Логарифмічне розширення поля дійсних чисел і гіперболічне зображення узагальнених перетворень Лоренца

Грушка Я.І.

Інститут математики НАН України (м. Київ); ***e-mail:*** *grushka@imath.kiev.ua*

Означення 1. ***Логарифмічним розширенням поля дійсних чисел*** *будемо називати множину:*

$$\mathbb{R}^{\widehat{+}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{a + \pi i \mid a \in \mathbb{R}\} \qquad (\text{де} \quad i = \sqrt{-1}).$$

Експонентну функцію $\exp(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$ можна вважати визначеною на множині $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$, якщо домовитись, що $\exp(-\infty) := e^{-\infty} := 0$. Легко перевірити, що довизначена таким чином в точці $-\infty$ функція $\exp(\cdot)$ є бієкцією з $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ на $\mathbb{R}$, причому оберненою до $\exp(\cdot)$ є функція $\ln^{\widehat{+}}(x) = \begin{cases} \ln(x), & x > 0 \\ -\infty, & x = 0 \\ \ln|x| + \pi i, & x < 0 \end{cases}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Для довільних $x, y \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ покладемо:

$$x \,\widehat{\times}\, y := \ln^{\widehat{+}}(\exp(x)\exp(y)); \quad x \,\widehat{+}\, y := \ln^{\widehat{+}}(\exp(x) + \exp(y)).$$

Оскільки для $x, y \in \mathbb{R}$ виконується рівність, $x \,\widehat{\times}\, y = x + y$, то операція "$\widehat{\times}$" є продовженням операції додавання дійсних чисел на $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$. Наступне означення продовжує відношення порядку $\leq$ з $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$.

Означення 2. *Нехай, $x, y \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$, причому хоч одне з чисел x або y не є дійсним (тобто $x \notin \mathbb{R}$ або $y \notin \mathbb{R}$). Будемо вважати, що $x \leq y$ ($x < y$) тоді і тільки тоді, коли $\exp(x) \leq \exp(y)$ ($\exp(x) < \exp(y)$).*

Теорема 1. *Алгебраїчна система $\left(\mathbb{R}^{\widehat{+}}, \widehat{+}, \widehat{\times}, \leq\right)$ є упорядкованим полем. При цьому:*

1. Нульовим елементом поля $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ є елемент виду, $0^{\widehat{+}} = -\infty$, а одиничним елементом поля $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ є число, $1^{\widehat{+}} = 0$.

2. Поле $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ ізоморфне полю дійсних чисел $\mathbb{R}$ при цьому відображення, $\mathbb{R}^{\widehat{+}} \ni x \mapsto \exp(x) \in \mathbb{R}$ є ізоморфізмом між цими полями.

3. Для довільного $x \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$ умова $x < 0^{\widehat{+}}$ (тобто $x < -\infty$) виконується тоді і тільки тоді, коли число x можна подати у вигляді $x = a + \pi i$, де $a \in \mathbb{R}$.

Отже, в полі $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ звичайні дійсні числа відіграють роль "додатних" чисел, елемент $-\infty = 0^{\widehat{+}}$ — роль "нуля", а числа виду $a + \pi i$, де $a \in \mathbb{R}$ відіграють роль "від'ємних". Таким чином, в полі $\mathbb{R}^{\widehat{+}}$ (яке містить поле $\mathbb{R}$ в якості упорядкованої підмножини, але не в якості підполя) з'являються числа "менші" від $-\infty$, а саме числа виду $a + \pi i$, де $a \in \mathbb{R}$.

Гіперболічна форма зображення для класичних перетворень Лоренца є загальновідомою. В роботах [1, 2] можна знайти гіперболічну форму запису для узагальнених перетворень Лоренца в сенсі E. Recami. В той же час, формули, яка б давала гіперболічну форму запису одночасно як для класичних, так і для узагальнених перетворень Лоренца в зазначених роботах немає, оскільки в обох випадках гіперболічний аргумент пробігає все поле дійсних чисел. Використовуючи побудоване вище логарифмічне розширення поля дійсних чисел можна таку формулу можна отримати. У найпростішому випадку однієї геометричної змінної ця формула має вигляд:

$$ct' = \pm e^{\frac{1}{2}\mathsf{sign}^{\widehat{+}}\psi}\left(-x\mathsf{sh}\frac{\psi}{2} + ct\mathsf{ch}\frac{\psi}{2}\right); \quad x' = \pm e^{\frac{1}{2}\mathsf{sign}^{\widehat{+}}\psi}\left(x\mathsf{ch}\frac{\psi}{2} - ct\mathsf{sh}\frac{\psi}{2}\right) \quad \left(\psi \in \mathbb{R}^{\widehat{+}},\ \psi \neq -\infty\right),$$

де $\mathsf{sign}^{\widehat{+}} x = \ln^{\widehat{+}}(\mathsf{sign}(e^x))$, $x \in \mathbb{R}^{\widehat{+}}$.

Література

[1] E. Recami. *Classical Tachyons and Possible Applications.* // Riv. Nuovo Cim. Vol **9**. – s. 3, N 6. – 1986. – P. 1-178.

[2] Ricardo S. Vieira. *An Introduction to the Theory of Tachyons.* // Revista Brasileira de Ensino de Fisica. – **34**. – N 3. – 2012. – P. 1-15. (Available as: arXiv:1112.4187v2).