УМОВНА СИМЕТРІЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ЗІ СПЕЦІАЛЬНОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ.

Воробйова А.І.

Розглянемо нелінійні хвильові рівняння вигляду:

$$\Box U + F(x, U, \underset{1}{U}) = 0, \tag{1}$$

де $x = (x_0 \equiv t,\ x_1, x_2, ..., x_{n-1})$, $U = U(x_0, \vec{x})$, $\underset{1}{U} = (U_0,\ U_1,\ U_2,\ ...,\ U_{n-1})$, $F(x, U, \underset{1}{U})$ – деяка гладка функція від x, U, $\underset{1}{U}$, симетрійні властивості яких добре вивчені відносно алгебр, що містять в собі оператори трансляції P_μ.

У багатьох задачах математичної фізики дуже часто зустрічаються рівняння, в яких F залежить від x, тобто відсутня трансляційна симетрія.

У зв'язку з цим розглянемо групові властивості рівняння (1) відносно алгебр, які не містять операторів зсуву P_μ.

Розв'яжемо наступну задачу: описати всі нелінійні рівняння вигляду (1), інваріантні відносно алгебр A_1, A_2, A_3, які породжуються операторами алгебри конформних перетворень $AC(I, n)$,

$$A_1 = \langle I_{\mu\nu},\ D \rangle,\ \ A_2 = \langle I_{\mu\nu},\ K_\mu \rangle,\ \ A_3 = \langle I_{\mu\nu},\ D,\ K_\mu \rangle,$$

які задовольняють комутативним співвідношенням:

$$[I_{\mu\nu},\ I_{\rho\delta}] = -q_{\mu\rho} I_{\mu\delta} + q_{\mu\delta} I_{\nu\rho} + q_{\nu\rho} I_{\mu\delta} - q_{\nu\delta} I_{\mu\rho}.$$

$$[I_{\mu\nu},\ K_\delta] = q_{\nu\delta} K_\mu - q_{\mu\delta} K_\nu,\ [K_\mu,\ D] = K_\mu,\ [K_\mu,\ K_\nu] = [I_{\mu\nu},\ D] = 0.$$

Побудуємо друге продовження оператора оберту $\overset{2}{I}_{\mu\nu}$ та, діючи ним на даламбертіан $\Box U$, отримаємо: $\overset{2}{I}_{\mu\nu} \Box U = -2C_{\mu\nu} U^{\mu\nu} = 0$.

Таким чином, $\Box U$ – диференціальний інваріант другого порядку алгебри Лоренца $AO(n) = \langle I_{\mu\nu} \rangle$. Звідси випливає, що рівняння (1) інваріантне відносно алгебри Лоренца, за умовою, що довільна функція $F(x, U, \underset{1}{U})$ є функцією диференціальних інваріантів першого порядку алгебри Лоренца, тобто

$$\Box U + \Phi = 0,\ \ \Phi = \Phi(\omega_1, \omega_2,\ \omega_3, U), \tag{2}$$

де $\omega_1 = q^{\mu\nu} x_\nu x_\mu,\ \omega_2 = x_\nu U_\mu,\ \omega_3 = q^{\mu\nu} U_\nu U_\mu$ – функціонально незалежні диференціальні інваріанти першого порядку алгебри $AO(n)$.

Теорема 1. Для того, щоб нелінійне хвильове рівняння (1) було інваріантне відносно алгебри $A_1 = \langle I_{\mu\nu},\ D \rangle$ необхідно і достатньо, що воно мало наступний вигляд

$$\Box U = U^{\frac{n+2}{n-2}} \Phi(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3),\quad n \geq 3, \tag{3}$$

де $\tau_1 = \frac{(q^{\mu\nu}x_\nu x_\mu)^{\frac{2-n}{4}}}{U}$, $\tau_2 = \frac{x_\nu U_\nu}{U}$, $\tau_3 = \frac{(q^{\mu\nu}U_\nu U_\mu)^{\frac{n-2}{2n}}}{U}$.

Доведення. Необхідність. Для знаходження виду правої частини рівняння (1) використовуємо метод Лі. Умова інваріантності у даному випадку приймає вигляд: $\overset{2}{X} S\big|_{S=0} = 0$, де $S = \Box U + F$, $\xi^\nu = x_\nu$, $\eta = \frac{2-n}{n}U$. Таким чином отримаємо визначальне рівняння

$$4\omega_1\Phi_{\omega_1} + (2-n)\omega_2\Phi_{\omega_2} - 2\omega_3 n\Phi_{\omega_3} + (n+2)\Phi + (2-n)U\Phi = 0,$$

загальним розв'язком якого є функція $\Phi = U^{\frac{n+2}{n-2}} F\left(\frac{\omega_1^{\frac{2-n}{4}}}{U},\ \frac{\omega_2}{U},\ \frac{\omega_3^{\frac{n-2}{2n}}}{U}\right)$ (*).

Достатність доводиться безпосереднім застосуванням алгоритму Лі до рівняння (1) з нелінійністю (*). Теорема доведена.

Теорема 2. Рівняння (3) інваріантне відносно алгебри $A_2 = \langle I_{\mu\nu},\ K_\mu \rangle$ тоді і тільки тоді, коли $\Phi = U^{\frac{n+2}{n-2}} \psi\left(\frac{(q^{\mu\nu}x_\nu x_\mu)^{\frac{2-n}{n}}}{U}\right)$ (**), де ψ – довільна гладка функція.

Теорема 3. Рівняння (3) інваріантне відносно алгебри $A_3 = \langle I_{\mu\nu},\ K_\mu,\ D \rangle$ тоді і тільки тоді, коли $\Phi = U^{\frac{n+2}{n-2}}\left(\lambda_1 \frac{(q^{\mu\nu}x_\nu x_\mu)^{\frac{2-n}{n}}}{U} + \lambda_2\right)$ (***), де λ_1, λ_2 – довільні постійні.

Доведення. Необхідною і достатньою умовою інваріантності рівняння (3) відносно алгебри A_3 є умова: $S = \Box U + F$, де $X = C_{\mu\nu}I_{\mu\nu} + k_\mu K_\mu + dD$.

Оскільки алгебра A_2 є підалгеброю A_3, то клас рівнянь (3), інваріантних відносно A_3, буде не ширше класу хвильових рівнянь (1) з нелінійністю (**) (див. теорему 2), інваріантних відносно алгебри A_2.

Відмітимо, що існує досить широкий клас нелінійних хвильових рівнянь (1), інваріантних відносно перетворень груп $A_1 = \langle I_{\mu\nu},\ D \rangle$, $A_2 = \langle I_{\mu\nu},\ K_\mu \rangle$ (рівняння (3) з нелінійністю (*) і (**) (див. теореми 1, 2)), одночасно в класі рівнянь (1) існує єдине рівняння

$\Box U = \lambda_1 U^{\frac{n+2}{n-2}} + \lambda_2 (x_\nu x^\nu)^{\frac{2-n}{2}} U^{\frac{4}{n-2}}$, інваріантне відносно алгебри $A_3 = \langle I_{\mu\nu},\ D,\ K_\mu \rangle$.