

Нелінійні системи рівнянь реакції-конвекції-дифузії інваріантні відносно алгебри Галілея та її розширень

Сєров М.І., Сєрова М.М., Рассоха І.В.

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка
Україна, 36011, Полтава, Першотравневий проспект, 24
innaolha @ mail.ru

Оскільки усі основні рівняння математичної фізики (рівняння Ньютона, Лапласа, д'Аламбера, Шредінгера, Ліувілля, Дірака, Максвелла і т.д.) інваріантні відносно достатньо широких груп перетворень, то по відношенню до диференціальних рівнянь, симетрію можна розглядати як принцип, за допомогою якого із найрізноманітніших логічно допустимих моделей (рівнянь, співвідношень) відбираються тільки ті, які володіють широкими симетрійними властивостями [7].

Відомо, що системи, які використовуються для моделювання реальних процесів, як правило, містять одну чи кілька довільних функцій і тому вони утворюють цілі класи систем диференціальних рівнянь. Таким чином, актуальною є задача відбору з такого класу тих систем, які володіють широкими симетрійними властивостями, а отже в більшій мірі, ніж інші, претендують на описання конкретних фізичних процесів.

У даній роботі з точністю до неперервних перетворень еквівалентності встановлено вигляд нелінійностей, при яких система рівнянь-реакції-конвекції-дифузії

$$U_0 = \partial_1[F(U)U_1] + G(U)U_1 + H(U),$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11}(U) & f^{12}(U) \\ f^{21}(U) & f^{22}(U) \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^{11}(U) & g^{12}(U) \\ g^{21}(U) & g^{22}(U) \end{pmatrix}$,
 $H(U) = \begin{pmatrix} h^1(U) \\ h^2(U) \end{pmatrix}$, $u^a = u^a(x_0, x_1)$ – довільні гладкі функції, інваріантна відносно алгебри Галілея та її розширень операторами масштабних та проєктивних перетворень.

Системи, побудовані нами в результаті проведених досліджень, узагальнюють одержані нами раніше результати для системи рівнянь хемотаксису [6] та нелінійної системи рівнянь конвекції дифузії [5] а також результатів Фущича В.І. та Черніги Р.М. [8], Черніги Р.М. та Кінга Дж.[1], Нікітіна А.Г. [3], [4], Нікітіна А.Г. та Вілштира Р. [2], що були одержані у роботах присвячених дослідженню інваріантності системи реакції дифузії. Поряд з цим встановлено систему, яка не може бути одержана узагальненням раніше відомих систем, інваріантних відносно алгебри Галілея.

Побудовані системи володіють симетрійними властивостями, характерними для рівнянь, що описують процеси, які підпорядковуються принципу відносності Галілея. Серед них містяться такі відомі рівняння, як рівняння Шредингера з деривативною нелінійністю, система хемотаксису, узагальнене рівняння Гінзбурга-Ландау та інші.

Література

- [1] Cherniha R. & King J.R. (2005) Nonlinear Reaction-Diffusion Systems with Variable Diffusivities: Lie Symmetries, Ansätze and Exact Solutions. *J. Math. Anal. Appl.* **308**, 11-35.
- [2] Nikitin A.G. System of reaction-diffusion equations and their symmetry properties / A.G. Nikitin, R.J. Wiltshire // *J. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 42. — P. 1666–1688.
- [3] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. II. Generalized Turing systems / A.G. Nikitin // *J. Math. Analysis and Applications (JMAA)*. — 2007. — Vol. 332, № 1, — P. 666–690.
- [4] Nikitin A.G. Group classification of systems of non-linear reaction-diffusion equations with general diffusion matrix. III. Triangular diffusion matrix / A.G. Nikitin // *Ukrainian Mathematical Journal*. — 2007. — Vol. 59, № 3, — P. 395–411.
- [5] М.І. Серов, Т.О. Жадан, Л.М. Блажко Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля та їх застосування. // *УМЖ*. — 2006. — Т. 58, № 8.— С. 1128 – 1145.
- [6] М.І. Серов, О.М. Омелян Класифікація симетрійних властивостей системи рівнянь хемотаксису// *Український математичний вісник*. — 2008. — Т. 5, № 4. — С. 536–562.
- [7] Фуцич В. І. Симетрія рівнянь лінійної та нелінійної квантової механіки. // *УМЖ*. — 1997. — Т. 49, № 1. — С. 164 – 177.
- [8] Фуцич В. І., Черніга Р. М. Галілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь типу Гамільтона-Якобі та реакції-дифузії. // *Доп. НАН України*. — 1994. — № 3. — р. 31 –37.