Technische Univertitaet Muenchen

Нерівності між середніми величинами для симетризації опуклих множин

фон Діхтер Катерина Владиславівна

результати отримано у співавторстві з
Rene Brandenberg, Bernardo Gonzalez Merino

Нехай для $X \subset R^n$ наз. $conv(X)$ опуклою оболонкою, тобто найменшою опуклою, що містить X. Для $X, Y \subset R^n$, $\rho \in R$ наз. $X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}$ Мінковською сумою X та Y, а $\rho X = \{\rho x : x \in X\}$ наз. ρ-розширення of X. K^n позн. множину компактних опуклих множин та для $C \in K^n$ множина $C^\circ = \{a \in R^n : a^T x \leq 1,\ x \in C\}$ є поляром для C.

Середні величини чисел $a, b > 0$ можна асоціювати з відрізками $[-a, a]$ та $[-b, b]$. Середнє арифметичне $K, C \in K^n$ визначається множиною $\frac{1}{2}(K + C)$, мінімум – множиною $K \cap C$, а максимум –множиною $conv(K \cup C)$. Поляризація є аналогом операції $x \to 1/x$, тому середнє гармонічне K та C є $\left(\frac{1}{2}(K^\circ + C^\circ)\right)^\circ$.

Фірей довів нерівність середніх величин для опуклих множин:

Твердження 1. *Нехай $C, K \in K^n$ та 0 є внутрішньою точкою множин C, K. Тоді*

$$K \cap C \subset \left(\frac{K^\circ + C^\circ}{2}\right)^\circ \subset \frac{K + C}{2} \subset conv(K \cup C). \tag{1}$$

Нехай для K міститься оптимально у C ($K \subset^{opt} C$), якщо $K \subset C$ та $K \not\subset \rho C + t$ для $\rho \in [0, 1)$ та $t \in R^n$.

Теорема 1. *Нехай $C, K \in K^n$ та $0 \in inter(K \cap C)$. Тоді*

$$K \cap C \subset^{opt} conv(K \cup C)$$

тоді і тільки тоді, коли $\left(\frac{1}{2}(K^\circ + C^\circ)\right)^\circ \subset^{opt} \frac{1}{2}(K + C)$.

Якщо $C = -C + t$ для $t \in R^n$, то C наз. симетричною множиною, якщо $C = -C$, то C наз. 0-симетричною. Ми розглядаємо середні значення множин C та $-C$ для опуклих тіл C, що є симетризаціями множини C. Симетризації часто використовуються вопуклій геометрії в геометричних нерівностях.

Мінковською міру асиметрії множини $C \in K^n$ наз.

$$s(C) := \inf\{\rho > 0 : C - c \subset \rho(C - c), c \in R^n\}.$$

Зауважимо, що $s(C) \in [1, n]$, та $s(C) = 1$ тоді і тільки тоді, коли C є симетричною множиною, а $s(C) = n$ тоді і тільки тоді, коли C є n-симплексом.

Для симетризацій опуклих множин ми отримали наступні нерівності.

Теорема 2. *Нехай $C \in K^n$ є Мінковські-центрованою. Тоді*

1. $conv(C \cup (-C)) \subset^{opt} s(C)(C \cap (-C))$,
2. $conv(C \cup (-C)) \subset^{opt} \frac{2s(C)}{s(C)+1} \frac{C-C}{2}$,
3. $\left(\frac{C^\circ - C^\circ}{2}\right)^\circ \subset^{opt} \frac{2s(C)}{s(C)+1}(C \cap (-C))$,
4. $\frac{C-C}{2} \subset^{opt} \frac{s(C)+1}{2}(C \cap (-C))$, *та*
5. $conv(C \cup (-C)) \subset^{opt} \frac{s(C)+1}{2} \left(\frac{C^\circ - C^\circ}{2}\right)^\circ$.
6. $\frac{C-C}{2} \subset \frac{s(C)+1}{2} \left(\frac{C^\circ - C^\circ}{2}\right)^\circ$, *та для усіх $s \in [n]$ існує Мінковські-центрована множина $C \in K^n$ з $s(C) = s$, для якої нерівність є оптимальною.*

Введемо наступні параметри:

$$\psi := \psi(n,s) := \frac{(n-s+1)(s+1)}{1-n(n-s)(n+s(n+1))} - n,$$
$$\mu := \mu(n,s) = \frac{n+1}{s+1}\left(1 - \frac{s(n+1)(n-s)}{1-n(n-s)}\right),$$
$$\gamma_1 := \gamma_1(n) := \frac{1}{2}(n-1+\sqrt{(n-2)n+5}),$$
$$\gamma_2 := \gamma_2(n) := \frac{n^4+n^3+2n^2+\sqrt{n^8+6n^7+17n^6+28n^5+28n^4+12n^3-4n^2-12n-4}}{2(n^3+2n^2+3n+1)},$$
$$\gamma_3 := \gamma_3(n) := \frac{n^4+3n^3+2n^2+1+\sqrt{n^8+6n^7+13n^6+8n^5-14n^4-22n^3+8n+1}}{2(n^3+2n^2+2n)}.$$

Теорема 3. *Нехай n непарне та $C \in K^n$ є Мінковські-центрованою множиною з $s(C) = s$. Тоді*

1. $C \cap (-C) \subset \psi \frac{n}{n+1} conv(C \cup (-C))$, *якщо $s \geq \gamma_2(n)$, та*
2. $\left(\frac{C^\circ + (-C)^\circ}{2}\right)^\circ \subset \mu\psi \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \frac{C-C}{2}$, *якщо $s \geq \gamma_3(n)$.*