Точні розв'язки нелінійного рівняння гіперболічного типу

Анатолій Ф. БАРАННИК [†], *Тетяна А. БАРАННИК* [‡], *Іван І. ЮРИК* [§]

[†] *Поморська академія, Слупськ, Польща*

[‡] *Полтавський національний педагогічний університет, Україна*

[§] *Національний університет харчових технологій, Україна*

Розглядається задача побудови точних розв'язків з узагальненим відокремленням змінних для нелінійного рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a(t)u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c(t)u, \tag{1}$$

де $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ — функції від t. Рівняння цього типу зустрічаються в задачах хвильової і газової динаміки.

За допомогою анзацу $u = d(x)\omega(t) + f(t,x)$, знайдені системи координатних функцій для точних розв'язків рівняння (1), що зводить задачу побудови таких розв'язків до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь. Так, у випадку

$$a(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha}b(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 1, 2, 3,$$

систему координатних функцій утворюють функції x^2, x^α, а якщо $a(t) = -2b(t)$, то координатну систему утворюють функції x^2, $x^2 \ln|x|$. Показано, зокрема, що відшукання точних розв'язків рівняння (1) виду

$$u = \mu_1(t)x^2 + \mu_2(t)x^\alpha$$

зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\mu_1'' = \Phi_1(t)\mu_1, \qquad \mu_2'' = \Phi_2(t)\mu_2,$$

де $\Phi_1(t)$ і $\Phi_2(t)$ є довільними наперед заданими функціями. У багатьох випадках ця система може бути проінтегрована.