

Побудова реалізацій алгебри Лі $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ за допомогою матричних зображень

Микола С. СТАРИЙ

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

E-mail: m.staryi@imath.kiev.ua

У попередніх роботах [1,3] розглядалась задача побудови реалізацій векторними полями простої тривимірної алгебри Лі $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ з її матричних зображень. Коректність задачі впливає з того, що підпростір векторних полів з лінійними коефіцієнтами утворює алгебру Лі ізоморфну загальній лінійній алгебрі.

Користуючись прямим методом, описаному у [2], можна отримати всі нееквівалентні точні реалізації певної алгебри Лі. Відповідний перелік для алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ є наступним (див. [1,3]):

$$\partial_1, \quad x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2 + x_2\partial_3, \quad (1)$$

$$\partial_1, \quad x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad (x_1^2 + x_2^2)\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2, \quad (2)$$

$$\partial_1, \quad x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \quad x_1^2\partial_1 + 2x_1x_2\partial_2, \quad (3)$$

$$\partial_1, \quad x_1\partial_1, \quad x_1^2\partial_1. \quad (4)$$

Нехай алгебра Лі з комутаційними співвідношеннями $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ має зображення φ з базисними $m \times m$ матрицями $\varphi(e_i) = \Phi_i$. Тоді зв'язок між зображенням φ та реалізацією Ψ з лінійними коефіцієнтами встановлюємо за формулами

$$\Psi(e_i) = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m (\Phi_i)_{\alpha}^{\beta} x_{\beta} \partial_{\alpha}.$$

В якості матричних зображень алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ можна узяти зображення старшої ваги, явний вигляд яких наведено в роботах [1,3]. За винятком вагового зображення розмірності 2, яке відповідає лінійній реалізації еквівалентній (3) з точністю до невироджених замін змінних та автоморфізмів алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, всі інші реалізації, отримані з вагових зображень розмірності три і вище, породжують реалізацію (1) рангу три.

Зауважимо, що не всі реалізації абстрактної алгебри Лі можна отримати з матричних зображень. Зокрема, для алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ такою є реалізація (4) рангу один, яку не можна лінеаризувати певною заміною змінних чи автоморфізмами.

Подальші дослідження алгебри $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ будуть присвячені опису контракцій реалізацій та диференціальних інваріантів.

Автор вдячний М.О. Нестеренко та В.М. Бойку за консультації, зауваження та підтримку. Дослідження підтримані грантом фундації Саймонс (SFI-PD-Ukraine-00014586, M.S.S.).

Література

- [1] Nesterenko M., Pošta S., Staryi M., [On realizations of Lie algebras](#), *Acta Polytechnica* **65** (2025) 554–561.
- [2] Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.V., [Realizations of real low-dimensional Lie algebras](#), *J. Phys. A* **36** (2003), 7337–7360, [arXiv:math-ph/0301029](#).
- [3] Staryi M., [On realizations and representations of simple Lie algebra \$\mathfrak{sl}\(2, \mathbb{C}\)\$](#) , *Proceedings of Scientific Conference of Students, Postgraduate Students and Young Scientists “KyivAcademUs 2025” (Kyiv, Ukraine, May 7–9, 2025)*, Kyiv Academic University, 2025, math.02, 7 pages.