Точні розв’язки з узагальненим відокремленням змінних нелінійного рівняння теплопровідності з джерелом.

А.Ф. Баранник[1], Т.А. Баранник[2], І.І. Юрик[3]

[1] Інститут математики Поморської академії, Слупськ, Польща

[2] Полтавський національний педагогічний університет ім. В.Г.Короленка

[3] Національний університет харчових технологій, Київ

Анотація

Запропоновано метод побудови точних розв’язків рівняння теплопровідності з джерелом, який базується на класичному методі відокремлення змінних і методі редукції. Розглянуто підстановки, що редукують рівняння нелінійної теплопровідності до звичайних диференціальних рівнянь. Описано широкий клас рівнянь, що допускають розв’язки з узагальненим відокремленням змінних.

Робота присвячена побудові точних розв’язків нелінійного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+H(u), \tag{1}$$

яке зустрічається в нелінійних задачах тепло- і масоперенесення і теорії фільтрації.

Запропоновано метод побудови точних розв’язків з узагальненим відокремленням змінних для рівняння (1), який базується на класичному методі відокремлення змінних та його узагальненні і методі редукції. Для побудови точних розв’язків рівняння (1) використовується підстановка

$$p(x)=\omega(t)\varphi(u), \tag{2}$$

яка містить невідомі функції $\omega(t)$ і $\varphi(u)$, а також функцію $p(x)$, яка задовольняє диференціальне рівняння

$$\left(p'\right)^2=ap^n+bp^m, \tag{3}$$

a, b – ненульові дійсні числа, а n, m – раціональні числа, $n\neq m$. Невідомі функції $\omega(t)$ і $\varphi(u)$ визначаються з умови, що підстановка (2) редукує рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $\omega(t)$.

<u>Означення.</u> Будемо говорити, що рівняння (1) допускає підстановку (2), (3), якщо ця підстановка редукує рівняння (1) до звичайного диференціального рівняння з невідомою функцією $\omega(t)$.

Основні результати дослідження сформульовані в наступних теоремах.

<u>Теорема 1.</u> Якщо рівняння (1) допускає підстановку (2), (3) і $n\neq 2$, $m\neq 2$, то функція $F(u)$ визначається за формулою

$$F=\frac{2\lambda_2}{b(m-n)}\varphi^{2-m}-\frac{2\lambda_1}{a(m-n)}\varphi^{2-n},\quad \lambda_1,\lambda_2\in R, \tag{4}$$

$$H=\lambda_3\frac{\varphi}{\varphi'},\quad \lambda_3\in R,$$

де φ є розв’язком диференціального рівняння

$$a\lambda_2\left[-2\varphi\varphi'' + (n-2m+4)(\varphi')^2\right]\varphi^n - $$
$$- b\lambda_1\left[-2\varphi\varphi'' + (-m+2n-4)(\varphi')^2\right]\varphi^m = 0, \tag{5}$$

а функція $\omega(t)$ задовольняє рівняння

$$\omega' + \lambda_1\omega^{n-1} + \lambda_2\omega^{m-1} + \lambda_3\omega = 0 .$$

У формулі (4) $\lambda_1,\ \lambda_2$ – параметри, що набувають довільних значень, одночасно нерівних нулю. Якщо в рівнянні (5) $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$, а $n,\ m$ є довільними раціональними числами, що задовольняють одну з таких умов:

1^0) $\dfrac{-n+2}{2(m-n)}$ - ціле число;

2^0) $\dfrac{-m+2}{2(m-n)}$ - ціле число,

то рівняння (**5) інтегрується в елементарних функціях [1].**

Теорема 2 [2]. Якщо рівняння (1) допускає підстановку (2), де $p(x)$ є розв'язком рівняння

$$(p')^2 = ap^2 + b, \quad a \neq 0,\ b \neq 0 \tag{6}$$

і $F'(u) \neq 0$, то функції $F(u)$ і $H(u)$ визначається відповідно за формулами

$$F = \left(\lambda_1 \int \varphi du + C\right)\varphi', \quad C \text{ – стала,}$$

$$H = \frac{1}{\varphi'}\left(-\lambda_1 a\varphi^3 - aF\varphi + \lambda_2\varphi\right),$$

$\lambda_1,\ \lambda_2 \in R,\ \ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0,\ \ \varphi(u)$ – довільна функція, а функція $\omega(t)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\omega'}{\omega} + \lambda_1 b\frac{1}{\omega_1^2} + \lambda_2 = 0 .$$

Теорема 2 описує широкий клас рівнянь (1), що допускають розв'язки з узагальненим відокремленням змінних (2) і (6).

Література

1. Barannyk, A.F, Barannyk, T.A. and Yuryk, I.I. The exact solutions with generalized separation of variables of the nonlinear heat equation. Ukrainian Mathematical Journal Vol 74 No 3 (2022), pp. 294-310

2. Barannyk, A.F, Barannyk, T.A. and Yuryk, I.I. A Method for the Construction of Exact Solutions to the Nonlinear Heat Equation $u_t = (F(u)u_x)_x + G(u)u_x + H(u)$. Ukrainian Mathematical Journal Volume 71, (2019), Pages 1443-1454