СИМЕТРІЯ ТА ІНТЕГРОВНІСТЬ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ – 2016

Класифікація лінійних зображень узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля U та їх застосування

Карпалюк Т.О.

Національний технічний університет України "КПІ імені І. Сікорського"
пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056
tamarakarpalyuk@ukr.net

Анотація

Здійснено класифікацію нееквівалентних відносно групи неперервних перетворень еквівалентності лінійних зображень узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля U. Результати класифікації застосовано для дослідження симетрійних властивостей двовимірної системи нелінійних рівнянь конвекції–дифузії

Розглядається клас систем нелінійних рівнянь конвекції–дифузії

$$U_0 = \Delta U + F^i(U)U_i, \tag{1}$$

де $U \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $F^i(U)$ — довільні функціональні матриці розмірності 3×3, $i = \overline{1,2}$, нижній індекс функції означає диференціювання за відповідною змінною.

Справедливе наступне твердження.

Лема 1 *Група вигляду*

$$x_0^{'} = 2cx_0 + q_0, \quad x_i^{'} = cx_i + q_{ij}x_j + r_i x_0 + q_i, \tag{2}$$

$$u^{a'} = k_{ab}u^b + l_a, \tag{3}$$

де c, q_0, q_i, r_i, k_{ab}, l_a, $q_{ji} = -q_{ij}$ — const, $a, b = \overline{1,3}$, $i, j = \overline{1,2}$ є групою неперервних перетворень еквівалентності системи (1).

Розв'язується задача виділення із класу систем (1) таких, які інваріантні відносно алгебри Галілея, розширеної операторами масштабних і проективних перетворень. Реалізацією такої алгебри для $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ є алгебра з базисними генераторами вигляду:

$$\begin{aligned} &AG_2(1,2) = <\partial_0, \quad \partial_i, \quad G_i = x_0\partial_i + Q_i, \quad J_{12} = x_1\partial_2 - x_2\partial_1 + Q_3, \\ &D = 2x_0\partial_0 + x_i\partial_i + Q_4, \quad \Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_i\partial_i + x_iQ_i + x_0Q_4 + Q_5 >, \end{aligned} \tag{4}$$

де оператори

$$Q_s = (\alpha_{sab}u^b + \beta_{sa})\partial_{u^a}, \quad s = \overline{1,5} \tag{5}$$

задовольняють комутаційні співвідношення

$$[Q_1, Q_2] = 0, [Q_1, Q_3] = Q_2, \quad [Q_2, Q_3] = -Q_1, \tag{6}$$

$$[Q_1, Q_4] = -Q_1, \quad [Q_2, Q_4] = -Q_2, \quad [Q_3, Q_4] = 0, \tag{7}$$

$$[Q_1, Q_5] = [Q_2, Q_5] = [Q_3, Q_5] = 0, \quad [Q_4, Q_5] = 2Q_5. \tag{8}$$

Встановимо вигляд операторів Q_s, за яких зображення алгебри (4) будуть нееквівалентні відносно перетворень (2)–(3). Справедливе наступне твердження.

Теорема 1 *З точністю до перетворень еквівалентності* (2), (3) *існує 12 нееквівалентних зображень алгебри* (4), *визначених операторами* Q_1– Q_5 *з наступної таблиці.*

Таблиця 1: Нееквівалентні зображення операторів Q_1–Q_5 *у випадку поля* $U \in \mathbb{R}^3$.

№	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5
1.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^3}$	$kI+u^2\partial_{u^3}-u^3\partial_{u^2}$	$lI+u^1\partial_{u^1}$	0
2.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^3}-u^3\partial_{u^1}$	$-I-u^2\partial_{u^2}$	∂_{u^2}
3.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}$	$kI+u^1\partial_{u^3}-u^3\partial_{u^1}$	$lI-u^2\partial_{u^2}$	0
4.	$u^1\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}$	$u^1\partial_{u^3}-u^3\partial_{u^1}+æ\partial_{u^2}$	$I_{13}+\theta\partial_{u^2}$	0
5.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}+ku^3\partial_{u^3}$	$-I_{12}+lu^3\partial_{u^3}$	0
6.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}$	$-I-u^3\partial_{u^3}$	∂_{u^3}
7.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}$	$-I_{12}+\partial_{u^3}$	0
8.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}+\partial_{u^3}$	$-I-u^3\partial_{u^3}$	$s\partial_{u^3}$
9.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}+\partial_{u^3}$	$-I_{12}+su^3\partial_{u^3}$	0
10.	∂_{u^1}	∂_{u^2}	$u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}+\partial_{u^3}$	$-I_{12}+l\partial_{u^3}$	0
11.	$\partial_{u^1}+u^1\partial_{u^2}$	$u^3\partial_{u^2}+\partial_{u^3}$	$u^1\partial_{u^3}-u^3\partial_{u^1}$	$-I-u^2\partial_{u^2}$	$k\partial_{u^2}$
12.	$\partial_{u^1}+u^2\partial_{u^3}$	$u^2\partial_{u^1}-\partial_{u^3}$	$u^3\partial_{u^1}-u^1\partial_{u^3}$	$-I_{13}$	0

У таблиці 1 $s \neq 0, k, l \in \mathbb{R}$, $(æ, \theta) \in \{(0,1),(1,k)\}$, $I_{12} = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$, $I_{13} = u^1\partial_{u^1} + u^3\partial_{u^3}$.

Отримана класифікація використовується для виділення систем класу (1), інваріантних відносно алгебри (4). Справедливе наступне твердження.

Теорема 2 *З точністю до перетворень еквівалентності* (2), (3) *система* (1) *інваріантна відносно алгебри* (4) *тоді і тільки тоді, коли вона набуває одного з наступних виглядів*

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + u^3\left(\tfrac{s}{2}(u^1_1 - u^2_2) + lu^2_2 + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + su^3\partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12} + lu^3\partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$, $l \neq 0$;

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u} + sin(\tfrac{2}{s}\ln u^3)\vec{D}\vec{u} + cos(\tfrac{2}{s}\ln u^3)\vec{D}^{\perp}\vec{u}, \end{aligned} \tag{10}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1} + su^3\partial_{u^3}$, $Q_4 = -I_{12}$, $Q_5 = 0$;

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u} + (u^3)^{-\frac{2}{s}-1}\left(\lambda_1\vec{\nabla}u^3 + \lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}u^3\right), \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + u^3\left(\tfrac{s}{2}\vec{\nabla}\vec{u} + \lambda_3\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

коли $Q_i = \partial_{u^i}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$, $Q_4 = -I_{12} + su^3\partial_{u^3}$, $Q_5 = 0$;

$$\begin{aligned} &\vec{u}_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u} = \Delta\vec{u}, \\ &u^3_0 + (\vec{u}\vec{\nabla})u^3 = \Delta u^3 + \psi\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}, \end{aligned} \tag{12}$$

коли $Q_i=\partial_{u^i}$, $Q_3=u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}$, $Q_4=-I_{12}$, $Q_5=0$;

$$\begin{aligned}&\vec{u}_0+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}=\Delta\vec{u}+e^{-2u^3}\left(\lambda_1\vec{\nabla}u^3+\lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}u^3\right),\\&u^3_0+(\vec{u}\vec{\nabla})u^3=\Delta u^3+\tfrac{1}{2}\vec{\nabla}\vec{u}+\lambda_3\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u},\end{aligned}\tag{13}$$

коли $Q_i=\partial_{u^i}$, $Q_3=u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}$, $Q_4=-I_{12}+\partial_{u^3}$, $Q_5=0$;

$$\begin{aligned}&\vec{u}_0+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}=\Delta\vec{u},\\&u^3_0+(\vec{u}\vec{\nabla})u^3=\Delta u^3+\tfrac{s}{2}\vec{\nabla}\vec{u}+\lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u},\end{aligned}\tag{14}$$

коли $Q_i=\partial_{u^i}$, $Q_3=u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}+\partial_{u^3}$, $Q_4=-I_{12}+s\partial_{u^3}$, $Q_5=0$;

$$\begin{aligned}&\vec{u}_0+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}=\Delta\vec{u},\\&u^3_0+(\vec{u}\vec{\nabla})u^3=\Delta u^3+\lambda\vec{\nabla}^{\perp}\vec{u}+sin2u^3\vec{D}\vec{u}+cos2u^3\vec{D}^{\perp}\vec{u},\end{aligned}\tag{15}$$

коли $Q_i=\partial_{u^i}$, $Q_3=u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}+\partial_{u^3}$, $Q_4=-I_{12}$, $Q_5=0$;

$$\begin{aligned}&\vec{u}_0+(\vec{u}\vec{\nabla})\vec{u}=\Delta\vec{u}+\vec{L}\omega,\\&u^3_0+(\vec{u}\vec{\nabla})u^3=\Delta u^3+(\vec{u}\vec{L})\omega-\omega\vec{\nabla}\vec{u},\end{aligned}\tag{16}$$

коли $Q_i=\partial_{u^i}+u^i\partial_{u^3}$, $Q_3=u^1\partial_{u^2}-u^2\partial_{u^1}$, $Q_4=-I-u^3\partial_{u^3}$, $Q_5=2\partial_{u^3}$.

У системах (9)–(16) $\omega=u^3-\dfrac{\vec{u}^2}{2}$, $\vec{L}=\lambda_1\vec{\nabla}+\lambda_2\vec{\nabla}^{\perp}$, $\vec{\nabla}=(\partial_1,\partial_2)$, $\vec{\nabla}^{\perp}=(\partial_2,-\partial_1)$, $\vec{u}=(u^1,u^2)$, $\vec{D}=(\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp},\vec{c}\vec{\nabla})$, $\vec{D}^{\perp}=(\vec{c}\vec{\nabla},-\vec{c}\vec{\nabla}^{\perp})$, $\vec{c}=(c_1,c_2)$, $\psi=\psi(u^3)$ *— довільна гладка функція,* c_i, λ_a, λ, k, l, $s\neq 0$ *— довільні сталі,* $i\in\{1,2\}$, $a=\overline{1,3}$.

Література

[1] Lie S. Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linear partieller Differential gleichung / S. Lie // Arch for Math. — 1881. — V6, № 3. — P. 328–368.

[2] Фущич В. И. Симметрийный анализ и точные решения уравнений нелинейной математической физики / Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. — К. : Наук. думка, 1989. — 339 с.

[3] Лагно В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу / В.І. Лагно, С.В. Спічак, В.І. Стогній — Праці Інституту математики НАН України: Мат-ка та її застосування. — К., 2002. — Т. 45. — 359 с.

[4] Сєров М.І. Інваріантність системи рівнянь конвекції–дифузії відносно узагальненої алгебри Галілея у випадку тривимірного векторного поля./ М.І. Сєров, Т.О. Карпалюк // Математичний вісник НТШ. — Київ. — 2010. — Т.7. — С. 267–288.