec{n}^3\cdot\nabla)\varphi=0$, тобто $\varphi=\varphi(\tau,\omega_1,\omega_2)$, де $\tau=t$, $\omega_i=\vec{n}^i\cdot\vec{x}$, вектор-функції $\vec{n}^i=\vec{n}^i(t)$ утворюють разом з $\vec{n}^3(t)$ праву ортонормовану трійку векторів, що залежить від t, причому $\vec{n}^1_t\cdot\vec{n}^2=0$ (вектор-функції $\vec{n}^i$, які задовольняють такі умови, існують [8]). Тоді система (5.b) є тотожністю, а рівняння (5.c) дають умову $(\vec{n}^3\times\nabla\varphi)_t=\vec{0}$, звідки $(\vec{n}^1\varphi_{\omega_2}-\vec{n}^2\varphi_{\omega_1})_t=\vec{0}$. Враховуючи, що за побудовою вектори $\vec{n}^i_t$ колінеарні $\vec{n}^3$, а вектори $\vec{n}^a$ лінійно незалежні, розщепимо в останньому рівнянні по $\omega_3=\vec{n}^3\cdot\vec{x}$ і прирівняємо коефіцієнти при $\vec{n}^a$ до нуля:

$$\varphi_{\tau\omega_i}=0, \quad (\vec{n}^2_t\cdot\vec{n}^3)\varphi_{\omega_1}-(\vec{n}^1_t\cdot\vec{n}^3)\varphi_{\omega_2}=0, \quad ((\vec{n}^i_t\cdot\vec{n}^3)\varphi_{\omega_i})_{\omega_j}=0.$$

(Підсумовування по i тут немає.)

Якщо $\vec{n}^i_t\cdot\vec{n}^3=0$, то $\vec{n}^a=:\vec{e}_a=\mathrm{const}$, а тому розв'язок належить сім'ї 3.

Якщо $(\vec{n}^1_t\cdot\vec{n}^3,\vec{n}^2_t\cdot\vec{n}^3)\neq(0,0)$, то похідні φ_{ω_i} залежать лише від t, тобто функція φ лінійна по $\vec{x}$. Отже, $\vec{u}$ має вигляд А.

В. $\vec{u}=\vec{\varphi}(\Omega)$, де $\vec{\varphi}\times\vec{\varphi}_\Omega\neq\vec{0}$, $\Omega=\Omega(\vec{x}):\nabla\Omega\neq\vec{0}$.

Рівняння (5.c) є тотожністю, а (5.a) і (5.b) дають систему з двох рівнянь на функцію $\Omega:\vec{\varphi}\cdot\nabla\Omega=0$, $\vec{\varphi}_\Omega\cdot\nabla\Omega=0$, інтегруючи яку, отримаємо умову (3). Щоб уникнути розв'язків вигляду А, додатково вимагатимемо виконання співвідношення (4). В результаті знайдемо розв'язок з сім'ї 1.

Покажемо, що довільний розв'язок рангу 1 системи (5) має один з виглядів А–В. В силу симетрії системи (5) відносно переставлення змінних без обмеження загальності можна вважати, що $\nabla u^3\neq\vec{0}$, звідки $\exists F^i=F^i(\tau,u^3)$, $\tau=t:u^i=F^i(\tau,u^3)$. Якщо $F^i=0$, то очевидно, що розв'язок має вигляд Б. Нехай надалі $(F^1,F^2)\neq(0,0)$.

1. Припустимо додатково, що $u^3_3=0$. З (5.a) і (5.b) випливає, що похідні u^3_i ($(u^3_1,u^3_2)\neq(0,0)$) задовольняють однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь $F^iu^3_i=0$, $F^i_{u^3}u^3_i=0$, а тому визначник цієї системи дорівнює 0: $F^1_{u^3}F^2-F^1F^2_{u^3}=0$. Отже, функції F^i пропорційні деяким функціям $\gamma^i=\gamma^i(t)$ з коефіцієнтом пропорційності, не рівним 0, причому $(\gamma^1,\gamma^2)\neq(0,0)$. За цієї умови система на u^3_i зводиться до одного рівняння $\gamma^iu^3_i=0$, а це означає, що $\vec{u}$ має вигляд А.

2. Нехай $u^3_3\neq0$, $F^1_{u^3}F^2-F^1F^2_{u^3}=0$. З (5.a) і (5.b) отримаємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь на похідні u^3_a :

$$F^iu^3_i+u^3u^3_3=0, \quad F^i_{u^3}u^3_i+u^3_3=0.$$

За теоремою Кронекера-Капеллі з сумісності цієї системи відносно u^3_i випливає, що $u^3F^i_{u^3}=F^i$, тобто $\exists\gamma^i=\gamma^i(t):F^i=\gamma^iu^3$. Отже, розв'язок має вигляд Б.

3. Нехай $u^3_3\neq0$, $\delta=F^1_{u^3}F^2-F^1F^2_{u^3}\neq0$. Виконаємо в системі (5) заміну годографа:

$$\begin{aligned}&\tau=t,\ y_1=x_1,\ y_2=x_2,\ y_3=u^3 && \text{— нові незалежні змінні;}\\ &F^i=F^i(\tau,y_3),\ v=x_3 && \text{— нові невідомі функції.}\end{aligned}$$

Після цієї заміни і алгебраїчних перетворень рівняння (5.a) і (5.b) набувають вигляду $F^i v_i = y_3$, $F^i_3 v_i = 1$, звідки $v_i = G^i(\tau, y_3)$, де $G^1 = \delta^{-1}(F^2 - F^2_3 y_3)$, $G^2 = -\delta^{-1}(F^1 - F^1_3 y_3)$, а тому $v = G^i y_3 + G^0$ для деякої диференційовної функції $G^0 = G^0(\tau, y_3)$, причому

$$F^i G^i = y_3, \quad F^i_3 G^i = 1, \quad F^i G^i_3 = 0, \tag{6}$$

$$(G^1 + F^1_3, G^2 + F^2_3) \neq (0,0) \quad (\text{інакше} \quad F^i_3 G^i = -F^i_3 F^i_3 \neq 1), \tag{7}$$

$$G^1 G^2_3 - G^2 G^1_3 = -F^i_3 G^i_3 \delta^{-1} y_3 \neq 0, \tag{8}$$

$$G^1_3 G^2_{33} - G^2_3 G^1_{33} = -(G^1_3/F^2)^2 \delta \neq 0. \tag{9}$$

Якщо $G^1_3 \neq 0$, $G^2_3 = 0$ або $G^1_3 = 0$, $G^2_3 \neq 0$, то з останнього рівняння в (6) випливає $F^1 = 0$ або $F^2 = 0$ відповідно, а тому $\delta = 0$, що неможливо. Якщо $G^i_3 = 0$, то після повернення до старих змінних отримаємо розв'язок вигляду A.

Нехай надалі $G^1_3 G^2_3 \neq 0$. Підставимо вираз для функції v в систему (5.c), записану в нових змінних:

$$(v^3 \partial_\tau - v_\tau \partial_3)\big((G^i + F^i_3)/v^3\big) = 0, \tag{10}$$

$$(G^1 + F^1_3)(v^3 G^2_\tau - v_\tau G^2_3) = (G^2 + F^2_3)(v^3 G^1_\tau - v_\tau G^1_3). \tag{11}$$

Випишемо коефіцієнт при y_i в рівнянні (11):

$$(G^i + F^i_3)(G^1_3 G^2_\tau - G^1_\tau G^2_3) = 0,$$

звідки в силу (7) $G^1_3 G^2_\tau - G^1_\tau G^2_3 = 0$, тобто $\exists \Theta = \Theta(t, y_3) : G^i = G^i(\Theta)$, причому $\Theta_3 \neq 0$, $G^i_\Theta \neq 0$. Враховуючи (8), розв'яжемо систему з першого і останнього рівнянь в (6) відносно F^i: $F^i = y_3 L^i(\Theta)$, де $L^1 = G^2_\Theta \tilde{\delta}^{-1}$, $L^2 = -G^1_\Theta \tilde{\delta}^{-1}$, $\tilde{\delta} = G^1 G^2_\Theta - G^2 G^1_\Theta$.

Підставимо вирази для фукцій F^i та G^i в рівняння (10) і надамо змінним y_1, y_2 почергово значення ∞, 0 і 0, ∞:

$$(G^i + L^i)(\Theta_\tau/\Theta_3)_3 + L^i_\Theta \Theta_\tau = 0,$$

звідки $\Theta_\tau = 0$, бо визначник

$$\begin{vmatrix} G^1 + L^1 & L^1_\Theta \\ G^2 + L^2 & L^2_\Theta \end{vmatrix} = -\frac{\delta}{\Theta_3 y_3^2}(G^i G^i + 1) \neq 0.$$

Отже, $F^i_\tau = 0$, $G^i_\tau = 0$. За цих умов наслідком рівняння (10) є також співвідношення $(G^i + F^i_3)(G^1_3 G^2_{33} - G^2_3 G^1_{33}) G^0_\tau = 0$. Тому в силу (7) і (9) $G^0_\tau = 0$, тобто розв'язок має вигляд B.

rank(u^a_b) = 2. В силу симетрії системи (5) відносно поворотів $(\vec{x}, \vec{u})$ без обмеження загальності можна вважати, що $\operatorname{rank}(u^i_b) = 2$, а тому існує така функція F, що $u^3 = F(t, u^1, u^2)$.

1. Припустимо додатково, що $\det(u^i_j) = 0$. Розглянемо два перших рівняння системи (5.a) як систему лінійних неоднорідних рівнянь відносно u^1 і u^2. За теоремою Кронекера–Капеллі $u^3 = 0$ (інакше $\operatorname{rank}(u^i_b) < 2$), а тому з (5.a) і (5.b) випливає, що $\exists f = f(t, x_3)$: $u^2 = f u^1$, звідки $u^1 = g(\tau, \omega_1, \omega_2)$, де $\tau = t$, $\omega_1 = x_2 - f x_1$, $\omega_2 = x_3$. Підставимо вирази для u^a в (5.c) і розщепимо по x_1. Враховуючи умови $f_{\omega_2} \neq 0$, $g_{\omega_1} \neq 0$ (інакше $\operatorname{rank}(u^i_b) < 2$), отримаємо $f_\tau = g_\tau = 0$. Отже, в цьому випадку маємо розв'язок сім'ї 5, де $\varphi = 0$, $f = \operatorname{tg}\theta$, $g = R\cos\theta$.

2. Нехай $\det(u^i_j) \neq 0$. Виконаємо в системі (5) заміну годографа:

$$\tau = t,\ y_1 = u^1,\ y_2 = u^2,\ y_3 = x_3 \quad \text{— нові незалежні змінні;}$$

$$v^1 = x_1,\ v^2 = x_2,\ F = F(\tau, y_1, y_2) \quad \text{— нові невідомі функції.}$$

Після цієї заміни і алгебраїчних перетворень рівняння (5.a) набувають вигляду $F v^i_3 = y_i$, звідки $F \neq 0$ і $\exists g^i = g^i(\tau, y_1, y_2)$: $v^i = y_i y_3/F + g^i$. Підставимо вирази для v^i в (5.b) і розщепимо по y_3:

$$y_i F_i = F, \quad y_i (F_i g^i)_j = 0. \tag{12}$$

Перейдемо в площині змінних y_1 і y_2 до полярних координат r і θ: $y_1 = r\cos\theta$, $y_2 = r\sin\theta$. Введемо позначення:

$$h^1 = g^1\cos\theta + g^2\sin\theta, \quad h^2 = -g^1\sin\theta + g^2\cos\theta$$

($h^i = h^i(\tau, r, \theta)$) і проінтегруємо рівняння (12):

$$F = r\varphi, \quad h^1 = -\frac{\varphi_\theta}{\varphi} h^2 + \zeta, \quad \text{де} \quad \varphi = \varphi(\tau, \theta) \neq 0, \quad \zeta = \zeta(\tau, \theta).$$

В результаті вирази для v^i можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} v^1 &= (\varphi y_3 - h^2\varphi_\theta/\varphi + \zeta)\cos\theta - h^2\sin\theta, \\ v^2 &= (\varphi y_3 - h^2\varphi_\theta/\varphi + \zeta)\sin\theta + h^2\cos\theta. \end{aligned} \tag{13}$$

Підставимо (13) в (5.c) і розщепимо по y_3. Наслідком рівнянь при третьому степені y_3 є співвідношення $\varphi_\tau \delta_r = 0$, де

$$\delta = r(v^1_1 v^2_2 - v^1_2 v^2_1) = h^1_r(h^2_\theta + h^1) - h^2_r(h^1_\theta - h^2) \neq 0.$$

Якщо припустити, що $\varphi_\tau \neq 0$, то $\delta_r = 0$. Рівняння при другому степені y_3 дають умову $rh_{rr}^2 + 2h^2 = 0$, яка суперечить тому, що $\delta_r = 0$. Отже, $\varphi_\tau = 0$, тобто $\varphi = \varphi(\theta)$, і наслідком рівнянь при другому степені y_3 є співвідношення $\zeta_\tau \delta_r = 0$.

Якщо припустити, що $\zeta_\tau \neq 0$, то $\delta_r = 0$. Рівняння при першому степені y_3 дають умову $rh_{rr}^2 + 2h^2 = 0$, яка суперечить тому, що $\delta_r = 0$. Отже, $\zeta_\tau = 0$, тобто $\zeta = \zeta(\theta)$, і наслідком рівнянь при першому степені y_3 є співвідношення $h_r^2 h_\tau^2 = 0$, звідки $h_\tau^2 = 0$, бо $h_r^2 \neq 0$ (інакше $\delta = 0$). Повернувшись до старих координат, отримаємо розв'язок з сім'ї 5, де $\psi := \varphi\zeta$. Теорема доведена. ■

Теорема 2. *Максимальною (в сенсі Лі) алгеброю інваріантності системи (1)–(2) є алгебра A^1, що породжується операторами*

$$\begin{aligned} &\partial_a,\ D = x_a\partial_a + u^a\partial_{u^a} + 2p\partial_p,\ X(\xi) = \xi(t)\partial_t - \xi_t(t)\partial_p, \\ &J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + u^a\partial_{u^b} - u^b\partial_{u^a},\ Z(\chi) = \chi(t)\partial_p. \end{aligned} \tag{14}$$

Тут ξ та χ – довільні гладкі функції змінної t.

Доведення. Система (1)–(2) перевизначена, і приведення її в інволюцію є окремою складною задачею. Тому для знаходження її максимальної алгебри інваріантності скористаємося алгоритмом, запропонованим в [7]. А саме, запишемо інфінітезимальну умову ліївської інваріантності системи (1)–(2) відносно оператора

$$Q = \xi^0\partial_t + \xi^a\partial_{x_a} + \eta^a\partial_{u_a} + \eta^0\partial_p,$$

де ξ^0, ξ^a, η^a, η^0 залежать від t, $\vec{x}$, $\vec{u}$, p, і перейдемо в ній на множину розв'язків 2 з теореми 1. Користуючись довільністю функцій ψ^i, ζ^i і χ, в одержаній таким чином необхідній умові інваріантності розщепимо за параметрами ψ^i_ω, ζ^i_t, ζ^i_{tt} і χ_t. Після спрощення отримаємо систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q:

$$\xi^0_{u^b} = \xi^0_p = \xi^0_b = 0, \quad \xi^a_{u^b} = \xi^a_p = \xi^a_t = 0, \quad \eta^0_{u^b} = \eta^0_b = 0, \tag{15}$$

$$\xi^a_{bc} = 0, \quad \eta^a = u^b\xi^a_b, \tag{16}$$

$$\eta^a_{u^b} + \xi^b_a = (\xi^0_t + \eta^0_p)\delta_{ab}, \tag{17}$$

де δ_{ab} – символ Кронекера. З (15) і (16) випливає, що $\xi^0 = \xi^0(t)$, $\eta^0 = \eta^0(t,p)$ і $\exists\, M_{ab}, N_a = \mathrm{const}$: $\xi^a = M_{ab}x_b + N_a$, $\eta^a = M_{ab}u_b$. В силу (17)

$$M_{ab} + M_{ba} = 0,\ a \neq b, \quad M_{11} = M_{22} = M_{33}, \quad \eta^0_p = -\xi^0_t + 2M_{11}.$$

Отже, алгебра A^1 міститься в лінійній оболонці операторів (14). Легко перевірити, що зворотнє включення також вірне (бо система (5) інваріантна відносно скінченних перетворень, які генеруються цими операторами). Теорема доведена. ■

Отже, алгебра A^1 містить клас операторів $X(\xi)$, що не належать максимальній (в сенсі Лі) алгебрі інваріантності $A(EE)$ рівнянь Ойлера (1), тобто рівняння (1) умовно інваріантні відносно операторів $X(\xi)$ при додатковій умові (2).

[1] Попович Р.О. Про загальний розв'язок рівнянь Нав'є-Стокса з додатковою умовою // Доп. АН України. – 1992. – № 4. – С. 21–24.

[2] Попович Р.О. Про загальний розв'язок та симетрію рівнянь Нав'є-Стокса з додатковою умовою $(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = \vec{0}$ // Тези доп. міжнар. конф., присвяченої пам'яті акад. М.П. Кравчука, Київ, 22–26 вересня 1992. – Київ: Ін-т математики АН України, 1992. – С. 163.

[3] Попович Г.В. Загальний розв'язок рівнянь Ойлера з додатковою умовою $u^1_1 = u^3 = 0$ // Доп. НАН України. – 1996. – ь 9. – С. 39–43.

[4] Popovych H. Generalization of translation flows of an ideal incompressible fluid: a modification of the "ansatz" method // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, July 7–13, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.1. – P. 222–226.

[5] Попович Г.В., Василенко О.Ф. Про один клас узагальнених течій Бельтрамі ідеальної нестисливої рідини // Матеріали Шостої міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, Київ, 15–17 травня 1997. – Київ: НТУУ (КПІ), 1997. – С. 320.

[6] Wang C.Y. Exact solutions of the Navier-Stokes equations – the generalized Beltrami flows, review and extention // Acta Mech. – 1990. – **81**, № 1–2. – P. 69–74.

[7] Попович Р.О. Симетрійна редукція і точні розв'язки рівнянь Нав'є-Стокса: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1992. – 141 с. – Машинопис.

[8] Fushchych W.I., Popowych R.O. Symmetry reduction and exact solution of the Navier-Stokes equations // J. Nonlin. Math. Phys. – 1994. – **1**, № 1, 2. – P. 75–113, 158–188.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 194–199

УДК 517.945:519.46

Про клас Q-умовних симетрій та розв'язки еволюційних рівнянь

Р.О. ПОПОВИЧ

Інститут математики НАН України, Київ
E-mail: roman@apmat.freenet.kiev.ua

Доведено, що для довільного еволюційного рівняння з n просторовими змінними ($n\in\mathbb{N}$) задача дослідження Q-умовної симетрії відносно інволютивних множин n операторів з нульовими коефіцієнтами при ∂_t зводиться до розв'язання цього рівняння, а довільна однопараметрична сім'я його розв'язків інваріантна відносно однієї з таких множин.

It is proved that, for an arbitrary evolutionary equation in n space variables ($n\in\mathbb{N}$), the problem of investigating Q-conditional symmetry under the involutive sets of n operators with the vanishing coefficients of ∂_t is reduced to solving this equation. And, an arbitrary one-parameter family of its solutions is invariant under one from such sets.

Незважаючи на плідні застосування Q-умовних (некласичних) симетрій для побудови точних розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними, багато аспектів їх теорії до цього часу залишаються нез'ясованими. В роботах [1–3] було показано, що для одновимірного лінійного рівняння теплопровідності та деякого його узагальнення задача відшукання Q-умовного оператора з нульовим коефіцієнтом при ∂_t композицією нелокального перетворення і перетворення годографа зводиться до розв'язання вихідного рівняння. Р. Жданов і В. Лагно [4] узагальнили цей результат на довільне еволюційне рівняння з однією просторовою змінною. В даній роботі доведено аналог цього результату для еволюційних рівнянь з довільною кількістю $n\in\mathbb{N}$ просторових змінних, а також обернену теорему про зв'язок однопараметричних сімей розв'язків цих рівнянь з їх Q-умовними симетріями.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$u_t = H(t,\vec{x},u_{(r)}), \quad \vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n), \tag{1}$$

відносно функції $u=u(t,\vec{x})$, де через $u_{(r)}$ позначено множину всіх похідних функції u по просторових змінних $\vec{x}$ від 0-го до r-го порядку включно, $u_t=\partial u/\partial t$. Щоб редукувати рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння, необхідно знайти інволютивну множину з n операторів

$$Q^a=\xi^{a0}(t,\vec{x},u)\partial_t+\xi^{ab}(t,\vec{x},u)\partial_b+\eta^a(t,\vec{x},u)\partial_u, \tag{2}$$

де $\mathrm{rank}(\xi^{a0},\xi^{ab})=n$, відносно якої рівняння (1) Q-умовно інваріантне. (Тут і надалі $\partial_b=\partial/\partial_{x_b}$, індекси a і b змінюються від 1 до n, за індексами, що повторюються, йде підсумовування.) При цьому, як правило, виникає необхідність розглядати два випадки: $\exists a$: $\xi^{a0}\neq 0$ або $\forall a$: $\xi^{a0}=0$. Предметом нашого дослідження буде другий випадок.

Теорема 1. *Задача повного дослідження Q-умовної інваріантності рівняння (1) відносно інволютивних множин з n операторів (2), де $\xi^{a0}=0$, зводиться до розв'язання вихідного рівняння.*

Доведення. Нехай в (2) $\xi^{a0}=0$. Для інволютивних множин операторів Q-умовної симетрії можна ввести відношення еквівалентності [5, 6]:

$$\{\widehat{Q}^a\}\sim\{Q^a\}, \quad \text{якщо} \quad \widehat{Q}^a=\lambda^{ab}Q^b,$$

де $\lambda^{ab}=\lambda^{ab}(t,\vec{x},u)$, $\det(\lambda^{ab})\neq 0$. Якщо покласти $(\lambda^{ab})=(\xi^{ab})^{-1}$, то отримаємо еквівалентну $\{Q^a\}$ множину операторів $\{\widehat{Q}^a\}$ з $\widehat{\xi}^{ab}=\delta^{ab}$ (δ^{ab} – символ Кронекера). Тому одразу будемо вважати, що

$$Q^a=\partial_a+\eta^a(t,\vec{x},u)\partial_u. \tag{3}$$

Умова інволютивності множини операторів (3) співпадає з умовою їх комутування, яка рівносильна таким рівнянням на функції η^a:

$$\eta^a_b+\eta^b\eta^a_u=\eta^b_a+\eta^a\eta^b_u. \tag{4}$$

Лема 1. *Функції η^a задовольняють систему (4) тоді і тільки тоді, коли існує така функція $\Phi=\Phi(t,\vec{x},u)$ ($\Phi_u\neq 0$), що*

$$\eta^a=-\Phi_a/\Phi_u. \tag{5}$$

Доведення. Достатність зображення (5) для розв'язків системи (4) очевидна. Доведення необхідності проведемо індукцією по k – кількості операторів. Для $k=1$ за шукану функцію візьмемо довільний розв'язок рівняння $\Phi_1+\eta^1\Phi_u=0$ з $\Phi_u\neq 0$.

Припустимо, що твердження леми справедливе для k операторів, тобто

$$\exists\Phi=\Phi(t,\vec{x},u)\ (\Phi_u\neq 0):\quad \eta^i=-\frac{\Phi_i}{\Phi_u},\quad i=\overline{1,k}.$$

Випишемо з системи (4) рівняння, в яких $a=k+1$, $b=i$, $i=\overline{1,k}$:

$$\eta^{k+1}_i-\frac{\Phi_i}{\Phi_u}\eta^{k+1}_u=-\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_u}\right)_{k+1}-\left(\frac{\Phi_i}{\Phi_u}\right)_u\eta^{k+1},\quad i=\overline{1,k}. \tag{6}$$

Якщо в (6) виконати заміну змінних

$$\eta^{k+1}=-\frac{\Phi_{k+1}}{\Phi_u}+\frac{\Psi(\tau,\vec{y},\varkappa)}{\Phi_u},\quad \tau=t,\quad \vec{y}=\vec{x},\quad \varkappa=\Phi(t,\vec{x},u),$$

то на функцію Ψ отримаємо рівняння $\Psi_{y_i}=0$, $i=\overline{1,k}$, тобто $\Psi=\Psi(t,x_{k+1},\dots,x_n,\Phi)$. Нехай функція $\widetilde{\Phi}=\widetilde{\Phi}(t,\vec{x},u)$ визначається співвідношенням $\Phi=\Theta(t,x_{k+1},\dots,x_n,\widetilde{\Phi})$, де Θ – розв'язок рівняння $\Theta_{k+1}=\Psi(t,x_{k+1},\dots,x_n,\Theta)$. (Така функція Θ існує як розв'язок звичайного диференціального рівняння з параметрами $t,x_{k+2},\dots,x_n$; функція $\widetilde{\Phi}$ підставляється замість сталої інтегрування, $\Theta_{\widetilde{\Phi}}\neq 0$.) Тоді

$$\eta^i=-\frac{\Theta_{\widetilde{\Phi}}\widetilde{\Phi}_i}{\Theta_{\widetilde{\Phi}}\widetilde{\Phi}_u}=-\frac{\widetilde{\Phi}_i}{\widetilde{\Phi}_u},\quad i=\overline{1,k},$$

$$\eta^{k+1}=-\frac{\Theta_{\widetilde{\Phi}}\widetilde{\Phi}_{k+1}+\Theta_{k+1}}{\Theta_{\widetilde{\Phi}}\widetilde{\Phi}_u}+\frac{\Psi}{\Theta_{\widetilde{\Phi}}\widetilde{\Phi}_u}=-\frac{\widetilde{\Phi}_{k+1}}{\widetilde{\Phi}_u},$$

причому $\widetilde{\Phi}_u=\Phi_u/\Theta_{\widetilde{\Phi}}\neq 0$, тобто $\widetilde{\Phi}$ – шукана функція.

Доведення леми 1 завершено. ■

За означенням, рівняння (1) Q-умовно інваріантне відносно множини операторів (2), якщо

$$Q^a_{(r)}\big(u_t-H(t,\vec{x},u_{(r)})\big)\Big|_{u_t=H(t,\vec{x},u_{(r)}),\ \mathcal{M}}=0, \tag{7}$$

де $Q^a_{(r)}$ – r-е продовження оператора Q^a, а $\mathcal{M}$ – множина всіх диференціальних наслідків системи $Q^a[u]:=\eta^a-\xi^{a0}u_t-\xi^{ab}u_b=0$ до порядку $r-1$ включно. Для операторів (3) умова (7) має вигляд

$$\eta^a_t+\eta^a_u\widehat{H}=Q^a\widehat{H},\qquad \text{де}\qquad \widehat{H}=\widehat{H}(t,\vec{x},u)=H\big|_{\mathcal{M}}, \tag{8}$$

бо $\mathcal{M}=\left\{\dfrac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=(Q^1)^{\alpha_1}\ldots(Q^n)^{\alpha_n}u,\ \middle|\ \begin{array}{l}\alpha_a\in\mathbb{N},\\ \alpha_1+\ldots+\alpha_n\leq r\end{array}\right\}$.

Підкреслимо, що в (8) і нижче оператори Q^a діють в просторі змінних $(t,\vec{x},u)$, а тому $Q^a u=\eta^a$, $Q^aQ^bu=\eta^a_b+\eta^b\eta^a_u$ і т.д.

Скористаємося зображенням (5) для функцій η^a, після чого виконаємо перетворення годографа:

$$\begin{array}{l}\tau=t,\quad \vec{y}=\vec{x},\quad \varkappa=\Phi\quad - \quad \text{нові незалежні змінні};\\ v=u\quad - \quad \text{нова залежна змінна, тобто}\quad v=v(t,\vec{x},u).\end{array} \tag{9}$$

(Зауважимо, що співвідношеннями (5) функція Φ визначається з точністю до перетворення $\Phi=\zeta(\tau,\widetilde{\Phi})$, яке в нових змінних має вигляд

$$\tau=\widetilde{\tau},\quad \vec{y}=\widetilde{\vec{y}},\quad \varkappa=\zeta(\widetilde{\tau},\widetilde{\varkappa}),\quad v=\widetilde{v}. \tag{10}$$

Тут ζ – довільна гладка функція своїх аргументів.) Тоді $\eta^a=v_{y_a}$, $Q^a=\partial_{y_a}$, і умова (8) набуває вигляду

$$v_{\tau y_a}-\frac{v_{\varkappa y_a}}{v_\varkappa}v_\tau-\frac{v_{\varkappa y_a}}{v_\varkappa}\widehat{H}=\mathcal{D}_{y_a}\widehat{H}, \tag{11}$$

де $\widehat{H}=\widetilde{H}(\tau,\vec{y}\,):=H(\tau,\vec{y},v_{(r)}(\tau,\vec{y},))$, $\mathcal{D}_{y_a}$ – оператор повного диференціювання по y_a. З (11) випливає, що

$$\Big(\mathcal{D}_{y_a}-\frac{v_{\varkappa y_a}}{v_\varkappa}\Big)(v_\tau-\widehat{H})=0,\quad \text{або}\quad \mathcal{D}_{y_a}\frac{v_\tau-\widehat{H}}{v_\varkappa}=0, \tag{12}$$

тобто

$$v_\tau-H(\tau,\vec{y},v_{(r)})=\gamma(\tau,\varkappa)v_\varkappa, \tag{13}$$

де $\gamma=\gamma(\tau,\varkappa)$ – деяка гладка функція. Виконавши в рівнянні (13) заміну змінних (10), де $\zeta=\zeta(\widetilde{\tau},\widetilde{\varkappa})$ – деякий розв'язок рівняння $\zeta_{\widetilde{\tau}}+\gamma(\widetilde{\tau},\zeta)=0$, отримаємо рівняння того ж типу з $\widetilde{\gamma}=0$, яке співпадає з вихідним рівнянням. Змінна $\varkappa$ входить в розв'язок рівняння як параметр. Доведення теореми 1 завершено. ■

Обернення доведення теореми 1 дає наступне твердження.

Теорема 2. *Для будь-якої однопараметричної сім'ї розв'язків рівняння (1) існує інволютивна множина операторів (3) Q-умовної симетрії рівняння (1), відносно якої дана сім'я розв'язків інваріантна.*

Доведення. Нехай

$$u = v(\tau, \vec{y}, \varkappa), \quad \text{де} \quad v_\varkappa \neq 0, \quad \tau = t, \quad \vec{y} = \vec{x}, \tag{14}$$

– однопараметрична сім'я розв'язків рівняння (1). Розв'яжемо (14) як рівняння відносно $\varkappa$: $\varkappa = \Phi(t, \vec{x}, u)$ – і визначимо функції η^a за допомогою формул (5). Тоді в силу леми 1 оператори (3) утворюють інволютивну множину. Так як за визначеннями $v_{y_a} = \Phi_{x_a}/\Phi_u = \eta^a$, то $Q^a[v] = 0$, тобто розв'язок (14) інваріантний відносно множини операторів (3). Залишилося довести, що рівняння (1) Q-умовно інваріантне відносно цієї множини операторів.

Підставимо розв'язок (14) в (1) і подіємо на результат операторами $\mathcal{D}_{y_a} - v_{\varkappa y_a}/v_\varkappa$. Отримані таким чином рівняння співпадають з (11). Виконавши в них перетворення годографа, зворотнє до (9) (тобто, $t = \tau$, $\vec{x} = \vec{y}$, $u = v$ – нові незалежні змінні; $\Phi = \varkappa$ – нова залежна змінна), і враховуючи (5), приходимо до рівняння (8), яке еквівалентне умові інваріантності (7).

Доведення теореми 2 завершено. ■

Зауваження 1. Анзац, побудований за множиною операторів (3), де функції η^a визначаються формулами (5), має вигляд

$$\Phi(t, \vec{x}, u) = \varphi(\omega), \quad \text{або} \quad u = v(t, \vec{x}, \varphi(\omega)), \quad \text{де} \quad \omega = t.$$

Після підстановки його в рівняння (1) отримаємо редуковане рівняння $\varphi' = \gamma(\omega, \varphi)$, в якому функція $\gamma = \gamma(\omega, \varphi)$ знаходиться із співвідношення

$$\gamma = -\Phi_t - \Phi_u \widehat{H} = \frac{v_t - H(t, \vec{x}, v_{(r)})}{v_\varphi}$$

(в силу рівняння (12) $\mathcal{D}_{y_a}\gamma = 0$).

Якщо функція Φ ($\Leftrightarrow v$) задає однопараметричну сім'ю розв'язків $\Phi(t, \vec{x}, u) = \varkappa$ ($\Leftrightarrow u = v(\tau, \vec{y}, \varkappa)$) рівняння (1), то редуковане рівняння має вигляд $\varphi' = 0$, тобто $\varphi = \mathrm{const}$.

Теореми 1 і 2 можна об'єднати в одне твердження.

Теорема 3. *Для довільного еволюційного рівняння (1) існує взаємно-однозначна відповідність між однопараметричними сім'ями його розв'язків і інволютивними множинами операторів (3) Q-умовної симетрії цього рівняння. А саме, кожній сім'ї розв'язків можна поставити у відповідність множину операторів (3), відносно якої дана сім'я розв'язків інваріантна. Задачі побудови всіх однопараметричних сімей розв'язків рівняння (1) та повного дослідження його Q-умовної інваріантності відносно інволютивних множин з n операторів вигляду (3) повністю еквівалентні.*

Р. Попович висловлює подяку ДФФД України (проект № 1.4/356) за часткову фінансову підтримку цієї роботи.

[1] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I., and Popowych R.O., Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Dopov. Acad. Sci. Ukraine. – 1992. – № 12. – P. 27–32.

[2] Попович Р.О. Про симетрію та точні розв'язки одного рівняння переносу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 121–125.

[3] Popovych R.O. On reduction and Q-conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, July 7–13, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.2. – P. 437–443.

[4] Zhdanov R.Z. and Lahno V.I., Conditional symmetries of the (1+1)-dimensional Boussinesq equation: a no-go theorem // Цей зб. – С. 88–99

[5] Bluman G.W. and Cole J.D. The general similarity solutions of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**, № 11. – P. 1025–1042.

[6] Жданов Р.З., Цифра І.М. Редукція диференціальних рівнянь і умовна симетрія // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 595–602.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 200–211

УДК 517.945:519.46

Про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного рівняння теплопровідності

Р.О. ПОПОВИЧ †, ***І.П. КОРНЄВА*** ‡

† *Інститут математики НАН України, Київ*
E-mail: roman@apmat.freenet.kiev.ua

‡ *Приазовський державний технічний університет, Маріуполь*
E-mail: 000024@astu.donetsk.ua

Описано оператори Q-умовної симетрії лінійного n-вимірного $(n \geq 2)$ однорідного рівняння теплопровідності. Введено поняття еквівалентності операторів Q-умовної симетрії відносно групи перетворень. Отримано деякі результати стосовно рівнянь теплопровідності з джерелом.

The Q-conditional symmetry operators of the linear n-dimensional $(n \geq 2)$ homogeneous heat equation are described. The notion of the equivalence of Q-conditional symmetry operators under a transformation group is introduced. Some results for heat equations with source are obtained.

1. Вступ. В теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними чільне місце займають рівняння, які мають просту структуру і яким водночас притаманні нетривіальні математичні, зокрема, симетрійні властивості. Як правило, такі рівняння плідно використовуються для математичного моделювання об'єктів, явищ і процесів в різних наукових галузях, і саме вони стимулюють виникнення та розвиток нових понять і методів теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Одним з таких рівнянь є лінійне рівняння теплопровідності. Його симетрійні властивості досліджував ще С. Лі. В 1969 році Блумен і Коул [1] саме на прикладі лінійного одновимірного рівняння теплопровідності ввели поняття і продемонстрували алгоритм знаходження Q-умовної (або, в їхній термінології, некласичної) симетрії диференціального рівняння з частинними похідними відносно одного оператора. Надалі задача досліження Q-умовної симетрії лінійного одновимірного рівняння теплопровідності розглядалася багатьма авторами. Зокрема, в [2] в одному з випадків, що виникають, для частини

системи визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q-умовної інваріантності вивчена ліївська симетрія та знайдені нелокальні перетворення, що зв'язують досліджувану систему з рівнянням Бюргерса та рівнянням теплопровідності з джерелом. Повне (в певному сенсі) розв'язання задачі про Q-умовну інваріантность лінійного одновимірного рівняння теплопровідності дано в [3] (див. також [4, 5]). А саме, в обох випадках, що виникають, знайдена ліївська симетрія систем визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q-умовної інваріантності і нелокальні перетворення, що зводять ці системи до вихідного рівняння.

В даній роботі вперше розв'язана задача про Q-умовну симетрію лінійного n-вимірного $(n \geq 2)$ однорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{aa}, \quad \text{де} \quad u = u(t, \vec{x}), \quad t = x_0, \quad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Отримані результати застосовано до лінійних рівнянь теплопровідності з джерелом.

В (1) і надалі індекси a, b, c і d змінюються від 1 до n, індекси i та j – від 1 до $n-1$, індекс μ – від 0 до n. За індексами, що повторюються, йде підсумовування. Нижній індекс функції означає диференціювання по відповідній змінній.

Ліївська симетрія рівняння (1) добре вивчена: максимальна (в сенсі Лі) алгебра його інваріантності $A(\mathrm{LHE})$ породжується операторами

$$\begin{gathered}\partial_t = \partial/\partial_t, \quad \partial_a = \partial/\partial_{x_a}, \quad D = 2t\partial_t + x_a\partial_a, \\ G_a = t\partial_a - \tfrac{1}{2}x_a u\partial_u, \quad J_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a \ (a<b), \quad I = u\partial_u, \\ \Pi = 4t^2 + 4tx_a\partial_a - (x_a x_a + 2t)u\partial_u, \quad f(t,\vec{x})\partial_u,\end{gathered} \tag{2}$$

де $f = f(t, \vec{x})$ – довільний розв'язок рівняння (1). Для алгебри $A(\mathrm{LHE})$ справедливий такий розклад:

$$A(\mathrm{LHE}) = AG_2(1,n) + A^\infty(\mathrm{LHE}),$$

де $AG_2(1,n) = \langle \partial_t,\ \partial_a,\ D,\ G_a,\ J_{ab},\ I,\ \Pi\rangle$ – скінченновимірна частина алгебри $A(\mathrm{LHE})$ (алгебра узагальненої групи Галілея $G_2(1,n)$ з однією часовою і n просторовими змінними); $A^\infty(\mathrm{LHE}) = \langle f(t,\vec{x})\partial_u \mid f = f(t,\vec{x}):\ f_t = f_{aa}\rangle$.

2. Еквівалентність операторів Q-умовної симетрії. Дамо необхідні означення. Нехай

$$L(x, u_{(r)}) = 0, \tag{3}$$

– диференціальне рівняння з частинними похідними r-го порядку з $n+1$ незалежною змінною $x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ відносно невідомої функції $u=u(x)$. Тут $u_{(r)}$ позначає всі похідні функції u від 0-го до r-го порядку включно.

Означення 1 [6, 7]. *Кажуть, що рівняння (3) Q-умовно інваріантне відносно оператора*

$$Q=\xi^\mu(x,u)\partial_\mu+\eta(x,u)\partial_u \tag{4}$$

(у якого хоча б один коефіцієнт ξ^μ не дорівнює 0), якщо виконується умова

$$Q_{(r)}L(x,u_{(r)})\Big|_{L(x,u_{(r)})=0,\ \mathcal{M}}=0, \tag{5}$$

де $Q_{(r)}$ – r-е продовження оператора Q, а $\mathcal{M}$ – множина всіх диференціальних наслідків рівняння $Q[u]=0$ до порядку $r-1$ включно, $Q[u]:=\eta-\xi^\mu u_\mu$ – дія оператора Q на функцію $u=u(x)$. При цьому оператор Q називають оператором Q-умовної симетрії рівняння (3).

Якщо рівняння (3) Q-умовно інваріантне відносно деякого оператора Q, то воно Q-умовно інваріантне і відносно оператора λQ для довільної ненульової функції $\lambda=\lambda(x,u)$. Тому на множині операторів природно ввести наступне відношення еквівалентності.

Означення 2 [1, 6, 7]. *Два оператори Q^1 і Q^2 Q-умовної симетрії рівняння (3) називаються еквівалентними, якщо вони відрізняються на ненульвий множник $\lambda=\lambda(x,u)$.*
Позначення: $Q^1\sim Q^2$.

Це відношення еквівалентності можна узагальнити, скориставшись наступним спостереженням: для довільного локального перетворення g: $(x,u)\longrightarrow(\tilde x,\tilde u)=g(x,u)$, відносно якого рівняння (3) інваріантне, приєднане зображення $\mathrm{Ad}(g)$ визначає бієкцію множини операторів Q-умовної симетрії рівняння (3) на себе.

Означення 3. *Два оператори Q^1 і Q^2 Q-умовної симетрії рівняння (3) називаються еквівалентними відносно локального перетворення g симетрії рівняння (3), якщо*

$$\exists\lambda=\lambda(x,u)\neq0:\quad Q^2=\lambda\,\mathrm{Ad}(g)\,Q^1.$$

Позначення: $Q^1\sim Q^2\,(\mathrm{mod}\,g)$.

Означення 4. *Два оператори Q^1 і Q^2 Q-умовної симетрії рівняння (3) називаються еквівалентними відносно групи G локальних перетворень симетрії рівняння (3), якщо вони еквівалентні відносно деякого елемента цієї групи.*

Два оператори Q^1 і Q^2 Q-умовної симетрії рівняння (3) називаються еквівалентними відносно алгебри A ліївської симетрії рівняння (3), якщо вони еквівалентні відносно однієї з однопараметричних груп, що породжуються елементами цієї алгебри.
Позначення: $Q^1\sim Q^2\,(\mathrm{mod}\,G)$; $Q^1\sim Q^2\,(\mathrm{mod}\,A)$.

Зауваження 1. Еквівалентні в сенсі означення 2 оператори визначають однакові, а еквівалентні в сенсі означення 3 (або 4) – несуттєво різні відносно перетворення g (групи G, алгебри A) сім'ї розв'язків рівняння (3).

Зауваження 2. Відношення еквівалентності операторів з означень 2, 3 і 4 можна легко узагальнити на інволютивні множини операторів Q-умовної симетрії.

3. Основні результати. Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. *Для будь-якого оператора Q Q-умовної симетрії рівняння (1) виконується одне з співвідношень:*

1. $Q\sim\widetilde Q^0$, *де* $\widetilde Q^0\in A(\mathrm{LHE})$;
2. $Q\sim\widetilde Q^1=\partial_n+g_ng^{-1}u\partial_u\,(\mathrm{mod}\,ASO(n)+A^\infty(\mathrm{LHE}))$, *де $g=g(t,x_n)$ – розв'язок рівняння теплопровідності, тобто $g_t=g_{nn}$;*
3. $Q\sim\widetilde Q^2=J_{12}+\varphi(\theta)u\partial_u\,(\mathrm{mod}\,AG(1,n)+A^\infty(\mathrm{LHE}))$, *де $\varphi=\varphi(\theta)$ – розв'язок рівняння $\varphi_{\theta\theta}+2\varphi\varphi_\theta=0$, $\varphi_\theta\neq0$, θ – полярний кут в площині OX_1X_2.*

Зауваження 3. Для функції φ з теореми 1 існує чотири суттєво різні (відносно зсувів по θ) випадки:

$$\text{а) } \varphi=-\varkappa\,\mathrm{tg}\,\varkappa\theta,\quad \text{б) } \varphi=\varkappa\,\mathrm{th}\,\varkappa\theta,\quad \text{в) } \varphi=\varkappa\,\mathrm{cth}\,\varkappa\theta,\quad \text{г) } \varphi=\theta^{-1},$$

де $\varkappa$ – ненульова константа.

Зауваження 4. Анзаци і редуковані рівняння, що відповідають операторам $\widetilde{Q}^1$ і $\widetilde{Q}^2$, мають відповідно вигляд:

1) $u = g(t, x_n) v(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1})$, де $\omega_0 = t,\ \omega_i = x_i$

$(1) \implies v_0 = v_{ii};$

2) $u = \exp\left(\int \varphi(\theta) d\theta\right) v(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1})$,

де $\omega_0 = t,\ \omega_1 = r,\ \omega_s = x_{s+1},\ s = \overline{2, n-1}$

$(1) \implies v_0 = v_{11} + \omega_1^{-1} v_1 - \lambda \omega_1^{-2} v + v_{ss}.$

В 2) $\lambda = -\varphi_\theta - \varphi^2 = \mathrm{const}$, (r, θ) – полярні координати в площині OX_1X_2.

В силу зауваження 3 другий анзац об'єднує в собі чотири суттєво різні відносно $A^\infty(\mathrm{LHE})$ анзаци:

а) $\varphi = -\varkappa \operatorname{tg} \varkappa\theta:$ $\quad u = v(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \cos \varkappa\theta,$ $\quad \lambda = \varkappa^2;$

б) $\varphi = \varkappa \operatorname{th} \varkappa\theta:$ $\quad u = v(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \operatorname{ch} \varkappa\theta,$ $\quad \lambda = -\varkappa^2;$

в) $\varphi = \varkappa \operatorname{cth} \varkappa\theta:$ $\quad u = v(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \operatorname{sh} \varkappa\theta,$ $\quad \lambda = -\varkappa^2;$

г) $\varphi = \theta^{-1}:$ $\quad u = v(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \theta,$ $\quad \lambda = 0.$

В доведенні теореми 1 використовуються наступні твердження.

Лема 1. *Функція $z = z(t, \vec{x})$ задовольняє рівняння*

$$z_t - z_{aa} - 2h_n z = 0, \quad \text{де } h = h(t, x_n):\ h_t - h_{nn} - 2h_n h = 0, \tag{6}$$

тоді і тільки тоді, коли має місце зображення

$$z = f_n - hf, \quad \text{де} \quad f = f(t, \vec{x}):\ f_t = f_{aa}. \tag{7}$$

Доведення. Введемо позначення: $T := \partial_t - \partial_a\partial_a$, $\widehat{T} := T - 2h_n$. В силу співвідношення $\widehat{T}(\partial_n - h) = (\partial_n - h)T$ рівняння (6) є наслідком зображення (7). Доведемо, що зображення (7) має місце для будь-якого розв'язку рівняння (6). Фіксуємо розв'язок z цього рівняння і розв'яжемо (7) відносно f як лінійне диференціальне рівняння з параметрами t, $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$: $f := f^0 + Cg$, де $f^0 = f^0(t, \vec{x})$ – частковий розв'язок цього рівняння, $C = C(t, \bar{x})$ – довільна гладка функція своїх аргументів, $g = g(t, x_n)$ – розв'язок рівняння теплопровідності $g_t = g_{nn}$, що визначається з заміни Коула-Хопфа $g_n/g = h$. Тоді $0 = \widehat{T}z = \widehat{T}(\partial_n - h)f^0 = (\partial_n - h)Tf^0$, звідки $Tf^0 = Dg$, де $D = D(t, \bar{x})$, а тому $Tf = 0$, якщо $TC = -D$. ■

Лема 2. *Функція $z = z(t, \vec{x})$ задовольняє рівняння*

$$z_t - z_{aa} - 2\frac{\varphi_\theta}{r^2} z = 0, \quad \text{де } \varphi = \varphi(\theta):\ \varphi_{\theta\theta} + 2\varphi\varphi_\theta = 0,\ \varphi_\theta \neq 0 \tag{8}$$

(тут (r, θ) – полярні координати в площині OX_1X_2) тоді і тільки тоді, коли має місце зображення

$$z = x_1 f_2 - x_2 f_1 - \varphi f, \quad \text{де} \quad f = f(t, \vec{x}):\ f_t = f_{aa}. \tag{9}$$

Доведення леми 2 аналогічне доведенню леми 1.

Зауваження 5. Твердження лем 1 і 2 легко переносяться на лінійне рівняння Шрьодінгера

$$i\psi_t = -\psi_{aa} + V\psi \tag{10}$$

з стаціонарним потенціалом $V = V(\vec{x})$, де $\psi = \psi(t, \vec{x})$ – комплекснозначна функція, i – уявна одиниця. А саме, якщо

1) $V = -2h_n$, де $h = h(x_n):$ $h_{nn} + 2h_n h = 0,\ h_n \neq 0$, або

2) $V = -2\dfrac{\varphi_\theta}{r^2}$, де $\varphi = \varphi(\theta):$ $\varphi_{\theta\theta} + 2\varphi_\theta\varphi = 0,\ \varphi_\theta \neq 0$

(нагадаємо, що (r, θ) позначають полярні координати в площині OX_1X_2), то нелокальною заміною

$$1)\ \psi = \widetilde{\psi}_n - h\widetilde{\psi} \quad \text{або} \quad 2)\ \psi = x_1\widetilde{\psi}_2 - x_2\widetilde{\psi}_1 - \varphi\widetilde{\psi}$$

рівняння (10) зводиться до вільного рівняння Шрьодінгера ($V = 0$). Згідно з зауваженням 3 обом випадкам відповідає по чотири класи потенціалів:

$$1)\ V = \frac{2\varkappa^2}{\cos^2 \varkappa x_n}; \quad V = \frac{-2\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2 \varkappa x_n}; \quad V = \frac{-2\varkappa^2}{\operatorname{sh}^2 \varkappa x_n}; \quad V = \frac{2}{x_n^2};$$

$$2)\ V = \frac{2\varkappa^2}{r^2 \cos^2 \varkappa\theta}; \quad V = \frac{-2\varkappa^2}{r^2 \operatorname{ch}^2 \varkappa\theta}; \quad V = \frac{-2\varkappa^2}{r^2 \operatorname{sh}^2 \varkappa\theta}; \quad V = \frac{2}{r^2\theta^2};$$

Перший набір потенціалів добре відомий для одновимірного рівняння Шрьодінгера ($n = 1$).

4. Доведення теореми 1. Нехай (4) – оператор Q-умовної симетрії рівняння (3). Розглянемо окремо два суттєво різних випадки: $\xi^0 \neq 0$ і $\xi^0 = 0$.

I. $\xi^0 \neq 0$. В силу існування відношення еквівалентності можна вважати, що $\xi^0 = 1$, тобто $Q = \partial_t + \xi^a\partial_a + \eta\partial_u$. Умова (5) для такого оператора і рівняння (1) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}&\eta_t - \xi^a_t u_a - (\eta_{aa} + 2\eta_{au}u_a + \eta_{uu}u_a u_a) + \\ &+(\xi^b_{aa} + 2\xi^b_{au}u_a + \xi^b_{uu}u_a u_a)u_b + (\xi^b_a + \xi^b_u u_a)u_{ab} = 0,\end{aligned} \tag{11}$$

якщо $u_{nn} = \eta - \xi^a u_a - u_{ii}$. Розщеплюючи в (11) по змінним u_{ab}, $a \neq b$, u_{ii}, u_a, після спрощення отримаємо наступну систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q:

$$\xi^a_u = 0, \quad \eta_{uu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \xi^a = \xi^a(t,\vec{x}), \quad \eta = \eta^1(t,\vec{x})u + \eta^0(t,\vec{x})$$

(тобто функції ξ^a не залежать від u, а функція η лінійна по u);

$$\xi^a_b + \xi^b_a = 0, \quad a \neq b, \qquad \xi^i_i = \xi^n_n, \tag{12}$$

$$2\eta^1_a = -(\xi^a_t - \xi^a_{cc} + 2\xi^n_n\xi^a), \tag{13}$$

$$\eta^1_t - \eta^1_{aa} + 2\xi^n_n\eta^1 = 0, \tag{14}$$

$$\eta^0 t - \eta^0_{aa} + 2\xi^n_n\eta^0 = 0. \tag{15}$$

(Підсумовування по i в (12) немає.)

Лема 2. *Для довільного розв'язку системи (12)–(14) справедливе зображення:*

$$\xi^a = \mu^{ab}x_b + \nu x_a + \chi^a \qquad (\mu^{ab} = -\mu^{ba}), \tag{16}$$

$$\eta^1 = -\tfrac{1}{4}(\nu_t + 2\nu^2)x_a x_a - \tfrac{1}{2}(\chi^a_t + 2\nu\chi^a)x_a + \sigma, \tag{17}$$

де функції $\mu^{ab} = \mu^{ab}(t)$, $\nu = \nu(t)$, $\chi^a = \chi^a(t)$ і $\sigma = \sigma(t)$ задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}&\nu_{tt} + 6\nu\nu_t + 4\nu^3 = 0, \quad (\chi^a_t + 2\nu\chi^a)_t + 2\nu(\chi^a_t + 2\nu\chi^a) = 0, \\ &\mu^{ab}_t + 2\nu\mu^{ab} = 0, \quad \sigma_t + 2\nu\sigma + \tfrac{1}{2}n(\nu_t + 2\nu^2) = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що функції ξ^a лінійні по $\vec{x}$.

Якщо $n > 2$, то з (12) (це система Кіллінга) випливає, що всі похідні 3-го порядку по просторових змінних від функцій ξ^a рівні 0. Продиференціюємо рівняння (13) по x_b, де $b \neq a$, після чого з рівності мішаних похідних η^1_{ab} і η^1_{ba} отримаємо ще один набір рівнянь на ξ^a:

$$\xi^a_{bt} + 2(\xi^n_n\xi^a)_b = \xi^b_{at} + 2(\xi^n_n\xi^b)_a. \tag{19}$$

Диференціальні наслідки 2-го порядку рівнянь (19) і 1-го порядку системи Кіллінга (12) разом дають умову рівності 0 других похідних функцій ξ^a по просторових змінних, тобто ξ^a лінійні по $\vec{x}$.

Для $n = 2$ доведення дещо складніше. Перейдемо до комплексних змінних: $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\xi = \xi^1 + i\xi^2$. В силу (12) (при $n = 2$ це система Коші-Рімана) функція ξ аналітична по z, тобто $\xi = \xi(t,z)$, а тому $\xi^a_{bb} = 0$. Нехай $\xi^* := \overline{\xi(t,z)}$, звідки $\xi^* = \xi^*(t,\bar{z})$. (Тут риска означає операцію комплексного спряження.) Перепишемо в комплексних змінних рівняння (13):

$$2\eta^1_{\bar{z}} = -(\xi_t + (\xi_z + \xi^*_{\bar{z}})\xi), \quad 2\eta^1_z = -(\xi^*_t + (\xi_z + \xi^*_{\bar{z}})\xi^*). \tag{20}$$

Знайдемо різницю похідної першого рівняння системи (20) по z і другого – по $\bar{z}$:

$$(\xi_t + \xi_z\xi)_z = (\xi^*_t + \xi^*_{\bar{z}}\xi^*)_{\bar{z}} =: \alpha, \qquad \alpha = \alpha(t) \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Проінтегруємо рівняння (21):

$$\xi_t + \xi_z\xi = \alpha z + \beta \Longleftrightarrow \xi^*_t + \xi^*_{\bar{z}}\xi^* = \alpha\bar{z} + \bar{\beta}, \quad \beta = \beta(t) \in \mathbb{C}. \tag{22}$$

Підставимо результат в (20) і розв'яжемо отримані таким чином рівняння відносно η^1:

$$\eta^1 = \tfrac{1}{2}(-\alpha z\bar{z} + \beta\bar{z} + \bar{\beta}z + \gamma + \xi\xi^*), \qquad \gamma = \gamma(t) \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Враховуючи (22) і (23), подіємо оператором $(\partial_z)^2(\partial_{\bar{z}})^2$ на рівняння (14): $\xi_{zzz}\xi^*_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} = 0$, тобто $\xi_{zzz} = 0$, а тому з (22) отримаємо умову $\xi_{zz} = 0$. Це означає, що ξ^a лінійні по $\vec{x}$.

Отже, в силу доведеного і системи (12) для функцій ξ^a справедливе зображення (16). Рівняння на функції μ^{ab} з системи (18) і зображення (17) для η^1 є наслідками рівнянь (19) і (13) відповідно. Інші рівняння з системи (18) отримаємо після підстановки зображень (16) і (17) в (14). ■

Інтегрування першого рівняння з системи (18) дає три сім'ї розв'язків для функції ν :

$$\nu=\frac{t+C_1}{(t+C_1)^2+C_2},\qquad \nu=\frac{1}{2(t+C_1)},\qquad \nu=0.$$

Для кожної з цих сімей розв'яжемо інші рівняння системи (18), а рівняння (15) зведемо до (1). В результаті ми побудуємо набори операторів Q-умовної симетрії, в яких будь-який оператор еквівалентний оператору з $A(\mathrm{LHE})$:

$$\begin{aligned}
&Q^1=\big((t+C_1)^2+C_2\big)^{-1}\big[\Pi+C_1D+(C_1^2+C_2)\partial_t+\widehat{Q}^1\big],\\
&Q^2=\big(t+C_1\big)^{-1}\big[\tfrac12 D+C_1\partial_t+\widehat{Q}^2\big],\\
&Q^3=\partial_t+\widehat{Q}^3
\end{aligned}$$

де $\widehat{Q}^1$, $\widehat{Q}^2$, $\widehat{Q}^3$ – довільні оператори з $\langle J_{ab},\,G_a,\,\partial_a,\,I\rangle\oplus\,A^\infty(\mathrm{LHE})$.

Отже, *для лінійного n-вимірного ($n\ge2$) рівняння теплопровідності будь-який оператор Q-умовної симетрії з $\xi^0\ne0$ еквівалентний оператору ліївської симетрії цього рівняння.*

II. $\xi^0=0$. Зважаючи на відношення еквівалентності операторів відносно алгебри симетрії рівняння (1), без обмеження загальності можна покласти $\xi^n=1$, тобто $Q=\partial_n+\xi^i\partial_i+\eta\partial_u$. Умова (5) для такого оператора і рівняння (1) набуває вигляду:

$$\begin{aligned}
&\eta_t-\xi^i_tu_i-(\eta_{aa}+2\eta_{au}u_a+\eta_{uu}u_au_a)+\\
&+(\xi^i_{aa}+2\xi^i_{au}u_a+\xi^i_{uu}u_au_a)u_i+(\xi^i_a+\xi^i_uu_a)u_{ai}=0,
\end{aligned}\tag{24}$$

якщо $u_n=\eta-\xi^iu_i$, $u_{jn}=\eta_j+\eta_uu_j-(\xi^i_j+\xi^i_uu_j)u_i-\xi^iu_{ij}$. Розщеплюючи в (24) по змінних u_{ij} та u_i, після спрощення отримаємо систему визначальних рівнянь на коефіцієнти оператора Q:

$$\xi^i_u=0,\quad \eta_{uu}=0\quad\Longrightarrow\quad \xi^i=\xi^i(t,\vec x),\quad \eta=\eta^1(t,\vec x)u+\eta^0(t,\vec x)$$

(тобто функції ξ^i не залежать від u, а функція η лінійна по u);

$$\xi^i_i-\xi^i\xi^i_n=0,\qquad \xi^i_j+\xi^j_i-\xi^i\xi^j_n-\xi^j\xi^i_n=0,\quad i\ne j,\tag{25}$$
$$\eta^1_i-(\xi^i\eta^1)_n=-\tfrac12(\xi^i_t-\xi^i_{aa}+2\xi^j_n\xi^i_j),\tag{26}$$
$$\eta^1_t-\eta^1_{aa}-2\eta^1_n\eta^1+2\xi^j_n\eta^1_j=0,\tag{27}$$
$$\eta^0_t-\eta^0_{aa}-2\eta^1_n\eta^0+2\xi^j_n\eta^0_j=0,\tag{28}$$

(Підсумовування по i в (25) немає.)

Інтегруючи систему (25)–(28), необхідно дослідити окремо такі випадки:

а) $\xi^i=\mathrm{const}$; б) $\xi^i_n=0$ і $\exists i\colon\ \xi^i\ne\mathrm{const}$; в) $\exists i\colon\ \xi^i_n\ne0$.

А. $\xi^i=\mathrm{const}$. Перейдемо до еквівалентного (відносно поворотів) оператора, у якого $\widetilde{\xi}^i=0$. Тоді система (25)–(28) набуває вигляду

$$\eta^1_i=0,\qquad \eta^1_t-\eta^1_{nn}-2\eta^1_n\eta^1=0,\qquad \eta^0_t-\eta^0_{aa}-2\eta^1_n\eta^0=0,$$

звідки в силу леми 1 $\eta^0=f_n-\eta^1f$, де $f=f(t,\vec x)$ – розв'язок рівняння (1), а тому даний оператор еквівалентний відносно $\langle f\partial_u\rangle$ оператору з $\widetilde{\eta}^0=0$. Рівняння Бюргерса на η^1 заміною Коула-Хопфа $\eta^1=g_n/g$ зведемо до рівняння теплопровідності на функцію $g=g(t,x_n)$. В результаті отримаємо оператор $\widetilde{Q}^1$ (випадок 2 теореми 1).

Б. $\xi^i_n=0$ і $\exists i:$ $\xi^i\ne\mathrm{const}$. З (25) за цих умов випливає, що $\xi^i=\mu^{ij}x^j+\nu^i$, де $\mu^{ij}=\mu^{ij}(t)$, $\nu^i=\nu^i(t)$ – гладкі функції змінної t, $\mu^{ij}=-\mu^{ji}$, причому $\exists(i,j)$: $\mu^{ij}\ne0$ або $\exists i$: $\nu^i_t\ne0$. З системи (26)–(27) після підстановки виразів для ξ^i і диференціювання та алгебраїчних перетворень отримаємо такі рівняння:

$$\left.\begin{aligned}
\mu^{ij}_t&=2\eta^1_n\mu^{ij}\quad\Longrightarrow\quad \mu^{ij}\eta^1_{na}=0\\
\nu^i_{tt}&=4\eta^1_n\nu^i_t\quad\ \Longrightarrow\quad \nu^i_t\eta^1_{na}=0
\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\eta^1_{na}=0,$$

тобто $\exists\alpha=\alpha(t)$: $\eta^1_n=\frac12\alpha$. Продиференціюємо (27) по x_n і домножимо на $\frac12$: $\alpha_t=\alpha^2$, а тому $\alpha=-\varepsilon/(\varepsilon t+C)$, де $\varepsilon\in\{0;1\}$, C – довільна стала, якщо $\varepsilon=1$, і $C=1$, якщо $\varepsilon=0$. Тоді

$$\mu^{ij}=\frac{M_{ij}}{\varepsilon t+C},\qquad \nu^i=\frac{A_it+B_i}{\varepsilon t+C},\qquad \eta^0=\frac{f(t,\vec x)}{\varepsilon t+C},$$

де M_{ij}, A_i, B_i – константи інтегрування, $M_{ij}=-M_{ji}$, $f=f(t,\vec x)$ – розв'язок рівняння теплопровідності (1). Враховуючи виведені умови, систему (26)–(27) можна переписати у вигляді

$$\eta^1_i=-\tfrac12(\nu^i_t-\alpha\nu^i),\qquad \eta^1_t=\alpha\eta^1,$$

звідки $\eta^1=(\varepsilon t+C)^{-1}[-\frac12A_ix_i-\frac12\varepsilon x_n+E]$, де $E=\mathrm{const}$. Отже, в силу доведеного

$$Q=(\varepsilon t+C)^{-1}\Big[\,\varepsilon G_n+C\partial_n+\sum_{i<j}M_{ij}J_{ij}+A_iG_i+B_i\partial_i+EI+f\partial_u\,\Big],$$

тобто оператор Q еквівалентний оператору з $A(\mathrm{LHE})$.

B. $\exists i$: $\xi^i_n \neq 0$. Зважаючи на відношення еквівалентності операторів відносно $A(\mathrm{LHE})$, без обмеження загальності можна покласти $\xi^1_n \neq 0$. Виконаємо в системі (25)–(27) перетворення годографа:

$$\tau = t, \quad y_i = x_i, \quad y_n = \xi^1 \quad \text{– нові незалежні змінні,}$$
$$\psi^1 = x_n, \quad \psi^s = \xi^s,\ s = \overline{2, n-1}, \quad \zeta = -2\eta^1 \text{ – нові залежні змінні.}$$

Проінтегруємо в нових змінних визначальні рівняння, дотримуючись такого порядку:

$$(25,\ i=1), \quad (25,\ i>1), \quad (26,\ i=1), \quad (26,\ i>1), \quad (27).$$

В процесі інтегрування рівнянь $(25,\ i=1)$ і $(26,\ i=1)$ змінна y_1 виділяється у виразах для ψ^i і ζ в явному вигляді, а тому в інших рівняннях по цій змінній можна розщепити. Після повернення до старих змінних отримаємо наступний вираз для оператора Q:

$$\begin{aligned} Q = Z^{-1}[&J_{n1} + M_{1s}J_{1s} + M_{sn}J_{sn} \\ &+ \textstyle\sum_{s<p}(M_{sp} + M_{sn}M_{1p} - M_{pn}M_{1s})J_{sp} \\ &+ A_1G_1 + A_nG_n + (A_s - M_{sn}A_1 - M_{1s}A_n)G_s \\ &+ B_1\partial_1 + B_n\partial_n + (B_s - M_{sn}B_1 - M_{1s}B_n)\partial_s \\ &+ \tfrac{1}{2}(A_1B_n - A_nB_1)u\partial_u + \varphi(\omega)u\partial_u + \chi(t,\vec{x})\partial_u], \end{aligned}$$

де $M_{ab} = -M_{ba}$ $((a,b) \neq (1,n)$ або $(n,1))$, A_a, B_a – довільні сталі; $Z = -x_1 + M_{sn}x_s + A_nt + B_n$; $\omega = Z^{-1}(x_n - M_{1s}x_s + A_1t + B_1)$; $\chi = Z^{-1}\eta^0$, а тому $\chi_t - \chi_{aa} - 2\varphi_\omega Z^{-2}\chi = 0$; індекси s і p змінюються від 2 до $n-1$; $\varphi = \varphi(\omega)$ – розв'язок рівняння

$$\big(\sigma(\omega)\varphi_\omega\big) + 2\varphi\varphi_\omega = 0, \quad \sigma(\omega) := 1 + \omega^2 + \sum_{s=2}^{n-1}(M_{sn}\omega + M_{1s})^2,$$

для якого $M_{sp}\varphi_\omega = A_s\varphi_\omega = B_s\varphi_\omega = 0$.

Якщо серед сталих M_{sp}, A_s та B_s є хоча б одна ненульова, то $\varphi_\omega = 0$ і оператор Q еквівалентний оператору з $A(\mathrm{LHE})$.

Нехай $M_{sp} = A_s = B_s = 0$. Домножимо оператор Q на Z, послідовно подіємо на нього приєднаними зображеннями перетворень $\mathrm{Ad}\big(\exp(A_nG_1 - A_1G_n)\big)$ і $\mathrm{Ad}\big(\exp(B_n\partial_1 - B_1\partial_n)\big)$ та поворотів так, що $A_1 = A_n = B_1 = B_n = 0$, $M_{1s} = M_{sn} = 0$, і виконаємо циклічне переставлення змінних $x_i \longrightarrow x_{i+1}$, $x_n \longrightarrow x_1$. В результаті отримаємо оператор $\widehat{Q}$, еквівалентний даному відносно $G(1,n)$:

$$\widehat{Q} = J_{12} + \varphi(\omega)u\partial_u + \chi(t,\vec{x})\partial_u,$$

де $((1+\omega^2)\varphi_\omega)_\omega + 2\varphi\varphi_\omega = 0$, $\omega = -x_1/x_2$, $\chi_t - \chi_{aa} - 2\varphi_\omega x_2^{-2}\chi = 0$, або

$$\widehat{Q} = J_{12} + \varphi(\theta)u\partial_u + \chi(t,\vec{x})\partial_u, \tag{29}$$

де $\varphi_{\theta\theta} + 2\varphi\varphi_\theta = 0$, $\chi_t - \chi_{aa} - 2\varphi_\theta r^{-2}\chi = 0$, (r,θ) – полярні координати в площині OX_1X_2. В силу леми 2 $\chi = x_1f_2 - x_2f_1 - \varphi f$, де $f = f(t,\vec{x})$ – розв'язок рівняння (1), а тому оператор (29) еквівалентний відносно $\langle f\partial_u\rangle$ оператору з $\widetilde{\chi} = 0$. В результаті отримаємо оператор $\widetilde{Q}^2$ (випадок 3 теореми 1). Доведення теореми 1 завершено. ■

Р. Попович висловлює подяку ДФФД України (проект № 1.4/356) за часткову фінансову підтримку цієї роботи.

[1] Bluman G.W. and Cole J.D. The general similarity solutions of the heat equation // J. Math. Mech. – 1969. – **18**, № 11. – P. 1025–1042.

[2] Webb G.M. Lie symmetries of a coupled nonlinear Burgers-heat equation system // J. Phys. A.: Math. Gen. – 1990. – **23**, № 17. – P. 3885–3894.

[3] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I., and Popowych R.O., Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Dopov. Acad. Sci. Ukraine. – 1992. – № 12. – P. 27–32.

[4] Попович Р.О. Про симетрію та точні розв'язки одного рівняння переносу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 1. – С. 121–125.

[5] Popovych R.O. On reduction and Q-conditional symmetry // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, July 7–13, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.2. – P. 437–443.

[6] Fushchych W.I. and Tsyfra I.M. On a reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**. – P. L45–L48.

[7] Жданов Р.З., Цифра І.М. Редукція диференціальних рівнянь і умовна симетрія // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 595–602.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 212–215

УДК 517.9

Некоторые точные решения уравнений Лоренца, инвариантные относительно подалгебры расширенной алгебры Пуанкаре

И.В. РЕВЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Розвивається підхід до побудови нових точних розв'язків рівнянь Лоренца. У рамках цього підходу отримано розв'язки, інваріантні відносно підалгебри Пуанкаре.

An approach to construction of new exact solutions of the Lorentz equations is developed. Within the framework of this approach solutions invariant under a subalgebra of the Poincaré algebra are obtained.

Хорошо известно [1, 2], что алгеброй инвариантности уравнений

$$m\dot{u}_\mu = eF_{\mu\nu}u^\nu \tag{1}$$

является расширенная алгебра Пуанкаре $A\widetilde{P}(1,3)$, генераторы которой имеют вид:

$$\begin{gathered}P_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}, \quad J_{0a} = x_0\frac{\partial}{\partial x_a} + x_a\frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon_{abc}\left(E_b\frac{\partial}{\partial H_c} - H_b\frac{\partial}{\partial E_c}\right), \\ J_{ab} = x_a\frac{\partial}{\partial x_b} - x_b\frac{\partial}{\partial x_a} + E_a\frac{\partial}{\partial E_b} - E_b\frac{\partial}{\partial E_b} + H_a\frac{\partial}{\partial H_b} - H_b\frac{\partial}{\partial H_a},\end{gathered} \tag{2}$$

$$D = k\tau\frac{\partial}{\partial\tau} + x_\nu\frac{\partial}{\partial x_\nu} - k\left(E_a\frac{\partial}{\partial E_a} + H_a\frac{\partial}{\partial H_a}\right). \tag{3}$$

Здесь $F_{\mu\nu}$ – антисимметричный электромагнитный тензор, а $u_\mu = \dfrac{dx_\mu}{d\tau}$ – вектор 4-скорости, удовлетворяющий соотношению

$$u_\mu u^\mu = 1. \tag{4}$$

Широкие классы точных решений уравнения (1) приведены в работах [1, 3]. Однако существенной особенностью решений, полученных в указаных работах, является то, что они инвариантны относительно подалгебр алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$ (2).

В настоящей работе показано, как можно использовать инвариантность уравнений (1) относительно расширенной алгебры Пуанкаре (2), (3) для построения новых точных решений уравнения (1).

Рассмотрим подалгебру

$$\langle J_{03} - D, J_{12} + P_0, P_0 - P_3, \frac{\partial}{\partial\tau}\rangle, \quad \text{где } k = 1. \tag{5}$$

Нетрудно показать, что уравнения (1) инвариантны относительно подалгебры (5) только в том случае, когда функции E_i, H_i задаются формулами:

$$\begin{aligned}&E_1 + H_2 = (h_1x_1 + h_2x_2)R^{-3},\\ &E_2 - H_1 = (h_1x_2 - h_2x_1)R^{-3},\\ &E_1 - H_2 = (g_1x_1 + g_2x_2)R^{-1},\\ &E_2 + H_1 = (g_1x_2 - g_2x_1)R^{-1},\\ &E_3 = g_3R^{-1}, \quad H_3 = h_3R^{-1},\end{aligned} \tag{6}$$

где h_i, g_i – функции от ω,

$$\omega = \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} + x_0 + x_3, \qquad R = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}.$$

Однако знание четырех операторов симметрии недостаточно для построения решений уравнений (1), (6). Поэтому потребуем, чтобы уравнения (1), (6) были следствием уравнений первого порядка. Причем эти уравнения первого порядка должны быть инвариантны относительно подалгебры (5).

Такие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}&\dot{x}_0 = \frac{1}{2}(\lambda_0R^{-1} + \lambda_3R), \quad \dot{x}_3 = \frac{1}{2}(\lambda_0R^{-1} - \lambda_3R),\\ &\dot{x}_1 = \frac{\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2}{R}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\lambda_1x_2 - \lambda_2x_1}{R},\end{aligned} \tag{7}$$

где $\lambda_i = \lambda_i(\omega)$.

Уравнения (7) совместны, если выполнено условие (4). Поэтому имеет место соотношение

$$\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 1. \tag{8}$$

Кроме того, потребуем, чтобы

$$\frac{d\omega}{d\tau} = 0, \tag{9}$$

что приводит к следующему соотношению для λ_i:

$$\lambda_0 + \lambda_2 = 0, \tag{10}$$

откуда следует, что $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

Так как мы требуем выполнения условия (9), то, не уменьшая общности, можно положить $\lambda_i = \mathrm{const}$.

Знание четырех операторов симметрии для системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка уже достаточно для построения общего решения системы (7):

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\lambda_0}{2\lambda_1}\ln(\lambda_1\tau+\beta_1) + \frac{\lambda_3}{2}\left(\frac{1}{2}\lambda_1\tau^2+\beta_1\tau\right)+\beta_0,\\
x_1 &= (\lambda_1\tau+\beta_1)\sin\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ln(\lambda_1\tau+\beta_1)+\beta_2\right)\\
x_2 &= (\lambda_1\tau+\beta_1)\cos\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\ln(\lambda_1\tau+\beta_1)+\beta_2\right)\\
x_3 &= \frac{\lambda_0}{2\lambda_1}\ln(\lambda_1\tau+\beta_1) - \frac{\lambda_3}{2}\left(\frac{1}{2}\lambda_1\tau^2+\beta_1\tau\right)+\beta_3.
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь β_1 – произвольные постоянные.

Простой подстановкой нетрудно убедиться, что уравнения (1), (6) являються следствием уравнений (7) только в том случае, когда функции h_i, g_i линейно зависимы следующим образом:

$$\begin{aligned}
h_3 &= -\frac{e}{m}\lambda_1 + \frac{\lambda_0 g_1+\lambda_3 h_1}{\lambda_2},\\
g_3 &= -\frac{e}{m}\lambda_1 + \frac{\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_1}{\lambda_3},\\
&(h_1\lambda_1+h_2\lambda_2)\lambda_3+(g_1\lambda_1+g_2\lambda_2)\lambda_0 = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, в настоящей работе построены новые точные решения уравнений Лоренца (1), (6), (12). Эти решения определяются формулами (11).

Хотелось бы отметить два наиболее важных, с точки зрения автора, момента в данной работе.

Во-первых, проинтегрированные уравнения не являются лагранжевыми, а почти все известные результаты по уравнению (1) относятся к лагранжевым системам. А во-вторых, техника построения точных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которую использовал автор, не является новой, однако, по всей видимости, для заданой системы уравнений (1) применяется впервые.

[1] Соколов А.А., Тернов И.М. Релятивистский электрон. – М.: Наука, 1974. – 392 с.

[2] Ревенко И.В. Уравнения движения для заряженных частиц, инвариантные относительно алгебры Пуанкаре // Симметрия и решение нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 39–43.

[3] Фущич В.И., Ревенко И.В. О точных решениях уравнений Лоренца-Максвелла // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 6. – С. 28–31.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 216–220

UDC 517.9:519.46

On time-dependent symmetries of evolution equations

A.G. SERGHEYEV

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv
E-mail: arthur@apmat.freenet.kiev.ua

Наведено повний опис залежності від часу некласичних симетрій (1+1)-вимірних скалярних еволюційних рівнянь.

The complete description of time dependence of nonclassical symmetries of (1+1)-dimensional scalar evolution equations is presented.

1. Introduction. In the present paper we consider the scalar evolution equation

$$\partial u/\partial t = F(x, u, u_1, \dots, u_n), \quad n \geq 2, \tag{1}$$

where $u_l = \partial^l u/\partial x^l$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $u_0 \equiv u$, and its symmetries, i.e., the right hand sides G of evolution equations

$$\partial u/\partial t = G(x, t, u, u_1, \dots, u_k), \tag{2}$$

compatible with Eq.(1). The number k is called the order of symmetry and is denoted as $k = \operatorname{ord} G$. One usually refers to the symmetries of orders 0 and 1 as to the classical ones [1]. We shall also refer to the elements of quotient space of the space of symmetries of all orders modulo the space of classical symmetries as to nonclassical symmetries. Let us mention that the symmetries of Eq.(1) form a Lie algebra (generically speaking, infinite-dimensional) with respect to the so-called Lie bracket [2].

The importance of study of this Lie algebra is due mainly to the two following facts: provided Eq.(1) possesses (under some extra conditions) either infinite-dimensional algebra of time-independent nonclassical symmetries or several time-independent and one polynomial in time t symmetry, it possesses the recursion operator and therefore is highly probable to be integrable via the inverse scattering transform [1, 3, 4].

The complete description of the algebra of time-dependent symmetries of all orders of Eq.(1) without any a priori conjectures (say, that these symmetries are time-independent or polynomial in time t) is an extremely difficult task. To the best of our knowledge, in the class of *nonlinear* equations (1) this problem was solved only for KdV equation by Magadeev and Sokolov [5] and for Burgers equation by Vinogradov et al. [6].

Surprisingly enough, for the generic equation (1) it is possible to establish the general form of time dependence of its nonclassical symmetries. Namely, any nonclassical symmetry of Eq.(1) as a function of t is a linear combination of products of the exponents by polynomials. Moreover, Eq.(1) possesses nonclassical time-dependent symmetries if and only if it possesses either linear in t or exponential in t symmetry.

2. The general form of nonclassical symmetries. Let us remind that Eq.(2) is compatible with Eq.(1) if and only if

$$\partial G/\partial t = \{F, G\}, \tag{3}$$

where $\{F, G\}$ stands for the Lie bracket of F and G.

For any sufficiently smooth function h of $x, t, u, u_1, \dots, u_r$ let us introduce the following quantities [1]:

$$h_* = \sum_{i=0}^{r} \partial h/\partial u_i D^i,$$

where $D = \partial/\partial x + \sum\limits_{i=0}^{\infty} u_{i+1}\partial/\partial u_i$, and $\nabla_h = \sum\limits_{j=0}^{\infty} D^j(h)\partial/\partial u_j$.

It is known [1] that Eq.(3) implies the following relations:

$$\nabla_{\partial G/\partial t} - (\partial G/\partial t)_* = -[\nabla_F - F_*, \nabla_G - G_*], \tag{4}$$

$$\nabla_{\partial G/\partial t} = -[\nabla_F, \nabla_G], \tag{5}$$

where $[\cdot, \cdot]$ stands for the usual commutator of linear differential operators.

Combining (4) with (5) yields

$$\partial G_*/\partial t \equiv (\partial G/\partial t)_* = \nabla_G(F_*) - \nabla_F(G_*) + [F_*, G_*], \tag{6}$$

where $\nabla_F(G_*) \equiv \sum\limits_{i,j=0}^{\infty} D^j(F)\dfrac{\partial^2 G}{\partial u_j \partial u_i} D^i$ and similarly for $\nabla_G(F_*)$.

Equating the coefficients at D^s, $s=0,1,2,\dots$ in right and left hand sides of Eq.(6) yields

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u_l \partial t} = \sum_{m=0}^{n} D^m(G)\frac{\partial^2 F}{\partial u_m \partial u_l} - \sum_{r=0}^{k} D^r(F)\frac{\partial^2 G}{\partial u_r \partial u_l} +$$

$$+ \sum_{j=\max(0,l+1-n)}^{k} \quad \sum_{i=\max(l+1-j,0)}^{n} \left[\mathrm{C}_i^{i+j-l}\frac{\partial F}{\partial u_i} D^{i+j-l}\left(\frac{\partial G}{\partial u_j}\right) - \right. \quad (7)$$

$$\left. -\mathrm{C}_j^{i+j-l}\frac{\partial G}{\partial u_j} D^{i+j-l}\left(\frac{\partial F}{\partial u_i}\right)\right], \qquad l=0,\dots,n+k-1,$$

where $\mathrm{C}_q^p = \dfrac{q!}{p!(q-p)!}$.

Eq.(7) for $l=n+k-1$ and $k \ge 2$ yields [2]

$$\partial G/\partial u_k = c_k(t)(\partial F/\partial u_n)^{k/n}, \quad (8)$$

where $c_k(t)$ is arbitrary function of t.

Now suppose that $G \in S^k/S^{k-1}$, $k \ge 2$, where S^l denotes the space of symmetries of Eq.(1) of order not higher than l. Then, obviously, the function $c_k(t)$ is the only arbitrary element, which enters in G, since, provided $c_k(t)$ vanishes, $\partial G/\partial u_k = 0$, what contradicts to $G \in S^k/S^{k-1}$. Furthermore, successively solving the equations (7) for $l = n+k-2, \dots, n+1$ and substituting the results obtained for higher l in the equations with lower l, one obtains (cf. the formulas from §7 of [1] for time-independent symmetries)

$$\partial G/\partial u_i = \sum_{r=0}^{[\frac{k-i}{n-1}]} \phi_{i,r}(x,u,u_1,\dots,u_k)\partial^r c_k/\partial t^r, \; i=2,\dots,k-1. \quad (9)$$

Now it is straightforward to check that substitution of Eq.(8) and Eq.(9) into the equations (7) with $l=0,\dots,n$ yields (generically speaking, overdetermined) system of linear ordinary differential equations for $c_k(t)$ with constant coefficients (since F is time-independent) of order not higher than

$$N_{k,n} = \left[\frac{k}{n-1}\right] + 1, \quad (10)$$

where $[r]$ stands for the integer part of the number r.

Hence, the general solution of the system of ordinary differential equations in question is a linear combination of at most $N_{k,n}$ linearly independent solutions of the form

$$c_k(t) = \exp(\lambda t)\sum_{j=0}^{m} t^j K_j, \quad (11)$$

for some $\lambda, K_j \in \mathbb{C}$ and $m \le N_{k,n}-1$.

Inserting Eq.(11) into equations (8) and (9) and finding G from them, we obtain the following final result:

Theorem 1. *There exists the basis of the linearly independent symmetries $G \in S^k/S^{k-1}$ $(k \ge 2)$ of Eq.(1) of the form*

$$G = \exp(\lambda t)\sum_{j=0}^{m} t^j g_j(x,u,u_1,\dots,u_k), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \; m \le N_{k,n}-1. \quad (12)$$

Hence, any nonclassical symmetry G of Eq.(1), which is the linear combination of the symmetries (12), as a function of t is the linear combination of products of exponents by polynomials, as it was already mentioned in Introduction.

Moreover, acting on any symmetry (12) by $(\partial/\partial t - \lambda)^m$ for $\lambda \ne 0$ or by $\partial^{m-1}/\partial t^{m-1}$ for $\lambda = 0$, we obtain the symmetry which is either linear or exponential in t, i.e., the following assertion holds true:

Corollary 1. *Equation (1) possesses nonclassical time-dependent symmetries if and only if it possesses (at least one) nonclassical symmetry of the form*

$$G = \exp(\lambda t)Q_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \ne 0 \quad (13)$$

or of the form

$$G = G_0 + tG_1, \quad G_1 \ne 0, \quad (14)$$

where Q_0, G_0 and G_1 are time-independent.

Substitution of (13) into (3) yields

$$\{F, Q_0\} = \lambda Q_0. \quad (15)$$

Similarly, from (14) and (3) we obtain

$$\{F, G_0\} = G_1 \quad \text{and} \quad \{F, G_1\} = 0. \quad (16)$$

In the first case F is called scaling symmetry (or conformal invariance [4]) for Q_0. Though, known scaling symmetries F of integrable hierarchies, such as KdV, depend usually only on x, u, u_1 but not on u_2 and higher derivatives [4] and hence do not generate evolution equations of the form (1), which we consider here. Moreover, we guess that if Eq.(1) is *nonlinear* and integrable, there exist no functions Q_0, which satisfy (15) with $\lambda \neq 0$.

Now let us turn to the second case. It is straightforward to check (cf. [3]) that provided all the time-independent symmetries of Eq.(1) commute with respect to the Lie bracket, for any time-independent symmetry K of Eq.(1) the Lie bracket $\{G_0, K\}$ will be again some time-independent symmetry of Eq.(1), i.e., G_0 will be mastersymmetry of Eq.(1) and (under some extra conditions, vide [3]) Eq.(1) will be integrable via inverse scattering transform. Let us also mention that the condition of commutativity of the algebra of time-independent symmetries of Eq.(1) may be rejected if G_0 is scaling symmetry of F, i.e., $\{F, G_0\} = \mu F$ for some $\mu \in \mathbb{C}$ [4].

It is a pleasure for me to express deep gratitude to Prof. R.Z. Zhdanov and Dr. R.G. Smirnov for the fruitful discussion of the results presented here.

[1] Sokolov V.V. On the symmetries of evolution equations // Russian Math. Surveys. – 1988. – **43**, № 5. – P. 165–204.

[2] Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. – N.Y.: Springer, 1986. – 497 p.

[3] Fuchssteiner B. Mastersymmetries, higher order time-dependent symmetries and conserved densities of nonlinear evolution equations // Progr. Theor. Phys. – 1983. – **70**, № 6. – P. 1508–1522.

[4] Oevel W. Geometrical approach to integrable systems admitting time dependent invariants // Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equations. Proc. Conf. On Nonlinear Evolution Equations, Soliton and Inverse Scattering Transform, Oberwolfach, Germany (July 27 – August 2, 1986) / M. Ablowitz, B. Fuchssteiner, M. Kruskal eds. – Singapore: World Scientific, 1987. – P. 108–124.

[5] Magadeev B.A., Sokolov V.V. On the complete Lie-Bäcklund algebra of Korteweg-de Vries equation// Dynamics of Continuous Media. – 1981. – **52**. – P. 48–55 (In Russian).

[6] Vinogradov A.M., Krasil'shchik I.S., Lychagin V.V. Introduction to geometry of nonlinear differential equations. – Moscow: Nauka, 1986. – 336 p. (In Russian).

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 221–225

УДК 517.958:537.812

Инвариантность уравнений Максвелла относительно нелинейных представлений алгебры Пуанкаре

С.В. СПИЧАК

Институт математики НАН Украины, Киев
E-mail: spichak@apmat.freenet.kiev.ua

Показано, що рівняння Максвелла умовно-інваріантні відносно двох нелінійних зображень алгебри Пуанкаре. Побудовано групи скінченних перетворень для цих зображень. Знайдено нелінійне узагальнення рівнянь Максвелла, яке інваріантне відносно отриманих нелінійних зображень алгебри Пуанкаре.

It is shown that the Maxwell equations are conditionally-invariant with respect to two nonlinear representatons of the Poincaré algebra. The corresponding groups of finite transformations are consructed. A nonlinear generalization of the Maxwell equations, which is invariant under the above-mentioned nonlinear representations of the Poincaré algebra, is found.

1. Условная инвариантность. Рассмотрим уравнения Максвелла в вакууме, записанные в комплексной форме:

$$\vec{\nabla}\vec{\Sigma} = 0, \qquad \partial_0\vec{\Sigma} + i\vec{\nabla}\times\vec{\Sigma} = 0, \tag{1}$$

где $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$, $\vec{\Sigma} = \vec{E} + i\vec{H}$ – комплексный вектор электромагнитного поля. Как известно [1, 2], система (1) инвариантна относительно линейного представления алгебры Пуанкаре $AP(1,3)$ с базисныммы операторами

$$\begin{aligned} AP^{\mathrm{lin}}(1,3) = \langle P_\mu = \partial_\mu,& \\ J^{\mathrm{lin}}_{ab} = x_a\partial_b - x_b\partial_a + \Sigma_a\partial_{\Sigma_b} - \Sigma_b\partial_{\Sigma_a},& \\ \vec{J}^{\,\mathrm{lin}}_{0a} = x_0\partial_a + \vec{x}\partial_0 + N^{\mathrm{lin}}_a\rangle,& \end{aligned} \tag{2}$$

где $\vec{N}^{\mathrm{lin}} = (N_1^{\mathrm{lin}}, N_2^{\mathrm{lin}}, N_3^{\mathrm{lin}}) = i\vec{\Sigma}\times\vec{\nabla}_\Sigma$, $\vec{\nabla}_\Sigma = \left(\dfrac{\partial}{\partial\Sigma_1}, \dfrac{\partial}{\partial\Sigma_2}, \dfrac{\partial}{\partial\Sigma_3}\right)$. Здесь и далее индексы, обозначенные буквами латинского алфафиата, изменяются от 1 до 3, греческого – от 0 до 3. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

В работе [3] найдено нелинейное представление алгебры $AP(1,3)$ для электромагнитного поля $\vec{E}$, $\vec{H}$, которое в комплексной форме имеет вид:

$$\begin{gathered} AP^{\mathrm{nli}}(1,3) = \langle P_\mu = \partial_\mu,\ J_{ab}^{\mathrm{nli}} = J_{ab}^{\mathrm{lin}}, \\ \vec{J}_{0a}^{\mathrm{nli}} = x_0\partial_a + \vec{x}\partial_0 + N_a^{\mathrm{nli}}\rangle, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\vec{N}^{\mathrm{nli}} = (N_1^{\mathrm{nli}}, N_2^{\mathrm{nli}}, N_3^{\mathrm{nli}}) = \vec{\nabla}_\Sigma - \vec{\Sigma}(\Sigma_k\partial_{\Sigma_k})$.

Представления (2) и (3) не эквивалентны, поскольку для операторов (3) есть только один инвариант, а для операторов (2) – два. Изучим инвариантность системы (1) относительно операторов (3).

Теорема. *Уравнения Максвелла (1) инвариантны относительно представления алгебры $AP(1,3)$ (3) тогда и только тогда, когда дополнительно выполняются условия:*

$$\left[\partial_0 + \vec{\Sigma}\vec{\nabla}\right]\Sigma^k = 0, \qquad \left[\vec{\nabla} + \vec{\Sigma}\partial_0 - i\vec{\Sigma}\times\vec{\nabla}\right]\Sigma^k = 0. \tag{4}$$

Кроме того, система (1), (4) инвариантна относительно линейного представления $AP^{\mathrm{lin}}(1,3)$ (2).

Следствие. *Существует еще одно представление алгебры Пуанкаре, которое является алгеброй инвариантности данной системы.*

Действительно, рассмотрим множество операторов

$$J_{0a}^3 = x_0\partial_a + x_a\partial_0 + \alpha N_a^{\mathrm{lin}} + \beta N_a^{\mathrm{nli}}, \tag{5}$$

а также его пополнение с помощью операций коммутирования. В результате образуется алгебра Ли (вообще говоря, бесконечномерная). Несложно доказать следующее

Утверждение. *Пополнение множества (5) будет образовывать алгебру Пуанкаре тогда и только тогда, когда либо* $(\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, *либо* $(\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. *Эти представления эквивалентны относительно замены* $\vec{\Sigma} \to -\vec{\Sigma}$.

Явный вид операторов для $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ такой:

$$\begin{gathered} AP^3(1,3) = \langle P_\mu, J_{ab}^3 = x_a\partial_b - x_b\partial_a - \frac{i}{2}\varepsilon_{abc}(N_c^{\mathrm{lin}} + N_c^{\mathrm{nli}}), \\ J_{0a}^3 = x_0\partial_a + x_a\partial_0 + N_a^3 = \frac{1}{2}(J_{0a}^{\mathrm{lin}} + J_{0a}^{\mathrm{nli}})\rangle. \end{gathered} \tag{6}$$

Поскольку J_{0a}^{lin} и J_{0a}^{nli} являются операторами симметрии системы (1), (4), то она инвариантна относительно J_{0a}^3, а следовательно, и относительно представления $AP^3(1,3)$ (6). Заметим, что операторы пространственных поворотов J_{ab}^3, в отличие от представлений (2), (3), являются нелинейными относительно $\vec{\Sigma}$.

Нетрудно показать, что на решениях системы (4) справедливо соотношение

$$\vec{\Sigma}^2 = \Sigma^a\Sigma_a = 1 \tag{7}$$

или, в обозначениях электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}$,

$$\vec{E}\cdot\vec{H} = 0, \qquad \vec{E}^2 - \vec{H}^2 = 1.$$

Интересно отметить, что если Σ_a удовлетворяют условию (7), то представления (2), (3) и (6) связаны соотношениями:

$$\vec{N}^{\mathrm{nli}} = [i\vec{\Sigma}\times\vec{N}^{\mathrm{lin}}], \quad \vec{N}^{\mathrm{lin}} = [i\vec{\Sigma}\times\vec{N}^{\mathrm{nli}}], \quad \vec{N}_a^3 = [i\vec{\Sigma}\times\vec{N}_a^3].$$

Система уравнений (4) сильно переопределена: 12 уравнений относительно 3 неизвестных функций. Однако, можно перейти к 4 уравнениям относительно 2 неизвестных функций. Действительно, нетрудно проверить, что система (4) эквивалентна ее первому уравнению (для Σ_k), первой "компоненте"второго уравнения:

$$[\partial_1 + \Sigma_1\partial_0 - i\Sigma_2\partial_3 + i\Sigma_3\partial_2]\Sigma_k = 0$$

и условию (7). Отсюда, совершая подстановку $\Sigma_3 = \pm\sqrt{1 - \Sigma_1^2 - \Sigma_3^2}$, перейдем к системе 4 уравнений относительно Σ_1, Σ_2.

Система (1), (4) совместна, ее решением, например, является

$$\vec{\Sigma} = (1, i\varphi(t,x), \varphi(t,x)), \tag{8}$$

где $\partial_2\varphi + i\partial_3\varphi = 0$, $\partial_0\varphi + \partial_1\varphi = 0$, $\varphi \in \mathbb{C}$. Среди решений (8) есть такие

$$\vec{\Sigma} = (1, if(t - x_1), f(t - x_1)), \tag{9}$$

где f – произвольная дифференцируемая функция.

Таким образом, на определенном подмножестве решений уравнения Максвелла, включая плосковолновые (9), электромагнитное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ при поворотах в 4–мерном пространстве может преобразовываться не только как электромагнитный тензор, но и нелинейным образом.

2. Конечные преобразования. Решив соответствующую систему уравнений Ли, найдем конечные групповые преобразования, отвечающие операторам лоренцовых поворотов $J^3_{\mu\nu}$ (6) (для представления $AP^{\rm nli}(1,3)$ эти преобразования найдены в [3]):

$$\begin{gathered} J^3_{ab}: x_a \to \tilde{x}_a = x_a\cos(2\theta) - x_b\sin(2\theta), \\ x_b \to \tilde{x}_b = x_b\cos(2\theta) + x_a\sin(2\theta),\ x_c \to \tilde{x}_c = x_c,\ c \neq a,b, \\ \Sigma_k \to \tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma_k\cos\theta + (\delta_{kb}\Sigma_a - \delta_{ka}\Sigma_b - i\varepsilon_{abk})\sin\theta}{\cos\theta - i\varepsilon_{abc}\Sigma_c\sin\theta}, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} J^3_{0a}: x_0 \to \tilde{x}_0 = x_0{\rm ch}(2\theta) + x_a{\rm sh}(2\theta), \\ x_a \to \tilde{x}_a = x_a{\rm ch}(2\theta) + x_0{\rm sh}(2\theta),\ x_k \to \tilde{x}_k = x_k,\ k \neq a, \\ \Sigma_k \to \tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma_k{\rm ch}\theta + (\delta_{ka} - i\varepsilon_{akl}\Sigma_l){\rm sh}\theta}{{\rm ch}\theta + \Sigma_a{\rm sh}\theta}. \end{gathered} \tag{11}$$

Преобразования (10), (11) можно использовать для группового размножения решений уравнений Максвелла, воспользовавшись, например, начальным решением (8). Вновь полученные решения можно затем размножать с помощью групп симметрии уравнений Максвелла.

3. Обобщение уравнений Максвелла. В работе [4] были рассмотрены нелинейные обобщения уравнений Максвелла вида:

$$\vec{\nabla}\vec{\Sigma} = A(\omega)\partial_0\omega, \quad \partial_0\vec{\Sigma} + i\vec{\nabla}\times\vec{\Sigma} = A(\omega)\vec{\nabla}(\omega), \tag{12}$$

где ω – инварианты алгебры (2) $AP^{\rm lin}(1,3)$. Изучим следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered} \vec{\nabla}\vec{\Sigma} = A(\Omega)\partial_0\Omega + B(\Omega)\vec{\Sigma}\vec{\nabla}\Omega, \\ \partial_0\vec{\Sigma} + i\vec{\nabla}\times\vec{\Sigma} = A(\Omega)\vec{\nabla}(\Omega) + B(\Omega)(\vec{\Sigma}\partial_0\Omega - i\vec{\Sigma}\times\vec{\nabla}\Omega), \end{gathered} \tag{13}$$

где $\Omega = f(\mathbf{\Sigma_a^2})$. Без ограничения общности можно положить $\Omega = \ln\sqrt{\Sigma_a^2 - 1}$. При $B = 0$ система (13) имеет вид (12). Справедлива следующая

Теорема. *Система уравнений (13) инвариантна относительно линейного представления алгебры Пуанкаре (2) при любых $A(\Omega)$, $B(\Omega)$, а относительно нелинейного представления (3) – тогда и только тогда, когда $A = B = 1$. В этом случае правая часть уравнений (13) совпадает с левой частью уравнений (4), если в них сделать замену $\Sigma^k \to \Omega$.*

Из теоремы следует, что система (13) при $A = B = 1$ инвариантна также относительно представления алгебры Пуанкаре $AP^3(1,3)$ (6).

Запишем уравнения (13) в ковариантной форме. Для этого введем антисимметричный тензор $G^{\mu\nu}$ так, чтобы

$$G^{0a} = \Sigma_a,\ G^{ab} = -i\varepsilon_{abc}\Sigma_c. \tag{14}$$

Тензор $G^{\mu\nu}$ можна записать в терминах тензора электромагнитного поля $F^{\mu\nu}$: $G^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} + i\tilde{F}^{\mu\nu}$, где $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\delta}F^{\rho\delta}$.

В этих обозначениях (13) переписывается в виде

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = G^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi - \partial^\nu\varphi, \qquad \varphi = \ln\sqrt{-\frac{G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}}{4} - 1}. \tag{15}$$

(Для уравнений Максвелла (1) $\varphi \equiv 0$).

Автор выражает благодарность ДФФД Украины за частичную финансовую поддержку данной работы (проект № 1.4/356).

[1] Fushchych W.I., Nikitin A.G. Symmetries of Maxwell's equations. – Dordrecht: Reidel Publ. Comp., 1987.

[2] Fushchych W.I., Nikitin A.G. Symmetry of equation of quantum mechanics. – New York: Allerton Press, 1994.

[3] Fushchych W., Tsyfra I., Boyko V. Nonlinear representations for Poincaré and Galilei algebras and nonlinear equations for electromagnetic fields // J. Nonlin. Math. Phys. – 1994. – **1**, № 2. – P. 210–221.

[4] Fushchych W., Tsyfra I. On new Galilei and Poincaré invariant nonlinear equations for electromagnetic fields // J. Nonlin. Math. Phys. – 1997. – **4**, № 1–2. – P. 44–48.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 226–231

УДК 519.944:519.46

Дискретна симетрія і деякі точні розв'язки самодуальних рівнянь

В.І. СТОГНІЙ

Національний технічний Університет України (КПІ), Київ

Запропоновано метод побудови (генерування) нескінченних ланцюжків точних розв'язків системи самодуальних рівнянь. Цей метод базується на одночасному використанні як ліївської (неперервної), так і неліївської (дискретної) симетрій цих рівнянь.

We suggest a method for construction (generation) 0f infinite chains of exact solutions of system of self-dual equations. This method is based on simultaneous using of Lie (continious) and non-Lie (discrete) symmetry of these equations.

Метод симетрійної редукції є одним з ефективних методів побудови широких класів точних розв'язків багатьох рівнянь математичної фізики, які мають нетривіальні групи симетрій [1–4].

Розглянемо систему самодуальних рівнянь [5, 6]

$$f_{y\overline{y}} + f_{z\overline{z}} = [f_y, f_z], \tag{1}$$

де $f = f(y, \overline{y}, z, \overline{z})$ – елементи алгебри $sl(2)$ вигляду такі що

$$f = f^+(y, \overline{y}, z, \overline{z})X^+ + f^0(y, \overline{y}, z, \overline{z})H + f^-(y, \overline{y}, z, \overline{z})X^-. \tag{2}$$

Базисні елементи алгебри $sl(2)$ $X^\pm$, H задовольняють такі співвідношення

$$[X^+, X^-] = H, \qquad [H, X^\pm] = \pm 2X^\pm. \tag{3}$$

Підставляючи (2), (3) в (1), отримуємо такі три рівняння:

$$\begin{aligned} &f^+_{y\overline{y}} + f^+_{z\overline{z}} = 2(f^0_y f^+_z - f^0_z f^+_y),\\ &f^0_{y\overline{y}} + f^0_{z\overline{z}} = f^+_y f^-_z - f^+_z f^-_y,\\ &f^-_{y\overline{y}} + f^-_{z\overline{z}} = 2(f^-_y f^0_z - f^-_z f^0_y). \end{aligned} \tag{4}$$

В роботі [5] знайдені дискретні перетворення

$$F^- = \frac{1}{f^+}, \qquad F^0 = f^0 + \frac{R_1}{f^+}, \qquad F^+ = R_2 - \frac{R_1^2}{f^+}, \tag{5}$$

де функції R_1, R_2 є розв'язками системи диференціальних рвінянь

$$\begin{aligned} &R_{1y} = f^+_{\overline{z}} - 2f^0_y f^+, \quad R_{2y} = R_{1\overline{z}} - 2f^0_y R_1 - (f^+)^2 f^-_y,\\ &R_{1z} = -f^+_{\overline{y}} - 2f^0_z f^+, \quad R_{2z} = -R_{1\overline{y}} - 2f^0_z R_1 - (f^+)^2 f^-_z, \end{aligned}$$

які переводять множину розв'язків рівнянь (4) в себе.

Використовуючи позначення

$$\begin{aligned} &f^+ = u, \quad f^0 = v, \quad f^- = w,\\ &y = y_1, \quad \overline{y} = y_2, \quad z = z_1, \quad \overline{z} = z_2, \end{aligned}$$

можна переписати рівняння (4) у вигляді системи нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

$$\begin{aligned} &u_{y_1y_2} + u_{z_1z_2} = 2(v_{y_1}u_{z_1} - v_{z_1}u_{y_1}),\\ &v_{y_1y_2} + v_{z_1z_2} = u_{y_1}w_{z_1} - u_{z_1}w_{y_1}),\\ &w_{y_1y_2} + w_{z_1z_2} = 2(w_{y_1}v_{z_1} - w_{z_1}v_{y_1}), \end{aligned} \tag{6}$$

а дискретні перетворення (5) будуть мати вигляд

$$U = R_2 - \frac{R_1^2}{u}, \qquad V = v + \frac{R_1}{u}, \qquad W = \frac{1}{u}, \tag{7}$$

де функції R_1, R_2 є розв'язками такої системи

$$\begin{aligned} &R_{1y_1} = u_{z_2} - 2uv_{y_1}, \qquad R_{2y_1} = R_{1z_2} - 2v_{y_1}R_1 - u^2 w_{y_1},\\ &R_{1z_1} = -u_{y_2} - 2uv_{z_1}, \qquad R_{2z_1} = -R_{1y_2} - 2v_{z_1}R_1 - u^2 w_{z_1}. \end{aligned}$$

Дослідимо симетрійні властивості системи рівнянь (6).

Теорема. *Максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності рівняння (6) є 18-вимірна алгебра Лі, базисні елементи якої мають вигляд:*

1. Генератори групи лінійних перетворень координат

$$\begin{aligned} &P_1 = \partial_{y_1}, \quad P_2 = \partial_{y_2}, \quad P_3 = \partial_{z_1}, \quad P_4 = \partial_{z_2},\\ &J_1 = y_2\partial_{z_1} - z_2\partial_{y_1}, \quad J_2 = y_2\partial_{y_2} + z_1\partial_{z_1},\\ &J_3 = z_1\partial_{y_1} - y_2\partial_{z_2}, \quad J_4 = y_1\partial_{y_1} + z_2\partial_{z_2},\\ &J_5 = y_1\partial_{z_1} - z_2\partial_{y_2}, \quad J_6 = -y_2\partial_{y_2} - z_2\partial_{z_2} + 2u\partial_u + v\partial_v. \end{aligned}$$

2. Генератори групи конформних перетворень

$$
\begin{aligned}
K_1 = {} & -y_1 z_2 \partial_{y_1} - y_2 z_2 \partial_{y_2} + y_1 y_2 \partial_{z_1} - z_2^2 \partial_{z_2} + \\
& +2 z_2 u \partial_u + \left(z_2 v + \frac{1}{2} y_1 \right) \partial_v, \\
K_2 = {} & -z_1 z_2 \partial_{y_1} + y_2^2 \partial_{y_2} + y_2 z_1 \partial_{z_1} + y_2 z_2 \partial_{z_2} - \\
& -2 y_2 u \partial_u + \left(-y_2 v + \frac{1}{2} z_1 \right) \partial_v .
\end{aligned}
$$

3. Генератори групи калібровочних перетворень

$$
\begin{aligned}
& G_1 = f_1 \partial_u, \quad G_2 = f_2 \partial_v, \quad G_3 = f_3 \partial_w, \\
& G_4 = (2 v_1 g_1 - y_1 g_{1 z_2} + z_1 g_{1 y_2}) \, \partial_u - w g_1 \partial_v, \\
& G_5 = -u g_2 \partial_u + \frac{1}{2} (-y_1 g_{2 z_2} + z_1 g_{2 y_2}) \partial_v + w g_2 \partial_w, \\
& G_6 = u g_3 \partial_v + (-2 v g_3 - y_1 g_{3 z_2} + z_1 g_{3 y_2}) \partial_w,
\end{aligned}
$$

де f_i, g_i, $i = 1, 2, 3$ – довільні функції від y_2, z_2.

Доведення теореми можна отримати за допомогою методу Лі.

Розглянемо приклади використання дискретної та неперервної симетрії для побудови точних розв'язків системи самодуальних рівнянь (6).

За допомогою оператора

$$J_5 = y_1 \partial_{z_1} - z_2 \partial_{y_2}$$

знаходимо анзац для функцій u, v, w

$$
\begin{aligned}
& u = f(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad v = g(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \quad w = h(\omega_1, \omega_2, \omega_3), \\
& \omega_1 = y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad \omega_2 = y_1, \quad \omega_3 = z_2 .
\end{aligned} \tag{8}
$$

Підстановка (8) в систему рівнянь (6) редукує її до системи диференціальних рівнянь з частинними похідними з трьома незалежними змінними

$$
\begin{aligned}
& f_{\omega_1 \omega_1} \omega_1 + f_{\omega_1 \omega_2} \omega_2 + f_{\omega_1 \omega_3} \omega_3 + 2 f_{\omega_1} = 2 (f_{\omega_1} g_{\omega_2} - g_{\omega_1} f_{\omega_2}) \omega_3, \\
& g_{\omega_1 \omega_1} \omega_1 + g_{\omega_1 \omega_2} \omega_2 + g_{\omega_1 \omega_3} \omega_3 + 2 g_{\omega_1} = (f_{\omega_2} h_{\omega_1} - f_{\omega_1} h_{\omega_2}) \omega_3, \\
& h_{\omega_1 \omega_1} \omega_1 + h_{\omega_1 \omega_2} \omega_2 + h_{\omega_1 \omega_3} \omega_3 + 2 h_{\omega_1} = 2 (h_{\omega_2} g_{\omega_1} - h_{\omega_1} f_{\omega_2}) \omega_3 .
\end{aligned} \tag{9}
$$

Дискретні перетворення (7) перейдуть в дискретні перетворення

$$
F = R^2 - \frac{R_1^2}{f}, \qquad G = g + \frac{R^1}{f}, \qquad H = \frac{1}{f}, \tag{10}
$$

де функції R_1, R_2 є розв'язками системи

$$
\begin{aligned}
& R^1_{\omega_1} = -f_{\omega_1} \frac{\omega_2}{\omega_3} - 2 f g_{\omega_1}, \\
& R^1_{\omega_2} = f_{\omega_1} \frac{\omega_1}{\omega_3} + f_{\omega_3} - 2 f g_{\omega_2}, \\
& R^2_{\omega_1} = -R^1_{\omega_1} \frac{\omega_2}{\omega_3} - 2 g_{\omega_1} R^1 - f^2 h_{\omega_1}, \\
& R^2_{\omega_2} = R^1_{\omega_1} \frac{\omega_1}{\omega_3} + R^1_{\omega_3} - 2 g_{\omega_2} R^1 - f^2 h_{\omega_2} .
\end{aligned}
$$

Безпосередньою перевіркою можна впевнитися, що система (9) інваріантна відносно групи (10). Аналогічно, для двовимірної алгебри Лі з базисними елементами

$$J_5 = y_1 \partial_{z_1} - z_2 \partial_{y_2}, \qquad J_2 - J_4 = y_2 \partial_{y_2} + z_1 \partial_{z_1} - y_1 \partial_{y_1} - z_2 \partial_{z_2}$$

знаходимо анзац для функцій u, v, w

$$
\begin{aligned}
& u = f(\omega_1, \omega_2), \quad v = g(\omega_1, \omega_2), \quad w = h(\omega_1, \omega_2), \\
& \omega_1 = y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad \omega_2 = \frac{y_1}{z_2} .
\end{aligned} \tag{11}
$$

Система редукованих рівнянь має вигляд

$$
\begin{aligned}
& f_{\omega_1 \omega_1} \omega_1 + 2 f_{\omega_1} = 2 (f_{\omega_1} g_{\omega_2} - f_{\omega_2} g_{\omega_1}), \\
& g_{\omega_1 \omega_1} \omega_1 + 2 g_{\omega_1} = h_{\omega_1} f_{\omega_2} - h_{\omega_2} f_{\omega_1}, \\
& h_{\omega_1 \omega_1} \omega_1 + 2 h_{\omega_1} = 2 (h_{\omega_2} g_{\omega_1} - h_{\omega_1} g_{\omega_2}),
\end{aligned} \tag{12}
$$

а відповідні дискретні перетворення будуть такі:

$$
F = R^2 - \frac{R_1^2}{f}, \qquad G = g + \frac{R_1}{f}, \qquad H = \frac{1}{f}, \tag{13}
$$

де функції R_1, R_2 є розв'язками системи

$$
\begin{aligned}
& R^1_{\omega_1} = -f_{\omega_1} \omega_2 - 2 f g_{\omega_1}, \\
& R^1_{\omega_2} = f_{\omega_1} \omega_1 - f_{\omega_2} \omega_2 - 2 f g_{\omega_2}, \\
& R^2_{\omega_1} = -R^1_{\omega_1} \omega_2 - 2 g_{\omega_1} R^1 - f^2 h_{\omega_1}, \\
& R^2_{\omega_2} = R^1_{\omega_1} \omega_1 - R^1_{\omega_2} \omega_2 - 2 g_{\omega_2} R^1 - f^2 h_{\omega_2} .
\end{aligned}
$$

Для генерування ланцюжків точних розв'язків системи (12) візьмемо за початковий розв'язок цієї системи такий розв'язок:

$$f = \frac{K_1}{\omega_1}, \quad g = 0, \quad h = 0, \quad K_1 = \text{const}, \tag{14}$$

і подіємо на нього дискретним перетворенням (13). В результаті одержимо

$$F = -\frac{C_1^2\omega_1}{K_1} + 2C_1\omega_2 + C_2, \quad G = \frac{C_1\omega_1}{K_1} - \omega_2, \quad H = \frac{\omega_1}{K_1}, \tag{15}$$

де C_1, C_2 – довільні константи.

Або, взявши більш загальний розв'язок

$$f = \frac{K_1}{\omega_1}, \quad g = \frac{K_2}{\omega_1}, \quad h = \frac{K_3}{\omega_1}, \qquad K_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{16}$$

отримаємо

$$\begin{gathered} F = -\frac{C_1^2\omega_1}{K_1} + 2C_1\omega_2 + C_2 - \frac{K_1K_2^2 + K_1^2K_3}{3\omega_1^3}, \\ G = \frac{C_1\omega_1}{K_1} - \omega_2 - \frac{K_2}{\omega_1}, \quad H = \frac{\omega_1}{K_1}, \end{gathered} \tag{17}$$

де C_1, C_2 – довільні константи.

Знову подіявши на розв'язок (15) і (17) перетворенням (13), будемо отримувати нові точні розв'язки системи (12).

Зауважимо, що обидва ланцюжки є нескінченними. Ми навели лише перші два члени, щоб проілюструвати ефективність нашого підходу до проблеми побудови точних розв'язків самодуальних рівнянь (1).

Використовуючи розв'язки (14)–(17) і анзац (11), можна виписати множину точних розв'язків системи нелінійних рівнянь (6):

$$u = \frac{K_1}{y_1y_2 + z_1z_2}, \quad v = 0, \quad w = 0;$$

$$u = -\frac{C_1^2}{K_1}(y_1y_2 + z_1z_2) + 2C_1\frac{y_1}{z_2} + C_2,$$

$$v = \frac{C_1}{K_1}(y_1y_2 + z_1z_2) - \frac{y_1}{z_2}, \quad w = \frac{1}{K_1}(y_1y_2 + z_1z_2);$$

$$u = \frac{K_1}{y_1y_2 + z_1z_2}, \quad v = \frac{K_2}{y_1y_2 + z_1z_2}, \quad w = \frac{K_3}{y_1y_2 + z_1z_2};$$

$$u = -\frac{C_1^2}{K_1}(y_1y_2 + z_1z_2) + 2C_1\frac{y_1}{z_2} + C_2 - \frac{K_1K_2^2 + K_1^2K_3}{3(y_1y_2 + z_1z_2)^3},$$

$$v = \frac{C_1}{K_1}(y_1y_2 + z_1z_2) - \frac{y_1}{z_2} - \frac{K_2}{y_1y_2 + z_1z_2},$$

$$w = \frac{1}{K_1}(y_1y_2 + z_1z_2).$$

Висловлюю подяку провідному науковому співробітнику відділу прикладних досліджень Р.З. Жданову за постановку задач.

[1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[2] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.

[3] Фущич В.И., Жданов Р.З. Нелинейные спинорные уравнения: симметрия и точные решения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 288 с.

[4] Lahno V., Zhdanov R., Fushchych W. Symmetry reduction and exact solutions of the Yang-Mills equations // J. Nonlin. Math. Phys. – 1995. – **2**, № 1. – P. 51–72.

[5] Leznov A.N., Bäcklung transformation for self-dual Yang-Mills equations in the case of arbitrary semisimple gauge algebra. – Protvino, 1991. – (Preprint / IHEP 91–137 DTP).

[6] Devchand Ch., Leznov A.N. Bäcklung transformation for suppersymmetric self-dual theories for semisimple Gauge groups and hierarchy of A_1 solutions. – Protvino, 1992. – (Preprint / IHEP DTP 92–170).

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 232–242

УДК 517.9

О поведении на бесконечности решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка

В.И. СУКРЕТНЫЙ, Ф.С. ОБАИД

Институт математики НАН Украины, Киев

В роботі показано, що розв'язок змішаної крайової задачі для еліптичного рівняння другого порядку з періодичними коефіцієнтами та з експоненціально спадаючими правими частинами збігається на нескінченності до деякої константи, яка знайдена.

It is shown that an arbitrary solution of the mixed boundary-value problem for an second-order elliptic equation with periodic coefficients and with exponentially decreasing right hand sides converges at infinity to a constant. This constant is found.

Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_i < 1, i = 0, 1, \dots, n-1,\ x_n \in (-\infty, \infty)\}$, $\Omega(t_1, t_2) = \Omega \cap \{t_1 < x_n < t_2\}$, $\Omega_0 = \Omega \cap \{x_n > 0\}$ и $S_0 = \Omega \cap \{x_n = 0\}$.

Через $H_2^1(\Omega)$ обозначим, как обычно, пространство функций с нормой

$$\|u\|^2_{H_2^1(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|^2_{L_2(\Omega)},$$

а через $\hat{H}_2^1(\Omega(t_1, t_2))$ обозначим пополнение по норме пространства $H_2^1(\Omega(t_1, t_2))$ множества 1-периодических по $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ и бесконечно дифференцируемых на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n :\ t_1 < x_n < t_2\}$ функций. Через $\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)$ обозначим пространство следов 1-периодических по $\hat{x}$ функций, имеющих ограниченную норму в $H_2^1(\Omega(0,1))$. Норма в $\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)$ определяется равенством

$$\|\Psi_0(\hat{x})\|_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)} = \inf_v \left\{ \|v\|_{H_2^1(\Omega)}, v \in \hat{H}_2^1(\Omega(0,1)), v = \Psi_0(\hat{x}), x \in S_0 \right\}.$$

В области Ω_0 рассмотрим следующую задачу:

$$Lu(x) = f_0(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_k}, \quad x \in \Omega_0, \tag{1}$$

$$\theta(\hat{x})u(x) + \sigma(u) = \Psi_0(\hat{x}), \qquad x \in S_0, \tag{2}$$

$$u(x) \quad - \quad \text{1-периодична по } \hat{x}, \qquad \int_{\Omega_0} E(u)\, dx < \infty, \tag{3}$$

где $Lu(x) = \sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)$, $E(v) = \sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}$,

$$\sigma(u) = \sum_{i,j=1}^n \nu_i a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}, \quad \int_{\Omega_0} f_k^2(x) e^{\gamma x_n}\, dx < \chi, \quad \gamma > 0.$$

Все функции, входящие в правые и левые части (1)–(2), – ограниченные измеримые функции и являются 1-периодическими по $\hat{x}$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\theta(\hat{x}) > 0$, $\{\Psi_0(\hat{x}), \theta(\hat{x})\} \subset \hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)$, $f_k(\hat{x}) \in L^2(\Omega(s_1, s_2))$, $k = 0, \dots, n$, $(\nu_1, \dots, \nu_n)$ – вектор внешней нормами к $\partial\Omega(0, s_1)$.

Кроме того, для оператора L выполнено следующее условие эллиптичности:

$$\lambda_0 |\xi|^2 \equiv \lambda_0 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i x i_j \le \lambda_1 |\xi|^2, \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Здесь λ_0 и λ_1 – положительные постоянные. Будем называть функцию $u \in \hat{H}^1(\Omega(0, s_1))$, $s_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, обобщенным решением задачи (1)–(3), если для любой функции $v \in \hat{H}^1(\Omega(0, s_1))$ выполняется интегральное тождество

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega(0,s_1)} a_{ij}(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\, dx &= \int_{S_0} \sigma(u) v(x)\, d\hat{x} + \\ + \int_{S_{s_1}} \sigma(u) v(x)\, d\hat{x} - \int_{S_{s_1}} f_k(x) v(x)\, d\hat{x} &- \int_{S_0} f_k(x) v(x)\, d\hat{x} + \\ + \sum_{k=1}^n \int_{\Omega(0,s_1)} f_k(x) \frac{\partial v(x)}{\partial x_k}\, dx &- \int_{\Omega(0,s_1)} f_0(x) v(x)\, dx. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 1 [5]. *В области $\Omega(t_1,t_2)$ любая функция $u \in H^1(\Omega(t_1,t_2))$ имеет след на $\partial(\Omega(t_1,t_2))$ и выполняется неравенство*

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega(t_1,t_2))} \le K\,[t_2-t_1]^{-1}\,\|u\|_{H^1(\Omega(t_1,t_2))}\,, \tag{6}$$

где постоянная K не зависит от t_1, t_2.

Из результатов работы [2] следует, что для решения уравнения (1) в области $\Omega(0,s_1+s_2)$ справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(u)\,dx \;\le\; K_1 e^{-As_2} \int\limits_{\Omega(0,s_1+s_2)} E(u)\,dx. \tag{7}$$

где положительная постоянная A не зависит от s_1, s_2.

Лемма 1. *Пусть функция $R(x)$ – 1-периодическое по $\hat{x}$ обобщенное решение следующей задачи:*

$$LR(x) = F_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_k}, \qquad x \in \Omega(0,s_1), \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \theta(\hat{x})R(x) + \sigma(R) = \Psi_0(\hat{x}), \qquad x \in S_0, \\ \sigma(R) = \Psi_1(\hat{x}) + \sum_{k=1}^{n} \nu_k F_k(x), \qquad x \in S_{s_1} \end{gathered} \tag{9}$$

Тогда для $R(x)$ справедлива оценка

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(R)\,dx \;\le\; M_0\,\|\Psi_0\|^2_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)} + M_1\,\|\Psi_1\|^2_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_{s_1})} + \\ + M_2\,\|F_n\|^2_{L^2(S_0)} + M_3 e^{b_1 s_1} \sum_{k=0}^{n} \left\|e^{-b_1 x_n} F_k\right\|^2_{L^2(\Omega(0,s_1))}\,, \end{gathered} \tag{10}$$

где b_1 и M_i – постоянные, не зависящие от s_i, $i = 0,\ldots,3$.

Доказательство. Используя интегральное тождество (5) для задачи (8)–(9) при $v = R(x)$, условие эллиптичности (4) и неравенство (6), получаем

$$\int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(R)\,dx \;\le\; \int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(R)\,dx + \int\limits_{S_0} \theta(\hat{x})R^2 d\hat{x} \;=$$

$$= \left| \int\limits_{S_0} \Psi_0 R\,d\hat{x} + \int\limits_{S_{s_1}} \Psi_1 R\,d\hat{x} + \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega(0,s_1)} e^{b_1 x_n} e^{-b_1 x_n} F_k \frac{\partial R}{\partial x_k}\,dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{S_0} F_n R\,d\hat{x} + \int\limits_{\Omega(0,s_1)} e^{b_1 x_n} e^{-b_1 x_n} F_0 R\,dx \right| \le$$

$$\le K_1\,\|\Psi_0\|_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)}\,\|R\|_{H^1_2(\Omega(0,s_1))} + K_2\,\|F_n\|_{L^2(S_0)}\,\|R\|_{H^1_2(\Omega(0,s_1))} +$$

$$+ K_3 \left(\int\limits_{\Omega(0,s_1)} e^{-2b_1 x_n} F_0^2 dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega(0,s_1)} e^{2b_1 x_n} R^2 dx \right)^{1/2} +$$

$$+ K_4 \sum_{k=1}^{n} \left(\int\limits_{\Omega(0,s_1)} e^{-2b_1 x_n} F_k^2 dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega(0,s_1)} e^{2b_1 x_n} R^2 dx \right)^{1/2} +$$

$$+ K_5 \|\Psi_1\|_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)} \|R\|_{H^1_2(\Omega(0,s_1))} \;\le\; K_6 \|\Psi_0\|_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)} \|R\|_{H^1_2(\Omega(0,s_1))} +$$

$$+ K_7\,\|\Psi_1\|_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_{s_1})}\,\|R\|_{H^1_2(\Omega(0,s_1))} + K_8\,\|F_n\|_{L^2(S_0)}\,\|R\|_{H^1_2(\Omega(0,s_1))} +$$

$$+ K_9\, e^{b_1 s_1} \sum_{k=0}^{n} \left(\int\limits_{\Omega(0,s_1)} e^{-2b_1 x_n} F_k^2 dx \right)^{1/2} \|R\|_{H^1_2(\Omega(0,s_1))}\,.$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(R)\,dx \;\le\; K_{10}\,\|\Psi_0\|_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)} + K_{11}\,\|\Psi_1\|_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_{s_1})} + \\ + K_{12}\,\|F_n\|_{L^2(S_0)} + K_{13}\, e^{b_1 s_1} \sum_{k=0}^{n} \left\|e^{-b_1 x_n} F_k\right\|_{H^1_2(\Omega(0,s_1))}\,, \end{gathered}$$

где постоянные K_i, $i = 1,\ldots,13$, не зависят от s_1. Лемма доказана.

Пусть функция $w(x)$ принадлежит классу растущих решений при $x_n \to \infty$ и определяется как 1-периодическое по $\hat{x}$ обобщенное решение следующий задачи:

$$Lw(x) = F_0(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k(x)}{\partial x_k}, \quad x \in \Omega_0, \tag{11}$$

$$\theta(\hat{x})w(x) + \sigma(w) = \Psi_0(\hat{x}), \qquad x \in S_0, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\Omega_0} E(w)\,dx = \infty. \tag{13}$$

Теорема 2. *В области Ω_0 рассмотрим задачу (11)–(13). Пусть*

$$\int\limits_{\Omega_0} F_k^2 e^{-\gamma_3 x_n}\,dx < \gamma_4, \quad \gamma_3, \gamma_4 > 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Тогда существует единственное 1-периодическое по $\hat{x}$ обобщенное решение $w(x)$ и для этого решения справедлива оценка

$$\int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(w)\,dx \;\le\; M_0\,\|\Psi_0\|^2_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)} + M_1\,\|F_n\|^2_{L^2(S_0)} + M_2 e^{b_1 s_1}, \tag{15}$$

где M_i, $i = 0, 1, 2$, – константы, не зависящие от s_1.

Доказательство. Пусть $w^{s_1}(x)$ – 1-периодические по $\hat{x}$ обобщенные решения задачи (8) и (9) при $\Psi_1(\hat{x}) = 0$. Тогда из (14) и леммы 1 следует, что

$$\int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(w^{s_1})\,dx \;\le\; M_0\,\|\Psi_0\|^2_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)} + M_1\,\|F_n\|^2_{L^2(S_0)} + M_2 e^{b_1 s_1}, \tag{16}$$

где M_i, $i = 0, 1, 2$, – константы, не зависящие от s_1.

Теперь рассмотрим функцию $w_1^{s_1+s_2} - w_2^{s_1+s_2+s}$, где $s_1, s_2, s \in \mathbb{R}$. Подставим эту функцию в неравенство (7) и используем неравенство (16):

$$\int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(w_1^{s_1+s_2} - w_2^{s_1+s_2+s})\,dx \;\le$$

$$\le\; K_1\,e^{-As_2} \int\limits_{\Omega(0,s_1+s_2)} E(w_1^{s_1+s_2} - w_2^{s_1+s_2+s})\,dx \;\le$$

$$\le\; K_1\,e^{-As_2}\left(M_0\,\|\Psi_0\|^2_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)} + M_1\,\|f_n\|^2_{L^2(S_0)} + M_2 e^{b_1(s_1+s_2)}\right),$$

где $A = \mathrm{const} > 0$, $0 < s_1 \le s_2$.

Если выберем $b_1 = A - b_2$, $b_2 \in (0, A)$, то, используя неравенство Фридрихса [4], находим

$$\left\|w_1^{s_1+s_2} - w_2^{s_1+s_2+s}\right\|^2_{H_2^1(\Omega(0,s_1))} \;\le$$

$$\le\; M_6 \int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(w_1^{s_1+s_2} - w_2^{s_1+s_2+s})\,dx \;\le\; M_5\,e^{(A-b_2)s_1} e^{-b_2 s_2} + \tag{17}$$

$$+\,e^{-As_2}\left(M_3\,\|\Psi_0\|^2_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)} + M_4\,\|F_n\|^2_{L^2(S_0)}\right).$$

Заметим, что для любого s_1

$$\lim_{s_2\to\infty} \left\|w_1^{s_1+s_2} - w_2^{s_1+s_2}\right\|_{H_2^1(\Omega(0,s_1))} = 0$$

и, кроме того, $\theta(\hat{x})\left(w_1^{s_1+s_2} - w_2^{s_1+s_2+s}\right) + \sigma\left(w_1^{s_1+s_2} - w_2^{s_1+s_2+s}\right) = 0$ на S_0. Т.о. для последовательности функций $\{w^{s_2}\}$ получим

$$\lim_{s_2\to\infty} \{w^{s_2}\} = w,$$

где w представляет собой решение задачи (11)–(13).

Из (17) при $s_2 = 0$, устремляя $s \to \infty$, находим

$$\int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(w)\,dx \;\le\; \int\limits_{\Omega(0,s_1)} E(w^{s_1})\,dx \,+ \tag{18}$$

$$+\,M_7\,\|\Psi_0\|^2_{\hat{H}_{\frac{1}{2}}(S_0)} \;+\; M_8\,\|f_n\|^2_{L^2(S_0)} \;+\; M_9\,e^{b_1 s_1}.$$

Подставляя неравенство (15) в (18), получаем утверждение теоремы.

Замечание. В области Ω_0 рассмотрим задачу (11)–(14) при $\Psi_1(\hat{x}) = F_k(x) = 0$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$\int\limits_{\Omega(s,s+1)} E(w)\,dx \;\le\; K_0, \tag{19}$$

$$\|w\|_{H_2^1(\Omega(s,s+1))} \;\le\; K_1 s + K_2, \tag{20}$$

где K_i, $i = 0, 1, 2$, – константы, не зависящие от s.

Для обобщенного решения задачи (11)–(13) $w(x)$ определим обобщенный момент $P(s,w)$ следующим образом

$$P(s,w) = \sum_{i=1}^{n} \int_{S_s} a_{ni} \frac{\partial w}{\partial x_n} \, d\hat{x}. \tag{21}$$

Пусть $w_0(x)$ – обобщенное решение задачи (11)–(13) при $F_k(x) = 0$, $k = \overline{1,n}$, такое, что $P(0, w_0) = -1$. Тогда справедливо равенство [2]

$$P(s_2, w_0) - P(s_1, w_0) = \int_{\Omega(s_1,s_2)} F_0(x) \, dx. \tag{22}$$

Отсюда в случае $s_1 = 0$ и $F_0(x) = 0$ получаем

$$P(s_2, w_0) = P(0, w_0). \tag{23}$$

Теорема 3. *В области Ω_0 рассмотрим задачу (1)–(3). Тогда существует постоянная C^∞ и положительные постоянные $\chi_1, \chi_2 > 0$ такие, что для любого $s > 0$ справедливо неравенство*

$$\|u - C^\infty\|_{H_2^1(\Omega(s,s+1))} \le \chi_1 e^{-\chi_2 s}, \tag{24}$$

где

$$C^\infty = -\int_{S_0} [\Psi_0 - f_n] \, w_0 \, d\hat{x} - \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega(0,\infty)} f_k \frac{\partial w_0}{\partial x_k} \, dx + \int_{\Omega(0,\infty)} f_0 w_0 \, dx$$

в случае задачи Неймана ($b_0 = 0$, $b_1 = 1$, $\theta(\hat{x}) = 1$);

$$C^\infty = \int_{S_0} \left[\sigma(w_0) \frac{\psi_0}{\theta} - f_n w_0 \right] d\hat{x} - \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega(0,\infty)} f_k \frac{\partial w_0}{\partial x_k} dx + \int_{\Omega(0,\infty)} f_0 w_0 \, dx$$

в случае смешанной краевой задачи ($b_0 = 1$, $b_1 = 1$).

Доказательство. Рассмотрим непрерывные функции

$$\Phi(x_n) = \begin{cases} 1, & 0 \le x_n \le s, \\ (-x_n + s + 1), & s \le x_n \le s + 1, \\ 0, & s + 1 \le x_n. \end{cases}$$

Используем интегральное тождество (5) для решения задачи (1), (2) с пробными функциями $v = \Phi(x_n) w_0(x)$:

$$\begin{gathered} \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega(0,s+1)} a_{ij} \frac{\partial (w_0 \Phi)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx = \int_{\partial\Omega(0,s+1)} \sigma(u) w_0 \Phi \, dS - \\ - \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial\Omega(0,s+1))} \nu_k f_k w_0 \Phi \, dS + \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega(0,s+1)} f_k \frac{\partial (w_0 \Phi)}{\partial x_k} \, dx - \int_{\Omega(0,s+1)} f_0 w_0 \Phi \, dx. \end{gathered} \tag{25}$$

Пусть

$$\begin{aligned} I^1(s) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega(0,s+1)} a_{ij} \frac{\partial (w_0 \Phi)}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \, dx, \\ I^2(s) &= \int_{\partial\Omega(0,s+1)} \sigma(u) w_0 \Phi \, dS, \\ I^3(s) &= -\sum_{k=1}^{n} \int_{\partial\Omega(0,s+1))} \nu_k f_k w_0 \Phi \, dS + \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega(0,s+1)} f_k \frac{\partial (w_0 \Phi)}{\partial x_k} \, dx - \\ &\quad - \int_{\Omega(0,s+1)} f_0 w_0 \Phi \, dx \end{aligned} \tag{26}$$

Рассмотрим $I^1(s)$, $I^2(s)$ и $I^3(s)$. Поскольку $\Phi(x_n) = 0$ на S_{s+1}, то

$$I^2(s) = \int_{\partial\Omega(0,s)} \sigma(u) \Phi w_0 \, dS = \int_{S_0} \sigma(u) w_0 \, d\hat{x} = I^2. \tag{27}$$

$$\lim_{s\to\infty} I^3(s) = \int_{S_0} f_n w_0 \, d\hat{x} + \sum_{k=1}^{n} \int_{\Omega(0,\infty)} f_k \frac{\partial w_0}{\partial x_k} \, dx - \int_{\Omega(0,\infty)} f_0 w_0 \, dx = I^3. \tag{28}$$

Из равенства $\dfrac{\partial}{\partial x_i} (\Phi(x_n) w_0) = \Phi(x_n) \dfrac{\partial}{\partial x_i} w_0 + \Phi'(x_n) w_0$ следует, что

$$I^1(s) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega(0,s+1)} a_{ij}\Phi \frac{\partial w_0}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{ij}\Phi' w_0 \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega(0,s+1)} a_{ij}\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\frac{\partial (u\Phi)}{\partial x_j}\,dx - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{in} u\Phi' \frac{\partial w_0}{\partial x_i}\,dx +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{nj}\Phi' w_0 \frac{\partial u}{\partial x_j} dx = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega(0,s+1)} a_{ij}\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\frac{\partial (u\Phi)}{\partial x_j} dx -$$

$$-C^\infty \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{in}\Phi' \frac{\partial w_0}{\partial x_i} dx + \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{nj})\Phi' w_0 \frac{\partial u}{\partial x_i} dx -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{in}(u - C^\infty)\Phi'(x_n) w_0 \frac{\partial w_0}{\partial x_i} dx.$$

Очевидно, что $I^1(s) = I_1^1(s) + I_2^1(s) + I_3^1(s) + I_4^1(s)$, где

$$\begin{aligned} I_1^1(s) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega(0,s+1)} a_{ij}\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u(x)\Phi(x_n)\right)dx, \\ I_2^1(s) &= -C^\infty \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{in}\Phi'(x_n)\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\,dx, \\ I_3^1(s) &= \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{nj}\Phi'(x_n) w_0 \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx, \\ I_4^1(s) &= -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} a_{in}\left(u - C^\infty\right)\Phi'(x_n)\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\,dx. \end{aligned} \tag{29}$$

Используя (4), неравенства Коши-Буняковского и неравенства (18)–(20), получаем оценки

$$I_3^1(s) \le K_0 \left(\int\limits_{\Omega(s,s+1)} E(u)\,dx \right)^{1/2} \|w_0\|^{1/2}_{H_2^1(\Omega(s,s+1))} \le K_1\sqrt{s}e^{-\chi_4 s},$$

$$I_4^1(s) \le K_2 \left(\int\limits_{\Omega(s,s+1)} E(w_0)\,dx \right)^{1/2} \|u - C^\infty\|^{1/2}_{H_2^1(\Omega(s,s+1))} \le K_3 e^{-\chi_2 s/2},$$

где K_i, $i = 0,1,2,3$ – константы, не зависящие от s.

$$\text{Т.о. } \lim_{s\to\infty} I_3^1(s) = \lim_{s\to\infty} I_4^1(s) = 0. \tag{30}$$

Проинтегруем по частям $I_1^1(s)$ (заметим, что $\Phi(x_n) = 0$ на S_{s+1} и $\Phi(x_n) = 1$ на S_0):

$$I_1^1(s) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega(0,s+1)} \nu_i a_{ij} u\Phi(x_n)\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\,dS = \int\limits_{S_0} \sigma(w_0) u\,d\hat{x}. \tag{31}$$

Из определения $P(s, w_0)$ и равенства (23) следует, что

$$\begin{aligned} I_2^1(s) &= -C^\infty \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega(s,s+1)} (-a_{in})\frac{\partial w_0}{\partial x_i}\,dx = C^\infty \int\limits_s^{s+1} P_1(s,w)\,dx_n = \\ &= C^\infty \int\limits_s^{s+1} P_1(0,w_0)\,dx_n = C^\infty \int\limits_s^{s+1} (-1)\,dx_n = -C^\infty. \end{aligned} \tag{32}$$

Из (26)–(32) находим

$$\begin{aligned} C^\infty = &\int\limits_{S_0} \left[\sigma(w_0)u - \sigma(u)w_0 - f_n w_0\right] d\hat{x} - \\ &- \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega(0,\infty)} f_k \frac{\partial w_0}{\partial x_k}\,dx + \int\limits_{\Omega(0,\infty)} f_0 w_0\,dx. \end{aligned} \tag{33}$$

Для смешанной краевой задачи $w = -\theta^{-1}\,\sigma(w_0)$, $\sigma(u) = \Psi_0 - \theta u$ на S_0 и из (33) получаем

$$C^\infty = \int\limits_{S_0} \Big[\sigma(w_0)u + w_0\left[\Psi_0 - \theta u\right] - f_n w_0\Big]\,d\hat{x} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega(0,\infty)} f_k \frac{\partial w_0}{\partial x_k}\, dx + \int\limits_{\Omega(0,\infty)} f_0 w_0\, dx = \int\limits_{S_0} [\psi_0 + f_n]\, \frac{\sigma(w_0)}{\theta}\, d\hat{x} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega(0,\infty)} f_k \frac{\partial w_0}{\partial x_k}\, dx + \int\limits_{\Omega(0,\infty)} f_0 w_0\, dx.$$

Теорема 4. *Из теоремы 1 в случае постоянных коэффициентов* $a_{ij}(x) = a_{ij} = \text{const}$ *для смешанной краевой задачи при* $b_1 = 1$, $\theta(\hat{x}) = \omega = \text{const}$, $\sigma(u) = a_{nn} \dfrac{\partial}{\partial x_n} u(x)$ *константа* C^∞ *определяется формулой*

$$C^\infty = a_{nn} \int\limits_{S_0} \left[\psi_0(\hat{x}) + f_n(x)\omega^{-1}\right]\, d\hat{x} +$$

$$+ a_{nn} \int\limits_{\Omega(0,\infty)} \left([x_n - \omega a_{nn}]\, f_0(x) - f_n(x)\right)\, dx.$$

[1] Сукретный В.И. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области. – Киев, 1988. – 24 с. – (Преп. / АН УССР. Ин-т математики; 88.15).

[2] Олейник О.А., Иосифьян Г.А. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Наука, 1990. – С. 3–77.

[3] Сукретный В.И. Асимптотическое разложение решений краевых задач для уравнений высокого порядка. – Киев, 1988. – 27 с. – (Преп. / АН УССР. Ин-т математики; 88.18)

[4] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.

[5] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1984.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 243–248

УДК 517.9

Асимптотическая декомпозиция системы нелинейных дифференциальных уравнений в окрестности групповых интегральных многообразий

Б.В. ТАБОРОВ

Институт математики НАН Украины, Киев

Розвивається метод асимптотичної декомпозиції, запропонований Митропольським і Лопатіним.

We develop the method of asymptotic decomposition proposed by Mitropol'skii and Lopatin.

В данной работе получает дальнейшее развитие метод усреднения Крылова-Боголюбова [1] на основе использования аппарата теории непрерывных групп преобразований. Этот подход был развит Ю.А. Митропольским и А.К. Лопатиным и получил название метода асимптотической декомпозиции [2]. Он существенно использует теоретико-групповые свойства системы нулевого приближения.

Результаты данной работы докладывались на Международной научной конференции "Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний"(Киев, 18-23 августа 1997 г.).

1. Объект исследования. В качестве объекта исследования рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих орбитальный полет спутника Земли на малой реактивной тяге [3]

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_1, \qquad \dot{x}_3 = 0, \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{3\,j+1} &= x_{3j+2}, \\ \dot{x}_{3\,j+2} &= x_{3j+3} - x_{3j+1} + \varepsilon f_{1j}(q), \qquad j = 1, 2, 3, \\ \dot{x}_{3\,j+3} &= -x_{3j+2} + \varepsilon f_{2j}(q), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где через q обозначены переменные x_i, $i = 1, \dots, 12$,

$$f_{11} = 4x_3x_6 - 3x_1x_6 - x_6x_{10}x_{12},$$
$$f_{21} = -4x_3x_5 - 3x_1x_5 - x_5x_{10}x_{12},$$
$$f_{12} = 4x_3x_9 - 3x_1x_9 - x_9x_{10}x_{12},$$
$$f_{22} = -4x_3x_8 - 3x_1x_2 - x_2x_{10}x_{12},$$
$$f_{13} = 4x_3x_{12} - 3x_1x_{12} - x_{10}x_{12},$$
$$f_{23} = -4x_3x_{11} - 3x_1x_{11} + x_{10}x_{11}x_{12}.$$

Переменная x_1 описывает движение центра тяжести спутника, переменные x_2 и x_3 являются вспомогательными. В качестве независимой переменной используется угловая скорость подвижной системы координат. Возмущение в системе обусловлено нецентральностью поля земного притяжения.

Переменные x_{3j+1} обозначают направляющие косинусы радиус-вектора спутника по отношению к осям инерциальной системы координат, x_{3j+2} – направляющие косинусы перпендикуляра к радиус-вектору, а x_{3j+3} – направляющие косинуса перпендикуляра к мгновенной плоскости орбиты спутника. Выбор этой системы определен следующими обстоятельствами. Векторное поле

$$U_F = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

первых двух уравнений подсистемы (1.1) образует алгебру Ли $so(2)$. Векторные поля

$$U_j = x_{3j+2}\frac{\partial}{\partial x_{3j+1}} + (x_{3j+3} - x_{3j+1})\frac{\partial}{\partial x_{3j+2}} - x_{3j+2}\frac{\partial}{\partial x_{3j+3}}$$

подсистем вида (1.2) в нулевом приближении принадлежат алгебре Ли $so(3)$. Решения $x_1(t)$, $x_2(t)$ подсистемы (1.1) порождают однопараметрическую группу из $SO(2)$, а решения $x_{3j+1}(t)$, $x_{3j+2}(t)$, $x_{3j+3}(t)$ систем вида (1.2) в нулевом приближении – однопараметрические группы из $SO(3)$.

Это дает возможность сравнить применение алгоритма асимптотической декомпозиции к классическому объекту нелинейной механики (возмущение на группе $SO(2)$) и новому для нелинейной механики объекту – возмущению на группе $SO(3)$.

В данном случае приближенное решение возмущенной системы будем искать в пространстве представления для прямого произведения групп $SO(2) \otimes SO(3) \otimes SO(3) \otimes SO(3) = SO(2) \times SO(3) = T$.

2. Основной алгоритм. Перейдем в системе (1.1)–(1.2) к сферическим координатам заменой переменной

$$x_1 = \rho\cos\varphi, \quad x_2 = \rho\sin\varphi: \quad \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$
$$x_4 = \rho_1\sin\theta_1\cos\varphi_1, \quad x_5 = \rho_1\sin\theta_1\sin\varphi_1, \quad x_6 = \rho_1\cos\theta_1:$$
$$\rho_1 = \sqrt{x_4^2 + x_5^2 + x_6^2},$$
$$x_7 = \rho_2\sin\theta_2\cos\varphi_2, \quad x_8 = \rho_2\sin\theta_2\sin\varphi_2, \quad x_9 = \rho_2\cos\theta_2:$$
$$\rho_2 = \sqrt{x_7^2 + x_8^2 + x_9^2},$$
$$x_{10} = \rho_3\sin\theta_3\cos\varphi_3, \quad x_{11} = \rho_3\sin\theta_3\sin\varphi_3, \quad x_{12} = \rho_3\cos\theta_3:$$
$$\rho_3\sqrt{x_{10}^2 + x_{11}^2 + x_{12}^2}.$$

Получим систему вида

$$\dot\rho = 0, \qquad \dot\varphi_1 = -1, \qquad \dot x_3 = 0, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &\dot\rho_j = w_j(z), \\ &\dot\theta_j = \sin\varphi_j + \varepsilon f_{\theta_j}(z), \qquad j = 1, 2, 3, \\ &\dot\varphi_j = -1 + \cot\theta_j\cos\varphi_j + \varepsilon f_{\varphi_j}(z), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где через z обозначены переменные ρ, φ, x_3, ρ_j, θ_j, φ_j, $j = 1, 2, 3$.

Применим к системе (2.1)–(2.2) алгоритм асимптотической декомпозиции по переменной ρ_2. Ввиду сложности вычислений ограничимся только первым приближением.

После замены переменных в виде ряда Ли $\rho_2' = \exp(\varepsilon S)\rho_2$, $\rho_1' = \rho_1$, $\rho_3' = \rho_3$, $\theta_j' = \theta_j$, $\varphi_j' = \varphi_j$, $j = 1, 2, 3$, $\rho' = \rho$, $\varphi' = \varphi$, $x_3' = x_3$, где $S = S_1 + \varepsilon S_2 + \cdots$, $S_i = \gamma_i(z)\dfrac{\partial}{\partial\rho_2}$, а через z обозначены переменные ρ, φ, x_3, ρ_j, θ_j, φ_j, получаем централизованную систему, вид которой определяется оператором S. В частности, если определить оператор S как решение операторного уравнения

$$[U, S_1] = (\omega_2 - \xi)\frac{\partial}{\partial\rho_2}, \tag{3}$$

где $\xi(z)$ – некоторая искомая функция с определенными свойствами, а U – дифференциальный оператор системы нулевого приближения, то централизованная система примет вид

$$\dot\rho = 0, \qquad \dot\varphi_1 = -1, \qquad \dot x_3 = 0; \tag{4.1}$$

$$
\begin{aligned}
&\dot\rho_j = \varepsilon f_{\rho_j},\\
&\dot\theta_j = \sin\varphi_j + \varepsilon f_{\theta_j}(z),\\
&\dot\varphi_1 = -1 + \cos\theta_j\cos\varphi_j + \varepsilon f_{\varphi_j}(z),
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

где $f_{\rho_1} = f_{\rho_3} = 0$ а $f_{\rho_2} = \xi(z)$.

С точки зрения анализа существования периодических решений и предельных циклов важно знать значении функции $\xi(z)$. В первом приближении

$$
\xi(z) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho_2\rho_3\left(3\cos^2\theta_3 - 1\right)(\cos\theta_2\sin\theta_2\cos\varphi_2). \tag{5}
$$

Значения функций $f_{\theta_j}(z)$, $f_{\varphi_j}(z)$ нужны для исследования движения по предельному циклу. Мы не приводим явный вид этих функций.

Из (5) видно, что медленные движения зависят от угловых переменных. В этом случае для отыскания возможного предельного цикла следует применить метод последовательных приближений. В нулевом приближении полагаем $\xi = 0$, т.е. $\rho_2 = \rho_{20}$. Подставляя это значение в остальные уравнения, находим θ_{j0}, φ_{j0} и т.д.

Для доказательства существования предельного цикла следует изучить сходимость алгоритма, что является предметом отдельного исследования.

Заметим что в случае, когда функция ξ не зависит от угловых переменных, мы имеем обычное усреднение по Боголюбову, и, кроме того, $\rho_3 = \mathrm{const}$ в первом приближении.

3. Особенности алгоритма определения вида замены переменных и резонансных членов. Рассмотрим подробно алгоритм нахождения функции $\xi(z)$. Разложим функцию ω_2 в ряд по базису пространства T:

$$
\omega_2 = \omega_{21} + \omega_{22} + \omega_{23}, \tag{6}
$$

где

$$
\omega_{21} = \sqrt{3\pi}\rho^2\sin^2\varphi_{22}Y_1^0, \tag{6.1}
$$

$$
\omega_{22} = \frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{5}}\rho\cos\varphi\rho_2\left({}_2Y_2^{-1}{}_2Y_2^1\right), \tag{6.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{23} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{5}}\rho_2\rho_3^2\big((1-i)_2Y_2^{-1}{}_3Y_2^{-1} + (-1-i)_2Y_2^{-1}{}_3Y_2^1 +\\
+(-1-i)_2Y_2^1{}_3Y_2^{-1} + (1+i)_2Y_2^1{}_3Y_2^1\big),
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

где через ${}_jY_l^m$ обозначается m-я основная сферическая функция переменных θ_j, φ_j порядка l.

Тогда решение уравнения (3) сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений вида

$$
Ag = w - h, \tag{7}
$$

где A – матрица оператора U в выбранном базисе, g, w и h – векторы коэффициентов разложений функций γ, ω и ξ соответственно. Матрица A является комплексной, и нужно удовлетворить условие действительности искомых функций γ и ξ.

Вследствие (6.1)–(6.3) решение уравнения (7) распадается на решение трех систем уравнений меньшей размерности:

$$
\begin{aligned}
&A_1g_1 = w_1 - h_1,\\
&A_2g_2 = w_2 - h_2,\\
&A_3g_3 = w_3 - h_3
\end{aligned}
$$

для некоторых подпространств T_1, T_2, T_3 пространства T, где A_i – матрицы оператора U в указанных подпространствах, $w_1+w_2+w_3 = w$, $g_1+g_2+g_3 = g$, $h_1+h_2+h_3 = h$.

Пространство T_1 является прямым произведением $T_{11}\otimes T_{22}$ с базисами $B_{11} = \|\cos 2\varphi, \sin 2\varphi\|$ и $B_{12} = \|{}_2Y_1^{-1}, {}_2Y_1^0, {}_2Y_1^1\|$ соответственно, где $\dim(T_{11}\otimes T_{12}) = 6$.

Пространство T_2 является прямым произведением $T_{21}\otimes T_{22}$ с базисами

$$
\begin{aligned}
&B_{21} = \|\cos\varphi, \sin\varphi\|,\\
&B_{22} = \|{}_2Y_2^{-2}, {}_2Y_2^{-1}, {}_2Y_2^0, {}_2Y_1^1, {}_2Y_1^2\|
\end{aligned}
$$

соответственно, где $\dim(T_{21}\otimes T_{22}) = 10$.

Пространство T_3 является прямым произведением $T_{31}\otimes T_{32}$ с базисами

$$
\begin{aligned}
&B_{31} = \|{}_2Y_2^{-2}, {}_2Y_2^{-1}, {}_2Y_2^0, {}_2Y_1^1, {}_2Y_1^2\|,\\
&B_{32} = \|{}_3Y_2^{-2}, {}_3Y_2^{-1}, {}_3Y_2^0, {}_3Y_1^1, {}_3Y_1^2\|
\end{aligned}
$$

соответственно, где $\dim(T_{31}\otimes T_{32}) = 25$.

Матрицы A_1 и A_2 являются неособыми, поэтому мы можем найти некоторые векторы g_1 и g_2, полагая h_1 и h_2 равными нулю.

Матрица A_3 является особой, и определяя h_3 из условий ортогональности подпространству $x = A_3 y$ и действительности определяемых при этом функций, получаем

$$\xi = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\rho_2\rho_3\left(3\cos^2\theta_3 - 1\right)(\cos\theta_2\sin\theta_2\cos\varphi_2).$$

Дальнейший этап состоит в качественном исследовании систем уравнений (4.1)–(4.2).

[1] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

[2] Mitropolsky Yu.A., Lopatin A.K. Nonlinear mechanics, groups and symmetry. – Dordrecht, London: Kluwer Academic Publisher, 1995. – 380 p.

[3] Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.А., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. – М.: Наука, 1966. – 680 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 249–257

УДК 517.9

Редукция и приводимость линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, имеющих квадратичный интеграл

Л.В. ХОМЧЕНКО

Інститут математики НАН України, Київ

Розглядається задача декомпозиції лінійної системи диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами, що має квадратичний інтеграл, на дві інтегровні підсистеми, а також задача зведення однієї з них перетворенням Ляпунова.

The problem of decomposition of a linear system of differential equations with periodic coefficients, which has quadratic integral, into two integrable subsystems, and also the problem of reducibility of one of them by the Lyapunov transformation are considered.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = P(t)y, \tag{1}$$

где $y = [y_1, \ldots, y_n]^T$, $P(t) = [p_{ij}(t)]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Известно [4], что всякая система с периодическими коэффициентами вида (1) при помощи преобразования Ляпунова $y = L(t) \cdot x$ может быть приведена к системе с постоянными коэффициентами. Система (1) имеет фундаментальное решение $y = L(t) \cdot e^{At}$, где A – искомая матрица с постоянными коэффициентами. Вопрос приведения системы с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами сводится к задаче нахождения фундаментальной матрицы решений.

В данной работе рассматриваются две задачи:

(А) С помощью ограниченных и периодических по t матриц $Q(t)$, $Q^{-1}(t)$, которые находятся с помощью матрицы квадратичной формы системы (1), декомпозировать систему (1) к системе

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ C(t) & A_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_1(t) \in M_m(\mathbb{R})$, $A_1(t)$ – кососимметрическая матрица чётного порядка с периодическими коэффициентами, m – ранг квадратичной формы системы, $A_2(t) \in M_p(\mathbb{R})$, $m+p=n$.

В случае $n=m=2k$, $k=1,2,\ldots$; $p=0$ и $A(t)=A_1(t)$.

Преимущество системы (2) перед (1) состоит в том, что она распадается на две интегрируемые подсистемы. Матрица $A_1(t)$ является кососимметрической и принадлежит некоторой компактной алгебре Ли, что позволяет более эффективно проводить исследования качественного поведения решения дифференциальной системы.

(Б) Выделяется класс матриц $A_1(t)$ (с помощью её теоретико-групповых свойств), которые позволяют эффективно привести систему дифференциальных уравнений с периодической матрицей $A_1(t)$ к системе с постоянными коэффициентами, т.е. совершить преобразование системы по Ляпунову.

(А) Теорема. *Пусть система (1) имеет квадратичный интеграл*

$$F(t,y) = y^T \cdot B(t) \cdot y, \tag{3}$$

который преобразованием $y=Q(t)x$, где $Q(t)$, $Q^{-1}(t)$ – ограниченные, периодические по t матрицы, приводится к каноническому виду

$$\begin{gathered} F(x) = x^T \cdot Q^T(t) \cdot B(t) \cdot Q(t) \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2, \\ m = 2k \le n, \quad k = 1,2,\ldots \end{gathered} \tag{4}$$

Тогда преобразование $y=Q(t)x$ приводит систему (1) к блочно-треугольному виду:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\cdot x, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & 0 \\ C(t) & A_2(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $A_1 \in M_m(\mathbb{R})$, A_1 – кососимметрическая матрица чётного порядка с периодическими коэффициентами, m – ранг квадратичной формы, $A_2 \in M_p(\mathbb{R})$, $m+p=n$.

Следствие 1. *Если $n=2k+1$, $k=1,2,\ldots$, то не существует невырожденного квадратичного интеграла.*

Следствие 2. *Если квадратичную форму $F(x)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2$, которая есть интегралом системы (2), можно представить в виде суммы двух квадратичных форм*

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

где

$$F_1(x) = x_1^2 + \cdots + x_k^2, \qquad F_2(x) = x_{k+1}^2 + \cdots + x_m^2,$$

каждая из которых является интегралом, то система распадается на две подсистемы:

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = A_1(t)x^{(1)}, \quad \frac{dx^{(2)}}{dt} = A_2(t)x^{(2)}, \quad \text{где } x^{(1)} = [x_1,\ldots,x_k],$$

$$x^{(2)} = [x_{k+1},\ldots,x_m], \quad A_1 \in M_m(\mathbb{R}), \quad A_2 \in M_{n-m}(\mathbb{R}).$$

Лема. *Для того, чтобы система (1) имела квадратичный интеграл, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты квадратичной формы удовлетворяли уравнению*

$$\frac{\partial \beta^T}{\partial t} = -W(t)\cdot \beta^T, \tag{5}$$

то есть, чтобы уравнение (5) имело хотя бы одно частное периодическое решение.

Доказательство. Дифференциальный оператор, ассоциированный с системой (1), имеет вид

$$Y = \frac{\partial}{\partial t} + P(t,y)\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} P_k(t,y)\frac{\partial}{\partial y_k}. \tag{6}$$

Виразим коэффициенты квадратичной формы $F(t,y)$ через коэффициенты $P_k(t,y), k=\overline{1,n}$, оператора Y. Пусть квадратичная форма имеет общий вид

$$\begin{aligned} F(t,y) &= \left(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2, y_1y_2, y_1y_3, \ldots, y_{n-1}y_n\right)\times \\ &\times\left[\beta_{11}(t),\beta_{22}(t),\ldots,\beta_{nn}(t),\beta_{12}(t),\beta_{13}(t),\ldots,\beta_{n-1,n}(t)\right]^T = \\ &= y^{(2)}\cdot\beta^T. \end{aligned}$$

Используем свойство интеграла $YF(t,y)=0$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+P(t,y)\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(y^{(2)}\cdot\beta^T\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial y^{(2)}}{\partial t}+P(t,y)\cdot\frac{\partial y^{(2)}}{\partial y}\right)\cdot\beta^T+y^{(2)}\cdot\left(\frac{\partial\beta^T}{\partial t}+P(t,y)\cdot\frac{\partial\beta^T}{\partial y}\right)=0,$$

$$P(t,y)\cdot\frac{\partial y^{(2)}}{\partial y}\cdot\beta^T+y^{(2)}\cdot\frac{\partial\beta^T}{\partial t}=0. \tag{7}$$

Распишем первое слагаемое в формуле (7), переходя при этом от векторной формы записи к координатной и наоборот.

$$P(t,y)\cdot\frac{\partial y^{(2)}}{\partial y}=p_1(t,y)\frac{\partial y^{(2)}}{\partial y_1}+\dots+p_n(t,y)\frac{\partial y^{(2)}}{\partial y_n}=$$

$$=\left(p_1(t,y)\frac{\partial y_1^2}{\partial y_1}+\dots+p_n(t,y)\frac{\partial y_1^2}{\partial y_n},\dots,p_1(t,y)\frac{\partial y_n^2}{\partial y_1}+\dots\right.$$

$$+p_n(t,y)\frac{\partial y_n^2}{\partial y_n},p_1(t,y)\frac{\partial y_1y_2}{\partial y_1}+\dots+p_n(t,y)\frac{\partial y_1y_2}{\partial y_n},\dots,$$

$$\left.p_1(t,y)\frac{\partial y_{n-1}y_n}{\partial y_1}+\dots+p_n(t,y)\frac{\partial y_{n-1}y_n}{\partial y_n}\right)=$$

$$=\Big(2y_1p_1(t,y),\dots,2y_np_n(t,y),y_2p_1(t,y)+y_1p_2(t,y),\dots,$$

$$y_ip_j(t,y)+y_jp_i(t,y),\dots,y_np_{n-1}(t,y)+y_{n-1}p_n(t,y)\Big)=$$

$$=y^{(2)}\cdot W(t),\quad i,j=\overline{1,n},\quad i<j.$$

Подставим полученный результат в уравнение (7):

$$y^{(2)}\cdot W(t)\cdot\beta^T+y^{(2)}\cdot\frac{\partial\beta^T}{\partial t}=0,\quad y^{(2)}\cdot\left(W(t)\cdot\beta^T+\frac{\partial\beta^T}{\partial t}\right)=0,$$

откуда и следует уравнение (5). То есть, для того, чтобы найти квадратичную форму $F(t,y)$ системы с переменными коэффициентами, необходимо и достаточно найти коэффициенты β_{ij}, $i,j=\overline{1,n}, i<j$, формы как частное периодическое решение уравнения (5). Выписываем квадратичную форму $F(t,y)$ в явном виде

$$F(t,y)=y^T\cdot B(t)\cdot y,$$

где

$$B(t)=\begin{pmatrix}\beta_{11}(t) & \frac{\beta_{12}(t)}{2} & \dots & \frac{\beta_{1n}(t)}{2}\\ \frac{\beta_{12}(t)}{2} & \beta_{22}(t) & \dots & \frac{\beta_{2n}(t)}{2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\beta_{1n}(t)}{2} & \frac{\beta_{2,n}(t)}{2} & \dots & \beta_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

– симметричная матрица.

Далее необходимо найти ограниченную и периодическую по t матрицу $Q(t)$, которая приводит матрицу квадратичной формы к диагональному виду, то есть $Q^T(t)\cdot B(t)\cdot Q(t)=E$. Замена переменных $y=Q(t)x$ приводит интеграл $F(t,y)=y^T\cdot B(t)\cdot y$ к каноническому виду (4).

Докажем, что система (1) в этом случае приводится к блочно-треугольному виду (2), где матрицы $A_1(t)$ и $A_2(t)$ имеют вышеуказанные свойства, причем матрицы $P(t)$ и $A(t)$ связаны соотношением

$$A(t)=Q^{-1}(t)\cdot P(t)\cdot Q(t)-Q^{-1}\cdot\frac{dQ(t)}{dt}.$$

Запишем матрицу $A(t)$ системы (2) в общем виде

$$A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Дифференциальный оператор X, ассоциированный с системой (2), имеет общий вид

$$X=\frac{\partial}{\partial t}+\left(\sum_{i=1}^n a_{1i}(t)x_i\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\left(\sum_{i=1}^n a_{ni}(t)x_i\right)\frac{\partial}{\partial x_n}. \tag{9}$$

Базис алгебры $so(n)$ группы $SO(n)$ образуется минорами второго порядка матрицы

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_m} & \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}\\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_m & 0 & \dots & 0\end{vmatrix}. \tag{10}$$

В общем случае ($m = n$) такой базис образуют $N = \dfrac{n(n-1)}{2}$ линейно независимые матрицы. Рассмотрим базисные операторы X_{ij}, где

$$X_{ij} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{при } i,j = \overline{1,m}, \quad i<j,$$
$$X_{ij} = -x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{при } i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{m+1,n},.$$

Положим $X_{ij} = 0$ при $i,j = \overline{m+1,n}$, $i<j$,

Оператор X, ассоциированный с системой (2), – элемент алгебры $so(n)$ и поэтому записывается в виде линейной комбинации элементов этого базиса:

$$X(t) = \sum_{\substack{i,j=\overline{1,n}\\ i<j}} \alpha_{ij}(t)\cdot X_{ij} =$$
$$= \sum_{\substack{i,j=\overline{1,m}\\ i<j}} \alpha_{ij}(t)\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_i} - x_i\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - \sum_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{m+1,n}}} \alpha_{ij}(t) x_i \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Соберём коэффициенты при $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = \overline{1,n}$, в последнем уравнении:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} : \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 + \dots + \alpha_{1m}x_m = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n;$$
$$\frac{\partial}{\partial x_2} : -\alpha_{12}x_1 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 + \dots + \alpha_{2m}x_m = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n;$$
$$\frac{\partial}{\partial x_3} : -\alpha_{13}x_1 - \alpha_{23}x_2 + \alpha_{34}x_4 + \dots + \alpha_{3m}x_m = a_{31}x_1 + \dots + a_{3n}x_n;$$
$$\frac{\partial}{\partial x_4} : -\alpha_{14}x_1 - \alpha_{24}x_2 - \alpha_{34}x_3 + \dots + \alpha_{4m}x_m = a_{41}x_1 + \dots + a_{4n}x_n;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial}{\partial x_m} : -\alpha_{1m}x_1 - \dots - \alpha_{m-1,m}x_{m-1} = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n;$$
$$\frac{\partial}{\partial x_{m+1}} : -\alpha_{1,m+1}x_1 - \dots - \alpha_{m,m+1}x_m = a_{m+1,1}x_1 + \dots + a_{m+1,n}x_n;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial}{\partial x_n} : -\alpha_{1,n}x_1 - \dots - \alpha_{m,n}x_m = a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n.$$

При решении данной системы уравнений получаем общие формулы для элементов матрицы $A(t)$:

$$a_{ij}(t) = \begin{cases} -\alpha_{ji}(t), & i>j, \\ 0, & i=j, \\ \alpha_{ij}(t), & i<j, \end{cases} \qquad i,j=\overline{1,m},$$
$$a_{ij}(t) = 0, \qquad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{m+1,n}.$$

То есть, выделяется нулевой блок и кососимметрическая матрица $A_1(t)$. Коэффициенты $\alpha_{ij}(t)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{m+1,n}$, – произвольные дробно-линейные функции, поэтому элементы $a_{ij}(t)$, $i = \overline{m+1,n}$, $j = \overline{1,n}$, – дробно-линейные функции. Таким образом, матрица $A(t)$ имеет блочно-треугольный вид (2).

Случай $n = m$ превращает матрицу A в кососимметрическую матрицу

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(t) & \beta(t) & \dots & \psi(t) \\ -\alpha(t) & 0 & \gamma(t) & \dots & \eta(t) \\ -\beta(t) & -\gamma(t) & 0 & \dots & \varphi(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\psi(t) & -\eta(t) & -\varphi(t) & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

(Б) Теорема. *Интеграл $F(x)$ порождает группу Ли, которая является тором, т.е. прямым произведением окружностей*

$$\underbrace{SO(2)\times\ldots\times SO(2)}_{m/2}.$$

Тогда система

$$\frac{dx}{dt} = A_1(t)x$$

преобразованием Ляпунова приводится к системе с постоянными коэффициентами.

В общем случае получаем группу вращений $SO(n)$ на n-мерной сфере. При определенных $\alpha_{ij} = 0$, $i,j = \overline{1,m}$, получаем разбиения группы $SO(n)$ на подгруппы меньшей размерности, например, $SO(2)$

$\times \cdots \times SO(2)$ вращений на торе. В этих случаях и система разбивается на подсистемы меньшей размерности

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = A_{11}(t)x^{(1)}, \quad \frac{dx^{(2)}}{dt} = A_{22}(t)x^{(2)}, \quad \ldots, \tag{12}$$

где $x^{(1)} = (x_1, x_2)$, $x^{(2)} = (x_3, x_4)$, ….

То есть приведённая матрица $A_1(t)$ имеет блочно-диагональный вид

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & A_{22}(t) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & A_{33}(t) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

с клетками по диагонали вида

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_i(t) \\ -\alpha_i(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, \frac{m}{2}. \tag{13}$$

Системы дифференциальных уравнений второго порядка (12) с периодическими коэффициентами с матрицами вида (13) имеют фундаментальные решения

$$X_i(t) = L_i(t) \cdot e^{Kt},$$

где

$$L_i(t) = \exp\begin{pmatrix} 0 & \gamma_i(t) \\ -\gamma_i(t) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

$$\gamma_i(t) = \int \alpha_i(t)dt, \quad i = 1, \ldots \frac{m}{2}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому с помощью преобразований Ляпунова $x = L_i(t)z$ приводятся к системам с постоянными коэффициентами с матрицами вида

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Рассмотрим матрицу $P(t)$ системы (1)

$$\begin{pmatrix} -2\sin t - \sin^3 t + \sin t \cdot \cos t & \sin^2 t + (1+\sin^2 t)^2 + \cos^3 t \\ -1 - \sin^2 t + \cos t & \sin t \cdot (2 + \sin^2 t) - \sin t \cdot \cos t \end{pmatrix}.$$

Матрица квадратичной формы $B(t)$ имеет вид

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1+\sin^2 t & -\sin t \cdot (2+\sin^2 t) \\ -\sin t \cdot (2+\sin^2 t) & \sin^2 t + (1+\sin^2 t)^2 \end{pmatrix}.$$

С помощью замены $y = Q(t) \cdot x$, где $Q(t) = \begin{pmatrix} 1+\sin^2 t & \sin t \\ \sin t & 1 \end{pmatrix}$, квадратичная форма приводится к каноническому виду

$$F(x) = x^T \cdot Q^T(t) \cdot B(t) \cdot Q(t) \cdot x = x_1^2 + x_2^2,$$

а матрица A полученной системы – к виду

$$A(t) = Q^{-1}(t) \cdot P(t) \cdot Q(t) - Q^{-1} \cdot \frac{dQ(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица A в данном случае – кососимметрическая (случай $n = m$) и имеет пару чисто мнимых собственных значений.

[1] Митропольский Ю.А., Лопатин А.К. Теоретико-групповой подход в ассимптотических методах нелинейной механики. – Киев: Наук. думка, 1988. – 270 с.

[2] Lopatin A.K. Normalization and averaging on compact Lie groups in nonlinear mechanics // Укр. мат. журн. – 1997 – **49**, № 1 – С. 47–67.

[3] Lopatin A.K. Symmetry in perturbation problems // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, 7-13 July, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.1. – P. 79–88.

[4] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. – М.: Наука, 1972. – 690 с.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 258–264

УДК 517.9

Неточкові симетрії і редукція диференціальних рівнянь

І.М. ЦИФРА

Інститут геофізики ім. Суботіна НАН України, Київ
E-mail: tsyfra@apmat.freenet.kiev.ua

Побудовано нові анзаци, що редукують нелінійні рівняння теплопровідності до систем звичайних диференціальних рівнянь. Ці анзаци будуються за допомогою операторів неточкових симетрій.

New anzatzes reducing nonlinear heat equations to systems of ordinary differential equations are constructed. These ansatzes are obtained by using the nonpoint symmetry operators.

Відомо, що інфінітезимальні оператори точкової симетрії (класичної або умовної) породжують анзаци вигляду

$$h(u) = f(x)\varphi(\omega) + g(x), \qquad \omega = \omega(x), \tag{1}$$

які редукують нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними до рівнянь з меншим числом незалежних змінних. За допомогою анзацу (1) побудовані точні розв'язки багатьох лінійних та нелінійних рівнянь математичної фізики [3]. Ми пропонуємо анзаци, які задаються системою рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = R_0(t,x,u,u_t,u_x),\\ &\frac{\partial u}{\partial x_k} = R_k(t,x,u,u_t,u_x) \end{aligned} \tag{2}$$

і будуються з використанням операторів неточкових симетрій вихідного рівняння. Систему (2) будемо розглядати як анзац для знаходження функції u. При цьому, очевидно, повинні виконуватись умови сумісності

$$\frac{\partial R_0}{\partial x_k} = \frac{\partial R_k}{\partial t}, \qquad \frac{\partial R_k}{\partial x_l} = \frac{\partial R_l}{\partial x_k}.$$

Розглянемо нелінійне рівняння

$$u_t = F(u_{xx}), \tag{3}$$

де $F(u_{xx})$ – довільна гладка функція. Перетворенням $w = u_{xx}$ це рівняння можна звести до нелінійного рівняння теплопровідності

$$w_t - (c(w)w_x)_x = 0, \tag{4}$$

де

$$c(w) = \frac{dF(w)}{dw}.$$

Відповідно до [4, 5] рівнянню (3) ставимо у відповідність систему першого порядку

$$v^1_2 + v^1_3 v^2 = v^2_1 + v^2_3 v^1, \tag{5}$$

$$v^2_2 + v^2_3 v^2 = \Phi(v^1), \tag{6}$$

де $t \equiv x_1$, $x \equiv x_2$, $u \equiv x_3$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = v^1$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = v^2$, $v^i_k \equiv \dfrac{\partial v^i}{\partial x_k}$, $\Phi(v^1) = F^{-1}(v^1)$.

В загальному випадку v^1, v^2 є функціями від аргументів x_1, x_2, x_3, і система (5), (6) не є еквівалентною рівнянню (3). Тим не менше вона інваріантна відносно групи, яку допускає рівняння (3). Розглянемо оператор

$$X = \xi^1\partial_{x_1} + \xi^2\partial_{x_2} + \xi^3\partial_{x_3} + \eta^1\partial_{v^1} + \eta^2\partial_{v^2}, \tag{7}$$

де ξ^i, η^k, $i = \overline{1,3}$, $k = 1,2$, є функціями від x_1, x_2, x_3, v^1, v^2. Виявляється, що умова інваріантності для рівняння (5)

$$\underset{1}{X}(v^1_2 + v^1_3 v^2 = v^2_1 + v^2_3 v^1)\Big|_{v^1_2 + v^1_3 v^2 = v^2_1 + v^2_3 v^1} \equiv 0, \tag{8}$$

де $\underset{1}{X}$ – перше продовження оператора X, еквівалентна вимозі інваріантності диференціальних форм, що виражають умови дотику, і приводить до η^1, η^2, які співпадають з класичними формулами для η^{u_t}, η^{u_x} в теорії продовження [3].

Якщо ми вимагаємо, щоб рівняння (6) допускало оператор X, то беручи до уваги, що $x_1 \equiv t$, $x_2 \equiv x$, $x_3 \equiv u$, $v^1 \equiv \partial u/\partial t$, $v^2 \equiv \partial u/\partial x$, ми отримуємо алгебру Лі, яка співпадає з алгеброю інфінітезимальних операторів першого продовження групи симетрії вихідного рівняння (3).

Якщо ми вивчаємо симетрію системи (5), (6), тоді умова (8) змінюється і приймає таку форму:

$$\underset{1}{X}(v_2^1 + v_3^1 v^2 = v_1^2 + v_3^2 v^1)\Big|_{\substack{v_2^1 + v_3^1 v^2 = v_1^2 + v_3^2 v^1 \\ v_2^2 + v_3^2 v^2 = \Phi(v^1)}} \equiv 0. \tag{9}$$

Це означає, що умова (8) повинна виконуватись не обов'язково в усьому $(x_1, x_2, x_3, v^k, v^l_m)$–просторі, а тільки на многовиді, що задається (6). Очевидно, що умова (9) є слабшою ніж умова (8), а, отже, існує можливість розширення класу операторів симетрії.

Припустимо, що система (5), (6) інваріантна відносно однопараметричної групи перетворень з інфінітезимальним оператором (7). Нехай $\omega_i(x_1, x_2, x_3, v^1, v^2)$, де $i = \overline{1,4}$, – функціонально незалежні інваріанти, що задовольняють співвідношення

$$X\omega_i = 0,$$

причому $\operatorname{rank}\left[\dfrac{\partial \omega_l}{\partial v^k}\right] = 2$, де $k = 1, 2$; $l = 3, 4$. Тоді можна побудувати анзац

$$\omega_3 = \varphi^1(\omega_1, \omega_2), \qquad \omega_4 = \varphi^2(\omega_1, \omega_2), \tag{10}$$

який редукує систему (5), (6) до системи двох диференціальних рівнянь з частинними похідними для φ^1, φ^2 з двома незалежними змінними ω_1, ω_2

$$\begin{aligned} &L_1\left(\omega_1, \omega_2, \varphi^1, \varphi^1, \varphi^1_{\omega_1}, \varphi^1_{\omega_2}, \varphi^2_{\omega_1}, \varphi^2_{\omega_2}\right) = 0, \\ &L_2\left(\omega_1, \omega_2, \varphi^1, \varphi^1, \varphi^1_{\omega_1}, \varphi^1_{\omega_2}, \varphi^2_{\omega_1}, \varphi^2_{\omega_2}\right) = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

де L_1, L_2 – деякі функції своїх аргументів.

Інтегруючи систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\omega_3(t, x, u, u_t, u_x) = \varphi_1\left(\omega_1(t, x, u, u_t, u_x), \omega_2(t, x, u, u_t, u_x)\right), \\ &\omega_4(t, x, u, u_t, u_x) = \varphi_2\left(\omega_1(t, x, u, u_t, u_x), \omega_2(t, x, u, u_t, u_x)\right), \end{aligned} \tag{12}$$

можна побудувати розв'язок вихідного рівняння, використовуючи розв'язки $\varphi^1(\omega_1, \omega_2)$, $\varphi^2(\omega_1, \omega_2)$ системи (11).

Вивчаючи симетрію редукованої системи (11), ми можемо отримати додаткові оператори симетрії. Ці оператори використовуються для редукції (11) до системи звичайних диференціальних рівнянь. По розв'язкам редукованої системи, використовуючи (12), будуються розв'язки вихідного рівняння.

Необхідно підкреслити, що продовжені оператори умовної симетрії, які допускаються рівнянням (3), породжують анзаци, які не редукують це рівняння. Тому ми використовуємо оператори умовної симетрії, що допускаються системою (5), (6).

Зауважимо також, що, використовуючи один оператор симетрії, ми будуємо анзац, який редукує систему (5), (6) до системи диференціальних рівнянь з частинними похідними з двома незалежними змінними. Зокрема, якщо в (7) $\xi^1 = \xi^2 = 0$, то отримуємо редуковану систему на функції $\varphi^1(t, x)$, $\varphi^2(t, x)$. В цьому випадку анзац може використовуватися для побудови перетворень Беклунда вихідного рівняння.

Враховуючи інваріантність рівняння (3) відносно групи трансляцій $u' = u + a$, де a – груповий параметр, систему (5), (6) можна звести до системи

$$\begin{aligned} &v_2^1 = v_1^2, \\ &v_2^2 = \Phi(v^1). \end{aligned} \tag{13}$$

Алгебру інваріантності системи (13) шукаємо в класі операторів

$$X = \xi^1 \partial_{x_1} + \xi^2 \partial_{x_2} + \eta^1 \partial_{v_1} + \eta^2 \partial_{v_2}, \tag{14}$$

де ξ^1, ξ^2, η^1, η^2 – функції змінних x_1, x_2, v^1, v^2.

Теорема. *Для того, щоб система (13) допускала оператор (14), а ξ^1, ξ^2 задовольняли умову*

$$\sum_{i=1}^{2}\left[\left(\xi^i_{v^1}\right)^2 + \left(\xi^i_{v^2}\right)^2\right] \neq 0, \tag{15}$$

необхідно, щоб функція $\Phi(v^1)$ була розв'язком рівняння

$$a\left(\Phi_{v^1} v^1\right)_{v^1} = b\Phi\Phi_{v^1} + c\Phi_{v^1 v^1} + dF_{v^1},$$

де a, b, c, d – довільні константи, $\Phi_{v^1} \equiv \dfrac{d\Phi}{dv^1}$, $\Phi_{v^1 v^1} \equiv \dfrac{d^2\Phi}{(dv^1)^2}$.

Доведення теореми проводиться за допомогою стандартного методу С. Лі. В залежності від a, b, c, d, отримуємо різні нелінійності $\Phi(v^1)$, при яких система (13) допускає оператор (14), (15). (Розглядаються тільки суттєво різні $F(u_{xx})$, тобто такі, що не зв'язані між собою перетворенням еквівалентності рівняння (3): $t' = \alpha t$, $x' = \beta x$, $u' = \delta_1 u + \delta_2 x^2 + \delta_3 t$, де α, β, δ_1, δ_2, δ_3 – довільні константи.) Тоді можна виділити такі випадки:

1. $\Phi = \dfrac{1}{\alpha \ln v^1}$;
2. $\Phi = \dfrac{1}{\left(e^{v^1} - C\right)}$, де C є довільною константою;
3. $\Phi = \dfrac{1}{1-(v^1)^r}$, де $r \in \mathrm{R}$, а також $r \neq 0, \pm 1$;
4. $\Phi = \tan v^1$;
5. $\Phi = \tan\left(\ln v^1\right)$;
6. $\Phi = \dfrac{1}{v^1}$.

Розглянемо випадок 2. В цьому випадку система (13) матиме вигляд:

$$v^1_2 = v^2_1, \qquad v^2_2 = \frac{1}{\left(e^{v^1} - C\right)}. \tag{16}$$

Вона інваріантна відносно алгебри Лі з базисними операторами

$$P_1 = \partial_{x_1},\ P_2 = \partial_{x_2},\ P_3 = \partial_{v_2},\ D = 2x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + v^2\partial_{v^2}, \tag{17}$$

$$Q = (x_2 + 2Cv^2)\partial_{x_2} + 2\partial_{v_1} - v^2\partial_{v_2}. \tag{18}$$

Використовуючи алгебру (17)–(18), можна побудувати оператор контактних перетворень

$$K = -(x + 2u_x)\partial_x + (2t + u_x^2)\partial_u - 2\partial_{u_t} + u_x\partial_{u_x},$$

який допускається рівнянням

$$u_t = \ln\left(1 + \frac{1}{u_{xx}}\right), \qquad u_{xx} \neq 0, \tag{19}$$

яке є еквівалентним системі (16).

Розглянемо оператор $2Q - D$. Йому відповідає анзац

$$v^1 = \varphi_1(\omega) - \ln(x_1\varphi_2(\omega)),\quad v^2 = x_1\varphi_2(\omega),\quad \omega = x_2 + Cv^2,$$

який редукує систему (16) до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\exp(\varphi_1)\frac{d\varphi_2}{d\omega} = \varphi_2, \qquad \varphi_2\frac{d\varphi_1}{d\omega} - \frac{d\varphi_2}{d\omega} = \varphi^2. \tag{20}$$

Загальний розв'язок системи (20) задається формулами

$$\varphi_1 = \ln\frac{C_1^2\exp\{2a\omega\} - 1}{2aC_1\exp\{2a\omega\}}, \qquad \varphi_2 = \frac{a\left(C_1\exp\{2a\omega\} - 1\right)}{C_1\exp\{2a\omega\} + 1},$$

де C_1, a – довільні константи. Для того, щоб знайти розв'язок рівняння (19), необхідно проінтегрувати перевизначену, але сумісну систему рівнянь

$$u_t = \ln\frac{1}{2a^2t}\,\frac{\left(C_1\exp\{a(x + Cu_x)\} + 1\right)^2}{C_1\exp\{a(x+Cu_x)\}\left(C_1\exp\{a(x+Cu_x)\} - 1\right)}, \qquad u_x = at\frac{C_1\exp\{a(x+Cu_x)\} - 1}{C_1\exp\{a(x+Cu_x)\} + 1}. \tag{21}$$

Використовуючи зв'язок між рівняннями (3), (4) з системи (21) отримуємо розв'язок нелінійного рівняння теплопровідності (4), де $C(w) = \dfrac{1}{w(Cw+1)}$ у вигляді

$$\ln\frac{Cw+1}{w} = \ln\frac{1}{2a^2t}\,\frac{\left(C_1\exp\{a(x + C\theta)\} + 1\right)^2}{C_1\exp\{a(x+C\theta)\}\left(C_1\exp\{a(x+C\theta)\} - 1\right)},$$

$$\theta = at\frac{C_1\exp\{a(x+C\theta)\} - 1}{C_1\exp\{a(x+C\theta)\} + 1}.$$

Аналогічно будуються розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності для інших п'яти випадків.

Зауважимо, що нелокальні анзаци, які редукують вихідне рівняння до системи двох звичайних рівнянь, можуть бути побудовані також за допомогою першого продовження операторів точкової симетрії (17), але згідно з теоремою 4 [8] розв'язки рівняння (19) будуть інваріантними відносно деякої одновимірної підалгебри вигляду $\langle a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + dD\rangle$, де a_1, a_2, a_3, d – деякі дійсні константи.

[1] Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики // Теоретико-алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. – С. 6–28.

[2] Фущич В.И. О пуанкаре-, галиллей-инвариантных нелинейных уравнениях и методах их решений // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 4–19.

[3] Fushchych W., Shtelen W., Serov N. Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 436 p.

[4] Фущич В.И. О дополнительной инвариантности уравнения Клейна-Гордона-Фока // Докл. АН СССР. – 1976. – **230**, № 3. – С. 570–573.

[5] Fushchych W.I., Zhdanov R.Z. Conditional symmetry and anti–reduction of nonlinear heat equation // Доп. АН України. – 1994. – № 5. – С. 40–43.

[6] Tsyfra I. Non-Lie ansatzes for nonlinear heat equation // J. Nonlin. Math. Phys. – 1995. – **2**, № 1 – P. 90–93.

[7] Fushchych W.I., Tsyfra I.M. On reduction and solutions of the nonlinear wave equations with broken symmetry // J. Phys. A: Math. Gen. – 1987. – **20**, № 2. – L45–L48.

[8] Tsyfra I. Conformal invariance of the Maxwell-Minkowski equations // Proceedings of the second International confence "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, July 7–13, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. Vol.2. – P. 307–312.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 265–269

УДК 517.9: 519.46

Умовна симетрія рівняння Бюрґерса та деяких його узагальнень

Н.Д. ЧЕРНІГА

Інститут математики НАН України, Київ

Досліджується Q-умовна симетрія рівняння Бюрґерса та деяких його узагальнень. Отримано нові неліївські розв'язки для рівнянь з нетривіальною Q-умовною симетрією.

Q-conditional symmetry of the Burgers equation and of its generalizations is investigated. New non-Lie solutions of equations having a non-trivial Q-conditional symmetry are obtained.

У цій роботі розглядаються нелінійні рівняння теплопровідності (дифузії) з конвективним членом вигляду

$$U_t = U_{xx} + B(U)U_x + C(U), \tag{1}$$

де $U = U(t, x)$ – невідома функція та $B(U)$, $C(U)$ – довільні гладкі функції. Індекси t та x означають диференціювання за цими змінними.

Рівняння (1) узагальнює велику кількість відомих нелінійних еволюційних рівнянь, що описують різноманітні процеси у фізиці, біології та хімії (обширний перелік літератури див. у [1]). Зокрема, рівняння такого вигляду були запропоновані Маррі [2] як математичну модель для опису процесів реакції-дифузії в біології.

Рівняння (1) як частинний випадок містить класичне рівняння Бюрґерса

$$U_t = U_{xx} + \lambda_1 UU_x. \tag{2}$$

Ліївська симетрія цього рівняння була знайдена в роботі [3]. У роботах [4, 5] *вичерпно* описано симетрії Лі рівняння (1). Зокрема, знайдено такі нові оператори інваріантності, які не характерні для рівняння (1) без конвективного члена (див. (1) при $B = 0$).

Умовна, зокрема Q-умовна, симетрія рівняння (1) вивчена недостатньо. Найбільш вагомим вислідом у цьому напрямі, ймовірно, є наступна теорема, яка була встановлена в роботі [5].

Теорема 1. *Рівняння (1) Q-умовно інваріантне відносно оператора*

$$Q = \partial_t + \xi^1(t,x,U)\partial_x + \eta(t,x,U)\partial_U \tag{3}$$

тоді і тільки тоді, коли функції ξ^1 і η задовольняють такі визначальні рівняння:

$$\begin{aligned} &\xi^1_{UU} = 0, \qquad \eta_{UU} = -2\xi^1_U(B+\xi^1) + 2\xi^1_{xU}, \\ &\eta B_U + \xi^1_x B + 3\xi^1_U C = \xi^1_{xx} - \xi^1_t - 2\xi^1\xi^1_x - 2\eta_{xU} + 2\xi^1_U\eta, \\ &\eta_x B + \eta C_U + (2\xi^1_x - \eta_U)C = 2\xi^1_x\eta + \eta_t - \eta_{xx}, \end{aligned} \tag{4}$$

де нижні індекси t, x і U означають диференціювання за цими змінними.

Проінтегрувати систему (4) в загальному випадку дуже важко, тому тут ми обмежимося випадком, коли рівняння (1) має вигляд природного узагальнення рівняння Бюрґерса, а саме:

$$U_t = U_{xx} + \lambda_1 U U_x + C(U), \tag{5}$$

де ненульове $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Виявляється, що це рівняння має нетривіальну Q-умовну симетрію (3) *лише у випадку* щонайбільше кубічного полінома

$$C(U) = \mathcal{P}_3(U) = e_0 + e_1U + e_2U^2 + e_3U^3, \quad e_\mu \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

При цьому шукані коефіцієнти оператора Q-умовної симетрії мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\xi^1 = pU + q(t,x), \\ &\eta = -\frac{1}{3}p(p+\lambda_1)U^3 - pqU^2 + b(t,x)U + c(t,x). \end{aligned} \tag{7}$$

Якщо підставити (6)–(7) у друге і третє визначальні рівняння (4), то отримаємо декілька значень сталої p, кожне з яких веде до нелінійних рівнянь (5) з нетривіальною Q-умовною симетрією. Детально всі ці значення будуть проаналізовані в наступній роботі. Тут ми подаємо лише окремі висліди. Зокрема, розгляд одного з таких значень $p = \lambda_1/2$, з точністю до локальної еквівалентності, веде лише до рівняння Бюрґерса (2) і отримується така теорема.

Теорема 2. *Рівняння Бюрґерса (2) Q-умовно інваріантне відносно оператора (3), де функції ξ^1 і η мають вигляд*

$$\begin{aligned} &\xi^1 = \frac{1}{2}\lambda_1 U + q(t,x), \\ &\eta = -\frac{1}{4}\lambda_1^2U^3 - \frac{1}{2}\lambda_1 qU^2 + b(t,x)U + c(t,x), \end{aligned} \tag{8}$$

а трійка функцій $q(t,x)$, $b(t,x)$, $c(t,x)$ – довільний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} &q_t - q_{xx} + 2qq_x = -2b_x, \\ &b_t - b_{xx} + 2bq_x = \lambda_1 c_x, \\ &c_t - c_{xx} + 2cq_x = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Нелінійна система рівнянь набагато складніша, ніж одне рівняння Бюрґерса. Отже, її інтегрування є складною проблемою, яку частково нам вдалося подолати. Зокрема, знайдено розв'язок цієї системи вигляду

$$\begin{aligned} &q(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\ln T, \\ &b(t,x) = \frac{1}{2}b_0\lambda_1, \qquad b_0 \in \mathbb{R}, \\ &c(t,x) = b_0 q(t,x), \end{aligned} \tag{10}$$

де $T = T(t,x)$ – довільний розв'язок *лінійного* рівняння теплопровідності $T_t = T_{xx}$. Розв'язок (10) є суттєвим узагальненням знайденого в роботі [6]. Зауважимо також, що при $\lambda_1 = 0$ система (9) розв'язана в [9].

Нами отримано також нетривіальну Q-умовну симетрію для такого узагальнення рівняння Бюрґерса

$$U_t = U_{xx} + \lambda_1 UU_1 + \frac{2-\lambda_1}{3}\left(\lambda U - \frac{1+\lambda_1}{3}U^3\right). \tag{11}$$

Зауважимо, що при нульовому λ_1 та перепозначеннях $U \to 3U$, $\lambda \to \frac{3}{2}\lambda$, це рівняння редукується до

$$U_t = U_{xx} + \lambda U - 2U^3, \tag{12}$$

яке, в свою чергу, є природним узагальненням відомого рівняння Фішера

$$U_t = U_{xx} + \lambda \left(U - U^2\right). \tag{13}$$

Як випливає з роботи [4], рівняння (11)–(12) допускають лише тривіальну симетрію Лі. Проте нами встановлено, що вони допускають нетривіальну Q-умовну симетрію відповідно

$$Q = \partial_t + U\partial_x + \left(\lambda U - \frac{1+\lambda_1}{3}U^3\right)\partial_U \tag{14}$$

та

$$Q = \partial_t + 3U\partial_x + \frac{3}{2}\left(\lambda U - 2U^3\right)\partial_U. \tag{15}$$

До речі, останній оператор можна отримати також, використовуючи роботу [7]. За допомогою знайдених операторів (14)–(15) нами побудовано двопараметричні сім'ї неліївських розв'язків рівнянь (11)–(12). Ці сім'ї мають відповідно вигляд

$$\begin{aligned} U = \frac{3}{1+\lambda_1}\frac{\partial}{\partial x}\ln\Bigg[2 - c_1\exp\left(\lambda t - \gamma\frac{1+\lambda_1}{3}x\right) + \\ +c_2\exp\left(\lambda t + \gamma\frac{1+\lambda_1}{3}x\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{16}$$

та

$$\begin{aligned} U = \frac{\partial}{\partial x}\ln\Bigg[2 - c_1\exp\left(\frac{3}{2}\lambda t - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\right) + \\ +c_2\exp\left(\frac{3}{2}\lambda t + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\right)\Bigg], \end{aligned} \tag{17}$$

де c_1, c_2 – довільні сталі і $\gamma = \sqrt{3\lambda/1+\lambda_1}$. Наголосимо, що, як це підкреслено та продемонстровано на прикладі в [8], одержання неліївського анзацу зовсім не гарантує побудову за ним неліївських розв'язків. У нашому випадку лише при $c_1c_2 = 0$ формули (16)–(17) дають ліївські розв'язки вигляду плоскої хвилі.

[1] Gilding B.H. and Kersner R. The characterization of reaction-convection-diffusion processes by travelling waves // J. Diff. Equations. – 1996. – **124**. – P. 27–79.

[2] Murray J.D. Nonlinear differential equation models in biology. – Oxford: Clarendon Press, 1977. – 394 p.

[3] Катков В.Л. Групповая классификация решений уравнения Хопфа // Журн. прикл. мех. техн. физики. – 1965. – **6**. – С. 105–106.

[4] Сєров М.І., Черніга Р.М. Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – **49.** – С. 1262–1270.

[5] Cherniha R. and Serov M. Lie and non-Lie symmetries of nonlinear diffusion equations with convection term // Proceedings of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics", Kyiv, 7–13 July, 1997. – Kyiv: Institute of Mathematics, 1997. – Vol.2. – P. 444–449.

[6] Arrigo D.J., Broadbridge P. and Hill J.M. Nonclassical symmetry solutions and the methods of Bluman-Cole and Clarkson-Kruskal // J. Math. Phys. – 1993. – **34.** – P. 4692–4703.

[7] Фущич В.І., Сєров М.І., Тулупова Л. Умовна інваріантність та точні розв'язки нелінійного рівняння теплопровідності // Доп. АН України. – 1993. – № 4. – С. 23–27.

[8] Черніга Р.М. Застосування одного конструктивного методу для побудови неліївських розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49.** – С. 814–827.

[9] Fushchych W.I., Shtelen W.M., Serov M.I., and Popowych R.O., Q-conditional symmetry of the linear heat equation // Dopov. Acad. Sci. Ukraine. – 1992. – № 12. – P. 27–32.

Праці Інституту математики НАН України 1998, том 19, 270–279

УДК 517.9: 519.46

Ґалілей-інваріантні узагальнення рівняння теплопровідності з нескінченно- вимірною алгеброю симетрій Лі

Р.М. ЧЕРНІГА

Інститут математики НАН України, Київ

Запропоновано клас нелінійних узагальнень класичного рівняння теплопровідності. Знайдено ліївські симетрії та приклади точних розв'язків запропонованих рівнянь.

A class of nonlinear generalizations of the classical heat equation is suggested. Lie symmetries and examples of exact solutions of suggested equations are found.

1. Добре відомо, що всі класичні методи (метод Фур'є, метод перетворень Лапласа, тощо) використовують принцип лінійної суперпозиції розв'язків для розв'язування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними (нижче – ДРЧП). З теоретико-алгебраїчної точки зору це означає не що інше як використання властивості інваріантності довільного *лінійного* ДРЧП відносно нескінченновимірної алгебри Лі. Дійсно, довільне однорідне ДРЧП

$$L\,U(t,x)=0, \qquad x=(x_1,\ldots,x_n) \tag{1}$$

інваріантне відносно алгебри Лі, породженої оператором

$$X^{\infty}=U^*(t,x)\partial_U, \tag{2}$$

де L – деякий лінійний диференціальний оператор, $U^*(t,x)$ – довільний розв'язок (1). Алгебра Лі, породжена оператором (2), є нескінченновимірною, оскільки простір розв'язків довільного лінійного ДРЧП нескінченновимірний.

Для довільно зафіксованого розв'язку $U(t,x)=U_1(t,x)$ оператор (2) породжує наступну формулу розмноження розв'язків:

$$U^1_{\mathrm{new}}=U_0(t,x)+\varepsilon_1U_1(t,x). \tag{3}$$

Тут U^1_{new} – новий розв'язок рівняння (1), а $U_0(t,x)$ – деякий відомий розв'язок цього ж рівняння. У випадку послідовного застосування оператора (2) при $U(t,x)=U_1(t,x)$, $U_2(t,x),\ldots,U_m(t,x)$, легко отримується наступне узагальнення формули (3):

$$U^m_{\mathrm{new}}=U_0(t,x)+\varepsilon_1U_1(t,x)+\cdots+\varepsilon_mU_m(t,x), \tag{4}$$

де $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_m$ – довільні сталі. Припустивши збіжність ряду у правій частині при $m\to\infty$, отримуємо розв'язок у вигляді

$$U_{\mathrm{new}}=U_0(t,x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_kU_k(t,x). \tag{5}$$

Так ось, зображення будь-якого розв'язку у вигляді (5) це і є головна ідея практично всіх класичних методів розв'язування лінійних ДРЧП. З точки зору теоретико-алгебраїчного підходу це є використання нескінченновимірної алгебри Лі, породженої оператором (2), для побудови деякої загальної форми розв'язку лінійного рівняння.

На жаль, абсолютна більшість нелінійних ДРЧП сучасної математичної фізики не володіє нескінченновимірною симетрією. Це означає, що принцип лінійної суперпозиції розв'язків не може бути застосованим для розв'язування таких рівнянь. Отже, вищезгадані класичні методи мало придатні для розв'язування нелінійних ДРЧП. Звичайно, іноді вдається нелінійне ДРЧП звести до лінійного за допомогою знайденої підстановки, проте пошук розв'язків абсолютної більшості нелінійних рівнянь вимагає нових підходів.

На теперішній час найбільш поширеними методами для побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь з частинними похідними є метод оберненої задачі розсіювання (див., наприклад, [1]) та метод Лі. Перший з них є ефективним лише для порівняно вузького класу нелінійних рівнянь (рівняння Шрьодінґера, Кортевеґа-де Фріза та деякі інші). Метод Лі (див., наприклад, [2–4]) має більш широкі межі застосування. Хоч техніка його добре відома, одначе постійно з'являються роботи, в яких автори одержують нові висліди для нелінійних рівнянь з нетривіальною симетрією Лі.

2. У цьому повідомленні зазначені вище зауваги більш детально розглянуті стосовно рівняння теплопровідності. Отже, розгляньмо $(n+1)$-вимірне рівняння теплопровідності (дифузії)

$$U_t=\Delta U, \tag{6}$$

де $U = U(t,x)$ – шукана достатньо гладка функція, $U_t = \dfrac{\partial U}{\partial t}$. Як відомо це рівняння інваріантне відносно узагальненої алгебри Ґалілея $AG_2(1,n)$ породженої операторами:

$$\begin{gathered} P_t = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \quad I = U\partial_U, \\ G_a = tP_a - \frac{x_a}{2}I, \quad J_{ab} = x_aP_b - x_bP_a, \quad a,b = 1,\dots,n, \\ D = 2tP_t + x_aP_a - \frac{n}{2}I, \quad \Pi = t^2P_t + tx_aP_a - \left(\frac{1}{4}|x|^2 + \frac{nt}{2}\right)I, \end{gathered} \tag{7}$$

та стандартної (для лінійного ДРЧП) нескінченновимірної алгебри Лі, породженої оператором

$$X^\infty = U^*(t,x)\partial_U, \quad U_t^* = \Delta U^*. \tag{8}$$

Тут і скрізь нижче $\partial_U \equiv \dfrac{\partial}{\partial U}$, $\partial_t \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_a \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_a}$, а за індексами a, що повторюються, слід підсумовувати від 1 до n. Оператори P_t і P_a породжують групу зсувів за часом та просторовою змінною, J_{ab} – групу обертань (поворотів) у просторі $\mathbb{R}^n$. Оператори G_a, D і Π породжують відповідно групи ґалілеївських, масштабних та проективних перетворень (детальніше див. [5]). Зауважимо, що С. Лі вперше відшукав максимальну алгебру інваріантності $(1+1)$-вимірного лінійного рівняння теплопровідності [6].

Стандартне нелінійне узагальнення рівняння теплопровідності (РТ) має вигляд

$$U_t = [A(U)U_a]_a + Q(U), \tag{9}$$

де $A(U)$ – коефіцієнт теплопровідності, а $Q(U)$ – потужність джерела або стоку. Тут і скрізь нижче індекси a біля функції U означають диференціювання за змінними $x_a, a = 1,\dots,n$. Повний опис ліївських симетрій рівняння (9) зроблено в роботі [7]. Як випливає з цієї роботи, серед усіх *нелінійних* рівнянь (9) лише $(2+1)$-вимірне рівняння

$$U_t = \left[U^{-1}U_a\right]_a + Q(U), \tag{10}$$

де $Q(U) = \lambda U$, інваріантне відносно нескінченновимірної алгебри Лі, породженої оператором

$$X^\infty = f(x_1,x_2)\partial_{x_1} + g(x_1,x_2)\partial_{x_2} - 2f_{x_1}U\partial_U, \tag{11}$$

де f і g – довільний розв'язок лінійної системи Коші-Рімана

$$f_{x_1} = g_{x_2}, \qquad f_{x_2} = -g_{x_1}. \tag{12}$$

Отже, для рівняння (10) є можливість ґенерувати все нові розв'язки, використовуючи оператор ліївської симетрії (11) та розв'язки лінійної системи (12), себто цей процес можна трактувати як застосування деякого нелінійного принципу суперпозиції розв'язків. Одначе структура нелінійного РТ (10) вельми специфічна і очевидно, що ним не може описуватися широкий спектр фізичних процесів. З іншого боку всі нелінійні РТ вигляду (9) при $A(U) \neq U^{-1}$ не володіють нескінченновимірною симетрією.

Розгляньмо замість (9) такий клас нелінійних рівнянь:

$$W^I = [[A(U)U_a]_a + Q(U)]W^{II}, \tag{13}$$

який у випадку $W^{II} \neq 0$ можна записати у вигляді

$$U_t = [A(U)U_a]_a + Q(U) - \frac{W^0}{W^{II}}, \tag{14}$$

де

$$\begin{gathered} W^I = \begin{vmatrix} U_t & U_1 & \dots & U_n \\ U_{1t} & U_{11} & \dots & U_{1n} \\ . & . & . & . \\ U_{nt} & U_{n1} & \dots & U_{nn} \end{vmatrix}, \; W^{II} = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} \\ . & . & . & . \\ U_{n1} & U_{n2} & \dots & U_{nn} \end{vmatrix}, \\ W^0 = W^I - U_tW^{II}, \quad U_{at} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_a \partial t}, \quad U_{ab} \equiv \frac{\partial^2 U}{\partial x_a \partial x_b}. \end{gathered} \tag{15}$$

Зауваження 1. У випадку $W^{II} = 0$ отримуємо добре відоме рівняння Монжа-Ампера, точні розв'язки якого знайдено в [4].

Щодо структури рівняння (14) – це нелінійне рівняння теплопровідності (9) з фіксованим нелінійним доданком. Воно було запропоноване в роботі [8] (при $n = 1$ див. [9]) на підставі його сумісності з принципом відносності Ґалілея.

Дійсно, лінійне рівняння теплопровідності (6) інваріантне відносно перетворень Ґалілея (див. оператори G_a в (7)):

$$t' = t, \quad x'_a = x_a + v_at, \quad U' = U\exp\left[-\frac{1}{2}v_a\left(x_a + \frac{1}{2}v_at\right)\right], \tag{16}$$

де $v_a, a = 1,\dots,n$ – довільні дійсні параметри (компоненти швидкості руху інерційної системи відліку). Проте будь-яке нелінійне РТ вигляду (9) не інваріантне відносно перетворень Ґалілея [8], навіть якщо закон перетворення для функції U (див. другий рядок в перетвореннях (16)) не фіксувати. А ось *будь-яке* рівняння вигляду (14) інваріантне відносно перетворень Ґалілея

$$t' = t, \quad x'_a = x_a + v_a t, \quad U' = U. \tag{17}$$

Зазначимо, що у стаціонарному випадку ($U_t = 0$) рівняння (9) та (14) збігаються, якщо тільки $W^{II} \neq 0$.

Виявляється, що *будь-яке* рівняння вигляду (14) інваріантне відносно нескінченновимірної алгебри Лі і справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Максимальна алгебра інваріантності рівняння (14) при довільних гладких функціях $A(u)$ та $Q(u)$ є нескінченновимірною алгеброю Лі породженою операторами*

$$\begin{aligned} &P_t = \partial_t, \quad P_a = \partial_a, \quad J_{ab} = x_a P_b - x_b P_a, \\ &G_a^\infty = f_a(t)\partial_a, \quad a, b = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{18}$$

де $f_a(t), a = 1, \dots, n$ – довільні гладкі функції.

Доведення цієї та наступних теорем базуються на класичній схемі методу Лі (див., наприклад, [4]) і є надто громіздкими, тому тут опускаються.

Легко помітити, що у випадку $f_a(t) = t, a = 1, \dots, n$ з операторів G_a^∞ отримуються оператори Ґалілея

$$G_a^0 = t\partial_a, \tag{19}$$

які породжують перетворення (17).

Нескінченновимірна алгебра Лі з базовими операторами (18) характеризується стандартними комутативними співвідношеннями для алгебри зсувів і обертань у просторі $\mathbb{R}^n$ та співвідношеннями для операторів G_a^∞:

$$\begin{aligned} &[G_a^\infty, P_b] = [G_a^\infty, G_b^\infty] = 0, \\ &[G_a^\infty, J_{a_1 b_1}] = \delta_{a,a_1} G_{b_1}^\infty - \delta_{a,b_1} G_{a_1}^\infty, \\ &[G_a^\infty, P_t] = -\frac{df_a}{dt} P_a \equiv -\frac{d}{dt} G_a^\infty, \end{aligned} \tag{20}$$

де $\delta_{a,b} = 0, 1$ – символ Кронекера.

Оператори G_a^∞ породжують групу інваріантних перетворень вигляду

$$t' = t, \quad U' = U, \quad x'_a = x_a + \varepsilon_a f_a(t), \quad a = 1, \dots, n. \tag{21}$$

Отже, за довільним фіксованим розв'язком $U_0(t, x)$ рівняння (14), використовуючи формули (21) отримуємо новий розв'язок

$$U_{\text{new}} = U_0\big(t, x_1 + \varepsilon_1 f_1(t), \dots, x_n + \varepsilon_n f_n(t)\big), \tag{22}$$

де $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – довільні сталі.

Формулу розмноження розв'язків (22), що містить довільні функції $f_a(t), a = 1, \dots, n$, можна інтерпретувати як принцип нелінійної суперпозиції розв'язків для рівняння (14).

3. Нижче розглядатимемо нелінійне рівняння (14) при $Q(U) = 0$ в $(1+1)$-вимірному випадку, тобто:

$$U_t - \frac{U_{tx} U_x}{U_{xx}} = [A(U) U_x]_x, \tag{23}$$

де $A(U)$ – довільна гладка функція, $U_{xx} \neq 0$. Це рівняння також можна переписати у вигляді

$$W^I = [A(U) U_x]_x U_{xx},$$

де $W^I = \begin{vmatrix} U_t & U_x \\ U_{tx} & U_{xx} \end{vmatrix}$, а вище наведене обмеження на U_{xx} стає зайвим.

Очевидно, що всі рівняння вигляду (23) є нелінійними. Беручи до уваги структуру класичного рівняння теплопровідності

$$U_t = U_{xx}, \tag{24}$$

логічно розглянути рівняння

$$W^I = U_{xx}^2 \tag{25}$$

як його аналог серед рівнянь вигляду (23).

Теорема 2. *Максимальна алгебра інваріантності рівняння (25) є нескінченновимірною алгеброю Лі породженою операторами*

$$\begin{aligned} &P_t = \partial_t, \quad P_x = \partial_x, \quad P_U = \partial_U, \\ &I = U\partial_U, \quad D = 2tP_t + xP_x, \quad G^\infty = f(t)\partial_x, \end{aligned} \tag{26}$$

де $f(t)$ – довільна гладка функція.

Тут доречно нагадати, що максимальна алгебра інваріантності рівняння (24) породжується операторами

$$\begin{aligned} &P_t, \quad P_x, \quad P_U, \quad I, \quad D, \quad G = tP_x - \frac{x}{2}I, \\ &\Pi = t^2P_t + txP_x - \frac{1}{4}x^2I - \frac{1}{2}tI, \quad X^\infty = V(t,x)\partial_U, \end{aligned} \tag{27}$$

де $V = V(t,x)$ – довільний розв'язок рівняння (24).

Легко помітити, що алгебри Лі (26) і (27) мають низку спільних операторів, маємо також відповідність між операторами G^∞ і X^∞.

Оператори (26) можна застосовувати для побудови анзаців та точних розв'язків рівняння (25), використовуючи відому процедуру. Зокрема, вибравши таку лінійну комбінацію операторів:

$$Y = G^\infty + D + I, \tag{28}$$

після розв'язування відповідних рівнянь Лагранжа отримуємо анзац

$$U = \sqrt{t}\varphi(\omega), \qquad \omega = \frac{x + f(t)}{\sqrt{2t}}. \tag{29}$$

Підставляючи (29) у рівняння (25) знаходимо сім'ю розв'язків з довільною функцією $f(t)$, а саме:

$$U = \sqrt{t}[c_1 \exp(\omega) + c_2 \exp(-\omega)]. \tag{30}$$

Тут і нижче c_1, c_2 – довільні сталі. Як частинний випадок ця сім'я містить розв'язок

$$U = \frac{c_1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\sqrt{\frac{x^2}{2t}}\right). \tag{31}$$

Цей розв'язок має структуру, аналогічну до фундаментального розв'язку

$$U = \frac{c_1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) \tag{32}$$

рівняння теплопровідності (24).

Нижче формулюється теорема, яка дає повну інформацію про симетрії Лі рівняння (23) при $A(U) \neq \text{const}$.

Теорема 3. *Максимальна алгебра інваріантності рівняння (23) є нескінченновимірною алгеброю Лі породженою:*

a) операторами

$$P_t = \partial_t, \quad P_x = \partial_x, \quad D = 2tP_t + xP_x, \quad G^\infty = f(t)\partial_x, \tag{33}$$

якщо $A(U)$ – довільна гладка функція;

b) операторами (33) та

$$D_1 = -ktP_t + UP_U, \tag{34}$$

якщо $A(U) = \lambda U^k$, $k \neq 0$;

c) операторами (33) та

$$D_2 = -tP_t + P_U, \tag{35}$$

якщо $A(U) = \lambda \exp U, \quad \lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$.

Необхідно нагадати, що стандартне нелінійне узагальнення РТ вигляду

$$U_t = [A(U)U_x]_x \tag{36}$$

інваріантне відносно *скінченновимірної* алгебри Лі при довільному $A(U) \neq \text{const}$. Як відомо [3], максимальна алгебра інваріантності рівняння (36) породжується базовими операторами:

a) $P_t = \partial_t$, $P_x = \partial_x$, $D = 2tP_t + xP_x$, якщо $A(U)$ – довільна гладка функція;

b) P_t, P_x, D і $D_1 = -ktP_t + UP_U$, якщо $A(U) = \lambda U^k$, $k \neq -4/3$;

c) P_t, P_x, D і $D_2 = -tP_t + P_U$, якщо $A(U) = \lambda \exp U$.

Легко помітити, що скінченновимірні частини алгебр Лі рівняння (23) у випадках (a), (b), (c) збігаються з максимальними алгебрами інваріантності рівняння (36). Звідси негайно випливає, що для будь-якого ліївського розв'язку рівняння (36) можна побудувати його аналог, що буде розв'язком відповідного рівняння (23). Наприклад рівняння (36) при $A(U) = \lambda U^k$, $k \neq 0, -2$ має відомий розв'язок [10]

$$U = \left[\frac{k}{2(k+2)} \frac{x^2}{(t + c_0)}\right]^{1/k}, \tag{37}$$

який знаходиться за допомогою оператора $D = 2tP_t + xP_x$. Неважко знайти його аналог для рівняння (23) при $A(U) = \lambda U^k$, $k \neq 0, -2, +2$, а саме:

$$U = \left[\frac{k}{2(4 - k^2)} \frac{x^2}{(t + c_0)}\right]^{1/k}. \tag{38}$$

З іншого боку, використовуючи оператор G^∞ отримуємо наступну формулу розмноження розв'язків рівняння (23):

$$U_{\rm new} = U_0\big(t, x + f(t)\big), \tag{39}$$

де U_0 – довільний фіксований розв'язок. Таким чином знайдений розв'язок (38) може бути узагальненим до вигляду

$$U = \left[\frac{k}{2(4-k^2)}\frac{(x+f(t))^2}{(t+c_0)}\right]^{1/k}. \tag{40}$$

На противагу (37) цей розв'язок містить довільну гладку функцію $f(t)$. Це означає, що можна задовольнити довільну крайову умову при $x = x_0$.

Наголосимо також, що довільний стаціонарний (себто незалежний від часу t) розв'язок $U_0(x)$ рівняння (23) за допомогою формули (39) можна перетворити в нестаціонарний вигляду $U_0(x + f(t))$. У випадку нелінійного рівняння (36) це зробити неможливо, оскільки його алгебра Лі не містить відповідного оператора.

Таким чином, з точки зору теоретико-алгебраїчного підходу до дослідження ДРЧП, нелінійне узагальнення класичного рівняння теплопровідності у вигляді (23) є більш обґрунтованим, ніж у вигляді (36). Справді, рівняння (23) при *довільній* функції $A(U)$ інваріантне відносно *нескінченновимірної* алгебри Лі. З цього факту, як це доведено вище, випливає, що: *а)* виконується принцип відносності Ґалілея (див. (17)); *б)* є справедливою формула розмноження розв'язків (39), яку можна розглядати як принцип нелінійної суперпозиції розв'язків; *в)* для відомих ліївських розв'язків рівняння (36) існують їхні аналоги для рівняння (23) (при однакових нелінійностях).

[1] Ablowitz M.J., Segur H.J. Solitons and the inverse scattering transform. – Philadelphia: SIAM. – 400 p.

[2] Bluman G.W., Cole J.D. Similarity methods for differential equations. – Berlin: Springer, 1974. – 332 p.

[3] Овсянников Л.В. Груповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

[4] Фущич В.И., Штелень В.М., Серов М.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.

[5] Фущич В.И., Черніга Р.М. Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения I, II. // Укр. мат. журн. – 1989. – **41.** – С. 1349–1357, 1687–1694.

[6] Lie S. Über Integration durch bestimente Integrale von einer Klasse lineare partiellen Differentialgleichungen. – Leipzig, 1881 – **6**. – S. 328–368.

[7] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в дву- и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**. – С. 1215–1223.

[8] Fushchych W., Cherniha R. The Galilean relativistic principle and nonlinear partial differential equations // J. Phys. A: Math. Gen. – 1985. – **18**. – P. 3491–3503.

[9] Черніга Р.М. О двумерных нелинейных уравнениях, инвариантных относительно алгебры Галилея // Теоретико-групповые исследования уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 107–114.

[10] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И. Об асимптотических свойствах автомодельных решений уравнений нестационарной фильтрации газа // Докл. АН СССР – 1958. – **118**. – С. 671–674.

Наукове видання

Симетрійні та аналітичні методи
в математичній фізиці

Техн. редактор *Н.І. Коваленко*
Комп'ютерний оригінал-макет *В.М. Бойко, Р.О. Попович*

Підп. до друку 31.03.98. Формат 60×90/16. Папір офс. № 1. Гарн. нова газетна.
Офс. друк. Умов. вид. арк. 14. Умов. друк. арк. 16,2. Зам. № 49. Тираж 150.

Віддруковано в Інституті математики НАН України.
252601 Київ 4, МСП, вул. Терещенківська, 3.