

Симетрійний аналіз рівнянь типу Кавахари: огляд

Олена О. ВАНЄЄВА ¹, Оксана В. БРАГІНЕЦЬ ², Олена В. МАГДА ³,
Олександр Ю. ЖАЛІЙ ¹

1) Інститут математики НАН України, Київ, Україна
E-mail: vanceeva@imath.kiev.ua, zhaliy@imath.kiev.ua

2) Чорноморський національний університет ім. Петра Могили, Миколаїв, Україна
E-mail: oksana.brahinets@gmail.com

3) НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна
E-mail: olena.magda@yahoo.com, olena.magda@gmail.com

У доповіді представлено огляд результатів дослідження лівських симетрій рівнянь типу Кавахари та їх різноманітних узагальнень. Рівняння Кавахари

$$u_t + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \sigma u_{xxxx} = 0, \quad (1)$$

де α , β та σ — ненульові сталі, є класичною моделлю теорії солітонів [4]. У звичайному сенсі, солітонні хвилі — це нелінійні хвилі постійної форми, які швидко (зазвичай експоненційно) спадають у своїх хвостових областях. Однак за критичних умов у дисперсійних системах відбувається несподіване зростання слабо-нелокальних солітонних хвиль (наприклад, хвилі з поверхневим натягом). Така хвиля складається з центральної частини, яка подібна до центральної частини класичних солітонних хвиль, і коливних хвостів з ненульовою сталою амплітудою, які простягаються нескінченно далеко від центральної частини. Щоб з'ясувати й описати властивості цих хвиль, Т. Кавахара запропонував узагальнені нелінійні дисперсійні рівняння, які мають вигляд рівняння Кортевега–де Фріза з додатковим членом з п'ятою похідною, тобто рівняння (1).

Узагальнені моделі зі сталими коефіцієнтами, пов'язані з рівнянням Кавахари, з'явилися пізніше (див., зокрема, [7, 18]). Наприклад, довгі хвилі на мілкій воді під кригою моделюються рівнянням $u_t + u_x + \alpha uu_x + \beta u_{xxx} + \sigma u_{xxxx} = 0$. Це рівняння зводиться до класичного рівняння Кавахари за допомогою простих заміन змінних: $\tilde{x} = x - t$ (t і u не перетворюються) або $\tilde{t} = 1 + \alpha t$ (t і x не перетворюються). Наскільки нам відомо, лівські симетрії рівняння Кавахари (1) вперше було наведено в роботі [2]. Ці результати було отримано й у роботі [6], де також було знайдено лівські симетрії модифікованого рівняння Кавахари

$$u_t + \alpha u^2 u_x + \beta u_{xxx} + \sigma u_{xxxx} = 0,$$

де α , β та σ — ненульові сталі.

У роботі [15] прокласифіковано узагальнені симетрії, а також локальні закони збереження рівнянь Кавахари зі сталими коефіцієнтами β , σ та довільною нелінійністю $f(u)$

$$u_t + f(u)u_x + \beta u_{xxx} + \sigma u_{xxxx} = 0,$$

де $f_u \beta \sigma \neq 0$.

Вже більше десяти років основну увагу дослідників зосереджено на моделях типу Кавахари з коефіцієнтами, залежними від часової змінної:

$$u_t + \alpha(t)f(u)u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxx} = 0, \quad f_u \alpha \beta \sigma \neq 0, \quad (2)$$

де n — довільне ненульове ціле число, α , β та σ — гладкі ненульові функції змінної t , та їхнім різноманітним підкласам.

У роботі [3] для знаходження точних розв'язків класичного і модифікованого рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами вигляду (2) з $f(u) = u$ та $f(u) = u^2$ застосовано лівські симетрії. У цій роботі отримано лише часткові результати щодо лівських симетрій, оскільки перетворення еквівалентності не застосовувались.

Завдяки використанню допустимих перетворень та розбиттю класу на нормалізовані підкласи,¹ у роботі [5] було виконано вичерпну групову класифікацію підкласу класу рівнянь (2) з $f(u) = u^n$, де n — довільна ненульова змінна. Також у [5] було виконано вичерпну класифікацію лівських редукцій, побудовано деякі точні розв'язки та закони збереження таких рівнянь.

Пошуку лівських симетрій та локальних законів збереження узагальнених рівнянь Кавахари вигляду (2) присвячено роботу [1]. Для спрощення задачі у цій роботі використано калібрування довільного елементу $\sigma = 1$, але воно не є оптимальним. У роботі [12] показано, що саме властивість нормалізованості та аналіз типу групи еквівалентності (звичайна / узагальнена / розширена узагальнена) дозволяє алгоритмічно вибрати оптимальне калібрування. У роботах [13, 16] було досліджено групоїд еквівалентності та виконано вичерпну групову класифікацію класу узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами (2), а у роботах [14, 17] проведено класифікацію лівських редукцій таких рівнянь та побудовано деякі їхні точні розв'язки.

Наведемо основні результати щодо допустимих перетворень та лівських симетрій рівнянь з класу (2). Це клас не є нормалізованим, але його можна розбити на нормалізовані підкласи, виокремлені умовами $f_{uu} \neq 0$ і $f_{uu} = 0$.

Теорема 1. *Підклас класу (2), виокремлений умовою $f_{uu} \neq 0$, нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Його групу еквівалентності $\hat{G}^\sim$ складають перетворення*

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = \delta_1(x + \delta_2 A) + \delta_3, \quad \tilde{u} = \delta_4 u + \delta_5, \\ \tilde{f} &= \delta_0(f + \delta_2), \quad \tilde{\alpha} = \frac{\delta_1}{\delta_0 T_t} \alpha, \quad \tilde{A} = \frac{\delta_1}{\delta_0} A + \varepsilon_0, \\ \tilde{\beta} &= \frac{\delta_1^3}{T_t} \beta, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\delta_1^5}{T_t} \sigma,\end{aligned}$$

де ε_0 і δ_j , $j = 0, 1, \dots, 5$, — такі дійсні сталі, що $\delta_0 \delta_1 \delta_4 \neq 0$, а $T(t)$ — довільна гладка нестала функція, $T_t \neq 0$. Додатковий довільний елемент A задовольняє рівняння $A_t = \alpha$.

Теорема 2. *Клас рівнянь Кавахари*

$$u_t + \alpha(t)(u + b)u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxx} = 0 \quad (3)$$

нормалізований у розширеному узагальненому сенсі. Його групу еквівалентності $\hat{G}_1^\sim$ складають перетворення вигляду

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= T(t), \quad \tilde{x} = \frac{\varepsilon_2 x + \varepsilon_1 A + \varepsilon_0}{\delta_2 A + \delta_1}, \quad \tilde{u} = \frac{\varepsilon_2}{\Delta} ((\delta_2 A + \delta_1)u - \delta_2 x + \delta_2 b A + \varepsilon_3), \\ \tilde{A} &= \frac{\delta_2' A + \delta_1'}{\delta_2 A + \delta_1}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\Delta}{T_t(\delta_2 A + \delta_1)^2} \alpha, \quad \tilde{\beta} = \frac{\varepsilon_2^3}{T_t(\delta_2 A + \delta_1)^3} \beta, \\ \tilde{\sigma} &= \frac{\varepsilon_2^5}{T_t(\delta_2 A + \delta_1)^5} \sigma, \quad \tilde{b} = \frac{1}{\Delta} (b\delta_1 \varepsilon_2 + \delta_1 \varepsilon_1 - \delta_2 \varepsilon_0 - \varepsilon_3 \varepsilon_2),\end{aligned}$$

де δ_j, δ_j' $j = 1, 2$, $i \varepsilon_i$, $i = 0, 1, 2, 3$, — довільні сталі, визначені з точністю до сталого множника, причому $\Delta = \delta_2' \delta_1 - \delta_1' \delta_2 \neq 0$, $\varepsilon_2 \neq 0$. Додатковий довільний елемент A задовольняє умову $A_t = \alpha$.

¹Дивись означення допустимих перетворень, групоїду еквівалентності, нормалізованого класу, постановку задачі групової класифікації, опис методу розбиття ненормалізованого класу на нормалізовані підкласи та методу розгалуженого розщеплення у роботах [8–11].

З допомогою перетворень еквівалентності виконано калібрування $\alpha = 1$. Результати групової класифікації рівнянь вигляду (2) з $f_{uu} \neq 0$ та $f_{uu} = 0$ наведено у теоремах 3 та 4.

Теорема 3. Ядро максимальних алгебр лівської інваріантності рівнянь з класу (2) з $f_{uu} \neq 0$ співпадає з одновимірною алгеброю $\langle \partial_x \rangle$. Всі можливі $\hat{G}^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення максимальних алгебр лівської інваріантності вичерпуються випадками 1–9 таблиці 1.

Табл. 1. Результат групової класифікації класу (2) з $f_{uu} \neq 0$.

№	$f(u)$	$\beta(t)$	$\sigma(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	$\forall$	∂_x
1	$\forall$	λt^2	δt^4	$\partial_x, t\partial_t + x\partial_x$
2	$\forall$	λ	δ	∂_x, ∂_t
3	$\ln u$	$\forall$	$\forall$	$\partial_x, t\partial_x + u\partial_u$
4	$\ln u$	λt^2	δt^4	$\partial_x, t\partial_x + u\partial_u, t\partial_t + x\partial_x$
5	$\ln u$	λ	δ	$\partial_x, t\partial_x + u\partial_u, \partial_t$
6	u^n	λt^ρ	$\delta t^{\frac{5\rho+2}{3}}$	$\partial_x, 3nt\partial_t + (\rho+1)nx\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
7	u^n	λe^t	$\delta e^{\frac{5}{3}t}$	$\partial_x, 3n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u$
8	e^u	λt^ρ	$\delta t^{\frac{5\rho+2}{3}}$	$\partial_x, 3t\partial_t + (\rho+1)x\partial_x + (\rho-2)\partial_u$
9	e^u	λe^t	$\delta e^{\frac{5}{3}t}$	$\partial_x, 3\partial_t + x\partial_x + \partial_u$

У таблиці 1 $\alpha(t) = 1 \bmod \hat{G}^\sim$, ρ і n — довільні сталі, $n \neq 0, 1$; δ і λ — ненульові сталі, $\delta = \pm 1 \bmod \hat{G}^\sim$.

Теорема 4. Ядро максимальних алгебр лівської інваріантності рівнянь з класу (2) з $f_{uu} = 0$ співпадає з двовимірною алгеброю $\langle \partial_x, t\partial_x + \partial_u \rangle$. Усі можливі $\hat{G}_1^\sim$ -нееквівалентні випадки розширення максимальних алгебр лівської інваріантності вичерпуються випадками 1–4 з таблиці 2.

Табл. 2. Результат групової класифікації класу (2) з $f_{uu} = 0$.

№	$\beta(t)$	$\sigma(t)$	Базис $A^{\max}$
0	$\forall$	$\forall$	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u$
1	λt^ρ	$\delta t^{\frac{5\rho+2}{3}}$	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u, 3t\partial_t + (\rho+1)x\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
2	λe^t	$\delta e^{\frac{5}{3}t}$	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u, 3\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
3	λ	δ	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u, \partial_t$
4	$\frac{\lambda(t^2+1)^{\frac{1}{2}}}{e^{3\nu \arctan t}}$	$\frac{\delta(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{e^{5\nu \arctan t}}$	$\partial_x, t\partial_x + \partial_u,$ $(t^2+1)\partial_t + (t-\nu)x\partial_x + (x-(t+\nu)u)\partial_u$

У таблиці 2 $\alpha = 1 \bmod \hat{G}_1^\sim$, $b = 0 \bmod \hat{G}_1^\sim$, ρ , ν — довільні сталі, $\rho \geq 1/2 \bmod \hat{G}_1^\sim$, $\nu \leq 0 \bmod \hat{G}_1^\sim$; δ , λ — ненульові сталі, $\delta = \pm 1 \bmod \hat{G}_1^\sim$.

Ця робота була підтримана грантами від Фонду Саймона (1290607 та SFI-PD-Ukraine-00014586, О.О.В. та О.Ю.Ж.).

Література

- [1] Gandarias M.L., Rosa M., Recio E., Anco S., [Conservation laws and symmetries of a generalized Kawahara equation](#), *AIP Conf. Proc.* **1836** (2017), 020072, 6 pp.
- [2] Hounkonnou M.N., Mahaman M.K., [Symmetry, integrability and solutions of the Kawahara equation](#), *SUT J. Math.* **44** (2008), 39–53.
- [3] Kaur L., Gupta R.K., [Kawahara equation and modified Kawahara equation with time dependent coefficients: Lie symmetry analysis and generalized \(G'/G\)-expansion method](#), *Math. Meth. Appl. Sci.* **36**(5) (2013), 584–600.
- [4] Kawahara T., [Oscillatory solitary waves in dispersive media](#), *J. Phys. Soc. Jpn.* **33** (1972), 260–271.
- [5] Kuriksha O., Pošta S., Vaneeva O., [Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations](#), *J. Phys. A* **47** (2014), 045201, 19 pp.
- [6] Liu H., Li J., Liu L., [Lie symmetry analysis, optimal systems and exact solutions to the fifth-order KdV types of equations](#), *J. Math. Anal. Appl.* **368** (2010), 551–558.
- [7] Marchenko A.V., [Long waves in shallow liquid under ice cover](#), *J. Appl. Math. Mech.* **52** (1988), 180–183.
- [8] Popovych R.O., [Classification of admissible transformations of differential equations](#), *Collection of Works of Institute of Mathematics (Kyiv, Ukraine)* **3** (2006), no. 2, 239–254.
- [9] Popovych R.O., Bihlo A., [Symmetry preserving parameterization schemes](#), *J. Math. Phys.* **53** (2012), 073102, 36 pp.
- [10] Popovych R.O., Kunzinger M., Eshraghi H., [Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations](#), *Acta Appl. Math.* **109** (2010), 315–359.
- [11] Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovych R.O., [Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations](#), *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **91** (2020), 105419, 28 pp.
- [12] Vaneeva O., Karadzhov Yu., Sophocleous C., [Group analysis of a class of nonlinear Kolmogorov equations, in Lie Theory and its Applications in Physics](#), *Springer Proc. Math. Stat.*, vol. 191, Springer, Singapore, 2016, 349–360.
- [13] Vaneeva O., Magda O., Zhalij A., [Equivalence groupoid and enhanced group classification of a class of generalized Kawahara equations](#), 329–340, *Springer Proc. Math. Stat.* **335**, Springer, Singapore, 2020.
- [14] Vaneeva O., Magda O., Zhalij A., [Lie reductions and exact solutions of generalized Kawahara equations](#), 333–338, *Springer Proc. Math. Stat.* **396**, Springer, Singapore, 2023.
- [15] Vašíček J., [Symmetries and conservation laws for a generalization of Kawahara equation](#), *J. Geom. Phys.* **150** (2020), 103579, 6 pp.
- [16] Ванеєва О., Жалій О., [Ліівські симетрії узагальнених рівнянь Кавахари](#), *Доповіді НАН України* (2020), no. 12, 3–10.
- [17] Ванеєва О., Жалій О., Магда О., [Класифікація ліівських редукцій узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами](#), *Доповіді НАН України* (2022), no. 6, 3–9.
- [18] Гончаренко Т.Б., Яковлев В.В., [Дослідження сталих нелінійних згинно-гравітаційних хвиль в морі, вкритому суцільною кригою](#), *Прикладна гідромеханіка* **7**(79) (2005), no. 2, 3–7.