

Інваріанти семивимірних нільпотентних алгебр Лі

Крістіна Ю. ЛЕЛЕКА

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна

E-mail: kristinaleleka18@gmail.com

Інваріанти алгебр Лі (або узагальнені оператори Казіміра) є однією з важливих характеристик алгебр Лі. Вони мають численні застосування в різноманітних галузях математики та фізики (теорія представлень, інтегровність гамільтонових диференціальних рівнянь, квантова механіка тощо). У теорії узагальнених операторів Казіміра суттєвим є частинний випадок, коли базис утворено лише з операторів Казіміра, тобто з поліноміальних інваріантів. Такі базиси існують для нільпотентних та досконалих алгебр Лі. У стандартному підході знаходження узагальнених операторів Казіміра базується на інтегруванні перевизначеної системи лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку і є дуже громіздкою задачею навіть для алгебр Лі низьких розмірностей.

У роботах Бойка, Патери та Поповича запропоновано алгебраїчний метод обчислення узагальнених операторів Казіміра алгебр Лі, що суттєво опирається на картанівський метод рухомих реперів у версії Фелса–Олвера. У рамках розробленого підходу вперше побудовано базиси узагальнених операторів Казіміра серій розв'язних алгебр Лі довільної розмірності з фіксованими структурами нільрадикалів, зокрема майже абелевих алгебр Лі, розв'язних алгебр Лі (нільрадикали яких є ниткоподібними майже абелевими алгебрами), нільпотентних алгебр строго верхньотрикутних матриць та розв'язних алгебр Лі з трикутними нільрадикалами й діагональними нільнезалежними елементами (детальний огляд та необхідні позначення дивись в роботах [1–6]).

Слід зауважити, що структура інваріантів та їх знаходження суттєво залежить від структури відповідної алгебри Лі. Класифікація всіх (скінченновимірних) алгебр Лі є дуже складною проблемою, фактично нерозв'язною для довільних розмірностей алгебр (детальний огляд відповідних результатів наведено в роботі [7]).

Розглянемо алгебру Лі $\mathfrak{g}$ розмірності $\dim \mathfrak{g} = n < \infty$ над комплексним або дійсним полем та відповідну зв'язну групу Лі G . Нехай $\mathfrak{g}^*$ — дуальний простір для векторного простору $\mathfrak{g}$. Відображення $\text{Ad}^*: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*)$, визначене для будь-якого $g \in G$ співвідношенням

$$\langle \text{Ad}^*_g x, u \rangle = \langle x, \text{Ad}_{g^{-1}} u \rangle \quad \text{для всіх } x \in \mathfrak{g}^* \text{ та } u \in \mathfrak{g},$$

називають *коприєднаним представленням* групи Лі G . Тут $\text{Ad}: G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ — звичайне приєднане представлення для G на $\mathfrak{g}$, де образ Ad_G групи G при Ad є групою внутрішніх автоморфізмів $\text{Int}(\mathfrak{g})$ алгебри Лі $\mathfrak{g}$. Образ групи G при Ad^* є підгрупою групи $\text{GL}(\mathfrak{g}^*)$. Позначаємо його як Ad_G^* .

Нормалізаційна процедура Фелса–Олвера для групи Ad_G^* ґрунтується на такому твердженні.

Твердження (Бойко, Патера та Попович [1–6]). *Нехай $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n)$ — фундаментальний піднятий інваріант групи Ad_G^* , для піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{j_1}, \dots, \mathcal{I}_{j_\rho}$ і деяких сталих $c_1, \dots, c_\rho$ система $\mathcal{I}_{j_1} = c_1, \dots, \mathcal{I}_{j_\rho} = c_\rho$ є розв'язною відносно групових параметрів $\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_\rho}$, а підстановка знайдених значень параметрів у решту піднятих інваріантів призводить до $m = n - \rho$ виразів $\hat{\mathcal{I}}_l$, $l = 1, \dots, m$, які залежать лише від x . Тоді $\rho = \text{rank Ad}_G^*$, $m = N_{\mathfrak{g}}$, а $\hat{\mathcal{I}}_1, \dots, \hat{\mathcal{I}}_m$ утворюють базис для $\text{Inv}(\text{Ad}_G^*)$.*

Запропонований в роботах Бойка, Патери та Поповича *алгебраїчний алгоритм* знаходження інваріантів алгебри Лі $\mathfrak{g}$ складається з наступних чотирьох кроків [1–6]:

1. *Побудова генеруючої матриці $B(\theta)$ групи Ad_G^* .* $B(\theta)$ — загальна матриця внутрішніх автоморфізмів алгебри Лі $\mathfrak{g}$ у заданому базисі $e_1, \dots, e_n$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ — повний набір параметрів (координат) групи $\text{Int}(\mathfrak{g})$, і $r = \dim \text{Ad}_G^* = \dim \text{Int}(\mathfrak{g}) = n - \dim Z(\mathfrak{g})$, де $Z(\mathfrak{g})$ — центр алгебри $\mathfrak{g}$.
2. *Представлення фундаментального піднятого інваріанта.* Фундаментальний піднятий інваріант $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n)$ групи Ad_G^* у вибраних координатах $(\theta, \check{x})$ в $\text{Ad}_G^* \times \mathfrak{g}^*$ має явний вигляд $\mathcal{I} = \check{x} \cdot B(\theta)$, тобто $(\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n) = (x_1, \dots, x_n) \cdot B(\theta_1, \dots, \theta_r)$.
3. *Виключення параметрів за допомогою процедури нормалізації.* Вибираємо максимальну можливу кількість ρ піднятих інваріантів $\mathcal{I}_{j_1}, \dots, \mathcal{I}_{j_\rho}$, сталі $c_1, \dots, c_\rho$ та групові параметри $\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_\rho}$ такі, що рівняння $\mathcal{I}_{j_1} = c_1, \dots, \mathcal{I}_{j_\rho} = c_\rho$ є розв'язними відносно $\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_\rho}$. Після підстановки знайдених значень параметрів $\theta_{k_1}, \dots, \theta_{k_\rho}$ до незадіяних піднятих інваріантів отримуємо $N_{\mathfrak{g}} = n - \rho$ виразів $F^l(x_1, \dots, x_n)$, які не залежать від θ .
4. *Симетризація.* $F^l(x_1, \dots, x_n)$ обов'язково утворюють базис множини $\text{Inv}(\text{Ad}_G^*)$. Їхні симетризації $\text{Sym } F^l(e_1, \dots, e_n)$ визначають базис для множини $\text{Inv}(\mathfrak{g})$.

Метою даної презентації є анонс попередніх результатів щодо опису функціональних базисів інваріантів для семивимірних нільпотентних алгебр Лі, які прокласифіковано в 1993 році у роботі Сілея [8]. Зауважимо, що необхідним кроком для суттєвого спрощення всіх обчислень і компактного представлення базисів інваріантів є необхідність зведення базисів алгебр Лі з класифікації Сілея до K -канонічного вигляду (див. відповідні обґрунтування у роботі [1]).

Як приклад, розглянемо наступну семивимірну нільпотентну алгебру Лі з класифікації Сілея [8] (яку попередньо зведено до K -канонічного вигляду)

$$[e_4, e_6] = e_3, \quad [e_5, e_6] = e_4, \quad [e_6, e_7] = e_5.$$

Генеруюча матриця внутрішніх автоморфізмів має вигляд

$$B(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \theta_3 & \frac{1}{2}\theta_3^2 & \frac{1}{2}\theta_3^2\theta_4 - \theta_1 & -\frac{1}{6}\theta_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \theta_3 & \theta_3\theta_4 - \theta_2 & -\frac{1}{2}\theta_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \theta_4 & -\theta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо наступний функціональний базис піднятих інваріантів відповідно до 2-го кроку алгоритму:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= x_1, \\ \mathcal{I}_2 &= x_2, \\ \mathcal{I}_3 &= x_3, \\ \mathcal{I}_4 &= \theta_3 x_3 + x_4, \\ \mathcal{I}_5 &= \frac{1}{2}\theta_3^2 x_3 + \theta_3 x_4 + x_5, \\ \mathcal{I}_6 &= \left(\frac{1}{2}\theta_3^2 \theta_4 - \theta_1 \right) x_3 + (\theta_3 \theta_4 - \theta_2) x_4 + \theta_4 x_5 + x_6, \\ \mathcal{I}_7 &= -\frac{1}{6}\theta_3^3 x_3 - \frac{1}{2}\theta_3^2 x_4 - \theta_3 x_5 + x_7. \end{aligned}$$

Оскільки $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ — центр алгебри, то $\mathcal{I}_1 = x_1$, $\mathcal{I}_2 = x_2$, $\mathcal{I}_3 = x_3$ — перші три шукані інваріанти.

Використавши крос-секцією для піднятого інваріанта $\mathcal{I}_4$ (тобто $\mathcal{I}_4 = 0$), отримуємо, що $\theta_3 = -\frac{x_4}{x_3}$. Виключивши параметр θ_3 з співвідношень для $\mathcal{I}_5$ та $\mathcal{I}_7$, після деяких спрощень, знаходимо ще два інваріанти:

$$2x_3x_5 - x_4^2, \quad 3x_3x_4x_5 + 3x_3^2x_7 - x_4^3.$$

Оскільки процедура симетризації знайдених інваріантів тривіальна, то остаточно отримуємо наступні п'ять функціональних інваріантів для розглядуваної семивимірної нільпотентної алгебри Лі з класифікації Сілея:

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \quad 2e_3e_5 - e_4^2, \quad 3e_3e_4e_5 + 3e_3^2e_7 - e_4^3.$$

Повний опис інваріантів семивимірних нільпотентних алгебр Лі буде представлено у магістерській роботі автора.

Автор висловлює подяку Вячеславу Миколайовичу Бойку за постійну увагу під час навчання, постановку задачі, допомогу, поради, обговорення та підтримку під час виконання цієї роботи.

Література

- [1] Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., [Computation of invariants of Lie algebras by means of moving frames](#), *J. Phys. A* **39** (2006), 5749–5762, for extended and revised version see [arXiv:math-ph/0602046](#).
- [2] Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., [Invariants of Lie algebras with fixed structure of nilradicals](#), *J. Phys. A* **40** (2007), 113–130, [arXiv:math-ph/0606045](#).
- [3] Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., [Invariants of triangular Lie algebras](#), *J. Phys. A* **40** (2007), 7557–7572, [arXiv:0704.0937](#).
- [4] Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., [Invariants of triangular Lie algebras with one nilindependent diagonal element](#), *J. Phys. A* **40** (2007), 9783–9792, [arXiv:0705.2394](#).
- [5] Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., [Invariants of solvable Lie algebras with triangular nilradicals and diagonal nilindependent elements](#), *Linear Algebra Appl.* **428** (2008), 834–854, [arXiv:0706.2465](#).
- [6] Boyko V.M., Patera J., Popovych R.O., Invariants of Lie algebras via moving frames, in Proceedings of 4th Workshop “Group Analysis of Differential Equations and Integrable Systems” (October 26–30, 2008, Protaras, Cyprus), University of Cyprus, Nicosia, 2009, 36–44, [arXiv:0904.4462](#).
- [7] Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.V., [Realizations of real low-dimensional Lie algebras](#), *J. Phys. A* **36** (2003), 7337–7360, for extended and revised version see [arXiv:math-ph/0301029](#).
- [8] Seeley C., [7-dimensional nilpotent Lie algebras](#), *Trans. Amer. Math. Soc.* **335** (1993), 479–496.