НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ЛОСЬ ВАЛЕРІЙ МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 517.956.4

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ У ПРОСТОРАХ ХЕРМАНДЕРА

01.01.02 — диференціальні рівняння

111 — математика

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ — 2018

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Науковий консультант:

доктор фізико-математичних наук, професор
МИХАЙЛЕЦЬ Володимир Андрійович,
Інститут математики НАН України, м. Київ,
провідний науковий співробітник
відділу нелінійного аналізу.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
ГОРОДЕЦЬКИЙ Василь Васильович,
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці,
завідувач кафедри алгебри та інформатики;

доктор фізико-математичних наук, професор
ЛОПУШАНСЬКА Галина Петрівна,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, м. Львів,
професор кафедри диференціальних рівнянь;

академік НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор
ХРУСЛОВ Євген Якович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
ім. Б. І. Вєркіна НАН України, м. Харків,
завідувач відділу диференціальних рівнянь та геометрії.

Захист дисертації відбудеться "20" лютого 2018 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.206.02 Інституту математики НАН України за адресою: 01004, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий "15" січня 2018 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради,
доктор фізико-математичних наук, професор **ПЕЛЮХ Г. П.**

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Дисертаційна робота присвячена побудові теорії лінійних параболічних початково-крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера.

Актуальність теми. Загальна теорія розв'язності параболічних задач у просторах Соболєва і Гельдера була побудована у відомих роботах І. Г. Петровського, М. С. Аграновича і М. І. Вішика, С. Д. Ейдельмана, О. О. Ладиженської, В. О. Солоннікова і Н. М. Уральцевої, А. Фрідмана, Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса, С. Д. Івасишена, М. В. Житарашу та інших в 60 – 80 рр. минулого століття. У 1963 р. Ларс Хермандер ввів широке і змістовне узагальнення просторів Соболєва і дав застосування введених ним просторів до диференціальних рівнянь з частинними похідними. Ці простори параметризуються функціональним параметром, що дозволяє більш тонко охарактеризувати регулярність функцій/розподілів, ніж це можливо у рамках класичних просторів Соболєва і Гельдера, параметризованих числами.

Втім, довгий час простори Хермандера не знаходили застосувань у теорії крайових задач для диференціальних рівнянь. Це було пов'язано з відсутністю зручного аналітичного апарата для роботи з цими просторами. Окрім того, не був виділений клас просторів Хермандера, які допускають коректне означення на межі області, де розглядається крайова задача. Кілька років тому В. А. Михайлець і О. О. Мурач виділили такий клас гільбертових ізотропних просторів Хермандера — уточнену соболєвську шкалу і на основі методу інтерполяції з функціональним параметром побудували теорію розв'язності загальних еліптичних крайових задач у цих просторах. У цьому зв'язку природно постало питання про побудову теорії параболічних задач у просторах Хермандера. Розробка такої теорії ускладнюється тим, що для параболічних диференціальних рівнянь треба використовувати відповідні анізотропні простори, які утворені функціями, що мають різні властивості за часовою і просторовими змінними.

В останні десятиліття простори Хермандера та їх різні узагальнення усе частіше застосовуються до важливих задач математичного аналізу, теорії диференціальних рівнянь, теорії інтегральних рівнянь, теорії випадкових процесів (див. монографії В. А. Михайлеця і О. О. Мурача (2010, 2014), О. І. Степанця (2002), N. Jacob (2001, 2002, 2005), В. Г. Мазьї, Т. О. Шапошнікової (2009), F. Nicola, L. Rodino (2010), Б. П. Панеяха (2000), H. Triebel (2001)). Серед них є задачі, пов'язані з параболічними диференціальними рівняннями.

Зважаючи на це розробка теорії параболічних початково-крайових задач у класах просторів Хермандера є актуальною і важливою математичною проблемою.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження проводились на кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського" згідно з планами, передбаченими у КПІ ім. Ігоря Сікорського та в рамках держбюджетної теми "№ 2810-Ф, Дослідження асимптотичних властивостей псевдорегулярних функцій та узагальнених процесів відновлення" (номер державної реєстрації 0115U000371).

Метою дослідження дисертаційної роботи є побудова теорії загальних лінійних параболічних початково-крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера.

Об'єктом дослідження є загальні лінійні параболічні початково-крайові задачі та гільбертові анізотропні простори Хермандера, пов'язані з цими задачами.

Предметом дослідження є характер розв'язності лінійних параболічних початково-крайових задач і властивості їх узагальнених розв'язків у відповідних просторах Хермандера, а також інтерполяційні властивості цих просторів.

Завдання дослідження:

1. Виділити клас $2b$-анізотропних гільбертових просторів Хермандера, які можуть бути застосовані у теорії $2b$-параболічних диференціальних рівнянь, і дослідити інтерполяційні властивості цих просторів.

2. Ввести $2b$-анізотропні гільбертові простори Хермандера на гладкому компактному многовиді, який є бічною поверхнею циліндра, і дослідити їх властивості.

3. Встановити теореми про коректну розв'язність у належним чином підібраних просторах Хермандера лінійних параболічних початково-крайових задач як з однорідними, так і з неоднорідними початковими умовами.

4. Встановити теореми про локальну регулярність узагальнених розв'язків параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.

5. Знайти достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних заданого порядку розв'язків досліджуваних задач; зокрема, знайти достатні умови класичності цих розв'язків.

6. Встановити теореми про коректну розв'язність у належним чином підібраних просторах Хермандера лінійних початково-крайових задач для параболічних за Петровським систем і регулярність їх розв'язків.

Методи дослідження. У дисертації використано методи теорії рівнянь з частинними похідними, функціонального аналізу і теорії функцій. Основним у роботі є метод інтерполяції з функціональним параметром лінійних операторів у парах функціональних гільбертових просторів.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати дисертації, запропоновані до захисту, є новими і полягають у такому:

1. Виділено і досліджено клас $2b$-анізотропних гільбертових просторів Хермандера, для яких показником регулярності служить пара дійсних чисел s і $s/(2b)$ та додатний функціональний параметр, повільно змінний на нескінченності за Й. Караматою.

2. Доведено, що ці простори Хермандера отримуються у результаті інтерполяції з функціональним параметром пар відповідних анізотропних гільбертових просторів Соболєва.

3. Введено $2b$-анізотропні гільбертові простори Хермандера на гладкому компактному многовиді, який є бічною поверхнею циліндра, і доведено, що введені простори і топологія у них не залежать від вибору спеціальних локальних карт на цьому многовиді.

4. Встановлено теореми про коректну розв'язність у введених просторах Хермандера лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами, а саме, доведено, що оператори, породжені цими задачами, здійснюють ізоморфізми між відповідними анізотропними просторами Хермандера.

5. Встановлено теореми про локальну регулярність у просторах Хермандера розв'язків лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами.

6. Знайдено достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних заданого порядку розв'язків цих задач.

7. Доведено, що оператори, породжені загальними лінійними неоднорідними параболічними початково-крайовими задачами, здійснюють ізоморфізми на підходящих парах анізотропних просторів Хермандера.

8. Встановлено теореми про локальну регулярність розв'язків загальних лінійних неоднорідних параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.

9. Знайдено достатні умови, за яких узагальнені розв'язки досліджуваних параболічних задач є класичними.

10. Доведено теореми про ізоморфізми у просторах Хермандера, породжені лінійними крайовими задачами для параболічних за Петровським систем з однорідними початковими умовами, і встановлено теореми про локальну регулярність розв'язків цих задач у просторах Хермандера.

Частина результатів дисертації про локальну регулярність розв'язків параболічних задач є новою і для анізотропних просторів Соболєва.

Практичне значення одержаних результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Її результати та методика їх отримання можуть бути використані у теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними та у математичній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Визначення загального плану дослідження належить науковому консультанту — доктору фізико-математичних наук, професору В. А. Михайлецю. Усі результати дисертації отримано її автором самостійно. У спільних роботах [1, 2, 4, 15 – 18, 21] внесок усіх співавторів є рівноцінним.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на:

— Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю Стефана Банаха (Україна, Львів, 18 – 23 вересня 2017 року);

— Міжнародній конференції з диференціальних рівнянь, присвяченій 110-й річниці Я. Б. Лопатинського (Україна, Львів, 20 – 24 вересня 2016 року);

— Сімнадцятій міжнародній науковій конференції ім. академіка Михайла Кравчука (Україна, Київ, 19 – 20 травня, 2016 року);

— Міжнародній математичній конференції ім. В. Я. Скоробогатька (Україна, Дрогобич, 25- 28 серпня 2015 року);

— Міжнародній конференції молодих математиків (Україна, Київ, 3 – 6 червня 2015 року);

— П'ятнадцятій міжнародній науковій конференція ім. академіка Михайла Кравчука (Україна, Київ, 15 – 17 травня 2014 року);

— Кримскій міжнародній математичній конференції (Україна, Судак, 22 вересня – 4 жовтня 2013 року);

— Міжнародній математичній конференції «Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування» з нагоди 75-річчя академіка А. М. Самойленка (Україна, Севастополь, 23 – 30 червня 2013 року);

— Міжнародній конференції, присвяченій 120-річчю Стефана Банаха (Україна, Львів, 17 – 21 вересня 2012 року);

— Чотирнадцятій міжнародній науковій конференції ім. академіка М. Кравчука (Україна, Київ, 19 – 21 квітня 2012 року);

— семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України (керівник семінару — академік НАН України А. М. Самойленко);

— семінарі відділу нелінійного аналізу Інституту математики НАН України (керівник семінару — член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);

— Київському семінарі з функціонального аналізу при Інституті математики НАН України (керівники семінару — академік НАН України Ю. М. Березанський, академік НАН України Ю. С. Самойленко, член-кореспондент НАН України М. Л. Горбачук, член-кореспондент НАН України А. Н. Кочубей);

— семінарі «Диференціальні рівняння. Інтегральні перетворення. Спеціальні функції» кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук, професор Н. О. Вірченко);

— семінарі «Диференціальні рівняння і суміжні питання» кафедри вищої математики Чернігівського національного педагогічного університету імені Т. Г. Шевченка (керівник семінару — доктор фізико-математичних наук О. О. Мурач).

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковано у 31 науковій праці, серед яких 21 наукова стаття [1 – 21] у вітчизняних і закордонних фахових наукових виданнях і 10 тез доповідей на наукових конференціях [22 – 31]. Серед статей 11 робіт [1 – 3, 5 – 8, 11, 12, 18, 19] опубліковано у журналах, які входять до наукометричних баз даних Scopus, Web of Science.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається з анотацій, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків та списку використаних джерел, що налічує 114 найменувань. Повний обсяг роботи складає 301 сторінку друкованого тексту.

Основний зміст дисертації

У *вступі* обґрунтовано актуальність теми дисертації, вказано держбюджетну тему, у рамках якої виконувалось дисертаційне дослідження, зазначено мету і завдання, об'єкт, предмет і методи дослідження, розкрито наукову новизну отриманих результатів, вказано теоретичне і практичне значення одержаних результатів і особистий внесок здобувача у них, наведено дані про апробацію результатів дисертації і їх публікації.

У *першому* розділі дисертації наведено огляд літератури за її темою та охарактеризовано основні результати роботи. Їх детально викладено у другому, третьому і четвертому розділах.

У *другому* розділі дисертації виділено і досліджено широкий клас $2b$-анізотропних гільбертових просторів Хермандера $H^{s,s/(2b);\varphi}$, які параметризуються двома числовими параметрами s, $s/(2b)$ і функціональним параметром φ, повільно змінним на нескінченності за Караматою. Ці простори відіграють головну роль у дисертації. Вивчено інтерполяційні властивості просторів $H^{s,s/(2b);\varphi}$, заданих на обмеженому багатовимірному циліндрі, стосовно анізотропних просторів Соболєва. Введено $2b$-анізотропні простори Хермандера на бічній поверхні циліндра, обґрунтовано коректність їх означення і вивчено їх властивості. Усі функціональні простори, використані у дисертації, припускаються комплексними.

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Припустимо, що вимірна за Борелем функція $\mu : \mathbb{R}^k \to (0,\infty)$ є ваговою у такому сенсі:

$$(\exists\, c, \ell > 0)\, (\forall\, \xi, \zeta \in \mathbb{R}^k) : \; \frac{\mu(\xi)}{\mu(\zeta)} \leq c\, (1 + |\xi - \zeta|)^{\ell}.$$

За означенням, простір Хермандера $H^{\mu}(\mathbb{R}^k) := B_{2,\mu}$ складається з усіх повільно зростаючих розподілів w на $\mathbb{R}^k$ таких, що їх перетворення Фур'є $\mathcal{F}w$ є вимірною за Лебегом функцією, яка задовольняє властивість $\mu\,\mathcal{F}w \in L_2(\mathbb{R}^k)$. У просторі $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ введена норма

$$\|\, w \,\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} := \|\, \mu\, \mathcal{F}w \,\|_{L_2(\mathbb{R}^k)}.$$

Для довільної області $V \subset \mathbb{R}^k$ простір Хермандера $H^{\mu}(V)$ і норма у ньому означаються за формулами

$$H^{\mu}(V) := \bigl\{ u = w \restriction V : \, w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k) \bigr\},$$
$$\|u\|_{H^{\mu}(V)} := \inf \bigl\{ \|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^k)} : \, w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^k), \; u = w \restriction V \bigr\}.$$

Ці простори гільбертові і сепарабельні. Їх було введено і досліджено Л. Хермандером (1963), а також Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом (1965). У важливому випадку, коли $\mu(\xi) = (1+|\xi|^2)^{s/2}$ для деякого $s \in \mathbb{R}$ і усіх $\xi \in \mathbb{R}^k$, простори $H^{\mu}(\mathbb{R}^k)$ і $H^{\mu}(V)$ стають відповідно гільбертовими просторами Соболєва $H^{s}(\mathbb{R}^k)$ і $H^{s}(V)$ порядку s.

В. А. Михайлець і О. О. Мурач (2005 – 2010) побудували теорію розв'язності загальних еліптичних крайових задач у просторах Хермандера $H^{s;\varphi}(V) := H^{\mu}(V)$ з показником регулярності вигляду

$$\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2} \varphi((1 + |\xi|^2)^{1/2}),$$

де число s дійсне, а функціональний параметр φ пробігає клас $\mathcal{M}$. За означенням, клас $\mathcal{M}$ складається з усіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ таких, що

(i) функції φ і $1/\varphi$ обмежені на кожному відрізку $[1, a]$, де $1 < a < \infty$;

(ii) функція φ повільно змінюється на $+\infty$ за Й. Карамата, тобто

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{\varphi(\lambda\, r)}{\varphi(r)} = 1 \quad \text{для кожного} \quad \lambda > 0.$$

Еталонним прикладом функції $\varphi \in \mathcal{M}$ служить неперервна функція $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ така, що

$$\varphi(r) = (\ln r)^{q_1} \, (\ln \ln r)^{q_2} \dots (\underbrace{\ln \dots \ln}_{k \text{ разів}} r)^{q_k} \quad \text{при} \quad r \gg 1,$$

де параметри $k \in \mathbb{N}$ і $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{R}$ вибрано довільним чином.

В. А. Михайлець і О. О. Мурач показали, що кожний простір $H^{s;\varphi}(V)$, де $V = \mathbb{R}^k$ або V — обмежена евклідова область з ліпшицевою межею, отримується методом інтерполяції з підходящим функціональним параметром пари гільбертових просторів Соболєва $H^{s_0}(V)$ і $H^{s_1}(V)$, де $s_0 < s < s_1$, і допускає коректне означення на многовидах. Цей метод грає ключову роль у вказаній теорії.

У теорії параболічних початково-крайових задач потрібні $2b$-анізотропні версії просторів $H^{s;\varphi}(V)$ для циліндру і його бічної поверхні, на яких задані $2b$-параболічне диференціальне рівняння і крайові умови відповідно.

Нехай задано ціле число $n \geq 2$, дійсне число $\tau > 0$ і обмежену область $G \subset \mathbb{R}^n$ з нескінченно гладкою межею Γ. Тоді $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий обмежений циліндр в $\mathbb{R}^{n+1}$, а $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Нехай довільно задано дійсні числові параметри $s > 0$, $b > 0$ і функціональний параметр $\varphi \in \mathcal{M}$. Позначимо через $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ гільбертів простір Хермандера $H^{\mu}(\Omega)$ з показником

$$\mu(\xi, \eta) = \bigl(1 + |\xi|^2 + |\eta|^{1/b}\bigr)^{s/2} \varphi\bigl((1 + |\xi|^2 + |\eta|^{1/b})^{1/2}\bigr) \tag{1}$$

аргументів $\xi \in \mathbb{R}^n$ і $\eta \in \mathbb{R}$.

Якщо $\varphi(\cdot) \equiv 1$, то простір $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ стає $2b$-анізотропним простором Соболєва $H^{s,s/(2b)}(\Omega)$ порядку $(s, s/(2b))$. У загальній ситуації, коли $\varphi \in \mathcal{M}$, виконуються неперервні та щільні вкладення

$$H^{s_1,s_1/(2b)}(\Omega) \hookrightarrow H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_0,s_0/(2b)}(\Omega) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1.$$

З них випливає, що функціональний параметр φ уточнює основну (степеневу) регулярність $(s, s/(2b))$. Простір $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ природно називати $2b$-анізотропним простором Хермандера. Звісно, якщо $b = 1/2$, то $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ є ізотропним простором $H^{s;\varphi}(\Omega)$; втім, у теорії параболічних рівнянь b — натуральне число.

Кожний простір $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ має важливу інтерполяційну властивість: він отримується методом інтерполяції з функціональним параметром пари гільбертових анізотропних просторів Соболєва $H^{s_0,s_0/(2b)}(\Omega)$ і $H^{s_1,s_1/(2b)}(\Omega)$, де $0 \leq s_0 < s < s_1$. З огляду на це нагадаємо означення цього методу. Будемо наслідувати, в основному, монографії В. А. Михайлеця і О. О. Мурача "Hoŕmander spaces, interpolation, and elliptic problems", Berlin: De Gruyter, 2014 (п. 1.1).

Нехай задано упорядковану пару комплексних сепарабельних гільбертових просторів $X := [X_0, X_1]$ таку, що $X_1 \subseteq X_0$, причому вкладення є неперервним і щільним. Цю пару називають припустимою. У гільбертовому просторі X_0 існує самоспряжений додатно визначений (взагалі, необмежений) оператор J, заданий на X_1 і такий, що $\|Jw\|_{X_0} = \|w\|_{X_1}$ для кожного $w \in X_1$. Оператор J однозначно визначається за парою X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, обмежених на кожному відрізку $[a, b]$ і відокремлених від нуля на кожній півосі $[r, \infty)$, де $0 < a < b < \infty$ і $r > 0$. Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. За допомогою спектральної теореми для необмежених самоспряжених операторів означений оператор $\psi(J)$ у просторі X_0 як борелівська функція ψ від оператора J. Позначимо через $[X_0, X_1]_\psi$ або, коротко, через X_ψ область визначення оператора $\psi(J)$, наділену нормою $\|w\|_{X_\psi} := \|\psi(J)w\|_{X_0}$. Простір X_ψ гільбертів відносно цієї норми.

Функція $\psi \in \mathcal{B}$ називається інтерполяційним параметром, якщо для будь-яких припустимих пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для довільного лінійного відображення T, заданого на X_0, виконується така властивість. Якщо для кожного індексу $j \in \{0, 1\}$ звуження відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. Тоді говоримо, що простір X_ψ і оператор $T : X_\psi \to Y_\psi$ отримуються методом інтерполяції з функціональним параметром ψ пари X і операторів $T : X_j \to Y_j$, $j \in \{0, 1\}$, відповідно.

З результатів Ж. Петре (1966, 1968) випливає, що функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром тоді і тільки тоді, коли $\psi(r) \asymp \psi_1(r)$ при $r \gg 1$, де ψ_1 — деяка додатна угнута функція.

Теорема 1.(2.6) *Нехай $s, s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, $0 \leq s_0 < s < s_1$ та $\varphi \in \mathcal{M}$. Означимо інтерполяційний параметр $\psi \in \mathcal{B}$ за формулою*

$$\psi(r) := \begin{cases} r^{(s-s_0)/(s_1-s_0)}\, \varphi(r^{1/(s_1-s_0)}) & \text{для} \quad r \geq 1, \\ \varphi(1) & \text{для} \quad 0 < r < 1. \end{cases}$$

Тоді виконується рівність просторів

$$H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) = \left[H^{s_0,s_0/(2b)}(\Omega), H^{s_1,s_1/(2b)}(\Omega)\right]_\psi$$

разом з еквівалентністю норм у них.

Відповідні $2b$-анізотропні простори Хермандера на бічній поверхні $S = \Gamma \times (0,\tau)$ циліндра Ω вводяться за допомогою спеціальних локальних координат на S:

$$\theta_j^* : \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau) \leftrightarrow \Gamma_j \times (0,\tau), \quad j = 1,\ldots,\lambda.$$

Тут $\theta_j^*(x,t) := (\theta_j(x),t)$ для всіх $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0,\tau)$, а $\theta_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow \Gamma_j$, $j = 1,\ldots,\lambda$, є скінченний C^∞-атлас на Γ, де відкриті множини $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\lambda$ утворюють покриття Γ. Окрім того, функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, $j = 1,\ldots,\lambda$, такі, що $\operatorname{supp}\chi_j \subset \Gamma_j$ і $\chi_1 + \ldots + \chi_\lambda = 1$ на Γ.

За означенням, простір Хермандера $H^{s,s/(2b);\varphi}(S)$ складається з усіх функцій $v \in L_2(S)$ таких, що для кожного $j \in \{1,\ldots,\lambda\}$ функція $v_j(x,t) := \chi_j(\theta_j(x))\, v(\theta_j(x),t)$ аргументів $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $t \in (0,\tau)$ належить до простору Хермандера $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Pi) := H^\mu(\Pi)$, де $\Pi := \mathbb{R}^{n-1} \times (0,\tau)$, а функціональний параметр μ задається формулою (1), де $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $\eta \in \mathbb{R}$. Простір $H^{s,s/(2b);\varphi}(S)$ наділений нормою

$$\|v\|_{H^{s,s/(2b);\varphi}(S)} := \bigl(\, \|v_1\|^2_{H^{s,s/(2b);\varphi}(\Pi)} + \ldots + \|v_\lambda\|^2_{H^{s,s/(2b);\varphi}(\Pi)}\bigr)^{1/2}.$$

У випадку, коли $\varphi(\cdot) \equiv 1$ цей простір є $2b$-анізотропним простором Соболєва $H^{s,s/(2b)}(S)$.

Теорема 2.(2.1) *Нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Простір $H^{s,s/(2b);\varphi}(S)$ є гільбертовим і не залежить (з точністю до еквівалентності норм) від зазначеного вибору атласу і розбиття одиниці на* Γ.

Для $2b$-анізотропних просторів Хермандера на S правильна така версія інтерполяційної теореми 1.

Теорема 3.(2.6) *Нехай параметри s, s_0, s_1, φ і ψ такі як у теоремі* 1. *Тоді виконується рівність просторів*

$$H^{s,s/(2b);\varphi}(S) = \bigl[H^{s_0,s_0/(2b)}(S), H^{s_1,s_1/(2b)}(S)\bigr]_\psi$$

разом з еквівалентністю норм у них.

Для дослідження параболічних крайових задач з однорідними початковим умовами потрібні $2b$-анізотропні простори Хермандера на Ω і S, елементи яких після продовження нулем при $t < 0$ зберігають свою регулярність. Ці простори позначаємо через $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(\Omega)$ і $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(S)$

відповідно. За означенням,

$$
\begin{aligned}
H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(\Omega) &:= \bigl\{u = w\restriction\Omega :\ w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^{n+1}),\ \ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{n}\times[0,\infty)\bigr\},\\
\|u\|_{H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(\Omega)} &:= \inf\bigl\{\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^{n+1})} :\ w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^{n+1}),\\
&\qquad \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{n}\times[0,\infty),\ \ u = w\restriction\Omega\bigr\},
\end{aligned}
$$

де функціональний параметр μ заданий за формулою (1). Простір $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(S)$ і норма у ньому означаються аналогічно простору $H^{s,s/(2b);\varphi}(S)$ з єдиною відмінністю, що замість простору $H^{s,s/(2b);\varphi}(\Pi)$ використовується гільбертів простір $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(\Pi)$. Він подібно до простору $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(\Omega)$ означається за формулами

$$
\begin{aligned}
H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(\Pi) &:= \bigl\{u = w\restriction\Pi :\ w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^{n}),\ \ \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty)\bigr\},\\
\|u\|_{H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(\Pi)} &:= \inf\bigl\{\|w\|_{H^{\mu}(\mathbb{R}^{n})} :\ w \in H^{\mu}(\mathbb{R}^{n}),\\
&\qquad \operatorname{supp} w \subseteq \mathbb{R}^{n-1}\times[0,\infty),\ \ u = w\restriction\Omega\bigr\},
\end{aligned}
$$

де функціональний параметр μ задається рівністю (1), у якій $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ і $\eta \in \mathbb{R}$.

Простори $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(\Omega)$ і $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(S)$ гільбертові і сепарабельні. Для них правильні аналоги теорем 1, 2 і 3.

У соболєвському випадку, коли $\varphi(\cdot) \equiv 1$ будемо прибирати індекс φ у позначеннях введених просторів.

У *третьому* розділі дисертації досліджено характер розв'язності і властивості розв'язків напіводнорідних параболічних початково-крайових задач у $2b$-анізотропних просторах Хермандера. Ці задачі задані у обмеженому циліндрі $\Omega = G \times (0,\tau)$ і характеризуються однорідністю початкових умов — даних Коші.

Нехай натуральні числа b і m такі, що $m/b \in \mathbb{Z}$. У дисертації досліджується лінійна початково-крайова задача в Ω, яка складається з $2b$-параболічного диференціального рівняння порядку $2m$

$$
\begin{aligned}
Au(x,t) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\le 2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\, D^{\alpha}_{x}\partial^{\beta}_{t}u(x,t) = f(x,t)\\
\text{для всіх}\quad x\in G \quad \text{і} \quad t\in(0,\tau),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

m крайових умов

$$B_j u(x,t)\big|_S \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta\le m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\, D_x^\alpha \partial_t^\beta u(x,t)\big|_S = g_j(x,t)$$
$$\text{для всіх} \quad x\in\Gamma, \quad t\in(0,\tau) \quad \text{і} \quad j\in\{1,\dots,m\}; \tag{3}$$

і m/b початкових даних Коші

$$\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0} = h_k(x) \quad \text{для всіх} \quad x\in G \quad \text{і} \quad k\in\{0,\dots,m/b-1\}. \tag{4}$$

У крайових умовах кожне m_j — довільне ціле невід'ємне число. Використовуємо стандартні позначення: $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ —мультиіндекс з цілими невід'ємними координатами, $|\alpha|:=\alpha_1+\dots+\alpha_n$, $D_x^\alpha := D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$, де $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $D_k := i\,\partial/\partial x_k$, $\partial_t := \partial/\partial t$. Усі коефіцієнти $a^{\alpha,\beta}$ і $b_j^{\alpha,\beta}$ є комплекснозначними нескінченно диференційовними функціями на $\overline{\Omega}=\overline{G}\times[0,\tau]$ і $\overline{S}=\Gamma\times[0,\tau]$ відповідно.

Припускаємо, що початково-крайова задача (2) – (4) є *параболічною* у циліндрі Ω, тобто вона задовольняє такі дві умови:

1) Для довільних $x\in\overline{G}$, $t\in[0,\tau]$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ і $p\in\mathbb{C}$, де $\mathrm{Re}\,p\ge 0$, виконується нерівність

$$A^\circ(x,t,\xi,p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=2m} a^{\alpha,\beta}(x,t)\,\xi^\alpha p^\beta \ne 0 \quad \text{при} \quad |\xi|+|p|\ne 0.$$

2) При кожному виборі $x\in\Gamma$, $t\in[0,\tau]$, дотичного вектора $\xi\in\mathbb{R}^n$ до Γ у точці x та $p\in\mathbb{C}$, де $\mathrm{Re}\,p\ge 0$, такого, що $|\xi|+|p|\ne 0$, многочлени

$$B_j^\circ(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p) \equiv \sum_{|\alpha|+2b\beta=m_j} b_j^{\alpha,\beta}(x,t)\,(\xi+\zeta\nu(x))^\alpha\, p^\beta,$$

де $j=1,\dots,m$, змінної $\zeta\in\mathbb{C}$ лінійно незалежні за модулем многочлена $\prod_{j=1}^m(\zeta-\zeta_j^+(x,t,\xi,p))$. Тут $\nu(x)$ — орт внутрішньої нормалі до Γ у точці x, а $\zeta_j^+(x,t,\xi,p)$ — корені з додатною уявною частиною многочлена $A^\circ(x,t,\xi+\zeta\nu(x),p)$ змінної $\zeta\in\mathbb{C}$.

У третьому розділі досліджується параболічна початково-крайова задача (2) – (4) у важливому випадку однорідних початкових умов (4), тобто, коли усі $h_k(x)=0$ на G. З такою задачею пов'язуємо лінійне відображення

$$\Lambda_+ : u\mapsto (Au, B_1u,\dots,B_mu), \;\text{ задане на функціях }\; u\in C^\infty(\overline{\Omega})$$
$$\text{таких, що }\; \partial_t^k u(x,0)=0 \;\text{ для всіх }\; x\in\overline{G}, \;\; k\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{5}$$

Нехай σ_0 є найменше ціле число, таке, що

$$\sigma_0 \geq 2m, \quad \sigma_0 \geq m_j + 1 \text{ для кожного } j \in \{1, \ldots, m\} \quad \text{і} \quad \frac{\sigma_0}{2b} \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 4.(3.1) *Для довільних $s > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення* (5) *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму*

$$\Lambda_+ : H_+^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow H_+^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} H_+^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(S).$$

Теорема 4 виводиться із її аналогу для соболєвського випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ за допомогою інтерполяції з функціональним параметром. У соболєвському випадку, коли $s \geq \sigma_0$ таке, що $s/(2b)$ – ціле, ця теорема є наслідком результату М. С. Аграновича і М. І. Вішика (1964). З їх результату випливає, що для будь-яких функцій

$$f \in H_+^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b)}(\Omega), \tag{6}$$
$$g_j \in H_+^{\sigma_0-m_j-1/2,(\sigma_0-m_j-1/2)/(2b)}(S), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

існує єдиний розв'язок $u \in H_+^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ рівняння

$$\Lambda_+ u = (f, g_1, \ldots, g_m).$$

Функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком напіводнорідної задачі (2) – (4) з правими частинами (6), (7).

Розглянемо питання про локальну регулярність аж до межі області Ω узагальненого розв'язку u цієї задачі. Нехай U — відкрита множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ така, що $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$. Покладемо $\pi_1 := U \cap \partial\Omega$ і $\pi_2 := U \cap S$. Введемо локальні версії просторів Хермандера, використаних у теоремі 4.

Нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s/(2b);\varphi}(\omega, \pi_1)$ простір усіх розподілів u в Ω таких, що $\chi u \in H_+^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Аналогічно, позначимо через $H_{+,\mathrm{loc}}^{s,s/(2b);\varphi}(\pi_2)$ простір усіх розподілів h на S таких, що $\chi h \in H_+^{s,s/(2b);\varphi}(S)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{S})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_2$.

Теорема 5.(3.2) *Припустимо, що функція* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком досліджуваної напіводнорідної параболічної задачі, праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}_{+,\,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1), \tag{8}$$

$$g_j \in H^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b);\varphi}_{+,\,\mathrm{loc}}(\pi_2), \quad j=1,\dots,m, \tag{9}$$

для деяких $s>\sigma_0$ *та* $\varphi \in \mathcal{M}$. *Тоді* $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}_{+,\,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$.

Теорема 5 стверджує, що локальна регулярність правих частин досліджуваної задачі тягне за собою відповідну локальну регулярність узагальненого розв'язку цієї задачі. При цьому уточнена регулярність φ успадковується розв'язком. Якщо $\omega=\Omega$ і $\pi_1=\partial\Omega$ (тоді $\pi_2=S$), то простори $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$ і $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+,\mathrm{loc}}(\pi_2)$ стають просторами $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(\Omega)$ і $H^{s,s/(2b);\varphi}_{+}(S)$ відповідно. У цьому випадку теорема 5 стверджує, що регулярність розв'язку u підвищується глобально в усьому циліндрі Ω аж до його межі.

Теорема 5 є новою і у соболєвському випадку, коли $\varphi(\cdot)\equiv 1$.

Дамо застосування просторів Хермандера до питання про умови неперервності узагальнених частинних похідних розв'язку u.

Теорема 6.(3.3) *Нехай ціле число* $p\geq 0$ *таке, що* $p+b+n/2>\sigma_0$. *Припустимо, що функція* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком досліджуваної напіводнорідної параболічної задачі, праві частини якої задовольняють умови* (8) *і* (9) *для* $\sigma := p+b+n/2$ *і деякого* $\varphi \in \mathcal{M}$ *такого, що*

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{r\varphi^2(r)} < \infty. \tag{10}$$

Тоді

$$D^\alpha_x \partial^\beta_t u(x,t) \in C(\omega \cup \pi_1) \quad \text{при} \quad |\alpha|+2b\beta \leq p. \tag{11}$$

Навпаки, якщо для кожного узагальненого розв'язку $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}_{+}(\Omega)$ *досліджуваної задачі, праві частини якої задовольняють умови* (8) *і* (9) *для* $\sigma := p+b+n/2$ *і деякого* $\varphi \in \mathcal{M}$, *виконується умова* (11), *то* φ *задовольняє* (10).

Останнє речення теореми 6 говорить про те, що умова (10) є точною у цій теоремі. Якщо сформулювати версію теореми 6 для анізотропних просторів Соболєва (випадок $\varphi(\cdot)\equiv 1$), то доведеться замість умов $\sigma = p+b+n/2$ і (10) використати більш сильну умову $\sigma > p+b+n/2$.

Версії теорем 4, 5 і 6 встановлено також для лінійних крайових задач для параболічних за Петровським систем з однорідними початковими умовами.

У *четвертому* розділі дисертації досліджено загальні неоднорідні параболічні початково-крайові задачі у просторах Хермандера. Розглядається неоднорідна параболічна початково-крайова задача (2) – (4). З цією задачею пов'язано лінійне відображення

$$\begin{gathered}\Lambda : u \mapsto \bigl(Au, B_1u, \ldots, B_mu, u|_{t=0}, \ldots, (\partial_t^{m/b-1}u)|_{t=0}\bigr),\\ \text{задане на функціях} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}).\end{gathered} \tag{12}$$

Покладемо

$$\sigma_0 := \max\{2m, m_1 + 1, \ldots, m_m + 1\}.$$

Нехай $s > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ (розглядається також випадок $s = \sigma_0$ і $\varphi(\cdot) \equiv 1$). Відображення (12) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора

$$\begin{gathered}\Lambda :\ H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \ \to\ H^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}(\Omega)\oplus\\ \oplus\bigoplus_{j=1}^{m} H^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b);\varphi}(S) \oplus \bigoplus_{k=0}^{m/b-1} H^{s-2bk-b;\varphi}(G).\end{gathered} \tag{13}$$

Позначимо через $\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ гільбертів простір, у який діє цей оператор.

Для довільної функції $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ покладемо

$$(f, g_1, ..., g_m, h_0, ..., h_{m/b-1}) := \Lambda u \in \mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$$

і позначимо

$$F := (f, g_1, ..., g_m, h_0, ..., h_{m/b-1}).$$

Вектор-функція F задовольняє природні умови узгодження правих частин параболічної задачі. Ці умови полягають у тому, що похідні $\partial_t^k u(x,t)\big|_{t=0}$, які можна обчислити з параболічного рівняння (2) та початкових умов (4), повинні задовольняти при $x \in \Gamma$ крайові умови (3) та співвідношення, що утворюються в результаті диференціювання цих крайових умов за часовою змінною t.

Для $s \notin \{\sigma_0 + k - 1/2 \ :\ k \in \mathbb{N}\}$ позначимо через $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ підпростір гільбертового простору $\mathcal{H}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$, утворений усіма вектор-функціями F, які задовольняють ці умови узгодження.

Якщо $s \in \{\sigma_0 + k - 1/2 \;:\; k \in \mathbb{N}\}$, то означаємо гільбертів простір $\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$ за допомогою інтерполяції

$$\mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi} :=$$
$$:= \bigl[\mathcal{Q}^{s-2m-\varepsilon,(s-2m-\varepsilon)/(2b);\varphi}, \mathcal{Q}^{s-2m+\varepsilon,(s-2m+\varepsilon)/(2b);\varphi}\bigr]_{r^{1/2}}.$$

Тут число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ вибрано довільно, а права частина рівності є результатом інтерполяції зі степеневим параметром $\psi(r) \equiv r^{1/2}$ пари гільбертових просторів. Означений у такий спосіб простір не залежить з точністю до еквівалентності норм від вибору числа ε.

Теорема 7.(4.1) *Для довільних* $s > \sigma_0$ *і* $\varphi \in \mathcal{M}$ *оператор* Λ *встановлює ізоморфізм*

$$\Lambda :\, H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}.$$

Теорема 7 виводиться із її аналогу для соболєвського випадку $\varphi(\cdot) \equiv 1$ за допомогою інтерполяції з функціональним параметром. У соболєвському випадку ця теорема встановлена М. С. Аграновичем і М. І. Вішиком (1964) для $s \geq \sigma_0$ таких, що $s/(2b)$ – ціле, та М. В. Житарашу (1985) для дійсних $s \geq \sigma_0$. З їх результатів випливає, що для будь-якої вектор-функції

$$F \in \mathcal{Q}^{\sigma_0-2m,(\sigma_0-2m)/(2b);1}$$

існує єдиний розв'язок $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ рівняння $\Lambda u = F$. Функцію u називаємо (сильним) узагальненим розв'язком задачі (2) – (4) з правими частинами — компонентами вектор-функції F.

З теореми 7 випливає така властивість цього розв'язку: якщо

$$F \in \mathcal{Q}^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}$$

для деяких $s > \sigma_0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$, то $u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$. Ця властивість стосується глобальної регулярності узагальненого розв'язку u в циліндрі Ω аж до його межі.

Перейдемо до питання про локальну регулярність аж до межі області Ω узагальненого розв'язку u. Нехай, U — відкрита множина в $\mathbb{R}^{n+1}$ така, що $\omega := U \cap \Omega \neq \varnothing$ і $U \cap \Gamma = \varnothing$. Покладемо $\pi_1 := U \cap \partial\Omega$, $\pi_2 := U \cap S$ і $\pi_3 := U \cap G$. Введемо локальні версії просторів Хермандера, використаних у формулі (13).

Нехай $s > 0$ і $\varphi \in \mathcal{M}$. Позначимо через $H^{s,s/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega, \pi_1)$ простір усіх розподілів u в Ω таких, що $\chi u \in H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset \omega \cup \pi_1$. Аналогічно, позначимо через $H^{s,s/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2)$ простір усіх розподілів h на S таких, що $\chi h \in H^{s,s/(2b);\varphi}(S)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{S})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_2$. Окрім того, позначимо через $H^{s;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3)$ простір усіх розподілів h в області $G \subset \mathbb{R}^n$ таких, що $\chi h \in H^{s;\varphi}(G)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{G})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi \subset \pi_3$.

Теорема 8.(4.2) *Припустимо, що функція* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (2) – (4)*, праві частини якої задовольняють умови*

$$f \in H^{s-2m,(s-2m)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1), \tag{14}$$

$$g_j \in H^{s-m_j-1/2,(s-m_j-1/2)/(2b);\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_2), \quad j=1,\ldots,m, \tag{15}$$

$$h_k \in H^{s-2bk-b;\varphi}_{\mathrm{loc}}(\pi_3), \quad k=0,\ldots,m/b-1, \tag{16}$$

для деяких $s > \sigma_0$ *та* $\varphi \in \mathcal{M}$*. Тоді* $u \in H^{s,s/(2b),\varphi}_{\mathrm{loc}}(\omega,\pi_1)$*.*

Теорема 8 є новою і у соболєвському випадку, коли $\varphi(\cdot) \equiv 1$.

Розглянемо застосування просторів Хермандера до питання про умови класичності узагальненого розв'язку u. Нехай $m_0 := \max\{m_1,\ldots,m_m\}$.

Природно дати наступне означення: узагальнений розв'язок $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ досліджуваної параболічної задачі називаємо *класичним*, якщо $u \in C^{2m,2m/(2b)}_{x,t}(\Omega)$, усі узагальнені частинні похідні $D^\alpha_x \partial^\beta_t u$, для яких $0 \le |\alpha| + 2b\beta \le m_0$, є неперервними на $\Omega \cup S$, а всі узагальнені частинні похідні $\partial^k_t u$, для яких $0 \le k \le m/b-1$, є неперервними на $\Omega \cup G$. Якщо u — класичний розв'язок цієї задачі, то її ліві частини обчислюються за допомогою неперервних класичних похідних.

Теорема 9.(4.3) *Нехай*

$$\sigma_1 := 2m + b + n/2, \quad \sigma_2 := m_0 + b + n/2, \quad \sigma_3 := 2m - b + n/2 \tag{17}$$

та $\sigma_2 > \sigma_0$ *і* $\sigma_3 > \sigma_0$*. Припустимо, що функція* $u \in H^{\sigma_0,\sigma_0/(2b)}(\Omega)$ *є узагальненим розв'язком параболічної задачі* (2) – (4)*, праві частини якої задовольняють умови*

$$\begin{gathered} f \in H^{\sigma_1-2m,(\sigma_1-2m)/(2b);\varphi_1}_{\mathrm{loc}}(\Omega,\varnothing) \cap \\ \cap H^{\sigma_2-2m,(\sigma_2-2m)/(2b);\varphi_2}_{\mathrm{loc}}(\Omega,S) \cap H^{\sigma_3-2m,(\sigma_3-2m)/(2b);\varphi_3}_{\mathrm{loc}}(\Omega,G), \\ g_j \in H^{\sigma_2-m_j-1/2,(\sigma_2-m_j-1/2)/(2b);\varphi_2}_{\mathrm{loc}}(S), \quad j=1,\ldots,m, \\ h_k \in H^{\sigma_3-2bk-b;\varphi_3}_{\mathrm{loc}}(G), \quad k=0,\ldots,m/b-1, \end{gathered}$$

для деяких функціональних параметрів $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{M}$ таких, що

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r\varphi_j^2(r)} < \infty \quad \textit{для кожного} \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{18}$$

Тоді u є класичним розв'язком цієї задачі.

Умова (18) у теоремі 9 є точною. Якщо сформулювати версію цієї теореми для анізотропних просторів Соболєва (випадок $\varphi(\cdot) \equiv 1$), то доведеться замість умов (17) і (18) використати більш сильні умови

$$\sigma_1 > 2m + b + n/2, \quad \sigma_2 > m_0 + b + n/2 \quad \text{і} \quad \sigma_3 > 2m - b + n/2.$$

Наведемо застосування теореми 9 на наступному прикладі. Розглянемо в циліндрі $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ початково-крайову задачу для параболічного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\partial_t u = \sum_{|\alpha|\leq 2} a_\alpha \, D_x^\alpha u + f, \qquad u\big|_S = 0, \qquad u\big|_{t=0} = 0. \tag{19}$$

Хермандер показав, що існує функція $f \in C(\overline{\Omega})$ з $\operatorname{supp} f \subset \Omega$, така, що задача (19) має узагальнений розв'язок $u \in C^1(\Omega) \setminus C^{2,1}_{x,t}(\Omega)$ з $\operatorname{supp} u \subset \Omega$. Отже, "гарні" праві частини $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \equiv 0$ і $h \equiv 0$ не гарантують класичність розв'язку.

З класичної теорії параболічних задач слідує, що достатньою умовою класичності розв'язку задачі (19) буде належність функції f простору Гельдера $C^\alpha(\overline{\Omega})$ з деяким $\alpha > 0$.

Теорема 9 доповнює класичні результати. А саме, існують функції $f \notin C(\overline{\Omega})$, які задовольняють умови теореми 9.

У четвертому розділі також досліджено важливі класи параболічних задач математичної фізики, для яких конкретизовано і уточнено теореми 7, 8 і 9.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати.

1. Виділено і досліджено клас $2b$-анізотропних гільбертових просторів Хермандера, для яких показником регулярності служить пара дійсних чисел s і $s/(2b)$ та додатний функціональний параметр, повільно змінний на нескінченності за Й. Караматою.

2. Доведено, що ці простори Хермандера отримуються у результаті інтерполяції з функціональним параметром пар відповідних анізотропних гільбертових просторів Соболєва.

3. Введено $2b$-анізотропні гільбертові простори Хермандера на гладкому компактному многовиді, який є бічною поверхнею циліндра, і доведено, що введені простори і топологія у них не залежать від вибору спеціальних локальних карт на цьому многовиді.

4. Встановлено теореми про коректну розв'язність у просторах Хермандера лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами, а саме, доведено, що оператори, породжені цими задачами, здійснюють ізоморфізми між відповідними анізотропними просторами Хермандера.

5. Встановлено теореми про локальну регулярність у просторах Хермандера розв'язків лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами.

6. Знайдено достатні умови неперервності узагальнених частинних похідних заданого порядку розв'язків лінійних параболічних крайових задач з однорідними початковими умовами.

7. Доведено, що оператори, породжені загальними неоднорідними лінійними параболічними початково-крайовими задачами, здійснюють ізоморфізми на підходящих парах анізотропних просторів Хермандера.

8. Встановлено теореми про локальну регулярність розв'язків загальних лінійних неоднорідних параболічних початково-крайових задач у просторах Хермандера.

9. Знайдено достатні умови, за яких узагальнені розв'язки загальних лінійних неоднорідних параболічних початково-крайових задач є класичними.

10. Доведено теореми про ізоморфізми у просторах Хермандера, породжені крайовими задачами для параболічних за Петровським систем з однорідними початковими умовами, і встановлено теореми про локальну регулярність розв'язків цих задач у просторах Хермандера.

Основні положення дисертації відображено у таких публікаціях автора:

1. Los V.M. An isomorphism theorem for parabolic problems in Hörmander spaces and its applications / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // Communications on Pure and Applied Analysis. — 2017. — **16**, no. 1. — P. 69 – 97.

2. Los V. M. Isomorphism theorems for some parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces / V. M. Los, A. A. Murach // Open Mathematics. — 2017. — **15** — P. 57 – 76.

3. Los V. M. Initial-boundary value problems for two-dimensional parabolic equations in Hörmander spaces / V. M. Los // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2017. — **23**, no. 2. — P. 177 – 191.

4. Лось В. М. Регулярність розв'язків загальних параболічних задач у просторах Хермандера / В. М. Лось, В. А. Михайлець, О. О. Мурач // Доповіді НАН України. — 2017. — № 8. — С. 3 – 10.

5. Los V. M. Systems Parabolic in Petrovskii's Sense in Hörmander Spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **69**, no. 3. — P. 426 – 443.

6. Los V. M. Sufficient conditions for the solutions of general parabolic initial-boundary-value problems to be classical / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **68**, no. 11. — P. 1756 – 1766.

7. Los V. M. Classical solutions of parabolic initial-boundary-value problems and Hörmander spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2017. — **68**, no. 9. — P. 1412 – 1423.

8. Los V. M. Theorems on isomorphisms for some parabolic initial-boundary-value problems in Hörmander spaces: limiting case / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2016. — **68**, no. 6. – P. 894 – 909.

9. Лось В. М. Про достатні умови класичності узагальнених розв'язків деяких мішаних параболічних задач / В. М. Лось // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 1. — С. 228 – 243.

10. Лось В. М. Умови класичності розв'язків другої крайової задачі для параболічних рівнянь / В. М. Лось // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2016. — **13**, № 2. — С. 175 – 192.

11. Los V. M. Anisotropic Hörmander spaces on the lateral surface of a cylinder / V. M. Los // Journal of Mathematical Sciences (New York). — 2016. — **217**, no. 4. — P. 456 – 467.

12. Los V. M. Mixed problems for the two-dimensional heat-conduction equation in anisotropic Hörmander spaces / V. M. Los // Ukrainian Mathematical Journal. — 2015. — **67**, no. 5. — P. 735 – 747.

13. Лось В. М. Класичні розв'язки параболічної мішаної задачі і 2b-анізотропні простори Хермандера / В. М. Лось // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. — **12**, № 2. — С. 276 – 290.

14. Лось В. М. Параболічні мішані задачі для систем Петровського в просторах узагальненої гладкості / В. М. Лось // Доповіді НАН України. — 2014. — № 10. — С. 24 – 32.

15. Лось В. М. Неоднорідні параболічні мішані задачі і простори узагальненої гладкості / В. М. Лось, О. О. Мурач // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2014. — **11**, № 2. — С. 249 – 267.

16. Лось В. Н. Параболические смешанные задачи в пространствах обобщенной гладкости / В. Н. Лось, А. А. Мурач // Доповіді НАН України. — 2014. — № 6. — С.23 – 31.

17. Лось В. М. Про гладкість розв'язків параболічних мішаних задач / В. М. Лось, О. О. Мурач // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2013. — **10**, № 2. — С. 219 – 234.

18. Los V. Parabolic problems and interpolation with a function parameter / V. Los, A. A. Murach // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2013. — **19**, no. 2. — P. 146 – 160.

19. Los V. M. Sobolev's problem for elliptic systems / V. M. Los // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2002. — **8**, no. 4. — P. 58 – 71.

20. Лось В. М. Параболічна гранична задача в області, межа якої складається з многовидів різних розмірностей / В. М. Лось // Доповіді НАН України. — 2002. — № 1. — С. 47 – 53.

21. Los V. Sobolev's problem in complete scale of Banach spaces / V. Los, Ya. Roitberg, A. Sklyarets // Operator Theory: Advances and Applications. — 2000. — **117**. — P. 301 – 312.

22. Los V. M. On general parabolic problems in Hörmander spaces / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // The International Conference in Functional Analysis Dedicated to the 125th Anniversary of Stefan Banach (Lviv, 18-23 September 2017). — Lviv, 2017.— P. 45.

23. Los V. M. On Isomorphism Theorems for Parabolic Problems in Hörmander Spaces and their Applications / V. M. Los, V. A. Mikhailets, A. A. Murach // International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky (Lviv, 20-24 September 2016). — Lviv, 2016.— P. 92 – 93.

24. Лось В. М. Про задачу Діріхле для параболічного рівняння другого порядку у просторах Хермандера / В. М. Лось // Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука, 19 - 20 травня, 2016р., Київ: Матеріали конф. Т.1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування. — Київ : НТУУ "КПІ 2016. — С. 189 – 190.

25. Los V. M. On applications of Hormander spaces to parabolic problems / V. M. Los, A. A. Murach // International V. Skorobohatko Mathematical Conference (August 25-28, 2015, Drohobych, Ukraine).— Lviv, 2015.— P. 99.

26. Лось В. М. Про деякі параболічні задачі у просторах Хермандера / В. М. Лось // International Conference of Young Mathematicians (June 3-6, 2015, Kyiv, Ukraine). K.: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2015.— P. 154.

27. Лось В. М. Про застосування інтерполяції з функціональним параметром у теорії параболічних диференціальних рівнянь / В. М. Лось, О. О. Мурач // Матеріали П'ятнадцятої Міжнародної наукової конференції імені академіка М.Кравчука (Київ, 15-17 травня 2014) .– К., 2014.— С. 201.

28. Лось В. Н. О параболических смешанных задачах в уточненной соболевской шкале / В. Н. Лось // Крымская международная математическая конференция (Судак, 22.09 - 4.10 2013).— Судак, 2013.— Т.2.— С. 46 – 47.

29. Лось В. М. Про параболічні задачі у просторах узагальненої гладкості / В. М. Лось, О. О. Мурач // Боголюбовські читання DIF-2013 (Севастополь, 23-30 червня 2013).— Севастополь, 2013.— С.133 – 134.

30. Los V. M. On parabolic problems in Hormander spaces / V. M. Los, A. A. Murach // International Conference dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banah (Lviv, 17-21 September 2012). — Lviv, 2012.— P. 215 – 216.

31. Los V. M. On some parabolic problems in a refined Sobolev scale / V. M. Los, A. A. Murach // Матеріали Чотирнадцятої Міжнародної наукової кон-ференції імені академіка М.Кравчука (Київ, 19-21 квітня 2012) .— К., 2012.— С. 33.

Анотації

Лось В. М. Параболічні крайові задачі у просторах Хермандера. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 — диференціальні рівняння. — Інститут математики НАН України, Київ, 2017.

У дисертаційній роботі побудовано теорію розв'язності загальних лінійних параболічних початково-крайових задач у класах гільбертових просторів Хермандера.

Виділено і досліджено клас $2b$-анізотропних гільбертових просторів Хермандера, для яких показником регулярності служить пара дійсних чисел s і $s/(2b)$ та додатний функціональний параметр, повільно змінний на нескінченності за Й. Караматою. Введено $2b$-анізотропні гільбертові простори Хермандера на гладкому компактному многовиді, який є бічною поверхнею циліндра, і доведено, що введені простори і топологія у них не залежать від вибору спеціальних локальних карт на цьому многовиді. Доведено, що зазначені простори Хермандера отримуються у результаті інтерполяції з функціональним параметром пар відповідних анізотропних гільбертових просторів Соболєва.

Встановлено теореми про коректну розв'язність у $2b$-анізотропних просторах Хермандера загальних лінійних параболічних крайових задач як з однорідними, так і з неоднорідними початковими умовами. Встановлено теореми про локальну регулярність у просторах Хермандера узагальнених розв'язків цих задач. Знайдено достатні умови неперервності

узагальнених частинних похідних заданого порядку розв'язків досліджуваних задач та достатні умови класичності узагальнених розв'язків задач. Ці результати поширено на лінійні крайові задачі для параболічних за Петровським систем з однорідними початковими умовами.

Ключові слова: параболічна початково-крайова задача, простір Хермандера, повільно змінна функція, ізоморфізм, інтерполяція з функціональним параметром.

Параболические краевые задачи в пространствах Хермандера. — Квалификационная научная работа на правах рукописи.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения. — Институт математики НАН Украины, Киев, 2017.

В диссертационной работе построена теория разрешимости общих линейных параболических начально-краевых задач в классах гильбертовых пространств Хермандера.

Выделен и исследован класс $2b$-анизотропных гильбертовых пространств Хермандера, для которых показателем регулярности служит пара чисел s, $s/(2b)$ и положительный функциональный параметр, правильно меняющийся на бесконечности по Й. Карамата. Введены $2b$-анизотропные гильбертовы пространства Хермандера на гладком компактном многообразии, которое является боковой поверхностью цилиндра, и показано, что введенные пространства и топология в них не зависят от выбора специальных локальных карт на этом многообразии. Доказано, что указанные пространства Хермандера получаются в результате интерполяции с функциональным параметром пар соответственных анизотропных пространств Соболева.

Установлены теоремы о корректной разрешимости в $2b$-анизотропных пространствах Хермандера общих линейных параболических краевых задач как с однородными, так и с неоднородными начальными условиями. Установлены теоремы о локальной регулярности в пространствах Хермандера обобщенных решений этих задач. Найдены достаточные условия непрерывности обобщенных частных производных заданного порядка решений исследуемых задач и достаточные условия классичности обобщенных решений задач. Эти результаты распространены на линейные краевые задачи для параболических по Петровскому систем с однородными начальными условиями.

Ключевые слова: параболическая начально-краевая задача, пространство Хермандера, медленно меняющаяся функция, изоморфизм, интерполяция с функциональным параметром.

Los V. M. Parabolic initial-boundary value problems in Hörmander spaces. — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis for obtaining the degree of Doctor of Sciences (Doctor Habilitatus) in physics and mathematics, speciality 01.01.02 — differential equations. — Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis gives a new theory of solvability of general linear parabolic initial-boundary value problems in classes of inner product Hörmander spaces.

The thesis consists of annotation, introduction, four chapters of its basic part, conclusions, and the list of references.

Chapter 1 gives a survey of the publications on the topic of the thesis and describes its main results. These results are set forth in next three chapters.

Chapter 2 investigates a broad class of $2b$-anisotropic inner product Hörmander spaces $H^{s,s/(2b);\varphi}$ given on a cylinder and parametrized by two number parameters s and $s/(2b)$ and a function parameter φ varying slowly in the sense of Karamata at infinity. These spaces play a main role in the thesis because they are suitable for investigation of $2b$-parabolic differential equations. We prove that these spaces are obtained by the interpolation with a function parameter of an appropriate pair of $2b$-anisotropic Sobolev spaces. We introduce $2b$-anisotropic Hörmander spaces on the lateral area of the cylinder and prove that these spaces together with their topology do not depend on the choice of special local charts on the lateral area. The interpolation properties of the spaces introduced are investigated.

Chapter 3 investigates the character of solvability of semihomogeneous parabolic initial-boundary value problems in $2b$-anisotropic Hörmander spaces and properties of generalized solutions to these problems. These problems are given in a bounded cylinder and are posed for homogeneous Cauchy data. We establish theorems on the well posedness of these problems in $2b$-anisotropic Hörmander spaces; namely, we prove that the operators generated by the problems realizes isomorphisms between appropriate anisotropic Hörmander spaces. We also establish theorems on local regularity of generalized solutions to semihomogeneous parabolic problems in Hörmander spaces. We find sufficient conditions under which given generalized partial derivatives of the solutions are continuous. These results are generalized for linear initial-boundary value problems stated for Petrovskii parabolic systems and homogenous Cauchy data.

Chapter 4 investigates the character of solvability of general nonhomogeneous parabolic initial-boundary value problems and properties of their generalized solutions in $2b$-anisotropic Hörmander spaces. We prove that the operators corresponding to these problems set isomorphisms on appropriate pairs of anisotropic Hörmander spaces. We establish theorems on local regularity of generalized solutions to these problems in Hörmander spaces. We also find suf-

ficient conditions for the generalized solutions to be classical. These results are specified for some parabolic problems of mathematical physics.

Key words: parabolic initial-boundary value problem, Hörmander space, slowly varying function, isomorphism, interpolation with function parameter.