ПРОГРАМА ВСТУПНОГО ІСПИТУ З МАТЕМАТИКИ

Математичний аналіз.

Числа. Поняття числа. Дедекіндові перерізи. Дійсні числа. Комплексні числа

Функції. Властивості неперервних на компакті функцій. Диференційовні функції однієї та багатьох змінних, їх властивості. Формула Тейлора та її застосування. Дослідження на екстремум і умовний екстремум функцій багатьох змінних. Диференційовні відображення та їх властивості. Теорема про НСЯР* функцію ([1, гл. 1-2, 8, 9, 14, 15]; [3, гл. 9]; [5, розд. 1,2. 3]).

Ряди. Числові та диференціальні ряди, ознаки збіжності. Степеневі ряди та їх властивості. Теореми Вейєрштрасса про апроксимацію ([2, гл. 1]; [3, гл. 7]; [4, розд. 10,11]).

Визначений Інтеграл. Умови існування. Зв'язок з невизначеним інтегралом. Застосування ([1, гл. 10]; [4, розд. 7, 9]).

Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорема існування, заміна змінних і обчислення кратних интеїралів. Формули Грінз, Гаусса-Остроградського і Стокса, Умова незалежності криволінійного інтегралу від шляху інтегрування. ([2, гл. 4-7]; [5, розд. 5, 6]).

Невласні інтеграли і інтеграли, залежні від параметра. Ознаки збіжності диференціювання і інтегрування за параметром. Ейлерові ішеїрали ([2, гл. З, 1).

Елементи теорії множин. Скінченні множини. Відображення множин. Еквівалентні множини. Порівняння потужностей. Зчисленні множини. Теорема про потужність підмножин ([7, гл.1]; [8, гл. 1-3]).

Метричні і топологічні простори. Збіжність у метричних просторі;, повнота і поповнення. Компакти. Критерій компактності. Стискаючі відображення Основні поняття теорії топологічних просторів. Приклади [8, г:І. 1-5].

Міра і інтеграл. Поняття алгебри та σ-алгебри множин і абстрактної міри. Теорема Каратеодорі про продовження міри. Міри Лебега і Лебега-Стілтьеса. Вимірні функції та їх властивості. Різні види збіжності послідовності вимірних функцій та їх зв'язок. Побудова і властивості інтегралу Лебега, порівняння з інтегралом Рімана. Теореми про граничний перехід під знаком інтегралу. Добуток мір і теорема Фубіні. Функції обмеженої варіації і поняття згряду. Інтеграл Стілтьсса. Абсолютно неперервні функції. Абсолютна неперервність і (сингулярність мір. Теорема Радона-Никодима. Диференціювання монотонної функції. Похідна від інтегралу за верхньою межею. Інтеграли по довільних мірах ([7, Іл. 3-6, 8, 9]; [8, гл. 5, 6); [11, гл. 1-5]).

Функції комплексної змінної. Елементарні функції комплексної змінної. Умова аналітичності функції. Теорема і формула Коші. Принцип максимуму модуля. Розклад в ряд Тейлора і Лорана. Класифікація особливих точок. Приклади найпростіших конформних відображень. Основні теореми про конформні відображення. Обчислення визначених інтегралів за допомогою лишків. Властивість єдиності аналітичних функцій. Аналітичне продовження. Поняття ріманової поверхні. Цілі функції, їх порядок і тип. Теорема Вейєрштрасса. Мероморфні функції. Теорема Міттаг-Леффлера ([9, гл. 5-12, 14-15];[6,розд.8-13]).

Лінійні нормовані простори. Поняття лінійного нормованого і гільбертового просторів, приклади і основні властивості. Простори С, Lp,lp; їх повнота і щільні множини цих просторів. Лінійні неперервні функціонали. Теорема Хана-Банаха. Спряжений простір, його властивості. Слабка збіжність лінійних функціоналів, теореми Хеллі. Слабка топологія в спряженому просторі. Ортонормовані системи векторів у гільбертовому просторі. Розклад вектора за ортогормованим базисом. Рівність Парсеваля. Ортогональні поліноми. Поліноми Ерміта та Лагерра. Ряди Фур'є та їх зв'язок з розкладом вектора за ортонормованим базисом. Мінімальна властивість частинних сум ряду Фур'є. Умови точкової збіжності рядів Фур'є за тригонометричною системою функцій ([8,гл. 1-4, 7,*];[11, гл. 6-7]).

Оператори. Поняття лінійного неперервного оператора, найпростіші властивості таких операторів. Простір лінійних обмежених операторів, теорема Банаха-Штейнгауза. Самоспряжені, унітарні та нормальні оператори. Ортопроектори. Резольвента і спектр оператора. Оператори Гільберта-Шмідта та інтегральні оператори. Компактні (цілком неперервні) оператори, їх властивості. Теорема Фредгольма про розв'язність рівнянь з компактними операторами. Інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду, теорія розв'язності, Оператори Вольтерра. Самоспряжені компактні оператори, їх спектральний розклад. Інтегральні оператори з ермітовим ядром, теорема про розклад за їх власними функціями. Інтегральні оператори з додатно визначеним ядром. Функції від операторів ([8, гл. 2, 4, 5-6, 9]; [10, гл. 20]; {11, гл. 8-10]).

Узагальнені функції. Простір D і поняття узагальненої функції. Основні операції над узагальненими функціями. Простір S і поняття узагальненої функції повільного зростання. Поняття про перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є узагальнених функцій ([8, гл. 4, 8]; [11, гл. 11]).

Література

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. 1. -М.: Наука, 1971.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч. 2. -М.; Наука, 1973.
3. Рудин У. Основы математического анализа . -М., Мир, 1976.
4. Давидов М.О. Курс математичного аналізу, ч. 1. -К.: Вища школа, 1990.
5. Давидов М.О. Курс математичного аналізу, ч. 2. -К.: Вища школа, 1991
6. Давидов М.О. Курс математичного аналізу, ч. 3. -К.: Вища школа, 1992.
7. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. -М.: Наука, 1974.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций функционального анализа. -М.: Наука, 1972.
9. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1. -М.: Наука, 1985.
10. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. -М.: Наука, 1981.
11. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Ф. Функциональный анализ. Курс лекций. -К.: Вища школа, 1990.

Диференціальні рівняння і математична фізика

Звичайні диференціальні рівняння. Теорема Пікара існування та єдиності розв'язку задачі Коші (з доведенням) [7, гл.I, Н, п. I]. Основні класи рівнянь, які інтегруються в квадратурах. Рівняння Рікатті. Особливі точки. Диференціальні рівняння n-го порядку. Рівняння Ейлера [7, гл.I, п.2-4; гл.II, п,2; rn.IV, п.1,2].

Системи диференціальних рівнянь. Загальний розв'язок. Теореми існування та єдиності, а також неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних та параметрів [7, гл. VII, п.1-4, 6; гл. II, п. 14, 15; гл. III, IV, п. 23,24].

Загальні методи розв'язування диференціальних рівнянь:метод послідовних наближень, метод ломаних Ейлера, метод Рунге-Кута. [2, гл. VII, п. 80, 88, 89, 90, 92].

Теорія лінійних рівнянь n-го порядку. Розв'язок лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Основні властивості розв'язків. Однорідні та неоднорідні лінійні рівняння. Метод варіації довільних сталих [7, гл. V, п. 1-4; гл. VI, п. 1,2].

Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами
Фундаментальна матриця розв'язків. Формула Остроградського-Ліувілля. Перші інтеграли системи диференціальних рівнянь, їх існування та застосування ([7, гл. V, п. 2; гл. VII, п. 2, 4]; [9, гл. V, п. 33; гл. VI, п. 41-45]).

Краєві задачі. Функція Гріна. Задача Штурма-Ліувілля. Власні значення та власні функції [10, гл. VII, п. 1-4; гл. XI, п. 1-4].

Поняття про стійкість за Ляпуновим. Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням. ([7, гл. VII, п. 6, 0; гл. 6, п. 49]; [6, гл. V, п. I]).

Диференціальні рівняння в частинних похідних. Лінійні однорідні та неоднорідні рівняння в частинних похідних першого порядку. Геометрична інтерпретація. Загальний розв'язок. Зв'язок з розв'язком систем звичайних рівнянь. Постановка і розв'язок задачі Коші [7, гл. VII, п. I, 24]. Класифікація лінійних рівнянь в частинних похідних другого порядку [2, гл. I, п. I]. Різні постановки задач для еліптичних, гіперболічних і параболічних рівнянь. Коректність постановки задач [2, гл. II, п. I; гл. III, п. I; гл. IV, п. I]. Типові представники еліптичних, гіперболічних і параболічних рівнянь, їх фундаментальні розв'язки та знаходження розв'язків простих граничних задач (інтеграл Пуасона для рівнянь теплопровідності, функція Гріна теорії потенціалу для кругу та шару, задача Коші для хвильового рівняння, формула Д'Аламбера, функція Рімана). ([1, гл. III, п. 11-16]; [2, гл. IV, п. 6; гл. VI]; [3, гл. XVII, п. 1-7]; [4-лекц. V]). Змішані задачі для гіперболічних і параболічних рівнянь, розв'язок рівняння коливання кінцевої струни. Метод Фур'є. Задачі на власні значення для еліптичних рівнянь і(1,гл. V, п. 21]; [2, гл, П, п. 3]).

Узагальнені функції. Визначення. Простори основних і узагальнених функцій. Основні операції. Узагальнені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь. Перетворення Фур'є і Лапласа та їх застосування до розв'язків краєвих задач ([1, гл. II, п. 5-10].

Інтегральні рівняння. Теореми Фредгольма та їх наслідки. Інтегральні рівняння Вольтера і Фредгольма та їх розв'язок методом послідовних наближень. Рівняння із симетричним ядром. Теорема Гільберта- Шмідта ([4, лекц. XVIII]; [1, гл. IV]; [8, гл. I, II, III]).

Література

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.-М.:Наука, 1981.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики.-М.:Наука, 1972.
3. Кошляков Н.С., Глинер Э.Е., Смирнов ММ. Дифференциальные уравнения математической

физики.-М.:Физматгиз, 1962.
4. Соболев С.Л. Уравнения математической физики.-М.:Наука, 1971,
5. Михлин С.Г. Курс математической физики -М.гНаука, 19.68.
6. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.-М.:Наука, 1974.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.-М.:Физматгиз, Наука, 1965.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории интеграаьных уравнений.-М.:Наука, 1965.
9. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений-М.гНаука, 1970.
10. Коддингтон Э.Д., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.-М.:ИЛ, 1958.
11. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях.-М.:ГИТТЛ, 1954,

Елементи геометрії і топології.

Криволінійні координати в n-вимірному просторі. Визначення криволінійної регулярної системи координат. Метрична форма евклідового простору в криволінійних координатах [1, 2].
Теорія кривих. Кривина та скрут кривої. Формули Френе. Теорема про визначення кривої в просторі за допомогою кривини та скруту [1, 2, 5].
Теорія поверхонь. Перша та друга квадратична форма поверхні. Середня та гауссова кривина поверхні. Теорема Гаусса — Бонне. Геодезичні лінії на поверхні. Мінімальні поверхні. Метрики сталої кривини. Геометрія Лобачевського. [1, 2, 5].
Тензори. Алгебраїчні операції над тензорами. Диференціальні операції з тензорами, коваріантне диференціювання. Тензор кривини [1, 2].
Загальна топологія. Топологічні і метричні простори. Аксіоми відокремленості та зліченності. Неперервні відображення. Лема Урисона.. Компактні простори і їх властивості. Зв'язність та лінійна зв'язність. Двовимірні компактні многовиди [1, 4].
Алгебраїчна та диференціальна топологія. Гомотопні відображення. Фундаментальна група топологічного простору. Симпліціальннй комплекс. Ейлерова характеристика. Групи гомологій симпліціального комплексу. Диференційовані многовиди. Дотичний простір. Диференціальні форми на многовндах, когомології де-Рама [1, 2, 3].

Література

1. Борисенко О. А. Диференціальна геометрія і топологія. Харків: Основа, 1995.- 304 с.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979.— 760 с.
3. Дубровин Б. А,, Новиков С, П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Дополнительные главы М.: Наука, 1979. — 760 с.
4. Келли Дж, Л. Общая топология М.: Наука.— 1968.— 383 с.
5. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука,— 1969.—с.

Теорія ймовірності та математична статистика

Аксіоми теорії ймовірності [1-4]. Випадкові величини, функції розподілу, числові характеристики випадкових величин [1-4].
Характеристичні функції [1-3,4]. Розподіли: біноміальні, пуасоновські, нормальні [2]. Нерівність Чебишова [1,3]. Закон великих чисел [1]. Центральна гранична теорема [1, 41. Ланцюги Маркова з дискретним часом і кінцевою множиною станів [1,2]. Пуасонівський процес [4]. Процеси розмноження та смерті [4].
Методи оцінювання параметрів розподілів (метод моментів, метод максимальної правдоподібності) [1, 4]. Властивості оцінок (незміщенність, самостійність, ефективність) [1,4]. Лема Неймана-Пірсона [1,4].

Література

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.:Наука, 1965.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.IМир, 1967.
3. Скороход А.В. Элементы теории вероятностей и случайных процесов. К.: Киевский ун-т., 1974.
4. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. К.: Вища школа, 1979.

Алгебра.

Теорія чисел. Конгруенції в теорії чисел та їх властивості. Повна система лишків. Теореми Ейлера і Ферма [1].
Теорія груп. Визначення групи, підгрупи, нормального дільника, факторгрупп. Розклад групи за

нормальним дільником. Приклади скінченних, нескінченних, абелевих, неабелевих, циклічних груп. Гомоморфізми груп. [3,4].
Елементи загальної алгебри. Кільця, підкільця, ідеали, модулі та їх гомоморфізми. Алгебри, приклади [3, 4].
Лінійна алгебра. Лінійні простори і лінійні відображення. Операції з лінійними просторами (пряма сума, фактор-простори). Спряжений простір. Власні вектори та власні значення лінійних операторів. Жорданова нормальна форма лінійного оператора. Лінійні простори зі скалярним добутком. Евклідові простори. Ортогональні, унітарні та самоспряжені оператори, Симплектичні простори. Геометрія квадратичних форм. Приведення квадратичної форми до канонічного вигляду [2, 5].
Література
1. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1977
2. Кострикин А. Й., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.-304с.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.
4. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
5. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1966.
Теоретична механіка.
Предмет теоретичної механіки і її місце серед природничих наук. Моделі матеріальних точок, які вивчаються в теоретичній механіці: матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, система матеріальних точок. Методи теоретичної механіки. Поділ теоретичної механіки на кінематику, статику і динаміку [1,2,3].
Кінематика. Основні поняття кінематики. Задания руху точки. Траєкторія точки. Швидкість руху точки. Векторний спосіб визначення швидкості. Складний рух точки. Абсолютна, відносна і переносна швидкості точки. Теорема про додавання швидкостей. Прискорення руху точки. Визначення прискорення руху точки векторним способом. Природній координатний трьохгранник і природні координати. Теорема про додавання прискорень.
Найпростіші рухи твердого тіла. Швидкість поступального руху. Кутова швидкість. Формули Ейлера. Додавання поступальних рухів. Пара обертань і її еквівалентність поступальній швидкості. Додавання миттєвих поступальних рухів і миттєвих обертань.
Обертання твердого тіла навколо нерухомої точки. Кути і параметри Ейлера. Миттєва вісь обертання і миттєва кутова швидкість. Кінцеві повороти твердого тіла. Додавання кінцевих поворотів [1-3].
Статика. Поняття в'язів і реакцій. Сила тертя ковзання. Поняття про тертя кочення. Рівновага невільного твердого тіла. Система твердих тіл. Рівняння рівноваги системи тіл.
Центр ваги тіл. Координати центра ваги. Центр мас і його координати.
Голономні і неголономні в'язі. Число степенів вільності. Можливі переміщення. Робота сил на елементарному переміщенні. Принцип можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи в незалежних координатах і з множником Лагранжа.
Поняття стійкості рівноваги. Рівняння рівноваги в декартових координатах і в звичайній формі [1-3].
Динаміка точки. Рівняння руху. Поняття перших інтегралів. Методи інтегрування, чисельні методи. Теорема про кількість руху і моменту кількості руху. Теорема про зміну кінетичної енергії. Прямолінійний рух точки. Основні види руху.
Гармонічний осцилятор. Поняття фазової площини та фазового портрету. Вимушені коливання. Резонанс, поняття параметричного резонансу.
Математичний маятник. Сферичний маятник. Відносний рух і рівновага матеріальної точки. Рівняння відносного руху [1-3].
Динаміка системи. Моменти Інерції матеріальної системи відносно вісі площини і точки. Теореми Штейнера. Тензор інерції. Головні вісі інерції.
Принцип Даламбера-Лагранжа для системи матеріальних точок з ідеальними зв'язями. Загальні рівняння динаміки кількості руху (рух центра мас), моменту кількості руху, енергії.
Рівняння Лагранжа руху голономної системи в узагальнених координатах. Перші інтеграли рівнянь руху, інтеграл енергії. Рівняння Рауса. Стаціонарні рухи. Рівняння Лагранжа для відносного руху.
Малі коливання голономної системи поблизу положення рівноваги. Нормальні координати. Теорема Сільвестра про дійсність коренів характеристичного рівняння.
Стійкість руху. Визначення Ляпунова. Основні теореми другого методу Ляпунова. Теорема Лагранжа про стійкість рівноваги.
Рух тіла навколо нерухомої точки. Кінематичні і динамічні рівняння Ейлера. Рівняння Пуасона.

Перші інтеграли рівнянь руху важкого твердого тіла навколо нерухомої точки.
Поняття гіроскопа. Гіроскопічний ефект. Поняття про прецесійну теорію гіроскопічних приборів.
Принцип Гамільюна. Функція дії і її властивості. Принцип найменшої дії в формі Якобі і в формі Лагранжа. Принцип найменшого примусу Гауса [1-3].
Література
1. Аппель П. Теоретическая механика. М.IФизматгиз, I960.— т. 1,2.
2. Бухгольц Н. И. Основной курс теоретической механики.-М.:Наука, 1972.— ч. 1,2.
3. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики. М.: Наука, 1977.— т. 1,2.