

Про одновимірні підалгебри алгебри Лі

Розглянемо деяку систему ДРЧП

$$S(x, u, u_1, u_2, \dots, u_p) = 0, \quad (1)$$

де u_k — сукупність всеможливих частинних похідних k -го порядку функції $u = u(x) = (u^0, \vec{u}) \in \mathbb{R}^{1+m}$ за змінними $x = (x_0, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{1+n}$.

Якщо система рівнянь (1) допускає ліївську симетрію з векторним полем

$$X = \xi(x, u) \partial_x + \eta(x, u) \partial_u, \quad (2)$$

то цю симетрію, як добре відомо, можна використати для побудови інваріантних анзаців, які редукують систему (1) до системи ДР з меншою кількістю змінних.

Такі анзаци знаходяться із умови інваріантності розв'язку

$$\Phi(x, u) = 0 \quad (3)$$

системи (1). Ця умова може бути записана так:

$$X\Phi|_{\Phi=0} = 0. \quad (4)$$

Умова (4) є квазілінійним ДРЧП першого порядку і її загальний розв'язок виражається через перші інтеграли так званої симетричної форми вигляду

$$\frac{dx}{\xi(x, u)} = \frac{du}{\eta(x, u)}. \quad (5)$$

Вступ

Якщо A — алгебра інваріантності системи (1) багатовимірною, то функції ξ і η , крім змінних x, u , залежать і від параметрів

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_s,)$$

де s — розмірність алгебри A , тобто

$$\xi = \xi(x, u, \theta), \quad \eta = \eta(x, u, \theta).$$

Таким чином виникає необхідність розв'язання задачі з багатьма параметрами. Задачі з параметрами потребують особливих підходів до їх розв'язання. Одним із таких підходів, який запропонував ще Софус Лі і розвивали та вдосконалювали багато науковців у сфері симетрійного аналізу, є метод знаходження нееквівалентних підалгебр алгебри A . Для кожної підалгебри алгебри A параметри θ фіксовані і це значно полегшує інтегрування системи ДР (5).

Вступ

Ще свого часу в далекі 80-ті роки минулого століття Вільгельм Ілліч Фушич поставив переді мною задачу розробити інший підхід, відмінний від знаходження підалгебр, розв'язування системи ДР (5). Цей метод був розроблений, але так сталося, що ми його не опублікували і тому я вирішив пригадати його у сьогоднішній доповіді і присвятити її добрій пам'яті про нашого наставника.

Введемо коефіцієнт пропорційності системи (5)

$$\frac{dx}{\xi(x,u)} = \frac{du}{\eta(x,u)} = dp. \quad (6)$$

Це дозволяє систему (6) переписати в параметричній формі у вигляді системи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \xi(x,u), \\ \dot{u} &= \eta(x,u) \end{aligned} \quad (7)$$

де $\dot{x} = dx/dp$, $\dot{u} = du/dp$. Справдєдливє твердження.

Лема

Композиція скінчених перетворень

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, a), \\ \dot{u} &= g(x, u, a),\end{aligned}\tag{8}$$

які породжуються алгеброю A , є неперервними перетвореннями еквівалентності системи ЗДР (7).

Перетворення еквівалентності дозволяють розбити клас систем (7) на нееквівалентні підкласи та виділити в кожному підкласі канонічного представника. Такі канонічні представники і відповідають одновимірним підалгебрам алгебри A . В зв'язку з цим відпадає необхідність побудови одновимірних підалгебр алгебри A , так як задача знаходження інваріантних анзаців зводиться до інтегрування канонічних систем системи (7).

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

Якщо ж звичайно підалгебри застосовуються для розв'язування інших задач, відмінних від побудови інваріантних анзаців, то наведений вище метод може послужити для перевірки підалгебраїчного методу. Проілюструємо описаний вище метод на прикладах кількох конкретних алгебрах.

Розглянемо алгебру операторів, які породжують групу лінійних неоднорідних перетворень простору $\mathbb{R}^2$. Її базові генератори або в сучасній термінології лінійну оболонку векторних полів задамо у вигляді

$$AIGL(2, \mathbb{R}) = \langle \partial_{u^1}, \partial_{u^2}, u^1 \partial_{u^1}, u^2 \partial_{u^1}, u^1 \partial_{u^2}, u^2 \partial_{u^2} \rangle. \quad (9)$$

В процесі спілкування з Романом Омеляновичем я зрозумів, що алгебру (9) називають афінною алгеброю і позначають $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$.

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

Інфінітезимальний оператор або векторне поле алгебри (9) має вигляд

$$X = (k_{ab}u^b + m_a)\partial_{u^a}, \quad (10)$$

де k_{ab} , m_a — довільні сталі, за індексами a , b , які повторюються слід розуміти суму від 1 до 2.

Алгебра (9) породжує скінчені перетворення, композиція яких може бути записана у вигляді

$$U' = PU + Q, \quad (11)$$

де

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

довільні сталі матриці, $p_{11} > 0$, $p_{22} > 0$, $\det P \neq 0$.

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

Система рівнянь (7) в даному випадку має вигляд

$$\dot{U} = KU + M, \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \dot{U} = \begin{pmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \end{pmatrix}, \quad \dot{u}^a = \frac{du^a}{dp} \\ K &= \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

Система рівнянь (12) — це система звичайних лінійних неоднорідних ДР зі сталими коефіцієнтами. Методи розв'язування такої системи добре відомі. Розв'язок системи (12) залежить від коренів λ характеристичного рівняння, рангу матриці $A - \lambda E$ у випадку кратного кореня λ та вигляду частинного розв'язку неоднорідної системи (12).

Неважко переконатися в тому, що перетворення (11) є перетвореннями еквівалентності системи рівнянь (12).

Якщо систему (12) записати в штрихованих координатах

$$\dot{U}' = KU' + M \quad (14)$$

та підставити в (14) формули (11), то отримаємо

$$\dot{U} = (P^{-1}KP)U + P^{-1}(KQ + M). \quad (15)$$

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

Система рівнянь (15) належить до того ж класу систем, що і система (12). Це означає, що перетворення (11) є перетвореннями еквівалентності системи (12). Перетворення (11) використовуємо для того, щоб клас систем (12) розбити на нееквівалентні підкласи та виділити в кожному підкласі канонічні системи. (До слова хочу сказати, що цю задачу ми розв'язали у 2020 році сумісно з Вінніченко Олександром у статті [2] і опублікували у збірнику наукових праць фізико-математичного факультету ПНПУ імені В. Г. Короленка).

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

Розглянемо спочатку випадок I. $\text{rank } K = 0$. Це означає, що $K = 0$ і система (12) має вигляд

$$\dot{U} = M. \quad (16)$$

Неважко показати, що з точністю до перетворень (11) система (16) квівалентна такій канонічній системі

$$\dot{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Випадок II. $\text{rank } K = 1$. У цьому випадку можна вважати, що рядки матриці K пропорційні і система рівнянь (12) має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{u}^1 &= k(k_{21}u^1 + k_{22}u^2) + m_1, \\ \dot{u}^2 &= k_{21}u^1 + k_{22}u^2 + m_2, \end{aligned} \quad (18)$$

де k — довільна стала.

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

Застосувавши до системи (18) перетворення (11) вигляду

$$w^1 = u^1 - ku^2, \quad w^2 = u^2, \quad (19)$$

одержимо

$$\begin{aligned} \dot{w}^1 &= \tilde{m}_1, \\ \dot{w}^2 &= k_{21}w^1 + \tilde{k}_{22}w^2 + m_2, \end{aligned} \quad (20)$$

де $\tilde{m}_1 = m_1 - km_2$, $\tilde{k}_{22} = k_{22} + kk_{21}$. Для системи (20) можливі два нееквівалентні випадки.

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

II.1. $\tilde{k}_{22} \neq 0$ (не втрачаючи загальності можна вважати, що $\tilde{k}_{22} = 1$). У цьому півипадку перетвореннями (11) вигляду

$$v^1 = w^1, \quad v^2 = w^2 + k_{21}w^1 + m_2 + \tilde{m}_1 k_{21} \quad (21)$$

система (20) зводиться до системи

$$\begin{aligned} \dot{v}^1 &= \tilde{m}_1, \\ \dot{v}^2 &= v^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Із системи (22) маємо дві нееквівалентні канонічні підсистеми

$$\begin{aligned} \dot{v}^1 &= 0, & \dot{v}^1 &= 1, \\ \dot{v}^2 &= v^2; & \dot{v}^2 &= v^2. \end{aligned} \quad (23)$$

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

II.2. $\tilde{\mathbf{k}}_{22} = \mathbf{0}$. Так як $\text{rank } K = 1$, то у цьому підвипадку $k_{21} \neq 0$ (не втрачаючи загальності можна вважати, що $k_{21} = 1$). За допомогою перетворень

$$v^1 = w^1 + m_2, \quad v^2 = w^2 \quad (24)$$

система (20) зводиться до вигляду

$$\begin{aligned} \dot{v}^1 &= \tilde{m}_1, \\ \dot{v}^2 &= v^1. \end{aligned} \quad (25)$$

Із системи (25) маємо дві нееквівалентні канонічні підсистеми

$$\begin{aligned} \dot{v}^1 &= 0, & \dot{v}^1 &= 1, \\ \dot{v}^2 &= v^1; & \dot{v}^2 &= v^1. \end{aligned} \quad (26)$$

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

Випадок III. $\text{rank } K = 2$. Перетвореннями

$$w^1 = u^1 + q_1, \quad w^2 = u^2 + q_2 \quad (27)$$

система рівнянь (12) у цьому випадку зводиться до системи лінійних однорідних ДР вигляду

$$\dot{W} = KW. \quad (28)$$

Добре відомо, що з точністю до перетворень (11) система рівнянь (28) зводиться до вигляду, коли матриця K є однією із кліток Жордана

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m & 1 \\ -1 & m \end{pmatrix}, \quad (29)$$

де s, m — довільні сталі, $s \neq -1, 0$.

I. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$

Матрицям (29) відповідають канонічні системи

$$\begin{cases} \dot{u}^1 = u^1, \\ \dot{u}^2 = (1+s)u^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}^1 = u^1, \\ \dot{u}^2 = u^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}^1 = u^1, \\ \dot{u}^2 = u^1 + u^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}^1 = mu^1 + u^2, \\ \dot{u}^2 = -u^1 + mu^2. \end{cases} \quad (30)$$

Системам (17), (23), (26), (30) відповідають такі одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} &\langle \partial_{u^1} \rangle, \langle \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2} \rangle, \langle \partial_{u^1} + u^1 \partial_{u^2} \rangle, \langle u^2 \partial_{u^2} \rangle, \langle u^1 \partial_{u^2} \rangle, \\ &\langle I \rangle, \langle I + su^2 \partial_{u^2} \rangle, \langle I + u^1 \partial_{u^2} \rangle, \langle mI + J \rangle, \end{aligned} \quad (31)$$

де s, m — довільні сталі, $s \neq -1, 0$, $I = u^1 \partial_{u^1} + u^2 \partial_{u^2}$,
 $J = u^2 \partial_{u^1} - u^1 \partial_{u^2}$.

II. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$

Алгебру операторів Лі, яка породжується групою лінійних неоднорідних перетворень простору $\mathbb{R}^3$ задамо лінійною оболонкою векторних полів вигляду

$$AIGL(3, \mathbb{R}) = \langle \partial_{u^a}, u^a \partial_{u^b} \rangle, \quad a, b = \overline{1, 3}. \quad (32)$$

Векторне поле алгебри (32) задається формулою (10), в якій $a, b = \overline{1, 3}$. Алгебра (32) породжує скінчені перетворення, композиція яких разом з деякими дискретними перетвореннями має вигляд (11), де сталі матриці P і Q мають розмірність 3×3 та 3×1 відповідно. Система (7) в даному випадку має вигляд (12), де $U \in \mathbb{R}^3$, а сталі матриці K і M мають розмірності 3×3 та 3×1 відповідно. Аналогічно, як і для алгебри $AIGL(2, \mathbb{R})$, неважко переконатися, що перетворення (11) є перетвореннями еквівалентності системи (12).

II. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$

Як і в попередній задачі за допомогою перетворень еквівалентності розіб'ємо клас систем (12) на нееквівалентні підкласи та виділимо в кожному підкласі канонічні системи. Розв'язок системи (12) залежить від рангу матриці K , який пробігає значення від 0 до 3.

Випадок 1. $\text{rank } K = 0$. В цьому випадку $K = 0$ і система (12) за допомогою перетворень еквівалентності (11) зводиться до канонічного вигляду

$$\dot{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

II. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$

Випадок 2. $\text{rank } \mathbf{K} = 1$. В цьому випадку система (12) еквівалентна такій системі:

$$\begin{cases} \dot{u}^1 = m_1, \\ \dot{u}^2 = 0, \\ \dot{u}^3 = k_{31}u^1 + k_{32}u^2 + k_{33}u^3. \end{cases} \quad (34)$$

В залежності від значень коефіцієнтів k_{31}, k_{32}, k_{33} та m_1 маємо такі канонічні системи класу (12):

$$\begin{cases} \dot{u}^1 = r, \\ \dot{u}^2 = 0, \\ \dot{u}^3 = u^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}^1 = r, \\ \dot{u}^2 = 0, \\ \dot{u}^3 = u^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}^1 = r, \\ \dot{u}^2 = 0, \\ \dot{u}^3 = u^1, \end{cases} \quad (35)$$

де $r \in \{0, 1\}$.

II. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$

Випадок 3. $\text{rank } K = 2$. Система (12) еквівалентна системі

$$\begin{cases} \dot{u}^1 = m_1, \\ \dot{u}^2 = k_{21}u^1 + k_{22}u^2 + k_{23}u^3, \\ \dot{u}^3 = k_{31}u^1 + k_{32}u^2 + k_{33}u^3. \end{cases} \quad (36)$$

Проаналізувавши значення мінорів другого порядку двох останніх рядків матриці K системи (36), приходимо до таких нееквівалентних канонічних систем:

$$\begin{cases} \dot{u}^1 = r, \\ \dot{u}^2 = u^2, \\ \dot{u}^3 = (1+m)u^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}^1 = r, \\ \dot{u}^2 = u^2, \\ \dot{u}^3 = u^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}^1 = r, \\ \dot{u}^2 = u^2, \\ \dot{u}^3 = u^2 + u^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}^1 = r, \\ \dot{u}^2 = su^2 + u^3, \\ \dot{u}^3 = -u^2 + su^3, \end{cases} \quad (37)$$

де $r \in \{0, 1\}$, s, m — довільні сталі, $m \neq -1, 0$;

$$\begin{cases} \dot{u}^1 = r, \\ \dot{u}^2 = u^1, \\ \dot{u}^3 = u^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{u}^1 = r, \\ \dot{u}^2 = u^1, \\ \dot{u}^3 = u^2. \end{cases} \quad (38)$$

II. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$

Випадок 4. $\text{rank } K = 3$. Як і для попередньої задачі в цьому випадку система (12) еквівалентна однорідній системі вигляду (28), а канонічні вигляди матриці K задаються однією із таких кліток Жордана:

$$\begin{aligned} K^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad K^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+m \end{pmatrix}, \\ K^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+m \end{pmatrix}, \quad K^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1+n & 0 \\ 0 & 0 & 1+m \end{pmatrix}, \quad K^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+s & 1 \\ 0 & -1 & 1+s \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (39)$$

де m, n, s — довільні сталі, $m \neq n$, $m \neq -1, 0$, $n \neq -1, 0$, $s \neq -1, 0$.

Випишемо одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$, які відповідають канонічним системам, отриманими нами вище:

II. Одновимірні підалгебри алгебри $AIGL(3, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} &\langle \partial_{u^1} \rangle, \langle r\partial_{u^1} + u^3\partial_{u^3} \rangle, \langle r\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^3} \rangle, \langle r\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^3} \rangle, \\ &\langle r\partial_{u^1} + I_{23} + mu^3\partial_{u^3} \rangle, \langle r\partial_{u^1} + I_{23} \rangle, \langle r\partial_{u^1} + I_{23} + u^2\partial_{u^3} \rangle, \\ &\langle r\partial_{u^1} + sI_{23} + J_{23} \rangle, \langle r\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2} + u^3\partial_{u^3} \rangle, \langle r\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2} + u^2\partial_{u^3} \rangle, \\ &\langle I + nu^2\partial_{u^2} + mu^3\partial_{u^3} \rangle, \langle I \rangle, \langle I + u^1\partial_{u^2} \rangle, \\ &\langle I + u^1\partial_{u^2} + u^2\partial_{u^3} \rangle, \langle I + mu^3\partial_{u^3} \rangle, \\ &\langle I + u^1\partial_{u^2} + mu^3\partial_{u^3} \rangle, \langle I + sI_{23} + J_{23} \rangle, \end{aligned} \quad (40)$$

де $r \in \{0, 1\}$, m, n, s — довільні сталі, такі, що $m \neq n$, $m \neq -1, 0$, $n \neq -1, 0$, $s \in \mathbb{R}$, $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2} + u^3\partial_{u^3}$, $I_{23} = u^2\partial_{u^2} + u^3\partial_{u^3}$, $J_{23} = u^3\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^3}$.

В статті [1] пораховані підалгебри афінної алгебри $\mathfrak{aff}(2, \mathbb{R})$, як одновимірних так і більш високих розмірностей. Тому результати по одновимірних підалгебрах можна порівняти.

III. Одновимірні підалгебри узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$

Розглянемо узагальнену алгебру Галілея

$$AG_2(1,1) = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x + \partial_u, D = 2t\partial_t + x\partial_x - u\partial_u, \Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x + (x - tu)\partial_u \rangle, \quad (41)$$

відносно якої інваріантне, наприклад, рівняння Бюргерса

$$u_t + uu_x = u_{xx}, \quad (42)$$

де $u = u(t, x) \in \mathbb{R}^1$, t, x — часова та просторова змінні. Векторне поле алгебри (41) може бути записане у вигляді

$$X = (c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3)\partial_t + (c_1 tx + c_2 x + c_4 t + c_5)\partial_x + [c_1(x - tu) - c_2 u + c_4]\partial_u, \quad (43)$$

де $c_1, \dots, c_5$ — довільні сталі. Система рівнянь (5) для випадку алгебри (41) має вигляд

$$\frac{dt}{c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3} = \frac{dx}{c_1 tx + c_2 x + c_4 t + c_5} = \frac{du}{c_1(x - tu) - c_2 u + c_4}. \quad (44)$$

III. Одновимірні підалгебри узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$

Якщо ввести коефіцієнт пропорційності $\mathbf{d}p$, то систему (44) можна переписати у параметричному вигляді

$$i = c_1 t^2 + 2c_2 t + c_3, \quad \dot{x} = c_1 t x + c_2 x + c_4 t + c_5, \quad \dot{u} = c_1(x - tu) - c_2 u + c_4. \quad (45)$$

Композиція перетворень групи, породженої алгеброю (41), наприклад, може бути записана таким чином:

$$t' = \frac{e^{2\theta_2}}{A} + \theta_3, \quad x' = \frac{x + \theta_4 t}{A} e^{\theta_2} + \theta_5, \quad u' = (Au + \theta_1 x + \theta_4) e^{-\theta_2}, \quad (46)$$

де $A = 1 - \theta_1 t$, $\theta_1, \dots, \theta_5$ — довільні параметри. Якщо перетворення (46) підставити в систему (45), яка записана в штрихованих змінних t', x', u' , то отримаємо

$$i = C_1 t'^2 + 2C_2 t' + C_3, \quad \dot{x} = C_1 t' x + C_2 x + C_4 t' + C_5, \quad \dot{u} = C_1(x - t'u) - C_2 u + C_4, \quad (47)$$

де $C_1, \dots, C_5$ — сталі, які виражаються через сталі $c_1, \dots, c_5$ та параметри перетворень (46) $\theta_1, \dots, \theta_5$ за формулами

III. Одновимірні підалгебри узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$

$$\begin{aligned}C_1 &= e^{2\theta_2}c_1 - 2\theta_1(c_1\theta_2 + c_2) + \theta_1^2e^{-2\theta_2}(c_1\theta_3^2 + 2c_2\theta_3 + c_3), \\C_2 &= c_1\theta_3 + c_2 - \theta_1e^{-2\theta_2}(c_1\theta_3^2 + 2c_2\theta_3 + c_3), \\C_3 &= e^{-2\theta_2}(c_1\theta_3^2 + 2c_2\theta_3 + c_3), \\C_4 &= e^{\theta_2}(c_1\theta_5 + c_4) - \theta_4(c_1\theta_3 + c_2) + \theta_1\theta_4e^{-2\theta_2}(c_1\theta_3^2 + 2c_2\theta_3 + c_3) \\&\quad - \theta_1e^{-\theta_2}(c_1\theta_3\theta_5 + c_2\theta_5 + c_4\theta_3 + c_5), \\C_5 &= \theta_4e^{-2\theta_2}(c_1\theta_3^2 + 2c_2\theta_3 + c_3) + e^{-\theta_2}(c_1\theta_3\theta_5 + c_2\theta_5 + c_4\theta_3 + c_5).\end{aligned}\tag{48}$$

Це підтверджує той факт, що перетворення (46) є перетвореннями еквівалентності системи рівнянь (45).

III. Одновимірні підалгебри узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$

Система рівнянь (47), на відміну від аналогічних систем у попередніх двох задачах, є нелінійною системою диференціальних рівнянь. Проаналізуємо чи можливо підібрати параметри θ так, щоб занулити деякі із сталих $C_1, \dots, C_5$. Якщо сталі C_1 та C_3 переписати у вигляді

$$\begin{aligned} C_1 &= e^{-2\theta_2} c_1 [(e^{2\theta_4} - \theta_1(\theta_3 + c_2/c_1))^2 + \theta_1^2/c_1^2 (c_1 c_3 - c_2^2)], \\ C_3 &= e^{-2\theta_2} c_1 [(\theta^3 + c_2/c_1)^2 + 1/c_1^2 (c_1 c_3 - c_2^2)]. \end{aligned} \quad (49)$$

З формул (49) випливає, що вибір параметрів θ з ціллю занулення C_1 та C_3 залежить від знаку виразу

$$\Delta = c_1 c_3 - c_2^2, \quad (50)$$

а також той факт, що у випадку $\Delta > 0$ сталі C_1 та C_3 будуть одного знаку.

III. Одновимірні підалгебри узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$

а) $\Delta > 0$, то сталі C_1, C_3 неможливо занулити, але параметри θ можна вибрати так, щоб їх нормувати, тобто $C_1 = C_3 = 1$. Якщо проаналізувати вигляд сталих C_2, C_4, C_5 у формулах (48), то нескладно прийти до висновку, що параметри θ можливо підібрати так, щоб $C_2 = C_4 = C_5 = 0$. Канонічний вигляд системи (47) такий:

$$\dot{t} = t^2 + 1, \quad \dot{x} = tx, \quad \dot{u} = x - tu, \quad (51)$$

що відповідає одновимірній підалгебрі алгебри (41)

$$\langle \Pi + \partial_t \rangle. \quad (52)$$

III. Одновимірні підалгебри узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$

б) $\Delta < 0$, то параметри θ можливо вибрати так, щоб $C_1 = C_3 = 0$ і система (47) стає лінійною, що відповідає розширеній алгебрі Галілея

$$AG_1(1,1) = \langle \partial_t, \partial_x, G, D \rangle. \quad (53)$$

Якщо продовжити аналіз формул (48), то отримаємо такі канонічні вигляди системи (47):

$$\dot{t} = 2t, \quad \dot{x} = x, \quad \dot{u} = -u, \quad (54)$$

що відповідає одновимірній підалгебрі алгебри (41)

$$\langle D \rangle; \quad (55)$$

III. Одновимірні підалгебри узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$

$$\dot{t} = m - \text{const}, \quad \dot{x} = t, \quad \dot{u} = 1, \quad (56)$$

що відповідає одновимірній підалгебрі

$$\langle G + m\partial_t \rangle; \quad (57)$$

$$\dot{t} = m - \text{const}, \quad \dot{x} = n - \text{const}, \quad \dot{u} = 0, \quad (58)$$

що відповідає одновимірній підалгебрі

$$\langle m\partial_t + n\partial_x \rangle. \quad (59)$$

III. Одновимірні підалгебри узагальненої алгебри Галілея $AG_2(1,1)$

Remark

Систему рівнянь (58) можна також розбити на нееквівалентні підвипадки, але оскільки її інтегрування не пов'язане із якимись складнощами, то, на мою думку, цього робити непотрібно. Інваріантний анзац, отриманий із (58) буде мати вигляд плоскохвильового розв'язку

$$u = \varphi(\omega), \quad \omega = \alpha t + \beta x. \quad (60)$$

Bibliography

- [1] Yevhenii Yu. Chapovskyi, Serhii D. Koval, Olha Zhur, Subalgebras of Lie algebras. Example of $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ revisited, arxiv:2403.02554, 2025.
- [2] М. І. Сєров, О. О. Вінніченко, Класифікація системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами з точністю до перетворень еквівалентності, Збірник наукових праць викладачів, аспірантів, магістрантів і студентів фізико-математичного факультету / ПНПУ імені В. Г. Короленка; редкол.: Т. М. Барболіна (голов. ред.) та ін. Полтава : ПП Астроя, 2021. С. 19–21.