

Побудова операторів Q -умовної симетрії першого типу для класу систем рівнянь реакції-дифузії з несталими коефіцієнтами дифузії

Давидович В. В.
Інститут математики НАН України,
Терещенківська 3, Київ 01601, Україна
E-mail:davydovych@imath.kiev.ua

Розглянемо клас систем рівнянь реакції-дифузії (РД) вигляду

$$\begin{aligned} U_t &= [D^1(U)U_x]_x + F(U, V), \\ V_t &= [D^2(V)V_x]_x + G(U, V), \end{aligned} \quad (1)$$

де $U = U(t, x)$ та $V = V(t, x)$ – невідомі функції, що описують густини популяцій (клітин, хімічних реагентів), $F(U, V)$ та $G(U, V)$ – задані функції, що описують взаємодію між ними та оточуючим середовищем, функції $D^1(U)$ та $D^2(V)$ – відповідні коефіцієнти дифузії (вважатимемо їх гладкими та додатніми), нижні індекси t та x означають диференціювання за цими змінними.

Для спрощення системи (1), використаємо заміну Кірхгофа

$$u = \int D^1(U)dU, \quad v = \int D^2(V)dV, \quad (2)$$

де $u(t, x)$ та $v(t, x)$ – нові невідомі функції. Припустивши, що для функцій, записаних в правих частинах (2), існують єдині обернені функції, і підставивши (2) в (1), отримуємо систему

$$\begin{aligned} u_{xx} &= d^1(u)u_t + C^1(u, v), \\ v_{xx} &= d^2(v)v_t + C^2(u, v), \end{aligned} \quad (3)$$

де функції d^1 , d^2 та C^1, C^2 визначаються відповідно через D^1 , D^2 та F, G .

Оператор Q -умовної симетрії першого типу для системи РД (3) будемо шукати у вигляді

$$Q = \xi^0(t, x, u, v)\partial_t + \xi^1(t, x, u, v)\partial_x + \eta^1(t, x, u, v)\partial_u + \eta^2(t, x, u, v)\partial_v, \quad (4)$$

використовуючи означення, запропоноване в роботі [1].

Означення. Оператор (4) називається оператором Q -умовної симетрії першого типу системи РД (3), якщо виконуються наступні умови інваріантності:

$$\begin{aligned} Q_2(S_1) &\equiv Q_2(u_{xx} - d^1(u)u_t - C^1(u, v))\Big|_{\mathcal{M}} = 0, \\ Q_2(S_2) &\equiv Q_2(v_{xx} - d^2(v)v_t - C^2(u, v))\Big|_{\mathcal{M}} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

де через $\mathcal{M}$ позначено один з многовидів $\{S_1 = 0, S_2 = 0, Q(u) = 0\}$ або $\{S_1 = 0, S_2 = 0, Q(v) = 0\}$.

В результаті дослідження ми отримали повний опис операторів Q -умовної симетрії першого типу (при $\xi^0 \neq 0$) системи РД (3) з несталими коефіцієнтами дифузії $d_u^1 d_v^2 \neq 0$ (теорема 1 [2]). Оператори, отримані для зачеплених систем ($C_u^1 C_v^1 C_u^2 C_v^2 \neq 0$), були використані для побудови анзаців та проведення редукції системи (3) до систем звичайних диференціальних рівнянь (таблиця 2 [2]). Побудовано багатопараметричні сім'ї точних розв'язків для систем РД, цікавих з біологічної (взаємодія популяцій) та фізичної (еволюція тонких плівок) точок зору.

Література

- [1] Cherniha R. Conditional symmetries for systems of PDEs: new definition and its application for reaction-diffusion systems. J. Phys. A Math. Theor. 2010; 43: 405207-19.
- [2] Cherniha R, Davydovych V. Conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion systems with non-constant diffusivities. Com. Nonlin. Sci. Num. Sim. (submitted).