Перетворення еквівалентності та групова класифікація (1+2)-вимірних вироджених рівнянь Фоккера–Планка

Сергій Д. Коваль[†‡], Олександр Біло[†] та Роман О. Попович[◊§]

[†] *Кафедра математики Київського академічного університету, бульвар Вернадського, 36, Київ 03142, Україна*

[‡] *Кафедра математики та статистики, Меморіальний університет Ньюфаундленду, Сент-Джонс (NL) A1C 5S7, Канада*

[◊] *Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, Київ 01024, Україна*

[§] *Математичний факультет Віденського університету, Oskar-Morgenstern-Platz 1, A-1090 Відень, Австрія*

Емейл: skoval@mun.ca, abihlo@mun.ca, rop@imath.kiev.ua

Знайдено групу еквівалентності $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{F}}}$ класу $\bar{\mathcal{F}}$ (1+2)-вимірних вироджених рівнянь Фоккера–Планка загального вигляду

$$u_t = B(t,x,y)u_y + A^2(t,x,y)u_{xx} + A^1(t,x,y)u_x + A^0(t,x,y)u + C(t,x,y),$$

де A^0, A^1, A^2, B, C — довільні гладкі функції змінних (t,x,y) з $A^2B_x \neq 0$, та доведено, що цей клас нормалізований. Нормалізацію класу $\bar{\mathcal{F}}$ та його групу еквівалентності $G^{\sim}_{\bar{\mathcal{F}}}$ використано для обчислення групи еквівалентності класу $\mathcal{F}$, що складається з рівнянь

$$u_t + xu_y = |x-\alpha|^\beta u_{xx},$$

параметризованих довільними сталими α і β. Ці рівняння мають широкий спектр застосувань в теоретичній біології, зокрема для опису еволюції клітинних популяцій.

Калібруючи α до нуля широкою підмножиною групоїда дії групи $G^{\sim}_{\mathcal{F}}$, отримаємо клас $\mathcal{F}'$ рівнянь вигляду

$$u_t + xu_y = |x|^\beta u_{xx},$$

де β залишається єдиним довільним елементом. Клас $\mathcal{F}'$ зручний для розв'язання задачі групової класифікації, а групова класифікація класу $\mathcal{F}$ зводиться до групової класифікації класу $\mathcal{F}'$. Через вкладення $\mathcal{F}'$ в $\bar{\mathcal{F}}$ обчислено групу еквівалентності $G^{\sim}_{\mathcal{F}'}$ і проведено групову класифікацію класу $\mathcal{F}'$ з точністю до $G^{\sim}_{\mathcal{F}'}$-еквівалентності.

Рівняння $\mathcal{F}'_0$: $u_t + xu_y = u_{xx}$ виокремлюється серед наведених вище своїми чудовими симетрійними властивостями. Його суттєва алгебра лиївської інваріантності $\mathfrak{g}_0$ нерозв'язна і має специфічну структуру, яку ніколи не вивчали в рамках підалгебраїчного аналізу. З метою проведення ліївських редукцій рівняння $\mathcal{F}'_0$ побудовано оптимальні системи одно- та двовимірних підалгебр алгебри $\mathfrak{g}_0$.