Борк.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

ПОГОДЖЕНО:
Заступник Голови ВАК України
_____________ С.В.Іванов
« 18 » 03 1999 р.

ПРОГРАМА

кандидатського іспиту зі спеціальності
01.01.02 - Диференціальні рівняння

Київ - 1999

ПРОГРАМА-МІНІМУМ
кандидатського іспиту за спеціальністю
01.01.02 - диференціальні рівняння

Звичайні диференціальні рівняння

1. Задача Коші для системи диференціальних рівнянь у нормальній формі. Теорема Пікара. Теорема Пеано. Теореми Каратеодорі та Осгуда єдиності розв'язку задачі Коші. Продовжуваність розв'язку; теорема про існування непродовжуваного розв'язку [12, 13,21, 27].
2. Теореми про неперервну та диференційовну залежність розв'язку задачі Коші від початкових даних та параметрів. Асимптотичні розвинення розв`язків за початковими даними та параметрами [21, 23].
3. Лінійні системи. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Структура загального розв'язку. Метод варіації довільних сталих. Структура фундаментальної матриці лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами. Експонента матриці, її властивості. Типи фазових портретів двовимірних лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами [2, 11, 21, 23, 24].
4. Лінійні однорідні системи з періодичними коефіцієнтами; матриця монодромії; теорема Флоке-Ляпунова. Теореми про існування періодичних розв'язків лінійних неоднорідних періодичних систем. [11, 23].
5. Теорема про існування періодичного розв'язку слабо нелінійної періодичної системи. Метод малого параметра Пуанкаре [11, 13].
6. Основні поняття теорії стійкості за Ляпуновим. Стійкість лінійних систем. Критерії стійкості лінійних систем зі сталою матрицею. Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням. Функції Ляпунова; теореми Ляпунова про стійкість, асимптотичну стійкість та нестійкість. Теорема про нестійкість за першим наближенням [11, 12, 21, 23, 24].
7. Автономні системи та векторні поля. Динамічна система, потік, рух, траєкторія, положення рівноваги, інваріантна множина. Граничні множини траєкторій потоку та їх властивості. Існування граничних циклів автономних систем на площині. Траєкторії на двовимірному торі; число обертання [2, 13, 18, 21,23].
8. Індекс векторного поля відносно замкненої кривої; його властивості. Індекс особливої точки векторного поля. Теорема про суму індексів. Формули обчислення індексу особливої точки [2,13,18].
9. Консервативна система з одним ступенем вільності. Структура її фазового портрету. Математичний маятник; формула для періоду коливань [2, 3, 23].
10. Коливність розв'язків лінійних рівнянь другого порядку. Теорема порівняння. Теореми Штурма [23, 24].
11. Крайові задачі для лінійних рівнянь другого порядку. Функція Гріна. Узагальнена функція Гріна. Задача Штурма-Ліувілля. Властивості власних чисел та власних функцій. Теорема Стеклова [7, 9, 10, 23].
12. Асимптотичний метод Крилова-Боголюбова для слабо нелінійного осцилятора. Метод усереднення М.М.Боголюбова. Побудова першого та вищих наближень. Перша теорема Боголюбова обгрунтування методу усереднення (на скінченному проміжку часу). Формулювання другої теореми Боголюбова обгрунтування методу усереднення (на нескінченному проміжку часу) [5].
13. Диференціальні рівняння із запізненням. Задача Коші, існування та єдиність розв'язку. Метод кроків побудови розв'язку [28].

14. Диференціальні рівняння в комплексній площині. Теорема Коші існування голоморфного розв'язку системи в нормальній формі; метод мажорант. Лінійні системи з ізольованими особливостями; загальна теорема про вигляд фундаментальної матриці. Класифікація особливостей. Теорема про регулярність особливої точки першого роду. Структура фундаментальної матриці лінійної системи з особливістю першого роду. Класифікація особливих точок лінійних рівнянь n-го порядку. Системи типу Фукса [13, 20, 6,].

Диференціальні рівняння з частинними похідними

1. Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку. Метод характеристик побудови загального розв'язку, розв'язування задачі Коші. Квазілінійні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку. Побудова загального розв'язку, розв'язування задачі Коші [7, 19].
2. Інтегральні рівняння Фредгольма другого порядку. Метод послідовних наближень. Теореми Фредгольма. Ермітові ядра. Теорема Гільберта-Шмідта. Зведення задачі Штурма-Ліувілля до інтегрального рівняння за допомогою функції Гріна [7, 19].
3. Фізичні задачі, які приводять до диференціальних рівнянь з частинними похідними (рівняння, що описують процеси коливань, теплопровідності та дифузії, електромагнітне поле; рівняння гідро- та газової динаміки, рівняння Шредінгера). Варіаційні принципи. [7, 26].
4. Поняття про характеристики рівнянь з частинними похідними Теорема Ковалевської та її узагальнення [16, 19].
5. Класифікація та канонічні форми рівнянь в частинних похідних. Постановка основних крайових задач: задача Коші, перша, друга та третя крайові задачі, змішані крайові задачі. Коректність постановки крайових задач [4, 7, 26].
6. Класичні розв'язки основних крайових задач для рівнянь еліптичного типу. Рівняння Лапласа. Основні властивості гармонічних функцій (формула Гріна, теорема про середнє значення, принцип максимуму, теорема про усувну особливість). Розв'язування задач Діріхле та Неймана (внутрішньої та зовнішньої) методом потенціалів. Функція Гріна та її застосування до розв'язування крайових задач. Формула Пуассона для кулі та кола. Дослідження регулярності точок границі. Рівняння Гельмгольца: постановка крайових задач, умови випромінювання, принципи граничної амплітуди та граничного поглинання [4, 7, 19, 26].
7. Узагальнені розв'язки крайових задач для рівнянь еліптичного типу. Розв'язність основних крайових задач та гладкість узагальнених розв'язків. Деякі теореми вкладення функціональних просторів (нерівності Пуанкаре та Стеклова). Задача на власні значення для рівнянь еліптичного типу (зокрема, задача Штурма-Ліувілля). Властивості власних значень та власних функцій. Варіаційний метод розв'язку крайових задач. Метод Рітца. Розвинення у ряди за власними функціями [7, 14, 16].
8. Рівняння параболічного типу. Фундаментальний розв'язок рівняння теплопропровідності. Властивості розв'язків однорідного рівняння теплопровідності: гладкість, принцип максимуму та єдиність. Постановка основних задач та їх фізичний зміст. Задача Коші для рівняння теплопровідності. Формула Пуассона. Основні змішані задачі для рівняння теплопровідності: класичні та узагальнені розв'язки, коректна розв'язність. Розв'язування змішаних задач для рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних (метод Фур'є). Обгрунтування методу Фур'є [7, 16, 19, 26].

9. Рівняння гіперболічного типу. Постановка основних задач. Інтеграл енергії, єдиність. Розв'язування змішаної задачі методом Фур'є. Обгрунтування методу Фур'є. Узагальнені розв'язки. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння (формули Даламбера, Пуассона та Кірхгофа). Метод спуску. Розповсюдження хвиль у просторі, на площині та на прямій. Методи Даламбера та Рімана для розв'язування задач Коші і Гурса у випадку однієї просторової змінної [7, 16, 26].
10. Узагальнені функції: означення, приклади; простір D' диференціювання. Згортка узагальнених функцій: означення, властивості, умови існування. Узагальнені функції повільного зростання: означення, приклади, простір S' . Перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного зростання [7].
11. Побудова фундаментальних розв'язків лінійних диференціальних операторів з постійними коефіцієнтами. Розв'язок узагальненої задачі Коші для хвильового рівняння [7].
12. Узагальнені похідні та простори диференційовних функцій $H^k(Q)$. означення, властивості. Простори $H^1(Q)$ і $\overset{0}{H}{}^1(Q)$: означення, властивості, еквівалентні нормування. Вкладення просторів $H^k(Q$ у простори $C^l(\overline{Q})$ [16].
13. Некоректно поставлені задачі. Інтегральні рівняння Фредгольма першого роду та методи їх регуляризації. Загальні методи регуляризації некоректно поставлених задач [25].
14. Метод скінченних різниць. Загальні відомості. Метод скінченних різниць для розв'язування задачі Діріхле. Різницеві схеми для рівняння теплопровідності Стійкість різницевих схем. Ітераційні методи розв'язування сіткових рівнянь [19, 22, 26].

Варіаційне числення

1. Класифікація основних задач варіаційного числення (задачі Лагранжа, Больца, Майєра). Слабкий та сильний екстремуми. Варіація функціоналу. Необхідні умови слабкого екстремуму. Рівняння Ейлера-Лагранжа (для функціоналів з похідними першого порядку), Ейлера-Пуассона (для функціоналів з похідними вищих порядків), Ейлера-Остроградського (для функціоналів з частинними похідними) [1, 8, 17].
2. Необхідні умови сильного екстремуму; умова Вейєрштрасса. Друга варіація функціоналу. Необхідні умови екстремуму другого порядку. Умови Лежандра та Якобі. Рівняння Якобі. Достатні умови слабкого та сильного екстремуму [1, 8, 17].
3. Варіаційні принципи класичної механіки. Рівняння Лагранжа. Перетворення Лежандра, рівняння Гамільтона, рівняння Гамільтона-Якобі [1, 3, 17].
4. Задачі оптимального керування. Принцип максимуму Понтрягіна. [1, 17].

Література

1.Алексеев В.М., Тихомиров В.М, Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979, 432 с.

2.Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука, 1984, 272 с.

3.Арнольд В.И. Математические методы классической механики М.: Наука, 1989, 472 с.

4.Бицадзе А.В.Уравнения математической физики. М., Наука, 1976, 296 с.

5.Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М.: Наука, 1974, 504 с.
6.Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:Мир, 1968, 464 с.
7.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
8.Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление М.: ГИФМЛ, 1961. 228 с.
9.Гончаренко В.М. Основы теории уравнений с частными производными. Киев: Вища школа, 1985, 311 с.
10.Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними. Київ: Вища школа, 1995, 352 с.
11.Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. 1967. 472 с.
12.Еругин Н.П., Штокало И.З., Бондаренко Г.С. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Киев: Вища шк. 1971. 474 с.
13.Коддингтон Э.Д., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений М.: ИЛ.1958. 474 с.
14.Ладыженская О.Я. Краевые задачи математической физики. М.: Наука. 1973. 407 с.
15.Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г. Калайда О.Ф. диференціальні рівняння. - К.: Вища школа,1981. -504 с.
16.Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука. 1976.-391 с.
17.Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Київ: Либідь. 1994. -328 с.
18.Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГИФМЛ, 1949. -550 с.
19.Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.:Физматгиз. 1961, -400 с.
20.Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1970. -279 с.
21.Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Наука. 1982. -312 с.
22.Самарский А.А. Теория разностных схем. М.:, Наука, 1971. -552 с.
23.Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. Київ:, Либідь, 1994, -360 с.
24.Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.:ГИФМЛ, 1958. -468 с.
25.Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1976.
26.Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М., Наука, 1972. -736 с.
27.Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Мир. 1970. -720 с.