НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ПРИХОДЬКО ЮРІЙ ЄВГЕНОВИЧ

УДК 519.21

ГРАНИЧНА ПОВЕДІНКА ЛОКАЛЬНИХ ЗБУРЕНЬ ПРОЦЕСІВ МАРКОВА

01.01.05 «Теорія ймовірностей і математична статистика»
11 – Математика та статистика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук
(доктора філософії)

Київ – 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Науковий керівник:

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Пилипенко Андрій Юрійович
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу теорії випадкових процесів.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Іксанов Олександр Маратович
Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,
завідувач кафедри дослідження операцій
факультету кібернетики;

доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник
Арясова Ольга Вікторівна
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України,
провідний науковий співробітник
відділу тектонофізики.

Захист відбудеться « 15 » березня 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України за адресою: 01004, Київ-4, вул. Терещенківська, 3.

Автореферат розісланий « 12 » лютого 2018 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Пелюх Г.П.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми

Функціональні граничні теореми є важливим розділом теорії випадкових процесів, яким займались багато видатних математиків, зокрема M.D. Donsker, А.В. Скороход, І.І. Гіхман, D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan, Ю.В. Прохоров та багато інших.

Один з перших класичних результатів такого типу отримав M.D. Donsker. Він узагальнив твердження центральної граничної теореми про збіжність скінченно-вимірних розподілів нормованих симетричних випадкових блукань, встановивши слабку збіжність послідовності таких блукань в просторі неперервних функцій до вінерівського процесу.

Функціональні граничні теореми такого типу називаються принципом інваріантності, оскільки дозволяють обчислювати розподіли функціоналів від граничних процесів як границі від розподілів відповідних блукань.

Важливе узагальнення теореми Донскера зробив А.В. Скороход. Ним була запропонована метрика в просторі неперервних справа функцій, що мають границі зліва. Це дозволило, зокрема, довести узагальнення теореми Донскера на випадок процесів з незалежними приростами.

J.M. Harrison та L.A. Shepp розглядали узагальнення теореми Донскера на випадок локально збурених випадкових блукань, тобто випадкових блукань, перехідні імовірності яких відрізняються від перехідних імовірностей для симетричного випадкового блукання лише в одній точці нуль. Вони встановили, що послідовність нормованих збурень випадкових блукань слабко збігається до косого броунівського руху. Зауважимо, що стохастичне диференціальне рівняння для косого броунівського руху містить локальний час і є дифузією з узагальненим переносом. Відповідну теорію побудував М.І. Портенко. Він, зокрема, отримав косий броунівський рух як границю броунівського руху із переносом, який в певному сенсі збігається до $\alpha\delta_0$, де δ_0 — це дельта-функція Дірака. При цьому, коефіцієнт при локальному часі відповідного стохастичного диференціального рівняння дорівнює $\operatorname{th}\alpha$ — тобто параметр граничного процесу нелінійним чином залежить від α. Отже, граничні теореми для дифузій з узагальненим переносом є нетривіальними та не вписуються в принцип інваріантності.

Узагальненням результатів Гаррісона та Шеппа про граничну поведінку збурених випадкових блукань займались також Р.А. Мінлос, О.А. Жижина, D. Szász, A. Telcs, А.Ю. Пилипенко, О.М. Іксанов та інші.

Дослідженням стохастичних диференціальних рівнянь з узагальненим переносом та їх властивостей займались J.-F. Le Gall, Б.І. Копитко, Г.Л. Кулініч, H.-J. Engelbert, W. Schmidt, J. Walsh, R.F. Bass, Z.-Q. Chen, K. Bogdan, T. Jakubowski, М.І. Портенко, Б.І. Копитко, Ж.Я. Цаповська, О.В. Арясова та багато інших.

В даній дисертаційній роботі розглядається узагальнення вказаних вище результатів про збурення випадкових блукань на загальні випадки ланцюгів Маркова та дифузій з регулярними коефіцієнтами, які збурюються в певному околі особливої точки.

Інша задача, розглянута в дисертації, полягає в протилежному: а саме, дослідження нерегулярних в певному сенсі процесів за допомогою згладжування коефіцієнтів або додавання малого шуму.

Так, зокрема, R. Baffico і P. Baldi розглядали диференціальне рівняння

$$\begin{aligned}&dX(t) = (a_+ \mathbb{1}_{X(t)\geqslant 0} - a_- \mathbb{1}_{X(t)<0})|X(t)|^\alpha dt,\ t \geqslant 0,\\ &X(0) = 0,\end{aligned}$$

де $a_\pm > 0$, $\alpha \in (0,1)$. Коефіцієнт цього рівняння не задовольняє умову Ліпшиця в нулі і воно має неєдиний розв'язок. Baffico та Baldi досліджували граничну поведінку розв'язків таких рівнянь, збурених малим шумом. Зазначимо, що за теоремою Вєрєтєннікова, збурене стохастичне диференціальне рівняння

$$dX_\varepsilon(t) = (a_+ \mathbb{1}_{X_\varepsilon(t)\geqslant 0} - a_- \mathbb{1}_{X_\varepsilon(t)<0})|X_\varepsilon(t)|^\alpha dt + \varepsilon dW(t),\ t \geqslant 0,$$

має єдиний сильний розв'язок. Було доведено, що послідовність $\{X_\varepsilon\}$ слабко збігається при $\varepsilon \to 0$ до граничного процесу з розподілом

$$p\,\mathbb{P}_{X_+} + (1-p)\,\mathbb{P}_{X_-},$$

де p залежить від a_+ та a_-, а $\mathbb{P}_{X_+}$ та $\mathbb{P}_{X_-}$ — розподіли додатнього та від'ємного розв'язків незбуреного рівняння, відповідно.

Узагальнення результатів про граничну поведінку звичайних диференціальних рівнянь, збурених малим шумом, розглядалися в роботах А.Ю. Пилипенка, F.N. Proske, F. Delarue, F. Flandoli, D. Vincenzi.

Розроблений в дисертаційній роботі метод дозволив узагальнити відповідні результати про збурення малим шумом на випадок стохастичних диференціальних рівнянь з нерегулярними коефіцієнтами.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» в рамках держбюджетної науково-дослідної роботи № 2810Ф «Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнення процесів відновлення» (номер державної реєстрації 0115U000371).

Мета і завдання дослідження

Метою дисертаційної роботи є дослідження граничної поведінки для локальних збурень ланцюгів та процесів Маркова.

Об'єктом дослідження є ланцюги та процеси Маркова з іррегулярністю в околі деякої особливої точки. Такими процесами можуть бути, зокрема, послідовності процесів Маркова, які ззовні довільного околу фіксованої "сингулярної" точки поводяться як деякий заданий процес. В околах цієї точки поведінка збуреного процесу може бути іррегулярною.

Предметом дослідження є гранична поведінка ланцюгів та процесів Маркова з локальним збуренням.

В роботі розглядаються наступні *задачі*:

- Дослідити граничну поведінку послідовностей симетричних випадкових блукань з інтегровним локальним збуренням.
- Знайти граничну поведінку симетричного випадкового блукання з відбиваючим бар'єром в точці нуль для випадку неінтегровних стрибків з бар'єру, які належать до області притягання α-стійкого розподілу.
- Встановити граничну поведінку послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з необмеженими в околі особливої точки коефіцієнтами.
- Вивчити граничну поведінку послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими та виродженими в околі особливої точки коефіцієнтами, збурених малим випадковим шумом.

Методи дослідження. В роботі використовуються методи теорії випадкових процесів, стохастичних диференціальних рівнянь, стохастичного аналізу, теорії ланцюгів Маркова. Запропоновані в дисертаційній роботі загальні методи доведення дозволяють отримувати функціональні граничні теореми для широкого класу процесів, що мають властивість регенерації.

Наукова новизна отриманих результатів

Усі отримані в роботі результати є новими. Зокрема, в дисертації одержані такі нові наукові результати:

- Розроблено загальний метод дослідження граничної поведінки локально збурених процесів, що мають властивість регенерації, та доведення відповідних функціональних граничних теорем.

- Для послідовностей нормованих симетричних випадкових блукань з інтегровним локальним збуренням доведено слабку збіжність в просторі неперервних функцій. Проведено повну класифікацію можливих граничних процесів в термінах перехідних імовірностей збурення.

- Досліджено граничну поведінку симетричного випадкового блукання з відбиваючим бар'єром в точці нуль. Для випадку неінтегровних стрибків з бар'єру, які належать до області притягання α-стійкого розподілу, встановлено слабку збіжність в просторі Скорохода до броунівського руху з відбиттям в нулі та граничними умовами типу Вентцеля–Феллера.

- Знайдено граничну поведінку послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з необмеженими в околі особливої точки коефіцієнтами. Проведено класифікацію можливих граничних процесів в залежності від поведінки розв'язків в околі особливої точки.

- Для послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими та виродженими в околі особливої точки коефіцієнтами розглянуто збурення малим шумом та доведено слабку збіжність в просторі неперервних функцій.

Особистий внесок здобувача

Всі результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно під керівництвом наукового керівника, д.ф.-м.н. А.Ю. Пилипенка. У спільних статтях науковому керівнику належить постановка задачі, аналіз здобутих результатів та загальне керівництво роботою.

Апробація результатів

Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на наукових конференціях:

- Міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених, Київ, 21–22 травня 2009;

- Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 13–15 травня 2010;

- Міжнародна наукова конференція «Modern Stochastics: Theory and Applications II», Київ, 7–11 вересня 2010;

- Друга міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, Київ, 28–29 квітня 2011;

- Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», Ворохта, 20–26 лютого 2012;
- Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, Київ, 19–21 квітня 2012;
- Міжнародна наукова конференція «Modern Stochastics: Theory and Applications III», Київ, 10–14 вересня 2012;
- Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», Ворохта, 25 лютого – 3 березня 2013;
- Третя міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених, Київ, 25–27 квітня 2013;
- Ukrainian–German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory, Коктебель, 23–27 вересня 2013;
- Міжнародна наукова конференція «Probability, Reliability and Stochastic Optimization», Київ, 7–10 квітня 2015;
- Міжнародна наукова конференція «Stochastic Processes in Abstract Spaces», Київ, 14–16 жовтня 2015;
- Міжнародна наукова конференція «International Workshop on Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics», Київ, 10–11 жовтня 2016;

та наукових семінарах:

- Науковий семінар «Теорія випадкових процесів» при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ» (керівник: проф. В.В. Булдигін);
- Науковий семінар «Числення Маллявена та його застосування» відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України (керівник: проф. А.А. Дороговцев);
- Науковий семінар «Стохастика та її застосування» при кафедрі дослідження операцій факультету кібернетики КНУ ім. Т.Шевченка (керівник: проф. О.М. Іксанов);
- Науковий семінар «Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів» при кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського (керівники: проф. О.І. Клесов, проф. О.В. Іванов);
- Науковий семінар дослідницької групи «Stochastic analysis, finance, insurance and risk», University of Oslo, Department of Mathematics.

Публікації

За результатами дисертаційної роботи опубліковано 5 наукових статей у фахових журналах [1-5], три з яких індексуються міжнародною наукометричною базою Scopus, та 13 тез доповідей на наукових конференціях [6-18], вісім з яких є міжнародними.

Структура та обсяг дисертації

Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, переліку використаних джерел та списку публікації здобувача. Повний обсяг роботи становить 129 стор. Перелік використаних джерел налічує 87 посилань.

Основний зміст роботи

Перший розділ дисертації містить огляд літератури за тематикою дисертації.

Другий розділ присвячено описанню загального методу дослідження граничної поведінки послідовності випадкових процесів з іррегулярністю в околі деякої фіксованої точки.

Зокрема, **в § 2.2** розглянуто перетворення “вирізанням часу”, яке дозволяє отримати загальний метод дослідження граничної поведінки таких процесів.

А саме, нехай $f \in D([0,\infty))$, і нехай $\sigma = \{\sigma_n\},\ \tau = \{\tau_n\}$ — послідовності дійсних чисел таких, що

$$0 \leqslant \tau_0 \leqslant \sigma_0 < \tau_1 < \sigma_1 < \tau_2 < \ldots, \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty,\ \lambda(\cup_k[\sigma_k, \tau_{k+1})) = +\infty, \tag{2}$$

де λ — міра Лебега на $\mathbb{R}$.

Покладемо

$$L(t) = L_{\tau,\sigma}(t) := \int_0^t 1\!\!1_{\cup_k[\sigma_k,\tau_{k+1})}(s)ds,$$
$$A(t) = A_{\tau,\sigma}(t) := L^{-1}(t) := \inf\{s \geqslant 0 | L(s) \geqslant t\}.$$

Означення 2.2.1. Будемо казати, що функція

$$f^{\tau,\sigma}(t) := f(A_{\tau,\sigma}(t)),\ t \geqslant 0$$

отримана з функції f вирізаннняням часу $\cup_k[\tau_k, \sigma_k)$.

Через $\omega_f(\delta) = \omega_f^T(\delta) := \sup\limits_{\substack{s,t\in[0,T]\\|s-t|\leqslant\delta}} \rho(f(s), f(t))$ позначимо модуль неперервності функції f на $[0,T]$.

Основний результат § 2.2 полягає в наступному.

Теорема 2.2.3. *Припустимо, що послідовність випадкових процесів* $\{X_n, n\geqslant 1\}$ *для деякого* $T>0$ *задовольняє умову*

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \exists\ n_0\ \forall\ n\geqslant n_0$$

$$\mathrm{P}(\omega_{X_n}^{T+1}(\delta)\geqslant\varepsilon)\leqslant\varepsilon. \tag{3}$$

Припустимо, що для довільного $\alpha\in(0,1)$ *знайдуться послідовності випадкових величин*

$$\tau^{(n)}=\tau^{(n,\alpha)}=\{\tau_k^{(n,\alpha)},k\geqslant 0\},\ \sigma^{(n)}=\sigma^{(n,\alpha)}=\{\sigma_k^{(n,\alpha)},k\geqslant 0\},$$

які задовольняють (1) *і* (2) *для всіх* $n\geqslant 1$, *та випадковий процес* $X^{(\alpha)}$ *такий, що*

$$\mathrm{P}(T+1-L_n^{(\alpha)}(T+1)\geqslant\alpha)\leqslant\alpha,\ n\geqslant n_0(T,\alpha); \tag{4}$$

$$X_n^{(\alpha)}\Rightarrow X^{(\alpha)},\ n\to\infty,\ \text{в } D([0,T]), \tag{5}$$

де

$$L_n^{(\alpha)}(t)=\int_0^t \mathbb{1}_{\cup_k[\sigma_k^{(n,\alpha)},\tau_{k+1}^{(n,\alpha)})}(s)ds,\ A_n^{(\alpha)}(t)=(L_n^{(\alpha)})^{-1}(t),$$

$X_n^{(\alpha)}(t)=X_n(A_n^{(\alpha)}(t))$ *отримано вирізанням часу з* X_n.

Тоді розподіл послідовності $\{X_n,n\geqslant 1\}$ *слабко збігається в* $D([0,T])$ *при* $n\to\infty$. *Крім того, розподіли* $\{X^{(\alpha)}\}$ *слабко збігаються в* $D([0,T])$ *при* $\alpha\to 0+$, *а границі для* $\{X^{(\alpha)}\}$ *та* $\{X_n\}$ *співпадають за розподілом.*

В § 2.3 наведено деякі достатні умови для виконання теореми 2.2.3.

Зокрема, нехай $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — послідовність неперервних однорідних процесів Маркова в строгому сенсі, $Q_x^{(n)}$ — розподіл X_n за умови $X_n(0)=x$. Припустимо, що існує точка x^*, така що для довільного n процес X_n безліч разів потрапляє в довільну кулю $B(x^*,\varepsilon)$ і безліч разів виходить з довільної кулі $B(x^*,\varepsilon)$ з $Q_x^{(n)}$ імовірністю 1, $x\in E$. Нехай $\alpha>0$, $\alpha_1\in(0,\alpha)$. Візьмемо в ролі $\{\tau_k,\sigma_k\}_{k\geqslant 1}$ моменти послідовних входів в кулю $B(x^*,\alpha_1)$ та виходів з кулі $B(x^*,\alpha)$, відповідно. Покладемо $\sigma_0^n:=0$,

$$\begin{aligned}\tau_k^n=\tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}&:=\inf\{t\geqslant\sigma_{k-1}^{(n,\alpha_1,\alpha)}\colon \rho(X_n(t),x^*)\leqslant\alpha_1\},\ k\geqslant 1,\\ \sigma_k^n=\sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}&:=\inf\{t\geqslant\tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}\colon \rho(X_n(t),x^*)\geqslant\alpha\},\ k\geqslant 1.\end{aligned} \tag{6}$$

Лема 2.3.2. *Припустимо, що* $\tilde{P}_0(x,\tilde{A}),x\in E,\tilde{A}\in\mathcal{B}(E)$ *та* $\bar{P}_0(x,\bar{A}),x\in E,\bar{A}\in\mathcal{B}(C_E([0,\infty))\times[0,\infty))$ — *стохастичні ядра, неперервні по* x *(на просторі мір розглядається топологія слабкої збіжності). Припустимо, що початкові розподіли процесів Маркова* $X_n(0)$ *слабко збігаються до деякої міри* μ_0, *і для довільного* $x\in E$ *і довільної послідовності* $\{x_n\}$, *збіжної до* x:

A1. $Q^{(n)}_{x_n}\left(X_n(\sigma^n_1)\in\cdot\right)\Rightarrow \tilde P_0(x,\cdot), n\to\infty,$
A2. $Q^{(n)}_{x_n}\Big((X_n(\cdot\wedge\tau^n_1),\tau^n_1)\in\cdot\Big)\Rightarrow \bar P_0(x,\cdot), n\to\infty.$

Тоді якщо X_0 *— процес Маркова в строгому сенсі, такий що*

$$\mu_0 =^d X_0(0),\ Q^{(0)}_x\left((X_0(\cdot\wedge\tau^0_1),\tau^0_1)\in\cdot\right)=\bar P_0(x,\cdot), \tag{7}$$

$$Q^{(0)}_x\left(X_0(\sigma^0_1)\in\cdot\right)=\tilde P_0(x,\cdot), \tag{8}$$

то має місце збіжність процесів, отриманих вирізанням часу:

$$X_n^{(\tau^n,\sigma^n)}\Rightarrow X_0^{(\tau^0,\sigma^0)},\ n\to\infty.$$

В § 2.4 використовуються достатні умови для отримання загальних результатів для процесів Маркова в строгому сенсі.

Наприклад, нехай $\{\xi^{(n)}, n\geqslant 0\}$ — послідовність неперервних однорідних процесів Маркова в строгому сенсі.

Для $\alpha>0$ покладемо

$$\tau^{n,\alpha}:=\inf\left\{t\geqslant 0\colon |\xi^{(n)}(t)|\leqslant\alpha\right\},\quad \sigma^{n,\alpha}:=\inf\left\{t\geqslant 0\colon |\xi^{(n)}(t)|\geqslant\alpha\right\}.$$

Позначимо через $\xi^{(n)}_{x_0}$ процес, що має розподіл як $\xi^{(n)}$ за умови $\xi^{(n)}(0)=x_0$.

Теорема 2.4.4. *Припустимо, що послідовність* $\{\xi^{(n)}, n\geqslant 0\}$ *задовольняє наступні умови:*

$$\xi^{(n)}(0)\Rightarrow\xi^{(0)}(0);$$

$$\forall T>0\ \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \exists n_0\ \forall n\geqslant n_0$$

$$\mathrm{P}\Big(\sup_{\substack{|s-t|<\delta,\\ s,t\in[0,T]}}|\xi^{(n)}(t)-\xi^{(n)}(s)|\geqslant\varepsilon\Big)\leqslant\varepsilon;$$

$$\forall T>0\quad \lim_{\varepsilon\to 0+}\sup_n \mathrm{E}\int_0^T \mathbb{1}_{|\xi^{(n)}(t)|\leqslant\varepsilon}dt=0;$$

$$\int_0^\infty \mathbb{1}_{\xi^{(0)}(t)=0}dt=0\quad \textit{м.н.}$$

Нехай для довільних $\alpha>0$, $x_0\in\mathbb{R}$ *та довільної послідовності* $\{x_n\}$, *такої що* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, *виконується:*

$$\left(\xi^{(n)}_{x_n}(\cdot\wedge\tau^{n,\alpha}),\tau^{n,\alpha}\right)\Rightarrow\left(\xi^{(0)}_{x_0}(\cdot\wedge\tau^{0,\alpha}),\tau^{0,\alpha}\right),\ n\to\infty;$$

$$\xi^{(n)}_{x_n}(\sigma^{n,\alpha})\Rightarrow\xi^{(0)}_{x_0}(\sigma^{0,\alpha}),\ n\to\infty.$$

Тоді $\xi^{(n)}\Rightarrow\xi^{(0)}$ *при* $n\to\infty$ *в* $C([0,\infty))$.

В § 2.5 наведено наслідок з результатів § 2.3 для ланцюгів Маркова.

Нехай $(X_0(t), t \geqslant 0)$ — неперервний процес Маркова в строгому сенсі зі значеннями в $\mathbb{R}^d$, $(X^{(n)}(k), k \geqslant 0)$, $n \geqslant 1$, — ланцюги Маркова на $\mathbb{R}^d$.

Покладемо $X_n(\frac{k}{n}) := \frac{1}{\sqrt{n}} X^{(n)}(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і довизначимо процес $X_n(t)$ для всіх $t \geqslant 0$ за лінійністю.

Позначимо $\sigma_0^n := 0$,

$$\begin{aligned} \tau_k^{(n)} = \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}_+, t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n,\alpha_1,\alpha)} \colon |X_n(t) - x^*| \leqslant \alpha_1\}, \ k \geqslant 1, \\ \sigma_k^{(n)} = \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\{t \in \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}_+, t \geqslant \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} \colon |X_n(t) - x^*| \geqslant \alpha\}, \ k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Теорема 2.5.1. *Припустимо, що для довільного $T > 0$ виконується (3), а також для довільного $\alpha > 0$ знайдеться таке $\alpha_1 \in (0, \alpha)$, що для послідовностей $\{(\tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}), k \geqslant 1\}$, визначених в (9), виконується:*
1) для довільного $n \geqslant 1$ і довільного початкового розподілу

$$\sum_k (\tau_{k+1}^n - \sigma_k^n) = \infty \quad \text{м.н.};$$

2) для довільного $T > 0$

$$\lim_{\alpha \to 0+} \sup_n \mathrm{E} \int_0^T 1\!\!1_{\rho(X_n(t), x_0) \leqslant \alpha} dt = 0;$$

3) умови **A1**, **A2** *леми 2.3.2.*
Тоді розподіли $\{X_n\}$ слабко збігаються при $n \to \infty$ в $C([0, \infty))$. Якщо додатково виконується (7), (8) і

$$\int_0^\infty 1\!\!1_{\{X_0(t) = x^*\}} dt = 0 \ \text{м.н.},$$

то $X_n \Rightarrow X_0$ при $n \to \infty$ в $C([0, \infty))$.

В третьому розділі результати розділу 2 застосовані для випадкових блукань зі збуреннями.

Розглянемо однорідний ланцюг Маркова $(X(k) = X^{(x_0)}(k),\ k \in \mathbb{Z}_+)$ на $\mathbb{Z}$ зі стартом в точці $x_0 \in \mathbb{Z}$ та перехідними імовірностями $p_{i,j}$, такими що для деякого $m \geqslant 0$

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2 \quad \text{при} \quad |i| > m. \tag{10}$$

Відрізок $[-m, m]$ будемо називати *мембраною.*

Довизначимо процес $(X(t),\ t \geqslant 0)$ для всіх t неперервно як лінійну інтерполяцію $(X(k),\ k \in \mathbb{Z}_+)$ та розглянемо процеси

$$X_n(t) = \tfrac{1}{\sqrt{n}} X^{([x_0\sqrt{n}])}(nt),\ t \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

зі стартом в точці $[x_0\sqrt{n}]/\sqrt{n}$.

Означення 3.1.1. Послідовність $\{X_n\}$ з (11) будемо називати послідовністю випадкових блукань, збурених в околі нуля.

В § 3.2 досліджено граничну поведінку таких блукань в двох випадках: коли стрибки з мембрани $[-m, m]$ інтегровні та неінтегровні.

Основним результатом § 3.2.1 є наступна теорема, яка описує всі можливі граничні процеси для випадку інтегровних стрибків.

Позначимо через P_{x,W_γ} розподіл косого броунового руху $W_\gamma(\cdot)$ з параметром проникності $\gamma \in [-1, 1]$ та початком в точці x, та $P_{x,0}$ — розподіл броунового руху з початком в точці x та залипанням в нулі.

Покладемо $\tau = \inf\{k \geqslant 0\colon |X(k)| > m\}$ — момент виходу ланцюга Маркова $X(k)$ з мембрани $[-m, m]$ та позначимо через $\xi^{(\pm)}$ випадкові величини, розподіл яких співпадає з умовним розподілом величини

$$X(\tau) - m \operatorname{sign} X(\tau)$$

за умови $X(0) = \pm m$; величина $\xi^{(\pm)}$ — це відстань до мембрани в момент τ при старті з $+m$ чи $-m$ відповідно.

Теорема 3.2.1. *Нехай стрибки з мембрани $[-m, m]$ інтегровні, тобто*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |j|\, p_{i,j} < \infty \quad \textit{при } |i| \leqslant m.$$

Тоді для довільного x_0 послідовність $\{X_n\}$ при $n \to \infty$ слабко збігається в $\mathrm{C}([0, 1])$ *до деякого процесу X_∞.*

Зокрема:

A. *Якщо принаймні один зі станів $-m{-}1$ та $m{+}1$ ланцюга $X(\cdot)$*

1) є істотним та

2) досягається з імовірністю 1,

то граничний процес X_∞ є косим броуновим рухом W_γ з параметром

$$\gamma = \frac{\mathrm{E}\xi^{(+)}\, \mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) + \mathrm{E}\xi^{(-)}\, \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)}{\mathrm{E}|\xi^{(+)}| \mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) + \mathrm{E}|\xi^{(-)}| \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)}. \tag{12}$$

При цьому $\mathrm{P}(\tau < \infty \;/\; X(0) = x_0) = 1$ *та*

$$\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) \vee \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) > 0.$$

Якщо умови 1) і 2) одночасно виконуються тільки для одного зі станів $-m{-}1$ або $m{+}1$, то γ дорівнює знаку цього стану.

Б. *Нехай $x_0 > 0$, а стан $-m-1$ є істотним та досягається ланцюгом $X(\cdot)$ з імовірністю q, $0 < q < 1$. Тоді* $\mathrm{P}(\tau < \infty) = 1$ *і*

$$\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) > 0.$$

В цьому випадку розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює

$$qP_{x_0,W_{-1}} + (1-q)P_{x_0,0}.$$

Аналогічне твердження виконується для $x_0 < 0$ та стану $m+1$.

В. *Нехай $x_0 = 0$, а стани $-m-1$ та $m+1$ досягаються ланцюгом $X(\cdot)$ з імовірностями q та p відповідно ($q, p \geqslant 0$) та є істотними*[1].

Якщо ці стани між собою не сполучаються, то

$$\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) = \mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0) = 0$$

і розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює

$$qP_{0,W_{-1}} + pP_{0,W_{+1}} + (1-q-p)P_{0,0}.$$

Якщо стани $-m-1$ та $m+1$ сполучаються, то $q = p$ і розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює

$$pP_{0,W_\gamma} + (1-p)P_{0,0},$$

*де γ визначається аналогічно до пункту **А**.*

Г. *Якщо будь-який (досяжний) зі станів $-m-1$ та $m+1$ є неістотним, то розподіл процесу X_∞ дорівнює $P_{x_0,0}$, тобто граничний процес X_∞ є броуновим рухом з залипанням в нулі.*

Якщо стрибки з мембрани не є інтегровними, то граничний процес може бути розривним.

Так, **в § 3.2.2** розглядається випадок, коли стрибки з мембрани належать до області притягання α-стійкого розподілу.

А саме, нехай перехідні імовірності ланцюга X дорівнюють

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2 \quad \text{при} \quad |i| > 0$$

та

$$p_{0,j} = \mathrm{P}(\xi = j),\ j \in \mathbb{Z},$$

де ξ — додатня цілозначна випадкова величина, яка належить до області притягання невід'ємного α-стійкого розподілу з $\alpha \in (0,1)$.

[1] Якщо якийсь стан є недосяжним, то його істотність чи неістотність для результату неважлива. Тому для простоти формулювання всі недосяжні стани в пункті **В** ми будемо вважати істотними, а в пункті **Г** — неістотними.

Теорема 3.2.12. *Для довільного $T > 0$ послідовність процесів $\{X_n\}$ слабко збігається в $\mathrm{D}([0,1])$ до процесу вигляду*

$$X_\infty(t) = W(t) + U_\alpha\big(U_\alpha^{(-1)}(M(t))\big),\ t \geqslant 0,$$

де $(W(t))$ — вінерів процес,

$$M(t) = -\min_{s\in[0,t]}(W(s)\wedge 0),\ t \geqslant 0,$$

$(U_\alpha(t))$ — невід'ємний α-стійкий процес,

$$U_\alpha^{(-1)}(t) = \inf\{s \geqslant 0\colon U_\alpha(s) \geqslant t\},\ t \geqslant 0,$$

і процеси $(W(t))$ та $(U_\alpha(t))$ незалежні.

В § 3.3 та **§ 3.4** доводяться теореми 3.2.1 та 3.2.12, відповідно.

В четвертому розділі розглядається питання дослідження граничної поведінки послідовності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь

$$dX_n(t) = a_n(X_n(t))dt + \sigma_n(X_n(t))dW(t),\ t \geqslant 0,$$

коефіцієнти яких збігаються до функцій, що мають особливість в нулі.

Особливість може полягати, наприклад, в необмеженості або неліпшицевості коефіцієнтів.

Зокрема, **в § 4.1** розглядається випадок, коли коефіцієнт переносу є необмеженою в околі нуля функцією.

А саме, нехай $\{X(nt)/\sqrt{n}\}$ — це розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$dX_n(t) = a_n(X_n(t))dt + dW(t),\ t \geqslant 0,$$

де $a_n(x) = na(nx)$.

Припустимо, що

$$a(x) = \widetilde{a}(x) + \frac{\bar{c}(x)}{x},\ x \in \mathbb{R},$$

де $\widetilde{a} \in L_1(\mathbb{R})$ та

$$\bar{c}(x) = c_+ \cdot 1\!\!1_{x>1} + c_- \cdot 1\!\!1_{x<-1},\ x \in \mathbb{R}.$$

Нехай $B_c^+(x_0,t)$ — це невід'ємний процес Бесселя при $x_0 \geqslant 0$. Покладемо $B_c^-(x_0,t) = -B_c^+(|x_0|,t)$ при $x_0 \leqslant 0$.

Позначимо через $p_t^c(x,y)$ перехідну щільність процесу Бесселя.

Нехай $c \in (-1/2, 1/2)$, позначимо через $p_t^{0,c}(x,y)$ перехідну щільність процесу Бесселя з вмиранням в 0.

Покладемо

$$p_t^{skew}(x,y) = p_t^{0,c}(|x|,|y|)\cdot 1\!\!1_{xy>0} + \\ + \tfrac{1+\gamma\,\mathrm{sign}\,y}{2}\big(p_t^c(|x|,|y|) - p_t^{0,c}(|x|,|y|)\big),\ x,y \in \mathbb{R}.$$

Означення 4.1.2. Однорідний процес Маркова з перехідною щільністю p_t^{skew} називається *косим процесом Бесселя* $B_{c,\gamma}^{skew}$ з параметрами c та γ, $\gamma \in [-1, 1]$.

Основним результатом § 4.1 є наступне твердження.

Теорема 4.1.6. *Якщо c_+ та $c_- > -1/2$, то послідовність процесів $\{X_n\}$ слабко збігається до граничного процесу X_∞. Зокрема:*

A1. Якщо

(a) $x_0 > 0$ та $c_+ \geqslant 1/2$, або

(b) $x_0 \geqslant 0$ та $c_- < c_+ < 1/2$, або

(c) $x_0 = 0$ та $c_- < 1/2 \leqslant c_+$,

то

$$X_\infty(t) = B_{c_+}^+(x_0, t),\ t \geqslant 0.$$

A2. Аналогічно, якщо

(a) $x_0 < 0$ та $c_- \geqslant 1/2$, або

(b) $x_0 \leqslant 0$ та $c_+ < c_- < 1/2$, або

(c) $x_0 = 0$ та $c_+ < 1/2 \leqslant c_-$,

то

$$X_\infty(t) = B_{c_-}^-(x_0, t),\ t \geqslant 0.$$

A3. Якщо $x_0 < 0$, $c_- < 1/2$ та $c_- < c_+$, то граничний процес поводиться як $B_{c_-}^-$ до моменту потрапляння в 0, а далі поводиться як $B_{c_+}^+$ тобто

$$X_\infty(t) = B_{c_-}^-(x_0, t) \cdot \mathbb{1}_{t \leqslant \tau} + B_{c_+}^+(0, t - \tau) \cdot \mathbb{1}_{t > \tau},\ t \geqslant 0,$$

де $\tau = \inf\{t \geqslant 0\colon X_\infty(t) \geqslant 0\} = \inf\{t \geqslant 0\colon B_{c_-}^-(x_0, t) \geqslant 0\}$ та $B_{c_\pm}^\pm$ — незалежні (додатній та від'ємний) процеси Бесселя.

A4. Аналогічно, якщо $x_0 > 0$, $c_+ < 1/2$ та $c_+ < c_-$, то

$$X_\infty(t) = B_{c_+}^+(x_0, t) \cdot \mathbb{1}_{t \leqslant \tau} + B_{c_-}^-(0, t - \tau) \cdot \mathbb{1}_{t > \tau},\ t \geqslant 0,$$

де $\tau = \inf\{t \geqslant 0\colon X_\infty(t) \leqslant 0\}$.

A5. Якщо $c_+ = c_- =: c < 1/2$, то для довільного x_0

$$X_\infty(t) = B_{c,\gamma}^{skew}(x_0, t),\ t \geqslant 0,$$

де $\gamma = \operatorname{th}(\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{a}(z)dz) = \frac{1 - \exp\{-2\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{a}(z)dz\}}{1 + \exp\{-2\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{a}(z)dz\}}$.

А6. Нарешті, якщо $x_0 = 0$, $c_+ \geqslant 1/2$ та $c_- \geqslant 1/2$, то розподіл граничного процесу X_∞ дорівнює

$$p \cdot \mathbb{P}_{B^+_{c_+}} + (1-p) \cdot \mathbb{P}_{B^-_{c_-}},$$

де

$$p = \frac{\int_0^\infty A(-y)(y \vee 1)^{-2c_-} dy}{\int_0^\infty (A(-y)(y \vee 1)^{-2c_-} + A(y)(y \vee 1)^{-2c_+})\, dy}, \tag{13}$$

$A(y) = \exp\{-2\int_0^y \widetilde{a}(z)dz\}$, *а* $\mathbb{P}_{B^\pm_{c_\pm}}$ *— це розподіли додатнього та від'ємного процесів Бесселя* $B^\pm_{c_\pm}(0,\cdot)$ *зі стартом в* 0.

В **§ 4.2** розглядається аналогічна задача для випадку неліпшицевих та вироджених коефіцієнтів.

А саме, розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} &dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dW(t),\ t \geqslant 0, \\ &X(0) = 0, \end{aligned} \tag{14}$$

де $W(\cdot)$ — вінерів процес,

$$\begin{aligned} a(x) &= a_\pm |x|^\alpha \operatorname{sign} x = a_+|x|^\alpha \mathbb{1}_{x\geqslant 0} - a_-|x|^\alpha \mathbb{1}_{x<0}, \\ \sigma(x) &= b_\pm |x|^\beta = b_+|x|^\beta \mathbb{1}_{x\geqslant 0} + b_-|x|^\beta \mathbb{1}_{x<0}, \end{aligned} \tag{15}$$

де $a_\pm > 0,\ b_\pm \geqslant 0,\ \alpha, \beta > 0$.

Якщо $\alpha < 1$, то коефіцієнт переносу не задовольняє умову Ліпшиця в точці 0. Відомо, що якщо

$$\alpha < 1 \text{ та } \alpha - 2\beta + 1 < 0, \tag{16}$$

то існують слабкі розв'язки рівняння (14), але не виконується умова єдиності розв'язку. При цьому, існують єдині розв'язки X_+ та X_- рівняння (14), такі що $X_\pm(0) = 0$ та

$$\begin{aligned} &X_+(t) > 0 \text{ при } t > 0 \text{ м.н.}, \\ &X_-(t) < 0 \text{ при } t > 0 \text{ м.н.} \end{aligned} \tag{17}$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Розглянемо наступне збурення рівняння (14) :

$$dX_\varepsilon(t) = a(X_\varepsilon(t))dt + (\varepsilon + \sigma(X_\varepsilon(t)))dW(t),\ t \geqslant 0, \tag{18}$$

де $a(\cdot)$ та $\sigma(\cdot)$ задані в (15).

Зауважимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ розв'язок рівняння (18) існує та єдиний. Основним результатом § 4.2 є наступна теорема.

Теорема 4.2.1. *Припустимо, що виконується умова* (16).

Тоді $\{X_\varepsilon\}$ *слабко збігається в* $\mathrm{C}([0,1])$ *при* $\varepsilon \to 0$ *до граничного процесу* X_∞ *з розподілом*

$$p\,\mathbb{P}_{X_+} + (1-p)\,\mathbb{P}_{X_-},$$

де

$$p = \frac{(a_+)^{1/(\alpha+1)}}{(a_+)^{1/(\alpha+1)} + (a_-)^{1/(\alpha+1)}},$$

$\mathbb{P}_{X_+}$ *та* $\mathbb{P}_{X_-}$ *— розподіли розв'язків* X_+ *та* X_-*, що задовольняють* (17).

Автор висловлює величезну подяку своєму науковому керівнику Андрію Юрійовичу Пилипенку за постановку розглянутих у дисертаційній роботі задач, підтримку в процесі виконання роботи, цінні поради та постійну увагу і допомогу.

Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню функціональних граничних теорем для випадкових процесів зі збуренням.

Основні результати дисертаційної роботи:

- Розроблено загальний метод отримання функціональних граничних теорем для випадкових процесів з локальним збуренням, що мають властивість регенерації.

- Для послідовностей симетричних випадкових блукань з інтегровним локальним збуренням доведено слабку збіжність в просторі неперервних функцій та проведено повну класифікацію можливих граничних процесів в термінах перехідних імовірностей збурення.

- Досліджено граничну поведінку симетричного випадкового блукання з відбиваючим бар'єром в точці нуль. Для випадку неінтегровних стрибків з бар'єру, які належать до області притягання α-стійкого розподілу, доведено слабку збіжність в просторі Скорохода до броунівського руху з відбиттям в нулі та граничними умовами типу Вентцеля–Феллера.

- Встановлено граничну поведінку послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з необмеженими в околі особливої точки коефіцієнтами. Проведено повну класифікацію можливих граничних процесів в залежності від поведінки розв'язків в околі особливої точки.

- Для послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими та виродженими в околі особливої точки коефіцієнтами розглянуто збурення малим шумом та доведено слабку збіжність в просторі неперервних функцій.

Запропоновані в дисертаційній роботі загальні методи доведення дозволяють отримувати функціональні граничні теореми для широкого класу процесів, що мають властивість регенерації.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Є. Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань з мембранами // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2011. — № 85. — С. 84–94.

2. Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Е. О предельном поведении возмущений в окрестности сингулярной точки последовательности марковских процессов // Укр. мат. журн. — 2015. — Т. 67, № 4. — С. 499–516.

3. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. Limit behavior of a simple random walk with non-integrable jump from a barrier // Theor. Stoch. Proc. 19 (35). — 2014. — P. 52–61.

4. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. A limit theorem for singular stochastic differential equations // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2016. — Vol. 3, no. 3. — P. 223–235.

5. Приходько Ю.Є. Малі збурення стохастичних диференціальних рівнянь зі степеневими коефіцієнтами // Наукові вісті Національного технічного університету України Київський політехнічний інститут. — 2016. — № 4. — С. 80–84.

6. Приходько Ю.Є. Про граничну поведінку симетричного вип. блукання з мембраною // Міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених (Київ, 21–22 травня 2009) — Київ, 2009.

7. Приходько Ю.Є. Про граничну поведінку симетричного випадкового блукання з мембраною // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 13–15 травня 2010) — Київ, 2010.

8. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a scaled random walk with a membrane // Міжнародна наукова конференція «Modern Stochastics: Theory and Applications II» (Київ, 7–11 вересня 2010) — Київ, 2010.

9. Приходько Ю.Є., Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань із порушеною симетричністю в околі нуля // Друга міжуніверситетська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики (Київ, 28–29 квітня 2011) — Київ, 2011.

10. Приходько Ю.Є. Асимптотична поведінка симетричного випадкового блукання з мембраною // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, 20–26 лютого 2012) — Івано-Франківськ, 2012.

11. Приходько Ю.Є. Гранична поведінка симетричного випадкового блукання з мембраною // Чотирнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука (Київ, 19–21 квітня 2012) — Київ, 2012.

12. Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a symmetric random walk with perturbations at the origin // Міжнародна наукова конференція «Modern Stochastics: Theory and Applications III» (Київ, 10–14 вересня 2012) — Київ, 2012.

13. Приходько Ю.Є. Гранична поведінка збурених випадкових блукань з неінтегровним збуренням // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу» (Ворохта, 25 лютого – 3 березня 2013) — Івано-Франківськ, 2013.

14. Приходько Ю.Є. Асимптотична поведінка збурених випадкових блукань з неінтегровним збуренням // Третя міжуніверситетська наукова конференція з математики та фізики для студентів та молодих вчених (Київ, 25–27 квітня 2013) — Київ, 2013.

15. Prykhodko Yu.E. On the limit behaviour of a symmetric random walk with perturbations at the origin // Ukrainian–German Workshop on Empirical Complete Convergence and other Limit Theorems of Probability Theory (Коктебель, 23–27 вересня 2013) — Київ, 2013.

16. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. Bessel diffusions and limit theorems for one-dimensional stochastic differential equations // Міжнародна наукова конференція «Probability, Reliability and Stochastic Optimization» (Київ, 7–10 квітня 2015) — Київ, 2015.

17. Pilipenko A.Yu., Prykhodko Yu.E. On the limit behavior of a sequence of Markov processes with perturbations in a neighborhood of a singular point Міжнародна наукова конференція «Stochastic Processes in Abstract Spaces» (Київ, 14–16 жовтня 2015) — Київ, 2015.

18. Prykhodko Yu.E. Small random perturbations of stochastic differential equations with power coefficients // Міжнародна наукова конференція «International Workshop on Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory and Mathematical Statistics» (Київ, 10–11 жовтня 2016) — Київ, 2016.

Анотація

Приходько Ю.Є. Гранична поведінка локальних збурень процесів Маркова — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 «Теорія ймовірностей і математична статистика». — Інститут математики НАН України, Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню функціональних граничних теорем для випадкових процесів зі збуренням. Такими процесами можуть бути, зокрема, послідовності процесів Маркова, які ззовні довільного околу фіксованої "сингулярної" точки поводяться як деякий заданий процес.

Так, наприклад, розглядається однорідний ланцюг Маркова, перехідні імовірності якого при $|i| > m$ співпадають з перехідними імовірностями для симетричного випадкового блукання, де m фіксоване. Для випадку, коли стрибки з "мембрани" $[-m, m]$ інтегровні, доведено слабку збіжність в просторі неперервних функцій та проведено повну класифікацію можливих граничних процесів. Зокрема, граничним процесом може бути косий броунівський рух. Даний результат узагальнює відомий результат Гаррісона та Шеппа, які розглядали збурення тільки в одній точці.

Якщо стрибки з мембрани є неінтегровними, то граничний процес може бути розривним. Так, для випадку випадкових блукань з відбиваючим бар'єром в точці нуль, стрибки з якого належать до області притягання α-стійкого розподілу, доведено слабку збіжність в просторі Скорохода до броунівського руху з відбиттям в нулі та граничними умовами типу Вентцеля–Феллера.

Розроблений в роботі метод застосовано також для дослідження граничної поведінки послідовностей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з необмеженими в околі особливої точки коефіцієнтами, а також стохастичних диференціальних рівнянь з неліпшицевими та виродженими коефіцієнтами, збурених малим шумом.

Ключові слова: локальні збурення процесів Маркова, дифузії з напівпрозорими мембранами, косий броунівський рух, косий процес Бесселя, граничні умови Вентцеля–Феллера, збурення малим шумом.

Аннотация

Приходько Ю.Е. Предельное поведение локальных возмущений процессов Маркова — Квалификационный научный труд на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 «Теория вероятностей и математическая статистика» — Институт математики НАН Украины, Киев, 2018.

Диссертация посвящена исследованию функциональных предельных теорем для случайных процессов с возмущением. Такими процессами могут быть, в частности, последовательности процессов Маркова, которые вне произвольной окрестности фиксированной "сингулярной" точки ведут себя как некий заданный процесс.

Так, например, рассматривается однородная цепь Маркова, переходные вероятности которой при $|i| > m$ совпадают с переходными вероятностями для симметричного случайного блуждания, где m фиксировано. Для случая, когда прыжки из "мембраны" $[-m, m]$ интегрируемые, доказано слабую сходимость в пространстве непрерывных функций и проведено полную классификацию возможных предельных процессов. В частности, предельным процессом может быть косое броуновское движение. Данный результат обобщает известный результат Гаррисона и Шеппа, которые рассматривали возмущения только в одной точке.

Если прыжки из мембраны неинтегрируемы, то предельный процесс может быть разрывным. Так, для случая случайных блужданий с отражающим барьером в точке ноль, прыжки с которого принадлежат области притяжения α-устойчивого распределения, доказано слабую сходимость в пространстве Скорохода к броуновскому движению с отражением в нуле и граничными условиями типа Вентцеля– Феллера.

Предложенный в работе метод применен также для исследования предельного поведения последовательностей решений стохастических дифференциальных уравнений с неограниченными в окрестности особой точки коэффициентами и стохастических дифференциальных уравнений с нелипшицевимы и вырожденными коэффициентами, возмущенных малым шумом.

Ключевые слова: локальные возмущения процессов Маркова, диффузии с полупрозрачными мембранами, косое броуновское движение, косой процесс Бесселя, граничные условия Вентцеля–Феллера, возмущения малым шумом.

Abstract

Prykhodko Yu.E. Limit behaviour of local perturbations of Markov processes — Manuscript.

PhD Thesis, 01.01.05 «Probability Theory and Mathematical Statistics». — Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, 2018.

The thesis is devoted to the study of functional limit theorems for random processes with perturbations.

Such processes may include, in particular, the sequence of Markov processes, that outside of an arbitrary neighbourhood of a fixed “singular” point behave as a given Markov process. In any neighbourhood of this point, the behavior of the perturbed process can vary significantly.

The proposed general method is used to generalize Donsker’s theorem for local perturbations of a symmetric ± 1 random walk.

For example, let X be a homogeneous Markov chain on $\mathbb{Z}$ with the transition probabilities $p_{i,j}$ wich differ from the transition probabilities of a symmetric ± 1 random walk only for $i \in [-m, m]$, where m is fixed. If the jumps from the “memrane” $[-m, m]$ are integrable, then the sequence of processes $(X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} X([nt]),\ t \geqslant 0)$ weakly converges as $n \to \infty$.

A complete classification of possible limit processes is carried out.

In particular, if the chain X is recurrent, then the limit for $\{X_n(\cdot),\ n \geqslant 1\}$ is a skew Brownian motion.

This result is a generalization of the well-known result of Harrison and Shepp, who considered perturbation at just one point. It should be noted that Harrison and Shepp’s method is based on explicit calculations and is difficult to carry over to a case with many points. The method proposed in this thesis allows us to study the limit behavior of perturbed random walks with membranes of arbitrary complexity.

If the jumps from the membrane are non-integrable, then the limit process may be discontinuous. For example, for the case of random walks with a reflecting barrier at zero, the jumps from which belong to the domain of attraction of the α-stable distribution, we prove weak convergence in the Skorokhod space to a Brownian motion with a reflection at zero and Feller–Wentzell boundary conditions.

The general method developed in this paper is also used to study the limit behavior of sequences of solutions of stochastic differential equations with unbounded coefficients, as well as small noise perturbations of stochastic differential equations with non-Lipschitz and degenerate coefficients.

Keywords: local perturbations of Markov processes, diffusions with membranes, skew Brownian motion, skew Bessel process, Feller–Wentzell boundary conditions, small noise perturbations.